Analisi matematica 2		6 maggio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = -\log x - \log y + x + y - 2$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Dire se D è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Verificare che f è differenziabile in D, trovare i punti critici ed eventuali estremi locali.

c) Trovare, *per ogni* $k > 0$ *fissato*, i punti critici di f vincolati all'insieme: $\{(x,y) \in D \,|\, xy = k\}$.
Esistono estremi *globali* di f ?

2. Data la curva di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\, \mathbf{i} + e^t \sin t\, \mathbf{j} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Verificare che è una curva piana, semplice e regolare.

b) Calcolare i versori tangente e normale. Calcolare la curvatura.

c) Dimostrare che in ogni punto della curva il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ e il vettore tangente $\mathbf{r}'(t)$ formano un angolo di $\pi/4$.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = -6 \sin 3t$$

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione. Esistono soluzioni periodiche ?
b) Determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = y'(0) = 0$ e scriverne lo sviluppo di McLaurin fino al terzo ordine.
c) Scrivere un sistema di due equazioni del primo ordine equivalente all'equazione data. Scrivere l'integrale generale del sistema *omogeneo* associato e discutere la stabilità dell'origine (non è richiesto il ritratto di fase).

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in
$$D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$
L'insieme D è aperto, *convesso* e quindi anche connesso, non limitato.

b) La funzione f ha derivate parziali
$$f_x(x, y) = -\frac{1}{x} + 1, \quad f_y(x, y) = -\frac{1}{y} + 1$$
che sono funzioni continue in ogni punto dell'aperto D; dunque f è differenziabile in D.
I punti critici si trovano risolvendo il sistema
$$\begin{cases} -1/x + 1 = 0 \\ -1/y + 1 = 0 \end{cases}$$
che ha come unica soluzione il punto $(1, 1)$.
Calcoliamo le derivate seconde:
$$f_{xx}(x, y) = \frac{1}{x^2}, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \qquad f_{yy}(x, y) = \frac{1}{y^2}$$
Matrice hessiana nel punto critico:
$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Dunque si tratta di un punto di minimo, dove la funzione f assume il valore $f(1, 1) = 0$.

c) Osserviamo che per ogni $k > 0$ l'equazione $xy = k$ definisce una curva regolare. I punti critici vincolati sono i punti critici (liberi) della Lagrangiana
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -\log x - \log y + x + y - 2 - \lambda(xy - k)$$
Si ottiene allora il sistema
$$\begin{cases} -1/x + 1 - \lambda y = 0 \\ -1/y + 1 - \lambda x = 0 \\ xy - k = 0 \end{cases}$$
Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e sottraendo si ottiene
$$x = y$$
Sostituendo nella terza si trova:
$$x = y = \sqrt{k}$$

Il corrispondente valore del moltiplicatore è

$$\lambda = \frac{\sqrt{k} - 1}{k}$$

Nei punti trovati la funzione assume i valori

$$f(\sqrt{k}, \sqrt{k}) = -\log k + 2\sqrt{k} - 2$$

Estremi globali: La funzione f non è limitata superiormente, quindi non esistono massimi globali. Cerchiamo eventuali minimi: osserviamo che ogni punto di D appartiene ad un'unica curva di equazione $xy = k$; esplicitando il vincolo, per esempio nella forma

$$y = k/x, \qquad x > 0,$$

si vede che la funzione di *una* variabile

$$x \mapsto f(x, k/x) = -\log k + x + k/x - 2$$

assume, *nell'intervallo* $(0, +\infty)$ un minimo assoluto per $x = \sqrt{k}$. Dunque, la restrizione di f alla curva $xy = k$ assume il valore minimo nel punto $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ (intersezione dell'iperbole con la bisettrice del primo quadrante). Segue allora che il minimo assoluto di $f(x, y)$ è uguale a

$$\min_{k>0}\{-\log k + 2\sqrt{k} - 2\} = 0$$

raggiunto in $k = 1$; dunque la $f(x, y)$ ha il minimo assoluto nel punto $(1, 1)$.
Soluzione alternativa: Scriviamo la formula di Taylor (di ordine 2) con centro nel punto critico $(1, 1)$ e con il resto nella forma di Lagrange :

$$f(x, y) = f(1, 1) + \frac{1}{2} d^2 f(1 + \delta h, 1 + \delta k)$$

dove $h = x - 1$, $k = y - 1$ e $\delta \in (0, 1)$. Osserviamo ora che in *ogni punto di* D la forma quadratica associata alla matrice hessiana H_f è definita positiva; abbiamo allora

$$f(x, y) \geq f(1, 1) \; (= 0)$$

per ogni $(x, y) \in D$. Poiché per ogni $(x, y) \neq (1, 1)$ vale la disuguaglianza stretta, il punto $(1, 1)$ è di minimo globale stretto.

2.

a) La curva è piana poichè per ogni t il vettore $\mathbf{r}(t)$ è contenuto nel piano xy. Per verificare che la curva è semplice, osserviamo che $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Rightarrow \|\mathbf{r}(t_1)\| = \|\mathbf{r}(t_2)\|$. Ma, per ogni t, abbiamo $\|\mathbf{r}(t)\| = e^t$; poichè $t \mapsto e^t$ è iniettiva, $e^{t_1} = e^{t_2} \Rightarrow t_1 = t_2$.
La curva è regolare perchè la funzione $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e

$$\mathbf{r}'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\,\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\,\mathbf{j}, \qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}\,e^t > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

b) Il versore tangente è:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t)\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t)\,\mathbf{j}$$

Calcoliamo ora la derivata del versore tangente

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t)\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t)\,\mathbf{j}$$

Poiché $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$, abbiamo subito $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)$.
La curvatura si ricava dalla definizione

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

c) Detto θ l'angolo tra $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$, vale la formula:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|\,\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Dunque $\theta = \pi/4$, in ogni punto della curva.

3.

a) Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione omogenea associata

$$z'' + 6z' + 9z = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

che ha la radice doppia

$$\lambda = -3$$

L'integrale genarale dell'omogena è

$$z(t) = c_1\, e^{-3t} + c_2\, te^{-3t}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\psi(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

Sostituendo nell'equazione si trova

$$A = \frac{1}{3} \qquad\qquad B = 0$$

L'integrale generale dell'equazione allora

$$y(t) = c_1\, e^{-3t} + c_2\, te^{-3t} + \frac{1}{3}\cos(3t)$$

Ponendo $c_1 = c_2 = 0$ si trova che la soluzione $\varphi(t) = \frac{1}{3}\cos(3t)$ è periodica di periodo $T = 2\pi/3$.

b) La soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = y'(0) = 0$ si ottiene risolvendo il sistema

$$c_1 + \frac{1}{3} = 0, \qquad -3c_1 + c_2 = 0$$

Abbiamo allora

$$y(t) = -\frac{1}{3}\, e^{-3t} - te^{-3t} + \frac{1}{3}\cos(3t)$$

Usando l'equazione, si vede che la soluzione che soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$ soddisfa anche $y''(0) = 0$. Derivando ancora l'equazione abbiamo

$$y'''(t) = -6y'' - 9y' - 18\cos 3t$$

Ponendo $t = 0$ troviamo

$$y'''(0) = -18$$

Lo sviluppo di McLaurin cercato si scrive

$$y(t) = -\frac{18}{3!}t^3 + o(t^3) = -3t^3 + o(t^3)$$

c) Sistema equivalente: ponendo $y_1 = y$, $y_2 = y'$, abbiamo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 6y_2 - 6\sin 3t \end{cases}$$

Il sistema omogeneo si scrive

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -9z_1 - 6z_2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

che ha l'autovalore doppio $\lambda = -3$. L'origine è quindi un nodo stabile per il sistema.
Per scrivere l'integrale generale conviene utilizzare l'integrale generale dell'equazione equivalente

$$z_1(t) = c_1\, e^{-3t} + c_2\, te^{-3t}$$

e la relazione $z_2(t) = z_1'(t)$, da cui si ottiene subito

$$z_2(t) = -3c_1\, e^{-3t} + c_2\,(1 - 3t)e^{-3t}$$

In forma vettoriale si può scrivere

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} c_1 \\ -3c_1 + c_2 \end{pmatrix} + te^{-3t} \begin{pmatrix} c_2 \\ -3c_2 \end{pmatrix}$$