SERIE NUMERICHE (RIPASSO) E SERIE DI FUNZIONI E DI POTENZE

31-5-2021

- **SERIE GEOMETRICA**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \quad (\text{CONV.}) \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \quad (\text{DIV.}) \\ \text{È IRREGOLARE} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.

Discutere il comportamento delle seguenti serie e calcolarne la somma:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\log 2)^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2)^n}$

SOL.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n =$ (CONV)

$\displaystyle = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{25}{6}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} - \left(\frac{2}{5}\right)^0 - \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{5}{3} - 1 - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\log\alpha)^n$

- CONV se $-1<\log\alpha<1 \to \frac{1}{e}<\alpha<e$
- DIV se $\log\alpha \geq 1 \to \alpha \geq e$
- IRREG. se $\log\alpha \leq -1 \to 0<\alpha\leq e^{-1}$

4) RISP. CONV. per $\alpha<-2 \vee \alpha>0$

SOMMA : $\frac{1}{\alpha}$

• **CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\cancel{\Longleftarrow} \quad \text{NO!}$$

ATTENZIONE: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge ma $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ESERCIZIO 2. Verificare che le seguenti serie non convergono.

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty \neq 0 \implies \text{la serie non conv.}$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$ non conv. perché $\lim_{n\to+\infty} \sin n$ non esiste.

SERIE A TERMINI POSITIVI

- STUDIO CONVERGENZA MEDIANTE CONFRONTO ASINTOTICO CON LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{CONVERGE se } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Studiare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} = a_n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ la serie può convergere

$$a_n = \frac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\cancel{4}\,2}\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\cdot\frac{1}{n^2} \quad 2>1 \Rightarrow \text{la serie conv.}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ a_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}} \quad 3/2 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{conv.}$$

3) (NO CONFRONTO ASINTOTICO)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$0 < \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

4) A CASA: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e\right)$ (DIVERGE).

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2e}{n}$$

• CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora:

la serie conv se $0 \le \ell < 1$

la serie div. se $\ell > 1$

il criterio non aiuta se $\ell = 1$.

ESERCIZIO 4.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2\, \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, n^n}{\cancel{2^n}\, \cancel{n!}\, (n+1)^n\, \cancel{(n+1)}}$$

$$= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{\underset{\substack{\wedge \\ 1}}{e}}$$

$\Longrightarrow$ converge.

2) A CASA: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora

la serie conv. se $0 \leq \ell < 1$

la serie div. se $\ell > 1$

non aiuta se $\ell = 1$.

ESERCIZIO 5. Studiare al variare di $a>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha} a^{n}} = \lim_{n\to\infty} a\, n^{\alpha/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot e^{\frac{\alpha}{n}\ln n} =$$

$= a$
- >1 la serie diverge se $a>1$
- $= 1$ il crit. non aiuta
- $0<a<1$ converge

$a=1$? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}}$

conv. se $-\alpha > 1$, $\alpha < -1$

div. se $-\alpha \leq 1$, $\alpha \geq -1$

SERIE A TERMINI A SEGNO ALTERNO

1) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.

$\not\Longleftarrow$ NO.

Una serie si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum |a_n|$ converge.

2) CRITERIO DI LEIBNITZ

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con 1) $a_n > 0$

2) a_n decrescente

3) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ conv.

ESERCIZIO 6. Studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

CONV. ASSOLUTA: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE

CONV. SEMPLICE: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = a_n$

- $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n$
- $\frac{1}{n}$ è decr.
- $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ la serie conv. semplicem.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$

CONV. ASSOLUTA :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$$

con il crit. della radice :

$$\lim_{n \to \infty} \cancel{\sqrt[n]{}}\!\left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^{\cancel{n}} = \frac{2}{3} < 1 \Longrightarrow$$

la serie $\sum a_n$ conv. $\Longrightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$

conv. assolutamente $\Longrightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$ conv.

semplicemente.

SERIE DI FUNZIONI

ESERCIZIO 7. Stabilire se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos e^{nx}}{n^2}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Sol. $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad n = 0, 1, 2, \dots$ succ. di fz.

allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE a $f(x)$

se

1) $|f_n(x)| \leq a_n$ $\qquad$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Nell'esercizio:

1) $\left| \dfrac{\cos e^{nx}}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\qquad$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv.

1)+2) $\Longrightarrow$ la serie di fz conv. totalmente.

ESERCIZIO 8. Studiare la convergenza totale della serie di fz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{x e^{-x}}_{f(x)}\Big)^n$$

e determinarne la somma.

SOL.

1) $\left| x^n e^{-nx} \right| \le \left(\frac{1}{e}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ conv.

(serie geom. $q = \frac{1}{e} < 1$)

La serie di fz. converge totalmente.

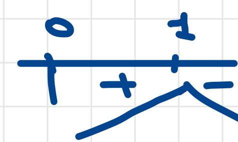
Studio $f(x) = x e^{-x}$ $\quad x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

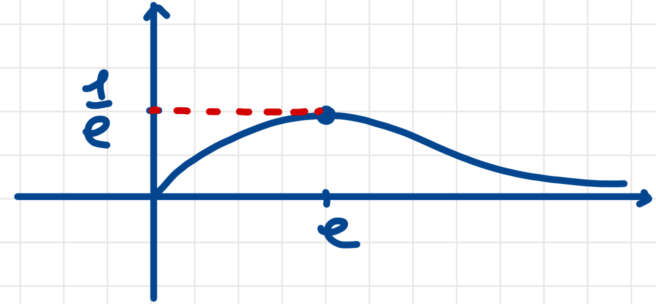
$f'(x) > 0 \iff x < 1$



MAX in $\left(1; \frac{1}{e}\right)$

SOMMA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(xe^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-xe^{-x}} - 1$$



$$= \frac{1-1+xe^{-x}}{1-xe^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{1-xe^{-x}}$$

ESERCIZIO 9. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$$

converge totalmente.

SOL.

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$2|x| \leq 1+x^2$$

$$x^2-2|x|+1 \geq 0$$

$$\left(|x|-1\right)^2 \geq 0 \quad \text{vero } \forall x$$

1) $\left|\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ conv.

$\Longrightarrow$ la serie conv. totalmente.

SERIE DI POTENZE

ESERCIZIO 10

Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} (x-0)^n$$

SOL.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}} \cdot 2^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$$

$$= 2^0 = 1 = \ell \qquad R = \frac{1}{\ell} = 1.$$

La serie converge per $|x-0| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$

- $\underline{x = 1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

La serie converge perché $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

infatti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/2^{\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = 0$$

- $\underline{x = -1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

- $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} > 0 \quad \forall n$ • $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ è decrescente

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = 0$

$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ conv. per Leibnitz.

La serie di potenze converge in $[-1; 1]$.

ESERCIZIO 11. Determinare il raggio di convergenza della serie lacunare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

SOL.

Una serie si dice LACUNARE se ha infiniti termini nulli (in questo caso mancano tutti i dispari)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{x^2=t}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot t^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^{\cancel{n}+1}} \cdot \cancel{3^n} \right) = \frac{1}{3} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{1/3} = 3$$

$$|t| < 3 \qquad x^2 < 3 \rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$x = \pm\sqrt{3}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{3^n}} \cdot \cancel{(3^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{diverge perché}$$

non è soddisfatta la C. N. di convergenza.

La serie di pot. data converge in $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

ESERCIZIO 12. Determinare l'int. di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$$

Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n+1} = \frac{1}{3} \qquad R = 3.$$

$$x \in (-3; 3)$$

<u>$x = 3$:</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\cancel{3^n}} \cdot \cancel{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ diverge.

$\underline{x=-3}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{\cancel{3^n}} (-1)^n \cdot \cancel{(3^n)}$ IRR.

$$I = (-3; 3)$$

Sia $f(x)$ la somma della serie:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n \right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{n+1}{3^n} x^n \, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n+1}}{3^n} \left[\frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1-0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

ESERCIZIO 13. Sviluppa in serie di potenze la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ intorno a $x = 0$.

SOL.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \underset{t=-x^2}{\uparrow =} \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

SVILUPPO DI MC. LAURIN DI ARCTGX :

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

ESERCIZIO 14. Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^n$$

Detta f la somma della serie calcolare $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$.

SOL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$R = \frac{1}{\ell} = 1 \qquad |x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$\underline{x=0}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n$ non conv. perché non soddisf. C.N. di conv.

$\underline{x=2}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ idem.

$I = (0; 2)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^n = 0 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)^2 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

$f(1) = 0$ $\quad f'(1) = \frac{1}{2}$ $\quad f''(1) = \frac{2}{3} \cdot 2! = \frac{4}{3}$