Equazioni differenziali 1

Definizioni e terminologia

Si dice *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n* una relazione del tipo

$$F\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)\big) = 0\,,$$

dove F è una assegnata funzione, definita in un aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, mentre $y(t)$ è la funzione incognita che compare nell'equazione con le sue derivate fino all'ordine n incluso.

Si dice *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale una funzione $\varphi(t)$, definita e derivabile n volte in un intervallo $I \subseteq R$, tale che

$$F\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)\big) = 0\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Con il termine *integrale generale* si intende una famiglia di funzioni, dipendente da uno o più parametri, che rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.

Si chiamano *equazioni lineari* (di ordine n) le equazioni della forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

Se $b(t) = 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*.

Infine, se un'equazione differenziale è scritta nella forma

$$y^n(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big) , \qquad \text{con} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} ,$$

si dice che è in *forma normale*.

Un'equazione lineare si può scrivere in forma normale se $a_n(t) \neq 0$.

Osservazione sulle notazioni:

in diversi contesti le equazioni possono essere scritte con altre notazioni, sia per la funzione incognita che per la variabile indipendente:

$$x(t) , \qquad y(x) , \qquad u(x) , \quad ...$$

Esempi

Data una funzione di due variabili $f(t,y)$, l'equazione

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)\,,$$

è del *primo* ordine in *forma normale*.

Le equazioni

$$y' = y(1-y)\,, \qquad y' = \frac{y}{t} - t\,, \qquad y' = ty + y^2 + t^2\,,$$

sono tutte del primo ordine in forma normale.

L'equazione

$$y(t) = t\,y'(t) + y'(t)^2\,,$$

è del primo ordine *non* in forma normale.

Problema di Cauchy (o dei valori iniziali).

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} = f\big(t, y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)\,,$$

che in un punto dato t_0 soddisfa le n condizioni aggiuntive (condizioni iniziali)

$$y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = y_1\,, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}\,,$$

dove y_0, y_1,...,y_{n-1} sono costanti assegnate.

Per soluzione di un problema di Cauchy si intende una funzione *definita in un intervallo I* che contiene t_0 e che soddisfa l'equazione in tutto I e le condizioni iniziali in t_0.

Esempio

L'equazione della caduta libera dei gravi (nel vuoto)

$$y''(t) = -g$$

è *lineare* del *secondo* ordine (in forma normale).

Un problema di Cauchy per questa equazione è: trovare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = H$, $y'(0) = 0$ (caduta da un'altezza H, da fermo).

Soluzione:
L'*integrale generale* dell'equazione si scrive

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + c_1\, t + c_2\,,$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie. Sostituendo le due condizioni iniziali si trova $c_1 = 0$, $c_2 = H$; quindi l'unica soluzione è la funzione

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + H.$$

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del primo ordine della forma

$$y' = a(t)b(y)\,,$$

dove $a(t)$ e $b(y)$ sono funzioni *continue* in intervalli di $\mathbb{R}$.

Una prima osservazione:

se un numero $\bar{y}$ risolve $b(\bar{y}) = 0$, allora la *funzione* costante $y(t) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione.

Infatti, poiché la derivata di una costante è zero, inserendo $y(t) = \bar{y}$ nell'equazione si ottiene $0 = 0$.

L'insieme delle altre soluzioni (non costanti) è dato *in forma implicita* dalla formula

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t)\, dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, se $y(t)$ ($t \in I$) è soluzione e $b(y(t)) \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Prendendo l'integrale indefinito (cioè le primitive):

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t)\, dt + c\,.$$

Nel primo integrale facciamo il cambio di variabile $y = y(t)$, $dy = y'(t)dt$ e otteniamo la formula

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t)\, dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Suggerimento per ricordare la formula:

scrivere l'equazione con la notazione di Leibniz

$$\frac{dy}{dt} = a(t)b(y)\,,$$

e trattare la derivata come un quoziente:

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt\,.$$

Integrando (a sinistra in y, a destra in t) si ricava la formula.

Esempi

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = 2t\,(y-1)^2\,.$$

Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali:

$$y(0) = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \qquad y(0) = 2\,.$$

Soluzione:

L'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 1$, che ovviamente soddisfa anche la condizione aggiuntiva $y(0) = 1$.

Le altre soluzioni sono definite (in forma implicita) dall'equazione

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = \int 2t\,dt + c\,.$$

Integrando si ottiene

$$-\frac{1}{y-1} = t^2 + c\,.$$

Infine, risolvendo rispetto a y:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\varphi(t)$ che passa per l'origine $(0,0)$ si ottiene risolvendo

$$0 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = 1\,.$$

Abbiamo allora

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + 1}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\psi(t)$ che passa per il punto $(0,2)$ corrisponde al valore di c che risolve l'equazione

$$2 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = -1\,.$$

Quindi

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 - 1}\,, \qquad t \in (-1,1)\,.$$

Tempo di svuotamento di un serbatoio.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -k\sqrt{y(t)}, \\ y(0) = H, \end{cases}$$

dove k, H, sono costanti positive. Calcolare in quale istante t la soluzione si annulla.

Soluzione:

Osserviamo subito che l'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale; le altre soluzioni sono date dalla formula

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\int k\, dt + c\,,$$

da cui la forma implicita

$$2\sqrt{y} = -kt + c\,.$$

La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 2\sqrt{H}$.

Risolvendo rispetto a y l'equazione

$$2\sqrt{y} = -kt + 2\sqrt{H}\,,$$

si ricava

$$y = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2}t\right)^2.$$

Il tempo di svuotamento $\left(\, y(\bar{t}) = 0 \,\right)$ è quindi

$$\bar{t} = 2\sqrt{H}/k\,.$$

Osservazione

Nel caso dell'equazione del primo esempio, si verifica facilmente che per ogni punto (t_0, y_0) del piano esiste *un'unica soluzione* passante per quel punto $\big($cioè tale che $y(t_0) = y_0\,\big)$ e definita almeno in un intervallo che contiene t_0.

Nel secondo esempio, abbiamo trovato una famiglia di soluzioni non costanti che 'incontrano' la soluzione costante $y = 0$ nei punti $(t_0, 0)$ sull'asse t. (verificare che sono 'raccordi' di classe $\mathcal{C}^1$)

Dunque, nel caso di quella equazione la proprietà di unicità *non* vale per le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati $(t_0, 0)$.

Si conclude che la soluzione di un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\, b(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

$a(t)$ e $b(y)$ funzioni continue, *non* è sempre univocamente determinata.

Si può dimostrare che la condizione $b(y_0) \neq 0$, garantisce l'unicità della soluzione (in un intorno di t_0).

Equazioni lineari del primo ordine

La generica equazione lineare del primo ordine ha la forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,.$$

Se $a_1(t) \neq 0$, possiamo dividere per questo coefficiente e scrivere l'equazione in *forma normale*

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)\,.$$

Assumiamo $a(t)$ e $f(t)$ *continue* in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si può ricavare una formula per l'integrale generale di queste equazioni:

Chiamiamo $A(t) = \int a(t)\,dt$ una qualsiasi primitiva di $a(t)$; moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per $e^{A(t)}$, abbiamo:

$$e^{A(t)}y'(t) + a(t)\,e^{A(t)}\,y(t) = e^{A(t)}f(t)\,.$$

A sinistra si riconosce la derivata di un prodotto:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{A(t)}y(t)\right] = e^{A(t)}f(t)\,.$$

Integrando si ottiene

$$e^{A(t)}y(t) = \int e^{A(t)}f(t)\,dt + c\,,$$

e infine

$$y(t) = c\,e^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int e^{A(t)}f(t)\,dt\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$

$\big($dove $A(t) = \int a(t)\,dt\big)$.

Osservazione. L'arbitrarietà nella scelta delle primitive nei due integrali indefiniti della formula equivale a una ridefinizione dell'*unica* costante arbitraria c.

Esempi

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' - \frac{2}{t}\, y = t^2\,.$$

Determinare la curva integrale che passa per il punto $t = 1$, $y = 0$.

Abbiamo $a(t) = -2/t$, $f(t) = t^2$. Dunque, $A(t) = -2\ln|t| = -\ln t^2$.

Inserendo nella formula risolutiva troviamo:

$$y(t) = c\,t^2 + t^2 \int \frac{1}{t^2}\, t^2\,dt = c\,t^2 + t^3\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione che verifica la condizione $y(1) = 0$ si ottiene risolvendo:

$$0 = c + 1\,, \qquad c = -1\,.$$

Circuito resistenza-induttanza.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)\,,$$

dove $I = I(t)$ intensità di corrente, $E(t)$ f.e.m., R resistenza, L induttanza.
Poniamo: $y(t) = I(t)$, $k = R/L$, $f(t) = E(t)/L$. L'equazione diventa

$$y'(t) + k\,y(t) = f(t)\,.$$

Integrale generale:

$$y(t) = c\,e^{-kt} + e^{-kt}\int e^{kt} f(t)\,dt$$

Esercizio

Calcolare l'integrale generale nei casi :

$$1)\ f(t) = \frac{1}{L}E_0\ \ (\,\text{costante}\,)\,; \qquad\qquad 2)\ f(t) = \frac{E_0}{L}\cos(\omega t)\,.$$

Problema di Cauchy per le equazioni lineari.

Data un'equazione lineare del primo ordine con coefficienti continui in un intervallo I, sia $t_0 \in I$ e sia $y_0 \in \mathbb{R}$.
Esiste allora un'unica soluzione dell'equazione che verifica la condizione $y(t_0) = y_0$. Tale soluzione è definita in I.

Dimostrazione.
Facciamo vedere che nella formula dell'integrale generale si può sempre scegliere il valore di c in modo da soddisfare il problema di Cauchy.

Infatti, se nella formula scegliamo come primitive le *funzioni integrali*

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,, \qquad \int e^{A(t)} f(t)\, dt\, = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

queste ultime si annullano in t_0; quindi, la condizione $y(t_0) = y_0$ è soddisfatta scegliendo $c = y_0$:

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

Discussione del problema di Cauchy.

Dalla risoluzione dei diversi problemi di Cauchy per le precedenti equazioni, evidenziamo le seguenti proprietà delle soluzioni ottenute :

- Per le equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, una soluzione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ esiste se t_0 e y_0 appartengono ad intervalli dove $a(t)$ e $b(y)$ sono continue. L' unicità non è garantita in queste sole ipotesi. L'intervallo di definizione di una soluzione dipende dai dati iniziali e in generale non è determinato *a priori*.
- Per le equazioni lineari $y' + a(t)y = f(t)$, abbiamo esistenza e unicità della soluzione passante per (t_0, y_0) se t_0 appartiene all'intervallo I dove $a(t)$ e $f(t)$ sono continue, e *per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$.
  Inoltre, la soluzione è sempre definita su tutto I.

Queste differenze si spiegano alla luce di risultati fondamentali della teoria delle equazioni differenziali, che prendono il nome di *teoremi di esistenza e unicità* (locale e globale) delle soluzioni del problema di Cauchy.

Grazie a questi teoremi si possono ricavare informazioni *qualitative* sulle soluzioni di un'equazione a prescindere dall'esistenza di metodi espliciti di risoluzione.

Teorema (Esistenza e unicità locale).

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in D e sia $(t_0, y_0) \in D$.

Esiste allora un intorno I di t_0 tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette una soluzione $\varphi(t)$ definita in I. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo comune di definizione. $\diamond$

A volte si usa la notazione $\varphi = \varphi(t; t_0, y_0)$ per evidenziare la dipendenza della soluzione dai dati iniziali.

Non dimostriamo il teorema, ma faremo numerose osservazioni sulle sue ipotesi e sulle proprietà delle soluzioni.

Sulle ipotesi del teorema:

i) La sola continuità della f garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema di Cauchy (Teorema di Peano), ma non l'unicità.

Questo spiega, nel caso delle equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, la mancanza di unicità delle soluzioni del problema di Cauchy in certi punti dove $b(y)$ è continua ma non derivabile.

ii) L'ipotesi di continuità della derivata parziale $\partial_y f$ si può indebolire.

Basta richiedere che f soddisfi la proprietà seguente:

per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$ esiste una costante L_K tale che

$$\left|f(t, y_1) - f(t, y_2)\right| \leq L_k |y_1 - y_2| \qquad \text{per ogni} \quad (t, y_1),\ (t, y_2)\ \in K\,.$$

In questo caso si dice che f soddisfa (localmente) la *condizione di Lipschitz* rispetto ad y, uniformemente rispetto a t.

Se $\partial_y f$ esiste continua, si dimostra che f soddisfa la condizione di Lipschitz; ovviamente il viceversa non vale in generale.

Sulla regolarità delle soluzioni:

Una soluzione φ del problema di Cauchy è di classe $\mathcal{C}^1(I)$.
Infatti, φ è derivabile (e dunque continua) e soddisfa $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in I$.
Ma la funzione $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ è continua per il teorema di continuità delle funzioni composte. Dunque, anche $\varphi'(t)$ è continua in I.

Iterando l'argomento, si dimostra che $f \in \mathcal{C}^k(D) \;\Rightarrow\; \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.

Sull'intervallo di esistenza delle soluzioni:

Dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale si ricava che la soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$ è definita *almeno* in un intervallo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, dove $\delta > 0$ dipende da f e dal punto (t_0, y_0); il grafico di $\varphi(t)$, $t \in I$, è contenuto in D.

Si può allora *prolungare* la soluzione a destra e a sinistra di questo intervallo considerando rispettivamente i problemi di Cauchy:

$$y(t_0 + \delta) = \varphi(t_0 + \delta)\,; \qquad y(t_0 - \delta) = \varphi(t_0 - \delta)\,.$$

Infatti, sempre per il teorema di esistenza e unicità locale, ciascun problema ha un'*unica soluzione*, definita rispettivamente in un intorno I_1 di $t_0 + \delta$ e in un intorno I_2 di $t_0 - \delta$.

Per l'unicità, tali soluzioni coincidono con $\varphi(t; t_0, y_0)$ rispettivamente in $I \cap I_1$ e in $I \cap I_2$ e quindi realizzano l'estensione della soluzione ad un intervallo più ampio.

Iterando il procedimento nelle due direzioni, si arriva a definire un *intervallo massimale di esistenza* $(t_{\min}, t_{\max})$ della soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$, dove:

$$t_{\max} = \sup \big\{ t \;\text{ t.c. }\; \varphi \text{ è definita in } [t_0, t] \big\};$$
$$t_{\min} = \inf \big\{ t \;\text{ t.c. }\; \varphi \text{ è definita in } [t, t_0] \big\}.$$

Si dimostra che per $t \to t_{\max}^-$ e per $t \to t_{\min}^+$ il grafico di φ esce *definitivamente* da ogni insieme chiuso e limitato contenuto D.

Esempio

Consideriamo l'equazione (logistica) $y' = y(1-y)$, con la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dove $0 < \alpha < 1$.

Osserviamo che per questa equazione le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale valgono in tutto $\mathbb{R}^2$.

Possiamo allora affermare che la soluzione $\varphi_\alpha(t)$ è *limitata*; infatti, il suo grafico non può intersecare in alcun punto le due rette $y = 0$ e $y = 1$, che sono pure soluzioni (costanti), per cui sarà sempre $0 < \varphi_\alpha(t) < 1$.

Segue allora che $t_{\max} = +\infty$ e $t_{\min} = -\infty$, cioè φ_α *è definita su tutto* $\mathbb{R}$.

Inoltre φ_α è strettamente crescente in quanto

$$\varphi'_\alpha(t) = \varphi_\alpha(t)\left(1 - \varphi_\alpha(t)\right) > 0$$

e si dimostra che ha le due rette $y = 0$ e $y = 1$ come asintoti orizzontali.

Verificare le previsioni qualitative risolvendo esplicitamente i problemi di Cauchy.

Teorema (Esistenza e unicità globale).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}$ e supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in $\bar{S}$. Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \qquad \forall\ (t, y) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ con valori iniziali $(t_0, y_0) \in S$ è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazione

L'ipotesi sulla crescita di f nella striscia $\bar{S}$ è verificata in particolare se:

- f è limitata in $\bar{S}$, oppure
- $\partial_y f$ è limitata in $\bar{S}$.

Nel caso delle equazioni *lineari*

$$y' = -a(t)y + b(t)\,,$$

le ipotesi del teorema valgono se i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue in $[a, b]$.

Infatti, in tal caso abbiamo

$$|-a(t)y + b(t)| \leq |b(t)| + |a(t)|\,|y| \leq h + k\,|y|\,,$$

dove

$$h = \max_{[a,b]} |b(t)|\,, \qquad k = \max_{[a,b]} |a(t)|\,.$$

Quindi i risultati di esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni lineari vengono ora ricavati come 'casi particolari' dal teorema di esistenza e unicità globale.

Equazioni differenziali 2

Equazioni lineari del secondo ordine

Sono le equazioni della forma

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)\,,$$

dove $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) e $g(t)$ sono funzioni continue in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $g(t) = 0$, l'equazione si dice *omogenea*. In questo caso, si usa denotare con $z(t)$ la funzione incognita.

Se $a_2(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, l'equazione si può scrivere in forma normale,

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)\,.$$

Se a e b sono costanti l'equazione si dice a coefficienti costanti.

Per le equazioni del secondo ordine il problema di Cauchy è:

determinare la soluzione che ad un istante t_0 soddisfa le condizioni

$$y(t_0) = y_0\,, \qquad y'(t_0) = y_1\,.$$

(Nel caso delle equazioni della dinamica, posizione e velocità iniziali).

Esempi

L'equazione delle *oscillazioni forzate*

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = f(t)\,, \qquad \delta \geq 0\,, \quad \omega \geq 0\,,$$

modellizza le vibrazioni di un sistema meccanico o la corrente elettrica in un circuito RLC.

Le equazioni della forma

$$t^2 y'' + a\,t\,y' + b\,y = g(t)\,, \qquad a\,,\ b \quad \text{costanti}\,,$$

si scrivono in forma normale dividendo per t^2 nei due intervalli $t > 0$ e $t < 0$. L'equazione omogenea

$$t^2 z'' + a\,t\,z' + b\,z = 0\,,$$

prende il nome di *Equazione di Eulero*.

Le soluzioni dell'equazione omogenea

$$z'' - 2t\,z' + 2n\,z = 0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

(equazione di Hermite) definiscono le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico.

Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari del secondo ordine abbiamo:

Teorema

Siano $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, funzione continue in un intervallo I.
Per ogni $t_0 \in I$ e per ogni y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, il problema

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in $\mathcal{C}^2(I)$.

Osservazioni:

Si tratta di un risultato di carattere *globale* (analogo a quello per le equazioni lineari del primo ordine).

Il teorema segue come caso particolare da un risultato generale di esistenza e unicità (globale) per i *sistemi* di equazioni differenziali.

Struttura dell'integrale generale

Denotiamo con $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ l'*operatore differenziale* definito da

$$y(t) \mapsto Ly(t) := y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)\,.$$

La generica equazione del secondo ordine in forma normale si scrive allora $Ly(t) = f(t)$.

L'osservazione fondamentale è che L è un *operatore lineare* tra gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^2(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$. Da questa proprietà si ricava:

Teorema

i) L'insieme delle soluzioni dell'equazione *omogenea* $Lz(t) = 0$ è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$) ;

ii) Nota una soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione *completa*:

$$L\bar{y}(t) = f(t)\,,$$

l'integrale generale si ottiene sommando a $\bar{y}(t)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Dimostrazione:

Osserviamo prima di tutto che $z(t) = 0$ è sempre soluzione dell'equazione omogenea: $L\,0 = 0$.

Se poi $z_1(t)$, $z_2(t)$ sono altre soluzioni, cioè se

$$Lz_1(t) = Lz_2(t) = 0\,,$$

allora

$$L\big[c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\big] = c_1 Lz_1(t) + c_2 Lz_2(t) = 0\,.$$

per ogni coppia $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dunque, qualunque *combinazione lineare* di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora soluzione dell'equazione.

La i) è dimostrata.

Se ora $\bar{y}$ risolve

$$L\bar{y}(t) = f(t)$$

e $z(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea $Lz(t) = 0$, abbiamo

$$L\big[\bar{y}(t) + z(t)\big] = L\bar{y}(t) + Lz(t) = f(t) + 0 = f(t)\,.$$

Dunque, aggiungendo a una soluzione dell'equazione completa una soluzione dell'equazione omogenea si ottiene ancora una soluzione dell'equazione completa.

Viceversa, se $y(t) \neq \bar{y}(t)$ è *un'altra soluzione dell'equazione completa*:

$$L\big[y(t) - \bar{y}(t)\big] = Ly(t) - L\bar{y}(t) = f(t) - f(t) = 0\,,$$

Da qui ricaviamo che la *differenza* di due soluzioni dell'equazione completa è soluzione dell'omogenea.

Si conclude che *tutte* le soluzioni dell'equazione completa si possono scrivere nella forma $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$, dove $z(t)$ risolve $Lz(t) = 0$. $\square$

Teorema

Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.

Dimostrazione:

Mostreremo che si possono sempre trovare due soluzioni z_1, z_2 dell'equazione omogenea tali che

- z_1 e z_2 sono *linearmente indipendenti*;
- ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è *combinazione lineare* di z_1 e z_2.

Fissato $t_0 \in I$, siano $z_1(t)$, $z_2(t)$, le soluzioni in I rispettivamente dei problemi di Cauchy:

$$Lz_1(t) = 0\,, \quad z_1(t_0) = 1\,,\ z_1'(t_0) = 0\,;$$

$$Lz_2(t) = 0\,, \quad z_2(t_0) = 0\,,\ z_2'(t_0) = 1\,.$$

Per il teorema di esistenza e unicità, z_1 e z_2 sono univocamente definite e diverse da zero in I.

Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, avremmo $z_2(t) = \lambda z_1(t)$ per ogni $t \in I$; ma $z_1(t_0) = 1$ e $z_2(t_0) = 0$, per cui deve essere $\lambda = 0$.

Allora si avrebbe $z_2(t) = 0$ per ogni $t \in I$, impossibile.

Sia ora $z(t) \in \mathcal{C}^2(I)$ una *qualsiasi* soluzione dell'equazione omogenea e poniamo

$$c_1 := z(t_0)\,, \qquad c_2 := z'(t_0)\,.$$

Definiamo ora la funzione

$$\bar{z}(t) := c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\,.$$

Dalla definizione delle soluzioni z_1 e z_2, si vede facilmente che $\bar{z}$ risolve il problema di Cauchy

$$L\bar{z}(t) = 0\,, \qquad \bar{z}(t_0) = c_1\,,\ \bar{z}'(t_0) = c_2\,,$$

cioè *con i medesimi valori iniziali di* $z(t)$.

Ancora per il teorema di esistenza e unicità si conclude che $\bar{z}(t) = z(t)$. $\square$

Dai precedenti teoremi si deduce che per scrivere l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine

$$Ly(t) = y''(t) + a(t)y'(t) + by(t) = f(t)$$

occorre:

a) trovare due soluzioni linearmente indipendenti $z_1(t)$, $z_2(t)$ dell'equazione omogenea $Lz(t) = 0$;

b) procurarsi una (qualsiasi) soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione completa.

L'integrale generale sarà allora:

$$y(t) = \bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\,,$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Esempio

Si consideri l'equazione

$$y''(t) + \frac{1}{t}\, y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = \frac{1}{t^2}\,.$$

L'equazione omogenea associata

$$z''(t) + \frac{1}{t}\, z'(t) - \frac{1}{t^2}\, z(t) = 0\,,$$

ha le due soluzioni indipendenti

$$z_1(t) = t\,, \qquad\qquad z_2(t) = 1/t\,,$$

come si verifica facilmente.

Inoltre la funzione costante $\bar{y} = -1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1\, t + c_2\, \frac{1}{t} - 1.$$

Equazioni a coefficienti costanti

Nel caso delle equazioni *omogenee* a coefficienti costanti

$$z''(t) + a\,z'(t) + b\,z(t) = 0\,, \qquad a,\ b\ \in \mathbb{R}\,,$$

è sempre possibile trovare l'integrale generale.

Cerchiamo una soluzione nella forma

$$z(t) = e^{\lambda\,t}\,,$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sostituendo nell'equazione si trova:

$$e^{\lambda\,t}\big(\lambda^2 + a\,\lambda + b\big) = 0\,.$$

Dunque l'esponenziale è una soluzione (definita in $\mathbb{R}$) se λ è una radice dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0\,.$$

Si distinguono tre casi:

1. $a^2 > 4b \Rightarrow$ due radici reali e distinte λ_1, λ_2; $\left[= (-a \pm \sqrt{\Delta})/2 \right]$
2. $a^2 = 4b \Rightarrow$ una radice reale doppia $\lambda = -a/2$;
3. $a^2 < 4b \Rightarrow$ due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$; $\left[= (-a \pm i\sqrt{-\Delta})/2 \right]$

Nel primo caso abbiamo

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad z_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

che sono linearmente indipendenti, per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono

$$z_1(t) = e^{\lambda t}, \qquad z_2(t) = t\, e^{\lambda t},$$

e quindi l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, t\, e^{\lambda t}.$$

Nel terzo caso, le due soluzioni

$$e^{(\alpha+i\beta)t}, \qquad e^{(\alpha-i\beta)t},$$

assumono valori complessi. Ricordando le formule

$$e^{(\alpha\pm i\beta)t} = e^{\alpha t}\big(cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)\big)$$

e per la *linearità dell'equazione*, possiamo definire le soluzioni *reali* indipendenti:

$$z_1(t) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$

$$z_2(t) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

da cui l'integrale generale

$$z(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\big).$$

Esempio

Scriviamo l'integrale generale dell'equazione delle oscillazioni smorzate (libere)

$$z''(t) + 2\delta z'(t) + \omega^2 z(t) = 0\,,$$

nei tre casi:

1. $\delta > \omega$,

$$z(t) = c_1\, e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2})\,t} + c_2\, e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})\,t}\,;$$

2. $\delta = \omega$,

$$z(t) = c_1\, e^{-\delta\,t} + c_2\, t\, e^{-\delta\,t}\,;$$

3. $\delta < \omega$,

$$z(t) = e^{-\delta\,t}\Big[c_1\,\cos\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t\big) + c_2\,\sin\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t\big)\Big]\,.$$

Nell'ultimo caso l'integrale generale si può scrivere

$$z(t) = A\, e^{-\delta\, t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, t + \phi)\,,$$

con A e ϕ costanti arbitrarie (oscillazioni smorzate di frequenza $\sqrt{\omega^2 - \delta^2}/2\pi$).

Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z''(t) + 2\, z'(t) + 5\, z(t) = 0\,; \\ z(0) = 1\,, \\ z'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Dalla soluzione ottenuta calcolare il periodo delle oscillazioni smorzate.

Risoluzione dell'equazione completa

In accordo con la teoria svolta, per ottenere l'integrale generale dell'equazione completa

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)\,,$$

è ora sufficiente trovarne una soluzione particolare.

Se il termine $f(t)$ ha una forma speciale (per esempio un polinomio o un esponenziale) si può cercare una soluzione di forma simile (*metodo di somiglianza*).

Schematicamente (assumendo $b \neq 0$) si procede nel modo seguente:

Se $f(t) = p_r(t)$, polinomio di grado r, si cerca

$$\bar{y}(t) = q_r(t)\,,$$

polinomio dello stesso grado, con coefficienti da determinarsi.

Se $f(t) = f_0\, e^{\lambda t}$, si cerca $\bar{y}(t)$ nella forma

i) $A\, e^{\lambda t}$, se λ non è radice dell'equazione caratteristica;

ii) $A\, t\, e^{\lambda t}$, se λ è radice semplice dell'equazione caratteristica;

iii) $A\, t^2\, e^{\lambda t}$, se λ è radice doppia dell'equazione caratteristica,

con A coefficiente da determinarsi.

Esempi

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 2y = t^2 \,.$$

L'equazione omogenea associata

$$z'' + 2z' + 2z = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \,.$$

Le radici sono $\lambda = -1 \pm i$.
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) \,.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = At^2 + Bt + C\,.$$

Sostituendo $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, nell'equazione si trova

$$2A + 2(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2\,.$$

Riordinando i termini:

$$(2A - 1)t^2 + (4A + 2B)t + 2(A + B + C) = 0\,.$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se

$$A = 1/2\,, \qquad B = -1\,, \qquad C = 1/2\,.$$

L'integrale generale è allora

$$y(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\,. \qquad \Box$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{\alpha t} .$$

L'equazione omogenea associata

$$z'' - 2z' + z = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 ,$$

con la radice doppia $\lambda = 1$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1 \, e^t + c_2 \, t \, e^t .$$

Se $\alpha \neq 1$, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = Ae^{\alpha t} .$$

Sostituendo nell'equazione si trova

$$A(\alpha^2 - 2\alpha + 1)\, e^{\alpha\, t} = e^{\alpha\, t}\,.$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se $A = 1/(\alpha - 1)^2$.

Se $\alpha = 1$ (radice doppia dell'equazione caratteristica) la soluzione va cercata nella forma

$$\bar{y}(t) = At^2 e^t\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$Ae^t\left[(t^2 + 4t + 2) - 2(t^2 + 2t) + t^2\right] = e^t$$

da cui, semplificando, si ottiene $A = 1/2$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive allora:

Se $\alpha \neq 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{(\alpha - 1)^2}\, e^{\alpha\, t}\,.$$

Se $\alpha = 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{2}\, t^2\, e^t\,. \qquad \square$$

Osservazione

Nella ricerca di una soluzione dell'equazione completa, può essere utile applicare il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, valido per le equazioni lineari:

Se $y_1(t)$, $y_2(t)$, risolvono rispettivamente le equazioni

$$y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1 = f_1(t)\,, \qquad y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2 = f_2(t)\,,$$

allora

$$\bar{y}(t) := k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\,, \qquad k_1\,, k_2\ \in \mathbb{R}\,,$$

soddisfa

$$\bar{y}'' + a(t)\bar{y}' + b(t)\bar{y} = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\,.$$

Esercizio

Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + y = t + e^{-t}$.

Equazioni di Eulero

Le equazioni omogenee del tipo

$$t^2 z'' + a\,t\,z' + b\,z = 0\,, \qquad a\,,\, b\ \in \mathbb{R}\,,$$

sono tra i pochi esempi di equazioni del secondo ordine a coefficienti *variabili* che si risolvono con metodi elementari.

Se $t > 0$, cerchiamo due soluzioni indipendenti nella forma $z(t) = t^\gamma$, con γ da determinarsi.

Calcolando $z'(t) = \gamma t^{\gamma-1}$, $z''(t) = \gamma(\gamma-1)t^{\gamma-2}$, e inserendo nell'equazione si ottiene:

$$t^\gamma\big(\gamma(\gamma-1) + a\gamma + b\big) = 0\,, \qquad \forall\, t > 0\,,$$

da cui l'*equazione caratteristica*:

$$\gamma^2 + (a-1)\gamma + b = 0\,.$$

Ancora si distinguono i tre casi:

due radici reali e distinte γ_1, γ_2, una radice reale doppia γ, due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Nel primo caso abbiamo

$$z_1(t) = t^{\gamma_1}\,, \qquad z_2(t) = t^{\gamma_2}\,,$$

per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma_1} + c_2\, t^{\gamma_2}\,.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono

$$z_1(t) = t^{\gamma}\,, \qquad z_2(t) = t^{\gamma} \ln t\,,$$

e quindi

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma} + c_2\, t^{\gamma} \ln t$$

è l'integrale generale.

Nel terzo caso, si può ancora passare dalla coppia di soluzioni complesse coniugate $t^{(\alpha \pm i\beta)}$,

alle soluzioni reali

$$z_1(t) = t^\alpha \cos(\beta \ln t), \qquad z_2(t) = t^\alpha \sin(\beta \ln t).$$

Da qui l'integrale generale:

$$z(t) = t^\alpha \big(c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \sin(\beta \ln t) \big).$$

<u>Esercizio</u>

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$t^2 z'' + 3t\, z' + z = 0,$$

nell'intervallo $t > 0$.

Metodo di variazione delle costanti

Per le equazioni lineari, esiste un metodo generale per trovare una particolare soluzione dell'equazione *completa* se si conoscono due soluzioni indipendenti dell'equazione *omogenea*: il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

Ci limitiamo a descriverlo in un esempio di interesse fisico: le oscillazioni forzate in assenza di attrito.

L'equazione del moto si scrive

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t)\,,$$

dove assumiamo $f(t)$ continua in $\mathbb{R}$, ma di forma qualsiasi.

L'equazione omogenea associata (oscillazioni libere)

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0\,,$$

che ha le due radici $\lambda = \pm i\omega$.

Le due soluzioni reali indipendenti sono dunque:

$$z_1(t) = \cos(\omega t)\,, \qquad z_2(t) = \sin(\omega t)\,.$$

Nel metodo di variazione delle costanti si cerca una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = c_1(t)\,\cos(\omega t) + c_2(t)\,\sin(\omega t)\,,$$

dove ora $c_1(t)$, $c_2(t)$ sono *funzioni* incognite, che vanno determinate in modo che $\bar{y}(t)$ risolva l'equazione.

Poiché le funzioni incognite sono due, possiamo anche imporre una condizione aggiuntiva: richiediamo che nell'espressione della derivata prima

$$\bar{y}'(t) = c_1'(t)\,\cos(\omega t) + c_2'(t)\,\sin(\omega t) - \omega\,c_1(t)\,\sin(\omega t) + \omega\,c_2(t)\,\cos(\omega t)\,,$$

sia

$$c_1'(t)\,\cos(\omega t) + c_2'(t)\,\sin(\omega t) = 0\,.$$

La derivata seconda si scrive allora:

$$\bar{y}''(t) = -\omega c_1'(t)\,\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\,\cos(\omega t) - \omega^2\big(\,c_1(t)\,\cos(\omega t) + \,c_2(t)\,\sin(\omega t)\big)\,.$$

Osserviamo che l'ultimo termine tra parentesi è esattamente $\bar{y}(t)$.

Inserendo nell'equazione, troviamo allora la condizione:

$$-\omega c_1'(t)\,\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\,\cos(\omega t) = f(t)\,.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni per c_1' e c_2':

$$\begin{cases} \cos(\omega t)\,c_1'(t) \;+\; \sin(\omega t)\,c_2'(t) \;= 0 \\ -\omega\sin(\omega t)\,c_1'(t) + \omega\cos(\omega t)\,c_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione poiché per ogni t il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a $\omega > 0$. Con semplici calcoli si ottiene:

$$c_1'(t) = -\frac{1}{\omega}f(t)\sin(\omega t)\,; \qquad c_2'(t) = \frac{1}{\omega}f(t)\cos(\omega t)\,.$$

Possiamo ancora richiedere che le primitive $c_1(t)$, $c_2(t)$, si annullino in un punto assegnato, per esempio l'origine.

Avremo allora

$$c_1(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin(\omega\tau)\,d\tau\,; \qquad c_2(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau\,.$$

La soluzione $\bar{y}(t) = c_1(t)\cos(\omega t) + c_2(t)\sin(\omega t)$ si scrive allora

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\big[-\sin(\omega\tau)\cos(\omega t) + \cos(\omega\tau)\sin(\omega t)\big]\,d\tau \;=$$

$$= \;\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau\,.$$

<u>Esercizio</u>

Calcolare $\bar{y}(t)$ nel caso $f(t) = f_0\cos(\omega t)$ (risonanza).

Equazioni differenziali 3

Sistemi di equazioni differenziali

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ e denotiamo con $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ una funzione incognita della variabile reale t a valori in $\mathbb{R}^n$.

L'equazione (in $\mathbb{R}^n$)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)$$

si dice *sistema di equazioni differenziali del primo ordine* in forma normale.

Una funzione $\underline{\Phi} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è soluzione (curva integrale) del sistema se vale

$$\underline{\Phi}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \underline{\Phi}(t)\big)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Il *problema di Cauchy per i sistemi* consiste nel determinare la soluzione che passa per un punto dato $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.

Se $\mathbf{f}$ non dipende da t, i sistemi del tipo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

si dicono *sistemi autonomi*.

Se

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,,$$

con $A(t)$ matrice $n \mathrm{x} n$ e $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ assegnate, il sistema si dice *lineare*.

Esempi ($n = 2$)

Il *generico* sistema di due equazioni differenziali nelle due funzioni incognite $y_1(t)$, $y_2(t)$, si scrive:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \qquad (t, y_1, y_2) \in D \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

Il generico problema di Cauchy è: dati $(t_0, y_1^0, y_2^0) \in D$, determinare la soluzione $y_1(t)$, $y_2(t)$, tale che $y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t) = y_2^0$.

Il sistema è autonomo se entrambe le funzioni f_1, f_2, non dipendono da t.

Un sistema *lineare* di due equazioni ha la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

Un'equazione differenziale di ordine n si può sempre ridurre ad un sistema equivalente di n equazioni del primo ordine. Per esempio, data l'equazione

$$y'' = f(t, y, y'),$$

poniamo $y_1 = y$, $y_2 = y'$.
Abbiamo allora il sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = f(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

In questo caso, il problema di Cauchy equivale ad assegnare in t_0 i valori di y e di y'.

Teorema (Esistenza e unicità locale per i sistemi)

Sia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto. Supponiamo che $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\partial_{y_j} \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $j = 1, 2, ..., n$, siano continue in D e sia $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.

Allora il problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \end{cases}$$

ammette una soluzione $\underline{\Phi}$ definita in un intorno I di t_0.

Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con $\underline{\Phi}$ nell'intervallo comune di definizione.

Teorema (Esistenza e unicità globale per i sistemi).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\mathbf{f}$ verifichi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale in $\bar{S}$.

Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq h + k|\mathbf{y}| \qquad \forall\ (t, \mathbf{y}) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

con valori iniziali $(t_0, \mathbf{y}^0) \in S$, è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazioni.

i) Il teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni del problema di Cauchy per un'*equazione del secondo ordine*

$$y'' = f(t, y, y') \qquad y(t_0) = y_0\,, \;\; y'(t_0) = y_1\,,$$

segue dal teorema per i sistemi considerando il sistema equivalente di due equazioni. Analoghe considerazioni valgono per le equazioni di ordine n.

ii) Le ipotesi del teorema di esistenza globale sono verificate dai *sistemi lineari con coefficienti continui*.

Per esempio, il sistema lineare di due equazioni:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

con $a_{ij}(t)$, $b_i(t) \in \mathcal{C}^0([a, b])$ per ogni $i, j = 1, 2$, ha soluzioni definite in tutto $[a, b]$.

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Sono gli esempi più semplici di *sistemi autonomi*. Se $n = 2$, si utilizza di solito la notazione $\big(x(t), y(t)\big)$ per la funzione incognita.

Quindi il generico sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti si scrive, nel caso $n = 2$:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

con a, b, c, d, numeri reali assegnati.

Le soluzioni di questi sistemi sono definite su tutto $\mathbb{R}$ (per il teorema di esistenza globale) e definiscono curve regolari con sostegno (traiettoria) nel piano (x, y), detto *piano delle fasi*.

Un sistema lineare omogeneo ammette sempre la soluzione costante

$$\big(x(t), y(t)\big) = (0, 0)\,,$$

che è l'unica soluzione con dati iniziali nulli. La sua traiettoria coincide con l'origine, che prende il nome di *punto di equilibrio* del sistema.

Osservazione.

Nel caso di un *generico* sistema autonomo,

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \qquad f\,, g\ \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)\,,$$

si può dimostrare che le sole *traiettorie* possibili, oltre ai punti di equilibrio, sono curve semplici o curve chiuse (cicli). Inoltre, due traiettorie distinte non possono intersecarsi.

Gli eventuali punti di equilibrio sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Per i sistemi lineari di 2 equazioni a coefficienti costanti esistono metodi espliciti di risoluzione.

Usando il teorema di esistenza e unicità per i sistemi, si dimostra che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* di 2 (n) equazioni (anche a coefficienti variabili) è uno *spazio vettoriale di dimensione* 2 (n).

L'integrale generale di un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti si può ricavare con il *metodo di eliminazione*:

Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = c\,x + d\,y, \end{cases}$$

si deriva la prima equazione

$$x'' = a\,x' + b\,y'\,,$$

e si sostituisce y' dato dalla seconda:

$$x'' = a\,x' + b(c\,x + d\,y) = a\,x' + bc\,x + bd\,y\,.$$

Eliminando y usando ancora la prima, si ottiene

$$x'' = a\,x' + bc\,x + d\,x' - ad\,x$$

ovvero

$$x'' - (a + d)\,x' + (ad - bc)\,x = 0\,.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - (a + d)\,\lambda + (ad - bc) = 0\,,$$

si ottengono le soluzioni indipendenti e poi l'integrale generale per $x(t)$; infine, si determina la componente $y(t)$ dall'equazione

$$y = (x' - a\,x)/b\,.$$

Esempio

Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

Soluzione:

Derivando la prima equazione e sostituendo y' dalla seconda:

$$x'' = x' + 2y' = x' - 2x + 8y\,.$$

Sostituendo ora $y = (x' - x)/2$, si ottiene:

$$x'' - 5x' + 6x = 0\,.$$

Le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Abbiamo quindi

$$x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}\,, \qquad c_1\,,\, c_2 \;\in \mathbb{R}\,,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{1}{2} c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}.$$

Esercizio

Dimostrare che l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

si scrive

$$x(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big)\,,$$

$$y(t) = e^{-t}\big(-c_1 \sin t + c_2 \cos t\big)\,.$$

Disegnare una traiettoria nel piano delle fasi $\big($per esempio quella che passa per il punto $(2,0)\big)$ evidenziando il verso di percorrenza.

Osservazione

L'equazione caratteristica che si ricava dal metodo di eliminazione è l'equazione agli autovalori per la matrice A dei coefficienti del sistema:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0\,.$$

Infatti, se λ è un autovalore di A e $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ è un corrisponente autovettore, la funzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda\, t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

è una soluzione dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \lambda\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\,.$$

L'osservazione è alla base di un metodo generale per risolvere i sistemi (di ordine n qualsiasi) a coefficienti costanti.

Esempio

Torniamo al sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'equazione agli autovalori è

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

che come abbiamo già visto ha le due soluzioni reali

$$\lambda_1 = 2\,, \qquad \lambda_2 = 3\,.$$

Gli autovettori sono le soluzioni non nulle dei sistemi:

$$(A - 2\,I)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - 3\,I)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Il primo sistema è risolto da tutti i vettori tali che $h_1 = 2h_2$, il secondo da $k_1 = k_2$. Dunque:

gli autovettori relativi all'autovalore 2 sono diretti come $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$,

quelli relativi all'autovalore 3 sono diretti come $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

h e **k** sono linearmente indipendenti.

L'integrale generale è allora

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stabilità dell'origine

Si vede facilmente che se $\det A \neq 0$, l'origine $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio (soluzione costante) del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dice che l'origine è un punto di equilibrio:

- *asintoticamente stabile* se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0,
- *stabile* se gli autovalori di A hanno parte reale $= 0$,
- *instabile* negli altri casi.

Sia $\Phi(t)$ una soluzione passante per un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ del piano.

Se l'origine è asintoticamente stabile, si ha *sempre* $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = (0,0)$;

se l'origine è stabile, ma non asintoticamente, il punto $\Phi(t)$ percorre una traiettoria (orbita) chiusa che circonda l'origine.

In generale, si fa riferimento a queste proprietà per definire il *concetto di stabilità* di un punto di equilibrio di un sistema autonomo qualsiasi.

Esempi

L'origine è instabile per il sistema di p. 8 ed è asintoticamente stabile per quello di p. 9.

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$$

ha autovalori $\pm 2i$, perciò l'origine è stabile. Le traiettorie sono ellissi che girano intorno all'origine.

Esercizio

Discutere la stabilità dell'origine per i sistemi

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - 2y \end{cases}$$