Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 27/2/2014
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 6+2)

- Determinare l'insieme A dei numeri complessi z tali che la quantità

$$2\left(z^2+|z|^2\right)+3i\overline{z}$$

sia reale e positiva.

- Determinare poi, descrivendo le operazioni geometriche svolte, l'insieme

$$B := \{w = i(\overline{z}+i), z \in A\}.$$

Soluzione

Si ha:

$$\begin{aligned} 2\left(z^2+|z|^2\right)+3i\overline{z} &= 2[(x+iy)^2+x^2+y^2]+3i(x-iy) \\ &= 4x^2+3y+ix(3+4y). \end{aligned}$$

Affinché la quantità a secondo membro sia reale, occorre che la sua parte immaginaria si annulli. Ciò accade se $x=0$ oppure se $y=-3/4$. Nel primo caso si ha

$$x=0 \Longrightarrow 2\left(z^2+|z|^2\right)+3i\overline{z} = 3y > 0 \Longleftrightarrow y>0.$$

Nel secondo caso invece

$$y=-3/4 \Longrightarrow 2\left(z^2+|z|^2\right)+3i\overline{z} = 4x^2-\frac{9}{4} > 0 \Longleftrightarrow |x| > \frac{3}{4}.$$

Dunque

$$A = \{z = it,\ \text{con } t\in\mathbb{R}, t>0\} \cup \left\{z = t-\frac{3}{4}i,\ \text{con } t\in\mathbb{R}, |t|>\frac{3}{4}\right\}.$$

A è quindi l'unione di tre semirette (private dell'origine).

Riguardo al secondo punto, le operazioni geometriche richieste sono, nell'ordine: la riflessione rispetto all'asse reale (coniugio), la traslazione di un'unità nella direzione dell'asse immaginario, verso l'alto (aggiunta della quantità i), la rotazione in senso antiorario, con centro nell'origine, di ampiezza $\pi/2$ (moltiplicazione per $i = e^{i\pi/2}$). Tali operazioni sono movimenti rigidi, e dunque B è ancora l'unione di tre semirette (private dell'origine), precisamente

$$B = \{z = t \text{ con } t\in\mathbb{R}, t>-1\} \cup \left\{z = -\frac{7}{4}+it,\ \text{con } t\in\mathbb{R}, |t|\geq 3/4\right\}.$$

A questa conclusione si poteva ovviamente arrivare anche algebricamente.

2. (punti 2+4+3) Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\boldsymbol{i}) &= 2\alpha\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \\ f_\alpha(\boldsymbol{j}) &= -\alpha\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \\ f_\alpha(\boldsymbol{k}) &= -\alpha\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \alpha\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

(a) Trovare la matrice che rappresenta f_α nella base $\mathcal{B}$.

(b) Determinare le dimensioni di $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ e $\operatorname{Im}(f_\alpha)$ al variare del parametro α. Determinare una base di $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ in almeno un caso in cui esso non sia banale.

(c) Posto $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, determinare per quali valori di α l'equazione $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ ammette una soluzione $\boldsymbol{v}$.

Soluzione

(a) Ricordiamo che la matrice A_k associata alla funzione f_k è formata da tre vettori-colonna: $f_\alpha(\boldsymbol{i})$, $f_\alpha(\boldsymbol{j})$, $f_\alpha(\boldsymbol{k})$. Pertanto:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -\alpha \\ 3 & -\alpha & -2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

(b) Analizziamo il rango della matrice A_α:

$$\det A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -\alpha \\ 3 & -\alpha & -2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} = 2\alpha - 2\alpha^3 = 2\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)$$

Il determinante si annulla se $\alpha = 0 \vee \alpha = -1 \vee \alpha = 1$. In questi casi esiste sempre un minore di ordine due con determinante diverso da zero. Quindi, per il teorema *nullità più rango*:

se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1$: $\operatorname{Dim}(\operatorname{Im}((f_\alpha)) = 3$ e $\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(f_\alpha)) = 0$.

se $\alpha = 0 \vee \alpha = -1 \vee \alpha = 1$: $\operatorname{Dim}(\operatorname{Im}((f_\alpha)) = 2$ e $\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(f_\alpha)) = 1$.

(c) Chiedersi se esiste una soluzione all'equazione $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ equivale a cercare la controimmagine di $\boldsymbol{w}$ attraverso f_α. Occorre analizzare il rango della matrice *completa*:

$$A_\alpha|\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 3 & -\alpha & -2 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha & 4 \end{array}\right)$$

Il determinante del minore di ordine 3 formato dalla prima, dalla seconda e dalla quarta colonna è uguale a $-8\alpha(\alpha+1)$. Pertanto:

se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1$: $\operatorname{Rk}(A_\alpha|\boldsymbol{w}) = \operatorname{Rk}(A_\alpha) = 3$, esiste un'unica controimmagine di $\boldsymbol{w}$.

se $\alpha = -1 \wedge \alpha = 0$: $\operatorname{Rk}(A_\alpha|\boldsymbol{w}) = \operatorname{Rk}(A_\alpha) = 2$, esistono ∞^1 controimmagini di $\boldsymbol{w}$.

se $\alpha = 1$: $\operatorname{Rk}(A_\alpha|\boldsymbol{w}) = 3$, $\operatorname{Rk}(A_\alpha) = 2$, non esistono controimmagini di $\boldsymbol{w}$.

3. (punti 7+2) Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & -3-h & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

- Stabilire per quale valore del parametro h A_h è diagonalizzabile.
- Determinare gli autovalori della matrice $(A_2)^{-1}$.

Soluzione

- Cerchiamo gli autovalori della matrice A_h ponendo il polinomio caratteristico uguale a zero:

$$0 = \det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (-1-\lambda)(4-\lambda)\,(h-1-\lambda)^2$$

Da cui: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = h-1$.
Per prima cosa si cercano valori del parametro h per cui esistono autovalori non semplici (vale a dire con molteplicità algebrica maggiore di uno).

Sia $h = 0$. lo spettro di A_0 è $\mathrm{Sp}\,(A_0) = \{-1^3, 4\}$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi: $\mathrm{Rk}\,(A_0 + \mathbb{I}) = 2$ (si noti la presenza di un minore di ordine due con determinante non nullo). L'autospazio relativo all'autovalore 2 è bidimensionale. In questo caso la molteplicità geometrica non coincide con la molteplicità algebrica, pertanto la matrice non è diagonalizzabile.

Sia $h = 5$. lo spettro di A_5 è $\mathrm{Sp}\,(A_5) = \{-1, 4^3\}$.

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 - 4\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ancora: $\mathrm{Rk}\,(A_5 - 4\mathbb{I}) = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore 3 è bidimensionale. Anche in questo caso la molteplicità geometrica non coincide con la molteplicità algebrica, pertanto la matrice non è diagonalizzabile.

Sia $h \neq 0 \wedge h \neq 5$. lo spettro di A_h è $\mathrm{Sp}\,(A_h) = \{2, 3, (h-1)^2\}$.

$$A_h - (h-1)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -h & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5-h & 0 & 0 \\ -5 & -3-h & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le prime due colonne sono linearmente indipendenti (siamo nel caso: $h \neq 0 \wedge h \neq 5$ ed il minore formato dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante diverso da zero). Consideriamo il minore di ordine 3 formato dalla prima, dalla seconda e dalla quarta colonna e dalle prime tre righe: esso ha determinante nullo solo se $h = 1$. Solo in questo caso l'autospazio relativo all'autovalore 0 è bidimensionale, la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

- L'esistenza dell'inversa della matrice A_2 è garantita dal fatto che non ha autovalori nulli: $\mathrm{Sp}\,(A_2) = \{-1, 1^2, 4\}$.
Non è necessario determinare l'inversa di A per trovare gli autovalori di A^{-1} .
Infatti, se $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ per qualche $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, moltiplicando entrambi i membri *a sinistra* per A^{-1} si ottiene: $A^{-1}(A\boldsymbol{v}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v})$. Da cui: $\boldsymbol{v} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{v}$, ovvero: $\lambda^{-1}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}$. Pertanto λ^{-1} è autovalore di A^{-1} .

Nel nostro caso: $\mathrm{Sp}\,(A_2^{-1}) = \{-1, \frac{1}{4}, 1^2\}$.

4. (punti 7) Dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata, fornendo inoltre opportuni esempi in ciascun caso. Enunciare i principali risultati sulla convergenza di serie a termini non negativi. Dimostrare che le serie assolutamente convergenti sono convergenti.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 6/2/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6+2)

- Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\log(\cos(2x)) + 2x^2}.$$
- Stabilire per quali valori dei parametri $\ell \in \mathbb{R}, a > 0$ il seguente limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^a}\left(\frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\log(\cos(2x)) + 2x^2} - \ell\right)$$
esiste finito e diverso da zero.

Soluzione. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\cosh x - \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4) \\
&= \frac{x^4}{6} + o(x^4); \\
\log(\cos(2x)) + 2x^2 &= \log\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + 2x^2 \\
&= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) + 2x^2 \\
&= \frac{2}{3}x^4 - 2x^4 + o(x^4) \\
&= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\log(\cos(2x)) + 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{8}.$$

Circa la seconda domanda, è chiaro che deve essere $\ell = -1/8$ (per ogni altro valore di ℓ la quantità in parentesi tende a un limite finito e diverso da zero, dunque il limite è proposto vale $+\infty$ o $-\infty$). Resta da determinare a. Procedendo come sopra ma sviluppando all'ordine successivo si ottiene:

$$\begin{aligned}
\cosh x - \sqrt{1+x^2} &= \frac{x^4}{6} - \frac{11}{180}x^6 + o(x^6); \\
\log(\cos(2x)) + 2x^2 &= -\frac{4}{3}x^4 - \frac{64}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Quindi
$$\frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\log(\cos(2x)) + 2x^2} + \frac{1}{8} = \frac{-\frac{2}{45}x^6 - \frac{64}{45}x^6 + o(x^6)}{8\left(-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right)} \underset{x\to 0}{\sim} c\,x^2$$

per un opportuno $c \neq 0$. Dunque il limite indicato è finito e diverso da zero se e solo se $\ell = -1/8$, $a = 2$.

2. (punti 10) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - x}).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali. Lo studio della derivata seconda NON è richiesto. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La radice che appare nell'espressione della funzione è definita per $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Il logaritmo è definito quando $\sqrt{x^2 - x} > -x$, il che è ovviamente vero per $x \geq 1$, mentre per $x \leq 0$ ciò equivale a $x^2 - x > x^2$, il che accade (nell'intervallo considerato) se e solo se $x < 0$. In conclusione la funzione è definita per $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

Calcoliamo i limiti alla frontiera. È chiaro che

$$f(1) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Si ha inoltre, per $x \to -\infty$,

$$\log(\sqrt{x^2 - x} + x) = \log\left[-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1\right)\right] = \log\left[-x\left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \log\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

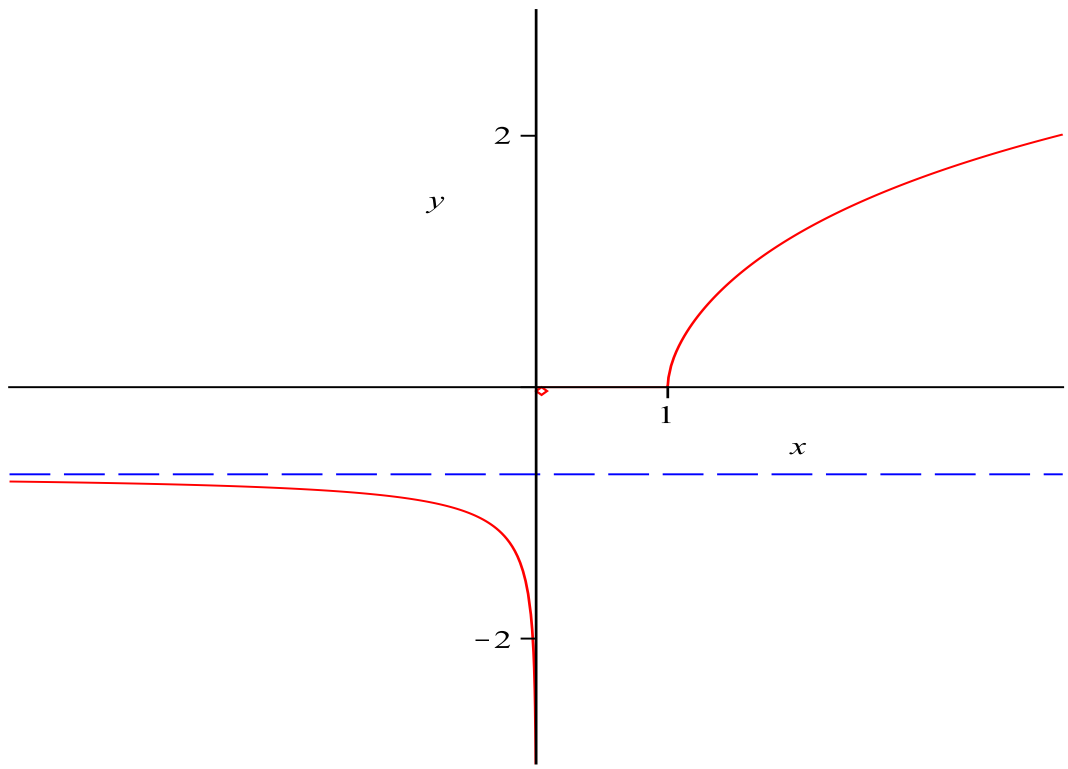
Quindi $f(x) \to -\log 2$ per $x \to -\infty$, e la retta $y = -\log 2$ è asintoto orizzontale in tale limite. È immediato notare che $f(x)/x \to 0$ per $x \to +\infty$, dunque non vi è alcun asintoto obliquo in tale limite.

Studiamo il segno e gli eventuali zeri della funzione. La funzione è positiva se e solo se $\sqrt{x^2 - x} > 1 - x$. Ciò è sempre vero se $x > 1$, mentre quando $x < 0$ ciò equivale a $x^2 - x > x^2 - 2x + 1$, cioè a $x > 1$, che è incompatibile con la richiesta $x < 0$. Quindi $f(x) > 0$ se $x > 1$, $f(x) < 0$ se $x < 0$ (si era già notato che $f(1) = 0$).

Calcoliamo infine la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x}}\left(1 + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}\right) = \frac{2\sqrt{x^2 - x} + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}\,(x + \sqrt{x^2 - x})},$$

la derivata essendo definita per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Vale $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \infty$, dunque nel punto $x = 1$ la tangente al grafico è verticale. La derivata prima è positiva se e solo se $2\sqrt{x^2 - x} > 1 - 2x$. Se $x > 1$ ciò accade sempre. Se $x < 0$ ciò equivale a chiedere che $4x^2 - 4x > 1 - 4x + 4x^2$, il che non accade mai. Dunque $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$, e f è ivi decrescente, mentre $f'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$, e f è ivi crescente. È chiaro che $x = 1$ è punto di minimo relativo per f. Il grafico qualitativo di f è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x(\sin x - 2)}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}.$$

Soluzione. La sostituzione $\sin x = t$ e la nota formula $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ mostrano quanto segue:

$$\int \frac{\cos x(\sin x - 2)}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-2}{2-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Chiaramente $t = 1$ è una radice del denominatore. La formula di Ruffini mostra che $2-t^2-t^3 = (1-t)(t^2+2t+2)$. Si noti che il polinomio di secondo grado appena scritto non ha radici reali ed è sempre strettamente positivo. Scomponendo in fratti semplici abbiamo:

$$\frac{t-2}{2-t^2-t^3} = \frac{1}{5(t-1)} - \frac{t+8}{5(t^2+2t+2)}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{t-2}{2-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t &= \int \left(\frac{1}{5(t-1)} - \frac{2t+2}{10(t^2+2t+2)} - \frac{7}{5[1+(t+1)^2]}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}\log|t-1| - \frac{1}{10}\log(t^2+2t+2) - \frac{7}{5}\arctan(t+1),\end{aligned}$$

dove si è posta per semplicità uguale a zero la costante additiva. In conclusione, tornando alla variabile originaria, una primitiva è data da

$$\frac{1}{5}\log|(\sin x) - 1| - \frac{1}{10}\log[(\sin x)^2 + 2\sin x + 2] - \frac{7}{5}\arctan(1+\sin x).$$

4. (punti 7) Discutere il concetto di polinomio di McLaurin-Taylor, la formula di Taylor con resto di Peano, formula di Taylor con resto di Lagrange, dimostrando quest'ultima.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 27/2/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6+2)

- Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\sqrt{1+x^2}}{\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}}.$$
- Stabilire per quali valori dei parametri $\ell\in\mathbb{R}, a>0$ il seguente limite
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^a}\left(\frac{\cosh x-\sqrt{1+x^2}}{\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}}-\ell\right)$$
esiste finito e diverso da zero.

Soluzione.

$$\begin{aligned}\cosh x-\sqrt{1+x^2}&=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)+o(x^4)\\&=\frac{x^4}{6}+o(x^4);\\\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}&=\log\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\frac{x^2}{2}\\&=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)+\frac{x^2}{2}\\&=\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\&=-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

Dunque:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\sqrt{1+x^2}}{\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}=-2.$$

Circa la seconda domanda, è chiaro che deve essere $\ell=-2$ (per ogni altro valore di ℓ la quantità in parentesi tende a un limite finito e diverso da zero, dunque il limite è proposto vale $+\infty$ o $-\infty$). Resta da determinare a. Procedendo come sopra ma sviluppando all'ordine successivo si ottiene:

$$\begin{aligned}\cosh x-\sqrt{1+x^2}&=\frac{x^4}{6}-\frac{11}{180}x^6+o(x^6);\\\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}&=-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).\end{aligned}$$

Quindi
$$\frac{\cosh x-\sqrt{1+x^2}}{\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}}+2=\frac{-\frac{11}{180}x^6-\frac{2}{45}x^6+o(x^6)}{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}\underset{x\to 0}{\sim}c\,x^2$$
per un opportuno $c\neq 0$. Dunque il limite indicato è finito e diverso da zero se e solo se $\ell=-2$, $a=2$.

2. (punti 10) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2+x} - x).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali. Lo studio della derivata seconda NON è richiesto. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La radice che appare nell'espressione della funzione è definita per $x \in (-\infty,-1] \cup [0,+\infty)$. Il logaritmo è definito quando $\sqrt{x^2+x} > x$, il che è ovviamente vero per $x \le -1$, mentre per $x \ge 0$ ciò equivale a $x^2+x > x^2$, il che accade (nell'intervallo considerato) se e solo se $x > 0$. In conclusione la funzione è definita per $x \in (-\infty,-1] \cup (0,+\infty)$.
Calcoliamo i limiti alla frontiera. È chiaro che

$$f(-1) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

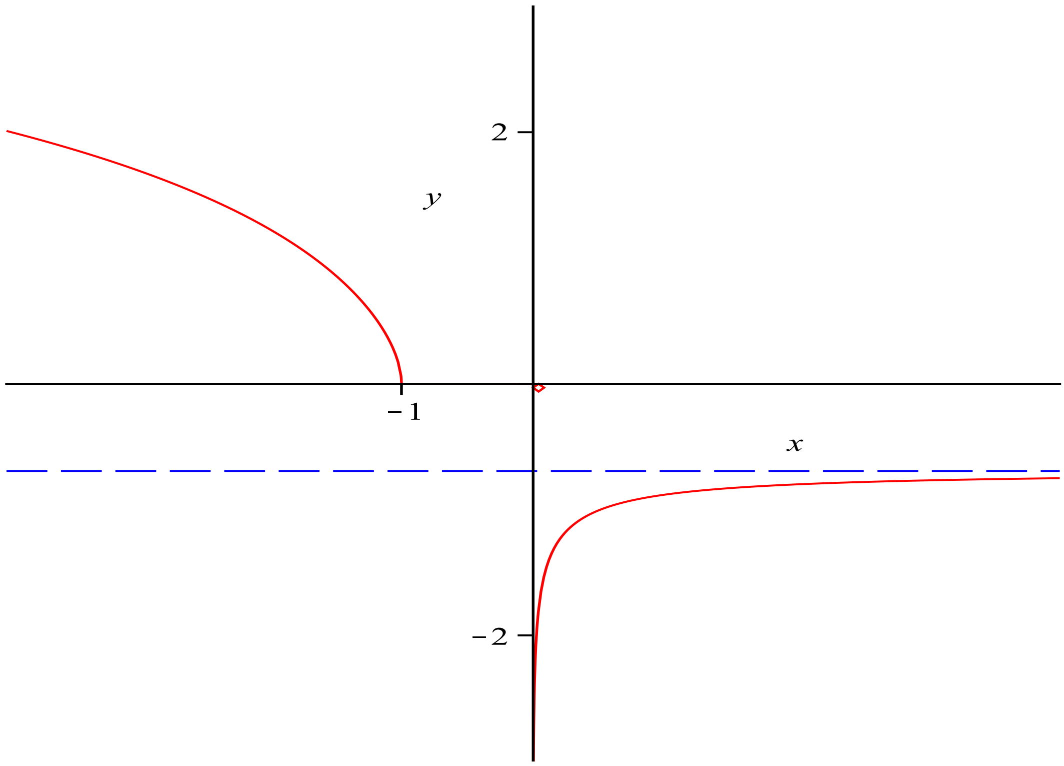
Si ha inoltre, per $x \to +\infty$,

$$\log(\sqrt{x^2+x} - x) = \log\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = \log\left[x\left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \log\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Quindi $f(x) \to -\log 2$ per $x \to +\infty$, e la retta $y = -\log 2$ è asintoto orizzontale in tale limite. È immediato notare che $f(x)/x \to 0$ per $x \to -\infty$, dunque non vi è alcun asintoto obliquo in tale limite.
Studiamo il segno e gli eventuali zeri della funzione. La funzione è positiva se e solo se $\sqrt{x^2+x} > x+1$. Ciò è sempre vero se $x < -1$, mentre quando $x > 0$ ciò equivale a $x^2+x > x^2+2x+1$, cioè a $x < -1$, che è incompatibile con la richiesta $x > 0$. Quindi $f(x) > 0$ se $x < -1$, $f(x) < 0$ se $x > 0$ (si era già notato che $f(-1) = 0$).
Calcoliamo infine la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - x}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1\right) = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)},$$

la derivata essendo definita per $x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$. Vale $\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -\infty$, dunque nel punto $x = -1$ la tangente al grafico è verticale. La derivata prima è positiva se e solo se $2x+1 > 2\sqrt{x^2+x}$. Se $x < -1$ ciò chiaramente non accade mai. Se $x > 0$ ciò equivale a chiedere che $4x^2+4x+1 > 4x^2+4x$, il che accade sempre. Dunque $f'(x) < 0$ in $(-\infty,-1)$, e f è ivi decrescente, mentre $f'(x) > 0$ per $x > 0$, e f è ivi crescente. È chiaro che $x = -1$ è punto di minimo relativo per f. Il grafico qualitativo di f è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x(\sin x - 3)}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}.$$

Soluzione. La sostituzione $\sin x = t$ e la nota formula $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ mostrano quanto segue:

$$\int \frac{\cos x(\sin x - 3)}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1} \, dx = \int \frac{t-3}{2 - t^2 - t^3} \, dt.$$

Chiaramente $t = 1$ è una radice del denominatore. La formula di Ruffini mostra che $2-t^2-t^3 = (1-t)(t^2+2t+2)$. Si noti che il polinomio di secondo grado appena scritto non ha radici reali ed è sempre strettamente positivo. Scomponendo in fratti semplici abbiamo:

$$\frac{t-3}{2-t^2-t^3} = \frac{2}{5(t-1)} - \frac{2t+11}{5(t^2+2t+2)}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{t-3}{2-t^2-t^3} \, dt &= \int \left(\frac{2}{5(t-1)} - \frac{2t+2}{5(t^2+2t+2)} - \frac{9}{5[1+(t+1)^2]} \right) dt \\ &= \frac{2}{5} \log|t-1| - \frac{1}{5} \log(t^2+2t+2) - \frac{9}{5} \arctan(t+1),\end{aligned}$$

dove si è posta per semplicità uguale a zero la costante additiva. In conclusione, tornando alla variabile originaria, una primitiva è data da

$$\frac{2}{5} \log|(\sin x) - 1| - \frac{1}{5} \log[(\sin x)^2 + 2\sin x + 2] - \frac{9}{5} \arctan(1 + \sin x).$$

4. (punti 7) Discutere il concetto di polinomio di McLaurin-Taylor, la formula di Taylor con resto di Peano, formula di Taylor con resto di Lagrange, dimostrando quest'ultima.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 27/2/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Sia A_α la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ -2 & 5 & \alpha-4 \\ 2 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore del parametro α il vettore $v_\alpha := (\alpha-3, 1, -1)^T$ risulta autovettore di A_α .
- Provare che per tale valore di α la matrice A_α risulta diagonalizzabile.
- Provare che per tale valore di α la matrice $(A_\alpha + \mathbb{I})^2$ è invertibile.

Soluzione.

- Scriviamo l'equazione agli autovalori imponendo che l'autovettore sia $\vec{v}_\alpha$:

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ -2 & 5 & \alpha-4 \\ 2 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha-3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  L'equazione matriciale suddetta risulta essere un sistema a tre equazioni e due incognite, α e λ :

$$\begin{cases} 3 = \lambda(\alpha-3) \\ -3\alpha+15 = \lambda \\ \alpha-7 = -\lambda \end{cases}$$

  le cui soluzioni sono: $\lambda = 3$ e $\alpha = 4$.
- Cerchiamo tutti gli autovalori di A_4 che risultano le radici del polinomio caratteristico:

$$\det(A_4 - \lambda\mathbb{I}) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

  Gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e, come già si sapeva, $\lambda_3 = 3$. Per provare che A_4 è diagonalizzabile occorre verificare che la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$ coincida con la molteplicità geometrica, vale a dire con la dimensione dell'autospazio relativo. Ciò accade soltanto se il rango della matrice $(A_4 - \mathbb{I})$ è uguale a due: tale circostanza è verificata perchè la matrice $(A_4 - \mathbb{I})$ ha le prime due colonne proporzionali e la terza nulla.
- Una matrice è invertibile se e soltanto se non ha autovalori nulli. La matrice $A_4 + \mathbb{I}$ ha autovalori 2 e 4. Inoltre è immediato mostrare che se λ è autovalore di M allora λ^2 è autovalore di M^2 . Pertanto gli autovalori di $(A_4 + \mathbb{I})^2$ sono 4 e 16, dunque tale matrice è invertibile.

2. (punti 6) Determinare tutte le soluzioni, nel campo complesso, dell'equazione

$$e^{z^2-2iz-1}=1.$$

Soluzione. L'equazione $e^w = 1$ ha come soluzioni tutti e soli i punti $w = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$. Qui si ha $w = z^2 - 2iz - 1 = (z-i)^2$, dunque le soluzioni cercate coincidono con le soluzioni di ciascuna delle equazioni $(z-i)^2 = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$. Distinguiamo i casi $k = 0, k > 0, k < 0$. Se $k = 0$ l'equazione $(z-i)^2 = 0$ ha l'unica soluzione $z = i$. Se $k \neq 0$ occorre scrivere il numero $2k\pi i$ in forma esponenziale. Nel caso $k \in \mathbb{N}$ si ha $2k\pi i = 2k\pi e^{i\pi/2}$, mentre nel caso $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ si ha $2k\pi i = (-2k\pi)e^{-i\pi/2}$. Quindi:

- Se $k \in \mathbb{N}$ le radici quadrate del numero $2k\pi i e^{i\pi/2}$ sono i due numeri $\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$. Quindi le soluzioni cercate sono, al variare di $k \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $i + \sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $i + \sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$;
- $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ le radici quadrate del numero $= (-2k\pi)e^{-i\pi/2}$ sono i due numeri $\sqrt{-2k\pi}e^{-i\pi/4}$, $\sqrt{-2k\pi}e^{i3\pi/4}$. Quindi le soluzioni cercate sono, ponendo $h = -k$ in modo che $h \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $i + \sqrt{2h\pi}e^{-i\pi/4}$, $i + \sqrt{2h\pi}e^{i3\pi/4}$, al variare di $h \in \mathbb{N}$.

In conclusione le soluzioni cercate sono:

- $z = i$;
- al variare di $k \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $i + \sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $i + \sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$;
- al variare di $h \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $i + \sqrt{2h\pi}e^{-i\pi/4}$, $i + \sqrt{2h\pi}e^{i3\pi/4}$.

3. (punti 5) Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x\sin x-2(\sin x)^2}{1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2}}.$$

Soluzione. Si ha:
$$\begin{aligned}
x^2+x\sin x-2(\sin x)^2 &= x^2+x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2\\
&=2x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)-2\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)\\
&=\frac{x^4}{2}+o(x^4);\\
1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2} &= 1+\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)-2\left(1+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{32}+o(x^4)\right)\\
&=\frac{x^4}{16}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi
$$\frac{x^2+x\sin x-2(\sin x)^2}{1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2}}=\frac{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{x^4}{16}+o(x^4)}\xrightarrow[x\to 0]{}8.$$

4. (punti 8) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{\sqrt{|x|-1}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Successivamente, disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

senza effettuare uno studio analitico dettagliato, ma in base alle proprietà della funzione f studiata in precedenza.

Soluzione. La funzione è pari. Studiamola quindi dapprima per $x > 0$, prolungandola poi per simmetria rispetto all'asse delle ordinate successivamente. Restringendosi appunto all'insieme delle x positive, la funzione è definita per $x > 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La funzione è sempre positiva. Non vi sono asintoti obliqui dato che la crescita della funzione è più che lineare, cioè dato che $f(x)/x \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Un calcolo elementare mostra che, sempre per $x > 1$, vale:

$$f'(x) = \frac{e^x(2x-3)}{2(x-1)^{3/2}}.$$

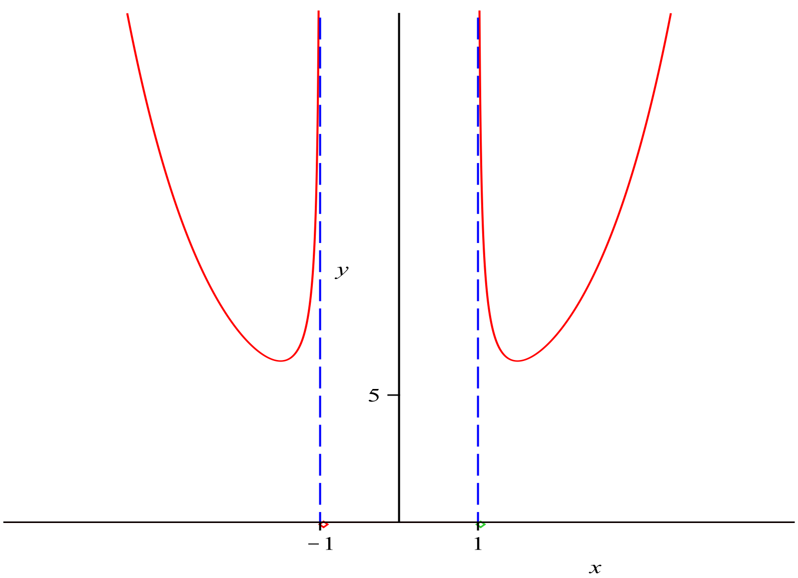
Lo studio del segno e degli zeri di f' (sempre in $(1, +\infty)$) è immediato: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 3/2$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 3/2$ e dunque f è crescente in tale insieme, mentre $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (1, 3/2)$ e dunque f è decrescente in tale insieme. Ne segue in particolare che $x = 3/2$ è un punto di minimo per f. Vale la pena notare che

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}e^{3/2} > 1.$$

Si tratta chiaramente di un punto di minimo assoluto. Si ha infine, ancora una volta per $x > 1$;

$$f''(x) = \frac{e^x(4x^2-12x+11)}{2(x-1)^{5/2}}.$$

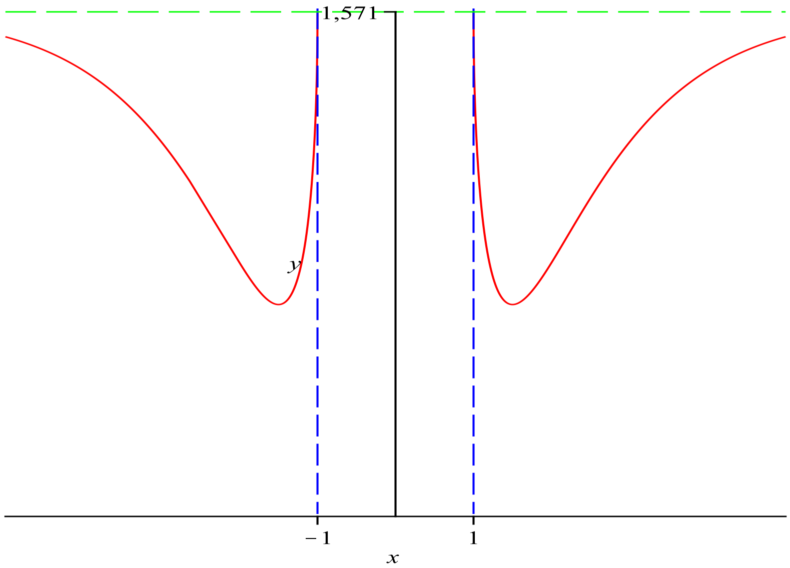
Il polinomio di secondo grado a numeratore è sempre positivo. Quindi $f''(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ e dunque f è convessa in tale insieme. Prolungando per simmetria rispetto all'asse y il grafico della funzione all'insieme $(-\infty, -1)$, si ha in conclusione che il grafico di f è il seguente.



Rispondiamo alla seconda domanda. Abbiamo mostrato che $f(x) > 1$ per ogni x nel suo dominio. Quindi $1/f(x) \in (0,1)$ per ogni x nel dominio di f, e ne segue che il dominio di definizione di g è lo stesso di quello di f. Evidentemente anche g è pari. Essendo sia la funzione $\arccos x$ sia la funzione $1/y$ decrescenti, si ha subito che le proprietà di monotonia di g sono le stesse di quelle di f. In particolare i punti $x = \pm 3/2$ sono di minimo assoluto. Notando che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

abbiamo che il grafico qualitativo di g è il seguente.



5. (punti 7) Discutere la definizione di funzione continua, enunciando poi le principali proprietà delle funzioni continue. Enunciare e dimostrare infine il Teorema di Weierstrass.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 27/2/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 7) Sia A_α la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & -\alpha & \alpha-2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore del parametro α il vettore $v_\alpha := (1-\alpha, -1, 1)^T$ risulta autovettore di A_α .
- Provare che per tale valore di α la matrice A_α risulta diagonalizzabile.
- Provare che per tale valore di α la matrice $(A_\alpha - 3\mathbb{I})^2$ non è invertibile.

Soluzione.

- Scriviamo l'equazione agli autovalori imponendo che l'autovettore sia $\vec{v}_\alpha$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -\alpha & \alpha-2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & \alpha-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  L'equazione matriciale suddetta risulta essere un sistema a tre equazioni e due incognite, α e λ :

$$\begin{cases} 3\alpha - 3 = \lambda(\alpha-1) \\ 4\alpha - 5 = \lambda \\ -5\alpha + 7 = -\lambda \end{cases}$$

  le cui soluzioni sono: $\lambda = 3$ e $\alpha = 2$.
- Cerchiamo tutti gli autovalori di A_2 che risultano le radici del polinomio caratteristico:

$$\det(A_2 - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(1-\lambda) = 0$$

  Gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e, come già si sapeva, $\lambda_3 = 3$. Per provare che A_2 è diagonalizzabile occorre verificare che la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$ coincida con la molteplicità geometrica, vale a dire con la dimensione dell'autospazio relativo. Ciò accade soltanto se il rango della matrice $(A_2 - \mathbb{I})$ è uguale a due: tale circostanza è verificata perchè la matrice $(A_2 - \mathbb{I})$ ha le prime due colonne proporzionali e la terza nulla.
- Una matrice è invertibile se e soltanto se non ha autovalori nulli. La matrice $A_2 - 3\mathbb{I}$ ha autovalori -2 e 0 . Inoltre è immediato mostrare che se λ è autovalore di M allora λ^2 è autovalore di M^2 . Pertanto gli autovalori di $(A_2 - 3\mathbb{I})^2$ sono 0 e 4, dunque tale matrice non è invertibile.

2. (punti 6) Determinare tutte le soluzioni, nel campo complesso, dell'equazione

$$e^{z^2+2iz-1} = 1.$$

Soluzione. L'equazione $e^w = 1$ ha come soluzioni tutti e soli i punti $w = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$. Qui si ha $w = z^2 + 2iz - 1 = (z+i)^2$, dunque le soluzioni cercate coincidono con le soluzioni di ciascuna delle equazioni $(z+i)^2 = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$. Distinguiamo i casi $k = 0, k > 0, k < 0$. Se $k = 0$ l'equazione $(z+i)^2 = 0$ ha l'unica soluzione $z = -i$. Se $k \neq 0$ occorre scrivere il numero $2k\pi i$ in forma esponenziale. Nel caso $k \in \mathbb{N}$ si ha $2k\pi i = 2k\pi e^{i\pi/2}$, mentre nel caso $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ si ha $2k\pi i = (-2k\pi)e^{-i\pi/2}$. Quindi:

- Se $k \in \mathbb{N}$ le radici quadrate del numero $2k\pi i e^{i\pi/2}$ sono i due numeri $\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$. Quindi le soluzioni cercate sono, al variare di $k \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $-i + \sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $-i + \sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$;
- $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ le radici quadrate del numero $= (-2k\pi)e^{-i\pi/2}$ sono i due numeri $\sqrt{-2k\pi}e^{-i\pi/4}$, $\sqrt{-2k\pi}e^{i3\pi/4}$. Quindi le soluzioni cercate sono, ponendo $h = -k$ in modo che $h \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $-i + \sqrt{2h\pi}e^{-i\pi/4}$, $-i + \sqrt{2h\pi}e^{i3\pi/4}$, al variare di $h \in \mathbb{N}$.

In conclusione le soluzioni cercate sono:

- $z = -i$;
- al variare di $k \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $-i + \sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $-i + \sqrt{2k\pi}e^{i5\pi/4}$;
- al variare di $h \in \mathbb{N}$, i numeri complessi $-i + \sqrt{2h\pi}e^{-i\pi/4}$, $-i + \sqrt{2h\pi}e^{i3\pi/4}$.

3. (punti 5) Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2}}{x^2+x\sin x-2(\sin x)^2}.$$

Soluzione. Si ha:
$$\begin{aligned}
1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2} &= 1+\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)-2\left(1+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{32}+o(x^4)\right)\\
&= \frac{x^4}{16}+o(x^4);\\
x^2+x\sin x-2(\sin x)^2 &= x^2+x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2\\
&= 2x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)-2\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)\\
&= \frac{x^4}{2}+o(x^4);
\end{aligned}$$
Quindi
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}-2\sqrt[4]{1+x^2}}{x^2+x\sin x-2(\sin x)^2}=\frac{\frac{x^4}{16}+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{8}.$$

4. (punti 8) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{\sqrt{|x| - 2}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Successivamente, disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

senza effettuare uno studio analitico dettagliato, ma in base alle proprietà della funzione f studiata in precedenza.

Soluzione. La funzione è pari. Studiamola quindi dapprima per $x > 0$, prolungandola poi per simmetria rispetto all'asse delle ordinate successivamente. Restringendosi appunto all'insieme delle x positive, la funzione è definita per $x > 2$. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La funzione è sempre positiva. Non vi sono asintoti obliqui dato che la crescita della funzione è più che lineare, cioè dato che $f(x)/x \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Un calcolo elementare mostra che, sempre per $x > 2$, vale:

$$f'(x) = \frac{e^x(2x - 5)}{2(x - 2)^{3/2}}.$$

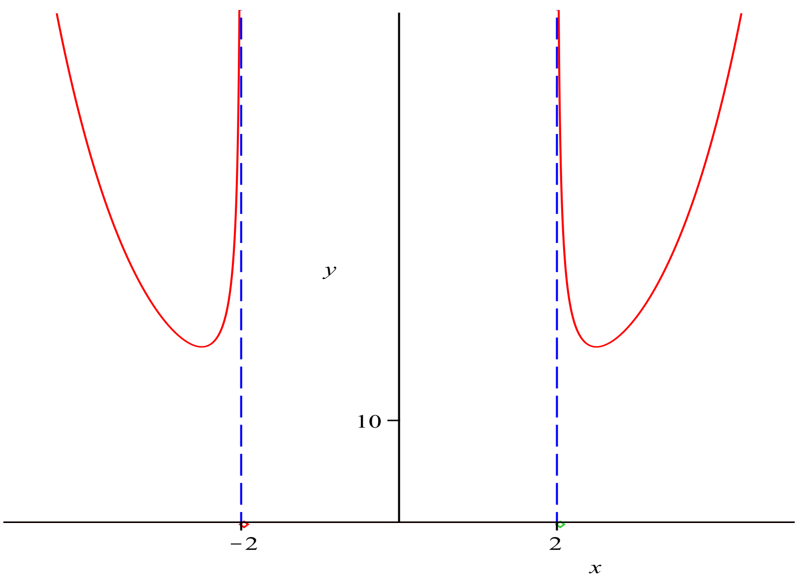
Lo studio del segno e degli zeri di f' (sempre in $(2, +\infty)$) è immediato: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 5/2$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 5/2$ e dunque f è crescente in tale insieme, mentre $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (2, 5/2)$ e dunque f è decrescente in tale insieme. Ne segue in particolare che $x = 5/2$ è un punto di minimo per f. Vale la pena notare che

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{2}e^{5/2} > 1.$$

Si tratta chiaramente di un punto di minimo assoluto. Si ha infine, ancora una volta per $x > 2$;

$$f''(x) = \frac{e^x(4x^2 - 20x + 27)}{2(x - 2)^{5/2}}.$$

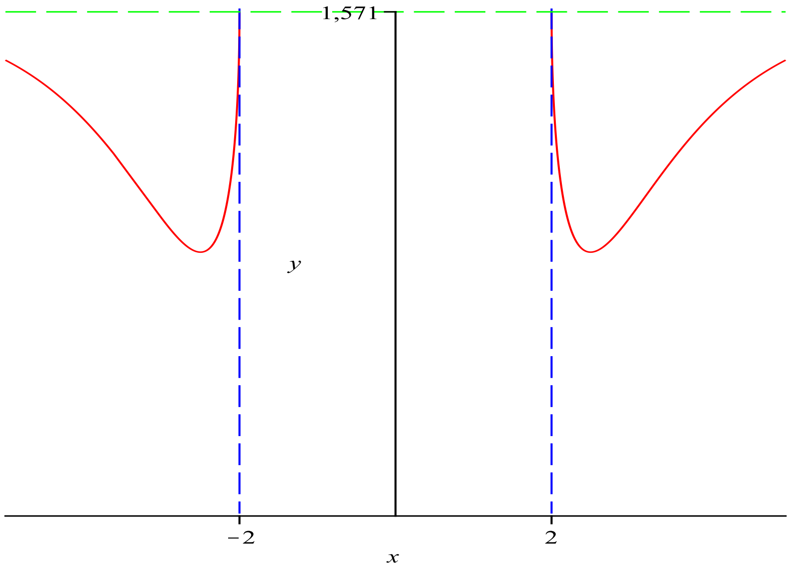
Il polinomio di secondo grado a numeratore è sempre positivo. Quindi $f''(x) > 0$ in $(2, +\infty)$ e dunque f è convessa in tale insieme. Prolungando per simmetria rispetto all'asse y il grafico della funzione all'insieme $(-\infty, -2)$, si ha in conclusione che il grafico di f è il seguente.



Rispondiamo alla seconda domanda. Abbiamo mostrato che $f(x) > 1$ per ogni x nel suo dominio. Quindi $1/f(x) \in (0,1)$ per ogni x nel dominio di f, e ne segue che il dominio di definizione di g è lo stesso di quello di f. Evidentemente anche g è pari. Essendo sia la funzione $\arccos x$ sia la funzione $1/y$ decrescenti, si ha subito che le proprietà di monotonia di g sono le stesse di quelle di f. In particolare i punti $x = \pm 5/2$ sono di minimo assoluto. Notando che

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

abbiamo che il grafico qualitativo di g è il seguente.



5. (punti 7) Discutere la definizione di funzione continua, enunciando poi le principali proprietà delle funzioni continue. Enunciare e dimostrare infine il Teorema di Weierstrass.

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 3/7/2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Sia data, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & -k & 5 \\ k & 0 & 3 \\ 2k-1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- Determinare, al variare del parametro k, le dimensioni di $\text{Im}\,(L_a)$ e $\text{Ker}\,(L_a)$.
- Stabilire se per $k = 0$ il vettore $\mathbf{v} = (1, -1, 0, 0)^t$ appartiene all'immagine di L_0.

Soluzione.

- Il minore M di ordine 2 della matrice A_k formato dalle ultime due righe e ultime due colonne ha determinante diverso da zero per ogni $k \in \mathbb{R}$, pertanto la matrice è formata da almeno due colonne indipendenti. Il minore di ordine 3, che si ottiene orlando M con la prima riga e con la prima colonna, ha determinante $k^2 - 2k$. Esso si annulla se e solo se: $k = 0 \vee k = 2$. Per tali valori di k anche l'altro minore di ordine 3, che si ottiene orlando M con seconda riga e con la prima colonna, ha determinante nullo.
  Dunque, per il teorema di Kronecker, $\text{Rk}\ A_k = 2$ se e solo se: $k = 0 \vee k = 2$, altrimenti: $\text{Rk}\ A_k = 3$. Per il teorema di nullità più rango segue che:
  - se $k = 0$, $\text{Dim Im}\,(L_a) = 2$ e $\text{Dim Ker}\,(L_a) = 1$;
  - se $k = 2$, $\text{Dim Im}\,(L_a) = 2$ e $\text{Dim Ker}\,(L_a) = 1$;
  - se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$, $\text{Dim Im}\,(L_a) = 1$ e $\text{Dim Ker}\,(L_a) = 2$.
- Il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di L_0. Infatti, abbiamo mostrato che $\text{Rk}\ A_0 = 2$, mentre si vede facilmente che $\text{Rk}\ (A_0|\mathbf{v}) = 3$ (è facile che vedere che la matrice completa ha una sottomatrice 3x3 con determinante non nullo). L'asserto segue quindi dal Teorema di Rouché-Capelli.

2. Stabilire se converge la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2 (n + \sin n)}{(n - e^{-n})\,(2n)!}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Detto a_n il suo termine generale si ha:

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Basta dunque limitarsi, per il criterio del confronto asintotico, a studiare il carattere della serie di termine generale $b_n := 2^n (n!)^2/(2n)!$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \\ &= \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dunque per il criterio del rapporto la serie data converge.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è dispari, quindi è sufficiente studiarla per $x > 0$, cosa che verrà fatta nel seguito senza ulteriori commenti. Affinché f sia definita occorre per prima cosa che $x \geq 1$. Inoltre, occorre verificare che $\sqrt{x^2-1}/x \in [-1,1]$, il che si verifica però immediatamente essere vero per ogni $x \geq 1$. Dunque f è definita per $x \geq 1$. La funzione è inoltre ovviamente non negativa per $x \geq 1$, e vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Infine, per definizione della funzione $\arcsin$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$. Essendo evidente che $f(x) \leq \pi/2$ per ogni x, la funzione si avvicina all'asintoto "da sotto".

La funzione è derivabile per $x > 1$. Per tali valori di x si ha, con calcoli elementari (si ricordi che $x > 0$, dunque per tali x vale che $\sqrt{x^2} = x$):

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

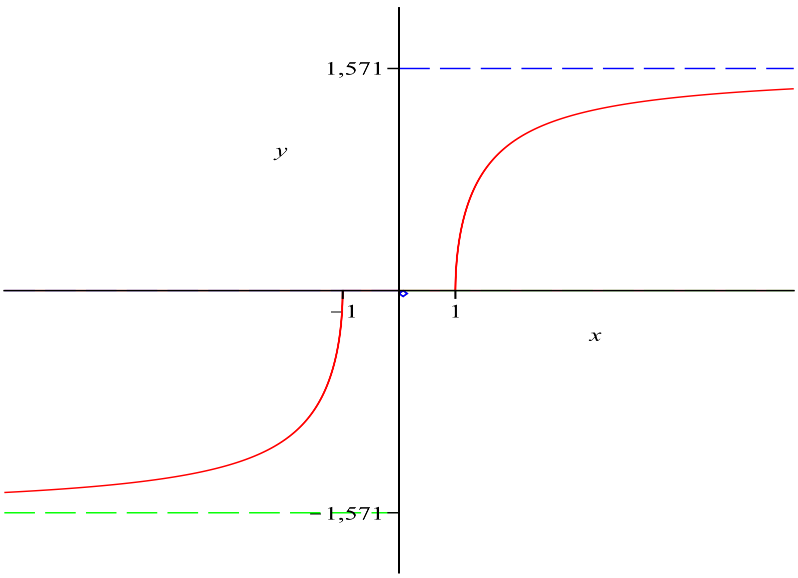
Dunque la funzione è crescente per $x \geq 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty,$$

quindi la funzione tende a zero, per $x \to 1^+$, con tangente che tende a diventare verticale. Infine, sempre per $x > 1$, si ha:

$$f''(x) = \frac{1-2x^2}{x^2\,(x^2-1)^{\frac{3}{2}}},$$

che è negativa per ogni $x > 1$. Quindi f è concava in $[1, +\infty$. In conclusione, tenendo conto della simmetria notata all'inizio, il grafico di f è il seguente:



4. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = 8\sin^3 x + 1.$$
Determinare successivamente il valore del seguente integrale definito:
$$\int_{-\pi/2}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. La primitiva è quasi immediata. Si ha
$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x,$$
dove si è posta uguale a zero la costante additiva. Si poteva procedere anche per parti, con calcoli altrettanto semplici. Dunque una primitiva F di f è data da
$$F(x) = x + 8\left(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right)$$
Riguardo alla seconda domanda, notiamo che, restringendoci all'intervallo di integrazione $[-\pi/2, 0]$, la funzione f è non negativa se e solo se $x \in [-\pi/6, 0]$. L'integrale richiesto vale
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi/6}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[F(x)\right]_{-\pi/2}^{-\pi/6} + \left[F(x)\right]_{-\pi/6}^{0} \\
&= F\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + F(0) - F\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F(0) - 2F\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} + 8\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \frac{\pi}{3} - 16\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= -\frac{\pi}{6} - \frac{16}{3} + 6\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. Dire cosa significa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, distinguendo i casi $l \in \mathbb{R}$ e $l = \pm\infty$ (è richiesta la definizione precisa). Dimostrare poi, in base alla definizione, che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 3/7/2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. Sia data, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 5 & -k & 0 \\ 3 & 0 & -k \\ k-3 & k & 0 \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare, al variare del parametro k, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L_a)$ e $\mathrm{Ker}\,(L_a)$.
- Stabilire se per $k = 0$ il vettore $\mathbf{v} = (4, 0, -3, 0)^t$ appartiene all'immagine di L_0.

Soluzione.

- Il minore M di ordine 2 della matrice A_k formato dalla seconda e dalla quarta riga e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero per ogni $k \in \mathbb{R}$, pertanto la matrice è formata da almeno due colonne indipendenti. Il minore di ordine 3, che si ottiene orlando M con la terza riga e con la terza colonna, ha determinante $k^3 + 2k^2$. Esso si annulla se e solo se: $k = 0 \vee k = -2$. Per tali valori di k anche l'altro minore di ordine 3, che si ottiene orlando M con la prima riga e con la terza colonna, ha determinante nullo.

  Dunque, per il teorema di Kronecker, $\mathrm{Rk}\ A_k = 2$ se e solo se: $k = 0 \vee k = -2$, altrimenti: $\mathrm{Rk}\ A_k = 3$. Per il teorema di nullità più rango segue che:
  - se $k = 0$, $\mathrm{Dim\ Im}\,(L_a) = 2$ e $\mathrm{Dim\ Ker}\,(L_a) = 1$;
  - se $k = -2$, $\mathrm{Dim\ Im}\,(L_a) = 2$ e $\mathrm{Dim\ Ker}\,(L_a) = 1$;
  - se $k \neq 0 \wedge k \neq -2$, $\mathrm{Dim\ Im}\,(L_a) = 1$ e $\mathrm{Dim\ Ker}\,(L_a) = 2$.
- Il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di L_0. Infatti, abbiamo mostrato che $\mathrm{Rk}\ A_0 = 2$, mentre si vede facilmente che $\mathrm{Rk}\ (A_0|\mathbf{v}) = 3$ (è facile che vedere che la matrice completa ha una sottomatrice 3x3 con determinante non nullo). L'asserto segue quindi dal Teorema di Rouché-Capelli.

2. Stabilire se converge la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2 (2n + \sin n)}{(n + e^{-n})\,(2n)!}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Detto a_n il suo termine generale si ha:

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Basta dunque limitarsi, per il criterio del confronto asintotico, a studiare il carattere della serie di termine generale $b_n := 2^n(n!)^2/(2n)!$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{2^{n+2}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{2^{n+1}(n!)^2}\\ &= \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dunque per il criterio del rapporto la serie data converge.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è dispari, quindi è sufficiente studiarla per $x > 0$, cosa che verrà fatta nel seguito senza ulteriori commenti. Affinché f sia definita occorre per prima cosa che $x \geq 2$. Inoltre, occorre verificare che $\sqrt{x^2-4}/x \in [-1,1]$, il che si verifica però immediatamente essere vero per ogni $x \geq 2$. Dunque f è definita per $x \geq 2$. La funzione è inoltre ovviamente non negativa per $x \geq 2$, e vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2$. Infine, per definizione della funzione $\arcsin$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$. Essendo evidente che $f(x) \leq \pi/2$ per ogni x, la funzione si avvicina all'asintoto "da sotto".

La funzione è derivabile per $x > 2$. Per tali valori di x si ha, con calcoli elementari (si ricordi che $x > 0$, dunque per tali x vale che $\sqrt{x^2} = x$):

$$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

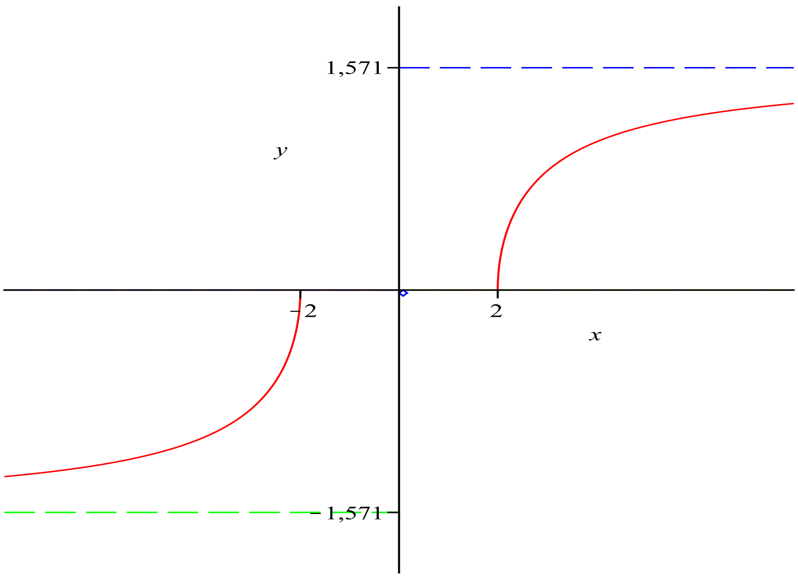
Dunque la funzione è crescente per $x \geq 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty,$$

quindi la funzione tende a zero, per $x \to 1^+$, con tangente che tende a diventare verticale. Infine, sempre per $x > 2$, si ha:

$$f''(x) = \frac{4(2-x^2)}{x^2\,(x^2-4)^{\frac{3}{2}}},$$

che è negativa per ogni $x > 2$. Quindi f è concava in $[2, +\infty$. In conclusione, tenendo conto della simmetria notata all'inizio, il grafico di f è il seguente:



4. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = 8\sin^3 x - 1.$$

Determinare successivamente il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. La primitiva è quasi immediata. Si ha

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x,$$

dove si è posta uguale a zero la costante additiva. Si poteva procedere anche per parti, con calcoli altrettanto semplici. Dunque una primitiva F di f è data da

$$F(x) = 8\left(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right) - x$$

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che, restringendoci all'intervallo di integrazione $[0,\pi/2]$, la funzione f è non negativa se e solo se $x \in [\pi/6, \pi/2]$. L'integrale richiesto vale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi/6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[F(x)\right]_0^{\pi/6} + \left[F(x)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= F(0) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} + 8\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \frac{\pi}{3} - 16\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= -\frac{\pi}{6} - \frac{16}{3} + 6\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. Dire cosa significa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, distinguendo i casi $l \in \mathbb{R}$ e $l = \pm\infty$ (è richiesta la definizione precisa). Dimostrare poi, in base alla definizione, che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 7/9/2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. Data la matrice
$$A_h = \begin{pmatrix} 5 & 2h & 6 \\ 0 & h & 0 \\ -3 & -h & -4 \end{pmatrix}:$$

- stabilire per quale valore del parametro h la matrice non è diagonalizzabile;
- determinare per quale valore del parametro h la matrice esibisca un autospazio ortogonale al piano $4x + y - 2z = 0$.

Soluzione.

- Polinomio caratteristico: $(h - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$.
  Autovalori: $\lambda = h$, $\lambda = 2$, $\lambda = -1$.
  Se $h = -1$ o $h = 2$ esiste un autovalore con molteplicità algebrica uguale a due.
  Caso $h = -1$: $A_{-1} + \mathbb{I}$ ha rango 1, la matrice è diagonalizzabile.
  Caso $h = 2$: $A_2 - 2\mathbb{I}$ ha rango 2, la matrice non è diagonalizzabile.

- Il vettore $\mathbf{v} = (4, 1, -2)^t$ individua lo spazio ortogonale al piano. Pertanto, deve esistere un $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui si abbia:
$$\begin{pmatrix} 5 & 2h & 6 \\ 0 & h & 0 \\ -3 & -h & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$
  tale uguaglianza è verificata soltanto nel caso $h = 4$.

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine cinque, centrato in $x = 0$, della funzione

$$f(x) = \cos(3\tan x) - \cos(3\sin x).$$

Soluzione. Procediamo calcolando esplicitamente lo sviluppo al terzo ordine della tangente, peraltro noto, nel caso lo studente non lo ricordasse. Calcoliamo, sempre per $x \to 0$ nel seguito:

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\
&= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] \\
&= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\cos(3\tan x) &= \cos(3x + x^3 + o(x^4)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[3x + x^3 + o(x^4)\right]^2 + \frac{1}{24}\left[3x + x^3 + o(x^4)\right]^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{9}{2}x^2 - 3x^4 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Si noti in particolare che sarebbe stato inutile sviluppare ulteriormente la tangente. Inoltre

$$\begin{aligned}
\cos(3\sin x) &= \cos\left[3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right]^2 + \frac{1}{24}\left[3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right]^4 \\
&= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{39}{8}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) - \left[1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{39}{8}x^4 + o(x^5)\right] = -\frac{9}{2}x^4 + o(x^5).$$

Il polinomio cercato è dunque $P_5(x) = -9x^4/2$.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata al bordo del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita nell'insieme $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$. Si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} = -1, \quad \lim_{x \to \infty} = 1, \lim_{x \to 0^{\pm}} = \pm\infty$$

e inoltre $f(1) = f(2) = 0$. Dunque le rette $y = \pm 1$ sono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$ rispettivamente, la retta $x = 0$ è asintoto verticale. Chiaramente il segno di f , ove definita, coincide con il segno di x , dunque $f(x) \geq 0$ se $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, $f(x) \leq 0$ se $x < 0$. La funzione si annulla se e solo se $x = 1$ oppure $x = 2$.

La funzione è derivabile in $D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$ Calcoli elementari mostrano che, ivi, vale

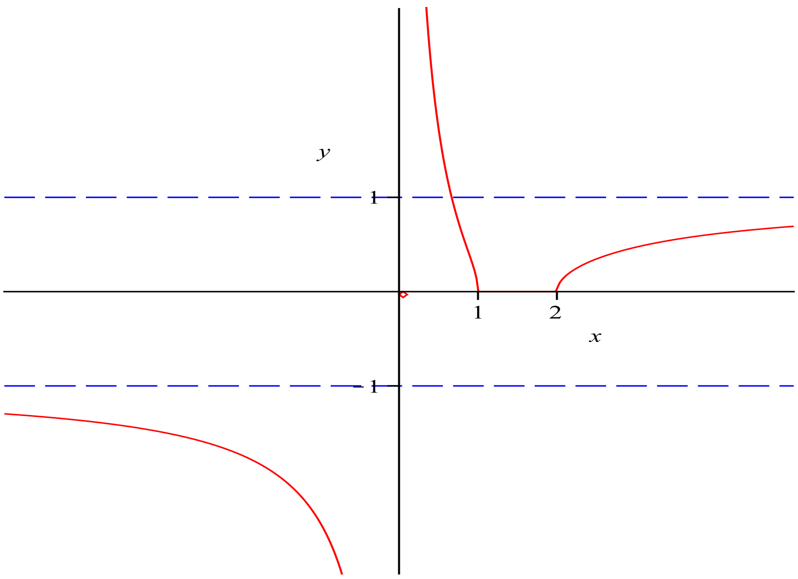
$$f'(x) = \frac{3x - 4}{2x^2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

Dunque f' non si annulla mai nel suo dominio, e si ha f crescente in $(2, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1)$. Infine vale

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \infty,$$

dunque per $x \to 1^-$ e per $x \to 2^+$ la tangente al grafico tende a diventare verticale (sebbene non richiesto si noti che ciò implica l'esistenza di almeno un flesso nell'intervallo $(0, 1)$.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. Discutere, al variare del parametro $a > 0$, la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^{1/3}}{(e^x - 1 - x)^a}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Si noti che $e^x > 1 + x$ per ogni $x \neq 0$, dato che la retta $y = 1 + x$ è la tangente al grafico di $f(x) = e^x$ nel punto $(0,1)$ e e^x è una funzione strettamente convessa. Dunque l'unico problema di convergenza dell'integrale si ha in $x = 0$. Si ha, per $x \to 0$:

$$(e^x - 1 - x)^a = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^a = \frac{x^{2a}}{2^a} + o(x^{2a}); \quad (1-\cos x)^{1/3} = \frac{x^{2/3}}{2^{2/3}} + o(x^{2/3}).$$

Quindi, per $x \to 0$:

$$\frac{(1-\cos x)^{1/3}}{(e^x - 1 - x)^a} \sim \frac{\frac{x^{2/3}}{2^{2/3}}}{\frac{x^{2a}}{2^a}} = \text{const.}\, x^{\frac{2}{3}-2a}.$$

L'integrale esiste finito se e solo se $2a - \frac{2}{3} < 1$, vale a dire $a < \frac{5}{6}$.

5. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto, di retta tangente al grafico di una curva in un punto, di funzione differenziabile in un punto. Dare un esempio esplicito di funzione continua ma non derivabile in un punto. Dimostrare infine che una funzione è differenziabile in un punto se e solo se è ivi derivabile.

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 7/9/2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -2h & 6 \\ 0 & h & 0 \\ -3 & h & -5 \end{pmatrix} :$$

- stabilire per quale valore del parametro h la matrice non è diagonalizzabile;
- determinare per quale valore del parametro h la matrice esibisca un autospazio ortogonale al piano $6x-2y-3z=0$.

Soluzione.

- Polinomio caratteristico: $(h-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$.
  Autovalori: $\lambda = h$, $\lambda = -2$, $\lambda = 1$.
  Se $h=-1$ o $h=2$ esiste un autovalore con molteplicità algebrica uguale a due.
  Caso $h=-2$: $A_{-2}+2\mathbb{I}$ ha rango 1, la matrice è diagonalizzabile.
  Caso $h=1$: $A_1-\mathbb{I}$ ha rango 2, la matrice non è diagonalizzabile.

- Il vettore $\mathbf{v} = (6,-2,-3)^t$ individua lo spazio ortogonale al piano. Pertanto, deve esistere un $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui si abbia:
$$\begin{pmatrix} 4 & -2h & 6 \\ 0 & h & 0 \\ -3 & h & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} ,$$
  tale uguaglianza è verificata soltanto nel caso $h=3$.

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine cinque, centrato in $x = 0$, della funzione

$$f(x) = \cos(3 \tan x) - \cos(3 \sin x).$$

Soluzione. Si veda la versione precedente.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata al bordo del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita nell'insieme $D = (-\infty, -2] \cup [-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} = -1, \quad \lim_{x \to \infty} = 1, \; \lim_{x \to 0^\pm} = \pm\infty$$

e inoltre $f(-1) = f(-2) = 0$. Dunque le rette $y = \pm 1$ sono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$ rispettivamente, la retta $x = 0$ è asintoto verticale. Chiaramente il segno di f , ove definita, coincide con il segno di x , dunque $f(x) \geq 0$ se $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq 0$ se $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0)$. La funzione si annulla se e solo se $x = -1$ oppure $x = -2$.

La funzione è derivabile in $D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$ Calcoli elementari mostrano che, ivi, vale

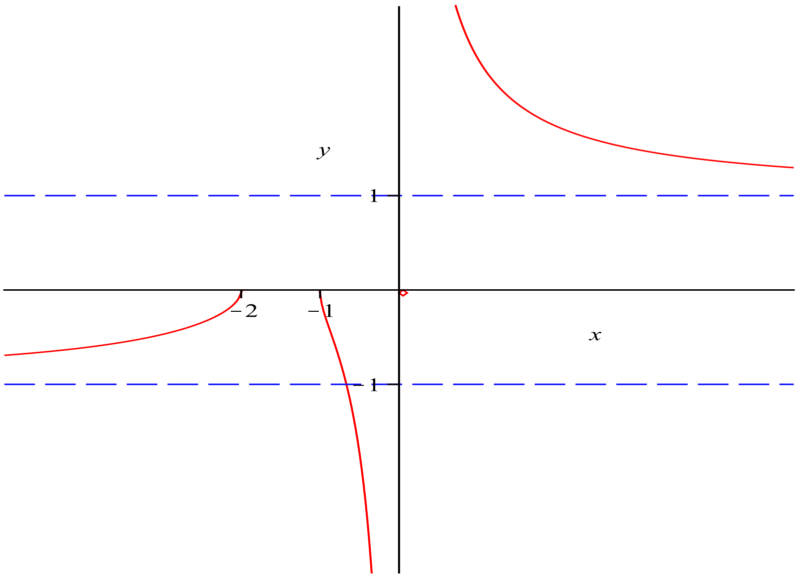
$$f'(x) = -\frac{3x + 4}{2x^2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}.$$

Dunque f' non si annulla mai nel suo dominio, e si ha f crescente in $(-\infty, -2)$, decrescente in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$. Infine vale

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty,$$

dunque per $x \to -2^-$ e per $x \to -1^+$ la tangente al grafico tende a diventare verticale (sebbene non richiesto si noti che ciò implica l'esistenza di almeno un flesso nell'intervallo $(-1, 0)$.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. Discutere, al variare del parametro $a > 0$, la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^{1/5}}{(e^x - 1 - x)^a}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Si noti che $e^x > 1 + x$ per ogni $x \neq 0$, dato che la retta $y = 1 + x$ è la tangente al grafico di $f(x) = e^x$ nel punto $(0,1)$ e e^x è una funzione strettamente convessa. Dunque l'unico problema di convergenza dell'integrale si ha in $x = 0$. Si ha, per $x \to 0$:

$$(e^x - 1 - x)^a = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^a = \frac{x^{2a}}{2^a} + o(x^{2a}); \quad (1-\cos x)^{1/5} = \frac{x^{2/5}}{2^{2/5}} + o(x^{2/5}).$$

Quindi, per $x \to 0$:

$$\frac{(1-\cos x)^{1/5}}{(e^x - 1 - x)^a} \sim \frac{\frac{x^{2/5}}{2^{2/5}}}{\frac{x^{2a}}{2^a}} = \text{const.}\, x^{\frac{2}{5}-2a}.$$

L'integrale esiste finito se e solo se $2a - \frac{2}{5} < 1$, vale a dire $a < \frac{7}{10}$.

5. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto, di retta tangente al grafico di una curva in un punto, di funzione differenziabile in un punto. Dare un esempio esplicito di funzione continua ma non derivabile in un punto. Dimostrare infine che una funzione è differenziabile in un punto se e solo se è ivi derivabile.