Analisi Complessa

FUNZIONE COMPLESSA

$f : z \to f(z)$

$z = x + iy \to f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$z \in \mathbb{C}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ESPONENZIALE

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

- $\| e^z \| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
- $e^z \neq 0$ $\qquad T = 2\pi i$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$

TRIGONOMETRICHE

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\cos z = \underbrace{\cos x \cosh y}_{\mathrm{Re}} - i \underbrace{\sin x \sinh y}_{\mathrm{Im}}$

$\cosh(iz) = \cos(z)$

$\cosh(y) = \cos(iy) \quad \forall y$

LIMITI

$\lim_{z \to z_0} f(z) = K \iff \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = K_1 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = K_2 \end{cases}$

CONTINUITÀ

f CONTINUA $\iff \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

SE u, v CONTINUE $\to f = u + iv$ CONTINUA

TUTTE LE f ELEMENTARI SONO CONTINUE IN $\mathbb{D}$

INFINITO

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ AMPLIAMENTO

$U(\infty) = \{|z| \leq R\}^c = \{|z| > R\}$

$z \to \infty \qquad (|z| \to \infty)$

$f(z) \to \infty \qquad (|f(z)| \to \infty)$

DERIVABILITÀ $\Omega \to \mathbb{C}$

f DERIVABILE $\iff \begin{cases} \exists \text{ FINITO } \lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ \exists \lambda \in \mathbb{C} : f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(h) \\ \exists \text{ FINITO } \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \end{cases}$

DIFFERENZIABILITÀ $\Omega \to \mathbb{R}^2$

f DIFFERENZIABILE $\iff \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \dfrac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - df(x_0,y_0)\cdot(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}$

$df(x_0,y_0) = \Delta f$ $\qquad$ DIFFERENZIALE (GRADIENTE)

- $\dfrac{\partial f}{\partial N} = \Delta f \cdot \vec{N}$ $\qquad$ DERIVATA DIREZIONALE
- $\Delta f \cdot \binom{h_1}{h_2} = f_x h_1 + f_y h_2$ $\qquad$ COORDINATE DIREZIONALI

CAUCHY-RIEMANN $\Omega \to \mathbb{C}$

f DERIVABILE IN $z_0 \iff \begin{cases} u, v \text{ DIFFERENZIABILI IN } (x_0,y_0) \\ \partial u_x = \partial v_y \\ \partial u_y = -\partial v_x \end{cases}$

$f'(z) = u_x - i u_y = v_y + i v_x$

OLOMORFISMO

f OLOMORFA SU Ω SE DERIVABILE $\forall z_0 \in \Omega$

INTEGRAZIONE

CONSERVATIVO

$f = \nabla F$

f INTEGRABILE $\longleftrightarrow$ w_i ESATTE $\longleftrightarrow$ $\oint_\gamma w_i = 0 \quad \forall \gamma \subseteq \Omega$ CIRCUITO

LO STESSO PER $\oint f$

SOLO SE Ω SEMPLICEMENTE CONNESSO

MORERA

f OLOMORFA $\longleftrightarrow$ w_i CHIUSE $\longrightarrow$ $\oint w_i$ NON CAMBIA SE SOSTITUISCO γ CON UN CIRCUITO OMOTOPO

CAUCHY

DERIVABILE $\forall z_0 \in \Omega$

$\begin{cases} u_y = -v_x \\ v_y = u_x \end{cases}$

CURL $F = 0$ ROTORE

LO STESSO PER $\oint f$

CONVERGENZE

$S_N(z) = \sum_0^N C_N (z - z_0)^N$ $\qquad$ SERIE DI POTENZE CENTRATA IN z_0

<u>PUNTUALE</u> SE $\exists$ FINITO $\lim_{N\to\infty} S_N(z)$

<u>UNIFORME</u> SE $\lim_{N\to\infty} \sup |S_N(z) - S(z)| = 0$ (NON DIPENDE DA N AD ∞)

<u>ASSOLUTA</u> SE $\exists$ FINITO $\sum_0^\infty C_N \|z - z_0\|^N$

UNIFORME $\to$ PUNTUALE $\to$ ASSOLUTA

RAGGIO $\qquad R = \left(\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{|C_z|} \right)^{-1}$

SE S_N CONVERGE ALLORA ANCHE S_N' (STESSO R)

ANALICITÀ

f ANALITICA SE $f(z) = \sum_0^\infty C_N (z - z_0)^N, \ \forall z \in U(z_0)$

ANALITICA $\to f \in C^\infty$

OLOMORFA $\to$ ANALITICA

$f^{(N)}(z_0) = \dfrac{N!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \dfrac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{N+1}}$

$C_N = \underbrace{\dfrac{f^{(N)}(z_0)}{N!}}_{\text{REALE}} = \underbrace{\dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \dfrac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{N+1}}}_{\text{COMPLESSA}}$

FORMULA DI CAUCHY

SE f OLOMORFA $\to f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} \quad \forall z \in B_r(z_0)$

$\int$ NON DIPENDE DA r (STESSA CLASSE DI OMOTOPIA)

SINGOLARITÀ

- <u>ISOLATA</u> SE f OLOMORFA IN $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots\}$ (FINITI)
- <u>ELIMINABILE</u> SE È POSSIBILE ESTENDERLA OLOMORFICAMENTE $\qquad \dfrac{\sin z}{z}$ $\qquad$ NULLA
- <u>POLO</u> SE $\lim_{z\to z_0} \|f(z)\| = +\infty$ $\qquad \dfrac{1}{z^m} \quad m \in \mathbb{N}$ $\qquad$ LIMITATA
- <u>ESSENZIALE</u> ISOLATA MA NÈ ELIMINABILE NÈ POLO $\qquad e^{1/z}$ $\qquad$ INFINITA
- <u>NON ISOLATA</u> CONTIENE INFINITI PUNTI DI DISCONTINUITÀ $\qquad \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

LAURENT

f OLOMORFA $\iff f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_N (z - z_0)^N = \underbrace{\sum_0^\infty C_N (z - z_0)^N}_{\text{REGOLARE}} + \underbrace{\sum_1^\infty C_{-N} (z - z_0)^{-N}}_{\text{SINGOLARE}}$

DOVE $\qquad C_N = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \dfrac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{N+1}}$

SE S. ELIMINABILE: $\qquad$ TAYLOR $\equiv$ LAURENT

IDENTITÀ (POLI E ZERI)

z_0 POLO $(f) \iff z_0$ ZERO $\left(\frac{1}{f}\right)$

<u>ORDINE ZERI</u> $\qquad K = \min\{N > 0 : f^{(N)}(z_0) \neq 0\}$

INDICE SVILUPPO TAYLOR $\sum_{N=K}^\infty$, $\exists$ FINITO $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z_0)}{(z - z_0)^K}$

<u>ORDINE POLO</u> $\qquad K = \min\{N > 0 : \frac{1}{f}^{(N)}(z_0) \neq 0\}$

INDICE SVILUPPO LAURENT $\sum_{N=-K}^\infty$, $\exists$ FINITO $\lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^K$

RESIDUO

$2\pi i\, \underline{\underline{C_{-1}}} = \int_{C_r} f(z)\,dz$

ELIMINABILE $\qquad$ RES $= 0$

POLO (K) $\qquad$ RES $= \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{(K-1)!} D^{(K-1)} [f(z) \cdot (z - z_0)^K]$

POLO SEMPLICE $\qquad$ RES $= \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z)$ $\qquad K = 1$

ESSENZIALE $\qquad$ RES SI OTTIENE DA LAURENT $\quad C_{-1}$

CASO SPECIALE $\qquad \mathrm{RES}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

AVVOLGIMENTO

VOLTE CHE LA CURVA GIRA ATTORNO A z_0

γ PARAMETRIZZATA CON $\quad r(t) = z_0 + \rho(t) \cdot e^{i\varphi(t)}$

CIRCUITO (CHIUSO) $\qquad r(b) = r(a) \iff \rho(b) = \rho(a)$

$\mathrm{IND}(\gamma, z_0) = \dfrac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \dfrac{dz}{z - z_0}$

TEOREMA DEI RESIDUI

f OLOMORFA IN $\Omega \setminus S \to \mathbb{C}$

ALLORA $\quad \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in S} \mathrm{IND}(\gamma, z) \cdot \mathrm{RES}(f, z)$

<u>VERIFICA</u>

1) S NON HA ACCUMULAZIONE
2) γ NON PASSA PER S

RESIDUO ALL' INFINITO

∞ SINGOLARITÀ ISOLATA

$\mathrm{RES}(f, \infty) = \mathrm{RES}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

INOLTRE $\sum_{z \in S \cup \{\infty\}} \mathrm{RES}(f, z) = 0 \to \sum_{z \in S} \mathrm{RES}(f, z) = -\mathrm{RES}(f, \infty)$

APPLICAZIONI DEI RESIDUI

DECADIMENTO

SE f OLOMORFA E $\quad \exists \beta > 1 : |f(z)| \leq \dfrac{1}{|z|^\beta}, \ |z| > R$

ALLORA $\quad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) \cdot dz = 0$

JORDAN

SE f OLOMORFA E $\quad \lim_{R\to+\infty} \left[\sup_{C_R^\pm(0)} |f(z)| = 0 \right]$

ALLORA $\quad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R^\pm(0)} f(z)\, e^{i\omega z}\, dz = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^\pm$

LEMMA

z_0 POLO SEMPLICE

$\gamma = C_\varepsilon(z_0, \theta_1, \theta_2)$ $\qquad$ ARCO DI CIRCONFERENZA

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\gamma f(z)\,dz = (\theta_2 - \theta_1)\, i\, \mathrm{RES}(f, z_0)$

CON $\quad r(t) = z_0 + r e^{it} \qquad t \in [\theta_1, \theta_2]$

VALORE PRINCIPALE

$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$

INTEGRALI COMPLESSI

<u>CASO 1</u>

INTEGRALI REALI $\quad \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,dt$

$\longrightarrow \int_0^{2\pi} g(e^{it})\, i e^{it}\, dt = \int_{C_1(0)} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_N \mathrm{RES}(g, z_N)$

SI OTTENGONO SOSTITUENDO:

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

<u>CASO 2</u>

INTEGRALI IMPROPRI $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ + DECADIMENTO

<u>SOLITAMENTE</u> $\quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$\mathrm{GRAD}(Q) = \mathrm{GRAD}(P) + 2$, NO RADICI REALI

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{[-R,+R] + C_R^+(0)} f(z)\,dz - \underbrace{\cancel{\int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz}}_{\text{DECADIMENTO}} \right)$

$\underset{\text{T. DEI RESIDUI}}{=} 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_N) > 0} \mathrm{RES}(f(z), z_N)$

<u>CASO 3</u>

INTEGRALI IMPROPRI $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx$ + JORDAN

$\longrightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,+R] \cup C_R^+(0)} f(z)\, e^{i\omega z}\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_N) > 0} \mathrm{RES}(f(z) \cdot e^{i\omega z}, z_N)$

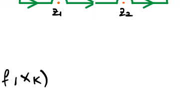
<u>CASO 4</u>

INTEGRALI IMPROPRI $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ DOVE $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz = 0$

INTERNO CIRCONF. $\to$ TEOREMA RESIDUI

CIRCONF. R $\to$ 0 PER DECADIMENTO

SEMICIRCONF. $r \to \pi i\, \mathrm{RES}(f, z_i)$



$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_S \mathrm{RES}(f, z_s) + \pi i \sum_K \mathrm{RES}(f, x_K)$

FUNZIONI POLINDROME

$z = \rho\, e^{i(\varphi + 2K\pi)} \qquad K \in \mathbb{Z}$

RADICE $\qquad \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{\rho} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2K\pi)}{N}} \qquad K \in [0, N-1]$

LOGARITMO $\quad \mathrm{LOG}(z) = \mathrm{LOG}\, \rho + i(\varphi + 2K\pi)$