Analisi matematica 2		3 maggio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Trovare, quando esistono, i massimi e i minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$$

i) Nel triangolo *chiuso* T con vertici nei punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

ii) Sul ramo di iperbole di equazione $xy = 1$ contenuto nel primo quadrante.

Cosa si può dire degli estremi globali di f in tutto $\mathbb{R}^2$?

b) Applicando il teorema della funzione implicita verificare che l'equazione

$$f(x,y) = 3$$

definisce, in un intorno del punto $x = 1$, una funzione $y = g_1(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $g_1(1) = 1$ e una funzione $y = g_2(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $g_2(1) = -1$. Calcolare $g_1'(1)$ e $g_2'(1)$.

2.

a) Scrivere, per una curva $\mathbf{r}(t)$ di classe $\mathcal{C}^2$, la formula di decomposizione dell'accelerazione $\mathbf{r}''(t)$ in componenti tangenziale e normale.

b) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + (10 - t^2)\,\mathbf{k}\,; \qquad t \in \mathbb{R}$$

i) Verificare che la curva è semplice e regolare e calcolare il *versore* tangente in ogni punto.

ii) Calcolare la curvatura e trovare in quale punto è massima.

iii) Determinare le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione in ogni punto.

Dimostrare che la curva è piana specificando il piano in cui giace il sostegno.

3.

a) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2\,y^2}{y^2+1}.$$

i) Applicando il teorema di esistenza e unicità globale, dimostrare che ogni soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

ii) Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$y(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(0) = -1\,.$$

e tracciarne un grafico qualitativo nel piano (t, y).

b)

i) Definire la nozione di stabilità di un punto di equilibrio di un sistema autonomo.

ii) Studiare la stabilità dell'origine per il sistema lineare :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Trovare l'integrale generale del sistema (con un metodo a piacere) e descrivere le traiettorie nel piano delle fasi.

SOLUZIONI

1.

a)

Derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 4x + 2y - 2; \qquad f_y(x,y) = 2x + 4y - 2$$

Le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2$, dunque la funzione è ovunque differenziabile.
Il gradiente si annulla nei punti le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova l'unico punto critico $P(1/3, 1/3)$. Derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 4; \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2; \qquad f_{yy}(x,y) = 4$$

La matrice Hessiana ha determinante $detH_f(x,y) = 16 - 4 = 12 > 0$ e traccia $8 > 0$ in ogni punto; dunque P è *punto di minimo* stretto. La funzione f è convessa, per cui P è minimo globale in tutto $\mathbb{R}^2$.
Il punto P punto si trova all'interno del triangolo T. La frontiera del triangolo è l'unione di 3 segmenti che si parametrizzano rispettivamente con

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) \,:\, x = t,\, y = 0, \quad t \in [0,1]; \\ \mathbf{r}_2(t) \,:\, x = 0,\, y = t, \quad t \in [0,1]; \\ \mathbf{r}_3(t) \,:\, x = t,\, y = 1 - t, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

In tutti e tre i casi si ottiene

$$f(\mathbf{r}_i(t)) = t^2 + (1-t)^2 = 2t^2 - 2t + 1\,, \qquad t \in [0,1], \quad i = 1,2,3,$$

e si trovano i punti di massimo $t = 0$ e $t = 1$ e il punto di minimo $t = 1/2$. Il minimo assoluto nel triangolo è assunto in $P(1/3, 1/3)$ con valore $f(P) = 1/3$, mentre il massimo assoluto è nei vertici $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(0,1)$ con valore $f(V_i) = 1$.

Per trovare gli estremi sul ramo di iperbole, cerchiamo i punti critici della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 - \lambda\,(xy - 1)$$

Derivando, si trova il sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2 - \lambda x = 0 \\ 2x + 4y - 2 - \lambda y = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo termine a termine le prime due equazioni si trova: $2(x-y) - \lambda(x-y) = 0$, da cui si ricava $x = y$ *oppure* $\lambda = 2$. Nel primo caso, usando l'equazione del vincolo e la condizione $x > 0$, $y > 0$, si ottiene l'unica soluzione

$$x = 1, \quad y = 1, \quad \lambda = 4,$$

e quindi si trova il punto critico vincolato $Q(1, 1)$. Nel secondo caso, non esistono coppie (x, y) che soddisfano il sistema. Dunque, Q è l'unico punto critico vincolato; osservando poi che la funzione tende a $+\infty$ se x o y vanno all'infinito lungo il ramo di iperbole (o ricordando che f è convessa) si ricava che Q è il minimo assoluto sul vincolo, con $f(1, 1) = 3$.

La funzione non è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$ (come già osservato sull'iperbole); dunque, non esiste il massimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$.
Dimostrazione alternativa che P è minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$: la funzione f è somma di quadrati e vale la disuguaglianza $f(x, y) \geq x^2 + y^2 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se consideriamo un cerchio centrato nell'origine e di raggio R sufficientemente grande da contenere il punto P, per esempio $R = 1$, vediamo che sulla frontiera e all'esterno di tale cerchio i valori della funzione sono certamente maggiori o uguali di 1; dunque, il minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$ coincide con il minimo assoluto dentro al cerchio ed è assunto nel punto P.

b) La funzione $F(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 - 3$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e soddisfa $F(1, 1) = 0$, $F(1, -1) = 0$. Inoltre:

$$F_y(1, 1) = 4 \neq 0; \qquad F_y(1, -1) = -4 \neq 0\,.$$

Valgono quindi le ipotesi del teorema del Dini per entrambi i punti: in un intorno di $x = 1$ sono definite due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$, tali che $g_1(1) = 1$ e $g_2(1) = -1$. Le derivate in $x = 1$ sono rispettivamente:

$$g_1'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -\frac{4}{4} = -1; \qquad g_2'(1) = -\frac{F_x(1, -1)}{F_y(1, -1)} = \frac{0}{-4} = 0$$

2.

b) La curva è semplice perchè le prime due componenti del vettore $\mathbf{r}(t)$ sono funzioni *iniettive* su $\mathbb{R}$, per cui è pure iniettiva la funzione $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ (si osservi che era sufficiente l'iniettività di una sola componente).
La curva è regolare perchè vale

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Versore tangente:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \left(1 + 9 + 4t^2\right)^{1/2} = \sqrt{10 + 4t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}\,\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10+4t^2}}\,\mathbf{j} - \frac{2t}{\sqrt{10+4t^2}}\,\mathbf{k}$$

Per calcolare la curvatura conviene usare la formula

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

dove, nel nostro caso, $\mathbf{r}''(t) = -2\,\mathbf{k}$. Risulta allora

$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = -6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

e dunque:

$$k(t) = \frac{2\sqrt{10}}{(10+4t^2)^{3/2}}$$

La curvatura è massima per $t = 0$, cioè *nel punto* $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 10)$ e vale $k(0) = 1/5$.
Il vettore accelerazione si decompone nella somma

$$\mathbf{r}''(t) = a(t)\,\mathbf{T}(t) + v(t)^2 k(t)\,\mathbf{N}(t)$$

dove $v(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ e $a(t) = v'(t)$. Nel nostro caso si ha

$$a(t) = \frac{4t}{\sqrt{10+4t^2}}; \quad v(t)^2 k(t) = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10+4t^2}}$$

La curva è piana perchè il vettore $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' = -6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ (diretto come la binormale $\mathbf{B}$) è costante. Infatti, posto $\mathbf{r} = (x, y, z)$, l'equazione del *piano osculatore* nel punto $\mathbf{r}(t)$ della curva si scrive: $\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)\big) \cdot \big(-6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}\big) = 0$, da cui si ottiene $-3x + y = 0$, indipendente da t; dunque la curva è tutta contenuta in questo piano (verticale). La stessa conclusione segue direttamente dalla parametrizzazione osservando che per ogni t vale la relazione $y(t) = 3\,x(t)$.

3a)

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione al secondo membro è indipendentente da t ed è derivabile con continuità rispetto ad y. Inoltre, vale la condizione
$$|2y^2/(y^2+1)| < 2$$
per ogni y e dunque anche per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale sono soddisfatte in $\mathbb{R}^2$ e tutte le soluzioni dell'equazione sono definite su $\mathbb{R}$.

ii) L'equazione ammette la *soluzione costante* $y = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, che è anche l'unica soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 0$. Le soluzioni non costanti si trovano applicando la formula risolutiva
$$\int \frac{y^2+1}{y^2} dy = 2 \int dt + C,$$
da cui la soluzione in forma *implicita*:
$$y - \frac{1}{y} = 2t + C; \qquad y \neq 0$$
Imponendo le condizioni $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$ si ottiene in entrambi i casi $C = 0$. Risolvendo rispetto ad y l'equazione
$$y - \frac{1}{y} = 2t$$
si ottengono *le due soluzioni*
$$\varphi_1(t) = t + \sqrt{t^2+1}; \qquad \varphi_2(t) = t - \sqrt{t^2+1},$$
che verificano, rispettivamente, $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_2(0) = -1$ e sono definite su tutto $\mathbb{R}$ come previsto dalla teoria.

3b)

La matrice dei coefficienti del sistema è
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Poiché $|A| = 2 \neq 0$, l'origine è l'unico punto di equilibrio. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, dunque l'origine è *asintoticamente stabile*. Due autovettori linearmente indipendenti sono, rispettivamente,
$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
L'integrale generale del sistema si può allora scrivere
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Il sistema si poteva anche risolvere con il metodo di eliminazione: la prima equazione non dipende da y e il suo integrale generale è

$$x(t) = C_1\, e^{-t}$$

Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene l'equazione lineare del primo ordine

$$y' + 2y = C_1\, e^{-t}$$

per la sola incognita $y(t)$; l'integrale generale è

$$y(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{-2t}$$

Si verifica facilmente che la soluzione $x(t)$, $y(t)$, coincide con quella ottenuta in precedenza in forma vettoriale.
Ci sono 4 traiettorie rettilinee, due lungo la retta di equazione $y = x$ e due lungo l'asse y ($x = 0$); le altre traiettorie si possono trovare eliminando t dalle espressiono esplicite delle soluzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$; si verifica che sono contenute nella famiglia di parabole di equazione $y = x + kx^2$, $k \in \mathbb{R}$. Questa famiglia di funzioni si può anche ottenere integrando *l'equazione differenziale delle traiettorie*:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - 1$$

Il punto rappresentativo di una soluzione del sistema tende verso l'origine (punto di equilibrio) lungo tutte le traiettorie.