Matrici, rango e sistemi lineari

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Proposizione

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è lineare se e solo se*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

dove i numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sono fissati.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ La funzione $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ è lineare (esercizio).

$\Rightarrow$ Data una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, indicate con $f(\mathbf{e}_i) = a_i$ le immagini dei vettori della base canonica $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{R}^n$, risulta

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{aligned}$$

□

Applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Proposizione

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m),$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ La funzione $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ è lineare (esercizio).

$\Rightarrow$ Per ogni $i = 1, 2, \dots, m$, la funzione "proiezione" pr_i

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} , \quad \mathrm{pr}_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i$$

è lineare. Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora lo sono anche le composizioni $f_i = \mathrm{pr}_i \circ F$

$$f_i : \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathbb{R},$$

dunque F è del tipo $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, con

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \cdots + a_{in}x_n. \qquad \square$$

Scrivendo i vettori in colonna, abbiamo che le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

con i numeri reali a_{ij} fissati.

Ad ogni applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

corrisponde una matrice reale di tipo $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e, viceversa,
ad ogni matrice reale A di tipo $m \times n$ corrisponde una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Indicate con M_F la matrice associata all'applicazione lineare F e con L_A l'applicazione lineare associata alla matrice A, detto $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'insieme delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

$$\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m | F \text{ lineare}\} \ ,$$

abbiamo dunque una corrispondenza biunivoca

$$M\_ : \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightleftarrows \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}) : L\_ \ .$$

Infatti risulta che $L_{M_F} = F$ e $M_{L_A} = A$.

Con la somma ed il prodotto per uno scalare definiti "puntualmente", l'insieme $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ risulta essere uno spazio vettoriale (esercizio) e la corrispondenza biunivoca sopra descritta risulta essere un isomorfismo di spazi vettoriali (esercizio):
per ogni $F, G \in \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A, B \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$M_{F+G} = M_F + M_G \ , \ M_{kF} = kM_F \ ; \quad L_{A+B} = L_A + L_B \ , \ L_{kA} = kL_A \ .$$

Composizione e prodotto

Date due applicazioni lineari componibili

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \mathbb{R}^p \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m ,$$

in che relazione sono le matrici $M_{F\circ G}$, M_F , M_G ?

Definiamo il *prodotto* di matrici in modo che $M_{F\circ G} = M_F \cdot M_G$.

Definizione

Date due matrici A di tipo $m \times p$ e B di tipo $p \times n$, si definisce il prodotto AB come

$$AB = M_{L_A \circ L_B} .$$

Esercizio

Provare che, per ogni $G \in \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $F \in \hom(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$, $A \in \mathbb{M}(m \times p, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(p \times n, \mathbb{R})$, si ha

$$M_{F\circ G} = M_F \cdot M_G , \quad L_{AB} = L_A \circ L_B .$$

Proprietà del prodotto di matrici

- Il prodotto di matrici è associativo:
  per ogni A di tipo $m \times p$, B di tipo $p \times q$, C di tipo $q \times n$,

$$(AB)C = A(BC)\ .$$

- Il prodotto di matrici è distributivo rispetto la somma:
  per ogni A, B di tipo $m \times p$, C, D di tipo $p \times n$,

$$A(C + D) = AC + AD \quad \text{e} \quad (A + B)C = AC + BC\ .$$

- Il prodotto di matrici è omogeneo:
  per ogni A di tipo $m \times p$, B di tipo $p \times n$ e per ogni reale k,

$$A(kB) = k(AB) = (kA)B\ .$$

Esercizio

Utilizzando la definizione di prodotto di matrici, provare le proprietà sopra elencate.

- Il prodotto di matrici non è commutativo.
- Il prodotto di matrici non rispetta la legge dell'annullamento del prodotto.

Consideriamo per esempio $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$F(x,y) = (x,x) \ , \quad G(x,y) = (0, x+y) \ .$$

Risultano

$$FG(x,y) = (0,0) \ , \quad GF(x,y) = (0,2x) \ ,$$

quindi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Matrice identica

- Il prodotto di matrici ammette elemento neutro: la *matrice identica* I_n è definita come la matrice $M_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}}$ dell'applicazione identica $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ su $\mathbb{R}^n$; per ogni A di tipo $m \times n$ si ha

$$I_m A = A = A I_n \ .$$

- Con l'uso della funzione δ di Kronecker, possiamo descrivere la matrice identica come segue:

$$I_n = (\delta_{ij}) \ , \text{ dove } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Esercizio

Utilizzando la definizione di prodotto di matrici, provare le proprietà sopra elencate.

Invertibilità

- ▷ La matrice A risulta invertibile (cioè esiste B tale che $AB = I$ e $BA = I$) se e solo se l'applicazione lineare L_A risulta invertibile.

  Similmente, l'applicazione lineare F è un isomorfismo se e solo se la matrice M_F è invertibile.

  Si ha inoltre: $L_{(A^{-1})} = (L_A)^{-1}$, $M_{(F^{-1})} = (M_F)^{-1}$.

Esercizio

Utilizzando la definizione di prodotto di matrici, provare le proprietà sopra elencate.

Esercizio

Provare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile,

mentre $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ non lo è.

Proposizione (Calcolo del prodotto di matrici)

Date due matrici $A = (a_{ij})$ *di tipo* $m \times p$ *e* $B = (b_{ij})$ *di tipo* $p \times n$*, il prodotto* $AB = (c_{ij})$ *è la matrice di tipo* $m \times n$ *con*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \ .$$

Possiamo ora descrivere l'applicazione lineare L_A attraverso il prodotto della matrice A con la colonna delle variabili:

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{cioè} \quad L_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ .$$

Consideriamo le applicazioni lineari

- "proiezione": $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_i(x_1, x_2 \ldots, x_m) = x_i$, dove x_i è il numero al posto i nelle m -upla $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$;
- "inserzione": $\mathrm{in}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{in}_j(x) = (0, \ldots, x, \ldots, 0)$, dove $(0, \ldots, x, \ldots, 0)$ è la n -upla che ha x nel posto j e 0 (zero) altrove.

Poiché $L_{AB} = L_A \circ L_B$, abbiamo
$pr_i \circ L_{AB} \circ in_j = pr_i \circ L_A \circ L_B \circ in_j$. Mostrando che

$$(pr_i \circ L_{AB} \circ in_j)(x) = c_{ij} x \ ,$$

$$(pr_i \circ L_A \circ L_B \circ in_j)(x) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj})x \ ,$$

si ha il risultato (con $x = 1$). □

Definizione (Rango di un insieme di vettori)

Sia A un insieme finito di vettori dello spazio V. Si definisce **rango** $\mathrm{rk}A$ di A la dimensione del sottospazio generato dai vettori di A.

$$\mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Span}\, A.$$

Osservazioni

- $\mathrm{rk}A = 0$ se e solo se A contiene solo il vettore nullo.
- $\mathrm{rk}A = \#A$ se e solo se i vettori di A sono linearmente indipendenti.
- In generale $0 \leq \mathrm{rk}A \leq \min\{\#A, \dim V\}$.

Rango di una matrice

Una matrice A di tipo $m \times n$ può essere vista come una $n-$ upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^m$: le colonne di A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right]$$

$$= [C_1, C_2, \dots, C_n]$$

Definiamo il *rango della matrice* A come il *rango delle colonne* di A , cioè la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A .

$$\mathrm{rk}\, A = \dim \mathrm{Span}\,\{\text{colonne di } A\}.$$

Possiamo anche pensare alla matrice A di tipo $m \times n$ come una $m-$ upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$: le righe di A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

Vedremo in seguito che il *rango delle righe* di A , cioè la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A , coincide con rango delle colonne di A .

Rango di una matrice

Il rango di una matrice A è dunque il numero di colonne linearmente indipendenti di A, che coincide con il numero di righe linearmente indipendenti di A.

$$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\} = \dim \operatorname{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Attenzione: in generale

$$\operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\} \neq \operatorname{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Esercizio

Calcolare il rango, lo spazio delle colonne e lo spazio delle righe.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango di matrici e di applicazioni lineari

Ricordando che:

- il rango di una matrice è il numero di colonne linearmente indipendenti, cioè la dimensione dello spazio generato dalle colonne,
- il rango di un'applicazione lineare è la dimensione dell'immagine,

è immediato osservare che:

Proposizione

Il rango di una matrice coincide con il rango dell'applicazione lineare associata:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} L_A \ , \quad \operatorname{rk} F = \operatorname{rk} M_F \ .$$

Dimostrazione.

Fissata la base canonica $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{R}^n$, l'immagine $\operatorname{Im} F$ dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è generata dai vettori $F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_n)$. Osservato che le m-uple $F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_n)$ sono le colonne di M_F, abbiamo il risultato. □

Calcolo del rango. Matrice a scala

Una matrice è detta “a scala” quando è del tipo

$$\begin{bmatrix} & a & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & b & * & * & * & * & * \\ & & & & & & c & * & * \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

In modo intuitivo una matrice è “a scala” quando è nulla oppure quando il primo elemento diverso da zero di una riga (se esiste) ha alla sua sinistra e al di sotto solo zeri.

In modo ricorsivo definiamo:

- ogni matrice nulla è a scala;
- ogni matrice di tipo $1 \times n$ (con un’unica riga) è a scala;
- una matrice con almeno due righe e non nulla è a scala quando la prima colonna non nulla ha soltanto la prima entrata diversa da zero (seguita da zeri) e la matrice ottenuta eliminando la prima riga è a scala.

È importante osservare (quanto semplice da verificare) che:

in una matrice a scala, le righe non nulle sono linearmente indipendenti.

Calcolo del rango. Operazioni elementari

Le *operazioni elementari* (o *mosse di Gauss*) sui vettori di un insieme ordinato $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sono:

1. moltiplicare un vettore $\mathbf{v}_i$ per uno scalare non nullo;
2. sommare a un vettore $\mathbf{v}_i$ un vettore $\mathbf{v}_j$;
3. scambiare di posto due vettori.

Proposizione

Dato un insieme ordinato di vettori $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *, sia* $A' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n)$ *ottenuto da* A *applicando operazioni elementari. Risulta*

$$\mathrm{Span}\, A = \mathrm{Span}\, A'$$

e quindi

$$\mathrm{rk} A = \mathrm{rk} A'$$

Dimostrazione.

Esercizio. $\square$

Calcolo del rango. Riduzione a scala

Con operazioni elementari sulle righe, ogni matrice A si trasforma

$$A \simeq A_1 \simeq \cdots \simeq A_k \simeq S$$

in una matrice S a scala:

$$S = \begin{bmatrix} & a & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & b & * & * & * & * & * \\ & & & & & & c & * & * \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Il metodo di riduzione a scala di una matrice attraverso la concatenazione di operazioni elementari sulle righe viene anche detto “algoritmo di Gauss” o “metodo di riduzione di Gauss”.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

Data una matrice A, supponiamo di averla ridotta ad una matrice a scala S applicando operazioni elementari sulle righe:

$$A \simeq A_1 \simeq \cdots \simeq A_k \simeq S;$$

da quanto detto precedentemente, otteniamo:

- $\mathrm{Span}\{$righe di $A\} = \mathrm{Span}\{$righe di $S\}$,
- $\mathrm{rk}\, A = \#\{$righe non nulle di $S\}$,
- una base dello spazio generato dalle righe di A è formata dalle righe non nulle di S.

Attenzione: operando sulle righe si ha

$$\mathrm{Span}\{\text{righe di } A\} = \mathrm{Span}\{\text{righe di } S\},$$

ma, in generale,

$$\mathrm{Span}\{\text{colonne di } A\} \neq \mathrm{Span}\{\text{colonne di } S\},$$

anche se i due spazi hanno la stessa dimensione. In particolare:

> *la matrice A e la matrice S non rappresentano la stessa applicazione lineare.*

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S, \quad \text{ma} \quad \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \neq \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Proposizione

Una matrice è invertibile se e solo se quadrata e di rango massimo.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} A \text{ invertibile} \quad &\Leftrightarrow \quad L_A \text{ isomorfismo;} \\ &\Leftrightarrow \quad L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \mathrm{rk}\, L_A = n; \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ quadrata di ordine } n,\ \mathrm{rk}\, A = n. \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio

Provare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile,

mentre $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ non lo è.

Calcolo della matrice inversa

Con operazioni elementari sulle righe, ogni matrice A invertibile può essere trasformata nella matrice identica

$$A \simeq A_1 \simeq \cdots \simeq A_k \simeq I$$

Proposizione

Le operazioni elementari che trasformano una matrice invertibile nelle matrice identica, trasformano la matrice identica nell'inversa di A *.*

Su questa proposizione si basa l'algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa:
indicata con $[A|I]$ la matrice ottenuta affiancando la matrice invertibile A e la matrice identica I (dello stesso ordine di A), si applicano alle righe della matrice $[A|I]$ le operazioni elementari che trasformano A nella matrice identica; la matrice identica viene trasformata nella matrice A^{-1}, inversa di A:

$$[A|I] \simeq [A_1|B_1] \simeq \cdots \simeq [A_k|B_k] \simeq [I|A^{-1}]$$

Calcolo della matrice inversa

Lemma

Sia M la matrice ottenuta dalla matrice identica I attraverso un'operazione elementare. Il prodotto MA è la matrice ottenuta da A attraverso l'operazione elementare sopra considerata.

Dimostrazione della proposizione.

Per il lemma, trasformare A invertibile nella matrice identica I

$$A \simeq A_1 \simeq A_2 \simeq \cdots \simeq A_k \simeq I$$

significa moltiplicare A a sinistra per matrici M_i ottenute applicando operazioni elementari ad I

$$A_1 = M_1 A\ , \quad A_2 = M_2 A_1 = M_2 M_1 A\ , \quad \ldots\ , \quad I = M_k A_k = M_k \cdots M_2 M_1 A$$

Poiché A è invertibile e $I = (M_k \cdots M_2 M_1) \cdot A$, la matrice $B = M_k \cdots M_2 M_1$ è l'inversa di A. Applicando le stesse operazioni elementari contemporaneamente a A e I abbiamo

$$B[A|I] = [BA|BI] = [I|B]. \qquad \square$$

Il sistema lineare in n incognite e m equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

può essere scritto in “forma matriciale” ricorrendo al prodotto di matrici

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Indicati con A la matrice dei coefficienti, $\mathbf{x}$ il vettore delle incognite e $\mathbf{b}$ la colonna dei termini noti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

abbiamo la più semplice notazione

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

La matrice $[A|\mathbf{b}]$ ottenuta accostando alla matrice dei coefficienti A la colonna dei termini noti $\mathbf{b}$ è la matrice completa del sistema

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Teorema (di Rouché-Capelli)

Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *con* m *equazioni e* n *incognite ammette soluzioni se e solo se la matrice dei coefficienti* A *e la matrice completa* $[A|\mathbf{b}]$ *hanno lo stesso rango*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|\mathbf{b}].$$

Inoltre, detto $r = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|\mathbf{b}]$ *, le soluzioni dipendono da* $n - r$ *parametri.*

Osservazione

- Se $\operatorname{rk}[A|\mathbf{b}] \neq \operatorname{rk} A$, allora $\operatorname{rk}[A|\mathbf{b}] = \operatorname{rk} A + 1$.
- Nel caso $\operatorname{rk}[A|\mathbf{b}] = \operatorname{rk} A = r$ e $r = n$, il sistema ha un'unica soluzione.
- Nel caso $\operatorname{rk}[A|\mathbf{b}] = \operatorname{rk} A = r$ e $r < n$, si usa esprimere il fatto che le infinite soluzioni dipendono da $n - r$ parametri dicendo che le soluzioni sono ∞^{n-r} .

Teorema di Rouché-Capelli

Dimostrazione

Scrivendo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

in “modo vettoriale”, abbiamo

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare ammette soluzioni

sse il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti A

sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}[A|\mathbf{b}]$.

Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata alla matrice A dei coefficienti e osserviamo che

- il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} L_A$;
- l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è la fibra $(L_A)^* (\mathbf{b})$ di L_A su $\mathbf{b}$.

Ricordando che $\dim \ker L_A = n - \operatorname{rk} A$, la seconda parte del Teorema di Rouché-Capelli discende dal Teorema di struttura della fibra. $\square$

Si fa notare che anche la prima parte del Teorema di Rouché-Capelli può essere dimostrata con una semplice considerazione sull'applicazione lineare L_A , dopo aver osservato che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} L_A$, ricordando che le colonne di A generano l'immagine di L_A .

Si osserva inoltre che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette un'unica soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} L_A$ e $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema di Cramer

Teorema (di Cramer)

Un sistema lineare in n incognite e n equazioni ammette un'unica soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti è invertibile.

Dimostrazione.

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con m equazioni e n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se

$$\mathrm{rk}[A|\mathbf{b}] = \mathrm{rk}\, A = n.$$

Nel caso in cui $m = n$, la matrice A dei coefficienti è quadrata e la richiesta $\mathrm{rk}\, A = n$ coincide con la richiesta di invertibilità di A. $\square$

Osservazione

- Ogni sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette tra le sue soluzioni quella banale. Se A è invertibile, allora l'unica soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Se il sistema lineare quadrato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette un'unica soluzione, allora questa è $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

1. Discutere ed eventualmente risolvere i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases} .$$

2. Al variare del parametro reale k discutere la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} .$$