Analisi Matematica B+C [60038] - Analisi Matematica II [78624], esame del 03/05/2011

Nome e cognome .... **Matricola** ....

---

1. (a) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\quad y' = t\,\mathrm{e}^{t-y}$.

L'equazione è a variabili separabili. Osserviamo che essendo $\mathrm{e}^{-y} \neq 0$, non ci sono soluzioni costanti. Integrando abbiamo

$$\mathrm{e}^y = \int t\mathrm{e}^t dx = \mathrm{e}^t(t-1) + c, \qquad c \in \mathbf{R},$$

da cui si ottiene

$$y(t) = \log[e^t(t-1) + c], \qquad c \in \mathbf{R}.$$

(b) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\quad y'' - 2y' - 3y = 8\mathrm{e}^{3t}$.

Risolvendo l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ associata all'equazione omogenea si trovano le radici $\lambda_{1,2} = -1, 3$, da cui si ottengono le soluzioni linearmente indipendente dell'omogenea $y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$. Poichè 3 è una radice del polinomio caratteristico, cerchiamo ora un integrale particolare della forma $y(t) = cte^{3t}$. Sostituendolo nell'equazione si ottiene $c = 2$. Dunque l'integrale generale è

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + 2t\mathrm{e}^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

(c) Si trovino a e b in modo tale che l'equazione differenziale $\quad y''' - 2y'' + ay' + by = 0 \quad$ ammetta come soluzioni le funzioni $\quad y_1(t) = 3 \quad$ e $\quad y_2(t) = \mathrm{e}^t$.

Imponendo che la funzione $y_1(t) = 3$ sia soluzione dell'equazione si ottiene $b = 0$. Sostituendo, poi, la funzione $y_2(t) = \mathrm{e}^t$ nell'equazione si ottiene $a = 1$.

2. (a) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

si stabilisca se è continua in $(0,0)$.

La funzione non è continua perchè non esiste il

$$\lim_{\rho \to 0} \left(1 + \frac{\rho^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2}\right)$$

(è dipendente da θ)

(b) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $g(x,y) = xy^2$ nel punto $(1,2,4)$.

$g_x(x,y) = y^2$, $g_y(x,y) = 2xy$. Nel punto $(1,2)$ abbiamo $g_x(1,2) = 4$, $g_y(1,2) = 4$. L'equazione del piano tangente è allora

$$z - 4 = 4(x-1) + 4(y-2),$$

ovvero

$$z = 4x + 4y - 8$$

(c) Si considerino la funzione $g(x,y) = xy^2$ e una curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ tale che

$$\gamma(0) = \big(x(0), y(0)\big) = (2,1) \qquad \text{e} \qquad \gamma'(0) = \big(x'(0), y'(0)\big) = (3,4).$$

Detta $h(t) = g\big(\gamma(t)\big)$, determinare $h'(0)$.

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$h'(0) = \nabla g(x(0), y(0)) \cdot (x'(0), y'(0)).$$

Essendo $\nabla g(x,y) = (y^2, 2xy)$ troviamo, sostituendo i valori assegnati,

$$h'(0) = (1,4) \cdot (3,4) = 3 + 16 = 19$$

3. (a) Si calcolino i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x - 5x + \frac{y^3}{2}.$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ \partial_y f(x,y) = 2xy + \frac{3}{2}y^2 = 0. \end{cases}$$

Risolvendolo si trovano i punti $A = (\sqrt{5}, 0)$, $B = (-\sqrt{5}, 0)$, $C = (3/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$, $D = (-3/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$. Calcolando la matrice Hessiana si ha

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x + 3y \end{pmatrix},$$

che valutata nei punti critici, ci dice che A è un massimo locale, B è un minimo locale, C, D sono due selle.

(b) Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si calcolino il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 - y$, vincolata all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Posto $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$, troviamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

I punti critici vincolati risultano essere $(0, 1, -1/8)$, $(0, -1, 1/8)$, $(\sqrt{63}/4, -1/8, 1)$, $(-\sqrt{63}/4, -1/8, 1)$. Poiché $f(0,1) = -1$, $f(0,-1) = 1$, $f(\pm\sqrt{63}/4, -1/8) = 65/16$, si ottiene che $(0,1)$ è un minimo assoluto e $(\pm\sqrt{63}/4)$ sono due massimi assoluti.

(c) Si consideri la curva $r(t) = \big(\cos 2t\,,\, \cos t\,,\, t^2(t-\pi)^2\big)$, con $t \in \mathbf{R}$. In quali punti della curva non è definito il versore tangente?

Il vettore $r(t)$ è derivabile per ogni t. Il versore tangente è definito nei punti in cui $r'(t) \neq 0$. Abbiamo

$$r'(t) = \big(-2\sin(2t),\, -\sin t,\, 2t(t-\pi)(2t-\pi)\big)$$

Si vede che le tre componenti sono tutte nulle per $t = 0$ e $t = \pi$. I punti cercati sono allora $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 0)$.