Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello di Analisi III, 19 luglio 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (12 punti)

a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, calcolare $a_n = \int_{C_1(0)} z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$, dove $C_1(0)$ indica la circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel piano complesso, percorsa 1 volta in senso antiorario.

b) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

c) Stabilire il dominio di olomorfia della funzione di variabile complessa $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Soluzione.

a) Posto $g_n(z) := z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, per il teorema dei residui si ha

$$a_n = 2\pi i \mathrm{Res}(g_n, 0)\,.$$

Per calcolare il residuo di g_n nell'origine, usiamo lo sviluppo in serie della funzione seno: si ha

$$g_n(z) = z^n \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+1}(2k+1)!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+1-n}(2k+1)!}\,.$$

Si ha $2k+1-n = 1 \Leftrightarrow n = 2k$, e quindi

$$\mathrm{Res}(g_n, 0) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ (-1)^{n/2} \frac{1}{(n+1)!} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Pertanto

$$a_n = 2\pi i \mathrm{Res}(g_n, 0) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ (-1)^{n/2} \frac{2\pi i}{(n+1)!} & n \text{ pari} \end{cases}$$

b) Il raggio di convergenza R richiesto è dato da $R = 1/L$, con

$$L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 0\,,$$

ovvero $R = +\infty$.

c) Per quanto ottenuto al punto precedente, la funzione f risulta analitica (ovvero olomorfa) su tutto il piano complesso.

ESERCIZIO 2. (12 punti)
Si consideri il sottospazio chiuso di $L^2(\pi, \pi)$ dato da

$$M := \{ f \in L^2(-\pi, \pi) \ : \ f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in (0, \pi) \} .$$

a) Determinare $M^\perp = \{ g \in L^2(-\pi, \pi) \ : \ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 0 \ \forall f \in M \}$.

b) Determinare un sistema ortonormale completo in M e in $M^\perp$.

c) Scrivere la serie di Fourier di polinomi trigonometrici della funzione u che vale 1 su $(0, \pi)$ e 0 su $(-\pi, 0)$.

d) Dedurre dal punto precedente la proiezione di u sul sottospazio chiuso M.

Soluzione.

a) Sia $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Per ogni $f \in M$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)\,dx &= \int_0^{\pi} g(x)f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} g(x)f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} g(x)f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} g(x)f(-x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} g(x)f(x)\,dx + \int_0^{\pi} g(-x)f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \big[g(x) + g(-x)\big] f(x)\,dx ,
\end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza si è usata la proprietà di spezzamento dell'integrale, nella seconda l'ipotesi $f \in M$, nella terza il cambio di variabile $y = -x$ (nel secondo addendo), e nell'ultima la linearità dell'integrale.
Deduciamo che la condizione $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)\,dx$ per ogni $f \in M$ è soddisfatta se e solo se g è dispari, ovvero

$$M^\perp := \{ g \in L^2(-\pi, \pi) \ : \ g(x) = -g(-x) \text{ per q.o. } x \in (0, \pi) \} .$$

b) Ricaviamo le basi di M e $M^\perp$ a partire da una base di $L^2(-\pi, \pi)$. Una base di M e di $M^\perp$ è data rispettivamente da:

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \ : \ n \in \mathbb{N} \Big\} , \qquad \Big\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \ : \ n \in \mathbb{N} \Big\} .$$

c) I coefficienti di Fourier di u sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\,dx = 1 ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \qquad \forall n \geq 1 ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{\cos(nx)}{n} \Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} \big[1 - (-1)^n \big] \qquad \forall n \geq 1 .$$

Pertanto la serie di Fourier di u si scrive come

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\pi} \big[1 - (-1)^n \big] \sin(nx) .$$

d) Dal punto precedente, ricaviamo che la proiezione di u su M è la funzione costante uguale a $\frac{1}{2}$.

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

a) Enunciare la definizione di funzione a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata.

b) Enunciare e dimostrare l'identità del parallelogramma in uno spazio di Hilbert.

Soluzione

Si veda uno dei testi consigliati.