III.3 - Applicazioni alle ODE

Le serie di Fourier possono essere utilizzate per trovare soluzioni T-periodiche di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti del tipo:

$$\sum_{j=0}^{N} a_j D^j u = f, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad f \in L_T^2$$

La soluzione generale di questo problema è data nella forma: $u = u_0 + u_p$, dove u_0 è la soluzione generale dell'omogenea ad essa associata, mentre u_p è una soluzione particolare.

Si cercano quindi soluzioni del tipo $u(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u_k}e^{i\xi_k x}$, con $\xi_k=\dfrac{2\pi k}{T}$ e $\widehat{u_k}\in l^2$

Sia dunque $P(\lambda)=\sum_{j=0}^{N}a_j\lambda^j$ e $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f_k}e^{i\xi_k x}$ (ciò è lecito essendo $f\in L_T^2$).

Poiché per l'identità di Bessel si ha che $f=g \quad\Leftrightarrow\quad \widehat{f_k}=\widehat{g_k}\ \ \forall k\in\mathbb{Z}$, si può scrivere che:

$$\widehat{f_k}=\sum_{j=0}^{N}a_j\widehat{\left(D^ju\right)}_k=\sum_{j=0}^{N}a_j\left(i\xi_k\right)^j\widehat{u_k}=\widehat{u_k}\sum_{j=0}^{N}a_j\left(i\xi_k\right)^j=\widehat{u_k}P\left(i\xi_k\right)$$

Nel passaggio precedente si è derivato per serie, e bisogna quindi ricordarsi di controllare a posteriori, una volta trovata la soluzione, che ciò sia effettivamente lecito.

A questo punto non rimane altro che risolvere l'equazione algebrica: $\widehat{f_k} = \widehat{u_k} P(i\xi_k)$.

1. $P(i\xi_k) \neq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$: $\widehat{u_k} = \dfrac{\widehat{f_k}}{P(i\xi_k)} \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$ e bisogna controllare che tale successione stia in l^2.

   Poiché, per ipotesi, $\widehat{f_k} \in l^2(\mathbb{Z})$, allora anche $\widehat{u_k} P(i\xi_k) \in l^2(\mathbb{Z})$. Ma $\left|P(i\xi_k)\right| \sim |k|^N$ per $|k| \to \infty$ e quindi $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{u_k}\right|^2 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2N} \left|\widehat{u_k}\right|^2 \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|P(i\xi_k)\widehat{u_k}\right|^2 < +\infty$.

   La soluzione è quindi unica ed è data dalla serie di Fourier con coefficienti gli $\widehat{u_k}$ appena trovati se sono verificate le ipotesi di derivazione per serie utilizzate precedentemente. In particolare la u deve essere ad esempio assolutamente continua insieme alle sue prime (*n-1*) derivate.

2. Se $P\left(i\xi_k\right)=0$ per $k=\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p$, rimane che $\widehat{f_{\overline{k}_i}}=0$ e si distinguono quindi due casi:

2a) Se $\widehat{f_k}\neq 0$ per qualche $k\in\left\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\right\}$, allora non esistono soluzioni in L^2_T

2b) Se $\widehat{f_k}=0$ $\forall k\in\left\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\right\}$ esistono infinite soluzioni: $\widehat{u_k}=\begin{cases}\widehat{f_k}\big/P\left(i\xi_k\right) \text{ per } k\notin\left\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\right\}\\ \text{arbitrario per } k\in\left\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\right\}\end{cases}$

e bisogna ovviamente sempre controllare le condizioni di derivabilità per serie.

Esempio:

Trovare le soluzioni T-periodiche di $u''+u=\sin(\omega x)$, $\quad \omega \in \mathbb{R}^+$

Detta $f(x)=\sin(\omega x)$, il periodo T delle soluzioni deve coincidere con quello di *f*, per cui:

$$f(x)=\sin(\omega x)=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i} \Rightarrow \widehat{f}_k=\begin{cases}0 \text{ per } k \neq \pm 1\\ \pm 1/2i \text{ per } k=\pm 1\end{cases}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \text{ e } \xi_k=\frac{2\pi k}{T}=\omega k\,;\; P(\lambda)=\lambda^2+1 \Rightarrow P(i\xi_k)=-\omega^2 k^2+1$$

1. $P\left(i\xi_k\right) = -\omega^2 k^2 + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \neq \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\widehat{u_k} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq \pm 1 \\ \pm \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-\omega^2} & \text{per } k = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow u(x) = \frac{\sin\left(\omega x\right)}{1-\omega^2}$$

La soluzione trovata si vede facilmente essere C^∞ e quindi soddisfa tutte le ipotesi necessarie per la derivazione per serie. Essa è quindi l'unica soluzione T-periodica del problema.

2. $P\left(i\xi_k\right)=-\omega^2k^2+1=0$ per qualche $\overline{k} \quad \Leftrightarrow \quad \omega=\frac{1}{\overline{k}}, \quad \overline{k}\in\mathbb{N}$

2a) Se $\overline{k}=1 \Rightarrow \widehat{f_1}\neq 0$: non esistono soluzioni 2π-periodiche del problema con $\omega=1$.

2b) Se $\overline{k}\in\mathbb{N}\setminus\{1\} \Rightarrow \widehat{f_{\overline{k}}}=0$: esistono infinite soluzioni periodiche del problema con $\omega=\frac{1}{\overline{k}}$:

$$\widehat{u_k}=\begin{cases}0 & \text{per } k\neq\pm1,\pm\overline{k}\\ \pm\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\omega^2} & \text{per } k=\pm1\\ \text{arbitrari} & \text{per } k=\pm\overline{k}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x)=\frac{\sin\left(\omega x\right)}{1-\omega^2}+c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}$$

Anche in questo caso la soluzione è di classe C^∞ e non sorgono problemi sulle ipotesi.

III.4 - Applicazioni all'equazione di Laplace

Si consideri l'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^2$ nel disco di raggio *R*:

$$\Delta u = 0 \quad in \;\; B_R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$

È possibile utilizzare le serie di Fourier per trovare soluzioni in coordinate polari di tale problema:

$$u_{\#}\left(\rho,\theta\right) := u\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)$$

Si fissi quindi ρ e si consideri la funzione 2π-periodica $\theta \mapsto u_{\#}\left(\rho,\theta\right)$: $u_{\#}\left(\rho,\theta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u_k}(\rho)e^{ik\theta}$.

Supponendo di poter derivare per serie e ricordando la formula dell'operatore laplaciano in coordinate polari, l'equazione di Laplace si riscrive nella forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2}\left[\widehat{u_k}(\rho)\right]e^{ik\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\widehat{u_k}(\rho)\right]e^{ik\theta} - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho)e^{ik\theta} \right\} = 0$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{d^2}{d\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widehat{u_k}(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) \right]e^{ik\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{d\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widehat{u_k}(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) = 0$$

L'ultima espressione trovata è $\forall k \in \mathbb{Z}$ un'equazione differenziale ordinaria nella variabile ρ. In particolare, è un'equazione di Eulero: si provano a cercare soluzioni del tipo ρ^α per $\rho \neq 0$:

$$\rho^2 \widehat{u_k''} + \rho \widehat{u_k'} - k^2 \widehat{u_k} = 0 \;\rightarrow\; \rho^2 \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho\alpha\rho^{\alpha-1} - k^2\rho^\alpha = 0; \quad \rho^\alpha\left[\alpha^2 - k^2\right] = 0; \quad \alpha = \pm|k|$$

- Se $k \neq 0$: $\widehat{u_k}(\rho) = c_k \rho^{|k|} + c_k' \rho^{-|k|}$
- Se $k = 0$: $\rho^2 \widehat{u_0''} + \rho \widehat{u_0'} = 0; \quad \rho \widehat{u_0''} + \widehat{u_0'} = 0 \xrightarrow{\widehat{v_0} = \widehat{u_0'}} \rho \widehat{v_0'} + \widehat{v_0} = 0; \quad \widehat{v_0} = \dfrac{c_0'}{\rho} \Rightarrow \widehat{u_0} = c_0' \log\rho + c_0$

Si ricava quindi che: $u_\#\left(\rho,\theta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u_k}(\rho)e^{ik\theta} = c_0' \log\rho + c_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(c_k\rho^{|k|} + c_k'\rho^{-|k|}\right)e^{ik\theta}$

Ma per poter estendere tale funzione con continuità in $\rho = 0$ si vede che deve essere:

$$c'_0 = c'_k = 0 \;\Rightarrow\; u_{\#}(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \rho^{|k|} e^{ik\theta}$$

che può anche essere scritta nella forma seguente:

$$u_{\#}(\rho,\theta) = \sum_{k\geq 0} c_k \rho^k e^{ik\theta} + \sum_{k<0} c_k \rho^{-k} e^{ik\theta} = \sum_{k\geq 0} c_k \rho^k e^{ik\theta} + \sum_{h>0} c_{-h} \rho^h e^{-ih\theta} = \sum_{k\geq 0} c_k z^k + \sum_{h>0} c_{-h} \overline{z}^h$$

La funzione trovata risolve il problema (e quindi è una funzione armonica) se i c_k sono tali che si possa derivare per serie, in modo che siano verificate le ipotesi a priori precedentemente fatte.
A questo proposito è utile introdurre il concetto seguente: una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si dice <u>temperata</u> se ha una crescita al più polinomiale, ovvero più precisamente se:

$$\exists C>0,\ m\in\mathbb{N}: \quad |x_k| \le C\left(1+|k|\right)^m$$

Teorema: per ogni $\{c_k\}$ tale che $\left\{c_k R^{|k|}\right\}$ è temperata, $u_\#(\rho,\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \rho^{|k|} e^{ik\theta}$ definisce una funzione armonica su B_R.

Dimostrazione:

$$\sum_{k\geq 0} c_k z^k = \sum_{k\geq 0} c_k R^k \left(\frac{z}{R}\right)^k \leq \sum_{k\geq 0} C\left(1+|k|\right)^m \left(\frac{z}{R}\right)^k$$ che è una serie di potenze.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{C\left(1+|k|\right)^m} = 1 \Rightarrow$$ si ha convergenza per $\left|\frac{z}{R}\right| < 1, \quad |z| < R$.

Per concludere la trattazione, vengono presentati due problemi particolari per l'equazione di Laplace appena risolta.

- **Problema di Dirichlet:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial B_R} = g(\theta) \end{cases}, \quad con \;\; g \in L^2_{2\pi}$$

$$g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k R^{|k|} e^{ik\theta} \;\Rightarrow\; c_k = \frac{\widehat{g_k}}{R^{|k|}}$$

dove $c_k R^{|k|} \in l^2$, poiché $\widehat{g_k} \in l^2$, e quindi c_k è temperata.

La soluzione del problema è quindi: $u_{\#}(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} \left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}$

- **Problema di Neumann:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial B_R} = g(\theta), \quad con \;\; g \in L^2_{2\pi} \end{cases}$$

$$g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \left|k\right| R^{|k|-1} e^{ik\theta} \quad \left\langle \begin{array}{l} g_0 \neq 0: \quad \nexists \text{ soluzione} \\[2ex] g_0 = 0: \quad c_0 \text{ arbitrario, } c_k = \dfrac{\widehat{g_k}}{\left|k\right| R^{|k|-1}} \;\; \forall k \neq 0 \end{array} \right.$$

Il problema di Neumann ammette quindi infinite soluzioni, ma solo se la funzione g ha media nulla sul bordo di B_R.

Tali soluzioni sono date da: $u_{\#}\left(\rho,\theta\right) = c_0 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k\neq 0}} \dfrac{\widehat{g_k}}{\left|k\right| R^{|k|-1}} \rho^{|k|} e^{ik\theta}$.