Politecnico di Milano - II Facoltà di Ingegneria - A. A. 2006/2007
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
I appello - Analisi Matematica D (9-3-07) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. QUESITI (fornire la risposta precisa senza scrivere il procedimento seguito)

1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\sinh(z)\Big)^{-1} dz$, dove γ è la curva disegnata in figura e precorsa 1 volta nel senso indicato dalla freccia.

$$-4\pi i$$

(si precisa che la curva γ era sottintesa racchiudere solo l'origine come singolarità della funzione $(\sinh z)^{-1}$)

2. Determinare le soluzioni $a, b \in \mathbb{R}$ del seguente problema di minimo:

$$\min \left\{ \int_{-1}^{1} |e^x - (ax+b)|^2 \, dx \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} .$$

La migliore approssimazione di e^x con un polinomio di primo grado è data da $(p_0, e^x)p_0 + (p_1, e^x)p_1$, con $p_0 = 1/\sqrt{2}$, e $p_1 = \sqrt{3/2}x$. Pertanto

$$a = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} xe^x \, dx = \frac{3}{e} \ , \qquad b = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x \, dx = \frac{1}{2}\Big(e - \frac{1}{e}\Big) \ .$$

3. (i) Stabilire se esiste una funzione $u \in AC([0,1])$ tale che $u' \in L^p([0,1])$ se e solo se $p < 2$. In caso affermativo fornirne un esempio.
(ii) Stabilire se esiste una funzione $u \in AC([0,1])$ tale che $u' \in L^p([0,1])$ se e solo se $p > 2$. In caso affermativo fornirne un esempio.

(i) Si', basta prendere ad esempio $u(x) = \sqrt{x}$.
(ii) No, perché essendo su un insieme di misura finita l'appartenenza a uno spazio L^p implica l'appartenenza a L^q per tutti i $q \leq p$.

II. ESERCIZIO (svolgere motivando nel modo più esauriente possibile in tutti i passaggi)

(i) Delle seguenti due funzioni di variabile complessa, riconoscere quale è una trasformata di Laplace, e trovare la sua antitrasformata:

$$\frac{s^2}{(s-1)^2} \ , \qquad \frac{s}{(s-1)^2} \ .$$

(ii) Risolvere il seguente problema di Cauchy utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} u'''(t) = e^t(1+t) \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \ . \end{cases}$$

(i) La seconda delle due funzioni (la prima non è infinitesima per $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$). Si ha

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \ ,$$

da cui

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{(s-1)^2}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s-1}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-1)}\Big) = e^t + te^t = e^t(1+t) \ .$$

(ii) Supponendo di avere $u, u', u'' \in AC$, con u''' $\mathcal{L}$-trasformabile, l'equazione trasformata diventa:

$$s^3 U = \mathcal{L}\Big(e^t(1+t)\Big) \ ,$$

da cui

$$u = e^t(1+t) * \mathcal{L}^{-1}(s^{-3}) = e^t(1+t) * \frac{t^2}{2} = 2 + t + e^t(t-2) \ ,$$

dove si sono usate le regole di trasformazione, mentre l'ultimo passaggio segue da calcoli immediati svolgendo il prodotto di convoluzione. La funzione trovata è di classe C^∞ e soddisfa le condizioni richieste all'inizio, dunque è soluzione.