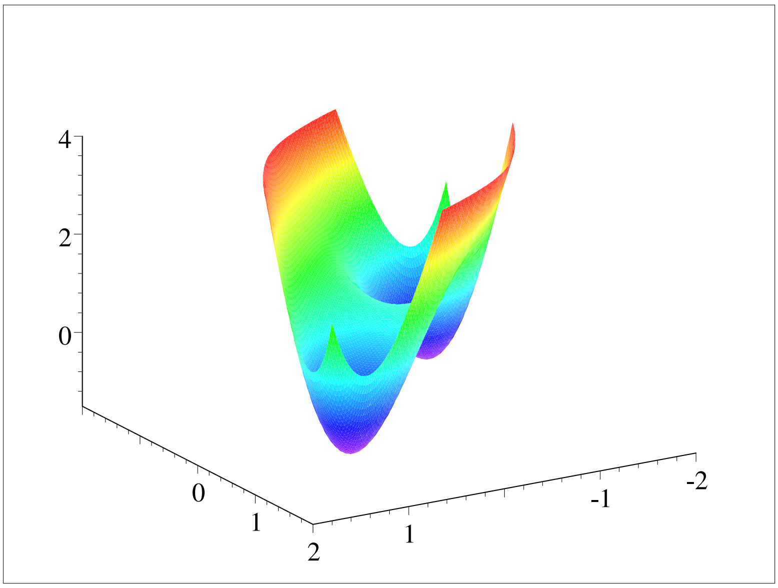
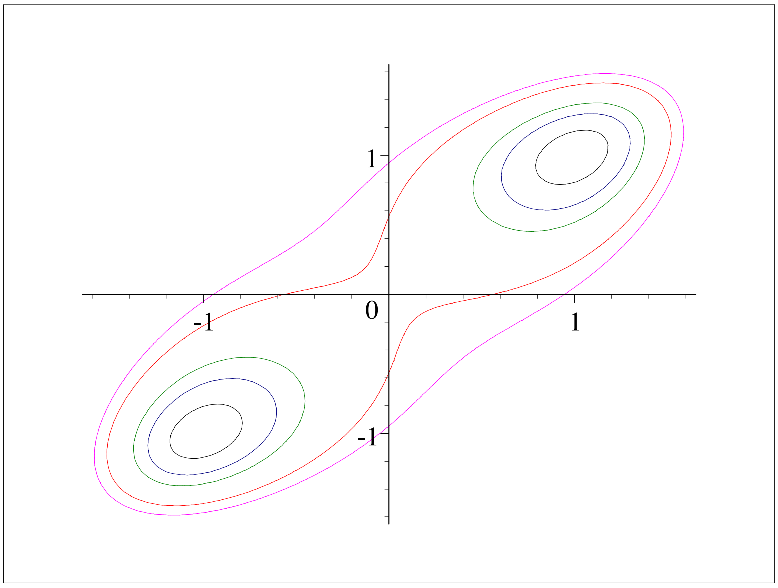
Massimi e minimi per funzioni di due variabili

La funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ ha tre punti critici : $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Il test delle derivate seconde mostra che l'origine è un punto di sella, mentre gli altri due punti sono minimi; i due *valori minimi* coincidono : $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$ (osservare che la funzione è simmetrica per riflessione rispetto all'origine, cioè $f(-x,-y) = f(x,y)$). Non ci sono punti di massimo e la funzione non è limitata superiormente.



La superfice di equazione $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Nella figura seguente sono rappresentate alcune curve di livello della superfice, corrispondenti ai valori $c = -0.8$ (nero), $c = -0.4$ (blu), $c = 0$ (verde), $c = 1.1$ (rosso), $c = 1.8$ (magenta).



Metodo dei minimi quadrati

Siano x e y due variabili che si suppone siano legate dalla relazione lineare $y = ax + b$, dove però i valori di a e b sono sconosciuti. Misurando un certo numero n di valori di x ed i corrispondenti n valori di y, otteniamo n coppie di valori $(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$ corrispondenti a n punti nel piano cartesiano. Questi punti giaceranno su una retta solo approssimativamente, a causa degli errori di misura. Il problema è di determinare parametri a e b in modo tale che la retta $y = ax + b$ sia il più possibile "vicina" ai dati ottenuti. Secondo il metodo dei minimi quadrati, si richiede che a e b siano scelti in modo da *minimizzare la somma dei quadrati degli scostamenti verticali dei punti trovati dalla retta*. Questa quantità, detta anche *errore quadratico totale*, è definita dalla seguente espressione:

$$E(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

Per determinare il minimo della funzione E (delle due variabili a, b) cerchiamo i punti

critici:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2x_1(ax_1 + b - y_1) + 2x_2(ax_2 + b - y_2) + \ldots + 2x_n(ax_n + b - y_n) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \ldots + 2(ax_n + b - y_n) = 0$$

Con semplici passaggi algebrici, queste equazioni si scrivono nella forma :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\, a + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, b = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, a + n\, b = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

Dividendo per n entrambi i membri delle due equazioni e definendo i *valori medi*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \ \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}, \ \overline{xy} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{n},$$

otteniamo

$$\overline{x^2}\, a + \overline{x}\, b = \overline{xy},$$

$$\overline{x}\, a + b = \overline{y}.$$

Risolvendo questo sistema lineare (si può dimostrare che la quantità $\overline{x^2} - \overline{x}^2$ è sempre positiva per $n > 2$) si ottiene l'unica soluzione :

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \; b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Utilizzando il test delle derivate seconde, oppure ricordando che l'espressione $E(a,b)$ è una somma di quadrati, si conclude che il punto critico trovato è il punto di minimo assoluto della funzione E. La retta $y = ax + b$ ottenuta in questo modo è chiamata *retta empirica di regressione* corrispondente ai dati.

Esempio 1: determinare la retta empirica di regressione relativa alle coppie di dati (x,y) : $(0, 2.1)$, $(1, 1.92)$, $(2, 1.84)$, $(3, 1.71)$, $(4, 1.64)$; trovare il valore previsto di y per $x = 5$.

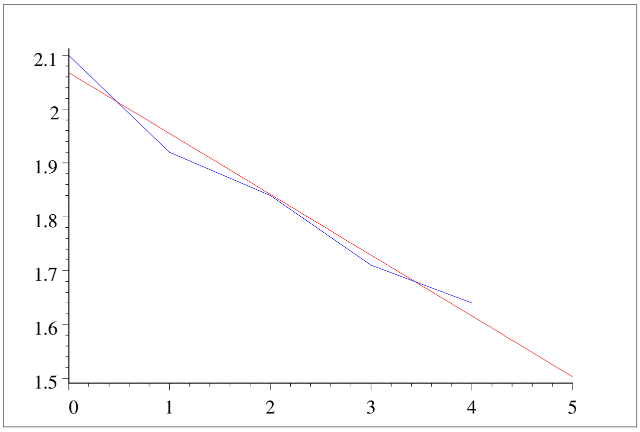
Soluzione. Con calcoli elementari, otteniamo i valori :

$$\overline{x} = 2, \; \overline{y} = 1.842, \; \overline{x^2} = 6, \; \overline{xy} = 3.458.$$

Dunque

$$a = \frac{3.458 - (2)(1.842)}{6-4} = -0.113, \; b = \frac{(6)(1.842) - (2)(3.458)}{6-4} = 2.068.$$

La retta di regressione è allora $y = 2.068 - 0.113x$ (in rosso nel grafico). Il valore previsto di y per $x = 5$ è $y = 2.068 - (0.113)\,5 = 1.503$.



Esempio 2. Consideriamo le coppie di dati : altezza x (in cm) / peso y (in kg), nella tabella seguente

Altezza	160	163	168	170	175	178	185	190	193
Peso	60	61	70	72	73	74	81	83	87

La retta di regressione (in rosso nel grafico) ha equazione $y = -62.435 + 0.773x$. Secondo questa relazione, ad un altezza di 180 cm corrisponde un peso "ottimale" di $(0.773) \cdot 180 - 62.435 = 76.705$ kg.