| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# PRIMA PROVA IN ITINERE (A)

1. Si consideri la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:
$$e^{2\bar{z}} - 2ie^{\bar{z}} + 8 = 0.$$
   (a) (3 punti) Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione suddetta;
   (b) (2 punti) determinare, se esso esiste, l'elemento di $A$ che ha minimo modulo;
   (c) (1 punto) determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ con } z \in A\}$ e interpretare geometricamente la trasformazione effettuata.

2. Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice $A_k$ così definita, al variare del parametro reale $k$:
$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & k & -k \\ k+3 & 1 & k \\ -2k+3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) determinare i valori del parametro reale $k$ affinchè $L_k$ non sia biunivoca;
   (b) (3 punti) per tali valori di $k$ esibire le basi del nucleo e dell'immagine di $L_k$.

3. Dato il seguente sistema:
$$\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ 2y - kz = k \\ -2x + (k-1)y - 2z = -4 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$
   (a) (4 punti) provare che esiste un unico valore del parametro reale $k$ affinchè l'insieme-soluzione sia monodimensionale; verificare che la soluzione è la retta: $3 - x = 2y = z + 1$;
   (b) (3 punti) detta $r$ la retta definita nel quesito precedente e $\pi$ il piano di equazione $x+y-z = 1$, determinare una retta $q$ appartenente al piano $\pi$ tale che $q$ e $r$ siano incidenti e perpendicolari.

4. Data la matrice
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -3-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 4+2\alpha & 3+2\alpha & 0 \\ -6 & -5-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) Stabilire per quale valore del parametro reale $\alpha$ essa è diagonalizzabile.
   (b) (3 punti) Per tale valore di $\alpha$ determinare gli autospazi di $A_\alpha$.

5. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango.

6. (4 punti) Discutere i concetti di spazio vettoriale, base e dimensione, e successivamente indicare le principali proprietà degli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# PRIMA PROVA IN ITINERE (B)

1. Si consideri la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:
$$e^{2\overline{z}} - ie^{\overline{z}} + 2 = 0.$$
   (a) (3 punti) Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione suddetta;
   (b) (2 punti) determinare, se esso esiste, l'elemento di $A$ che ha minimo modulo;
   (c) (1 punto) determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ con } z \in A\}$ e interpretare geometricamente la trasformazione effettuata.

2. Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice $A_k$ così definita, al variare del parametro reale $k$:
$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & k & -k \\ k-3 & -1 & k \\ -2k-3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) determinare i valori del parametro reale $k$ affinchè $L_k$ non sia biunivoca;
   (b) (3 punti) per tali valori di $k$ esibire le basi del nucleo e dell'immagine di $L_k$.

3. Dato il seguente sistema:
$$\begin{cases} 2y + kz = 3 \\ -kx + 2y = k \\ -2x + (k-1)y - 2z = -4 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$
   (a) (4 punti) provare che esiste un unico valore del parametro reale $k$ affinchè l'insieme-soluzione sia monodimensionale; verificare che la soluzione è la retta: $r : x + 1 = 2y = 3 - z$;
   (b) (3 punti) detta $r$ la retta definita nel quesito precedente e $\pi$ il piano di equazione $-x + y + z = 1$, determinare una retta $q$ appartenente al piano $\pi$ tale che $q$ e $r$ siano incidenti e perpendicolari.

4. Data la matrice
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & 0 \\ 2\alpha & 1+2\alpha & 0 \\ -2 & -1-\alpha & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) Stabilire per quale valore del parametro reale $\alpha$ essa è diagonalizzabile.
   (b) (3 punti) Per tale valore di $\alpha$ determinare gli autospazi di $A_\alpha$.

5. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango.

6. (4 punti) Discutere i concetti di spazio vettoriale, base e dimensione, e successivamente indicare le principali proprietà degli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# PRIMA PROVA IN ITINERE (C)

1. Si consideri la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:

$$e^{2\overline{z}} - 4ie^{\overline{z}} - 3 = 0.$$

   (a) (3 punti) Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione suddetta;

   (b) (2 punti) determinare, se esso esiste, l'elemento di $A$ che ha minimo modulo;

   (c) (1 punto) determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ con } z \in A\}$ e interpretare geometricamente la trasformazione effettuata.

2. Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice $A_k$ così definita, al variare del parametro reale $k$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & -k & k \\ k+6 & k & 2 \\ -2k+6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) (3 punti) determinare i valori del parametro reale $k$ affinchè $L_k$ non sia biunivoca;

   (b) (3 punti) per tali valori di $k$ esibire le basi del nucleo e dell'immagine di $L_k$.

3. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} ky + 2z = 3 \\ -kx + 2z = k \\ -2x - 2y + (k-1)z = -4 \\ kx + ky = 2 \end{cases}$$

   (a) (4 punti) provare che esiste un unico valore del parametro reale $k$ affinchè l'insieme-soluzione sia monodimensionale; verificare che la soluzione è la retta: $x + 1 = 3 - y = 2z$,

   (b) (3 punti) detta $r$ la retta definita nel quesito precedente e $\pi$ il piano di equazione $-x + y + z = 1$, determinare una retta $q$ appartenente al piano $\pi$ tale che $q$ e $r$ siano incidenti e perpendicolari.

4. Data la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5-\alpha & 2-\alpha & 0 \\ -4+2\alpha & -1+2\alpha & 0 \\ 2 & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) (3 punti) Stabilire per quale valore del parametro reale $\alpha$ essa è diagonalizzabile.

   (b) (3 punti) Per tale valore di $\alpha$ determinare gli autospazi di $A_\alpha$.

5. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango.

6. (4 punti) Discutere i concetti di spazio vettoriale, base e dimensione, e successivamente indicare le principali proprietà degli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare.

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# PRIMA PROVA IN ITINERE (D)

1. Si consideri la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:
$$e^{2\overline{z}} + 5ie^{\overline{z}} - 6 = 0.$$
   (a) (3 punti) Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione suddetta;
   (b) (2 punti) determinare, se esso esiste, l'elemento di $A$ che ha minimo modulo;
   (c) (1 punto) determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ con } z \in A\}$ e interpretare geometricamente la trasformazione effettuata.

2. Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice $A_k$ così definita, al variare del parametro reale $k$:
$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & -k & k \\ k-6 & k & -2 \\ -2k-6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) determinare i valori del parametro reale $k$ affinchè $L_k$ non sia biunivoca;
   (b) (3 punti) per tali valori di $k$ esibire le basi del nucleo e dell'immagine di $L_k$.

3. Dato il seguente sistema:
$$\begin{cases} kx + 2z = 3 \\ -ky + 2z = k \\ -2x - 2y + (k-1)z = -4 \\ kx + ky = 2 \end{cases}$$
   (a) (4 punti) provare che esiste un unico valore del parametro reale $k$ affinchè l'insieme-soluzione sia monodimensionale; verificare che la soluzione è la retta: $3 - x = y + 1 = 2z$;
   (b) (3 punti) detta $r$ la retta definita nel quesito precedente e $\pi$ il piano di equazione $x - y + z = 1$, determinare una retta $q$ appartenente al piano $\pi$ tale che $q$ e $r$ siano incidenti e perpendicolari.

4. Data la matrice
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -5-\alpha & -3-\alpha & 0 \\ 6+2\alpha & 4+2\alpha & 0 \\ -8 & -7-\alpha & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) (3 punti) Stabilire per quale valore del parametro reale $\alpha$ essa è diagonalizzabile.
   (b) (3 punti) Per tale valore di $\alpha$ determinare gli autospazi di $A_\alpha$.

5. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di nullità più rango.

6. (4 punti) Discutere i concetti di spazio vettoriale, base e dimensione, e successivamente indicare le principali proprietà degli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Mathematical Analysis I and Geometry - Physical Engineering - a.y. 2012-2013

# INTERMEDIATE EXAM

1. Consider the following equation, in the complex variable $z$:

$$e^{2\overline{z}} - 2ie^{\overline{z}} + 8 = 0.$$

   (a) (3 points) Determine the set $A \subset \mathbb{C}$ of solutions to the given equation;

   (b) (2 points) determine, if it exists, the element of $A$ having minimum module;

   (c) (1 point) determine the set $B := \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)z \text{ with } z \in A\}$.

2. Let $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear application represented, in the canonical bases, by the matrix $A_k$, $k$ being a real parameter, given by:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & k & -k \\ k+3 & 1 & k \\ -2k+3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (3 points) determine the values of $k$ for which $L_k$ is not bijective;

   (b) (3 points) for such values of $k$ provide a basis for the kernel and the image of $L_k$.

3. Given the following system:

$$\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ 2y - kz = k \\ -2x + (k-1)y - 2z = -4 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$

   (a) (4 points) prove that there exist a unique value of the real parameter $k$ such that the set of solutions has dimension one; check that the solution is the line: $3 - x = 2y = z + 1$;

   (b) (3 points) consider the line $r$ defined above and the plane $\pi$ defined by the equation is $x + y - z = 1$. Determine a line $q$ belonging to $\pi$ which intersects $r$ and is orthogonal to $r$.

4. Given the matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -3-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 4+2\alpha & 3+2\alpha & 0 \\ -6 & -5-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) (3 points) Decide for which values of the real parameter $\alpha$ the matrix is diagonalizable.

   (b) (3 points) For such value of $\alpha$ determine the eigenspaces of $A_\alpha$.

5. (4 points) State and prove the rank Theorem.

6. (4 points) Discuss the concepts of vector spaces, basis and dimension, and then state the main properties of vector spaces admitting a scalar product.

**Soluzioni - Versione A**

1. (a) L'equazione $w^2 - 2iw + 8 = 1$ ha le soluzioni $w = i + \sqrt{-9}$ (la radice è intesa in senso complesso), cioè $w_1 = 4i$ e $w_2 = -2i$. Calcolando i logaritmi complessi di tali valori di $w$ si ottengono i possibili valori di $\overline{z}$ e quindi, per coniugio, i valori richiesti di $z$. Sebbene la formula che assegna i logaritmi complessi sia nota in generale, svolgiamo i calcoli nel caso specifico. Scritto $\overline{z} = x - iy$, deve valere

$$e^{\overline{z}} = e^x e^{-iy} = 4i = 4e^{i\pi/2}.$$

Ciò ha luogo se e solo se $x = \log 4$ (il logaritmo è qui inteso in senso reale) e $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque si hanno le soluzioni $z_{1,k} = \log 4 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Procedendo analogamente si risolve l'equazione $e^{\overline{z}} = -2i$ osservando che $-2i = 2e^{-i\pi/2}$ e ottenendo le soluzioni $z_{2,h} = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2h\pi\right)$, con $h \in \mathbb{Z}$.

(b) Le due famiglie di soluzioni trovate stanno sulle rette $x = \log 4$ e $x = \log 2$. Tra quelle sulla prima retta la più vicina all'origine è $z_{1,0} = \log 4 - i\frac{\pi}{2}$, tra quelle sulla seconda retta la più vicina all'origine è $z_{1,0} = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$. È immediato verificare che tra di esse è la seconda ad avere modulo minimo.

(c) Gli elementi di $B$ sono i valori $w_{1,k}, w_{2,h}$ dati da

$$\begin{aligned} w_{1,k} &:= (1+i)z_{1,k} = \log 4 + \frac{\pi}{2} - 2k\pi + i\left(\log 4 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ w_{2,h} &:= (1+i)z_{2,k} = \log 2 - \frac{\pi}{2} - 2h\pi + i\left(\log 2 + \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right), \quad h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'interpretazione geometrica si ottiene notando che $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. La moltiplicazione effettuata corrisponde dunque ad effettuare, sulle due rette trovate nel primo punto e dunque sui punti di $A$ ad esse appartenenti, una rotazione in senso antiorario, centrata nell'origine e di ampiezza $\pi/4$, e una dilatazione di un fattore $\sqrt{2}$ (cioè l'applicazione $z \mapsto \sqrt{2}z$).

2. (a) L'applicazione lineare $L_k$ è biunivoca solo se la matrice $A_k$ ha determinante diverso da zero. Poichè $\det A_k = -k^2(k+1)$, si ha che $L_k$ è biunivoca solo se $k \neq 0$ e $k \neq -1$.

(b) Sia $k = 0$, Allora:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto: $\mathrm{rk}\,(A_0) = 1$, infatti una colonna è formata dal vettore identicamente nulllo, mentre la prima e la seconda colonna sono uguali.
Quindi, per il teorema di nullità più rango, lo spazio immagine ha dimensione 1, mentre il nucleo ha dimensione 2.
Come base dello spazio immagine può essere scelto un qualsiasi vettore proporzionale al vettore $(0, 1, 1)^T$.
Una base del nucleo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato, che in questo caso si riduce all'equazione $3x + y = 0$, con $z$ qualsiasi. Il nucleo di $L_k$ è allora formato dai vettori $(\alpha, -3\alpha, \beta)^T$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e una base può essere ottenuta ad esempio scegliendo i vettori $(1, -3, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$.

Sia $k = -1$, Allora:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso esistono minori di ordine due con determinante diverso da zero, $\det A_{-1} = 0$, quindi: $\mathrm{rk}\,(A_{-1}) = 2$ e, di conseguenza, lo spazio immagine ha dimensione 2, mentre il nucleo ha dimensione 1.
Una base dello spazio immagine può essere rappresentata dai vettori colonna indipendenti di

$A_{-1}$, ad esempio: $(-1,1,1)^T$ e$(1,-1,0)^T$.
Il nucleo di $A_{-1}$ è lo spazio monodimensionale $(\alpha,-5\alpha,-3\alpha)^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e per base si può scegliere il singolo vettore $(1,-5,-3)^T$.

3. Sia $A$ la matrice dei coefficienti del sistema e $(A|b)$ la matrice completa.

   (a) Se $\mathrm{rk}\,(A) = 3$ il sistema può avere un'unica soluzione se $\mathrm{rk}\,(A|b) = 3$ e non averne affatto se $\mathrm{rk}\,(A|b) = 4$.
   Sia $M$ un minore di ordine 3 della matrice $A$, ad esempio quello formato dalle prime tre righe. Si ha: $\det M = k^2(k-1)$. Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ allora $\mathrm{rk}\,(A) = 3$ e non ci possono essere soluzioni molteplici.
   Se $k = 0$ allora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Si osserva che:
   $\mathrm{rk}\,(A) = 2$ (due colonne sono uguali)
   $\mathrm{rk}\,(A|b) = 3$ (il minore di ordine tre formato dalle prime tre righe e ultime tre colonne ha determinante diverso da zero).
   Pertanto il sistema non ha soluzioni.

   Se $k = 1$, allora:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si osserva che:
   $\mathrm{rk}\,(A) = 2$ (la quarta riga è uguale alla seconda meno la prima e la terza riga è il doppio della quarta)
   $\mathrm{rk}\,(A|b) = 2$ (per lo stesso motivo: la quarta riga è uguale alla seconda meno la prima e la terza riga è il doppio della quarta).
   Pertanto il sistema ha $\infty^1$ soluzioni.
   Risolvendo il sistema, scegliendo $y$ come parametro libero e ricordando che le ultime due righe sono ridondanti, si ottiene la soluzione:

$$r = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   (b) Se $q$ è una retta appartenente al piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$, allora il vettore direzione di $q$ ($\boldsymbol{v}_q$) deve essere ortogonale al vettore direzione di $r$ ($\boldsymbol{v}_r$) e al vettore normale a $\pi$ ($\boldsymbol{v}_\pi$). Vale a dire che $\boldsymbol{v}_q$ deve essere un qualsiasi vettore proporzionale a $\boldsymbol{v}_\pi \wedge \boldsymbol{v}_r = (-3,0,-3)^T$.
   Scelto $\boldsymbol{v}_q = (1,0,1)^T$, la retta $q$ deve intersecare la retta $r$ in un punto $P$. $P$ deve inoltre appartenere al piano $\pi$, quindi: $P = r \cap \pi$. Nel punto $P$ il parametro $t$ della retta $r$ deve soddisfare la condizione: $(3-2t) + t - (-1+2t) = 1$, cioè: $t = 1$. Pertanto: $P = (1,1,1)$.
   L'equazione parametrica della retta $q$ risulta:

$$q = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. (a) L'equazione caratteristica è: $\det(A_\alpha - \lambda\mathbb{I}) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \alpha\lambda - \alpha - 1) = 0$, da cui si calcolano gli autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = \alpha + 1$.
L'autovalore $\lambda_1 = -1$ ha molteplicità algebrica non minore di 2. Determiniamo la dimensione dell'autospazio relativo. Il rango della matrice

$$A - \mathbb{I}\lambda_1 = A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 4+2\alpha & 4+2\alpha & 0 \\ -6 & -5-\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

è 2 se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$. Se $\alpha = -2$ la dimensione algebrica dell'autovalore 1 è 3 e la dimensione geometrica dell'autospazio relativo è 2, quindi la matrice non è diagonalizzabile. Se $\alpha = 1$ la dimensione algebrica dell'autovalore 1 è 2, uguale alla dimensione geometrica dell'autospazio, pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Possiamo concludere che solo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e il suo spettro è $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-1^2, 2\}$.

(b) Determiniamo l'autospazio bidimensionale relativo all'autovalore -1.

$$\lambda_1 = -1, \qquad \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Determiniamo l'autospazio monodimensionale relativo all'autovalore 2.

$$\lambda_3 = 2, \qquad \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Seconda prova in itinere-Versione A

7 febbraio 2013

1. (punti 5) Determinare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{n}\left[\frac{2n}{\alpha(n+1)}\right]^n$$

2. (punti 9) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2}{5}-x\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

3. 
   - (punti 4) Calcolare, al variare del parametro $a \neq 1$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)^{1/5} - \sqrt[3]{1+x\sin x}}{\log(\cos x)}.$$

   - (punti 2) Si consideri, al variare dei parametri $a, c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f_{a,c}(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)^{1/5} - \sqrt[3]{1+x\sin x}}{\log(\cos x)} & \text{se } x \in (-1,1), x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Stabilire se, fissato il valore del parametro $c$, è possibile trovare un valore del parametro $a$ tale che $f_{a,c}$ sia continua in $x = 0$.

4. 
   - (punti 4) Calcolare:

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx$$

   - (punti 2) Posto:

$$F_\alpha(x) = \int_{-1}^{x} \left|\frac{e^{3t}+e^{-t}}{e^{2t}-e^{-2t}}\right|^\alpha dt$$

   determinare il dominio di $F_\alpha(x)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

5. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

6. (punti 4) Discutere il concetto di formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange, enunciando i principali risultati al riguardo e discutendone le applicazioni.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Seconda prova in itinere-Versione B

7 febbraio 2013

1. (punti 5) Determinare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}} \left[\frac{\alpha n}{2(n+1)}\right]^n$$

2. (punti 9) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2}{5} + x\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

3. 
   - (punti 4) Calcolare, al variare del parametro $a \neq 1$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)^{1/4} - \sqrt[3]{1+2x\sin x}}{\log(\cos x)}.$$

   - (punti 2) Si consideri, al variare dei parametri $a, c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f_{a,c}(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)^{1/4} - \sqrt[3]{1+2x\sin x}}{\log(\cos x)} & \text{se } x \in (-1,1), x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Stabilire se, fissato il valore del parametro $c$, è possibile trovare un valore del parametro $a$ tale che la $f_{a,c}$ sia continua in $x = 0$.

4. 
   - (punti 4) Calcolare:

$$\int \frac{e^{-3x}+e^x}{e^{-2x}-e^{2x}} dx$$

   - (punti 2) Posto:

$$F_\alpha(x) = \int_{-1}^{x} \left|\frac{e^{-3t}+e^t}{e^{-2t}-e^{2t}}\right|^\alpha dt$$

   determinare il dominio di $F_\alpha(x)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

5. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

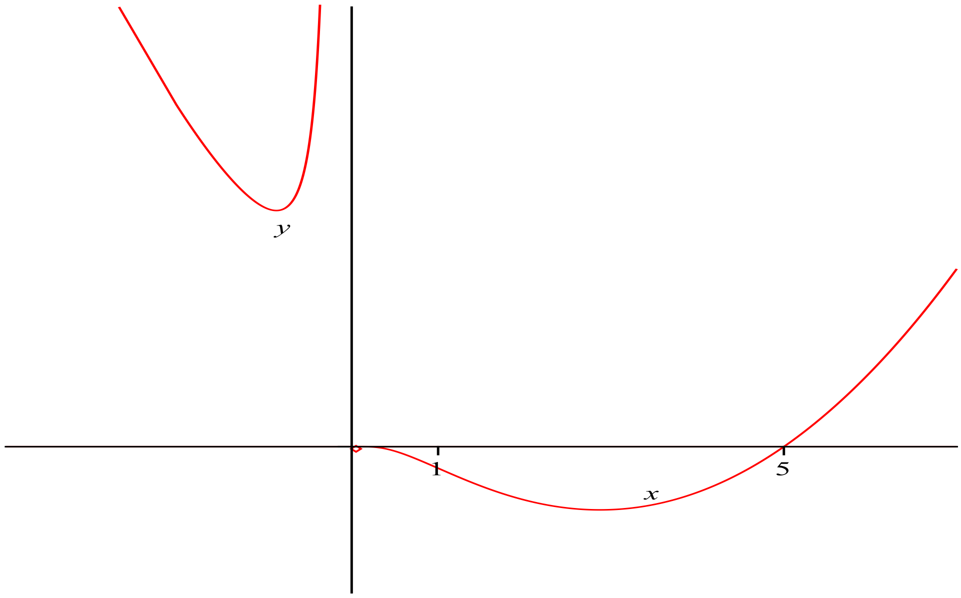
6. (punti 4) Discutere il concetto di formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange, enunciando i principali risultati al riguardo e discutendone le applicazioni.

# Seconda prova in itinere-Soluzioni (versione A)

1. La serie è a termini positivi. La presenza dell'esponente $n$ suggerisce di applicare il criterio della radice.
   Calcoliamo:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{n}\left[\frac{2n}{\alpha(n+1)}\right]^n}$$
   Poichè:
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{n} &= \frac{2}{n\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)} \\ &= n^{-3/2}+o(n^{-3/2})\end{aligned}$$
   ricordando che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\gamma}=1\ \forall\gamma\in\mathbb{R}$, segue:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{n}\left[\frac{2n}{\alpha(n+1)}\right]^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\alpha(n+1)} = \frac{2}{\alpha}$$
   da cui segue che la serie converge se $\alpha > 2$ e diverge se $\alpha < 2$.
   Se $\alpha = 2$ il criterio della radice non fornisce indicazioni sul carattere della serie.
   In tal caso, si discute l'andamento asintotico del termine generale della serie:
$$a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{1}{n^{3/2}}\frac{1}{e} \quad \text{per } n\to+\infty$$
   Per il criterio del confronto asintotico, la serie converge anche nel caso $\alpha = 2$.

2. La funzione è definita per $x \neq 0$. Si ha:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to0^+} = 0^-,\ \lim_{x\to0^-} = +\infty.$$
   Dunque $x = 0$ è asintoto verticale sinistro per $f$. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, e dunque non sono presenti asintoti obliqui. Il segno della funzione coincide con quello del polinomio $\frac{x^2}{5}-x$, dunque $f(x) > 0$ se $x > 5$ oppure $x < 0$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in (0,5)$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 5$. Calcoli elementari mostrano che la derivata di $f$, definita per $x \neq 0$, vale
$$f'(x) = e^{-1/x}\frac{2x^2-4x-5}{5x}.$$
   Si ha che $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$, e dunque $f(x)$ si avvicina al proprio limite per $x \to 0^+$ con tangente che tende a diventare orizzontale. Infine, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = (2\pm\sqrt{14})/2$. Lo studio del segno di $f'$ è immediato e mostra che $f$ è crescente in $((2-\sqrt{14})/2, 0)$ e in $((2+\sqrt{14})/2,+\infty)$, mentre essa 'e decrescente in $(-\infty,(2-\sqrt{14})/2)$ e in $(0,(2+\sqrt{14})/2)$. In particolare i punti $x = (2\pm\sqrt{14})/2$ sono entrambi punti di minimo relativo, mentre $x = (2+\sqrt{14})/2$ è anche punto di minimo assoluto. La funzione è invece illimitata dall'alto.

   Si calcola infine, sempre per $x \neq 0$,
$$f''(x) = e^{-1/x}\frac{2x^3+2x^2+x-5}{5x^3} = e^{-1/x}\frac{(x-1)(2x^2+4x+5)}{5x^3}.$$




Il polinomio $2x^2 + 4x + 5$ è sempre positivo, quindi la derivata seconda si annulla solo in $x = 1$. Lo studio del segno di $f''$ mostra che $f$ è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$, concava se $x \in (0, 1)$ (si noti che $1 < (2 + \sqrt{14})/2$). $x = 1$ è dunque punto di flesso. In conclusione il grafico della funzione è quello rappresentato appena sopra.

3. Si noti che, per $x \to 0$,

$$\left(\frac{1 + ax^2}{1 + x^2}\right)^{1/5} = \left(1 + \frac{(a-1)x^2}{1 + x^2}\right)^{1/5} = (1 + (a-1)x^2 + o(x^2))^{1/5} = 1 + \frac{a-1}{5}x^2 + o(x^2)$$

e che, sempre per $x \to 0$,

$$\sqrt[3]{1 + x \sin x} = \left(1 + x^2 + o(x^2)\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$
$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1+ax^2}{1+x^2}\right)^{1/5} - \sqrt[3]{1 + x \sin x}}{\log(\cos x)} = -\lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{a-1}{5}x^2 + o(x^2) - (1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$
$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3a-8}{15}x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{16 - 6a}{15}.$$

In effetti, ciò è chiaro per $a \neq 8/3$, visto che in tal caso il termine dominante a numeratore della penultima frazione sopra scritta non si annulla. Ma anche se $a = 8/3$ si ottiene dal calcolo precedente che il limite cercato coincide con $-\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$, e tale limite per definizione di $o$ vale zero, coerentemente con quanto asserito sopra.

Circa la seconda parte, $f_{a,c}$ risulta continua se e solo se essa lo è in $x = 0$, e ciò accade se e solo se $\frac{16-6a}{15} = c$, cioè se e solo se $a = \frac{16-15c}{6}$.

4. • L'integranda è razionalizzabile con la sostituzione: $e^x = t$.

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}e^x dx = \int \frac{t^2+t^{-2}}{t^2-t^{-2}}dt = \int \frac{t^4+1}{t^4-1}dt$$

La scomposizione in fratti semplici può avvenire nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\frac{t^4+1}{t^4-1} &= \frac{t^4-1+2}{t^4-1}\\ &= 1+\frac{2}{t^4-1}\\ &= 1+\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2+1}\end{aligned}$$

Integrando:

$$\int \frac{t^4+1}{t^4-1}dt = t+\frac{1}{2}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right)-\text{arctg } t+K$$

Tornando alla variabile $x$:

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = e^x+\log\sqrt{\frac{|e^x-1|}{e^x+1}}-\text{arctg }(e^x)+K$$

• La funzione integranda ha una singolarità in $t=0$. Analizziamo il comportamento asintotico della funzione integranda per $t\to 0^-$:

$$\left|\frac{e^{3t}+e^{-t}}{e^{2t}-e^{-2t}}\right|^\alpha = \left|\frac{1+o(1)+1+o(1)}{1+2t+o(t)-(1-2t+o(t))}\right|^\alpha \sim \left|\frac{1}{2t}\right|^\alpha \quad \text{per } t\to 0^-$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge in senso improprio se $0<\alpha<1$, non converge se $\alpha\geq 1$. Pertanto, il dominio della funzione $F_\alpha(x)$ è $\mathbb{R}$ se $0<\alpha<1$, $(-\infty,0)$ se $\alpha\geq 1$.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 22/02/2013 (A)

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $A_\alpha$ la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -5\alpha & 12\alpha & 2 \\ -2\alpha & 5\alpha & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (punti 3) Discutere la diagonalizzabilità della matrice $A_\alpha$ al variare del parametro $\alpha$.
- (punti 1) Posto: $B_\alpha = A_\alpha^2$, determinare gli autovalori di $B_\alpha$.
- (punti 1) La matrice $B_\alpha$ è diagonalizzabile?

2. • (punti 5) Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = 2(\cos x)^\alpha - \left[1 - \sin\left(x^2\right)\right]^\beta - x^5 - 1.$$

- (punti 1) Determinare al variare di $\alpha$ e $\beta$ il segno della funzione $f_{\alpha,\beta}(x)$ in un intorno di $x = 0$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (|x| - 1)e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{1 + 2x})$.

   b) (punti 1) Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{1 + 2|x|})\, dx.$$

   c) (punti 1) Mostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \arctan(\sqrt{1 + 2|t|})\, dt = +\infty.$$

5. (punti 4) Enunciare a dimostrare il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone

6. (punti 4) Discutere i principali criteri di convergenza per le serie numeriche.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 22/02/2013 (Versione B)

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $A_\alpha$ la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -5\alpha & 12\alpha & -4 \\ -2\alpha & 5\alpha & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   - (punti 3) Discutere la diagonalizzabilità della matrice $A_\alpha$ al variare del parametro $\alpha$.
   - (punti 1) Posto: $B_\alpha = A_\alpha^2$, determinare gli autovalori di $B_\alpha$.
   - (punti 1) La matrice $B_\alpha$ è diagonalizzabile?

2. 
   - (punti 5) Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = 2(\cos x)^\alpha + \left[1 - \sin\left(x^2\right)\right]^\beta - x^5 - 3.$$

   - (punti 1) Determinare al variare di $\alpha$ e $\beta$ il segno della funzione $f_{\alpha,\beta}(x)$ in un intorno di $x = 0$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (|x| - 2)e^{\frac{2}{x+2}}.$$

   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. 
   a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x})$.

   b) (punti 1) Calcolare
$$\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{1+|x|})\,\mathrm{d}x.$$

   c) (punti 1) Mostrare che
$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \arctan(\sqrt{1+|t|})\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

5. (punti 4) Enunciare a dimostrare il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone

6. (punti 4) Discutere i principali criteri di convergenza per le serie numeriche.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 22/02/2013 (C)

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $A_\alpha$ la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5\alpha & -12\alpha & 3 \\ 2\alpha & -5\alpha & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

   - (punti 3) Discutere la diagonalizzabilità della matrice $A_\alpha$ al variare del parametro $\alpha$.
   - (punti 1) Posto: $B_\alpha = A_\alpha^2$, determinare gli autovalori di $B_\alpha$.
   - (punti 1) La matrice $B_\alpha$ è diagonalizzabile?

2. - (punti 5) Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\cos x)^\alpha - 2\left[1 - \sin\left(x^2\right)\right]^\beta - x^5 + 1.$$

   - (punti 1) Determinare al variare di $\alpha$ e $\beta$ il segno della funzione $f_{\alpha,\beta}(x)$ in un intorno di $x = 0$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (|x| - 2)e^{\frac{2}{2-x}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{2+x})$.
   b) (punti 1) Calcolare
$$\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{2+|x|})\,\mathrm{d}x.$$
   c) (punti 1) Mostrare che
$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \arctan(\sqrt{2+|t|})\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

5. (punti 4) Enunciare a dimostrare il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone

6. (punti 4) Discutere i principali criteri di convergenza per le serie numeriche.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
| --- | --- | --- |

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 22/02/2013 (D)

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $A_\alpha$ la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5\alpha & -12\alpha & -6 \\ 2\alpha & -5\alpha & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (punti 3) Discutere la diagonalizzabilità della matrice $A_\alpha$ al variare del parametro $\alpha$.
- (punti 1) Posto: $B_\alpha = A_\alpha^2$, determinare gli autovalori di $B_\alpha$.
- (punti 1) La matrice $B_\alpha$ è diagonalizzabile?

2.
- (punti 5) Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\cos x)^\alpha + 2\left[1 - \sin\left(x^2\right)\right]^\beta - x^5 - 3.$$

- (punti 1) Determinare al variare di $\alpha$ e $\beta$ il segno della funzione $f_{\alpha,\beta}(x)$ in un intorno di $x = 0$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (|x| - 1)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{3+x})$.
   b) (punti 1) Calcolare
   $$\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{3+|x|})\,\mathrm{d}x.$$
   c) (punti 1) Mostrare che
   $$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \arctan(\sqrt{3+|t|})\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

5. (punti 4) Enunciare a dimostrare il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone

6. (punti 4) Discutere i principali criteri di convergenza per le serie numeriche.

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 22/2/13-Soluzioni (versione A)

1. Cerchiamo gli autovalori della matrice $A_\alpha$ risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det(A_\alpha - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 + \alpha^2\lambda = \lambda(\alpha-\lambda)(\alpha+\lambda) = 0.$$

Gli autovalori risultano essere: $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm\alpha$.
Se $\alpha \neq 0$, ci sono tre autovalori reali distinti, quindi $A_\alpha$ è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 0$ la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

ha un solo autovalore reale $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 3.
La matrice $A_0$ non è diagonalizzabile perchè l'unica matrice diagonalizzabile con tutti gli autovalori uguali a zero è la matrice identicamente nulla (l'unica che abbia dimensione del nucleo uguale a 3).

Circa il secondo punto, in generale se $\lambda$ è autovalore della matrice $A$, allora $\lambda^2$ è autovalore della matrice $A^2$. Infatti, sia $\boldsymbol{v}$ un vettore non nullo tale che $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Poichè:

$$A^2\boldsymbol{v} = A(A\boldsymbol{v}) = A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A(\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v},$$

allora $\boldsymbol{v}$ è autovettore anche di $A^2$.
Pertanto, gli autovalori della matrice $A_\alpha^2$ sono: $\lambda = 0$ e $\lambda = \alpha^2$.

Circa il terzo punto si osservi che, se una matrice $A$ è diagonalizzabile, anche $A^2$ è diagonalizzabile. Ricordiamone la dimostrazione. Se $A$ è diagonalizzabile, significa che esiste una matrice invertibile $S$ tale che $SAS^{-1} = \Lambda$, con $\Lambda$ matrice diagonale. Poichè:

$$SA^2S^{-1} = SAAS^{-1} = SAS^{-1}SAS^{-1} = \Lambda^2,$$

anche $A^2$ risulta simile a $\Lambda^2$ anch'essa diagonale.
$A_\alpha^2$ è quindi diagonalizzabile per ogni $\alpha \neq 0$. $A_0^2$ non è invece diagonalizzabile, perchè ha tutti gli autovalori uguali a zero, ma alcuni suoi elementi sono non nulli, quindi è diversa dalla matrice identicamente nulla.

2. Si noti che la funzione è ben definita in un intorno dell'origine per ogni valore di $\alpha$ e $\beta$. La presenza del termine $-x^5$ e la parità dei primi due termini suggerisce di arrestare lo sviluppo di McLaurin al quinto ordine.

$$\begin{aligned}
(\cos x)^\alpha &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^\alpha \\
&= 1 + \alpha\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{24}x^4 + o(x^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-\sin x^2)^\beta &= \left(1 - x^2 + o(x^5)\right)^\beta \\
&= 1 + \beta\left(-x^2 + o(x^5)\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(-x^2 + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \beta x^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di McLaurin della funzione arrestato al quinto ordine è il seguente:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\beta-\alpha)x^2 + \left(\frac{3\alpha^2-2\alpha}{12} - \frac{\beta(\beta-1)}{2}\right)x^4 - x^5 + o(x^5).$$

Se $\alpha \neq \beta$ il termine principale della funzione è dell'ordine $x^2$.
Se invece $\alpha = \beta$ il termine principale è almeno del quarto ordine:

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\alpha}(x) &= \left(\frac{3\alpha^2-2\alpha}{12} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right)x^4 - x^5 + o(x^5) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha\right)x^4 - x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Il termine del quarto ordine si annulla se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \frac{4}{3}$.
Pertanto, se $\alpha = \beta \neq 0$ e $\alpha = \beta \neq \frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine $x^4$.
Se $\alpha = \beta = 0$ oppure $\alpha = \beta = \frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine $x^5$.

Riguardo alla seconda domanda, si osservi che se $\alpha < \beta$ la funzione presenta un minimo in $x = 0$ e $f_{\alpha,\beta}(x) \geq 0$ in un intorno dell'origine. Se $\alpha > \beta$ la funzione presenta un massimo in $x = 0$ e $f_{\alpha,\beta}(x) \leq 0$ in un intorno dell'origine.
Sia ora $\alpha = \beta$. Se $0 < \alpha < \frac{4}{3}$, $f_{\alpha,\alpha}(x)$ presenta un minimo in $x = 0$ e $f_{\alpha,\alpha}(x) \geq 0$ in un intorno dell'origine. Se $\alpha < 0 \vee \alpha > \frac{4}{3}$, $f_{\alpha,\alpha}(x)$ presenta un massimo in $x = 0$ e $f_{\alpha,\alpha}(x) \leq 0$ in un intorno dell'origine. Se $\alpha = \frac{4}{3}$, allora: $f_{\frac{4}{3},\frac{4}{3}}(x) = -x^5 + o(x^5)$. Si ha: $f_{\alpha,\alpha}(x) > 0$ in un intorno sinistro dell'origine, $f_{\alpha,\alpha}(x) < 0$ in un intorno destro dell'origine. Se $\alpha = 0$, $f_{0,0}(x) = -x^5$. Quindi $f_{0,0}(x) > 0$ se $x < 0$, $f_{0,0}(x) > 0$ se $x > 0$.

3. La funzione è definita per $x \neq -1$. Non vi sono simmetrie. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = 0.$$

Poiché si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm 1$, è possibile che siano presenti asintoti obliqui. Per verificarlo si osservi che, usando il noto sviluppo di McLaurin dell'esponenziale si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{\sim} (x-1)\left(1+\frac{1}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x; \\ f(x) &\underset{x\to-\infty}{\sim} (-x-1)\left(1+\frac{1}{x+1}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -x-2. \end{aligned}$$

Quindi le rette $y = x$ e $y = -x-2$ sono asintoti obliqui per la funzione rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

La funzione è positiva per $x > 1$ e $x < 1$, negativa per $x \in (-1, 1)$, e si annulla per $x = 1$ (si ricordi che essa non è definita in $x = -1$). Vale inoltre $f(0) = -e$. Per calcolare la derivata prima è opportuno considerare la funzione separatamente per $x > 0$ e per $x < 0$ (con $x \neq -1$). Se $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad \forall x > 0.$$

Il polinomio a numeratore è sempre positivo, e ciò mostra che $f$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Si noti che $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 2e$. Se $x < 0$ si ha invece

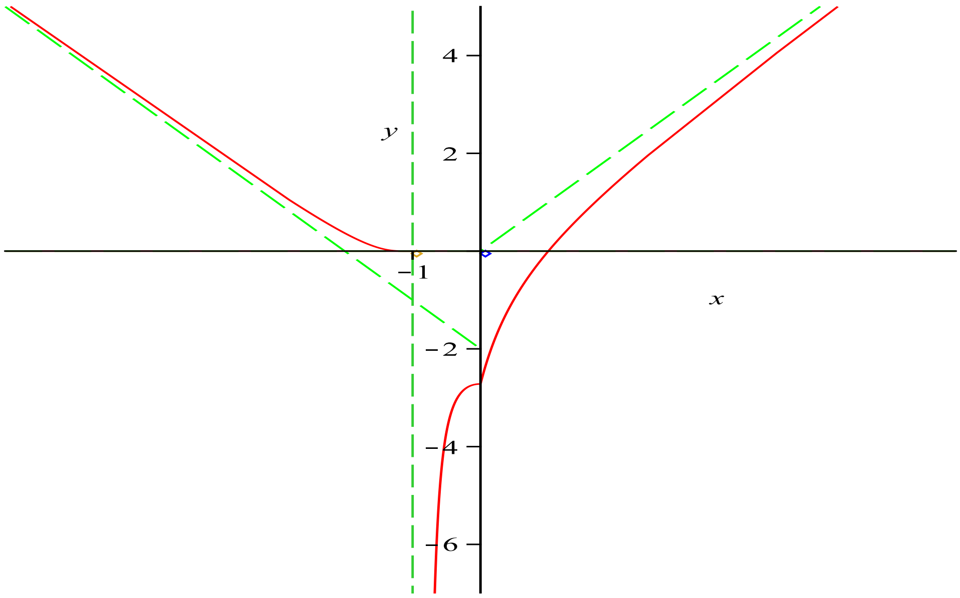
$$f'(x) = -\frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad \forall x < 0.$$

Dunque $f$ è crescente per $x \in (-1, 0]$ e decrescente per $x < -1$. Si noti inoltre che $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, e dunque $x = 0$ è punto angoloso per $f$: in particolare $f$ non è ivi derivabile. Inoltre $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$, dunque la funzione si avvicina al proprio limite da sinistra in tale punto con tangente che tende a diventare orizzontale. Non vi sono punti di estremo relativo né tantomeno assoluto.

Calcoliamo ora la derivata seconda, per $x \neq -1, x \neq 0$. Si ha

$$f''(x) = -\frac{3x+5}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad \forall x > 0.$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad \forall x < 0, x \neq -1.$$

Ciò mostra subito che $f''(x)$ è positiva per $x < -1$, mentre $f''(x)$ è negativa per $x \in (-1, 0)$ e per $x > 0$. Dunque $f$ è convessa in $(-\infty, -1)$, concava in $(-1, 0]$ e in $[0, +\infty)$ (attenzione: essa *non* è concava nell'intero intervallo $(-1, +\infty)$). In conclusione il grafico della funzione è il seguente:




4. Si ponga $\sqrt{1+2x} = t$. Ne segue che $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Dunque, integrando poi per parti e ritornando infine alla variabile $x$:

$$\begin{aligned}
\int \arctan(\sqrt{1+2x})\,\mathrm{d}x &= \int t \arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\arctan t \\
&= \frac{1}{2}(t^2+1)\arctan t - \frac{t}{2} \\
&= (x+1)\arctan(\sqrt{1+2x}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x},
\end{aligned}$$

dove si è posta per semplicità uguale a zero la costante di integrazione (si ricordi che viene chiesto di calcolare *una* primitiva). Circa il punto b) si noti che, essendo la funzione integranda pari, si ha

$$\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{1+2|x|})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \arctan(\sqrt{1+2x})\,\mathrm{d}x = 2\left[(x+1)\arctan(\sqrt{1+2x}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x}\right]_0^1$$
$$= 1-\sqrt{3}+\frac{5}{6}\pi.$$

Circa il punto c) si noti che la funzione integranda è pari ed è crescente per $t>0$, dunque $\arctan(\sqrt{1+2t}) \geq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ per ogni $t>0$. Abbiamo allora

$$\int_{-x}^{x} \arctan(\sqrt{1+2|t|})\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x \arctan(\sqrt{1+2t})\,\mathrm{d}t \geq 2\int_0^x \frac{\pi}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

L'asserto segue dal teorema del confronto.

| Cognome: | Nome: | Matricola: |
|---|---|---|

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 27/6/2013 (A)

1. 
   - (punti 4) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione
   $$z^4(\sqrt{3}+i)^2 = 1 + 2z\bar{z}.$$
   Rappresentare l'insieme $A$ di tali soluzioni nel piano complesso.
   - (punti 1) Rappresentare nel piano complesso l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = 1 + iz, z \in A\}$.

2. Data l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x + \alpha y + (\alpha+1)z \\ y' = \alpha x + y + (\alpha+1)z \\ z' = x + \alpha y \end{cases},$$
   (a) (punti 3) determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione del nucleo e dell'immagine di $f_\alpha$.

   (b) (punti 3) Determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione dello spazio delle controimmagini del piano $x' - y' = 0$ attraverso l'applicazione lineare $f_\alpha$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2+e^{4x}}$.

   b) (punti 2) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ esiste finito
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha|x|}(2+\cos x)}{2+e^{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

5. (punti 4) Mostrare che una serie assolutamente convergente è convergente.

6. (punti 4) Dare le due definizioni equivalenti di funzione continua in un punto, ed enunciare le principali proprietà delle funzioni continue.

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| --- | --- | --- |

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

# Prova scritta del 27/6/2013 (B)

1. • (punti 4) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4(1+\sqrt{3}i)^2 = 1 + 2z\overline{z}.$$

Rappresentare l'insieme $A$ di tali soluzioni nel piano complesso.

• (punti 1) Rappresentare nel piano complesso l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = 1 + iz, z \in A\}$.

2. Data l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + y + (1-\alpha)z \\ y' = x + \alpha y + (\alpha - 1)z \\ z' = \alpha x + y \end{cases},$$

(a) (punti 3) determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione del nucleo e dell'immagine di $f_\alpha$.

(b) (punti 3) Determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione dello spazio delle controimmagini del piano $x' + y' = 0$ attraverso l'applicazione lineare $f_\alpha$.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{1+e^{4x}}$.

b) (punti 2) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ esiste finito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha|x|}(2+\sin x)}{1+e^{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

5. (punti 4) Mostrare che una serie assolutamente convergente è convergente.

6. (punti 4) Dare le due definizioni equivalenti di funzione continua in un punto, ed enunciare le principali proprietà delle funzioni continue.

# Prova scritta del 27/6/2013 - Soluzioni della versione A

1. • Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4(\sqrt{3}+i)^2 = 1 + 2z\bar{z}.$$

Rappresentare l'insieme $A$ di tali soluzioni nel piano complesso.

• (punti 1) Rappresentare nel piano complesso l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = 1 + iz, z \in A\}$.

**Soluzione**. Si ha $(\sqrt{3}+i)^2 = 4e^{i\pi/3}$. Quindi, posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$, l'equazione scritta diventa

$$4\varrho^4 e^{i\left(4\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)} = 1 + 2\varrho^2.$$

Poiché la quantità a destra è reale e positiva, dovrà essere reale e positiva anche la quantità a sinistra. Ciò accade se e solo se $4\vartheta + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, ovvero $\vartheta = \frac{\pi}{12}(6k-1)$, per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Ciò corrisponde, a meno di multipli di $2\pi$, alle fasi $\vartheta = \vartheta_{1,2,3,4} = -\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$. Per tali scelte di $\vartheta$, l'equazione considerata si riduce a $4\varrho^4 - 2\varrho^2 - 1 = 0$. Ciò implica (ricordando che $\varrho$ deve essere positivo) che $\varrho = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$. Si trovano dunque quattro punti, tutti sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$, corrispondenti alle fasi $\vartheta_{1,2,3,4}$.

Circa il secondo punto, la trasformazione $z \mapsto 1 + iz$ corrisponde a una rotazione in senso antiorario di angolo $\pi/2$ e a una traslazione, di misura uno, nella direzione delle $x$ positive. Dunque $B$ è costituito da quattro punti sulla circonferenza centrata nel punto $z = 1$, con fasi identiche a quelle precedenti.

2. Data l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x + \alpha y + (\alpha+1)z \\ y' = \alpha x + y + (\alpha+1)z \\ z' = x + \alpha y \end{cases},$$

(a) (punti 3) determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione del nucleo e dell'immagine di $f_\alpha$.

(b) (punti 3) Determinare, al variare del parametro $\alpha$, la dimensione dello spazio delle controimmagini del piano $x' - y' = 0$ attraverso l'applicazione lineare $f_\alpha$.

**Soluzione**.

(a) Sia $A_\alpha$ la matrice associata all'applicazione lineare $f_\alpha$. Risulta:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è: $\det A_\alpha = (\alpha+1)^2(\alpha-1)$.

Si determina il rango di $A_\alpha$ e, conseguentemente, dal teorema "nullità più rango" si ricavano le dimensioni del nucleo e dell'immagine di $f_\alpha$.:

$$\text{Rk}\ (A_\alpha) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq \pm 1 & \rightarrow & \text{Dim (Im } (f)) = 3, & \text{Dim (Ker } (f)) = 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = +1 & \rightarrow & \text{Dim (Im } (f)) = 2, & \text{Dim (Ker } (f)) = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 & \rightarrow & \text{Dim (Im } (f)) = 1, & \text{Dim (Ker } (f)) = 2 \end{cases}$$

(b) La condizione $x' - y' = 0$ equivale a $x(1-\alpha) = y(1-\alpha)$. Se $\alpha = 1$ ciò è sempre vero, quindi la dimensione richiesta è tre, se invece $\alpha \neq 1$ l'insieme delle controimmagini è il piano $x = y$, che ha dunque dimensione due.

3. (punti 9) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è definita per ogni $x$. Non vi sono simmetrie. Per calcolare i limiti di $f$ per $x \to \pm\infty$, si noti che

$$f(x) = |x|\sqrt{\left|1 - \frac{4}{x^2}\right|} - x = |x|\left[1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - x = |x| - x - \frac{2}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{per } x \to \pm\infty.$$

Quindi $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$, mentre $f(x) = -2x + o(1)$ per $x \to -\infty$. Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $f$ se $x \to +\infty$ la retta $y = -2x$ è asintoto obliquo per $f$ se $x \to -\infty$. Determiniamo gli zeri della funzione. L'equazione $\sqrt{|x^2 - 4|} = x$ può essere verificata solo se $x > 0$. In tal caso, essa equivale a $|x^2 - 4| = x^2$. Tale equazione non ha soluzioni se $|x| \geq 2$. Se invece $x \in (-2, 2)$ essa equivale a $4 - x^2 = x^2$, che è soddisfatta nell'intervallo considerato se e solo se $x = \sqrt{2}$. Si vede facilmente che $f$ è positiva se $x < \sqrt{2}$, negativa altrimenti.

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 2$. Per calcolare la derivata è necessario considerare separatamente due casi. Si ha

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - 1 \text{ se } |x| < 2, \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 \text{ se } |x| > 2.$$

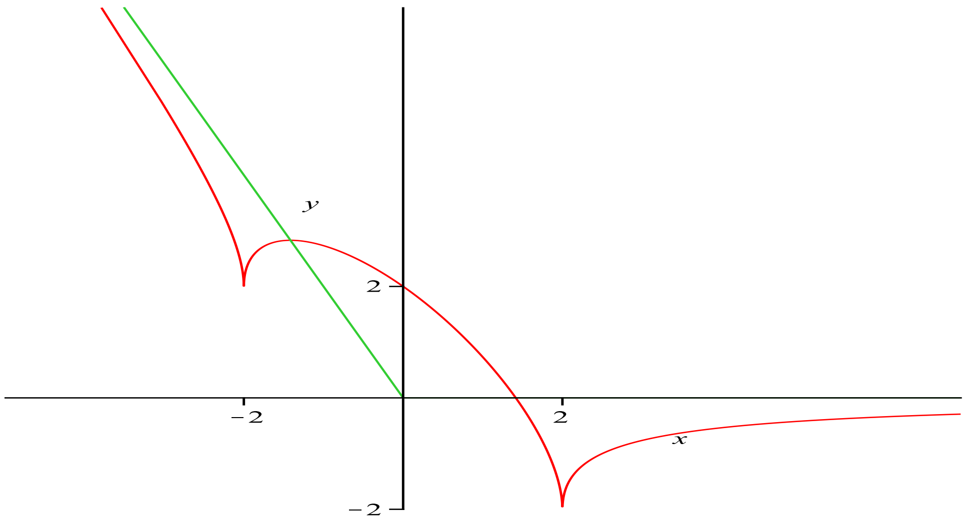
Studiando gli zeri e il segno delle due espressioni di $f'$ nei rispettivi domini di definizione, si vede che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt{2}$, che $f$ è crescente negli intervalli $[-2, -\sqrt{2}]$ e $[2, +\infty)$, decrescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[-\sqrt{2}, 2]$. Dunque il punto $x = -\sqrt{2}$ è punto di massimo locale, il punto $x = -2$ è punto di minimo, il punto $x = 2$ è punto di minimo globale. Si noti che i punti $x = \pm 2$ sono entrambi cuspidi: infatti $f$ non è ivi derivabile e si ha

$$\lim_{x \to -2^\pm} f'(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty.$$

Calcoliamo, per $x \neq 2$, la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = -\frac{4}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ se } |x| < 2, \quad f''(x) = -\frac{4}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}} \text{ se } |x| > 2.$$

Si vede quindi che $f''(x) < 0$ per ogni $x \neq \pm 2$. Dunque $f$ è convessa negli intervalli $(-\infty, -2]$, $[-2, 2]$, $[2, +\infty)$. In conclusione, il grafico della funzione è il seguente.




4. a) (punti 4) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2+e^{4x}}$.

   b) (punti 2) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ esiste finito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha|x|}(2+\cos x)}{2+e^{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

**Soluzione**. Calcoliamo, ponendo $e^{4x} = t$,

$$\int \frac{1}{2+e^{4x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t(2+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\log\left|\frac{t}{2+t}\right|$$
$$= \frac{1}{8}\log\left(\frac{e^{4x}}{2+e^{4x}}\right).$$

Circa la seconda domanda, occorre valutare il comportamento della funzione integranda per $x \to \pm\infty$. Si noti che la funzione integranda è sempre positiva e che, per ogni $x$, $1 \le 2+\cos x \le 3$, dunque il fattore $(2+\cos x)$ è irrilevante per la convergenza dell'integrale improprio. Se $\alpha = 0$, l'integrale non esiste finito poichè l'integrando è, ad esempio, maggiore di $1/4$ in un intorno di $-\infty$. Se $\alpha > 0$, similmente l'integrale non esiste poiché l'integrando tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Se $\alpha < 0$, l'integrando è sempre integrabile in un intorno di $+\infty$, infatti $0 < \frac{e^{\alpha|x|}(2+\cos x)}{2+e^{4x}} \le 3e^{-4x}$ per ogni $x$, e $e^{-4x}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$. Lo stesso vale in un intorno di $-\infty$ poiché $0 < \frac{e^{\alpha|x|}(2+\cos x)}{2+e^{4x}} \le \frac{3}{2}e^{\alpha|x|}$ per ogni $x$, e $e^{\alpha|x|}$ è integrabile in un intorno di $-\infty$ essendo $\alpha < 0$. Dunque l'integrale improprio assegnato converge se e solo se $\alpha < 0$.