Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Primo appello di Analisi III, 18 gennaio 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cot z}{z}$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia Q_n il quadrato del piano complesso centrato nell'origine e avente lato n.

(a) Determinare le singolarità isolate di f, e classificarle.

(b) Calcolare $\int_{\partial Q_n} f(z)\, dz$, dove ∂Q_n indica il bordo di Q_n, percorso 1 volta in senso orario.

Soluzione.

(a) Le singolarità di f sono i punti $z_k = k\pi$, al variare di $k \in Z$. Per ogni $k \neq 0$, z_k è un polo semplice, mentre $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2.

(b) Si ha $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ (perché f è pari), mentre per ogni $k \neq 0$ si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)\cos z}{z \sin z} = \lim_{z \to k\pi} \frac{-(z - k\pi)\sin z + \cos z}{\sin z + z \cos z} = \frac{1}{k\pi}\,.$$

In particolare, poiché risulta $\mathrm{Res}(f, z_k) = -\mathrm{Res}(f, -z_k)$, e Q_n è centrato nell'origine, l'integrale assegnato è nullo per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri la funzione

$$u(x) = \big(1 - |x|\big)_+ = \max\{1 - |x|, 0\}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcolare u' e u'' (nel senso delle distribuzioni).

(b) Stabilire se $u \in H^1(\mathbb{R})$ e se $u' \in H^1(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) $u' = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$; $\quad u'' = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1$.

(b) $u \in H^1(\mathbb{R})$; $u' \notin H^1(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Sia $u(x) = (\sin x)\chi_{[-1,1]}(x)$, per $x \in \mathbb{R}$.

a. Senza calcolare $\hat{u}$, rispondere giustificando la risposta alle seguenti domande:

   (i) $\hat{u}$ è pari oppure dispari? è puramente reale o puramente immaginaria?

   (ii) per quali $k \in \mathbb{N}$ si ha $\hat{u} \in C^k(\mathbb{R})$?

   (iii) $\hat{u} \in L^2(R)$?

   (iv) $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$?

b. Calcolare $\hat{u}$.

Soluzione.
a.

(i) $\hat{u}$ è dispari e immaginaria pura, perché u è dispari reale;

(ii) $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$, poiché $x^k u \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

(iii) $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, poiché $u \in L^2(\mathbb{R})$;

(iv) $\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R})$, poiché altrimenti applicando il teorema di Rieman Lebesgue all'antitrasformata, si dovrebbe avere $u \in C^0(\mathbb{R})$.

b. Ricordando che si ha

$$\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]}(x)) = 2\frac{\sin\xi}{\xi}\,, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

otteniamo

$$\hat{u}(\xi) = i\frac{\sin(\xi+1)}{\xi+1} - i\frac{\sin(\xi-1)}{\xi-1}\,.$$

TEORIA. (7 punti)

(a) Fornire la definizione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali normati, e la definizione di norma per un tale operatore.

(b) Scrivere la formulazione variazionale del problema $-\Delta u = f$ in Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con condizione di Dirichlet $u = 0$ su $\partial\Omega$ (dove f è una funzione assegnata in $L^2(\Omega)$), e dimostrare che ogni soluzione classica $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è anche soluzione variazionale.