IV.3 - LO SPAZIO $\mathcal{S}$

La ricerca di uno spazio con le caratteristiche sopra descritte porta a introdurre lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle **funzioni a decrescenza rapida**, ovvero delle funzioni che decrescono più velocemente dell'inverso di ogni polinomio:

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) : \ \forall \alpha, \beta \text{ multi-indici } \ x^\alpha D^\beta u(x) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

N.B: un esempio di multi-indici è: $\alpha = (1,2)$, $\beta = (3,1)$: $\quad x^\alpha D^\beta u = x_1 x_2^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}$

Osservazioni:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è contenuto propriamente in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ad esempio: $e^x \in C^\infty$, ma $e^x \notin \mathcal{S}$).

  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ contiene propriamente $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ad esempio $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, ma $e^{-x^2} \notin C_0^\infty$).

  Si ha quindi che: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è contenuto propriamente in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Esempio:

$u = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si noti che tale funzione risolve l'equazione differenziale: $u' + xu = 0$.
Calcoliamo dunque la trasformata di u a partire da tale osservazione, applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione:

$i\xi\hat{u}(\xi) + i[\hat{u}(\xi)]' = 0; \quad \hat{u}' + \xi\hat{u} = 0$ che è un'equazione uguale a quella di partenza (solo nella variabile ξ), e quindi è risolta allo stesso modo da $\hat{u}(\xi) = ce^{-\xi^2/2}$, che è quindi proprio la trasformata che si stava cercando, a patto di determinare la costante c.

$c = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx$ e tale integrale si calcola con il seguente artificio:

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}dy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1d\theta = 2\pi \;\Rightarrow\; c = \sqrt{2\pi}$$

E quindi in definitiva: $\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Poiché vale che $\|\hat{u}\|_\infty = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \|u\|_1$, questo esempio mostra che la norma della trasformata di Fourier come operatore da L^1 a L^∞ sia uguale a 1.

Teorema: la trasformata di Fourier è un operatore da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ e la formula di inversione vale per ogni funzione di tale spazio.

Dimostrazione:

Per la prima parte della dimostrazione usiamo le seguenti proprietà: $\forall u \in \mathcal{S}, \quad \forall \alpha$ multi-indice

- $\mathcal{F}\left[D^\alpha u\right] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}$
- $D^\alpha u = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}\left[x^\alpha u\right]$

Bisogna dimostrare che se $u \in \mathcal{S}$, allora $\hat{u} \in \mathcal{S}$, e quindi che $\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \in L^\infty$, che è sicuramente vero se $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione integrabile.

$$D^\beta u = (-i)^{|\beta|}\mathcal{F}\left[x^\beta u\right]; \quad \xi^\alpha D^\beta u = (-i)^{|\beta|}\xi^\alpha \mathcal{F}\left[x^\beta u\right] = \frac{(-i)^{|\beta|}}{(i)^{|\alpha|}}\mathcal{F}\left[D^\alpha\left(x^\beta u\right)\right]$$

A parte un coefficiente moltiplicativo quindi $\xi^\alpha D^\beta u$ è la trasformata di $D^\alpha\left(x^\beta u\right)$, che essendo u una funzione di $\mathcal{S}$, è anch'essa una funzione di $\mathcal{S}$, e quindi è in particolare integrabile.

La seconda parte della dimostrazione segue subito. Infatti se $u \in \mathcal{S}$, allora si ha anche sicuramente che $u \in L^1 \cap L^\infty \cap C^\infty$ e per la prima parte si ha anche che $\hat{u} \in \mathcal{S}$, e sono quindi verificate tutte le ipotesi per poter utilizzare la formula di inversione.

Proposizione: siano $v, u \in \mathcal{S}$, allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} v = \int_{\mathbb{R}^N} u \hat{v}$
2. $\int_{\mathbb{R}^N} u \overline{v} = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} \overline{\hat{v}}$
3. $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2$: **identità di Plancherel**, scritta anche $\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}\|_{L^2}^2$
4. $\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\hat{v}$
5. $\mathcal{F}[uv] = (2\pi)^{-N} \hat{u} * \hat{v}$

IV.4 - Trasformata di Fourier in L^2

Lo spazio $\mathcal{S}$ appena definito, sebbene abbia le caratteristiche che si stavano cercando rispetto all'operazione di trasformazione, richiede alle funzioni che vi appartengono un comportamento molto restrittivo. Esso viene quindi utilizzato come passaggio intermedio per arrivare a definire la trasformata di Fourier in uno spazio più ampio, ovvero L^2.

Siano $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\{u_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ una successione di funzioni che converga a u in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Si consideri ora la successione delle trasformate di u_n. Si definisce trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\widehat{u} := \lim_{n \to +\infty} \hat{u}_n \text{ in norma } L^2$$

dove per la trasformata in L^2 abbiamo usato un simbolo diverso da quello della trasformata in L^1 perché per ora non è lecito presumere che portino allo stesso risultato.

1. La definizione è ben data:
   - Il limite esiste sempre finito. Infatti se u_n converge in L^2, allora è di Cauchy, e quindi per l'identità di Plancherel si ha che:

     $$\varepsilon > \left\| u_n - u_m \right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \left\| \mathcal{F}\left[u_n - u_m \right] \right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \left\| \hat{u}_n - \hat{u}_m \right\|_{L^2}^2$$

     e allora anche la successione delle trasformate è di Cauchy e quindi converge in norma L^2 poiché L^2 è uno spazio di Banach.

- Il limite non dipende dalla successione scelta per approssimare u. Infatti, considerate due successioni $\{u_n\},\{v_n\} \subseteq \mathcal{S}$ che tendono alla stessa funzione, si ha che:

  $$\lim_{n\to+\infty}\left[u_n - v_n\right] = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = u - u = 0 \text{ (in norma } L^2\text{)}$$

  Per Plancherel, con lo stesso ragionamento di prima, si vede allora che $\hat{u}_n - \hat{v}_n \xrightarrow{L^2} 0$:

  $$\lim_{n\to+\infty}\left[\hat{u}_n - \hat{v}_n\right] = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \hat{v}_n \text{ (in norma } L^2\text{)}$$

  E quindi le due successioni portano alla stessa trasformata.

2. Nel caso in cui $u \in L^1 \cap L^2$ allora le due definizioni di trasformata in L^1 e L^2 portano allo stesso risultato. È possibile quindi utilizzare un simbolo unico per entrambe e a seconda della funzione da trasformare si utilizzerà la definizione adatta ad essa. Infatti, si può dimostrare che esiste una successione in $\mathcal{S}$ che tenda ad u sia in norma L^1 che L^2:

$$u_n \xrightarrow{L^1, L^2} u \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \hat{u}_n \to \hat{u} \text{ in } L^\infty \\ \hat{u}_n \to \widehat{u} \text{ in } L^2 \end{array} \right| \Rightarrow \hat{u} = \widehat{u} \quad q.o. \text{ per le proprietà degli spazi } L^p$$

3. In generale, per funzioni u che si sa soltanto appartenere a L^2, può proprio non essere neanche definito l'integrale che definisce la trasformata di Fourier in L^1.

4. L'identità di Plancherel vale in generale per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Infatti, si consideri una successione di funzioni $\{u_n\} \subseteq \mathcal{S}$ che tendono a u in norma L^2:

   $u_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \|u_n\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}_n\|_{L^2}^2$; $\quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^2$ e passando al limite:

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 = (2\pi)^{-N} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^2; \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2; \quad \|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}\|_{L^2}^2$$

   dove si è utilizzato il fatto che $u_n \to u$ in $L^2 \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \to \|u\|_{L^2}$

5. Se $u \in L^2(\mathbb{R})$, allora $u_n = u\chi_{(-n,n)} \in L^1 \cap L^2$ e si può quindi dare una formula esplicita per il calcolo della trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{u}(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} u(x)e^{-i\xi x}dx$$

dove ancora una volta il limite è intenso nel senso di L^2.

Teorema: la trasformata di Fourier è un operatore da L^2 in L^2 e la formula di inversione vale per ogni funzione di tale spazio.

<u>*Dimostrazione:*</u>

La prima parte si dimostra immediatamente con l'identità di Plancherel: infatti, se $u \in L^2$, allora $\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2 = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 < +\infty$ e quindi anche $\hat{u} \in L^2$.

Per la seconda parte, basta considerare una successione di funzioni $\{u_k\} \subseteq \mathcal{S}$ e quindi: $\forall k: \ u_k(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_k(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ e, passando al limite, applicando l'identità di Plancherel due volte: $u_k \to u$ in $L^2 \Rightarrow \hat{u}_k \to \hat{u}$ in $L^2 \Rightarrow \hat{\hat{u}}_k \to \hat{\hat{u}}$ in L^2, da cui si ha: $u(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.

Esempio:

$$u(x)=\frac{\sin x}{x}\in L^2(\mathbb{R})\setminus L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{u}(\xi)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\sin x}{x}e^{-i\xi x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}e^{-i\xi x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{e^{ix(1-\xi)}-e^{-ix(1+\xi)}}{2ix}dx$$

Tale integrale si calcola con i metodi di analisi complessa e si ricava alla fine che $\hat{u}(\xi)=\pi\chi_{(-1,1)}(\xi)$.

Si noti che tramite l'identità di Plancherel si possono trasformare alcuni integrali in integrali che possono essere risolti più facilmente. In questo caso ad esempio:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\left\|\frac{\sin x}{x}\right\|_{L^2}^2=\frac{1}{2\pi}\left\|\mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right](\xi)\right\|_{L^2}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\pi\chi_{(-1,1)}(\xi)\right|^2d\xi=\pi$$