Funzioni di più variabili 2

March 9, 2021

Derivate parziali e direzionali

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,; \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Se $n = 2$:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y)\,.$$

Assumiamo D aperto e fissiamo $(x_0, y_0) \in D$; possiamo valutare f in (x_0, y_0) e in un intorno $B_r(x_0, y_0)$.

Qual'è il *tasso di variazione di f* se ci spostiamo dal punto fissato lungo una qualunque direzione ?

Consideriamo inizialmente le *direzioni degli assi*; fissiamo $y = y_0$ e muoviamo la x a partire da x_0, oppure fissiamo $x = x_0$ e muoviamo la y a partire da y_0.

Consideriamo quindi i limiti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\,; \qquad \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\,.$$

Se tali limiti esistono finiti, si chiamano **derivate parziali** di f rispetto a x e rispetto a y, calcolate nel punto (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Altre notazioni di uso comune:

$$\partial_x f(x_0, y_0)\,,\ \partial_y f(x_0, y_0)\,; \quad f_x(x_0, y_0)\,,\ f_y(x_0, y_0)\,; \quad D_1 f(x_0, y_0)\,,\ D_2 f(x_0, y_0)\,.$$

Le derivate parziali sono semplicemente le derivate (ordinarie) delle funzioni $x \mapsto f(x, y_0)$, $y \mapsto f(x_0, y)$, cioè delle *restrizioni* di f rispettivamente alle rette $y = y_0$ e $x = x_0$.

Dunque valgono le stesse regole di calcolo delle derivate ordinarie, con l'avvertenza: quando si deriva rispetto ad una variabile, l'altra viene considerata come una *costante*.

Esempio.

Derivate parziali di

$$f(x, y) = (x^2 + y)e^x + \sin(xy)$$

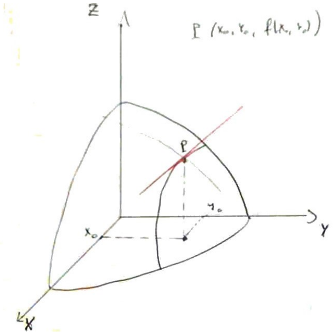
nel generico punto (x, y):

$$\partial_x f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^x + y\cos(xy)\,;$$

$$\partial_y f(x, y) = e^x + x\cos(xy)\,.$$

Significato geometrico di $\partial_x f(x_0, y_0)$ $\big(\partial_y f(x_0, y_0)\big)$:

Pendenza (coefficiente angolare) della retta tangente alla curva $z = f(x, y_0)$ $\big(z = f(x_0, y)\big)$, intersezione della superficie $z = f(x, y)$ con il piano (verticale) $y = y_0$ $(x = x_0)$.



Esercizio: verificare che i *vettori tangenti* alle due sezioni della superficie, considerate come curve regolari, sono rispettivamente:

$$\mathbf{i} + f_x(x_0, y_0)\mathbf{k}\,,\ \ \mathbf{j} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{k}\,.$$

Derivate parziali per $n \geq 2$.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,; \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Sia D aperto, $\mathbf{x}_0 \in D$; $\mathbf{e}_i = (0, 0, ..., 1, ...0)$ denota il *versore dell'asse* x_i.

La derivata parziale di f rispetto a x_i in $\mathbf{x}_0$ si definisce

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

Si muove solo l'*i*-esima variabile indipendente x_i.

Altre notazioni:

$$\partial_{x_i} f(\mathbf{x}_0)\,; \quad f_{x_i}(\mathbf{x}_0)\,; \quad D_i f(\mathbf{x}_0)\,.$$

Se esistono tutte le derivate parziali $\partial_{x_i} f(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, 2, ..., n$, la funzione si dice **derivabile** in $\mathbf{x}_0$. Se f è derivabile in ogni punto di D, si dice derivabile in D.

Se f è derivabile in un punto $\mathbf{x}$, si definisce **gradiente** di f il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \big(\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x}), ..., \partial_{x_n} f(\mathbf{x})\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_i\,.$$

Esempi

Il gradiente della funzione $f(x, y) = x\, e^y$ nel generico punto (x, y) è

$$\nabla f(x, y) = e^y\, \mathbf{i} + x\, e^y\, \mathbf{j}\,.$$

Perciò:

$$\nabla f(0, 0) = \mathbf{i}\,, \quad \nabla f(1, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}\,, \quad \nabla f(-1, 2) = e^2\, \mathbf{i} - e^2\, \mathbf{j}\,, ...$$

Se $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv r$, il gradiente

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{r}\, \mathbf{i} + \frac{y}{r}\, \mathbf{j} + \frac{z}{r}\, \mathbf{k} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}\,,$$

definito in $R^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$, è in ogni punto fuori dall'origine il *versore radiale*.

E se volessimo valutare la variazione di f quando ci spostiamo da $\mathbf{x}_0$ lungo una direzione *qualsiasi* ?

Se $\mathbf{x}_0 \in D$ (D aperto) e $\mathbf{v}$ è un *versore*, consideriamo la retta $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$.

Definizione

Se esiste finito il limite

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \,,$$

si dice *derivata direzionale* di f nella direzione di $\mathbf{v}$ calcolata nel punto $\mathbf{x}_0$.

Osservazioni

i) Il limite è la derivata in $t = 0$ della restrizione di f alla retta;

ii) Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali (scegliere $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$).

Se $n=2$, $\mathbf{x}=(x_0,y_0)$, $\mathbf{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$ e si può scrivere:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t}\,.$$

<u>Esempio</u>

Sia $f(x,y)=(x^2y)^{1/3}$ e $\mathbf{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$.

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\big((t\cos\theta)^2\,t\sin\theta\,\big)^{1/3}-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(\cos\theta)^{2/3}\,(\sin\theta)^{1/3}}{t}=(\cos\theta)^{2/3}\,(\sin\theta)^{1/3}\,.$$

Osservare che le derivate parziali di f nell'origine ($\theta=0$ e $\theta=\pi/2$) sono nulle, in accordo con le restrizioni di f agli assi: $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$.

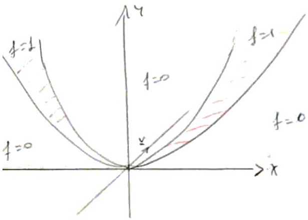
Attenzione:

Se $n = 1$, è noto che: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.
Se $n > 1$ l'implicazione *non* vale. Nemmeno se esistono *tutte* le derivate direzionali nel punto $\mathbf{x}_0$.

<u>Esempio</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x^2 < y < 2x^2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Dalla definizione segue che $f(0,0) = 0$; inoltre, per ogni θ, si vede che per t abbastanza piccolo $f(t\cos\theta, t\sin\theta) = 0$.



Dunque $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = 0$ per ogni $\mathbf{v}$, ma f *non* è continua nell'origine.

Differenziabilità

Se $n > 1$, la derivabilità di f è un'informazione 'debole'...

Ripassiamo una definizione già introdotta nel caso $n = 1$:

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ con derivata $f'(x_0)$.

Vale allora

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + o(h)\,,$$

dove l'applicazione lineare

$$h \mapsto f'(x_0)\, h = df(x_0)\,,$$

è il *differenziale* di f in x_0 e il termine $o(h)$ verifica

$$\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0\,.$$

Definizione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\mathbf{x}_0 \in D$. Sia inoltre $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D$. La funzione f si dice **differenziabile** in $\mathbf{x}_0$ se esiste $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)\,,$$

dove $o(|\mathbf{h}|)/|\mathbf{h}| \to 0$ per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. $\square$

Con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$ si indica il prodotto scalare dei due vettori:

$$\text{se } \mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)\,, \qquad \mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)\,,$$

allora

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{h} = a_1 h_1 + a_2 h_2 + ... + a_n h_n\,.$$

L'applicazione lineare $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$, si dice **differenziale** di f nel punto $\mathbf{x}_0$ e si denota con il simbolo $df(\mathbf{x}_0)$.

Teorema.

Sia f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in D$ (aperto in $\mathbb{R}^n$). Allora:

i) f è continua in $\mathbf{x}_0$;

ii) f è derivabile in $\mathbf{x}_0$ e, nella definizione di differenziabilità, $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$;

iii) esistono tutte le derivate direzionali di f in $\mathbf{x}_0$ e vale la formula

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Dimostrazione:

i) Ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, riscriviamo la definizione di differenziabilità nella forma

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)\,,$$

da cui si ottiene facilmente $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

ii) Scegliendo $\mathbf{h} = h\,\mathbf{e}_i$ nella definizione di differenziabilità si ottiene

$$f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot h\,\mathbf{e}_i + o(|h\,\mathbf{e}_i|) = h\,a_i + o(|h|)\,.$$

Dividendo per h e facendo il limite per $h \to 0$ si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = a_i + \lim_{h\to 0} \frac{o(|h|)}{h} = a_i\,, \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n\,.$$

iii) Per il punto ii), possiamo ora scrivere nella definizione

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)\,,$$

Scegliamo ora $\mathbf{h} = t\,\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ *versore* qualsiasi:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = t\,\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} + o(|t|)\,,$$

Dividendo per t e facendo il limite per $t \to 0$ si ottiene ora

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Osservazioni importanti.

Se anche una sola delle tre proprietà *i*), *ii*), *iii*) del teorema non è verificata, la f *non* è differenziabile.

Dal punto *ii*) segue $df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$; denotando con $d\mathbf{x}$ lo spostamento arbitrario $\mathbf{h}$ si scrive anche

$$df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(\mathbf{x})\, dx_i \,.$$

Da *iii*) e dalle proprietà prodotto scalare segue:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \left|\nabla f(\mathbf{x}_0)\right| \cos\alpha \,,$$

dove α è l'angolo tra il vettore $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ (se $\neq \mathbf{0}$) ed il versore $\mathbf{v}$.

Dunque la derivata è massima ($= |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$) per $\alpha = 0$.

La *direzione di massima crescita* di f in $\mathbf{x}_0$ è quella del versore $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\left|\nabla f(\mathbf{x}_0)\right|}$, cioè quella del *gradiente*.

Per $n = 2$, ponendo $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{h} = (h, k)$, la definizione di differenziabilità si scrive

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)\, h + \partial_y f(x_0, y_0)\, k + o\big(\sqrt{h^2 + k^2}\big)$$

Introducendo le variabili $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, abbiamo la relazione equivalente

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ &+ o\big([(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}\big) \end{aligned}$$

che ha un'importante *intepretazione geometrica*:
il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

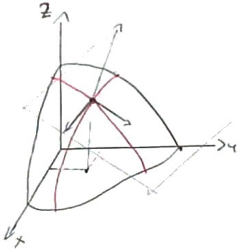
si dice **piano tangente** alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) e rappresenta la migliore *approssimazione lineare* di f in un intorno del punto.

Dalla geometria, il vettore

$$-\partial_x f(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - \partial_y f(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

è perpendicolare al piano tangente. La sua direzione è la direzione *normale* alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0).
Osservare che

$$-\partial_x f(x_0, y_0)\,\mathbf{i} - \partial_y f(x_0, y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = \left[\mathbf{i} + \partial_x f(x_0, y_0)\,\mathbf{k}\right] \wedge \left[\mathbf{j} + \partial_y f(x_0, y_0)\,\mathbf{k}\right]$$



Verifiche di Differenziabilità.

La verifica diretta non è generalmente agevole.

Ricordando la definizione e il punto *ii*) del teorema, occorre verificare che nel punto considerato la funzione sia derivabile, calcolare il gradiente e infine verificare il limite:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0\,.$$

Nel caso $n = 2$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)\, h - \partial_y f(x_0, y_0)\, k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Esempio

Verifichiamo che

$$f(x,y) = x(2y+1)$$

è differenziabile in $(1,0)$.

Calcoliamo:

$$f(1,0) = 1\,, \qquad \partial_x f(1,0) = 1\,, \qquad \partial_y f(1,0) = 2\,.$$

Il limite da verificare è allora:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)(2k+1) - 1 - \ h - 2\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Teorema (c.s. di differenziabilità)

Se f è derivabile *in un intorno* di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e le derivate parziali di f sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

In particolare, se f è derivabile in un aperto D con derivate parziali continue $\big(f$ di classe $\mathcal{C}^1(D)\big)$, allora f è differenziabile in (tutti i punti di) D.

Attenzione. Se non valgono le ipotesi del teorema occorre tornare alla verifica diretta:
la funzione $f(x,y) = |xy|$ è differenziabile nell'origine (fare la verifica con la definizione) ma *non* valgono le ipotesi del teorema in un intorno dell'origine.

Esercizio.

Verificare che la funzione $f(x,y) = xe^y$ è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = xe^y$ in $(2,0)$. Calcolare nello stesso punto tutte le derivate direzionali e determinare la direzione di massima crescita di f.