Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
II Appello Autunnale di Metodi Analitici (25-9-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$, calcolare il seguente integrale complesso:

$$\int_{C_{R_n}(0)} \frac{1}{e^{nz}-1}\,\mathrm{d}z\,, \tag{1}$$

dove $C_{R_n}(0)$ è la circonferenza nel piano complesso centrata in 0, percorsa in senso antiorario e di raggio

$$R_n = \pi\left(2n+\frac{1}{n}\right).$$

Soluzione. Fissato $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(z) = 1/(e^{nz}-1)$ ha infiniti poli semplici nei punti

$$z_k = \frac{2k\pi}{n} i \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,,$$

di residui

$$\mathrm{Res}\,(f_n(z), z_k) = \lim_{z\to\frac{2k\pi}{n}i} \frac{z-\frac{2k\pi}{n}i}{e^{nz}-1} = \lim_{nz\to 2k\pi i} \frac{1}{n}\frac{nz-2k\pi i}{e^{nz-2k\pi i}-1} = \frac{1}{n}\,.$$

Per calcolare l'integrale (1) dobbiamo anzitutto stabilire quali poli cadono all'interno di $C_{R_n}(0)$: essi corrispondono a tutti quei valori $k \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|z_k| < \pi\left(2n+\frac{1}{n}\right),$$

ovvero

$$|k| < \frac{n}{2}\left(2n+\frac{1}{n}\right) = n^2+\frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

Evidentemente il numero totale di $k \in \mathbb{Z}$ che soddisfano la (2) è $2n^2+1$, da cui, grazie al teorema dei residui, abbiamo che

$$\int_{C_{R_n}(0)} \frac{1}{e^{nz}-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(2n^2+1\right)\frac{1}{n} = 2\pi i\left(2n+\frac{1}{n}\right).$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Fornire l'identità del parallelogramma in uno spazio di Hilbert.
(ii) Sia H uno spazio di Hilbert. Indichiamo con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare e con $\|\cdot\|$ la norma su H.
Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni di elementi di H tali che

$$\|x_n\| \le 1 \ \forall n\,, \qquad \|y_n\| \le 1 \ \forall n\,, \qquad \lim_n (x_n, y_n) = 1\,.$$

Mostrare che

$$\lim_n \|x_n - y_n\| = 0\,.$$

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}\limsup_n \|x_n - y_n\|^2 &= \limsup_n (x_n - y_n, x_n - y_n)\\ &= \limsup_n \left[\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2(x_n, y_n)\right] \le 0\end{aligned}$$

da cui la tesi.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Si consideri la seguente funzione espressa in serie di Fourier rispetto alla base esponenziale:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ikx} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

dove i coefficienti $\{f_k\}$ valgono

$$f_k = \begin{cases} 2^{-k} & \text{se } k \in \mathbb{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \tag{4}$$

(i) Senza calcolare $f(x)$, spiegare perché essa non può essere una funzione a valori reali.

(ii) Trovare l'espressione esplicita di $f(x)$.

(iii) Data la funzione

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k f_k e^{ikx} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

senza calcolarla mostrare che appartiene a $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(iv) Successivamente, trovare l'espressione esplicita anche di $g(x)$.

Soluzione.

(i) $f(x)$ non può essere una funzione a valori reali perché, in quel caso, avremmo $f_{-k} = \overline{f}_k$, cosa evidentemente falsa per i coefficienti $\{f_k\}$ definiti nella (4).

(ii) Utilizzando la (4), ricaviamo:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k = \frac{2}{2 - e^{ix}} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

(iii) Grazie all'identità di Bessel, stabilire se $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ equivale a stabilire se la successione $\{kf_k\}$ appartiene a $l^2(\mathbb{Z})$. Ma quest'ultima proprietà è effettivamente verificata:

$$\|kf_k\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \,|f_k|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{4^k} < \infty\,.$$

(iv) Derivando la (3) rispetto a x, otteniamo:

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik f_k e^{ikx} = ig(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

da cui, grazie alla (5),

$$g(x) = -if'(x) = \frac{2e^{ix}}{(2 - e^{ix})^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$