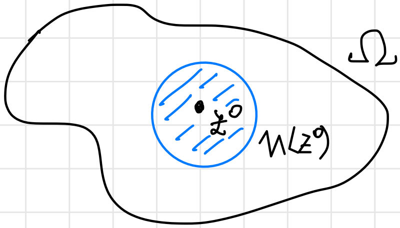
Singolarità isolate e loro classificazione

Def. Sia $f : \Omega \setminus \{z^0\} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si dice che z è una SINGOLARITÀ ISOLATA per f se:

$\exists\ U(z^0) \subseteq \Omega$ tale che f sia olomorfa su $U(z^0) \setminus \{z^0\}$.

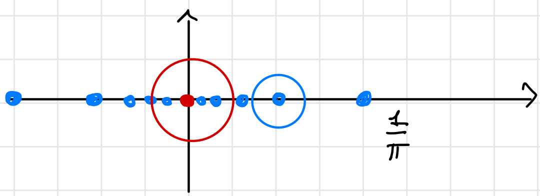


Esempi

1) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\Rightarrow$ $z_0 = 0$ è sing. isolata.

2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{$zeri dei denominatori$\}$.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0 \iff \frac{1}{z} \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff z \neq \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ z \neq 0 \end{cases}$$



L'origine è una singolarità non isolata!

Tutte le altre sì!

Sia z^0 una singolarità isolata per f.

Def 1 Si dice che z^0 è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE se

$\exists\, U(z^0),\ \exists\, \tilde{f}: U(z^0) \to \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}\big|_{U(z^0)\setminus\{z^0\}} = f$

e $\tilde{f}$ sia olomorfa in $U(z^0)$.

Esempio $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z^0 = 0$ sing. eliminabile.

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & \forall z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin z}{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}}}{=} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + o(z^2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Oss 1 Se esiste $\tilde{f}$, $\tilde{f}$ è unica.

Se una g è olomorfa, è anche continua:

$$\lim_{z \to z^0} \left[g(z) - g(z^0)\right] = \lim_{z \to z^0} \underbrace{\left[\frac{g(z) - g(z^0)}{z - z^0}\right]}_{\downarrow\ g'(z^0) \in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{[z - z^0]}_{\downarrow\ 0} = 0$$

Quindi $\tilde{f}(z^0) = \lim_{z \to z^0} \overset{(\sim)}{f}(z)$.

Oss 2 z^0 sing. eliminabile per f $\Rightarrow$ f limitata (in modulo) vicino a z^0

$\exists\, \mathcal{U}(z^0),\ \exists\, M>0$ tale che $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$

$\Uparrow$

Infatti;

z^0 sing. eliminabile per f $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{z\to z^0} f(z) \in \mathbb{C}$

<u>Teorema rimozione della singolarità</u>

f olomorfa e limitata in $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$ $\Rightarrow$ z^0 è singolarità eliminabile

Quindi, in conclusione: (se f è olomorfa su $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$).

z^0 sing. eliminabili $\Leftrightarrow$ f limitata in $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$

Def 2 Si dice che z^0 è un POLO per f se

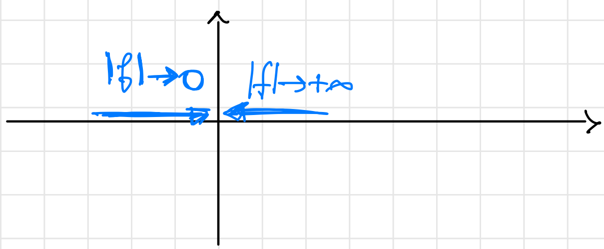
$$\lim_{z\to z^0} f(z) = \infty \qquad \text{ovvero} \qquad \lim_{z\to z^0} |f(z)| = +\infty.$$

Esempio $f(z) = \dfrac{1}{z^m}$ con $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. $z^0 = 0$ polo

$$\lim_{z\to 0} \left|\frac{1}{z^m}\right| = \lim_{z\to 0} \frac{1}{|z|^m} = +\infty$$

Def 3 Si dice che z^0 è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE per f se è una sing. isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio $f(z) = e^{1/z}$ $\quad z^0 = 0$ sing. essenziale



$z = x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \Rightarrow \text{NO sing. eliminabile} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \Rightarrow \text{NO polo.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} e^{1/z}$$

Teorema (Picard) z^0 sing. essenziale per f $\Rightarrow$

$$\forall\, \mathcal{U}(z^0), \quad \underbrace{f(\mathcal{U}(z^0))}_{\substack{\text{immagine di } \mathcal{U}(z^0) \text{ tramite per } f \\ = \{ f(z) :\ z \in \mathcal{U}(z^0) \}}} \begin{cases} \nearrow \mathbb{C} \\ \searrow \mathbb{C} \setminus \{1 \text{ punto}\}. \end{cases}$$

Esempio. $f(z) = e^{1/z}$. Fissiamo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

vediamo che w è assunto in qualsiasi intorno dell'origine.

Cerchiamo z tali che $\left[e^{1/z} = w. \right]$

Chiamo $\frac{1}{z} = \underset{\text{incognite}}{x + iy}$, $\quad w = \underset{\rho > 0}{\rho}\, e^{i\theta} = \underset{\text{assegnati}}{\rho (\cos\theta} + i \sin\theta)$

Imponiamo:

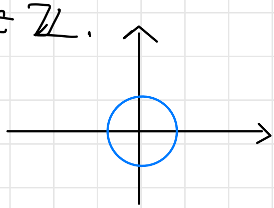
$$\underset{e^x(\cos y + i \sin y)}{e^x \cdot e^{iy}} = e^{x+iy} = \underset{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}{\rho\, e^{i\theta}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y - \theta = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

Quindi

$$z_k = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\log\rho + i(\theta + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



(es. $|z_k| \longrightarrow 0$, $\left|\frac{1}{z_k}\right| \longrightarrow +\infty$)

Sviluppi in serie di Laurent

<u>Teorema</u> f olomorfa su $\Omega \setminus \{z^0\}$ (Ω aperto) $\Rightarrow$ f "sviluppabile in serie di Laurent di centro z^0" ovvero $\exists\ \mathcal{U}(z^0) \subseteq \Omega$ tale che $\forall z \in \mathcal{U}(z^0) \setminus \{z^0\}$.

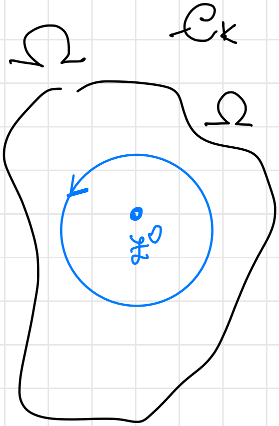
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_k}_{\in \mathbb{C}} (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k \geq 0}}_{k=0,\dots,+\infty} c_k (z-z_0)^k + \underbrace{\sum_{k<0}}_{k=-1,-2,\dots,-\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$= c_0 + c_1(z-z^0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots\dots \quad \text{parte regolare}$$

$$+ c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + \dots\dots \quad \text{parte singolare}$$

Inoltre:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{C_r(z^0)}} \frac{f(z)}{(z-z^0)^{k+1}}\, dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



<u>qualsiasi</u> circonferenza di raggio r e centro z^0 (param. da $r(t) = z^0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)

con $C_r(z^0) \subseteq \mathcal{U}(z^0)$

In particolare:

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz$$

C'è una relazione tra C_{-1} e $\int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz$!!!

Esempio

$f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad z^0 = 0.$

ha una sing. isolata in $z^0 = 0$

parte regolare $= 0$

parte singolare $= \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{C_{-1}} (z - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{z^0})^{-1} = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz = 2\pi i \underbrace{C_{-1}}_{Res(f, z^0)} = 2\pi i.$$

C_{-1} (coeff di $(z-z^0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent)

$:=$ RESIDUO DI f in z^0 $\quad (Res(f, z^0))$

$$Res\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 1.$$

Come riconoscere i vari tipi di singolarità dallo sv. Laurent?

- z^0 sing. eliminabile $\Leftrightarrow$ parte singolare dello sviluppo $= 0$.
- z^0 polo ?
- z^0 sing. essenziale ?