| Analisi matematica 2 | | 11 settembre 2014 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

**1.** Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)$$

a) Studiare il segno di $f$ e determinare *l'insieme di livello* $\{f=0\}$. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Trovare i punti critici ed eventuali estremi locali della funzione.

c) Trovare massimi e minimi assoluti di $f$ nel cerchio $C = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 2\}$.

**2.** Definire la nozione di punto di equilibrio (o punto critico) di un sistema autonomo. Trovare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = x + x^2 y \\ y' = xy - y \end{cases}$$

Studiare la natura dei punti di equilibrio con il metodo di linearizzazione.

**3.** Sia $f(x, y) = 3x + 2y$.

a) Calcolare
$$\int\int_T f(x,y)\,dxdy$$
dove $T$ è il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

b) Calcolare
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
dove $D$ è il *semicerchio* di centro nell'origine e raggio unitario, giacente nel semipiano delle $x$ positive.

c) Calcolare
$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$$
dove
$$\Omega = \left\{(x,y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$$

**4.**

a) Trovare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$

(*Suggerimento: porre* $e^{-x} = t$ *e studiare la serie come serie di potenze di* $t$)

b) Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $\cos x^2$ e dimostrare che si può esprimere l'integrale

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx$$

come somma di una serie numerica. Calcolare i primi 3 termini della serie.

c) Trovare lo sviluppo di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = 2 \sin x + \sin(2x) + \sin^2 x$$

senza calcolare integrali.

SOLUZIONI

**1.**

a) La funzione $f$ è positiva nel quadrato $(-1,1)\times(-1,1)$ e nell'insieme

$$\{(x,y)\,|\,|x|>1\}\cap\{(x,y)\,|\,|y|>1\}$$

L'insieme di livello zero è l'unione delle 4 rette del piano di equazione $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$. Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e connesso (due punti qualsiasi dell'insieme sono collegati da un segmento o da una spezzata contenuta nell'insieme).

b) Derivate parziali:

$$f_x(x,y)=2x(y^2-1);\quad f_y(x,y)=2y(x^2-1)$$

I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente

$$\nabla f(x,y)=2x(y^2-1)\,\mathbf{i}+2y(x^2-1)\,\mathbf{j}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases}2x(y^2-1)=0\\2y(x^2-1)=0\end{cases}$$

troviamo 5 soluzioni:

$$P_0(0,0);\quad P_1(1,1);\quad P_2(1,-1);\quad P_3(-1,1);\quad P_4(-1,-1)$$

Osserviamo che l'origine $P_0$ è l'unico punto critico all'interno del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$ dove $f\geq 0$ e $f=0$ sulla frontiera. Per il teorema di Weierstrass, $P_0$ è punto di massimo (assoluto nel quadrato e locale in $\mathbb{R}^2$) con $f(0,0)=1$. Gli altri punti $P_1-P_4$ sono punti di sella perchè stanno sull'insieme di livello $f=0$ e $f$ cambia di segno in ogni intorno di tali punti.
Le stesse conclusioni seguono dal calcolo delle derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y)=2(y^2-1);\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=4xy;\quad f_{yy}(x,y)=2(x^2-1)$$

e valutando la matrice Hessiana in $P_0-P_4$.

c) L'unico punto critico all'interno del cerchio $C$ è l'origine, che è punto di massimo assoluto anche nel cerchio poiché $f$ è negativa nei punti di $C$ che non appartengono al quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Il minimo si trova allora tra gli estremi della funzione $f$ ristretta alla circonferenza $x^2+y^2=2$; possiamo usare la parametrizzazione

$$x=\sqrt{2}\cos t,\qquad y=\sqrt{2}\sin t,\qquad t\in[0,2\pi]$$

Si ottiene allora:

$$f(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t)=(2\cos^2 t-1)(2\sin^2 t-1)=\sin^2(2t)-1=-\cos^2(2t)$$

Questa funzione assume il valore minimo $-1$ per $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$, $t=3\pi/2$. Dunque, la funzione $f$ su $C$ assume il valore minimo $-1$ nei 4 punti $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$,$(-\sqrt{2},0)$, $(0,-\sqrt{2})$ della frontiera.

**2.** I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + x^2 y = 0 \\ xy - y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(0,0)$ e $(1,-1)$. Per scrivere il sistema linearizzato si calcola la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2xy & x^2 \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

Nei punti critici:

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J}(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = -v \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in $(1,-1)$ è

$$\begin{cases} u' = -u + v \\ v' = -u \end{cases}$$

Nel primo caso, la matrice dei coefficienti ha gli autovalori $\pm 1$, quindi l'origine è un *colle* per il sistema linearizzato; nel secondo caso, gli autovalori sono $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, per cui l'origine è un *fuoco stabile* per il sistema linearizzato. In base alla teoria, anche per il sistema non lineare il punto $(0,0)$ è instabile, mentre il punto $(1,-1)$ è un fuoco stabile.

**3.**

a) Da considerazioni di simmetria e usando le formule di riduzione:

$$\int\int_T (3x+2y)\,dx\,dy = \int\int_T 2y\,dx\,dy = 2\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} 2y\,dy\Big)dx = 2\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{2}{3}$$

b) Da considerazioni di simmetria e usando le coordinate polari:

$$\int\int_D (3x+2y)\,dx\,dy = \int_D 3x = 6\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos\theta\,d\theta\,d\rho =$$

$$= 6\Big[\frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^1 \Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2$$

c) Usando la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} x = 2u\cos v \\ y = 3u\sin v \end{cases}$$

abbiamo $(x,y)\in\Omega \Leftrightarrow 0\le u\le 1,\ 0\le v\le \pi/2$. Determinante matrice jacobiana:

$$\begin{vmatrix} 2\cos v & -2u\sin v \\ 3\sin v & 3u\cos v \end{vmatrix} = 6u$$

Dunque:

$$\int\int_\Omega (3x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (6u\cos v + 6u\sin v)\,6u\,dudv$$

$$= 36\int_0^1 u^2\,du \int_0^{\pi/2} (\cos v + \sin v)\,dv = 12\times 2 = 24$$

**4.**

a) Con la sostituzione $e^{-x} = t$ otteniamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n$$

Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza 1, per cui converge (assolutamente) per $-1 < t < 1$. Per $t = 1$ abbiamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz; per $t = -1$ abbiamo la serie armonica che diverge a $+\infty$. Dunque, la serie converge per $-1 < t \leq 1$. Risolvendo rispetto alla variabile $x$, vediamo che la disequazione $-1 < e^{-x} \leq 1$ è soddisfatta per $x \geq 0$. L'intervallo di convergenza è quindi $[0, +\infty)$.

b) Ponendo $x^2 = t$ e ricordando la serie di Mac Laurin

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

otteniamo

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

Poichè la serie del coseno converge per ogni $t$, la serie ottenuta converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ (raggio di convergenza $= \infty$). Possiamo allora integrare termine a termine nell'intervallo $[0, 1]$ :

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n} \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} - \ldots$$

c) La funzione è periodica di periodo $2\pi$. Applicando note identità trigonometriche, possiamo scrivere

$$f(x) = 2\sin x + \sin(2x) + \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(2x)$$

Per l'unicità della serie di Fourier associata a $f$ abbiamo

$$a_0 = 1; \qquad b_1 = 2 \qquad a_2 = -\frac{1}{2}; \qquad b_2 = 1$$

mentre tutti gli altri coefficienti si annullano.