SERIE DI FOURIER

Si definisce polinomio trigonometrico di grado n una espressione della forma:

$$\sum_k A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)] \;= A_0 + A_1 \cos(x) + B_1 \sin(x) + \ldots + A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx),$$

dove A_k e B_k sono arbitrari coefficienti reali. Osserviamo che le funzioni $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$, $k = 0, 1, 2\ldots$, sono tutte periodiche e che il minimo periodo comune a tutte quante è 2π. Dunque, qualunque sia la scelta dei coefficienti, l'espressione definisce sempre una funzione ***periodica*** di periodo 2π. Analogamente a quanto visto nel caso delle serie di Taylor, ci chiediamo sotto quali condizioni una funzione periodica f si possa "approssimare" con polinomi trigonometrici di grado sempre più elevato in modo che, al limite, valga la rappresentazione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]. \tag{1}$$

La serie al secondo membro prende il nome di ***serie trigonometrica***; lo studio di queste serie e, in particolare, il problema dello sviluppo in serie trigonometrica di una data funzione periodica, ha origine da problemi fisici nell'ambito della teoria delle oscillazioni e della propagazione del calore.

Nell'ipotesi che la serie a destra della (1) converga per ogni x reale, si ottiene una relazione tra i coefficienti a_n, b_n e la funzione f. Moltiplichiamo entrambi i membri della (1) per $\cos(mx)$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ e integriamo sull'intervallo $(-\pi, \pi)$. Supponendo di poter integrare la serie a destra termine a termine e utilizzando le formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad \forall\, n, m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \pi, \quad \forall\, m \geq 1,$$

ricaviamo facilmente le relazioni

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Allo stesso modo, moltiplicando la (1) per $\sin(mx)$ e utilizzando, oltre alla prima delle precedenti, le ulteriori formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \pi, \quad \forall\, m \geq 1,$$

si ottiene

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Osservazioni:

- Si verifica facilmente che gli integrali a destra nelle (2) e (3) sono ben definiti se f è integrabile su un periodo. Assumendo ciò, si può dunque considerare *la serie di Fourier associata a* f, cioè una serie trigonometrica i cui coefficienti sono definiti dalle (2) e (3). Naturalmente, senza ulteriori ipotesi sulla f non è detto che la serie converga, né che la (1) sia verificata in ogni punto.

- Una semplice condizione ***sufficiente*** per la convergenza della serie (1) è la convergenza delle serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Infatti, poiché vale la stima

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|,$$

la serie (1) converge *totalmente* in **R** e quindi converge uniformemente (e assolutamente) in **R**. Vogliamo ora enunciare delle condizioni su una funzione periodica che garantiscano la convergenza della serie di Fourier associata. Introduciamo la seguente definizione: si dice che una funzione f : **R** → **R** è ***regolare a tratti su*** **R** se in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ esiste un numero finito di punti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ tali che f sia di classe C^1 in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i), $i = 1,2,\ldots,N$ e agli estremi di ciascun intervallo esistono finiti i limiti di $f(x)$ e di $f'(x)$

Osserviamo che in un generico punto $x \in$ **R** una funzione f regolare a tratti soddisfa una delle seguenti proprietà:

A) f è derivabile;
B) f è continua ed esistono le derivate destra e sinistra;
C) f ha una discontinuità di prima specie, cioè esistono finiti i limiti destro e sinistro di f in x, che denotiamo con $f(x_\pm)$, ed esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata.

Si può anche dimostrare che una funzione regolare a tratti è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo limitato. Abbiamo allora il seguente risultato sulla convergenza puntuale della serie di Fourier associata :

Teorema:

Sia f una funzione periodica di periodo 2π, regolare a tratti su R. Allora, per ogni x ∈ R, la serie di Fourier associata ad f converge a

$$\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)].$$

In particolare, la serie di Fourier di f converge a f(x) nei punti x in cui f è continua.

Osservazione: Come si verifica facilmente, una funzione *periodica* è regolare a tratti su **R** se lo è su un intervallo di lunghezza pari ad un periodo. In particolare, il *prolungamento periodico* di una funzione f definita nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, derivabile con continuità e con limiti finiti di f e di f' agli estremi soddisfa le condizioni del teorema. Sottolineiamo che la ***sola continuità*** di una funzione ***non*** è sufficiente per la convergenza (puntuale) della sua serie di Fourier. Vediamo ora alcuni semplici esempi di serie di Fourier, che illustrano gli aspetti della teoria discussi finora. Consideriamo la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 < x \leq \pi \\ -1, & \text{per } -\pi < x \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

e prolungata per periodicità su tutto **R**. Calcoliamo i coefficienti di Fourier mediante le (2) e (3); osserviamo subito chei coefficienti a_n sono tutti nulli per ragioni di simmetria. Integrando allora sul perioedo le funzioni ***pari*** $f(x)\sin(nx)$ otteniamo per i coefficienti b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n], \quad n = 1,2,\ldots$$

Abbiamo quindi: $b_n = 0$ per n è pari e

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)}, \quad k = 0,1,\ldots$$

Poiché la funzione considerata è regolare a tratti, possiamo concludere che la serie di Fourier associata converge per ogni x reale; in particolare, abbiamo

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin[(2k+1)x], \tag{5}$$

per ogni $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

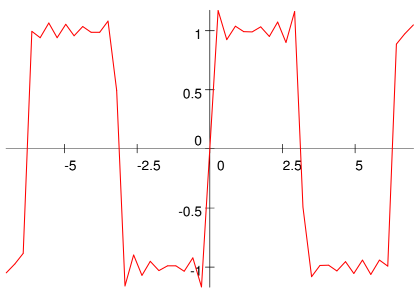
Osserviamo che nei punti di ascissa $m\pi$, con m intero relativo, la serie a destra nella (5) converge a zero, in accordo con le conclusioni del teorema. Ponendo $x = \pi/2$ nella (5) e ricordando la definizione (4) ricaviamo l'identità

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin[(k+1/2)\pi],$$

ovvero

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

La figura rappresenta il grafico del polinomio trigonometrico corrispondente alla somma dei primi 6 termini della serie (5) :



Come secondo esempio, sia g il prolungamento periodico della funzione definita da $x \mapsto x^2$ su $(-\pi, \pi]$. Osserviamo che g è una funzione pari; i coefficienti di Fourier sono allora

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2;$$

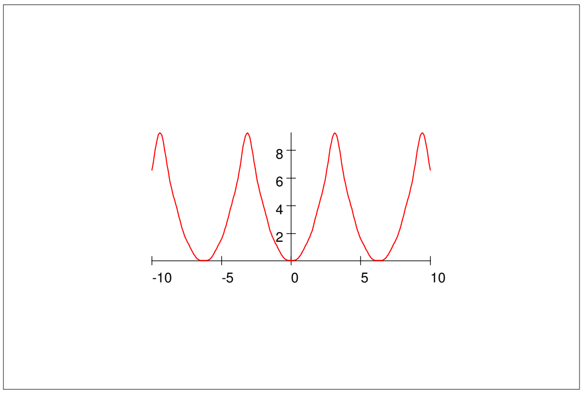
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Poiché la funzione soddisfa le ipotesi del teorema ed è continua in ogni punto, possiamo scrivere

$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx). \tag{6}$$

Come si vede dal grafico sottostante, la somma parziale fino al termine con $n = 6$ approssima già abbastanza bene l'andamento della funzione periodica g .



Osserviamo che i termini della serie (6) soddisfano $|a_n| = 4/n^2$ e $b_n = 0$ e quindi la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Periodi diversi da 2π. Nel caso di funzioni f periodiche con periodo generico T valgono gli stessi risultati sostituendo le formule (1),(2),(3), rispettivamente con

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x)].$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\frac{2\pi n}{T} x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(\frac{2\pi n}{T} x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Serie di Fourier in forma esponenziale. Utilizzando le formule di Eulero $e^{\pm inx} = \cos(nx) \pm i \sin(nx)$, possiamo riscrivere la serie (1) nella forma

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-inx} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

dove $c_0 = a_0/2$ e

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si noti che i coefficienti c_n si possono calcolare direttamente con le formule

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx, \quad n = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

Esercizi.

1. Sia f una funzione periodica di periodo T e integrabile su ogni intervallo limitato.

Dimostrare che

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

per ogni $a \in \mathbf{R}$. Di conseguenza, per calcolare i coefficienti di Fourier si puó integrare su qualunque intervallo di lunghezza pari a un periodo.

2. Ricavare dalla (6) la relazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3.
a) Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π-periodica f tale che

$$f(x) = \pi - |x|, \text{ per } x \in (-\pi, \pi]$$

b) Studiare la convergenza di tale serie. Dire se la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$
c) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$