Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2011/2012
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Preappello di Metodi Analitici (24-1-12) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{2z-8}{z(z^2-8z+12)} \ .$$

(i) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di f di centro $z_0 = 0$.
(ii) Classificare z_0 come singolarità isolata.
(iii) Determinare $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

Soluzione.

(i) Riscriviamo f come

$$f(z) = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{z-6} + \frac{1}{z-2}\Big) \ .$$

Per $|z| < 6$, si ha

$$\frac{1}{z-6} = \frac{-1}{6\big(1-\frac{z}{6}\big)} = -\frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{6^n} \ .$$

Analogamente, per $|z| < 2$, si ha

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} \ .$$

Pertanto, per $0 < |z| < 2$, si ha

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^{n-1}}{6^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = -\sum_{m\geq -1}\Big(\frac{1}{6^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+2}}\Big)z^m \ .$$

(ii) Poiché la parte singolare dello sviluppo di Laurent trovato contiene solo un numero finito di termini, il punto z_0 è un polo. Trattasi di un polo semplice (cioè di ordine 1) dato che

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\Big(\frac{1}{z-6} + \frac{1}{z-2}\Big) = -\frac{2}{3} \ .$$

(iii) Si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1} = -\frac{2}{3} \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{\cos[n(x^2+1)]}{n(x^2+1)} * \frac{1}{x^2+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

(i) Dimostrare che $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $p \in [1, +\infty)$.
(ii) Dimostrare che $f_n \to 0$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.
(iii) Stabilire se $\hat{f}_n \to 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.
(iv) Stabilire se $\hat{f}_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(i) Si ha $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ in quanto $f_n = g_n * g$, dove $g_n := \frac{\cos[n(x^2+1)]}{n(x^2+1)} \in L^1(\mathbb{R})$ e $g := \frac{1}{x^2+1} \in L^p(\mathbb{R})$.

(ii) Poiché $\|f_n\|_{L^p} \leq \|g_n\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$, basta far vedere che $g_n \to 0$ in $L^p(\mathbb{R})$. Ciò segue dal fatto che $g_n(x) \to 0$ puntualmente, applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, poiché

$$|g_n(x)| \leq \varphi(x) := \frac{1}{x^2+1} \in L^p(\mathbb{R}) \ .$$

(iii) Sí per il punto (ii) (con $p = 1$) e poiché la trasformata di Fourier è un operatore lineare continuo da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.

(iv) Sí per il punto (iii) (con $p = 2$) e poiché la trasformata di Fourier è un operatore lineare continuo da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Si consideri la seguente equazione, nell'incognita $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$:

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\,\varphi(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare la trasformata di Fourier di φ.
(ii) Senza calcolare φ, mostrare che $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(iii) Calcolare φ.

Soluzione.

(i) L'equazione si può riscrivere come

$$e^{-x^2} = e^{-|x|} * \varphi(x)\ ,$$

da cui, applicando la trasformata di Fourier,

$$\sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4} = \frac{2}{1+\xi^2}\,\hat{\varphi}(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \hat{\varphi}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1+\xi^2)\,e^{-\xi^2/4}.$$

(ii) Si ha $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\xi^n \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 0$. Quindi $\varphi^{(n)}$ è continua per ogni $n \geq 0$, ovvero $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ e tutte le sue derivate sono del tipo $P(\xi)\,e^{-\xi^2/4}$ con P polinomio e pertanto appartengono ad $L^1(\mathbb{R})$. Dunque $x^n\varphi(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$. Similmente per le derivate di φ.

(iii) Osservando che

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\}(\xi) - \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right\}(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-x^2} - \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right\}(\xi),$$

si deduce

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right)e^{-x^2}.$$