Distribuzioni

FUNZIONI GENERALIZZATE

DATO Ω APERTO

CHIAMO DISTRIBUZIONI GLI ELEMENTI DI $D'(\Omega)$

TUTTI I POSSIBILI FUNZIONALI LINEARI CONTINUI

DEGLI ELEMENTI DI $D(\Omega)$ o "SPAZIO DI TEST"

FUNZIONI DI TEST

FUNZIONI C_0^∞, DERIVABILI ALL' ∞ CON CONTINUITA' SU SUPPORTO COMPATTO CONTENUTI IN Ω

COSA IDENTIFICA UNA DISTRIBUZIONE?

QUELLO CHE FA UNA FUNZIONE TEST

SCATOLA NERA, NON SAI COSA FA (ELETTROTECNICA)
E' CARATTERIZZATA DA QUELLO CHE FA A f TEST

DELTA DI DIRAC

T DISTRIBUZIONE

$< T, \varphi >$ EFFETTO DI T SU φ TEST

ESEMPIO $< \delta_0, \varphi > = \varphi(0)$

SE $< T_K, \varphi > = N\varphi(K)$ $\quad T_K = N\delta_K$

IL RISULTATO CARATTERIZZA LA DISTRIBUZIONE

TIPI DI DISTRIBUZIONE

1) δ_K
2) $f \in L^1_{loc}$

SPAZIO $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ LOCALE

TUTTE LE f INTEGRABILI SU UN INTERVALLO COMPATTO

SE $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \rightarrow < T_f, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x)\, dx$

SE DISTRIBUZIONE = FUNZIONE IL SUO EFFETTO E' L'INTEGRALE

DERIVATA DISTRIBUZIONALE

$< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$

$\exists$ DEFINITA PERCHE' φ TEST $\in C_0^\infty$

φ' E' UNA FUNZIONE DI TEST

PRODOTTO DISTRIBUZIONE - TEST

$< fT, \varphi > = < T, f\varphi >$ $\quad f\varphi \in D(\Omega)$ TEST

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $T \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ $\rightarrow (f \cdot T) \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ DISTRIBUZIONE

$f \in L^1_{loc}$ $\quad f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

f LIMITATA $\rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \rightarrow f$ E' DISTRIBUZIONE $(T_f = f)$

CALCOLA f' DERIVATA DISTRIBUZIONALE

$$< f', \varphi > = - < f, \varphi' > = - < \arctan \tfrac{1}{x}, \varphi' >$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \varphi'(x)\, dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) \varphi'(x)\, dx - \int_0^{\infty} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) \varphi'(x)\, dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$u = \arctan \frac{1}{x}$ $\quad u' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$

$v' = \varphi'(x)$ $\quad v = \int \varphi'(x) = \varphi(x)$

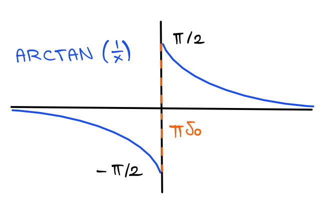
$\rightarrow -\left(\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\varphi(x) + \int \frac{1}{1+x^2}\varphi(x)\, dx \right)$

$$= -\left\{ \left[\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\varphi(x)\, dx + \left[\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\varphi(x)\, dx \right\}$$
$$= -\left\{ 0 - \tfrac{\pi}{2}\varphi(0) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\varphi(x)\, dx + 0 - \tfrac{\pi}{2}\varphi(0) \right\}$$
$$= \pi\varphi(0) - 2\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\varphi(x)\, dx$$

EFFETTO SU FUNZIONE φ

DUALITA' TRA DISTRIBUZIONE $T_f = f$ E FUNZIONE TEST φ

$$\boxed{< f', \varphi > = \pi\varphi(0) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\, dx = < \underbrace{\pi \cdot \delta_0}_{\text{NON } L^1_{loc}} - \frac{1}{1+x^2}, \varphi >}$$

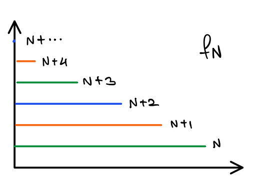


DOVE NON E' CONTINUA C'E' UN SALTO DI AMPIEZZA $\pi\delta_0$

$\nexists \int \delta_K$ NON E $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$< f', \varphi > \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \rightarrow$ NON POSSO SCRIVERE COME FUNZIONE

$f_N(x) = N\chi_{[0, 1/N]}$



LIMITE PUNTUALE

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

LIMITE NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI

f_N DISTRIBUZIONI? SI PERCHE' $f \in L^1_{loc}$

LIMITE DEGLI EFFETTI CHE f_N HANNO SU φ

$$\lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_N(x) \cdot \varphi(x)\, dx$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^{1/N} N \cdot \varphi(x)\, dx \quad \text{FUNZIONE CARATTERISTICA}$$
$$= \lim_{N\to\infty} N \int_0^{1/N} \varphi(x)\, dx =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \cancel{N} \frac{1}{\cancel{N}} \varphi(C_N) = \quad \text{MEDIA INTEGRALE *}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \varphi(C_N) = \varphi(0)$$

SAPPIAMO CHE C_N STA' DENTRO L'INTERVALLO

$0 \leq C_N \leq \frac{1}{N}$ $\quad C_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = \varphi(0) = < \delta_0, \varphi >} \qquad f_N \xrightarrow{D'(\Omega)} \delta_0$$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SE f CONTINUA, ALLORA VALGONO:

$M = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$

$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(c)$

$f_N = N x^N \chi_{[0,1]}$

LIMITE PUNTUALE

$$\lim_{N\to\infty} f_N = \begin{cases} +\infty & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

LIMITE NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI

$$\lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = I = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 N x^N \varphi(x)\, dx =$$
$$= \lim_{N\to\infty} N \int_0^1 x^N \cdot \varphi(x)\, dx =$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$u = \varphi(x)$ $\quad u' = \varphi'(x)$

$v' = x^N$ $\quad v = \frac{x^{N+1}}{N+1}$

$\rightarrow \lim_{N\to\infty} N \left(\left[\frac{x^{N+1}}{N+1}\varphi(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+1}\varphi'(x)\, dx \right)$

DERIVIAMO SEMPRE φ TEST PERCHE' NELLO SPAZIO $D(\Omega)$
E' GARANTITO CHE φ' SIA TEST, NON SAPPIAMO DI $\int\varphi$

POSSIAMO INTEGRARE φ' MA MAI φ

$$I = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{=1} \varphi(1) - \int_0^1 \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{=1} x^{N+1} \varphi'(x)\, dx$$

CONVERGENZA DOMINATA

POSSO APPLICARLA PERCHE'

$\left| \frac{N}{N+1} x^N \varphi'(x) \right| \leq M = \max_{[0,1]} (|\varphi'(x)|)$

MAGGIORAZIONI

$\frac{N}{N+1} < 1$ $\quad x^N < 1$

PER CONVERGENZA DOMINATA $\lim \int f = \int \lim f$

$I = \varphi(1) - \cancel{\int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N+1} x^{N+1} \varphi'(x)\, dx} = \varphi(1)$

IN $x \in [0,1)$: x^{N+1} ESPONENZIALE NEGATIVO
TENDE QUASI A ZERO OVUNQUE $x^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

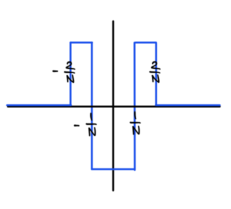
$$\boxed{I = \lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = \varphi(1) = < \delta_1, \varphi >}$$

$f_N \xrightarrow{D'(\Omega)} \delta_1$ DELTA CENTRATA IN $x = 1$

SFATARE UN MITO

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

$$f_N(x) = \begin{cases} -\alpha N & |x| \leq \frac{1}{N} \\ \beta N & \frac{1}{N} < |x| \leq \frac{2}{N} \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$



LIMITE PUNTUALE

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{ALTROVE} \\ -\infty & x = 0 \end{cases}$$

LIMITE DELLA DISTRIBUZIONE

$$\lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = I =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f_N(x)\varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{-2/N}^{-1/N} \beta N \varphi(x)\, dx + \int_{-1/N}^{1/N} -\alpha N \varphi(x)\, dx + \int_{1/N}^{2/N} \beta N \varphi(x)\, dx$$
$$= N \left(\beta \int_{-2/N}^{-1/N} \varphi - \alpha \int_{-1/N}^{1/N} \varphi + \beta \int_{1/N}^{2/N} \varphi \right)$$

TEOREMA DELLA MEDIA $\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(c)$ $\quad c \in [a,b]$

$I = N \cdot \left(\frac{1}{N}\beta\varphi(a_N) - \frac{2}{N}\alpha\varphi(b_N) + \frac{1}{N}\beta\varphi(c_N) \right)$

$-\frac{2}{N} \leq a_N \leq -\frac{1}{N} \leq b_N \leq +\frac{1}{N} \leq c_N \leq \frac{2}{N}$

$\lim_{N\to\infty} \pm\frac{(2)}{N} \rightarrow 0$ $\quad a_N, b_N, c_N \longrightarrow 0$

$I = \lim_{N\to\infty} (\beta\varphi(0) - 2\alpha\varphi(0) + \beta\varphi(0)) = 2(\beta - \alpha) \cdot \varphi(0)$

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} < f_N, \varphi > = 2(\beta-\alpha)\varphi(0) = < 2(\beta-\alpha)\delta_0, \varphi >}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $T \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ $\rightarrow (f \cdot T) \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ DISTRIBUZIONE

SE MOLTIPLICO UNA DISTRIBUZIONE AD UNA FUNZIONE C^∞, IL LORO PRODOTTO E' A SUA VOLTA UNA DISTRIBUZIONE C_0^∞

$< fT, \varphi > = < T, f\varphi >$ $\quad f\varphi \in D(\Omega)$ TEST

VERIFICA L'EQUIVALENZA

$T = x\,\delta_0'$

$$\begin{aligned}
< T, \varphi > &= < x\,\delta_0', \varphi > && \text{APPLICO L'EFFETTO} \\
&= < \delta_0', x\varphi > && \text{REGOLA } x \in C^\infty \\
&= - < \delta_0, (x\varphi)' > && \text{DERIVATA DISTRIBUZIONE} \\
&= - < \delta_0, \varphi + x\varphi' > && \text{DERIVATA PRODOTTO} \\
&= -(\varphi(0) + \cancel{0 \cdot \varphi'(0)}) && \text{EFFETTO DELLA DELTA } < \delta_a, \varphi > = \varphi(a) \\
&= -\varphi(0) && \text{PER DEFINIZIONE} \\
&= < -\delta_0, \varphi >
\end{aligned}$$

STESSO EFFETTO

$< x\,\delta_0', \varphi > = < -\delta_0, \varphi >$ $\quad x\,\delta_0' \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} \delta_0$

$N, M \in \mathbb{N}$ $\quad T = x^N \delta_0^{(M)}$

TROVA EQUIVALENZA

$< T, \varphi > = < x^N \delta_0^{(M)}, \varphi > =$ $\quad$ DEFINIZIONE

$= < \delta_0^{(M)}, x^N\varphi > = *$ $\quad x^N \in C^\infty$

DERIVATE SUCCESSIVE DEL PRODOTTO

$$D^{(m)}(f \cdot g) = \frac{d^m}{dx^m}(f \cdot g) = \sum_0^M \binom{M}{K} f^{(K)} \cdot g^{(M-K)}$$

CASO 1 $\quad M < N$

$* = (-1)^M < \delta_0, (x^N\varphi)^{(M)} > = 0$ $\quad \underline{T = 0}$ $\quad < 0, \varphi >$

DERIVIAMO X TROPPE VOLTE FINO AD ANNULLARLA

CASO 2 $\quad M = N$

SCARICO TUTTE LE DERIVATE

$* = (-1)^N \cdot < \delta_0, (x^N\varphi)^{(N)} > =$

$= (-1)^N \cdot N! \cdot \varphi(0) = < (-1)^N\delta_0, \varphi >$

TUTTE LE POTENZE DI X VALUTATE IN 0 SONO 0

$x^N \delta_0^{(M)} \xrightarrow{\mathbb{D}'} (-1)^N \delta_0$

CASO 3 $\quad M > N$? BOH

$* = (-1)^N < \delta_0^{(M-N)}, D^{(N)}(x^N\varphi(x)) >$

$N! \cdot \varphi(x) + \underbrace{\cancel{\psi(x)}}_{=0 \text{ IN } x=0}$

$* = (-1)^N N!\, \delta_0^{(M-N)}$