Analisi matematica 2		11 settembre 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)(x + y - 1)$$

a) Descrivere *l'insieme di livello* $\{f = 0\}$. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.
b) Trovare i punti critici della funzione e studiarne la natura.
c) Trovare gli estremi *vincolati* di f sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

2.

3a)

i) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y(1 - y).$$

ii) Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$y(0) = 0, \quad y(0) = 1/2, \quad y(0) = 1\,.$$

3b)

Trovare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x' = -5y \\ y' = x - 6y \end{cases}$$

3.

a) Calcolare direttamente ed usando il teorema della divergenza il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie del cilindro:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 \leq 1; \quad 0 \leq x \leq 1\}$$

b) Calcolare il volume della regione di spazio delimitata dalle superfici di equazioni

$$z = 3\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad z = 4 - x^2 - y^2$$

4.

a) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}\, x^n$$

Detta $f(x)$ la somma della serie, spiegare perchè la funzione f ha derivate di tutti gli ordini nell'intervallo di convergenza; calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2$ e tale che

$$f(x) = 1 - |x| \qquad \text{per} \quad x \in (-1, 1].$$

- Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3, 3]$.
- Dimostrare che *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ vale lo sviluppo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)\,,$$

per opportuni coefficienti a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots.$ Calcolare esplicitamente i coefficienti a_0 e a_1.

SOLUZIONI

1.

a) L'insieme di livello zero è l'unione dell'origine $(0,0)$ e dei punti sulla retta di equazione $y = -x+1$. Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e non connesso.

b) Derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 2x(x+y-1) + x^2 + y^2 = 3x^2 + y^2 + 2xy - 2x\,;$$
$$f_y(x,y) = 2y(x+y-1) + x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 + 2xy - 2y\,.$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2xy - 2x = 0 \\ x^2 + 3y^2 + 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene:

$$2(x^2 - y^2) - 2(x-y) = 0\,,$$

ovvero

$$(x-y)(x+y-1) = 0\,.$$

Abbiamo quindi le due alternative $y = x$, oppure $y = 1-x$. Nel primo caso, sostituendo in una delle due equazioni si ricava

$$6x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x-1) = 0\,.$$

Nel secondo caso si ottiene invece l'equazione

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

che non ha soluzioni reali. Troviamo quindi per il sistema le due soluzioni $(0,0)$ e $(1/3, 1/3)$.
Per studiare la natura dei punti critici trovati, calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 2y - 2; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x + 2y; \quad f_{yy}(x,y) = 2x + 6y - 2\,.$$

Calcolando il determinante della matrice Hessiana nell'origine si ottiene $\det H_f(0,0) = 4 > 0$; inoltre $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, quindi l'origine è un massimo locale.
Nel secondo punto critico abbiamo invece $\det H_f(1/3,1/3) = -4/3 < 0$, per cui si tratta di un colle.

c) Gli estremi vincolati si possono trovare parametrizzando la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con le equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. In questo modo, il problema si traduce nella ricerca degli estremi di

$$g(t) \equiv f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t - 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Studiando il segno della derivata

$$g'(t) = -\sin t + \cos t\,,$$

si trova che $g(t)$ ha un massimo per $t = \pi/4$, cioè nel punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e un minimo per $t = 5\pi/4$, nel punto $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. I valori corrispondenti sono $g(\pi/4) = \sqrt{2} - 1$ e $g(5\pi/4) = -\sqrt{2} - 1$.
Il problema si poteva risolvere anche applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; in questo caso, i calcoli si semplificano osservando che la restrizione di f alla circonferenza unitaria coincide con la funzione $x + y - 1$, per cui si possono cercare i punti critici vincolati di quest'ultima funzione annullando il gradiente della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)\,.$$

2.

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili (equazione logistica). L'equazione ammette due soluzioni costanti (di equilibrio) $y = 0$ e $y = 1$; per il teorema di esistenza e unicità, esse sono le soluzioni rispettivamente dei problemi di Cauchy con $y(0) = 0$ e con $y(0) = 1$.

Le soluzioni non costanti si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int dt + c,$$

Utilizzando la decomposizione

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

nell'integrale al primo termine, si ricava

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + c; \qquad \left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{t+c}$$

oppure, ridefinendo la costante arbitraria,

$$\frac{y}{1-y} = c\,e^t, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Risolvendo rispetto ad y si ottiene

$$y = \frac{c\,e^t}{1+c\,e^t} = \frac{c}{c+e^{-t}} = \frac{1}{1+k\,e^{-t}}\,, \qquad k = 1/c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1/2$ troviamo la soluzione:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}\,,$$

definita su tutto $\mathbb{R}$.

3b)

Applichiamo *metodo di eliminazione*: derivando la seconda equazione e sostituendo x' dato dalla prima, si ottiene l'equazione omogenea del secondo ordine

$$y'' + 6y' + 5y = 0$$

Risolvendo l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, si trova l'integrale generale

$$y(t) = C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{-5t}$$

Dalla seconda equazione si ricava poi

$$x(t) = y'(t) + 6y(t) = 5C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{-5t}\,.$$

Il sistema si poteva anche risolvere calcolando gli autovalori e gli autovettori della matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda + 6) + 5 = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0\,.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$.
Due autovettori linearmente indipendenti sono, rispettivamente,

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'integrale generale del sistema si può allora scrivere

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

3.

a) La superficie del cilindro è l'unione di 3 superfici regolari: la *superfice laterale*

$$S \equiv \{(x, y, z)\,|\,y^2 + z^2 = 1, \quad 0 \le x \le 1\}$$

e le due basi

$$D_1 \equiv \{(0, y, z)\,|\,y^2 + z^2 \le 1\}, \qquad D_2 \equiv \{(1, y, z)\,|\,y^2 + z^2 \le 1\}$$

Usando la parametrizzazione

$$x = u, \quad y = \cos v, \quad z = \sin v, \qquad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v < 2\pi,$$

la normale esterna *sulla superfice laterale* S è

$$\mathbf{n}_e = \cos v\,\mathbf{j} + \sin v\,\mathbf{k}$$

Su S abbiamo allora,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e = -\cos^2 v - \sin^2 v = -1\,,$$

da cui segue subito

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = -\int\!\!\int_S dS = -|S| = -2\pi$$

Sulle due basi abbiamo

$$\mathbf{n}_e = -\mathbf{i} \quad \text{su } D_1, \qquad \mathbf{n}_e = \mathbf{i} \quad \text{su } D_2$$

e

$$\mathbf{F}(0, y, z) = -y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \quad \text{su } D_1 \qquad \mathbf{F}(1, y, z) = 2\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \quad \text{su } D_2$$

Dunque:

$$\int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = 0;$$

$$\int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{y^2+z^2\le 1} 2\, dydz = 2\pi\,.$$

In definitiva:

$$\int\!\!\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = 0 + 2\pi - 2\pi = 0\,.$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_x(2x) + \partial_y(-y) + \partial_z(-z) = 2 - 1 - 1 = 0 \,.$$

Abbiamo allora

$$\int\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = 0 \,.$$

b) Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, le due superfici $z = 3\rho$, e $z = 4 - \rho^2$, si intersecano per ρ soluzione *positiva* dell'equazione

$$3\rho = 4 - \rho^2$$

ovvero per $\rho = 1$. Il volume cercato è compreso tra le porzioni del paraboloide e della superficie conica che si proiettano sul cerchio unitario $B \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ del piano di base. Integrando per fili si trova:

$$V = \int\int_B \Big(\int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{4-x^2-y^2} dz \Big) \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - \rho^2 - 3\rho)\rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (4\rho - \rho^3 - 3\rho^2) \, d\rho \; = 2\pi \Big[2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 - \rho^3 \Big]_0^1 = \frac{3}{2}\pi \,.$$

4.

a) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza 1, per cui converge (assolutamente) per $-1 < x < 1$. Per $x = -1$ e $x = 1$ abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$$

che non convergono perchè il termine generale non tende a zero. Detta $f(x)$ la somma della serie, dalla relazione

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k-1}{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

abbiamo

$$f(0) = -1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 2/3.$$

b) La funzione f è continua e regolare a tratti. Per il teorema di convergenza puntuale, la serie di Fourier associata converge in ogni punto a $f(x)$; inoltre, la funzione è pari, per cui i coefficienti di Fourier b_n sono nulli. Infine

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) \, dx = 2 - 2\int_0^1 x \, dx = 2 - 1 = 1;$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) \cos(\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(\pi x) \, dx =$$

$$= -2 \int_0^1 x \cos(\pi x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi x) \, dx = \frac{4}{\pi^2} \,.$$