Campi vettoriali e integrazione di forme differenziali

1) Sono dati i campi vettoriali piani

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}y^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}; \quad \mathbf{H}(x,y) = \frac{1}{2}y^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}\,.$$

i) Dire quale dei due è conservativo motivando la risposta.

ii) Date le forme differenziali:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}y^2\,dx + xy\,dy\,, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}y^2\,dx - xy\,dy\,,$$

calcolare

$$\int_\gamma \omega_i \quad i = 1,2$$

dove γ è la curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}\,, \quad t \in [1,2].$$

2) Sia $f(r) \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$, dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

i) Verificare che

$$\nabla r = \frac{x}{r}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r}\,\mathbf{k}\,, \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$$

ii) Dimostrare che la forma differenziale

$$\omega = f(r)[x\,dx + y\,dy + z\,dz]$$

è esatta in $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

3) Supponiamo che il campo vettoriale

$$\mathbf{u}(x,y) = u_1(x,y)\,\mathbf{i} + u_2(x,y)\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$$

rappresenti, in ogni punto (x,y), la velocità della particella di un fluido (piano, incompressibile e di densità costante) che si trova in quel punto. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = -u_2(x,y)\,dx + u_1(x,y)\,dy$$

e sia γ una curva nel piano, chiusa, semplice, regolare a tratti e orientata positivamente.

Verificare che

$$\oint_\gamma \omega = \oint_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_e\,ds$$

dove $\mathbf{N}_e$ è, in ogni punto di γ, il *versore normale diretto verso l'esterno della regione racchiusa dalla curva* (versore normale esterno). Dimostrare che ω è esatta se e solo se

$$\partial_x u_1(x,y) + \partial_y u_2(x,y) = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Soluzioni

1) I campi sono entrambi definiti su tutto il piano e sono di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Abbiamo

$$\partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y) = y$$

per cui $\mathbf{F}$ è conservativo. Nel caso di $\mathbf{H}$, le due derivate differiscono per il segno, per cui $\mathbf{H}$ non è conservativo.
Il calcolo del lavoro del campo $\mathbf{F}$ si può fare osservando che un potenziale è dato dalla funzione

$$U(x,y) = xy^2/2$$

per cui

$$L = U(x(2), y(2)) - U(x(1), y(1)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

(la curva γ è parte di una linea equipotenziale).
Nel caso di $\mathbf{H}$, si deve calcolare

$$L = \int_\gamma \frac{y^2}{2}\, dx - xy\, dy$$

$$= \int_1^2 \Big[\frac{t}{2}\big(-\frac{1}{t^2}\big) - \frac{\sqrt{t}}{t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\Big] dt = \int_1^2 (-1/t) dt = -\log 2.$$

2) La forma è esatta perchè

$$\omega = rf(r)\big[\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dx + \frac{z}{r}dx\big] = dU$$

dove $U(r) = \int rf(r)\, dr$. Infatti,

$$\partial_x U(r) = U'(r)\, \partial_x r = rf(r)\frac{x}{r} = f(r)x;$$

$$\partial_y U(r) = U'(r)\, \partial_y r = rf(r)\frac{y}{r} = f(r)y;$$

$$\partial_z U(r) = U'(r)\, \partial_z r = rf(r)\frac{z}{r} = f(r)z.$$

Dunque, il campo $\mathbf{F} = f(r)\, x\, \mathbf{i} + f(r)\, y\, \mathbf{j} + f(r)\, z\, \mathbf{k}$ (campo centrale) è conservativo per qualsiasi $f \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$.
Soluzione alternativa : Il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale nell'aperto $D = \mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\}$ (fare la verifica diretta). Tale insieme è *semplicemente connesso*: ogni curva chiusa contenuta in D è deformabile con continuità in un punto senza uscire dal dominio stesso. Dunque la condizione $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$ è *necessaria e sufficiente* perchè $\mathbf{F}$ sia conservativo in D.

3) Parametrizziamo γ con l'ascissa curvilinea s:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j}\,, \qquad s \in [0, L]$$

(L lunghezza di γ). Abbiamo allora:

$$\oint_\gamma \omega = \int_0^L \Big(- u_2\big(x(s), y(s)\big)\, x'(s) + u_1\big(x(s), y(s)\big)\, y'(s)\Big) ds$$

$$= \int_0^L \Big(u_1\big(x(s), y(s)\big)\,\mathbf{i} + u_2\big(x(s), y(s)\big)\,\mathbf{j}\Big) \cdot \big(y'(s)\,\mathbf{i} - x'(s)\,\mathbf{j}\big) ds$$

Definendo

$$\mathbf{N}_e = y'(s)\,\mathbf{i} - x'(s)\,\mathbf{j}$$

possiamo scrivere l'ultimo integrando nella forma $\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_e$.

Poiché il versore tangente alla curva è $\mathbf{T}(s) = x'(s)\,\mathbf{i} + y'(s)\,\mathbf{j}$, si vede che il vettore $\mathbf{N}_e$ ha lunghezza unitaria ed è ortogonale a $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e = 0$); inoltre, dalla relazione

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{k} = y'(s)\,\mathbf{i} - x'(s)\,\mathbf{j} = \mathbf{N}_e$$

segue che $\mathbf{N}_e$ punta 'alla destra' di $\mathbf{T}$, ovvero è diretto verso l'esterno della regione racchiusa dalla curva.

Assumendo uguale a 1 la densità del fluido, il termine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_e\, ds$ rappresenta (approssimativamente) la quantità di fluido che attraversa *nell'unità di tempo* una porzione ds di γ in direzione uscente. L'integrale rappresenta allora il *flusso di fluido* attraverso γ, ovvero la differenza tra la quantità di fluido uscita ed entrata nell'unità di tempo nella regione delimitata da γ.

La forma ω è di classe $\mathcal{C}^1$ sul dominio $\mathbb{R}^2$, per cui è esatta se e solo se vale la relazione

$$\partial_y\big(- u_2(x, y)\big) = \partial_x\big(u_1(x, y)\big) \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$\partial_x u_1(x, y) + \partial_y u_2(x, y) = 0 \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Se la forma è esatta, il flusso del fluido attraverso la frontiera di una qualunque regione del piano è nullo; ciò significa che non sono presenti sorgenti o pozzi di fluido.