Analisi matematica 2		6 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \log |y| & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire in quali punti la funzione è continua e in quali è differenziabile.
b) Trovare i punti critici di g ed eventuali estremi locali.

2. Data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{\cos^2 y}{2\sqrt{t}}$$

a) Stabilire in quale regione del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data.

b) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità in grande, dimostrare che ogni soluzione è definita in $(0, +\infty)$.

c) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione, determinare la curva integrale che soddisfa la condizione $y(1) = \pi$ e tracciarne un grafico qualitativo nel piano (t, y).

3.

a) Determinare per quale valore del parametro reale k la forma differenziale

$$\omega_k = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x}} + k\sqrt{4-y^2} \right) dx + \frac{(4-x)\, y}{\sqrt{4-y^2}}\, dy$$

è esatta nel suo dominio di definizione. Trovare un potenziale in corrispondenza al valore di k ottenuto.

b) Calcolare per ogni k l'integrale

$$\int_\gamma \omega_k$$

dove γ è l'arco di parabola di equazione $x + y^2 = 3$, percorso dal punto iniziale $(3, 0)$ al punto finale $(0, \sqrt{3})$.

4. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

calcolare il flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad y \geq 0\right\}$$

orientata in modo che la componente della normale lungo l'asse y sia non negativa.

SOLUZIONI

1. *Continuità:* la funzione si può scrivere come $g(x,y) = xh(y)$, dove

$$h(y) = \begin{cases} y\log|y| & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{y\to 0} y\log|y| = 0$, la funzione h è continua in ogni punto; dunque la g, essendo il prodotto di funzioni continue (una della sola variabile x e una della sola y) è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
Differenziabilità: in tutti i punti con $y \neq 0$ la funzione è derivabile con continuità e dunque è differenziabile. Esaminiamo ora i punti sull'asse $y = 0$. Poiché $g(x,0) = 0$ per ogni x, la derivata parziale rispetto ad x esiste in tutti i punti dell'asse e vale $g_x(x,0) = 0$. Per la derivata rispetto ad y consideriamo il rapporto

$$\frac{g(x,k) - g(x,0)}{k} = x\ln|k|$$

Per $x = 0$, l'espressione vale zero per ogni k; se $x \neq 0$, il limite per $k \to 0$ non esiste finito. Concludiamo che nei punti dell'asse x, *tranne eventualmente l'origine*, la funzione *non* è differenziabile. Esaminiamo la differenziabilità nell'origine. Applicando la definizione, consideriamo il quoziente:

$$\frac{g(h,k) - g(0,0) - g_x(0,0)h - g_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk\ln|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Questa quantità è infinitesima per $(h,k) \to (0,0)$ perchè

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

e

$$k\ln|k| \to 0$$

Dunque, g è differenziabile in $(0,0)$. Poiché $\nabla g(0,0) = 0$, l'origine è un punto critico; osservando poi che $g(0,0) = 0$ e che g cambia di segno in *ogni* intorno dell'origine, concludiamo che si tratta di un punto di sella.

Per studiare i rimanenti punti critici calcoliamo, per $y \neq 0$,

$$\nabla g(x,y) = y\log|y|\,\mathbf{i} + x(\log|y|+1)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \log|y|+1 \\ \log|y|+1 & x/y \end{pmatrix}$$

Il gradiente si annulla nei punti $(0,1)$ e $(0,-1)$; in entrambi i casi abbiamo $\det\mathbf{H}_g(0,\pm 1) = -1$, per cui si trovano altri due punti di sella.
Eventuali estremi locali vanno allora cercati tra i punti dove g non è differenziabile, cioè sull'asse $y = 0$ esclusa l'origine. Ma, ricordando che $g(x,0) = 0$, dallo studio del segno di g segue ancora che non ci sono estremi locali sull'asse delle ascisse (si consideri, per ogni fissato $x \neq 0$, la funzione $y \mapsto g(x,y)$ per y in un intorno dell'origine).

2.

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. La funzione al secondo membro

$$f(t,y) = -\frac{\cos^2 y}{2\sqrt{t}}$$

e la sua derivata parziale

$$f_y(t,y) = \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{t}}$$

sono continue nel semipiano aperto

$$D = \{(t,y),\ t > 0\}$$

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate in D.

b) Se $0 < a < b$, la funzione $f(t,y)$ soddisfa

$$|f(t,y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

nella regione $[a,b] \times \mathbb{R}$. Per il teorema di esistenza globale, ogni soluzione del problema di Cauchy con dati $(t_0, y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ è definita in $[a,b]$. Per l'arbitrarietà di a e b, si conclude che ogni soluzione si prolunga all'intervallo $(0,+\infty)$.

c) Le funzioni costanti

$$y = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

sono soluzioni dell'equazione. Le soluzioni non costanti soddisfano

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}\,dy = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt + C,$$

$$\tan y = -\sqrt{t} + C$$

Sostituendo nell'equazione i valori $t = 1$, $y = \pi$, si ricava il valore $C = 1$. Per scrivere in forma esplicita la soluzione, occorre invertire la funzione periodica $\tan y$ nell'intervallo $(\pi/2, 3\pi/2)$; si ottiene allora

$$\varphi(t) = \pi - \arctan(\sqrt{t} - 1)$$

La funzione φ è strettamente descrescente e soddisfa

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \frac{\pi}{2}$$

3.

a) La forma è definita nell' aperto

$$D = \{(x,y)\,|\,x < 4, \quad -2 < y < 2\}$$

Poiché tale insieme è stellato, la forma è esatta *se e solo se*

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{4-x}} + k\sqrt{4-y^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{(4-x)\,y}{\sqrt{4-y^2}}$$

ovvero

$$-\frac{ky}{4-y^2} = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$$

da cui si ricava l'unica soluzione

$$k = 1$$

In questo caso, un potenziale (non quello che vale zero nell'origine) è dato dalla funzione

$$U(x,y) = -2\sqrt{4-x} + (x-4)\sqrt{4-y^2}$$

b) Poiché si conosce un potenziale della forma esatta ω_1, conviene scrivere

$$\int_\gamma \omega_k = \int_\gamma (\omega_k - \omega_1) + \int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma (\omega_k - \omega_1) + U(0,\sqrt{3}) - U(3,0)$$

$$= \int_\gamma (\omega_k - \omega_1) - 4$$

Per calcolare integrale, si parametrizza l'arco di parabola con

$$x = 3 - t^2, \quad y = t, \qquad t \in [0,\sqrt{3}]$$

e si ottiene

$$\int_\gamma (\omega_k - \omega_1) = (k-1)\int_\gamma \sqrt{4-y^2}\,dx = (k-1)\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2}\,(-2t)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}(k-1)\big[(4-t^2)^{3/2}\big]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{14}{3}(k-1)$$

Abbiamo allora

$$\int_\gamma \omega_k = -\frac{14}{3}(k-1) - 4 = \frac{2}{3} - \frac{14}{3}k = \frac{2}{3}(1-7k)$$

Lo stesso risultato si poteva ricavare con il calcolo diretto usando la medesima parametrizzazione.

4.

Il calcolo si può svolgere in due modi: direttamente dalla definizione o utilizzando il teorema di Stokes. Nel primo caso si ricava

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{rot}\Big(xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}\Big) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

La superficie è la semisfera con centro nell'origine e raggio unitario che giace nel semispazio delle y positive. Osserviamo che la normale alla superficie coincide con il raggio vettore $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Il flusso è allora:

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int\int_\Sigma (xy + xz + z)\,ds$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi (\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta + \sin\phi\cos\phi\cos\theta + \cos\phi)\sin\phi\,d\theta\,d\phi = 0$$

L'annullarsi dell'integrale di superfice si poteva anche dedurre da considerazioni di simmetria.
Per usare il teorema di Stokes, si osserva che il bordo orientato $\partial^+\Sigma$ della superficie è la circonferenza di equazione $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, percorsa una volta in senso *positivo* rispetto all'orientazione della superfice. Ponendo allora

$$x = \sin t, \quad y = 0, \quad z = \cos t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si ottiene:

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial^+\Sigma} xz\,dx + x\,dy + yz\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin t\,dt = 0$$