Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2010/2011
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Modulo di Metodi Analitici (7-7-11) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: _________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Calcolare

$$I = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^8 - 1}\, dx \ .$$

Soluzione. La funzione integranda estesa al piano complesso ha 8 poli semplici, dei quali quelli contenuti nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ sono:

$$z_1 = 1 \ , \quad z_2 = -1 \ , \quad z_3 = i \ , \quad z_4 = e^{i\pi/4} \ , \quad z_5 = e^{i3\pi/4} \ .$$

Sono soddisfatte le condizioni di annullamento all'infinito per applicare la formula

$$I = \pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}(f, z_j) + 2\pi i \sum_{j=3}^{5} \mathrm{Res}(f, z_j) \ .$$

Poiché

$$\mathrm{Res}(f, z_j) = \frac{1}{8 z_j^5} \ ,$$

si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{8} \ ,$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = -\frac{1}{8} \ ,$$

$$\mathrm{Res}(f, z_3) = -\frac{i}{8} \ ,$$

$$\mathrm{Res}(f, z_4) = \frac{1}{8}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \ ,$$

$$\mathrm{Res}(f, z_5) = \frac{1}{8}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \ ,$$

da cui

$$I = \frac{\pi}{4}(1 - \sqrt{2}) \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

1. Enunciare i seguenti teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale nella teoria dell'integrazione di Lebesgue:
   1a. teorema di convergenza dominata;
   1b. teorema di Beppo-Levi.
2. Fornire un esempio di una successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:
   2a. f_n converge a zero puntualmente q.o. ma non in $L^1(\mathbb{R})$;
   2b. f_n converge a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non puntualmente q.o.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Si consideri l'equazione integro-differenziale:

$$2u''(x) - u(x) * e^{-|x|} = \chi_{[-1,1]}(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\chi_{[-1,1]}$ è la funzione che vale 1 se $x \in [-1,1]$ e 0 altrimenti.

(i) Dimostrare che l'equazione ammette una e una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$.
(ii) Fornire una formula di rappresentazione per u tramite la sua trasformata di Fourier.
(iii) Stabilire se u è pari/ dispari/ né pari né dispari.
(iv) Stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ si ha $u(x) = o(|x|^{-k})$ per $x \to \pm\infty$.

Soluzione.
(i) Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione e usando le note regole di trasformazione, si ottiene:

$$2(i\xi)^2\hat{u} - \frac{2}{1+\xi^2}\,\hat{u} = 2\,\frac{\sin\xi}{\xi}\ .$$

Pertanto si ricava

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{\sin\xi}{\xi}\frac{1+\xi^2}{\xi^4+\xi^2+1}\ .$$

Poiché $\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ (essendo $|\hat{u}(\xi)| \le C|\xi|^{-3}$), $\hat{u}$ è la trasformata di una (e una sola) funzione $u \in L^2(\mathbb{R})$ che è la soluzione cercata.

(ii) Per la formula di inversione valida in $L^2(\mathbb{R})$, ed essendo anche $\hat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{i\xi x}\,dx\ .$$

(iii) Essendo $\hat{u}$ pari (e reale) anche u è pari (e reale).

(iv) Essendo $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha $u(x) = o(|x|^{-k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.