2) $\nabla g(0;0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ l'origine è un punto criti-co.

1-4-2021

$(0;0)$ è un punto di sella perché la funzione cambia segno intorno a $(0;0)$

$\boxed{y \neq 0}$

$$g(x;y) = \begin{cases} xy \ln|y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$\nabla g(x;y) = \begin{bmatrix} y \ln|y| \\ x(1+\ln|y|) \end{bmatrix}$$

NOTA:
$$\left.\begin{aligned} (y \ln y)' &= \ln y + y \cdot \frac{1}{y} = \ln y + 1 \\ (y \ln(-y))' &= \ln(-y) + \cancel{y} \frac{1}{-\cancel{y}} \cdot (-1) = \ln(-y) + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(y + \ln|y|\right)' = 1 + \ln|y| .$$

PUNTI CRITICI : $\nabla g(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \cancel{y}\ln|y| = 0 & \longrightarrow \quad |y| = 1 \longrightarrow y = \pm 1 \\ x\left(\cancel{1+\ln|y|}\right) = 0 & \longrightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (0;1) \qquad (0;-1)$$

$$Hg(x;y) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\ln|y| \\ 1+\ln|y| & \dfrac{x}{y} \end{bmatrix} \qquad Hg(0;1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det H_g(0;1) = -1 < 0$$

$\Longrightarrow (0;1)$ SELLA

Analogamente in $(0;-1) \Rightarrow$ SELLA.
Eventuali altri punti di max/min relativi sono da ricercarsi tra i punti di non differenziabilità, quindi tra i punti $y=0$ (escluso l'origine). $g(x;y)$ cambia segno intorno all'asse e quindi non ammette ulteriori punti estremi relativi.

TEOREMA DI DINI

ESERCIZIO 1. Dimostrare che l'eq. $3y^3 = 6xy - 3x^2$ definisce implicitamente in un intorno di $(1;1)$ una funzione $y = y(x)$. Stabilire se $x_0 = 1$ è un estremo locale di $y(x)$

e se la funzione $y(x)$ è invertibile in un intorno di $x_0 = 1$.

SOL.

$$3y^3 = 6xy - 3x^2 \longrightarrow \underbrace{3y^3 - 6xy + 3x^2}_{= g(x;y)} = 0$$

$g(x;y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $(1;1)$ se:

1) $g(1;1) = 0$ $\qquad 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$ ✓

2) $z = g(x;y) \in C^1$ $\qquad$ vero perché è un polinomio.

3) $g_y(1;1) \neq 0$ $\qquad g_y(x;y) = 9y^2 - 6x$ ✓

$$g_y(1;1) = 9-6 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \quad y = y(x) \quad e \quad y'(1) = \frac{-g_x(1;1)}{g_y(1;1)} = 0$$

$$g_x(x;y) = -6y+6x \rightarrow g_x(1;1) = 0$$

Studio la natura del punto:

al momento sappiamo che $\quad y(1) = 1$
$\qquad y'(1) = 0$

$$3y^3 - 6xy + 3x^2 = 0$$

$$3y^3(x) - 6x\,y(x) + 3x^2 = 0$$

DERIVO: $\quad 9y^2(x)\,y'(x) - 6y(x) - 6x\,y'(x) + 6x = 0 \qquad (*)$

SOSTITUISCO $x_0 = 1$ (ricordando che $y(1) = 1$)

$$9y'(1)-\cancel{6}-6y'(1)+\cancel{6}=0 \longrightarrow \underline{y'(1)=0}$$

CONFERMATO

DERIVO ANCORA (*):

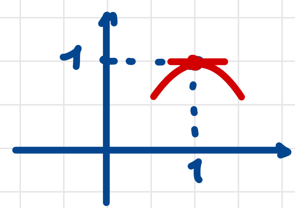
$$18yy'^2+9y^2y''-6y'-6y'-6xy''+6=0$$

sostituisco $x_0=1$ ricordando che $y(1)=1$, $y'(1)=0$

$$9y''(1)-6y''(1)+6=0$$

$$3y''(1)=-6 \longrightarrow y''(1)=-3<0$$

$\Rightarrow x_0=1$ MASSIMO.



$\Rightarrow$ NON INVERTIBILE

ESERCIZIO 2. Dato $f(x;y;z)=y^2+xz+z^2-e^z-4$

1) Verificare che in un intorno del punto $P(0;e;2)$ l'eq. $f(x;y;z)=0$ definisce

implicitamente una funz. $z = h(x;y)$

2) Calcolare $h_x(0;e)$

SOL.

1) • $f(0;e;2) = e^2 + 4 - e^2 - 4 = 0$ ✓

• $f \in C^1$ essendo polinomiale ✓

• $f_z(x;y;z) = x + 2z - e^z$ $\quad f_z(0;e;2) = 4 - e^2 \neq 0$ ✓

$\Longrightarrow \exists\ z = h(x;y)$ intorno a $(0;e)$

2) $$\nabla h(0;e) = -\frac{1}{f_z(0;e;2)} \begin{bmatrix} f_x(0;e;2) \\ f_y(0;e;2) \end{bmatrix}$$

$f_x(x;y;z) = z \qquad f_x(0;e;2) = 2$

$f_y(x;y;z) = 2y \qquad f_y(0;e;2) = 2e$

$$\nabla h(0;e) = -\frac{1}{4-e^2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x(0;e) \\ h_y(0;e) \end{bmatrix}$$

$$h_x(0;e) = -\frac{2}{4-e^2}$$

A CASA: verificare tale affermazione sostituendo $z = h(x;y)$ e derivando rispetto a x ricordando che $h(0;e) = 2$.

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

ESERCIZIO 3. Determinare i valori di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x;y) = x^2 + xy + y^2$ al variare di $(x;y)$ in $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

$\underbrace{\qquad\qquad}$
VINCOLO DI
DISUGUAGLIANZA

SOL.

A è chiuso e limitato, f continua $\xRightarrow{T.W}$ f ammette massimo e minimo assoluti.

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$\to (0;0).$

Il punto critico $(0;0)$ è interno ad A $\Rightarrow$ $(0;0)$ è un candidato ad essere max-min assoluto.

All'interno di A non ci sono altri candidati (f è differenziabile in A)
Determino i candidati sul bordo di A (∂A)
Parametrizzo ∂A:

$$\partial A = (\cos t ; \operatorname{sen} t) \qquad t \in [0; 2\pi]$$

$$g(t) = f(\cos t; \operatorname{sen} t) = \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

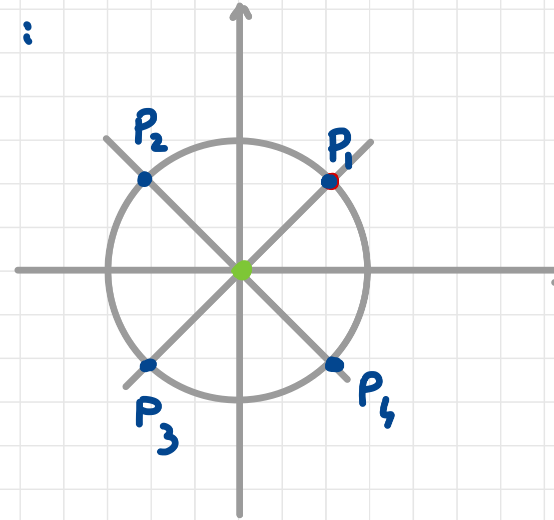
$$g'(t) = \frac{1}{2} \cos 2t \cdot 2 = \cos 2t$$

$$g'(t) = 0 \qquad \cos 2t = 0 \rightarrow 2t = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In $[0;2\pi]$ i candidati sono:

$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $P_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Determino il valore di f di ciascun candidato (sia del bordo che dell'interno) e scelgo il max e il min:

$f(0;0)=0$ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$ $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1/2$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1/2$

$\min_A f = 0$ in $(0;0)$

$\max_A f = \frac{3}{2}$ in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(ESAME 28/8/18)

ESERCIZIO 4.

Si determinino max e min assoluti della funzione $f(x;y) = x^2+y^2$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /$
$$\underbrace{x+y+2(x^2+y^2)-2=0}_{\text{VINCOLO DI UGUAGLIANZA}}\}$$

SOL.

A è una circonferenza (chiuso e limitato)

f è continua $\overset{T.W.}{\Longrightarrow}$ f ammette max e min assoluti.

Uso la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

VINCOLO: $g(x;y) = x+y+2(x^2+y^2)-2=0$

$$\mathcal{L}(x;y;\lambda) = f(x;y) - \lambda g(x,y) =$$
$$= x^2+y^2 - \lambda(x+y+2x^2+2y^2-2)$$

$$\mathcal{L}_x(x;y;\lambda) = 2x - \lambda(1+4x)$$

$$\mathcal{L}_y(x;y;\lambda) = 2y - \lambda(1+4y)$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x;y;\lambda) = -(x+y+2x^2+2y^2-2)$$

$$\nabla\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ominus\begin{cases} 2x-\lambda-4\lambda x=0 \\ 2y-\lambda-4\lambda y=0 \\ x+y+2x^2+2y^2-2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x-\cancel{2}y-\overset{2}{\cancel{4}}\lambda x+\overset{2}{\cancel{4}}\lambda y=0 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (x-y)-2\lambda(x-y)=0 \\ // \\ // \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-y)(1-2\lambda)=0 \\ // \\ // \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow y=x \\ \searrow \lambda=1/2 \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda=1/2 \\ \cancel{2y}-\frac{1}{2}-\cancel{2y}=0 \end{cases} \longrightarrow \text{IMP.} \longrightarrow$$

non ci sono candidati.

$$\begin{cases} y=x \\ // \\ 2x+4x^2-2=0 \end{cases} \longrightarrow 2x^2+x-1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \begin{array}{l} \nearrow 1/2 \\ \searrow -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1/2 \\ 1 - \lambda - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1/3 \\ x = 1/2 \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ è candidato.}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ \lambda = 2/3 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow (-1; -1) \text{ è candidato.}$$

Il punto $(0;0) \notin$ vincolo $\Rightarrow$ non è un candidato.

$\left(\nabla f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad \min_A f = 1/2$ in $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$f(-1, -1) = 1 + 1 = 2$ $\qquad \max_A f = 2$ in $(-1; -1)$

ESERCIZIO 5. (ESAME)

Trovare, quando esistono, i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x;y) = x^2+y^2 + (1-x-y)^2$.

1) Nel triangolo chiuso T di vertici $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.

2) Sul ramo di iperbole $xy=1$ contenuto nel primo quadrante.

3) Cosa si può dire sugli estremi globali in tutto $\mathbb{R}^2$?

SOL.

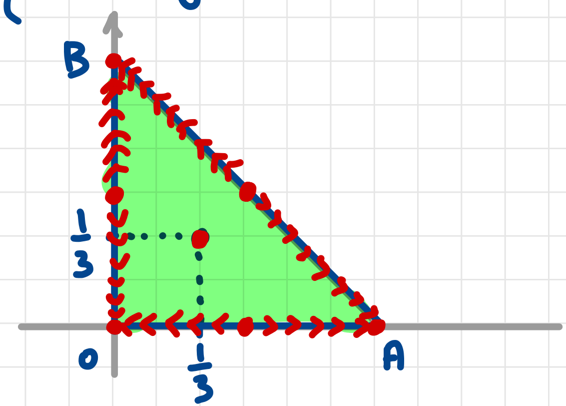
1) $f(x;y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2$

$$f_x(x;y) = 2x + 2(1-x-y)(-1) = 2x - 2 + 2x + 2y =$$
$$= 4x + 2y - 2$$

$$f_y(x;y) = 2x + 4y - 2$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y - 2 \\ 2x + 4y - 2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \longrightarrow y = 1/3 \\ x + 2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/3 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$



$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ è interno a T

$\Longrightarrow$ è un candidato.

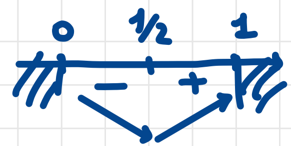
I punti O, A, B sono altri candidati ad essere max/min assoluti.

$$OA = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \,,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

$$g_1(x) = f(x;0) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$g_1'(x) = 4x - 2 \qquad g_1'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

$$\left(g_1'(x) > 0 \longrightarrow x > \frac{1}{2} \right)$$



Il punto $\left(\frac{1}{2};0\right)$ è un candidato.

$$AB = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \,,\ y = -x + 1\}$$

$$g_2(x) = f(x;-x+1) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$g_2'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Il candidato è $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$OB = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0 \,,\; 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

$$h(y) = f(0;y) = 2y^2 - 2y + 1 \qquad h'(y) = 4y - 2$$

$$h'(y) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Il candidato è $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Riassumendo risultano candidati ad essere max-min assoluti in T i punti:

$f(x;y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2$

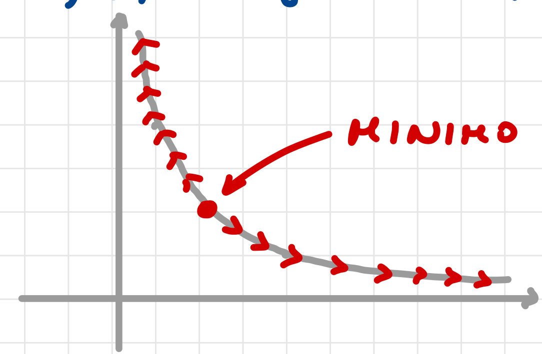
$$\begin{array}{ccccccc}
(0;0) & \left(\frac{1}{2};0\right) & (1;0) & \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) & (0;1) & \left(0;\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3
\end{array}$$

$$\max_T f = 1 \quad \text{in} \quad O,\ A,\ B$$

$$\min_T f = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

2) VINCOLO : $xy = 1 \qquad \underbrace{xy-1}_{g(x;y)} = 0 \qquad x>0.$

$$f(x;y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2 \qquad g(x;y) = xy-1 = 0.$$



$$\mathcal{L}(x;y;\lambda) = x^2+y^2+(1-x-y)^2 - \lambda(xy-1)$$

$$\mathcal{L}_x(x;y;\lambda) = 4x+2y-2-\lambda y$$

$$\mathcal{L}_y(x;y;\lambda) = 4y+2x-2-\lambda x$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = -xy+1$$

$$\ominus \begin{cases} 4x+2y-2-\lambda y = 0 \\ 2x+4y-2-\lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2y-\lambda y+\lambda x = 0 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2(x-y)+\lambda(x-y) = 0 \\ // \\ // \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-y)(\lambda+2) = 0 \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = x \end{cases} \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \longrightarrow y = 1 \\ 4-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \end{cases} \end{cases}$$

$(1;1)$ è un candidato.

$$\begin{cases} \lambda = -2 \\ 2x+4y-2+2x=0 \rightarrow 4x+4y-2=0 \rightarrow y=-x+\frac{1}{2} \\ x\left(-x+\frac{1}{2}\right)=1 \rightarrow -x^2+\frac{1}{2}x-1=0 \rightarrow 2x^2-x+2=0 \end{cases}$$

$\Delta < 0$ IMP.

Ho un unico candidato che è il punto $(1;1)$.

Restringo $f(x;y)$ al vincolo $y=\frac{1}{x}$ e scrivo la funzione $g(x)=f\left(x;\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(1-x-\frac{1}{x}\right)^2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow f$ è illimitata sup.

$\Rightarrow f$ non ammette massimo

$\Rightarrow (1;1)$ è il minimo assoluto.

3) $\mathbb{R}^2$ $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ è il punto critico.

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 4x+2y-2 \\ 2x+4y-2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x;y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad H_f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det H_f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = 12 > 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ è un minimo relativo.

- f non ha massimo
- Il minimo è globale.

ESERCIZIO 6. Trovare max e min assoluti di $g(x;y;z) = x-y+2z^2$ su $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 1}_{\text{SFERA}}\}$.

SOL.

- g cont., E chiuso e lim. $\Rightarrow \exists$ max/min assoluti
- $\nabla g(x;y;z) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ non ci sono punti critici.

BORDO:

$$\mathcal{L}(x;y;z;\lambda) = x-y+2z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\mathcal{L}_x(x;y;z;\lambda) = 1-2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x;y;z;\lambda) = -1-2\lambda y$$

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_z(x;y;z;\lambda) = 4z - 2\lambda z$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x;y;z;\lambda) = -(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\begin{cases} 1-2\lambda x = 0 \\ -1-2\lambda y = 0 \\ 2z(2-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

$\lambda = 2$

$z = 0$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 1/4 \\ y = -1/4 \\ \frac{1}{8} + z^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$P_{1,2}\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 1/2\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\,\cancel{4}\lambda^2} = 1 \longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\pm \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{2}\left(\pm \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$P_{3,4}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; \mp \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$$

$g(P_3) = \sqrt{2}$ $\quad g(P_4) = -\sqrt{2}$ $\quad g(P_1) = \frac{9}{4}$ $\quad g(P_2) = \frac{9}{4}$

$\max\limits_{E} g = \frac{9}{4}$ in P_1 e P_2

$\min\limits_{E} g = -\sqrt{2}$ in P_4