Integrali di volume e di superfice

1. Si calcoli il volume della regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 - 2 \le z \le 4 - x + y, \quad x^2 + y^2 \le 1, \}$$

2. Sia Σ la parte di superficie di equazione

$$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$$

che si trova nel primo ottante dello spazio tridimensionale, orientata in modo che la normale punti verso l'alto.

Trovare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 4x\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

3. Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

nel cilindro solido

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1, \quad -1 \le z \le 1\}$$

4. Sia Σ la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_\Sigma (x^2 + y^2)\, dS$$

a) direttamente come integrale di superficie;
b) facendo uso del teorema della divergenza (osservare che, su Σ, $\mathbf{n}_e = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e scegliere un campo $\mathbf{F}$ opportuno...)

5. Calcolare, facendo uso del Teorema di Stokes, la circolazione del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^3\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

lungo la curva Γ di intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $2x - y + 2z = 5$. La curva è orientata in modo che la sua proiezione sul piano xy sia percorsa in senso antiorario.

SOLUZIONI

1. Il dominio Ω è semplice rispetto all'asse z. Applicando le formule di riduzione all'integrale

$$\int\int\int_\Omega dxdydz$$

si ottiene

$$|\Omega| = \int_{x^2+y^2\leq 1} dx\, dy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x+y} dz = \int_{x^2+y^2\leq 1} (4-x+y-x^2-y^2+2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(6\rho - \rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta - \rho^3\right)d\rho = \frac{11}{2}\pi$$

2. Sulla superficie abbiamo:

$$\mathbf{n}\, dS = \left(2x\,\mathbf{i} + \frac{y}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dxdy$$

La proiezione di Σ sul piano xy è la regione D di equazione: $x^2 + y^2/4 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
Dunque

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int\int_D (2xy - 2xy + 2)dxdy = 2|D|$$

L'area di D è un quarto dell'area racchiusa da un'ellisse di semiassi $a = 1$, $b = 2$, per cui $|\Omega| = \pi/2$. Troviamo allora

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \pi$$

3. Calcoliamo il flusso

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, d\sigma$$

dove $\partial\Omega$ è la superficie regolare a pezzi che racchiude il cilindro. Parametrizziamo la superficie laterale del cilindro con $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, $0 \leq u < 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$. Abbiamo allora

$$\mathbf{n}_e\, dS = (\cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j})\, dudv$$

Dunque il flusso attraverso la superficie laterale vale

$$\int_{-1}^1 dv \int_0^{2\pi} (\cos^2 u\, \sin u - \sin^2 u)du = -2\int_0^{2\pi} \sin^2 u\, du = -2\pi$$

Sulle due basi del cilindro abbiamo rispettivamente $z = 1$, $\mathbf{n}_e = \mathbf{k}$ e $z = -1$, $\mathbf{n}_e = -\mathbf{k}$. Dunque, il flusso del campo $\mathbf{F}$ *uscente* dalle due basi è lo stesso e vale

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} 2\, dxdy = 2\pi$$

Abbiamo allora

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, d\sigma = -2\pi + 2\pi + 2\pi = 2\pi$$

Calcoliamo la divergenza del campo vettoriale

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = y - 1 + 2 = y + 1$$

L'integrale della divergenza su Ω è

$$\int\int\int_{\Omega} (y+1) \, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = |\Omega| = 2\pi$$

(l'integrale di y è zero per ragioni di simmetria).

4.

a) Parametrizzando la sfera con la longitudine $\theta \in [0, 2\pi)$ e la colatitudine $\phi \in [0, \pi]$, abbiamo

$$x^2 + y^2 = \sin^2 \phi; \qquad dS = \sin\phi \, d\theta d\phi$$

Dunque

$$\int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \phi \, d\theta d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) \sin\phi \, d\phi = \frac{8\pi}{3}$$

b) Definendo il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j}$$

abbiamo

$$\int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, dS = \int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

Detta B la palla di raggio 1 centrata nell'origine, applicando il teorema della divergenza:

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int\int\int_{B} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = 2|B| = \frac{8\pi}{3}$$

5. La curva Γ è un'ellisse che racchiude una superficie piana Σ ottenuta intersecando il piano e il cilindro. La proiezione di Σ sul piano xy è il disco circolare D di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$, il cui bordo $\partial^+ D$ è orientato positivamente per ipotesi. Quindi Γ sarà orientata positivamente rispetto a Σ se si sceglie la normale $\mathbf{n}$ che punta verso l'alto. Per il teorema di Stokes

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Poiché Σ è contenuta nel piano $z = -x + y/2 + 5/2$, avremo

$$\mathbf{n} \, dS = (\mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dxdy$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2) \, \mathbf{k}$$

Dunque

$$\int\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int\int_{D} 3(x^2 + y^2) \, dxdy = 2\pi \int_0^1 3\rho^3 \, d\rho = \frac{3\pi}{2}$$