Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2015/2016
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Secondo appello di Metodi Analitici (7-7-16) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

(i) Siano $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ due funzioni olomorfe su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Stabilire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti affermazioni:

(a) $\text{Res}(f_1 + f_2, 0) = \text{Res}(f_1, 0) + \text{Res}(f_2, 0)$;

(b) $\text{Res}(f_1 f_2, 0) = \text{Res}(f_1, 0)\,\text{Res}(f_2, 0)$.

(ii) Calcolare $\text{Res}(f, 0)$, dove

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\cosh z} + e^{-\frac{1}{z^4}} .$$

(iii) Sia f la funzione al punto (ii), e sia γ la curva parametrizzata da $r(t) = (1 + \cos t, 2 + \sin t)$, per $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\int_\gamma f(z)\, dz$.

Soluzione.

(i) Poiché lo sviluppo di Taylor della funzione somma $f_1 + f_2$ è dato dalla somma degli sviluppi di Taylor di f_1 e di f_2, l'affermazione (a) è vera. Invece la (b) è falsa: si consideri ad esempio il caso in cui $f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{z}$: si ha $\text{Res}(f_1, 0) = \text{Res}(f_2, 0) = 1$, mentre $\text{Res}(f_1 f_2, 0) = 0$.

(ii) Applicando la proprietá (a) stabilita al punto (i), possiamo calcolare il residuo in f come la somma dei residui dei suoi tre addendi. Poiché il secondo e il terzo addendo sono funzioni pari, il loro residuo è nullo. Pertanto $\text{Res}(f, 0) = \text{Res}\big(\frac{1}{z}, 0\big) = 1$.

(iii) La curva γ è una circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio 1. In particolare, l'indice di γ rispetto all'origine è nullo, e pertanto per il teorema dei residui (tenuto conto che la funzione f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ tranne che nell'origine), si ha $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx < +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}}(x^2 f^2(x))\,dx < +\infty$. Si consideri su V il prodotto scalare $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x)\,dx$, che induce su V la norma $\|f\|_V := \langle f, f\rangle^{1/2}$. Sia $T : V \to \mathbb{R}$ l'operatore lineare definito da

$$T(f) := \int_{\mathbb{R}} f\,dx\,.$$

(i) Dimostrare che T è limitato.
(ii) Calcolare la norma di T.

Soluzione.

(i) Per ogni $f \in V$, usando in particolare la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned}
|T(f)|_{\mathbb{R}} &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\Big| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{1+x^2}\,\frac{|f(x)|}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&\le \Big\{\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|^2\,dx\Big\}^{1/2}\Big\{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx\Big\}^{1/2} \\
&= \sqrt{\pi}\|f\|_V\,.
\end{aligned}$$

Questo mostra che T è limitato, con $\|T\| \le \sqrt{\pi}$.

(ii) Si consideri la funzione $\varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Si osservi che $\varphi \in V$, in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx < +\infty\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2\varphi^2(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx < +\infty\,.$$

Si ha

$$|T(\varphi)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi \qquad \|\varphi\|_V = \Big\{\int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\Big\}^{1/2} = \sqrt{\pi}\,.$$

Poiché $|T(\varphi)| = \sqrt{\pi}\|\varphi\|_V$, concludiamo che $\|T\| = \sqrt{\pi}$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Enunciare il Teorema di Riemann-Lebesgue.
(ii) Calcolare, per ogni $y > 0$,

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\log y}}{x^2+1}\,dx\,.$$

(iii) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{N}$ si ha $g \in C^k(\mathbb{R}_+)$. Per tali valori di k, calcolare $\|g\|_{C^k(\mathbb{R}_+)} := \sum_{\alpha=0}^{k} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |D^\alpha g(x)|$.

Soluzione.

(i) Si vedano le slides del corso o uno dei testi consigliati.

(ii) Posto $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, si ha che $g(y) = \hat{f}(\log y)$. Poiché è noto che $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, deduciamo che

$$g(y) = \pi e^{-|\log y|} = \begin{cases} \pi e^{-\log y} = \frac{\pi}{y} & \text{se } y \geq 1 \\ \pi e^{\log y} = \pi y & \text{se } y \in (0,1]. \end{cases}$$

(iii) Per il teorema di Riemann-Lebesgue e la continuità della funzione $y \mapsto \log y$, nonché dall'espressione esplicita di g ricavata al punto (ii), abbiamo che $g \in C^0(\mathbb{R}_+)$. Inoltre, poiché g è crescente se e solo se $y \in (0,1)$, si ha $\|g\|_{C^0(\mathbb{R}_+)} = |g(1)| = \pi$.
Dall'espressione esplicita di g ricavata al punto (ii), vediamo che $\lim_{y\to 1^+} g'(y) = -\pi \neq \pi = \lim_{y\to 1^-} g'(y)$. Pertanto $g \notin C^1(\mathbb{R}_+)$ (e quindi $g \notin C^k(\mathbb{R}_+)$ per ogni $k \geq 1$).