Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Analisi Matematica III, Appello d'esame del 13 settembre 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Sia $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribuzione delta di Dirac in 0.

(a) Stabilire se δ è una distribuzione temperata.

(b) Calcolare nel senso delle distibuzioni δ'' e la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}(\delta'')$.

Soluzione.

(a) Si', poiché ha supporto compatto

(b) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha
$$\langle \delta'', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi'' \rangle = \varphi''(0);$$
per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha
$$\langle \mathcal{F}(\delta''), \varphi \rangle = \langle \delta'', \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \delta, (\mathcal{F}(\varphi))'' \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(-x^2\varphi) \rangle = \mathcal{F}(-x^2\varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}} -x^2 \varphi \, dx$$
da cui si evince che $\mathcal{F}(\delta'') = -x^2$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Sia V lo spazio delle funzioni $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$, munito della norma $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2}$. Sia $T : V \to V$ l'operatore definito da
$$Tf(x) := e^{ix} f(-x)\,.$$

(a) Mostrare che T è lineare.

(b) Calcolare la norma di T.

Soluzione.

(a) Si ha
$$T(\alpha f + \beta g)(x) = e^{ix}[\alpha f(-x) + \beta g(-x)] = \alpha e^{ix} f(-x) + \beta e^{ix} g(-x) = \alpha T f(x) + \beta T g(x)\,.$$

(b) Si ha, per ogni $f \in V$,
$$\|Tf\|_V = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix} f(-x)|^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_V\,.$$
Pertanto $\|T\| = 1$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Si considerino nel piano complessi le regioni

$$A_+ := \left\{|z-2| < \frac{5}{2}\right\}, \qquad A_- := \left\{|z+2| < \frac{5}{2}\right\}, \qquad A := A_+ \cap A_-,$$

e le curve $\Gamma_+ = \partial(A_+ \setminus A_-)$, $\Gamma_- = \partial(A_- \setminus A_+)$, $\Gamma = \partial A$, tutte percorse una volta in senso antiorario.
Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(z) := \frac{e^{iz^2}}{z-n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_{\Gamma_-} f_n(z)\,dz$;

(b) $\displaystyle\int_{\Gamma} f_n(z)\,dz$;

(c) $\displaystyle\int_{\Gamma_+} f_n(z)\,dz$.

Soluzione. Osserviamo che l'unica singolarità della funzione $f_n(z)$ si ha nel punto $z_n = n$, con

$$\mathrm{Res}(f_n, n) = e^{in^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Poiché l'indice di avvolgimento di Γ_- rispetto a z_n è nullo per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\int_{\Gamma_-} f_n(z)\,dz = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Poiché l'indice di avvolgimento di Γ rispetto a z_n è nullo per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mentre vale 1 per $n = 0$, si ha

$$\int_{\Gamma} f_n(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 2\pi i \mathrm{Res}(f_0, 0) = 2\pi i & \text{per } n = 0 \end{cases}$$

(c) Poiché l'indice di avvolgimento di Γ_+ rispetto a z_n è nullo per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4\}$, mentre vale 1 per $n = 1,2,3,4$, si ha

$$\int_{\Gamma_+} f_n(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4\} \\ 2\pi i \mathrm{Res}(f_n, n) = 2\pi i e^{in^2} & \text{per } n = 1,2,3,4. \end{cases}$$

TEORIA. (7 punti)

(a) Enunciare il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi e fornire un esempio di applicazione.

(b) Enunciare il teorema di unicità del prolungamento analitico.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati.