I.15 - TEOREMA DEI RESIDUI

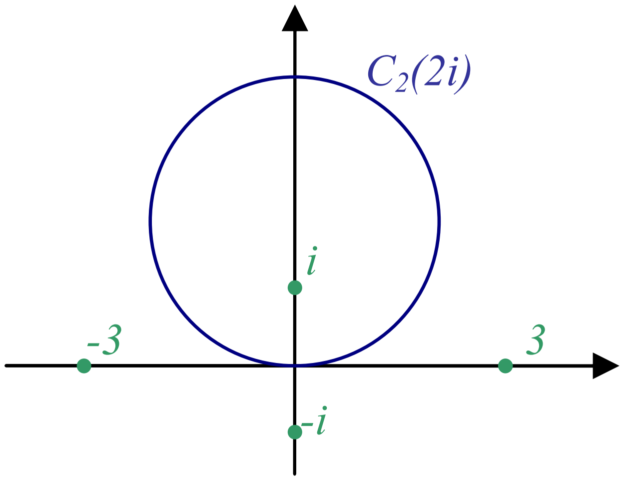
Teorema dei residui: sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, γ un circuito in Ω omotopo a zero e f: $\Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa sul suo dominio, dove S, detto "insieme singolare", è tale che:

- S non abbia punti di accumulazione in Ω: $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega = 0$.
- La curva γ sia interamente contenuta in $\Omega \setminus S$: $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$.

Allora si ha che:

1. L'indice di avvolgimento di γ è diverso da zero per al più un numero finito di punti di S.
2. $\oint_\gamma f(z)dz = (2\pi i)\sum_{z\in S} \operatorname{Ind}(\gamma, z)\operatorname{Res}(f, z)$

Esempio:



Si vuole calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_{C_2(2i)} \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}\,dz$

Per applicare il teorema dei residui, si considerino:

$$\Omega = \mathbb{C}, \quad S = \{i, -i, 3, -3\}, \quad \gamma = C_2(2i), \quad f(z) = \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}$$

Si controlla subito che S non ha punti di accumulazione e che γ non passa per nessuno dei punti di S. Si vede inoltre che l'unico punto di S ad avere indice di avvolgimento non nullo è i, il cui indice in particolare vale +1. Si ha quindi che:

$$\int_{C_2(2i)} \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i(+1)\,\mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-1)}{(z^2-9)(z^2+1)} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{2}{(z^2-9)(z+i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-10\cdot 2i} = -\frac{\pi}{10}$$

Osservazioni:

- Se Ω è semplicemente connesso, allora γ può essere un circuito qualsiasi.
- L'omotopia a zero di γ è da considerarsi in Ω, non in $\Omega \setminus S$.
- Al seguente integrale non si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_{C_1(0)} \left[\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} dz, \quad dove \;\; \Omega = \mathbb{C}, \;\; S = \left\{z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Infatti l'origine è un punto di accumulazione di S contenuto in Ω.

I.16 - RESIDUO ALL'INFINITO

Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$. Si dice che ∞ è una singolarità isolata per f e si pone per definizione come residuo all'infinito di f il seguente:

$$\operatorname{Res}(f,\infty) := \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Proposizione: se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ tranne che in un numero finito di punti, allora la somma di tutti i residui di f (compreso quello all'infinito) è uguale a zero.

<u>*Esempio:*</u>

$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1}$: la funzione ha 5 singolarità, che sono in tutte contenuto all'interno della circuito $C_2(0)$.

Esse hanno inoltre tutte lo stesso indice (che è +1) ed essendo f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tranne questi 5 punti, possiamo quindi scrivere:

$$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1} = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\left(1/z^2\right) e^z}{(1/z^4)+1} = -\frac{e^z}{1+z^4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to 0}\left[-\frac{e^z}{1+z^4}\right] = -1$$

Tale funzione ha nell'origine una singolarità eliminabile e quindi il suo residuo è ivi nullo.
L'integrale che si voleva calcolare è quindi nullo.

I.17 - APPLICAZIONI DEL TEOREMA DEI RESIDUI

È utile ora elencare alcuni risultati e definizioni che verranno utilizzati successivamente:

1. ***Lemma di decadimento:*** sia f una funzione olomorfa che rispetta la condizione di decadimento

$$\exists \beta > 1 : |f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{\beta}}, \quad se \ |z| > R$$

Allora vale il seguente risultato: $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$

2. Lemma di Jordan: sia f una funzione olomorfa che rispetti rispettivamente le condizioni

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^+(0)}|f(z)|=0\right] \quad \text{oppure} \quad \lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^-(0)}|f(z)|=0\right]$$

Allora valgono rispettivamente i seguenti risultati:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega z}dz=0,\ \ \omega\in\mathbb{R}^+ \quad \text{oppure} \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^-(0)} f(z)e^{i\omega z}dz=0,\ \ \omega\in\mathbb{R}^-$$

Analogamente, detti D_R^- e D_R^+ le semicirconferenze rispettivamente sinistra e destra, si possono ottenere le varianti:

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{D_R^-(0)}|f(z)|=0\right] \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R^-(0)} f(z)e^{\omega z}dz=0,\ \ \omega\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{D_R^+(0)}|f(z)|=0\right] \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R^+(0)} f(z)e^{\omega z}dz=0,\ \ \omega\in\mathbb{R}^-$$

3. ***Lemma:*** sia z_0 un polo semplice per *f*. Detto $C_\varepsilon(z_0,\theta_1,\theta_2)$ l'arco di circonferenza di centro z_0, raggio ε, compreso tra gli angoli θ_1 e θ_2, si ha che:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(z_0,\theta_1,\theta_2)} f(z)dz=(\theta_2-\theta_1)i\,\mathrm{Res}(f,z_0),\quad dove\ \ r(t)=z_0+re^{it},\ t\in[\theta_1,\theta_2],$$

Sia *f(x)* una funzione con una singolarità in $x_0\in\mathbb{R}$, integrabile su $\varepsilon<|x-x_0|<R,\quad \forall\varepsilon,R>0$. Si definisce valore principale dell'integrale di *f* tra più e meno infinito:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx:=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}\int_{\varepsilon<|x-x_0|<R} f(x)dx$$

Tale definizione si può estendere con le opportune modifiche anche al caso di un numero finito di singolarità.

- *Caso 1:*

  Integrali di funzioni reali nella forma: $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$

  Si cerca di trasformare tale integrale in un integrale in campo complesso del tipo:

  $$\int_0^{2\pi} g(e^{it})ie^{it}dt = \int_{C_1(0)} g(z)dz, \quad con \;\; r(t) = e^{it}$$

  Se la funzione g è olomorfa su $\Omega \setminus S$, dove:

  - Ω contiene $B_1(0)$.
  - S è formato da un numero finito di punti contenuti in $B_1(0)$.

  possiamo applicare il teorema dei residui e, se z_i sono i punti di singolarità isolata per g:

  $$\int_{C_1(0)} g(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(g, z_i)$$

Esempio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}} = \int_0^{2\pi} \frac{2idt}{4i+e^{it}-e^{-it}} = 2\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{4ie^{it}+e^{2it}-1} = 2\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

L'ultimo integrale può essere risolto con il teorema dei residui, considerando:

$$g(z) = \frac{1}{z^2+4iz-1}, \quad \Omega = \mathbb{C}, \quad S = \{z : \; z^2+4iz-1=0\}$$

- *Caso 2:*

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ con le seguenti caratteristiche:

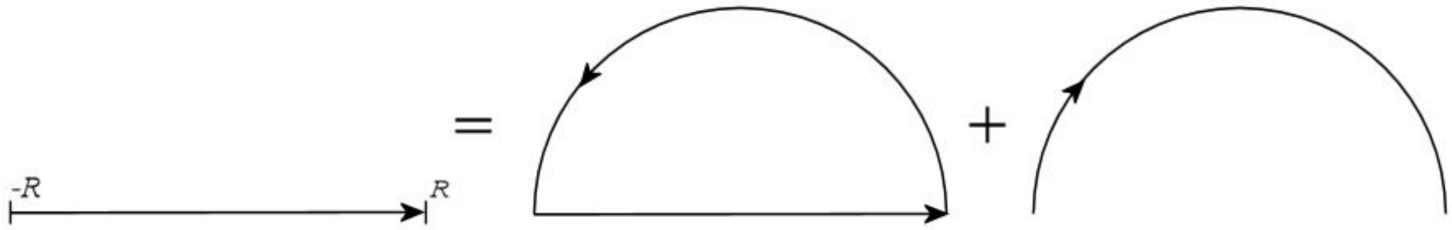
- *f(x)* ammette estensione *f(z)* in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e nessuna su $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\exists \beta > 1 : |f(z)| \leq \dfrac{c}{|z|^\beta}, \quad se \ |z| > R$

Un esempio di funzioni che soddisfano queste ipotesi sono le funzioni razionali fratte, se il denominatore è di almeno due gradi più grande del numeratore ed è privo di radici reali:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad con \ \ \mathrm{grad}(Q) \geq \mathrm{grad}(N) + 2, \ \ \mathcal{Z}(Q(x)) \cap \mathbb{R} = 0$$

In questo caso si può calcolare l'integrale in questione nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)dz - \cancel{\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz}$$



Il secondo termine di tale espressione tende a 0 per il lemma di decadimento, mentre il primo può essere calcolato mediante il teorema dei residui: per *R* che tende all'infinito il circuito tenderà ad includere tutto il semipiano dei numeri immaginari positivi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_i)$$

Con opportuni cambiamenti di segni, tale procedimento può essere applicato se la funzione in esame è prolungabile nel semipiano dei numeri immaginari negativi.

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ La *f(x)* rispetta la condizione di decadimento, essendo una razionale fratta del tipo precedentemente considerato.

Consideriamo ora la sua estensione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, che ha due poli semplici in $z = \pm i$.

Di questi, solo $z = i$ è nel semipiano dei numeri immaginari positivi, e applicando il procedimento appena descritto, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

- *Caso 3:*

  Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$ con le seguenti caratteristiche:

  - *f(x)e*$^{i\omega x}$ ammette estensione *f(z)e*$^{i\omega z}$ in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
  - *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e nessuna su $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
  - $\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^+(0)} |f(z)| = 0\right], \quad \omega \in \mathbb{R}^+$

Con le stesse considerazioni del caso precedente, utilizzando in questo caso il lemma di Jordan, si arriva a concludere che anche in questo caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega z}dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z_i)$$

Risultati analoghi si possono ottenere applicando, con gli opportuni cambiamenti, le altre versioni del Lemma di Jordan.

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$: è possibile riscrivere tale integrale nella forma seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right]$$

Si può però notare come la parte immaginaria di tale integrale sia nulla, e quindi la parte reale dell'integrale coincide con l'integrale stesso. Infatti:

$$\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$ per la disparità dell'integrando.

Applicando il teorema dei residui si ottiene dunque:

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{1+x^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{1+x^2}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2},i\right)=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{1+z^2}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}=\frac{\cancel{2}\,\pi\,\cancel{i}\,e^{-1}}{\cancel{2}\,\cancel{i}}=\frac{\pi}{e}$$

Si può infatti verificare facilmente che è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R^+(0)}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|=0$$

necessaria per applicare il lemma di Jordan.

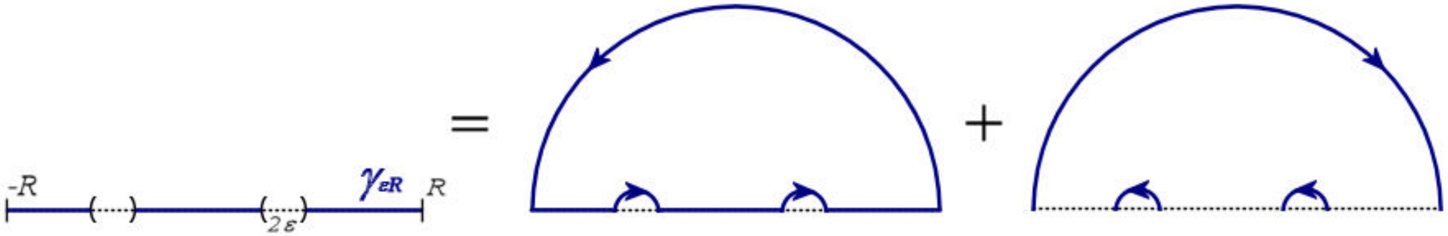
- *Caso 4:*

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ con le seguenti caratteristiche:

- *f(x)* ammette estensione *f(z)* in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e un numero finito di poli semplici sull'asse reale $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$

Si vuole in questo caso calcolare il valore principale dell'integrale dato (essendo in generale la funzione non integrabile su tutto l'asse reale).

Si consideri per esempio il caso di due poli semplici (indicati con x_1 e x_2, mentre si denotino con z_i le singolarità isolate in $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$) sull'asse reale. Bisogna prima di tutto calcolare l'integrale di $f(x)$ lungo $\gamma_{\varepsilon R}$. In maniera analoga al caso 2, consideriamo i seguenti circuiti:



L'integrale sul primo circuito può essere calcolato mediante il teorema dei residui. Per calcolare quello sul secondo circuito, si considerino separatamente la semicirconferenza di raggio R e quelle di raggio ε:

- L'integrale sulla semicirconferenza di raggio R è zero per ipotesi.
- L'integrale su ciascuna delle semicirconferenze di raggio ε vale, per il lemma 3: $\pi i \operatorname{Res}(f, x_i)$

In definitiva, se sull'asse reale sono presenti uno o più poli semplici, il risultato complessivo dell'integrazione è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) + \pi i \sum_j \mathrm{Res}(f, x_j)$$

Esempio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2} dx = \mathrm{Re}\left[v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i2x}}{2x^2} dx \right]$$

Con lo stesso ragionamento dell'esercizio precedente si può vedere che la parte reale dell'integrale corrisponde anche in questo caso all'integrale stesso. Si considera quindi:

$f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{2z^2}$, olomorfa su $\Omega \setminus \{0\}$ e con in $x_1 = 0$ un polo semplice

Si può quindi utilizzare il procedimento appena illustrato e si ottiene:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}dx = \cancel{2\pi i\sum_i \operatorname{Res}(f(z),z_i)} + \pi i\sum_j \operatorname{Res}(f(z),x_j) = \pi i \operatorname{Res}(f(z),0) = \pi i \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2iz}}{2z} =$$

$$= \pi i \lim_{z\to 0}\frac{-\cancel{2}ie^{2iz}}{\cancel{2}} = \pi i\cdot(-i) = \pi$$

Si può infatti verificare che la condizione $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{1-e^{2iz}}{2z^2} = 0$ è soddisfatta in quanto:

$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{1}{2z^2} = 0$ per il lemma di decadimento

$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{e^{2iz}}{2z^2} = 0$ per il lemma di Jordan

I.18 - BREVI CENNI SULLE FUNZIONI POLIDROME

Il concetto di **funzione polidroma** è una generalizzazione del concetto di una funzione in campo complesso che interviene ad esempio quando, come nel caso della radice n-esima e del logaritmo, non è possibile determinare univocamente una funzione inversa.

Si consideri ad esempio il caso della <u>*radice n-esima*</u>:
Prima di tutto si esprima il generico numero complesso z in forma esponenziale: $z=|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$, dove:

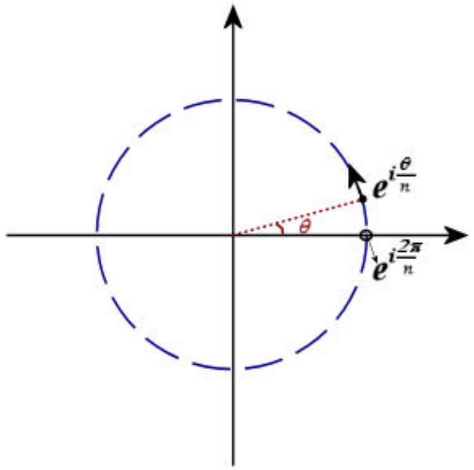
$$\mathrm{Arg}\,z=\left\{\underset{[0,2\pi]}{\arg}\,z+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

è l'insieme degli infiniti argomenti che determinano lo stesso z.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\arg z}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ \ k\in[0,n-1]$$

Si nota subito quindi che la relazione $z\mapsto\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}}$ non è una funzione. Diventa tale se considero solamente un intervallo di lunghezza *2π*: $\mathrm{Arg}\,z\in\left[\overline{\theta},\overline{\theta}+2\pi\right)$, ottenendo in tale modo un <u>branca</u> o <u>de-terminazione</u> della radice n-esima, che però in generale non è neanche continua. Infatti:

$|z|=1,\ \theta\in[0,2\pi),\quad z\mapsto \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$



Per $\theta=0$ la funzione vale 1, mentre per $\theta\to 2\pi$ la funzione vale $e^{i\frac{2\pi}{n}}$: dopo un giro intorno all'origine la funzione passa da una branca alla successiva e ritorna alla branca di partenza solo dopo n giri (si dice in questo casi che l'origine è un punto di diramazione di ordine n).

Se però considero come dominio $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z:\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z=0\}$, si può dimostrare che la branca è ivi olomorfa (sempre nel caso $\theta\in[0,2\pi)$)

Si può inoltre dimostrare che è impossibile incollare due branche olomorfe ed ottenere una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. È proprio questo il caso in cui si parla di funzione polidroma.

Lo stesso discorso si può fare anche per il *logaritmo*: $z \mapsto \log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$

Se ci si restringe ad $\mathrm{Arg}\,z \in \left[\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi\right)$, si ottiene una branca e in questo caso l'origine è un punto di diramazione di ordine infinito (non si torna cioè mai alla branca di partenza).

I.19 - BREVI CENNI SULLE FUNZIONI ARMONICHE

Una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, si dice **armonica** se $\Delta f(x) = 0,\ \forall x \in A$. Le funzioni armoniche hanno molte proprietà importanti, tra cui si elencano soltanto:

- La media di f su una sfera è pari al valore di f nel centro di questa.
- Il caso $N = 2$ è strettamente legato alla teoria delle funzioni olomorfe.
  Data infatti $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su Ω, per le condizioni di Cauchy-Riemann si vede subito che le due funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ad essa associate sono armoniche.
- Se Ω è semplicemente connesso, data una funzione $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armonica, esiste una funzione, detta <u>armonica coniugata</u>, $v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f = u + iv$ sia olomorfa.

NB: $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^{\,2}}$