Ricordiamo il teorema di Abel.

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora,

1. *se $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k R^k$ converge, la serie converge uniformemente in $[-R, R-\delta]$, per ogni $0 < \delta < R$;*

2. *se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$ converge, la serie converge uniformemente in $[-R+\delta, R]$, per ogni $0 < \delta < R$;*

3. *se entrambe le condizioni 1. e 2. sono verificate, la serie converge uniformemente in $[-R, R]$.*

Ricordiamo anche che la convergenza uniforme è la condizione desiderata per poter scambiare i segni di serie e di integrale.
Se le condizioni del teorema di Abel sono verificate, non si può comunque affermare nulla sulla convergenza totale della serie di partenza in un compatto contenente uno degli estremi. Infatti, esaminando per esempio il caso dell'ipotesi 1., per la convergenza totale in $[-R, R-\delta]$ andrebbe provata la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{x \in [-R, R-\delta]} |a_k||x|^k = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| R^k,$$

che non è assicurata nelle nostre ipotesi. Tale convergenza è invece garantita se la serie degli $a_k R^k$ converge assolutamente. Quindi: se una serie di potenze ha raggio di convergenza R e la serie $\sum_k a_k R^k$ converge assolutamente, allora la serie converge totalmente in $[-R, R]$.

Ricordate inoltre che, in generale, la convergenza assoluta non ha nulla a che vedere con la convergenza uniforme!

Richiamiamo infine qualche implicazione tra le convergenze:

totale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ puntuale;

la convergenza in media quadratica implica la convergenza puntuale quasi ovunque a meno di sottosuccessioni; non ci sono in generale altri legami tra convergenza L^2 e convergenza puntuale;

convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza in media quadratica.