Serie di funzioni

Successioni e serie di funzioni.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo la *successione di funzioni*

$$f_n \,:\, I \to \mathbb{R}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

Se per ogni $x \in I$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è convergente, possiamo definire la funzione $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Diremo che la funzione f è il *limite (puntuale) della successione* $\{f_n\}$.

<u>Esempi</u>

La successione

$$f_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

ha per limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x^2} = x\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbb{R}$, dove $f(x) = x$.

La successione
$$f_n(x) = x\, e^{-nx}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$
converge a zero in $I = [0, +\infty)$ poiché
$$\lim_{n\to\infty} x\, e^{-nx} = 0\,, \qquad \forall\ x \geq 0\,.$$

Definizione

Una successione di funzioni $f_n\,:\,I \to \mathbb{R}$ *converge uniformememente in I a f* se vale
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)\,| = 0\,.$$

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (semplice), ma non viceversa.

Infatti, si può verificare che la successione del primo esempio converge puntualmente, ma *non* uniformemente in $\mathbb{R}$, mentre quella del secondo esempio converge uniformemente in $[0, +\infty)$. (Esercizio: fare la verifica).

L'importanza della convergenza uniforme sta nella possibilità di effettuare lo *scambio dei limiti* con le usuali operazione dell'analisi:

Sia $f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

- Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$;
- Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$;
- Sia $f_n \in \mathcal{C}^1([a,b])$; se $f_n(x) \to f(x)$ e se $f_n' \to g$ *uniformemente* in $[a,b]$, allora anche f_n converge uniformemente a f e vale $f' = g$.

Si può dimostrare con controesempi che nessuno dei tre risultati è garantito senza l'ipotesi di convergenza uniforme.

Le precedenti definizioni e proprietà sono rilevanti anche nello studio delle **serie di funzioni**:
data una successione di funzioni $\{f_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...,$ $(f_n \,:\, I \to \mathbb{R})$ la *successione delle somme parziali*

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)\,,$$

si dice **serie** di termini $f_n(x)$ e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

La serie si dirà *convergente* (semplicemente, uniformemente,...) in I se lo è la successione delle somme parziali $\{s_n\}$.
Il limite di questa successione si dice *somma* della serie e si indica con lo stesso simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
Se quindi vale $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x) \, .$$

Esempi

La serie di termini $f_n(x) = x^n$ è detta *serie geometrica* ed è un esempio di *serie di potenze*. Dall'identità

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \, ,$$

segue che per $x \in (-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.
Dunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \, , \qquad x \in (-1, 1) \, .$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \, ,$$

è un esempio di *serie trigonometrica*.
Dalla disuguaglianza

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \, ,$$

e dal criterio del confronto delle serie numeriche, segue che la serie converge (assolutamente) in $\mathbb{R}$. $\diamond$

Anche per le serie la convergenza uniforme garantisce la possibilità di scambio di limiti con la somma.
Tuttavia, è utile introdurre per le serie una nozione di convergenza più restrittiva (ma più semplice da verificare) la *convergenza totale*:

Definizione

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I se esiste una successione di numeri $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ tale che:

i) $|f_n(x)| \leq a_n$, per ogni $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si dimostra che la convergenza totale di una serie in I è condizione *sufficiente* per la convergenza uniforme in I.
(Osserviamo che la convergenza totale implica anche la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in I$).
Sia $f_n \in \mathcal{C}^0([a, b])$; abbiamo ora:

- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in $[a, b]$ e se $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è la sua somma, allora $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$;
- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in $[a, b]$ e se $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è la sua somma, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

  (integrazione termine a termine);
- Sia $f_n \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni x e la *serie delle derivate* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge totalmente in $[a, b]$ e se

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

  sono le rispettive somme, allora $f' = g$ (derivazione termine a termine).

Esempio

La serie trigonometrica di pag. 6 verifica le condizioni i) e ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con $a_n = 1/n^2$, $n = 1, 2, ...$ Dunque la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ a una funzione continua $f(x)$.
Si verifica facilmente che f è anche pari e periodica di periodo 2π.

Integrando termine a termine sull'intervallo $[0, 2\pi]$ troviamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0\,.$$

Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza (puntuale) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \qquad\qquad (*)$$

Scrivere la serie delle derivate e verificare che converge totalmente in ogni intervallo $[\delta, +\infty)$, con $\delta > 0$.
Dimostrare che la serie $(*)$ è derivabile termine a termine in tutti i punti dell'insieme di convergenza.

Serie di potenze

Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione di numeri reali e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

si dice *serie di potenze* di centro x_0 e coefficienti a_n.

L'insieme di convergenza di una serie di potenze ha una proprietà particolare:

<u>Teorema</u>

Se una serie di potenze di centro x_0 converge in un punto $\bar{x}$ e se poniamo $r = |\bar{x} - x_0|$, allora la serie converge (assolutamente) in tutti i punti dell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dimostrazione

Scriviamo il valore assoluto del termine generale della serie nella forma

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \frac{|x-x_0|^n}{|\bar{x}-x_0|^n} = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n .$$

Poiché per ipotesi la serie converge in $\bar{x}$, deve valere

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n = 0 .$$

(condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche).
Esiste allora un intero $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, $|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leq 1$. Per tali n avremo allora

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq \left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n .$$

Ma se $|x-x_0| < r$, a destra abbiamo il termine generale della serie geometrica di ragione $q = |x-x_0|/r < 1$ che è convergente.
Per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ converge per $|x-x_0| < r$, ovvero per $x \in (x_0-r, x_0+r)$. $\diamond$

Alla luce del precedente teorema, possiamo definire il **raggio di convergenza** R di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ come l'estremo superiore dei numeri r tali che la serie converge per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Per definizione abbiamo $R \geq 0$, ma può anche essere $R = 0$ o $R = +\infty$.
Sempre dalla definizione segue che per $|x - x_0| < R$ la serie converge assolutamente, mentre non converge se $|x - x_0| > R$.
Nulla si può dire in generale sul carattere della serie nei punti $x_0 \pm R$ (estremi dell'intervallo di convergenza).

Per il *calcolo* del raggio di convergenza, si possono usare i criteri della radice e del rapporto:

a) Sia $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$.
Se $L > 0$, $R = 1/L$; se $L = 0$, $R = +\infty$; se $L = +\infty$, $R = 0$.

b) Sia $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = L$.
Se $L > 0$, $R = 1/L$; se $L = 0$, $R = +\infty$; se $L = +\infty$, $R = 0$.

Esempi

La serie (esponenziale)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + ...$$

ha raggio di convergenza infinito. Infatti, usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \,.$$

Con lo stesso criterio si verifica che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ ha $R = 0$, cioè converge solo nel centro $x_0 = 0$.

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} (x-1)^n \,.$$

Criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\, 2^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{2} \,.$$

Dunque $R = 2$ e la serie converge (assolutamente) per $x \in (-1, 3)$.
Studiare la convergenza della serie agli estremi dell'intervallo.

Proprietà delle serie di potenze

Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ e se $0 < r < R$, allora converge *totalmente* in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Infatti, in questi intervalli sono soddisfatte le condizioni per la convergenza totale in quanto

i) $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r^n\,, \quad \forall\, x \in [x_0 - r, x_0 + r],\ n \in \mathbb{N}\,;$

ii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge.

Da questa proprietà segue ora:

Teorema

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ la somma di una serie di potenze (di centro x_0) con raggio di convergenza $R > 0$.

Allora f è una funzione continua in $(x_0 - R, x_0 + R)$.
Inoltre, la serie è integrabile termine in ogni intervallo $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, cioè :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx\,.$$

Dimostrazione

Se $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, esiste $r < R$ tale che $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.
La serie converge totalmente in questo intervallo e quindi, per le proprietà della convergenza totale, la somma f è continua in x.
Allo stesso modo, se $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ esiste $r < R$ tale che $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$ e quindi si può integrare la serie termine a termine in $[a, b]$. $\diamond$

Dal teorema si ricava in particolare:

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ e $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, allora

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} .$$

Cambiando l'indice di somma con $m = n + 1$, otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1}}{m} (x - x_0)^m .$$

Dunque, nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ anche una primitiva di f è la somma di una serie di potenze centrata in x_0.

Esempio

Dalla relazione

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)\,,$$

e ricordando la serie geometrica ricaviamo

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \qquad x \in (-1,1)\,.$$

Cambiando x in $-x$ e chiamando ancora n l'indice di somma abbiamo

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n\,.$$

Osservazione

la relazione

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n ,$$

è stata ottenuta integrando termine a termine nell'intervallo $(-1, 1)$ e quindi non si può considerare valida al di fuori dell'intervallo. In effetti, se si calcola il raggio di convergenza della serie a destra si ottiene ancora $R = 1$.
Osserviamo tuttavia che nel punto $x = 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} ,$$

converge per il criterio di Leibniz.

Si può allora dimostrare (Teorema di Abel) che se una serie di potenze converge ad un estremo dell'intervallo di convergenza, diciamo $x_0 + R$, la sua somma è una funzione continua in $(x_0 - R, x_0 + R]$.

Siamo allora autorizzati a scrivere

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} .$$

Derivazione termine a termine delle serie di potenze

Per dimostrare che è possibile derivare termine a termine una serie di potenze, partiamo dalla seguente osservazione:

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$, la *serie delle derivate*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(m + 1)\, a_{m+1}(x - x_0)^m$$

ha lo stesso raggio di convergenza R.

Come a pag. 13, si conclude che anche la serie delle derivate converge *totalmente* in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, dove $0 < r < R$.
Sono allora soddisfatte le condizioni di pag. 7 per la derivabilità termine a termine della somma della serie in ogni punto $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.
Abbiamo così dimostrato:

Teorema

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \; x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,,$ allora f è derivabile con derivata uguale a

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m + 1)\, a_{m+1}(x - x_0)^m \,.$$

Poiché gli argomenti della pagina precedente si possono iterare un numero arbitrario di volte, si conclude che la somma f di una serie di potenze che converge in $(x_0 - R, x_0 + R)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Le derivate si calcolano allora con la formula

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)\, a_n\,(x-x_0)^{n-k} = \ (n-k=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+k)(m+k-1)...(m+1)\, a_{m+k}\,(x-x_0)^{m}\,.$$

Ponendo $x = x_0$, tutti i termini della serie successivi al primo si annullano e ricaviamo l'identità: $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$.
La relazione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ si può allora riscrivere nella forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\,.$$

La serie a destra si dice *serie di Taylor* di f (di McLaurin se $x_0 = 0$).

Esercizio

Calcolare tutte le derivate della funzione $\ln(1+x)$ nell'origine, scrivere la serie di McLaurin e riottenere la serie di pag. 16.

Le conclusioni ottenute 'suggeriscono' la seguente definizione:

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$, dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto (non necessariamente un intervallo). Si dice che f è *analitica* in $x_0 \in A$ se esiste un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n\,, \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)\,.$$

In altri termini, una funzione f di classe $\mathcal{C}^\infty$ è analitica in un punto se si può rappresentare come somma di una serie di potenze (la serie di Taylor di f) in un intorno del punto. Si dice anche che f è *sviluppabile in serie di Taylor* nell'intorno del punto.
Se una funzione è analitica in ogni punto di un aperto A, si dirà analitica in A.

Osservazione

Come abbiamo già osservato nel caso della funzione $\ln(1 + x)$, per ricavare la serie di Taylor di una funzione f non è sempre necessario calcolare le derivate di tutti gli ordini di f, ma si possono utilizzare sviluppi già noti.
Per quanto abbiamo dimostrato, è chiaro che in qualunque modo si ottenga una rappresentazione di f come serie di potenze, quella è la sua serie di Taylor.

Esempi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \,, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(serie esponenziale)}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \,; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \,, \qquad x \in (-1,1) \quad \text{(serie binomiale)}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)/n!$.

A partire da questi sviluppi si ottengono altre rappresentazioni di funzioni interessanti. Per esempio, sostituendo $x \to -x^2$ nella serie esponenziale si ottiene

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Integrando termine a termine, si ottiene una rappresentazione in serie di potenze della *funzione degli errori di Gauss*:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\, x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Osservazione

Esistono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ che *non* sono analitiche in $\mathbb{R}$.

Il motivo si capisce scrivendo la *formula di Taylor* di ordine n arbitrario

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^k + R_n(x)\,,$$

e poi facendo il limite per $n \to \infty$.
Si vede allora che la serie di Taylor converge a $f(x)$ *se vale la condizione* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ per ogni x in un intorno di x_0 .
Questa condizione non è sempre soddisfatta, ma richiede qualche limitazione sulla crescita delle derivate $f^{(n)}(x)$ al crescere di n.

Esercizi

i) Verificare che vale

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n} \,,$$

per $x \in (-1, 1)$.

Trovare lo sviluppo di McLaurin di $f(x) = \arctan x$ integrando termine a termine la serie precedente.

ii) Scrivere la serie di Taylor con centro in $x_0 = 1$ per la funzione $f(x) = 1/x$.

iii) Scrivere i primi 3 termini dello sviluppo in serie binomiale della funzione $f(x) = (1+x)^{-1/2}$.

Dimostrare che vale la seguente approssimazione per l'energia relativistica di una particella di massa m e velocità v:

$$E := \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{3}{8}\, m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Convergenza in media quadratica delle serie di Fourier

Per la definizione e le proprietà elementari delle serie di Fourier vedere il file *Serie di Fourier*.

Nello spazio delle funzioni limitate e integrabili su $(-\pi, \pi)$ definiamo lo *scarto quadratico* :

$$\|f-g\| := \left[\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)-g(x)\big)^2 \, dx \right]^{1/2} .$$

Data una funzione f limitata e $2\pi-$periodica, denotiamo con

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right]$$

la somma parziale $n-$esima della serie di Fourier associata.
I coefficienti a_k, b_k sono quindi i *coefficienti di Fourier* di f:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \, ; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \, .$$

Con calcoli elementari, utilizzando le *relazioni di ortogonalità*, si dimostra che s_n verifica la seguente proprietà di minimo:

Detto $\sigma_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right]$ un *generico* polinomio trigonometrico di ordine n, lo scarto quadratico

$$\|f - \sigma_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - \sigma_n(x)\big)^2 \, dx$$

assume il valore minimo per $\sigma_n = s_n$ e risulta:

$$\|f - s_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \pi \Big[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big({a_k}^2 + {b_k}^2\big)\Big].$$

Da questa relazione si ricavano notevoli proprietà dei coefficienti di Fourier di una funzione (a quadrato integrabile):

Osserviamo subito che vale la disuguaglianza (di Bessel)

$$\pi\Big[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big({a_k}^2 + {b_k}^2\big)\Big] \le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\,,$$

da cui segue che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big({a_k}^2 + {b_k}^2\big)$$

è convergente.

Ma il termine generale di una serie convergente tende a zero, per cui ricaviamo facilmente le relazioni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

(Lemma di Riemann-Lebesgue). Questa relazione viene usata per dimostrare il teorema sulla convegenza puntuale delle serie di Fourier.

Infine, per quanto riguarda la convergenza delle serie di Fourier nel senso dello scarto quadratico (o convergenza in media quadratica) si dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$$

e di conseguenza vale la relazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \Big[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big({a_k}^2 + {b_k}^2 \big) \Big]$$

(Identità di Parseval)

Esempio

Dallo sviluppo $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nx) \, , \; \big(\, x \in (-\pi, \pi) \big)$ e dall'identità di Parseval, si ottiene

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \pi \Big[\frac{2}{9}\pi^4 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Big] \, ,$$

da cui segue l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \, .$$