Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2015/2016
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Terzo appello di Metodi Analitici (12-9-16) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

(i) Date la funzioni di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}\,, \qquad g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^5}\,,$$

per ciascuna di esse determinare i punti i singolarità e di che tipo di singolarità si tratta.

(ii) Determinare lo sviluppo di Laurent di f di centro $z = 0$, e lo sviluppo di Laurent di g di centro $z = -1$ (con i rispettivi raggi di convergenza).

(iii) Calcolare $\mathrm{Res}(f, 0)$ e $\mathrm{Res}(g, -1)$.

Soluzione.

(i) Le singolarità della funzione f sono i punti $z = 0$ e $z = 1$. Poiché possiamo scrivere f come

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z}\,,$$

il punto $z = 0$ è un polo di ordine 3, il punto $z = 1$ è un polo di ordine 1. La funzione g ha come unica singolarità il punto $z = -1$. Poiché il numeratore di g è limitato in un intorno di $z = -1$, si tratta di un polo di ordine 5.

(ii) Si ha

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \sum_{k=-3}^{+\infty} z^k\,,$$

con raggio di convergenza 1.

Per quanto riguarda la funzione g osserviamo che, posto $h(z) := e^z$, si ha $h^{(k)}(-1) = e^{-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi possiamo scrivere, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$h(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-1}}{n!}(z+1)^n\,.$$

Pertanto si ha

$$g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n!}(z+1)^{n-5} = \sum_{k=-5}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{(k+5)!}(z+1)^k\,,$$

con raggio di convergenza $+\infty$.

(iii) Dal punto precedente si ricava immediatamente

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1 \qquad \mathrm{Res}(g, -1) = \frac{e^{-1}}{4!} = \frac{e^{-1}}{24}\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Enunciare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale nella teoria di Lebesgue.

(ii) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{x^{2/3}(1-x)^{1/n}}\,, \qquad x \in (0,1)\,,$$

determinare il limite puntuale $f(x)$.

(iii) Stabilire se f_n converge a f in $L^1(0,1)$.

Soluzione.
(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) Per ogni $x \in (0,1)$ si ha $(1-x)^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Pertanto il limite puntuale è la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^{2/3}}\,.$$

(iii) Per poter applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, cerchiamo una maggiorante integrabile, ossia una funzione $\varphi \in L^1(0,1)$ tale che $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ per q.o. $x \in (0,1)$.
Poiché

$$(1-x)^{1/n} \ge (1-x)^{1/2} \qquad \forall n \ge 2,\ x \in (0,1)\,,$$

la funzione

$$\varphi(x) := \frac{e^x - 1}{x^{2/3}(1-x)^{1/2}}$$

è una maggiorante.
Tale funzione è chiaramente integrabile su tutti gli insiemi del tipo $[\epsilon, 1-\epsilon]$. Dobbiamo controllare l'integrabilità vicino a $x = 0$ e vicino a $x = 1$.
Osserviamo che per $x \to 0^+$ la funzione $\varphi(x)$ resta limitata (in quanto $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0^+$).
D'altra parte, in un intorno sinistro di $x = 1$, la funzione φ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ e dunque è integrabile.
In conclusione si ha $\varphi \in L^1(0,1)$ e dunque per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha $f_n \to f$ in $L^1(0,1)$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.
Sia $u(x) := \max\{1 - |x|, 0\}$, per $x \in \mathbb{R}$.

(i) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $u \in L^p(\mathbb{R})$.

(ii) Calcolare $\hat{u}$.

(iii) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $\hat{u} \in L^p(\mathbb{R})$.

(iv) Calcolare $\hat{\hat{u}}$.

Soluzione.
(i) Poiché la funzione u è continua e il suo supporto è l'insieme compatto $[-1, 1]$, si ha $u \in L^\infty([-1, 1])$, e di conseguenza $u \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

(ii) Si ha $u'(x) = \chi_{(0,1)} - \chi_{(-1,0)}$, e pertanto

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = \frac{2 - 2\cos(\xi)}{i\xi}$$

Utilizzando la regola $i\xi\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u')$, si ottiene quindi

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(u')}{i\xi} = \frac{2 - 2\cos(\xi)}{\xi^2}$$

(iii) Poiché $u \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché il numeratore di $\hat{u}$ è limitato, per $|\xi| \to +\infty$ si ha $\hat{u}(\xi) \sim \frac{1}{\xi^2}$. Peranto si ha $\hat{u} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni p tale che $2p > 1$, e dunque per ogni $p \geq 1$.

(iv) Poiché $u \in L^2(\mathbb{R})$, vale la formula di inversione, e quindi

$$\hat{\hat{u}}(x) = 2\pi u(-x) = 2\pi u(x) = 2\pi \max\{1 - |x|, 0\}\,.$$