Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Seconda prova di Analisi III, 15 gennaio 2020 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = ke^{-k|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Stabilire se la successione converge in $L^1(\mathbb{R})$; in caso affermativo, determinarne il limite.

(b) Stabilire se la successione converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; in caso affermativo, determinarne il limite.

Soluzione.
(a) La successione non converge in $L^1(\mathbb{R})$. Infatti essa converge a zero puntualmente quasi ovunque (in ogni $x \neq 0$) alla funzione identicamente nulla, che quindi è l'unico possibile limite in $L^1(\mathbb{R})$. D'altra parte, si ha tramite cambio di variabile (e tenendo conto che f_k è pari)

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k| = 2\int_0^{+\infty} f_k = 2\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 2 \not\to 0\,.$$

(b) Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_k\varphi = k\int_{\mathbb{R}} e^{-k|x|}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\varphi\Big(\frac{y}{k}\Big)\,dy \to \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} = 2\varphi(0)$$

(dove il passaggio al limite segue dal teorema di convergenza dominata). Pertanto $f_k \to 2\delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Risolvere il seguente problema di Neumann sul disco unitario di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } x \in D := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,, \rho < 1\,, \theta \in [0, 2\pi]\} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sin\theta & \text{per } x \in \partial D := \{(\cos\theta, \sin\theta)\,,\, \theta \in [0, 2\pi]\} \end{cases}$$

Soluzione. Operando tramite serie di Fourier in coordinate polari, si ottiene la formula risolutiva

$$u(\rho, \theta) = c_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{g}_k}{|k|r^{|k|-1}}\rho^{|k|}e^{ik\theta}$$

dove $r = 1$ è il raggio del disco assegnato, $\hat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier del dato di Neumann, e c_0 è una costante arbitraria. Tale formula vale se il dato è una funzione di $L^2([0, 2\pi])$ a media nulla (ciò che è verificato nel nostro caso dalla funzione $\theta \mapsto \sin\theta$). Si ha

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Pertanto $\hat{g}_1 = \frac{1}{2i}$, $\hat{g}_{-1} = -\frac{1}{2i}$ e $\hat{g}_k = 0$ per $k \neq \pm 1$, da cui si evince che tutte le soluzioni del problema assegnato sono date da

$$u(\rho, \theta) = c_0 + \frac{1}{2i}\rho e^{i\theta} - \frac{1}{2i}\rho e^{-i\theta} = c_0 + \rho\sin\theta\,,$$

al variare di c_0 in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Stabilire se i seguenti problemi di minimo ammettono soluzione:

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - u\right] \tag{1}$$

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - u\right]. \tag{2}$$

Soluzione. Per quanto riguarda (1), il problema consiste nel minimizzare nello spazio di Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$,

$$E(u) := \frac{1}{2}B(u,u) - F(u)\,,$$

dove

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,, \qquad F(u) = \int_\Omega u\,,$$

Chiaramente B e F sono rispettivamente una forma bilineare e un funzionale lineare. Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni del Teorema di Lax Milgram, munendo H della norma $\|u\|_H := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

- B è continua : $|B(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right| \leq \|u\|_H \|v\|_H$ per la disuguaglianza di Holder.
- B è coerciva: $B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2$.
- F è continuo: $|F(u)| \leq |\Omega|^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_H$, dove si è usato la disuguaglianza di Holder e quella di Poincaré.

Pertanto il Teorema di Lax Milgram assicura l'esistenza di una funzione $u \in H_0^1(0,1)$ tale che $B(u,v) = F(v)$ per ogni $v \in H$, e tale funzione risolve il problema di minimo (1).

Per quanto riguarda (2), si osserva che prendendo la successione di funzioni constanti $u_k(x) = k$ (che appartengono a $H^1(\Omega)$), si ha

$$E(u_k) = -k|\Omega|$$

e pertanto $\lim_k E(u_k) = -\infty$, da cui si vede che il problema assegnato non ammette soluzione, in quanto l'estremo inferiore del funzionale E su $H^1(\Omega)$ vale $-\infty$. Si osservi che l'eventuale tentativo di applicare il Teorema di Lax Milgram come fatto per il precedente problema non fornirebbe l'esistenza di una soluzione, in quanto la forma B *non* risulta coerciva su $H^1(\Omega)$ (non essendo valida in questo spazio la disuguaglianza di Poincaré).

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Enunciare il teorema di rappresentazione di Riesz.

(b) Caratterizzare il duale topologico di $L^2(0,1)$.

(c) Dato $p \in (1, +\infty)$, fornire un esempio di funzionale lineare continuo da $L^p(0,1)$ in $\mathbb{R}$, e quindi fornire una plausibile congettura per l'identificazione del duale topologico di $L^p(0,1)$.