Equazioni differenziali-Problemi svolti

1) Le equazioni (del primo ordine) della forma

$$y' = f(y)$$

in cui il secondo membro non dipende esplicitamente da t, si dicono *autonome*. Dimostrare la seguente proprietà delle equazioni autonome: se $\phi(t)$ è una soluzione in un intervallo (a, b) anche $\phi(t + C)$ è soluzione in $(a - C, b - C)$ per ogni valore della costante C.

2) Verificare che tutte le iperboli della famiglia

$$y = \frac{1}{t + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = -y^2$$

Esistono altre soluzioni dell'equazione ?

3) Trovare per quali valori dei parametri A e B la funzione $y(t) = t^2 + At + B$ risolve l'equazione differenziale

$$y'' + y' + y = t^2$$

4) Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' - \lambda y = 2t$$

dove λ è un parametro reale. (Distinguere i casi $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$.)

Soluzioni.

1) Per ipotesi abbiamo

$$\phi'(t) = f(\phi(t))$$

per ogni $t \in (a, b)$. Posto $\psi(t) = \phi(t + C)$, abbiamo per ogni $t \in (a - C, b - C)$:

$$\psi'(t) = \phi'(t + C) = f(\phi(t + C)) = f(\psi(t))$$

Dunque, tutte le traslate (nella direzione dell'asse t) di una curva integrale di un'equazione autonoma sono curve integrali.

2) Ogni funzione della famiglia è derivabile per $t \neq C$. La derivata è

$$y'(t) = -\frac{1}{(t + C)^2}$$

per cui l'equazione $y'(t) = -y(t)^2$ è soddisfatta. L'equazione ammette anche la soluzione costante $y = 0$.

3) Sostituendo la funzione data nell'equazione si ottiene:

$$2 + 2t + A + t^2 + At + B = t^2$$

$$(A + 2)t + A + B + 2 = 0.$$

Poiché l'identità deve valere per ogni t, troviamo le condizioni

$$A + 2 = 0, \qquad A + B + 2 = 0,$$

dalle quali si ricava $A = -2$, $B = 0$.

4) Se $\lambda = 0$, l'equazione si scrive: $y' = 2t$; l'integrale generale è dunque $y = t^2 + C$. Nel caso $\lambda \neq 0$, abbiamo un'equazione lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'equazione omogenea $z' = \lambda z$ si scrive

$$z(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = At + B$$

Sostituendo nell'equazione troviamo la condizione

$$A - \lambda(At + B) = 2t$$

per ogni t, da cui si ricava $A = -2/\lambda$, $B = -2/\lambda^2$. L'integrale generale dell'equazione completa è allora

$$y(t) = -\frac{2}{\lambda}(t + 1/\lambda) + Ce^{\lambda t}$$

(alla stessa conclusione si arrivava applicando la formula risolutiva per le equazioni del primo ordine).