Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Terzo appello di Metodi Analitici (12-9-13) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Siano a e b parametri reali positivi, con $b > a$. Si determini lo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ nella corona circolare $\{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)},$$

specificando quali sono la parte regolare e la parte singolare dello sviluppo.

Soluzione. La scomposizione di $f(z)$ in fratti semplici fornisce:

$$f(z) = \frac{a}{a-b}\frac{1}{z-a} + \frac{b}{b-a}\frac{1}{z-b}.$$

- Per $|z| < b$, si ha:
$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b\left(1-\frac{z}{b}\right)} = -\frac{1}{b}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{b}\right)^n.$$

- Per $|z| > a$, si ha:
$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z\left(1-\frac{a}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}}.$$

  Pertanto lo sviluppo richiesto è dato da:
$$f(z) = \frac{1}{a-b}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{b^n} + \frac{1}{a-b}\sum_{n\geq 0}\frac{a^{n+1}}{z^{n+1}},$$

  dove la parte regolare è data da $\frac{1}{a-b}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{b^n}$ e la parte singolare da $\frac{1}{a-b}\sum_{n\geq 0}\frac{a^{n+1}}{z^{n+1}}$.

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Date $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, si dia la definizione di prodotto di convoluzione $u * v$, specificando a quale spazio appartiene.

(ii) Sia $u(x) = \chi_{[0,a]}(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, a]$ (con $a > 0$). Calcolare la funzione $f := u * u$.

(iii) Stabilire se $f \in AC(\mathbb{R})$.

(iv) Giustificare la disuguaglianza $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|^2_{L^1(\mathbb{R})}$ e dire, se esistono, per quali valori del parametro reale positivo a tale disuguaglianza vale come uguaglianza.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Si ha

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,a]}(y)\chi_{[0,a]}(x-y)\,dy = \big|[0,a] \cap [x-a, x]\big|$$

Pertanto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2a \\ x & \text{se } x \in [0, a] \\ 2a - x & \text{se } x \in [a, 2a]\,. \end{cases}$$

(iii) Si ha $f \in AC(\mathbb{R})$, in quanto $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$, dove la funzione derivata f' appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, essendo uguale a 1 se $x \in (0, a)$, uguale a -1 se $x \in (a, 2a)$, e nulla altrove.

(iv) La disuguaglianza $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|^2_{L^1(\mathbb{R})}$ segue da $\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}\|v\|_{L^1(\mathbb{R})}$, applicata con $u = v$. Si ha

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^a x\,dx + \int_a^{2a} (2a - x)\,dx = a^2$$

e

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R})} = a\,.$$

Pertanto, per ogni valore di $a > 0$, la disuguaglianza $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|^2_{L^1(\mathbb{R})}$ vale come uguaglianza.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Stabilire se la seguente equazione ammette soluzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$

$$u(x) - \frac{1}{4}e^{-|x|} * u(x) = xe^{-|x|} \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\,,$$

e in caso affermativo determinarle.

Soluzione. Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri e indicando con $\widehat{u}$ la trasformata di u si ottiene

$$\widehat{u}(\xi) - \frac{1}{4}\frac{2}{1+\xi^2}\widehat{u}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\left(\frac{2}{1+\xi^2}\right) = -\frac{4\xi i}{(1+\xi^2)^2}\,,$$

dove si sono sfruttate le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\,(u * w) = \mathcal{F}\,(u)\;\mathcal{F}\,(w), \qquad \mathcal{F}\,(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\xi^2}, \qquad \mathcal{F}\,(xu) = i\frac{d}{d\xi}\;\mathcal{F}\,(u).$$

Facendo i calcoli si deduce dunque che

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{8\xi i}{(1+\xi^2)(1+2\xi^2)} = -8i\xi\left[-\frac{1}{1+\xi^2} + \frac{2}{1+2\xi^2}\right] \in L^2(\mathbb{R}).$$

Infine, ricordando che $\mathcal{F}\,(u'(x))(\xi) = i\xi\widehat{u}(\xi)$, si conclude che l'equazione assegnata ha una e una soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$, data da

$$u(x) = -8\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2}\,e^{-|x|} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}}\right] = 4\text{sign}(x)(e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}} - e^{-|x|}) \in L^2(\mathbb{R}).$$