3) Sottospazi vettoriali

<u>Teorema</u> Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio vett. normato
Se $\dim V < +\infty \Rightarrow$ tutti i sottospazi
vettoriali W sono CHIUSI
$\left(\{v_n\} \subseteq W, \ v_n \longrightarrow v \text{ in } V \right.$
$\left. \Rightarrow v \in W \right)$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^3, \ \|\cdot\|_2$

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
- $\{0\}, \ \mathbb{R}^3$
- rette per l'origine
- piani per l'origine

Il teorema diventa FALSO se $\dim V = +\infty$

Controesempio

$V = \left(\mathcal{C}^0([a,b]), \ \|\cdot\|_\infty \right)$

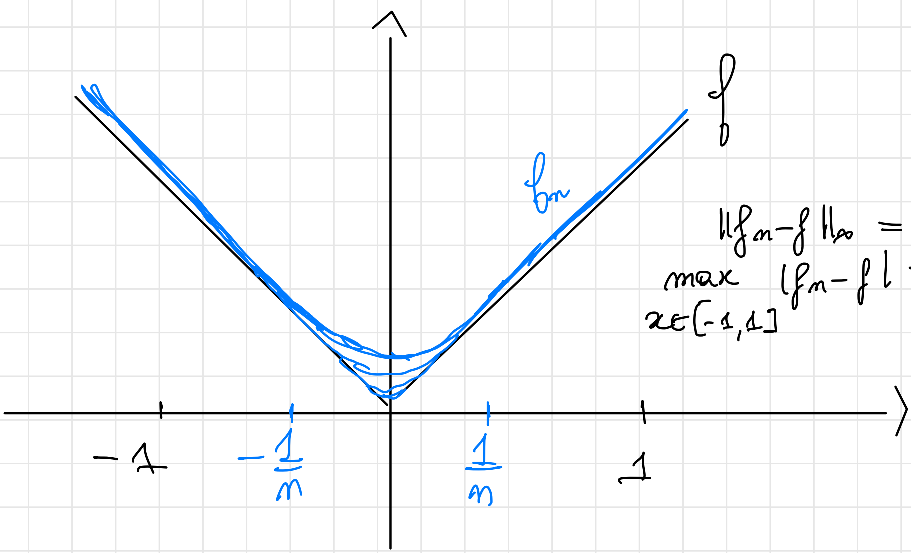
$W = \mathcal{C}^1([a,b])$ è un sottospazio

(es.: $f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$
$f \in W, \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow tf \in W$)

NON è chiuso:

$\exists \{f_n\} \subseteq W : f_n \to f$ in V

MA $f \notin W$.

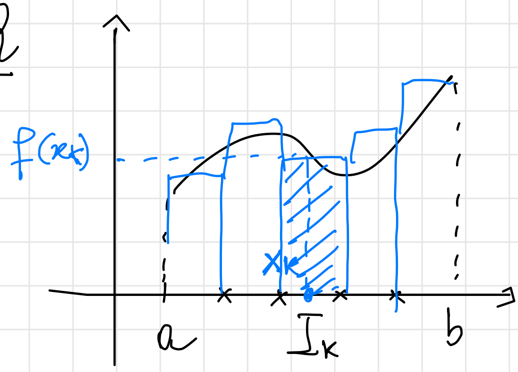


$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |f_n - f| \longrightarrow 0$

Integrazione secondo Lebesgue

1) misure e funzioni misurabili
2) def integrale di Lebesgue
3) confronto con Riemann
4) teoremi principali.

R



$K=1,\dots,N$

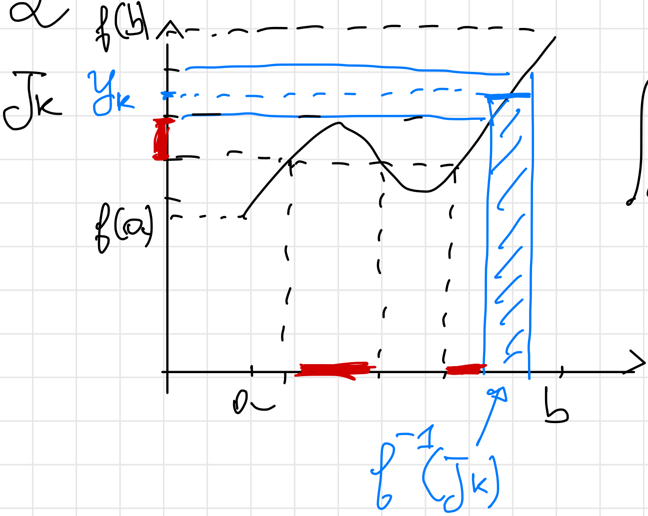
intervallo

$$\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\ell(I_K)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{f(x_K)}_{\text{altezza}}$$

$I_K=[a_K,b_K] \Rightarrow$

$\ell(I_K)=b_K-a_K$

L



insieme

$$\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\ell(\overbrace{f^{-1}}(J_K))}_{\text{base}} \cdot \underbrace{y_K}_{\text{altezza}}$$

1) Misure e funzioni misurabili

parti di X

Def. Sia X insieme, e sia $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{P(X)}$ una collezione di sottoinsiemi di X.

$\mathcal{F}$ si dice una σ-ALGEBRA se:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ ($\emptyset$:= INSIEME VUOTO)

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Oss/Es. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.

Esempi

- X qualsiasi, $\mathcal{F} = P(X)$ = parti di X
- $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ = la più piccola σ-algebra contenente gli aperti (σ-algebra dei boreliani].

Def. $(\underset{\text{insieme}}{X}, \underset{\text{σ-algebra}}{\mathcal{F}})$ SPAZIO MISURABILE.

Def. Sia $(X, \mathcal{F})$ spazio misurabile

Una MISURA POSITIVA su $(X, \mathcal{F})$ è una funzione

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ POSITIVITÀ

2) Se $\{A_n\}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi di $\mathcal{F}$ 2 a 2 disgiunti, allora

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_n A_n}_{\in \mathcal{F}}\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \qquad \sigma\text{-ADDITIVITÀ}$$

eventualmente $+\infty = +\infty$.

Esempi
- $(X, \mathcal{P}(X))$ $\mu(A) = \operatorname{card}(A)$.
- $(X, \mathcal{P}(X))$ fissato $x_0 \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$

Oss. Seguono da 1) e 2):

3) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots\ldots$, $A_i \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

4) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots\ldots$, $A_i \in \mathcal{F}$, $\mu(A_1) < +\infty$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

<u>Teorema</u> Esistono su $\mathbb{R}^n$ una σ-algebra $\mathcal{M}$ (misurabili secondo Lebesgue) e una misura positiva m_n (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) tali che:

- tutti gli insiemi aperti appartengono a $\mathcal{M}$
- $A \in \mathcal{M}$ e $m(A) = 0 \Rightarrow \forall B \subseteq A$, $B \in \mathcal{M}$ e $m(B) = 0$ (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \quad i = 1, \dots n\}$
  $\Rightarrow m(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

(......)

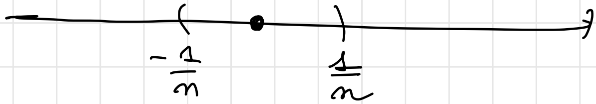
<u>Oss.</u> Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue.

<u>Oss.</u> La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ estende il concetto di volume n-dimensionale.

<u>Oss.</u> Gli insiemi di misura nulla sono importanti

$\boxed{n=1}$

- $A = \{0\} = \bigcap_n \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{A_n}$

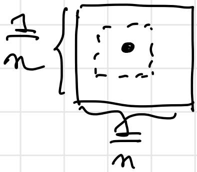


$m(A_n) = \frac{2}{n}$, $m(\{0\}) = 0$

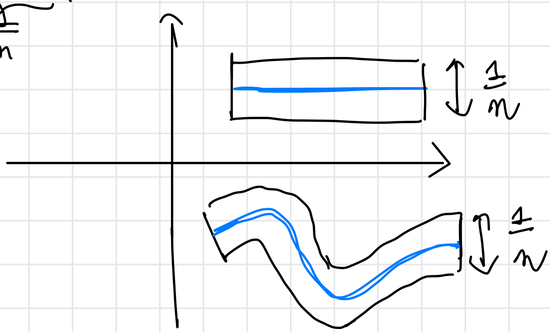
- $A = \{0, 1\} \Rightarrow m(A) = 0$
- $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \Rightarrow m(A) = 0$

$\boxed{n=2}$

- $A =$ unione num. di punti $\Rightarrow m(A) = 0$.



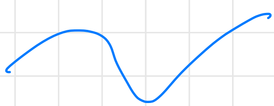
- $A =$

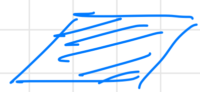


$\Rightarrow m(A) = 0$

$\boxed{n=3}$

-





Def. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice

MISURABILE SECONDO LEBESGUE se

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue

$\Updownarrow$

$\forall C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, $f^{-1}(C)$ misurabile secondo Lebesgue

Oss.

- f continua $\Rightarrow$ f misurabile secondo Lebesgue

  (f continua $\Rightarrow$ $\forall A$ aperto, $f^{-1}(A)$ aperto
  $\Rightarrow$ $\forall A$ aperto, $f^{-1}(A)$ misurabili).

- Sono misurabili anche

  limiti, inferiore, superiore di funzioni continue
  (di funzioni misurabili)

[Più in generale, se

$f: E \to \mathbb{R}$, con E misurabile

f si dice misurabile secondo Lebesgue se

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $E \cap f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue.]

2) Integrale secondo Lebesgue

Sia $f: E$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile.

① FUNZIONI SEMPLICI

S funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un n° finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile)

$$S = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i} \qquad \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

FUNZIONE CARATT. DI E

$E_i = S^{-1}(\{\alpha_i\})$

CHIUSO

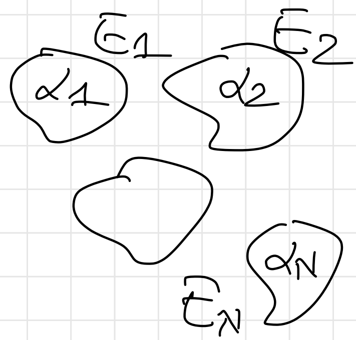
insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$x \in E_1 \Rightarrow S(x) = \alpha_1$

$x \in E_2 \Rightarrow S(x) = \alpha_2$

$\vdots$

$x \in E_N \Rightarrow S(x) = \alpha_N$



$$\int_E s := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, m(E_i)$$

Precisazione: con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$

es. $n=1$ $\quad A = (0,+\infty) \quad A = \bigcup_n \underbrace{(0,n)}_{A_n}$

$$m(A) = \lim_n m(A_n) = +\infty$$

② FUNZIONI MISURABILI $f \geq 0$

$$\int_E f := \sup_{\substack{s \text{ semplici} \\ s \leq f}} \int_E s \quad \left(= \inf_{\substack{s \text{ semplici} \\ s \geq f}} \int_E s \right)$$