SERIE DI FOURIER

III.1 - SERIE DI FOURIER IN UNO SPAZIO DI HILBERT

Una famiglia di funzioni $\{u_n\}$ di uno spazio di Hilbert si dice **sistema ortonormale** se il prodotto scalare tra due elementi diversi della famiglia è nullo:

$$(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$$

Se in più ogni elemento ha norma 1, si parla di **sistema ortonormale**:

$$\|u_n\| = 1 \quad \forall n$$

In generale questi sistemi possono avere un numero finito o infinito di elementi.

Sia H uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}$ un suo sistema ortonormale. Data una funzione $u \in H$, si definisce coefficiente di Fourier di u rispetto al sistema dato il prodotto scalare tra u e u_n.

Sotto queste ipotesi, vale la seguente **disuguaglianza di Bessel**: $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n)^2 \le \|u\|^2$

Dimostrazione:

Essendo H uno spazio di Hilbert: $0 \leq \left\| u - \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \right\|^2 = \left(u - \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n,\ u - \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \right) =$

$$= (u, u) - 2\left(u,\ \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n, \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \right) = \|u\|^2 - 2\sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2 + \sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2$$

Da cui si deduce infine che:

$\sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$, che vale per ogni N, anche infinito (passando all'estremo superiore su N).

Si chiama dunque **serie di Fourier** di u rispetto al sistema dato la seguente:

$$\sum_{n=0}^{C}(u,u_n)u_n$$

dove si è indicata con C la cardinalità del sistema ortonormale: $C = \mathrm{card}(\{u_n\})$

- Se C è un numero finito, la serie è in realtà una somma finita che ha come somma la proiezione di u sul sottospazio di H generato dagli elementi del sistema ortonormale.
- Se C è infinito, si ha una serie vera e propria ed essa converge alla proiezione di u sulla chiusura del sottospazio di H generato dagli elementi del sistema ortonormale.

Dimostrazione:

- Il caso finito non necessita dimostrazione, in quanto la serie è appunto una somma finita. Inoltre in tale situazione il sottospazio generato dagli elementi del sistema ortonormale è sempre chiuso.
- Nel caso infinito, dobbiamo invece dimostrare la convergenza di $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n$.

  Sia consideri dunque $M > N$:

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{M} (u,u_n) u_n - \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} (u,u_n) u_n \right\|^2 = \left(\sum_{n=N+1}^{M} (u,u_n) u_n, \ \sum_{n=N+1}^{M} (u,u_n) u_n \right) =$$

$= \left| \sum_{n=N+1}^{M} (u,u_n)^2 \right| = |T_M - T_N|$, dove $T_N = \sum_{n=0}^{N} (u,u_n)^2$ sono le somme parziali di una serie numerica.

  Ma tale serie converge per la disuguaglianza di Bessel, e segue quindi la convergenza della serie di Fourier di partenza in quanto essendo in uno spazio di Hilbert ogni successione di Cauchy converge.

Per concludere, bisogna infine controllare che la serie converga proprio alla proiezione di u sulla chiusura M del sottospazio generato dal sistema ortonormale: $M = \overline{< u_n >_{n\in\mathbb{N}}}$.
Si indichi poi con u' la somma della serie: $u' = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n) u_n$.

- u' appartiene ad M, infatti:
  $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \in < u_n >_{n\leq N}$, poiché è combinazione lineare degli u_n di coefficienti (u, u_n)
  $u' = \lim_{n\to+\infty} S_N \in \overline{< u_n >_{n\in\mathbb{N}}}$, poiché la chiusura di un insieme contiene per definizione tutti i suoi punti di accumulazione.
- $u - u'$ appartiene allo spazio ortogonale ad M, infatti:
  $$(u - u', u_{\bar{n}}) = (u, u_{\bar{n}}) - (u', u_{\bar{n}}) = (u, u_{\bar{n}}) - \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n) u_n, u_{\bar{n}} \right) = (u, u_{\bar{n}}) - \sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n)(u_n, u_{\bar{n}}) =$$
  $= (u, u_{\bar{n}}) - (u, u_{\bar{n}}) = 0, \quad \forall \bar{n} \in \mathbb{N}$, e quindi $u - u'$ è ortogonale a qualsiasi elemento di M.

Un sistema ortonormale $\{u_n\}$ in uno spazio di Hilbert H si dice **completo** se è massimale rispetto all'inclusione, ovvero se non si può trovare un sistema ortonormale con più elementi che sia ancora ortonormale. Si ha allora che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) $\{u_n\}$ è completo.
2) $\forall u \in H: \quad (u, u_n) = 0 \;\; \forall n \;\Rightarrow\; u = 0$.
3) $H \equiv M := \overline{< u_n >_{n \in \mathbb{N}}}$.
4) $\forall u \in H: \quad u = \sum (u, u_n) u_n$
5) $\forall w, v \in H: \quad (w, v) = \sum (w, u_n)(v, u_n)$: identità di Parseval
6) $\forall u \in H: \quad \|u\|^2 = \sum (u, u_n)^2$: identità di Bessel

1) $\{u_n\}$ è completo.

2) $\forall u \in H: \quad (u, u_n) = 0 \ \ \forall n \ \Rightarrow \ u = 0$.

3) $H \equiv M := \overline{< u_n >}_{n \in \mathbb{N}}$.

4) $\forall u \in H: \quad u = \sum (u, u_n) u_n$

5) $\forall w, v \in H: \quad (w, v) = \sum (w, u_n)(v, u_n)$: identità di Parseval

6) $\forall u \in H: \quad \|u\|^2 = \sum (u, u_n)^2$: identità di Bessel

<u>*Dimostrazione:*</u>

1) $\Leftrightarrow$ 2) : Se 2) è falsa, allora $\exists \bar{u} \neq 0 : (\bar{u}, u_n) = 0 \ \ \forall n$. Ma se considero la famiglia $\{u_n, \ \bar{u}\}$, essa è un sistema ortonormale con più elementi di $\{u_n\}$, che quindi non è completo.
Se 1) è falsa, allora la $\bar{u}$ (non nulla) che posso aggiungere al sistema $\{u_n\}$ è ortonormale agli elementi di quest'ultimo, e quindi $(u, u_n) = 0 \ \ \forall n$, contro la 2).

2) $\Rightarrow$ 3) : Se 3) è falsa, allora $M \subset H \ \Rightarrow \ \exists v \in M^{\perp} \ \Rightarrow \ (v, u_n) = 0$, contro la 2).

3) $\Rightarrow$ 4) : Se M coincide con H, la proiezione di u su M, e quindi su H, è u stessa.

4) $\Rightarrow$ 5) : Infatti $(w, v) = \left(\sum (v, u_n) u_n, \sum (w, u_n) u_n \right) = \sum (w, u_n)(v, u_n)$

5) $\Rightarrow$ 6) : L'identità di Bessel segue dall'identità di Parseval con $v = w = u$.

6) $\Rightarrow$ 2) : Se $(u, u_n) = 0 \ \ \forall n: \quad \|u\|^2 = \sum (u, u_n)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

Uno spazio di Hilbert si dice **separabile** se ammette un sistema ortonormale completo e numerabile.

Esempi:

- $H = \mathbb{R}^N$ è separabile con $\{e_i\}_{i \le N}$, dove gli e_i sono i versori della base canonica.

  Infatti, usando la 2), se $u \in \mathbb{R}^N$: $(u, e_i) = 0 \ \forall i \le N \Rightarrow u_i = 0 \ \forall i \le N \Rightarrow u = 0$
- $H = l^2(\mathbb{N})$ è separabile con $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ed e_i le successioni di zeri con un uno in i-esima posizione.

  Infatti, usando la 2), se $u \in l^2(\mathbb{N})$: $(u, e_i) = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow u_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow u = 0$

III.2 - SERIE DI FOURIER IN L^2

Lo spazio $L^2([a,b])$ è separabile e tra i sistemi ortonormali che lo rendono tale si hanno:

1. **Polinomi di Legendre:**

   Dalla teoria precedente si è visto che lo spazio $C_0^\infty([a,b])$ è denso in $L^2([a,b])$. L'idea è quella di approssimare le funzioni del primo spazio con polinomi. Si ha infatti che:

   Proposizione: data una qualsiasi funzione $\varphi \in C_0^\infty([a,b])$, esiste una successione di polinomi che converge uniformemente a φ.

Da questa proposizione segue quindi che $\overline{< u_n >} = L^2([a,b])$, con $u_n = x^n$.

Tale sistema però si può vedere che non è ortonormale. Si può però utilizzare quindi l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, che in un qualsiasi spazio di Hilbert, data una famiglia di elementi in esso, permette di generare una nuova famiglia che sia un sistema ortonormale e che generi lo stesso sottospazio generato da quella di partenza.

- Sia $\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ la famiglia di partenza e $\left\{v_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ il sistema ortonormale cercato.
- $v_1 = \dfrac{u_1}{\left\|u_1\right\|}$
- $v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\left\|\tilde{v}_2\right\|}$, dove $\tilde{v}_2 = \alpha u_1 + u_2$ con $(\alpha u_1 + u_2, u_1) = 0$, da cui si ricava $\alpha = -\dfrac{(u_2, u_1)}{\left\|u_1\right\|^2}$
- $v_3 = \dfrac{\tilde{v}_3}{\left\|\tilde{v}_3\right\|}$, dove $\tilde{v}_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 + u_3$ con $\begin{cases} \left(\alpha u_1 + \beta u_2 + u_3, u_1\right) = 0 \\ \left(\alpha u_1 + \beta u_2 + u_3, u_2\right) = 0 \end{cases}$

  Dove il sistema si vede essere risolvibile se u_1 e u_2 sono indipendenti.
- E si procede in maniera analoga fino al grado desiderato.

Esempio:

Si consideri $L^2([-1,1])$. I primi tre polinomi di Legendre per questo spazio sono:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}x, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3} + x^2\right)$$

Data quindi una funzione $f \in L^2([-1,1])$, il polinomio $(f, v_0)v_0 + (f, v_1)v_1 + (f, v_1)v_1$ è la migliore approssimazione, in norma $\|\cdot\|_{L^2}$, di tale funzione con un polinomio di grado massimo 2.

2. **<u>Polinomi trigonometrici:</u>**

Si consideri l'intervallo $I = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$, con $T > 0$, e si chiami $\xi_k = \frac{2\pi k}{T}$.

Teorema: la seguente famiglia di polinomi trigonometrici:

$$\left\{ p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, p_k = \frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{T/2}}, q_k = \frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{T/2}} \right\}, \text{ con } k \geq 1$$

è un sistema ortonormale completo in $L^2(I)$.

Dimostrazione:

Dalla teoria precedentemente svolta si ha che $C_0^\infty(I)$ è denso in $L^2(I)$. L'idea da seguire è quella di approssimare quindi le funzioni $L^2(I)$ con funzioni $C_0^\infty(I)$ e approssimare a loro volta quest'ultime con polinomi trigonometrici. Rimane quindi da dimostrare che $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, la serie di Fourier ad essa associata converge a φ nel senso di $L^2(I)$.

Dall'analisi B si ha che per una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ e periodica, la serie di Fourier ad essa associata converge a f puntualmente e uniformemente.

Se quindi si ha una funzione $\varphi \in C_0^\infty(I)$ si può applicare il risultato precedente considerando come funzione f la ripetizione di φ su tutto $\mathbb{R}$. Essa è una funzione $C^1(\mathbb{R})$ poiché nei punti di raccordo la funzione φ è nulla con derivata nulla (essendo definita a supporto compatto).

La dimostrazione segue quindi di conseguenza ricordando che la convergenza uniforme implica quella in $L^2(I)$.

In particolare segue che, data una funzione $f \in L^2(I)$, converge a f in norma $\|\cdot\|_{L^2}$ la serie:

$$\left(f,p_0\right)p_0 + \sum_{k\geq 1}\left[\left(f,p_k\right)p_k + \left(f,q_k\right)q_k\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos\left(\xi_k x\right) + b_k \sin\left(\xi_k x\right)\right]$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono dati dalle formule seguenti:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\left(f,p_k\right) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\xi_k x\right)dx\,, \qquad b_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\left(f,q_k\right) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\xi_k x\right)dx$$

Tale serie può anche essere espressa, in maniera più compatta, in forma esponenziale:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{i\xi_k x}\text{, con i coefficienti } \widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\xi_k x}dx$$

Osservazioni:

- Per l'identità di Bessel $\|f\|_{L^2}^2 = \left\|\left\{\widehat{f_k}\right\}\right\|_{l^2}^2$, si ha che $f \in L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right) \iff \left\{\hat{f}_k\right\} \in l^2(\mathbb{Z})$.
- Si definisce $L_T^2(\mathbb{R}) := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{misurabili, T-periodiche: } \int_a^b |f|^2 < +\infty\ \ \forall a,b\right\}$.

  Si può dimostrare che $L_T^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert con stessa norma e prodotto scalare di $L^2(I)$ e che in esso continua a valere il precedente teorema.
- Se $f \in L_T^2(\mathbb{R}) \cap AC(I)$, allora $\widehat{f'_k} = (i\xi_k)\widehat{f_k}\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$; $\ a'_k = \xi_k b_k,\ b'_k = -\xi_k a_k\ \ \forall k \in \mathbb{N}$