SUPERFICI 16-4-2020

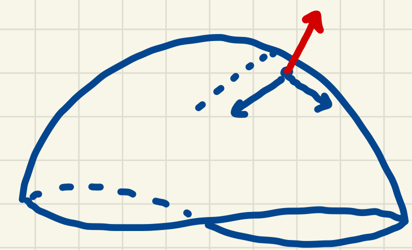
ESERCIZIO 1. Sia $z = f(x,y) = x^2+y^2$. Scrivere in un suo generico punto il versore normale alla superficie descritta da f.

SOL.

$z = f(x,y)$

$\underline{r}(x,y) = (x; y; f(x,y)) = (x; y; x^2+y^2)$

$\underline{r}_x(x,y) = (1; 0; 2x)$



$\underline{r}_y(x;y) = (0; 1; 2y)$

$$\underline{r}_x \times \underline{r}_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \underline{i}(-2x) - \underline{j}(2y) + \underline{k}(1) =$$

$$= (-2x; -2y; 1) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y)$$

$$\| \underline{r}_x \times \underline{r}_y \| = \sqrt{1 + \underbrace{(-2x)^2 + (-2y)^2}_{\| \nabla f(x,y) \|}} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\| \underline{r}_x \times \underline{r}_y \| = \sqrt{1 + \| \nabla f \|^2} \qquad \underline{r}_x \times \underline{r}_y = (-f_x; -f_y; 1)$$

$$\underline{n} = \frac{(-f_x; -f_y; 1)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$$

RISPOSTA:

$$\underline{n} = \frac{(-2x; -2y; 1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

ESERCIZIO 2. Siano $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x;y) = \left(y e^{x^2};\ \operatorname{sen}(x+y);\ \cos xy \right)$$

$$g(x,y,z) = \left(z x^2;\ 4x^2 + e^y;\ z^3 - x \right)$$

1) Scrivere la matrice Jacobiana di f e di g in un generico punto.

2) Determinare l'espressione analitica di $h(x,y) = g(f(x,y))$

3) Calcolare $J_h(0;\pi)$

4) Si può scrivere la funzione $f \circ g$?

SOL.

1) $f(x,y) = \left(y e^{x^2} ; \ \operatorname{sen}(x+y) ; \ \cos xy \right)$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xye^{x^2} & e^{x^2} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -y \operatorname{sen} xy & -x \operatorname{sen} xy \end{bmatrix}$$

$g(x,y,z) = \left(z x^2 ; \ 4x^2 + e^y ; \ z^3 - x \right)$

$$J_g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ 8x & e^y & 0 \\ -1 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix}$$

2) $h(x,y) = g(f(x,y)) =$

$$= g\left(ye^{x^2};\ \operatorname{sen}(x+y);\ \cos xy\right)$$

$$= \left(y^2 e^{2x^2} \cos xy;\ 4y^2 e^{2x^2} + e^{\operatorname{sen}(x+y)};\ \cos^3 xy - ye^{x^2}\right)$$

3) $J_h(0;\pi) = ?$

$f(x,y) = \left(ye^{x^2}; \operatorname{sen}(x+y); \cos xy\right)$

$f(0;\pi) = (\pi; 0; 1)$

$$J_f(0;\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_g(f(0;\pi)) = J_g(\pi;0;1) = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & \pi^2 \\ 8\pi & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$J_h(0;\pi) = J_g(\pi,0,1) \cdot J_f(0;\pi) =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2\pi & 0 & \pi^2 \\ 8\pi & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -1 & 8\pi-1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4) Non è possibile comporre $f \circ g$, perché:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$g(f(x,y))$ si può fare (domande 2-3)

$f(g(x,y,z))$ <u>NON</u> si può fare perché f prende valori in $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $F(x;y) = (u;v)$ del piano in sé, le cui equazioni sono

$$\begin{cases} u = e^x \\ v = x - y \end{cases}$$

1) Determinare $F(\mathbb{R}^2)$

2) La corrispondenza tra $\mathbb{R}^2$ ed $F(\mathbb{R}^2)$ è biunivoca?

3) In tal caso si verifichi che l'inversa della matrice Jacobiana di F in (x,y) è la matrice Jacobiana di F^{-1} calcolata in $(u,v) = F(x,y)$.

SOL.

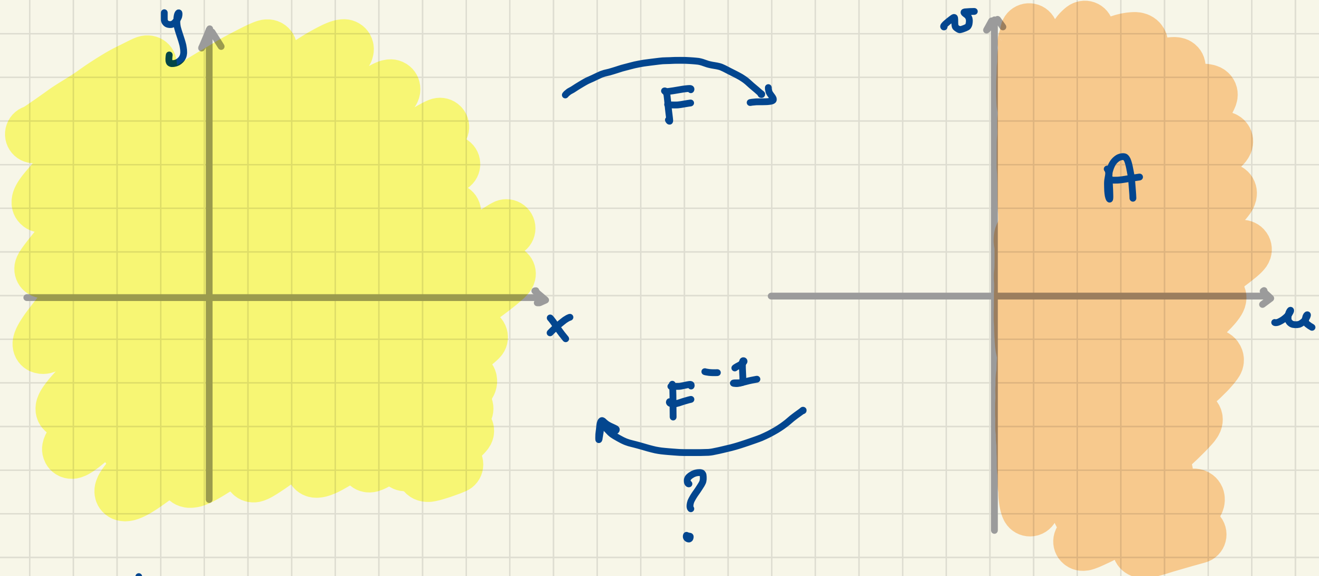
1) $F: \underset{x,y}{\mathbb{R}^2} \to \underset{u,v}{\mathbb{R}^2}$

$F(x,y) = (e^x ; x-y)$

$$\begin{cases} u = e^x \longrightarrow u > 0 \\ v = x-y \longrightarrow v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$F(\mathbb{R}^2) = \{ (u,v) \mid u > 0 ; v \in \mathbb{R} \}.$$

SEMIPIANO



2) F è biunivoca? $\qquad F(x;y) = (e^x;\ x-y)$

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det J_F(x,y) = -e^x \neq 0$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ F è biunivoca $\Rightarrow$ F è invertibile.

3) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (e^x ; x-y)$$

$$\begin{cases} u = e^x \\ v = x-y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \ln u \\ y = \ln u - v \end{cases}$$

$F^{-1}: A \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad A = (0 ; +\infty) \times \mathbb{R}$

$$F^{-1}(u,v) = (\ln u ; \ln u - v)$$

$$J_{F^{-1}}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ \frac{1}{u} & -1 \end{bmatrix}$$

Devo verificare che

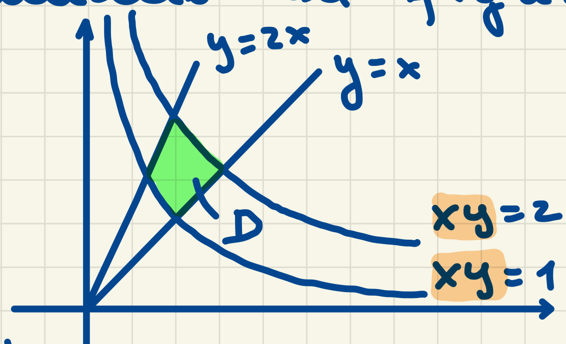
$$[J_F(x,y)]^{-1} = J_{F^{-1}}(u,v)\Big|_{(u,v)=F(x,y)}$$

$$[J_F(x,y)]^{-1} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-e^x}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & e^x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/e^x & 0 \\ 1/e^x & -1 \end{bmatrix} \underset{e^x = u}{=} \begin{bmatrix} 1/u & 0 \\ 1/u & -1 \end{bmatrix} = J_{F^{-1}}(u,v)$$

ESERCIZIO 4

Sia D il dominio in figura



Scrivere una trasformazione regolare di coordi note che trasformi D in un rettangolo.

Sol.

$$1 \leq \underbrace{xy}_{=u} \leq 2$$

$$y = x \longrightarrow \frac{x}{y} = 1$$

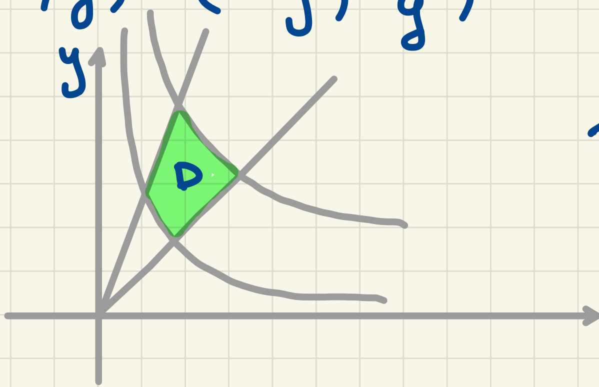
$$y = 2x \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \underbrace{\frac{x}{y}}_{=v} \leq 1$$

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

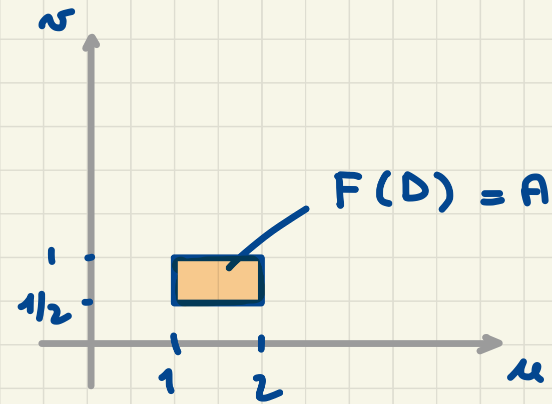
$$F(x,y) = \left(xy\,;\ \frac{x}{y}\right)$$

$y \neq 0$



$\xrightarrow{F}$

$\xleftarrow{F^{-1}(A)}$



$$1 \leq u \leq 2 \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1$$

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix} \qquad \det J_F(x,y) = -\frac{2x}{y} \neq 0$$

$(y \neq 0)$

ESERCIZIO 5. Verificare che la trasformazione $\begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$ trasforma l'interno del quadrato $[0,1]\times[0,1]$ in un triangolo.

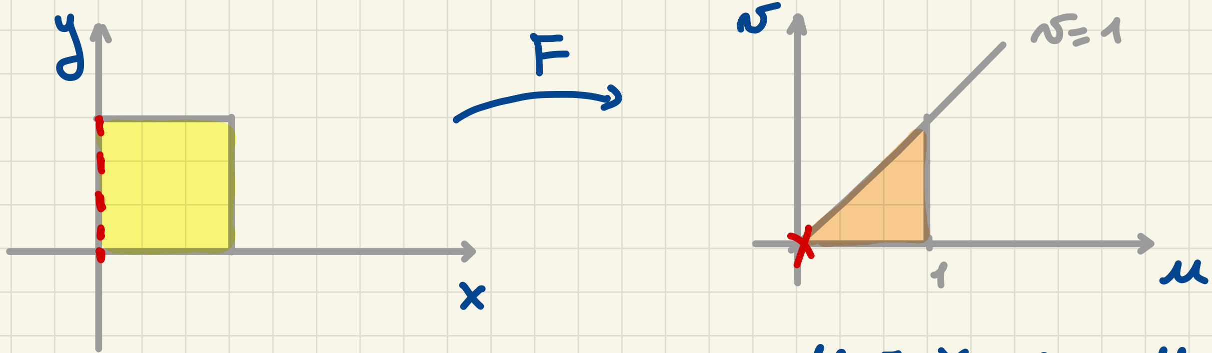
SOL.

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (x; xy)$

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$$

$\det J_F(x,y) = x \neq 0$ se $x \neq 0$



$$u = x \rightarrow u \in (0;1)$$

$$v = xy \rightarrow y = \frac{v}{u} \rightarrow 0 < \frac{v}{u} < 1$$

$$\begin{cases} v < u \\ v > 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESERCIZIO 6. (Modello di Malthus per la dinamica di una popolazione)

Sia $N(t)$ il numero di individui al tempo t, λ numero di nuovi nati per unità di tempo, μ numero di morti per unità di tempo.

In un tempo h sono nati $\lambda h N(t)$ e sono morti $\mu h N(t)$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \frac{\lambda \cancel{h} N(t) - \mu \cancel{h} N(t)}{\cancel{h}}$$

per h→0 si ha (se $N(t)$ è derivabile)

$$\dot{N}(t) = (\lambda-\mu)N(t)$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \underbrace{\lambda-\mu}_{\varepsilon} \quad \text{(potenziale biologico)}$$

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \varepsilon \quad \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\log|N(t)|\right) = \varepsilon$$

$$\log|N(t)| = \varepsilon t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|N(t)| = e^{\varepsilon t}\underbrace{e^{c}}_{= A > 0}$$

La dinamica della popolazione è descritta dalla relazione

$$N(t) = A e^{\varepsilon t}, \quad A \in \mathbb{R}$$

Se $A = N_0 = N(0)$ (condizione iniziale) si ha:

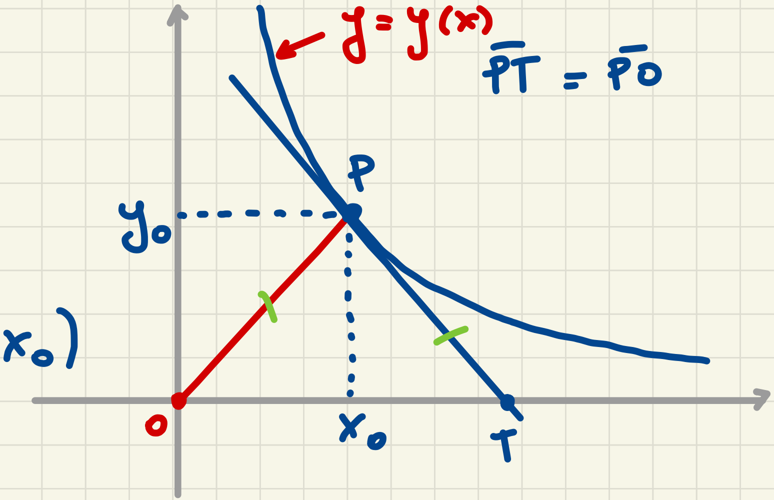
$$\boxed{N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}}$$

Se $\varepsilon > 0$: $\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$ (si moltiplicano)

Se $\varepsilon < 0$: $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 0$ (si estinguono)

ESERCIZIO 7. Si determinino le curve $y = y(x)$ tali che il segmento di tangente che unisce il punto P di tangenza al punto T di intersezione con l'asse x uguaglia il segmento che unisce P all'origine.

SOL.



$P(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$

EQ. TG.: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

$$T \begin{cases} y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

$-y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow -y_0 = xy'(x_0) - x_0 y'(x_0)$

$$x\,y'(x_0) = x_0\,y'(x_0) - y_0$$

$$x = \frac{x_0\,y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)} = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}$$

$$T\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}\,;\ 0\right) \qquad P\left(x_0,\ y_0\right) \qquad O(0,0)$$

$$\overline{PT}^2 = \left(\cancel{x_0} - \cancel{x_0} + \frac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2 + \left(y_0 \cancel{-0}\right)^2 = \frac{y_0^2}{[y'(x_0)]^2} + \cancel{y_0^2}.$$

$$\|$$

$$\overline{PO}^2 = x_0^2 + \cancel{y_0^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{y_0^2}{(y'(x_0))^2} = x_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad [y'(x_0)]^2 = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2$$

$$y'(x) = \pm \frac{y}{x}$$

eq. differenziale le cui soluzioni sono le curve che soddisfano le richieste.

$$y' = \pm \frac{1}{x} \cdot y$$

SOL. COST.: $y = 0$

$$y' = a(y)\, b(x)$$

SOL. COSTANTI: $a(y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x} y \implies \int \frac{dy}{y} = \int \pm \frac{1}{x}\, dx \implies$$

$$\implies \ln|y| = \pm \ln|x| + c \qquad \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\pm \ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c}}_{= K} > 0$$

$$|y| = K e^{\pm \ln|x|}, \qquad K > 0$$

$$y = \pm k\, e^{\pm \ln|x|}$$

$$\Longrightarrow \quad y = A\, e^{\pm \ln|x|}, \quad A \in \mathbb{R}$$

$\oplus$: $y = A|x|$ $\qquad$ $\ominus$: $y = \dfrac{A}{|x|}$

Se $x > 0$ $\quad \left\langle \begin{array}{l} y = Ax \\ y = \dfrac{A}{x} \end{array} \right.$

ESERCIZIO 8. (ESAME) Si consideri l'eq. diff:

$$y' = \frac{y^2+1}{2ty} = f(t,y)$$

1) Stabilire in quale regione del piano (t,y) sono verificate le ipotesi del teore=

una di esistenza e unicità locale per l'eq. data.

2) Determinare le soluzioni nel caso in cui $y(1)=1$, $y(1)=-1$, $y(-1)=1$, $y(-1)=-1$ specificandone gli intervalli massimali di esistenza.

SOL.

1) • $f(t,y)=\dfrac{y^2+1}{2ty}$ è definita e continua per $ty\neq 0$, cioè nei 4 quadranti.

• $f_y(t,y)=\dfrac{y^2-1}{2ty^2}$ $f(t,y)$ è derivabile e la sua derivata è continua nei quattro quadranti.

2) $y' = \dfrac{y^2+1}{2ty} \implies y' = \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{y^2+1}{2y}$ (NO SOL. COST.)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \frac{y^2+1}{2y}$$

$$\int \frac{2y}{y^2+1}\, dy = \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln(y^2+1) = \ln|t| + c$$

$$y^2+1 = k|t| \qquad y^2 = -1 + k|t|$$

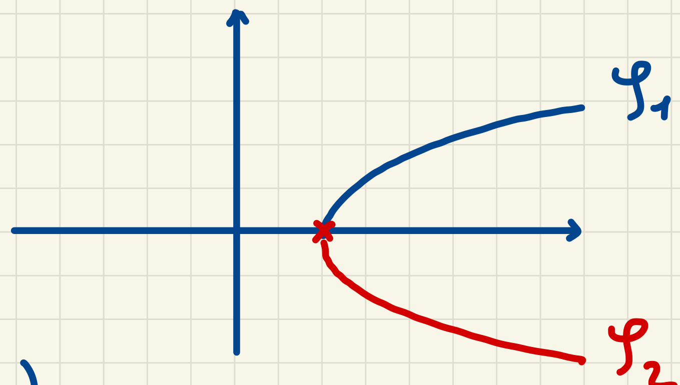
$$y = \pm \sqrt{k|t| - 1}$$

$y(1) = 1$ (I° Q.) $t > 0$

$$y = \sqrt{kt-1}$$

$$1 = y(1) = \sqrt{k-1} \implies k = 2$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2t-1} \qquad I_{MAX} = \left(\tfrac{1}{2}; +\infty\right)$$



$y(1) = -1$ (IV Q.) $t > 0$

$$y = -\sqrt{kt-1} \qquad -1 = y(1) = -\sqrt{k-1}$$

$$1 = k-1 \longrightarrow k = 2$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2t-1} \qquad I_{MAX} = \left(\tfrac{1}{2}; +\infty\right).$$

Analogamente si procede per il 2° e 3° quoziente calcolando la k per $y(-1) = 1$ e $y(-1) = -1$.