Analisi matematica 2		3 febbraio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (x-y)(x^2-1)$$

a) Descrivere *l'insieme di livello* $\{f = 0\}$. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Trovare i punti critici della funzione e studiarne la natura.

c) Trovare i punti critici *vincolati* di f sulla curva di equazione $x^2 - x + y = 1$.

2.

a) Stabilire in quali regioni del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = \frac{t-1}{y}$$

Integrare l'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(0) = 1, \qquad \psi(1) = 1$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = 1 - \cos t$$

Esistono soluzioni periodiche ?

3.

a) Calcolare direttamente ed usando il teorema della divergenza il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie del cilindro:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq 1; \quad 0 \leq x \leq 2\}$$

b) Calcolare il volume della regione di spazio delimitata dalle superfici di equazioni

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad z = 3 - x^2 - y^2$$

4.

a) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(x-1)^n$$

Detta $f(x)$ la somma della serie, spiegare perchè la funzione f ha derivate di tutti gli ordini nell'intervallo di convergenza; calcolare $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$.

b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$ e tale che

$$f(x) = |x| \qquad \text{per} \quad x \in (-\pi, \pi].$$

- Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
- Dimostrare che la serie di Fourier associata converge a $f(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ e che ha la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Calcolare i coefficienti a_0 e a_1.

SOLUZIONI

1.

a) L'insieme di livello zero è l'unione delle 3 rette di equazione $x = 1$, $x = -1$ e $y = x$. Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e connesso (due punti qualsiasi dell'insieme sono collegati da un segmento o da una spezzata contenuta nell'insieme).

b) Derivate parziali:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2xy - 1; \quad f_y(x, y) = 1 - x^2$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 1 = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Si trovano 2 soluzioni:

$$x = 1,\ y = 1; \qquad x = -1,\ y = -1$$

Derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 2y; \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2x; \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

Il determinante della matrice Hessiana vale $\det H_f(x, y) = -4x^2$ ed è uguale a $-4 < 0$ nei due punti critici, che sono dunque entrambi *punti di sella*.

c) I punti critici vincolati si possono trovare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, o più semplicemente osservando che il vincolo è esplicitabile (rispetto a y) e che la f *ristretta al vincolo* è la funzione della sola variabile x :

$$x \mapsto (x^2 - 1)^2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Questa funzione ha tre punti stazionari: $x = 0$ (massimo locale) e $x \pm 1$ (minimi assoluti). Dunque *punti critici vincolati di f* sono $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

2.

a) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = \frac{t-1}{y}$ al secondo membro è definita e continua nei due sottoinsiemi aperti del piano

$$D_1 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\} \text{ e } D_2 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < 0\}$$

La derivata parziale $f_y(t,y) = -\frac{t-1}{y^2}$ è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $y_0 \neq 0$.
Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int y\,dy = \int (t-1)\,dt + C,$$

da cui si ricava la soluzione in forma implicita $y^2/2 = t^2/2 - t + C$; ridefinendo la costante arbitraria otteniamo

$$y^2 - t^2 + 2t = C\,,$$

che rappresenta una famiglia di iperboli nel piano (t,y) con centro $(1,0)$ e asintoti $y = \pm(t-1)$.
Risolvendo rispetto a y e imponendo le condizioni si trovano le soluzioni

$$\Phi(t) = 1 - t; \qquad \psi(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

b) L'equazione omogenea associata è

$$z'' + 2z' + z = 0$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha la radice doppia $\lambda = -1$. L'integrale generale si scrive allora

$$z(t) = C_1\,e^{-t} + C_2\,t\,e^{-t}$$

Applicando il metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\Psi(t) = A + B\sin t + C\cos t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = 1, \qquad B = -1/2, \qquad C = 0.$$

L'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1\,e^{-t} + C_2\,t\,e^{-t} + 1 - \frac{1}{2}\sin t$$

L'unica soluzione periodica è $\Psi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sin t$.

3.

a) La superfice del cilindro è l'unione di 3 superfici regolari: la *superfice laterale*

$$S \equiv \{(x, y, z) \,|\, y^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq x \leq 2\}$$

e le due basi

$$D_1 \equiv \{(0, y, z) \,|\, y^2 + z^2 \leq 1\}, \qquad D_2 \equiv \{(2, y, z) \,|\, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Usando la parametrizzazione

$$x = u, \quad y = \cos v, \quad z = \sin v, \qquad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

la normale esterna *sulla superfice laterale* S è

$$\mathbf{n}_e = \cos v\,\mathbf{j} + \sin v\,\mathbf{k}$$

Osserviamo che, su S,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

per cui abbiamo subito

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int\int_S dS = |S| = 4\pi$$

Sulle due basi abbiamo

$$\mathbf{n}_e = -\mathbf{i} \quad \text{su } D_1, \qquad \mathbf{n}_e = \mathbf{i} \quad \text{su } D_2$$

e

$$\mathbf{F}(0, y, z) = y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad \text{su } D_1 \qquad \mathbf{F}(2, y, z) = -2\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad \text{su } D_2$$

Dunque:

$$\int\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = 0;$$

$$\int\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int\int_{y^2+z^2 \leq 1} -2\, dydz = -2\pi;$$

In definitiva:

$$\int\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS + \int\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS + \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = 0 - 2\pi + 4\pi = 2\pi$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \partial_x(-x) + \partial_y(y) + \partial_z(z) = 1$$

Abbiamo allora

$$\int\int\int_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \int\int\int_E dxdydz = |E| = 2\pi$$

b) Ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, le due superfici $z = 2\rho$, e $z = 3-\rho^2$, si intersecano per ρ soluzione positiva dell'equazione

$$2\rho = 3 - \rho^2$$

ovvero per $\rho = 1$. Il volume cercato è compreso tra le porzioni del paraboloide e del cono che si proiettano sul cerchio unitario $B \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$ del piano di base. Integrando per fili si trova:

$$V = \int\int_B \Big(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{3-x^2-y^2} dz\Big)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3-\rho^2-2\rho)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\pi\Big[\frac{3}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{2}{3}\rho^3\Big]_0^1 = \frac{7}{6}\,\pi$$

4.

a) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza 1, per cui converge (assolutamente) per $0 < x < 2$. Per $x = 0$ e $x = 2$ abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

che non convergono perchè il termine generale non tende a zero. Detta $f(x)$ la somma della serie, dalla relazione $f^{(k)}(1) = k! \frac{k}{k+1}$, $k = 0, 1, 2, ...$, abbiamo

$$f(1) = 0, \qquad f'(1) = 1/2, \qquad f''(1) = 4/3.$$

b) La funzione f é continua e regolare a tratti. Per il teorema di convergenza, la serie di Fourier associata converge in ogni punto a $f(x)$; inoltre, la funzione é pari, per cui i coefficienti di Fourier b_n sono nulli. Infine

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi;$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \, dx = -\frac{4}{\pi}.$$