1) Trovare in quale intervallo dell'asse reale è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

Verificare che in tale intervallo la serie è derivabile termine a termine. Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $f'(x)$.

2) Trovare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

3) Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor centrato nell'origine delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin x/x\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}; \quad g(x) = \frac{1}{1-x^2}; \quad h(x) = a^x \;\; (a > 0)$$

Precisare il raggio di convergenza delle serie trovate.

4) Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione 2π-periodica f tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Spiegare perché la serie trovata converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5) Determinare, *senza calcolare integrali*, lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = (1 + \sin x + 2\cos x)^2$$

Soluzioni

1) Per $x > 0$ il termine generale della serie e^{nx}/n tende a $+\infty$, dunque la serie diverge. Per $x = 0$ abbiamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Per $x < 0$ la serie converge, come si vede applicando il criterio della radice oppure il criterio del confronto (osservare che $e^{nx}/n \leq e^{nx} = (e^x)^n$, con $e^x < 1$ se $x < 0$).
Dunque la serie converge per $x \in (-\infty, 0)$. La serie delle derivate si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$$

Fissato $\epsilon > 0$ abbiamo

$$e^{nx} \leq e^{-n\epsilon}$$

per ogni $x \in (-\infty, -\epsilon]$. Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon} < \infty$$

la serie delle derivate converge totalmente (quindi uniformemente) *in ogni intervallo* $(-\infty, -\epsilon]$, con $\epsilon > 0$. Possiamo allora applicare in questi intervalli il teorema di derivazione per serie. Per l'arbitrarietà di ϵ, ricaviamo che per ogni $x \in (-\infty, 0)$ vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = \frac{1}{1-e^x} - 1 = \frac{e^x}{1-e^x}$$

2) Considerando la serie dei moduli

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$$

si ricava che la serie data converge assolutamente (e dunque converge) per $|z| < 1$, ovvero all'interno del cerchio unitario centrato nell'origine del piano complesso. Nei punti esterni al cerchio o sulla circonferenza, la serie non converge perchè il termine generale z^n non tende a zero.

3) Dallo sviluppo di $\sin x$ ricaviamo, per ogni $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

La serie converge a $f(x)$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ (raggio di convergenza infinito).

Lo sviluppo di $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ si può ricavare osservando che è la somma di una serie geometrica di ragione $q = x^2$. Dunque:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

La serie converge per $x^2 < 1$, ovvero per $x \in (-1, 1)$. Il raggio di convergenza è $R = 1$.

Lo sviluppo di $h(x) = a^x$ si può ricavare direttamente calcolando le derivate oppure dallo sviluppo dell'esponenziale:

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n,$$

Applicando il criterio del rapporto, si trova

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{n+1} = 0$$

e quindi $R = +\infty$.

4) Calcoliamo i coefficienti di Fourier integrando sull'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2} \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0 \qquad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi n} \big[-\cos(nx) \big]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \qquad n = 1, 2, ...$$

Osserviamo che

$$b_{2k} = 0 \qquad b_{2k+1} = \frac{2}{\pi(2k+1)} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

La serie di Fourier associata si scrive:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)x\big)$$

La serie converge per ogni x perchè la funzione f è regolare a tratti e quindi si applica il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Nei punti di discontinuità di f la somma della serie vale $1/2$.

5) Sviluppando il quadrato e usando note identità trigonometriche abbiamo:

$$(1 + \sin x + 2\cos x)^2 = 1 + \sin^2 x + 4\cos^2 x + 2\sin x + 4\cos x + 4 \sin x \cos x$$

$$= 2 + 3\cos^2 x + 2\sin x + 4\cos x + 2\sin(2x)$$

$$= 2 + 3\frac{1 + \cos(2x)}{2} + 2\sin x + 4\cos x + 2\sin(2x)$$

$$= 7/2 + 4\cos x + 2\sin x + 3/2\cos(2x) + 2\sin(2x)$$

Dunque, la funzione f è in realtà un polinomio trigonometrico e i coefficienti ottenuti sono (per l'unicità) i suoi coefficienti di Fourier per $n \leq 2$. Tutti gli altri coefficienti dello sviluppo di Fourier sono nulli.