Curve

Funzioni a valori vettoriali: limiti e continuità

Dato $D \subset \mathbb{R}$, una funzione $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione

$$t \mapsto \mathbf{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)\right),$$

dove f_i, $i = 1, 2, ..., m$ sono funzioni di variabile reale definite sul dominio comune D.

Sia t_0 un punto di accumulazione per D e $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m))$ un vettore di $\mathbb{R}^m$.

Definizione. Si dice che

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{l}$$

se

$$\lim_{t \to t_0} \left|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\right| = 0\,.$$

In altri termini, $\mathbf{f}(t)$ tende a $\mathbf{l}$ (per $t \to t_0$) se la *distanza* tra $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{l}$ tende a zero.

Proposizione

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{l}$$

se e solo se

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i \qquad \forall\, i = 1, 2, ..., m\,.$$

Dimostrazione :

Osserviamo che $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}| \to 0$ equivale a $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}|^2 \to 0$. Scrivendo per esteso

$$\left|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|f_i(t) - l_i\right|^2$$

si vede che il termine a sinistra tende a zero se e solo se *ogni* termine della somma a destra tende a zero.

Dunque, per $t \to t_0$,

$$\left|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\right| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_i(t) \to l_i \quad \forall\, i = 1, 2, ..., m\,,$$

da cui la tesi.

Le proprietà dei limiti (unicità, limite della somma, ecc.) seguono dalle analoghe proprietà per le componenti di $\mathbf{f}(t)$.

Continuità. Si dice che $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ è continua in $t_0 \in D$ se vale

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)\,.$$

Dalla proposizione segue immediatamente:

$\mathbf{f}$ è continua in t_0 se e solo se le f_i sono continue in t_0 per ogni $i = 1, 2, ..., m$.

Se una funzione e continua in tutti i punti di D si dice che è continua in D.

Curve

Definizione. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un *intervallo*. Si dice curva in $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$) una funzione

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m, \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t)$$

continua in I.

L'insieme

$$\gamma \equiv \Big\{ \mathbf{r}(t) \,|\, t \in I \Big\}$$

si chiama *sostegno* della curva.

Se $m = 2, 3$: curve nel piano e nello spazio.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in I\,.$$

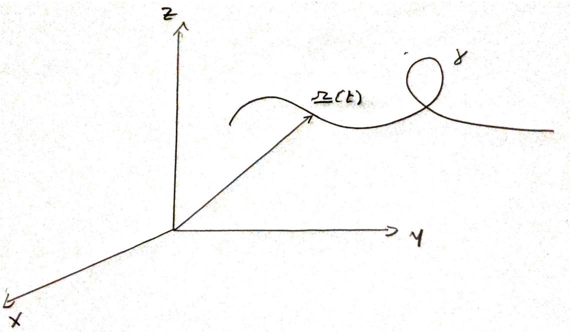
Equazioni parametriche della curva:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad\qquad t \in I\,. \\ z = z(t) \end{cases}$$

In modo informale, si parla di *curva* γ *di equazione* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (ma non confondere il sostegno con la curva).

Interpretazione cinematica:

$$t = \text{ tempo}, \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) = \text{ legge oraria}, \qquad \gamma = \text{ traiettoria}$$



Esempi

1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v}\, t, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ sono assegnati vettori, è (una parametrizzazione di) una retta passante per il punto $\mathbf{r_0}$ e diretta come $\mathbf{v}$.

In componenti:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + v_1\, t)\,\mathbf{i} + (y_0 + v_2\, t)\,\mathbf{j} + (z_0 + v_3\, t)\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1\, t \\ y = y_0 + v_2\, t \\ z = z_0 + v_3\, t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Se $t \in [a, b]$: segmento che unisce i punti $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$.

2. La funzione

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in [0, 2\pi] \quad (R > 0)\,,$$

descrive una *circonferenza* di raggio R e centro nell'origine (del piano) percorsa una volta:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = R\,\mathbf{i} = (R, 0)\,.$$

Equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Sostegno (equazione cartesiana):

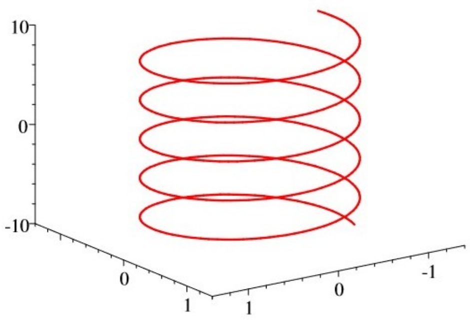
$$x^2 + y^2 = R^2\,.$$

3. La curva

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} + c\,t\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in \mathbb{R} \quad (R > 0,\; c \neq 0)\,,$$

è un'*elica cilindrica* (infinita) che si avvolge sulla superficie cilindrica definita da:

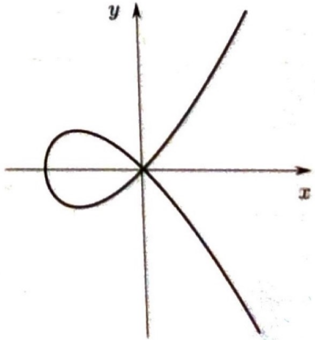
$$\{\,(x, y, z)\,|\,x^2 + y^2 = R^2\,\}\,.$$



4. La curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = t(t-1)\,\mathbf{i} + t(t-1)(2t-1)\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

(folium) passa per l'origine nei due 'istanti' $t = 0$ e $t = 1$.



Definizioni

- Una curva $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$, si dice *semplice* se $\mathbf{r}$ è iniettiva, cioè se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.
- Se $I = [a, b]$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, la curva si dice *chiusa*. Se una curva è chiusa e $\mathbf{r}$ è iniettiva in $[a, b)$, la curva si dice *semplice e chiusa*.
- Una curva si dice *piana* se il sostegno γ è contenuto in un piano.

<u>Esercizio</u>: classificare, in base alle definizioni date, le curve degli esempi $1 - 4$.

Una curva chiusa, semplice e piana si chiama *curva di Jordan*.

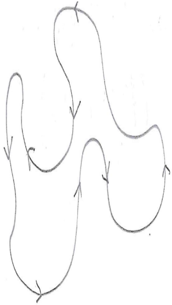
Una curva di Jordan divide il piano in due componenti connesse, una limitata (*parte interna*) e una illimitata (parte esterna).

(proprietà intuitiva, ma dimostrazione non elementare).

Orientazione

Una curva semplice determina un'orientazione del proprio sostegno, corrispondente al verso di percorrenza al crescere di $t \in I$:
se $t_1 < t_2$, $\mathbf{r}(t_1)$ precede $\mathbf{r}(t_2)$ lungo la curva.

Una curva di Jordan si dice *orientata positivamente* se percorrendo il suo sostegno nel verso delle t crescenti la parte interna rimane sempre sulla sinistra.



Curva di Jordan orientata positivamente.

Esempi

L' orientazione di una retta parametrica (esempio 1) è definita dal verso del vettore **v**.

La circonferenza di equazioni parametriche (esempio 2)

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

viene percorsa in senso antiorario al crescere di t, dunque è una *curva di Jordan orientata positivamente*.

La curva

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} - R\sin t\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

percorre la stessa circonferenza, ma in senso orario e quindi con orientazione *opposta* (negativa).

Esercizio

Scrivere una parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ del segmento avente per estremi l'origine del piano ed il punto $(1, 2)$ e tale che $\mathbf{r}(0) = (1, 2)$, $\mathbf{r}(1) = (0, 0)$.

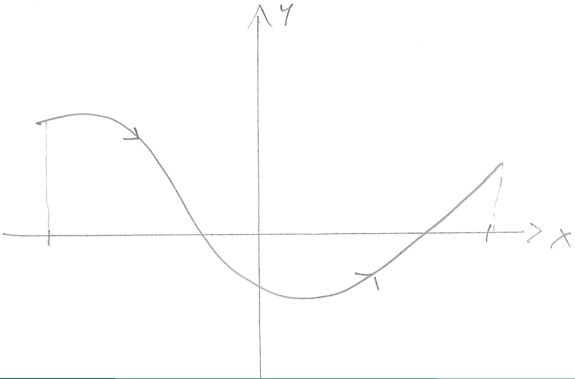
Curve cartesiane

Se f è continua in $I \subset \mathbb{R}$, la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in I\,,$$

si dice *curva cartesiana*.

Una curva cartesiana è semplice e piana (e mai chiusa). Il sostegno di una curva cartesiana è il grafico della funzione f, il verso di percorrenza quello delle $x\,(= t)$ crescenti.



Moto circolare uniforme

Dati $R > 0$ e $\omega > 0$, definiamo

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in [0, T]\,,$$

dove $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ($\omega =$ velocità angolare, $T =$ periodo).

Per diversi ω: stesso sostegno (circonferenza di raggio R) percorso una volta in senso positivo, ma in *diversi* intervalli di tempo.

Notare che la curva

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\,\mathbf{j}\,, \qquad t \in \big[0, \frac{3}{2}T\big]\,,$$

(circonferenza percorsa una volta e mezza) pur avendo lo stesso sostegno non è chiusa né semplice.

Problema

Dati $R > 0$ e $\omega > 0$, verificare che la curva

$$\mathbf{r}(t) = R\,t\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + R\,t\sin(\omega t)\,\mathbf{j} + R\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in [0,1]\,,$$

si avvolge (con $\omega/2\pi$ 'spire') sulla *superficie della semisfera* di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \qquad z \geq 0\,.$$

Reichstag dome (Foster&Partners, Berlino, 1999)

Curve regolari

Derivate di funzioni a valori vettoriali.

<u>Definizione</u>. Si dice che $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$ è derivabile in $t_0 \in I$ se esiste finito il

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \big[\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)\big] \equiv \mathbf{r}'(t_0)\,.$$

Se per ogni $t \in I$ esiste $\mathbf{r}'(t)$ ed è *continua* in I, si scrive $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(I)$.

Le componenti di $\mathbf{r}'$ si calcolano derivando le componenti di $\mathbf{r}$ (segue dalla definizione). Per le curve nello spazio:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in I\,.$$

Significato del vettore $\mathbf{r}'(t)$ (se $\neq \mathbf{0}$):

Vettore tangente al sostegno nel punto $\mathbf{r}(t)$ (geometrico);

Vettore velocità del punto che si muove lungo la traiettoria (cinematico).

Definizione. Una curva $\mathbf{r}(t)$ è **regolare** se $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(I)$ e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.

Si può anche dire che una curva è regolare se $v(t) \equiv |\mathbf{r}'(t)| > 0$ per ogni $t \in I$; $v(t)$ si chiama *velocità scalare*.

In ogni punto di una curva regolare è definito il **versore tangente**

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{r}'(t)\,, \qquad |\mathbf{T}(t)| = 1\,.$$

Esempi

Le curve degli esempi $1 - 4$ sono tutte regolari. Verificarlo calcolando i vettori tangenti.

Vettore velocità nel moto circolare uniforme $[\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\,\mathbf{j}]$:

$$\mathbf{r}'(t) = -\omega R\sin(\omega t)\,\mathbf{i} + \omega R\cos(\omega t)\,\mathbf{j}\,.$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \omega R > 0, \qquad \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\omega R}\,\mathbf{r}'(t) = -\sin(\omega t)\,\mathbf{i} + \cos(\omega t)\,\mathbf{j}\,.$$

Una curva cartesiana $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}\,,\ t \in I$, è sempre regolare se $f \in \mathcal{C}^1(I)$; infatti,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}\,, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2} > 0\,.$$

La curva

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}\,, t \in \mathbb{R}\,,$$

non è regolare:

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}\,, \quad \text{ma} \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}\,.$$

Problema

Disegnare il sostegno della curva nel piano xy e verificare che presenta una cuspide nell'origine.

Osservazione

la curva $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i}\,, \quad t \in [-1, 1]\,,$ ha come sostegno l'intervallo $[0, 1]$ dell'asse x, ma non è regolare poiché il vettore $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i}$ è nullo per $t = 0$.

Curve regolari a tratti

Una curva $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$ si dice regolare a tratti se I si può suddividere in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali $\mathbf{r}$ è regolare.

Esempio

$$\mathbf{r}(t) = |t|\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

è regolare a tratti. Infatti, $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty) = I_1 \cup I_2$ e

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} -t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, & t \in I_1; \\ t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, & t \in I_2. \end{cases}$$

(disegnare il sostegno della curva nel piano cartesiano).

In generale, è regolare a tratti l'*unione di curve regolari* del tipo

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & t \in [a, b]; \\ \mathbf{r}_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases} \qquad (\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b))$$

Disegnare la curva nel caso

$$\mathbf{r}_1(t) = t\,\mathbf{i}\,,\ t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + (t-1)\,\mathbf{j}\,,\ t \in [1, 2].$$

Cambio di parametro

Due curve regolari

$$\mathbf{r}(t)\,,\ t \in I, \qquad \tilde{\mathbf{r}}(\tau)\,,\ \tau \in \tilde{I},$$

si dicono *equivalenti* se esiste una funzione biunivoca $\varphi : \tilde{I} \to I$ di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che:

$$\varphi'(\tau) > 0 \quad \forall\, \tau \in \tilde{I} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(\varphi(\tau))$$

$t = \varphi(\tau)$: *cambio di parametrizzazione* .

Se $\varphi'(\tau) < 0 \quad \forall\, \tau \in \tilde{I}$, si parla di *curve opposte*.

Curve equivalenti e opposte hanno lo stesso sostegno, con orientazioni rispettivamente uguali o opposte.

Esempi

Se $\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, il cambio di parametro

$$t = \omega\tau, \qquad \tau \in [0, 2\pi/\omega]\,,$$

corrisponde a un cambiamento di velocità angolare nel moto circolare:

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = R\cos(\omega\tau)\,\mathbf{i} + R\sin(\omega\tau)\,\mathbf{j}$$

Se invece scegliamo $t = 2\pi - \tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$, abbiamo la curva opposta

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = R\cos(2\pi - \tau)\,\mathbf{i} + R\sin(2\pi - \tau)\,\mathbf{j} = R\cos\tau\,\mathbf{i} - R\sin\tau\,\mathbf{j}$$

Lunghezza di curve regolari

Si può definire la lunghezza L di un arco di curva come l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali "inscritte" alla curva. Se tale estremo superiore è finito, si dice che la curva è rettificabile.

Per le curve *regolari*, vale il

Teorema

Se $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ è una curva regolare, allora è rettificabile e vale

$$L = \int_a^b \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt$$

Interpretazione cinematica: lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $[a.b]$ è l'integrale della velocità (scalare) $v(t)$ $(= |\mathbf{r}'(t)|)$.

Se $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}$:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

Osservazioni

- Non confondere la lunghezza di una curva con la lunghezza del sostegno (potrebbe essere percorso più volte);
- Curve equivalenti e curve opposte hanno la stessa lunghezza [vedi problema 1 nel file *Esercizi e problemi svolti sulle curve* su BeeP];
- Se la curva è regolare a tratti, la lunghezza è la somma degli integrali di $|\mathbf{r}'|$ su tutti i sottointervalli in cui $\mathbf{r}$ è regolare.

Esempi

Arco di elica: $\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} + c\,t\,\mathbf{k},\ \ t \in [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{r}'(t) = -R\sin t\,\mathbf{i} + R\cos t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}\,,$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{R^2 + c^2}\,.$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + c^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2 + c^2}\,.$$

Lunghezza curve cartesiane

Se $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}\,,\ t \in [a,b]$, $\mathbf{r}'(t) = \ \mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$$

Si può anche dire che L è la *lunghezza del grafico* di $y = f(x)$.

Esercizio. Calcolare la lunghezza del grafico di $y = \cosh x$ (catenaria) nell'intervallo $-1 \le x \le 1$.

Soluzione:

$$f(x) = \cosh x\,, \qquad f'(x) = \sinh x\,;$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,dx = \int_{-1}^{1} \cosh x\,dx$$

$$= \big[\sinh x\big]_{-1}^{1} = 2\sinh 1 = e - \frac{1}{e}\,.$$

Per ogni curva regolare è definita la funzione

$$s(t) = \int_a^t \left|\mathbf{r}'(\tau)\right| d\tau$$

Lunghezza dell'arco percorso nell'intervallo $[a, t]$. Proprietà:

$$0 \leq s \leq L, \quad s(t) \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ } e \text{ } s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0\,.$$

Dunque: $t \mapsto s(t)$ strettamente crescente $\Rightarrow$ esiste l'inversa $t = t(s)$.

Osservare che

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = v(t) \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} \quad \big(t = t(s)\big)\,.$$

(derivata della funzione inversa nella notazione di Leibniz).

s è il parametro ascissa curvilinea (lunghezza d'arco)

Cambio di parametro: $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(t(s)) \Rightarrow$ Curva equivalente.

Vettore tangente:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{v(t)}\mathbf{r}'(t)\,.$$

Quindi:

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds}\right| = \frac{1}{v(t)}\,|\mathbf{r}'(t)| = \frac{v(t)}{v(t)} = 1\,.$$

Il simbolo

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt = v(t)\,dt$$

si chiama *lunghezza d'arco elementare*.

Esempio

$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} + c\,t\,\mathbf{k},\ \ t \in [0, 2\pi]\,;\qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{R^2 + c^2}\,.$

$$s(t) = \sqrt{R^2 + c^2}\,t\,,\qquad t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\,.$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\mathbf{i} + R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{R^2 + c^2}}\,s\,\mathbf{k}\,;$$

$$s \in [0, 2\pi\sqrt{R^2 + c^2}].$$

Problema

Calcolare l'ascissa curvilinea per la *spirale logaritmica*

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\,\mathbf{j}\,,\qquad t \in [0, +\infty)\,,$$

e trovare $\tilde{\mathbf{r}}(s)$.

Curvatura e normale principale

Proposizione.

Sia $\mathbf{u} : I \to \mathbb{R}^3$ derivabile e tale che $|\mathbf{u}(t)| = c$ per ogni $t \in I$.
Allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

Dimostrazione: Derivando la relazione

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = c^2 \,,$$

abbiamo

$$2u_1 u_1' + 2u_2 u_2' + 2u_3 u_3' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0 \,,$$

da cui la tesi.

Data $s \mapsto \mathbf{r}(s)$ di classe $\mathcal{C}^2$, con s ascissa curvilinea, $\mathbf{T}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e $\left|\mathbf{T}(s)\right| = 1 \ \forall\, s$.
Per la precedente proposizione:

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\,\mathbf{T}}{ds} = 0 \,.$$

Definizioni.

Si chiama **curvatura** (scalare) la funzione

$$k(s) = \left|\frac{d\,\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\,\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

Si chiama **normale principale** il *versore*

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{k(s)}\frac{d\,\mathbf{T}}{ds}\,.$$

I versori **T** e **N** sono ortogonali e generano il *piano osculatore*, perpendicolare al versore **binormale** $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$.

La grandezza $\rho(s) = 1/k(s)$ si dice *raggio di curvatura*. Osservare che **T** è adimensionale, per cui ρ ha le dimensioni di una lunghezza.

Esercizio. Verificare che la curvatura dell'elica (parametrizzata con l'ascissa curvilinea) è costante e vale $R/(R^2 + c^2)$. Calcolare la normale principale.

Curvatura e normale con parametro arbitrario

Dalla relazione

$$\frac{d\,\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\,\mathbf{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v(t)\,\frac{d\,\mathbf{T}}{ds}\,,$$

si ottiene (prendere i moduli)

$$|\mathbf{T}'(t)| = v(t)\,k(t) \quad \Leftrightarrow \quad k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{v(t)}$$

dove $k(t) = \left|\frac{d\,\mathbf{T}}{ds}\right|$ in $s = s(t)\,,$ e $\mathbf{T}' = \dfrac{d\,\mathbf{T}}{dt}$.

Inoltre

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{|\mathbf{T}'(t)|}\,\mathbf{T}'(t)\,.$$

e

$$\mathbf{T}'(t) = v(t)k(t)\mathbf{N}(t)$$

Accelerazione tangenziale e normale

Se $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ è di classe $\mathcal{C}^2$, è definito il *vettore accelerazione* $\mathbf{r}''(t)$.
Vale la decomposizione:

$$\mathbf{r}''(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + v(t)^2 k(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Dimostrazione:
derivando l'equazione $\mathbf{r}'(t) = v(t)\,\mathbf{T}(t)$ si ottiene,

$$\mathbf{r}''(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + v(t)\,\mathbf{T}'(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + v(t) v(t) k(t)\,\mathbf{N}(t)\,.$$

Calcolo della curvatura. Osservando che $\mathbf{r}'$ è parallelo a $\mathbf{T}$ e ortogonale a $\mathbf{N}$:

$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = v(t)^2 k(t)\,|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{N}(t)| = v(t)^3 k(t)\,.$$

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{v(t)^3}$$

Casi particolari.

Curve nel piano:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \big(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\big)\,\mathbf{k}$$

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}$$

Curve cartesiane:

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}\,,$$

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{[1 + f'(t)^2]^{3/2}}$$

Esempi

Curvatura della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

$$k(t) = \frac{2|a|}{[1 + (2at + b)^2]^{3/2}}$$

Massima nel vertice.

Curvatura dell'ellisse

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

$$k(t) = \frac{|-a\sin t(-b\sin t) - (-a\cos t)b\cos t|}{[a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t]^{3/2}} = \frac{|ab|}{[a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t]^{3/2}}.$$

Assumendo $a > b > 0$, trovare i punti dove k è massima e dove è minima.