Analisi Funzionale

NORMA

APPLICAZIONE $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$

- $\|\underline{v}\| \geq 0$ POSITIVITÀ
- $\|\underline{v}\| = 0 \longleftrightarrow \underline{v} = 0$ ZERO
- $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\|$ OMOGENEITÀ
- $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$ TRIANGOLARE

ESEMPI

$$x_p = \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^p \right]^{1/p}$$

$$f_p = \left[\int_a^b |f(x)^p \right]^{1/p}$$

NORMA - P

$$x_\infty = \max_{i \in 1,N} \{ x_i \}$$

$$f_\infty = \max_{x \in a,b} \{ f(x) \}$$

NORMA DEL MASSIMO

DISTANZA

$d(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$

- $d(\underline{u}, \underline{v}) \geq 0$
- $d(\underline{u}, \underline{v}) = 0 \longleftrightarrow \underline{u} = \underline{v}$
- $d(\underline{u}, \underline{v}) = d(\underline{v}, \underline{u})$
- $d(\underline{u}, \underline{v}) \leq d(\underline{u}, \underline{w}) + d(\underline{w}, \underline{v})$

SFERA

$\mathbb{B}_R(\underline{v}_0) = \{ \underline{v} \in V : \underline{v} - \underline{v}_0 < R \}$

LIMITATEZZA

E LIM. $\longleftrightarrow \exists R : E \subseteq \mathbb{B}_R(0) \longleftrightarrow \exists R : \underline{v} \leq R \quad \forall v \in E$

INSIEMI

INTERNO $\mathring{E} = \{ \underline{v} \in V : \exists U(\underline{v}) \subseteq E \}$

CHIUSURA $\bar{E} = \{ \underline{v} \in V : \forall U(\underline{v}) \quad U(\underline{v}) \cap E \neq 0 \}$

FRONTIERA $\partial E = E \setminus \mathring{E}$

ACCOMULAZIONE $\mathrm{ACC}(E) = \{ \underline{v} \in V : \forall U(\underline{v}) \quad U(\underline{v}) \cap (E \setminus \{\underline{v}\}) \neq 0 \}$

SUCCESSIONI (FUNZIONI)

$\{ \underline{v}_N \}_{N \in \mathbb{N}} \subseteq V \qquad f : \mathbb{N} \to V$

$\underline{v}_N \to \underline{v} \longleftrightarrow \underline{v}_N - \underline{v}_0 \xrightarrow{N \to \infty} 0$

SERIE

$\sum_0^\infty \underline{v}_N = \left(\lim_{N \to \infty} \right) \sum_0^N \underline{v}_N$ SUCCESSIONI DI SOMME PARZIALI

NORME EQUIVALENTI

$\cdot_1$ EQUIVALENTE $\cdot_2$ IN V SE:

- $\exists c_1 : \cdot_1 \leq c_1 \cdot_2$
- $\exists c_2 : \cdot_2 \leq c_2 \cdot_1$

SE $\dim(V) < \infty \to$ TUTTE LE NORME EQ.

OPERATORI LINEARI

$(V, \cdot) \quad (W, \cdot)$ SPAZI VETTORIALI NORMATI

$T : V \to W \qquad T(\lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2}) = \lambda_1 T(\underline{v_1}) + \lambda_2 T(\underline{v_2})$

SE LINEARE $\to$ CONTINUO = LIMITATO

SUCCESSIONE CAUCHY

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \underline{v}_i - \underline{v}_s < \varepsilon \quad \forall i, s > N$

CONVERGENTE $\to$ DI CAUCHY

CAUCHY CONVERGE SE DIMENSIONE FINITA

SPAZIO COMPLETO (BANACH)

SE TUTTE LE S. DI CAUCHY CONVERGONO

SPAZI DI CONTINUITÀ

$f \in C^0(\Omega)$ CONTINUA

$f \in C^k(\Omega)$ DERIVABILE CON CONTINUITÀ FINO ALLA K-ESIMA DERIVATA

$f \in C^\infty(\Omega)$ SEMPRE DERIVABILE

$C^k = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ CONTINUE} : D^\alpha f \in C^0(\Omega), \forall \alpha \leq k \}$

$C^k(\Omega)$ È DI **BANACH** CON $f_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\infty$

σ ALGEBRA

INSIEME $\mathcal{X}$, SOTTOINSIEMI $\mathcal{M}$

- $\emptyset \in \mathcal{M}$ VUOTO
- $A \in \mathcal{M} \to A^c \in \mathcal{M}$ COMPLEMENTARI
- $A_i \in \mathcal{M} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ UNIONE NUMERABILE

MISURA

$\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ FUNZIONE SU INSIEMI MISURABILI $(\mathcal{M})$

- $\mu \neq \infty$
- $A_i \in \mathcal{M}$ DISGIUNTI $\to \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

SPAZIO MISURABILE $(X, \mathcal{M})$

SPAZIO DI MISURA $(X, \mathcal{M}, \mu)$

TEOREMA

IN $\mathbb{R}^N$ $\exists \mathcal{M}, \mu$ TALI CHE:

- $\mu\left(\prod_i^N (a_i, b_i) \right) = \prod_i^N (b_i - a_i)$
- μ INVARIANTE TRASLAZIONI
- μ COMPLETA $E \in \mathcal{M} \to \mu(E) = 0$

MISURABILE

E INSIEME MISURABILE $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

f MISURABILE SE $\forall A \in \mathbb{R}$ APERTO $f^{-1}(A)$ MISURABILE

SONO MISURABILI: CONTINUE, SOMME, PRODOTTI, LIMITI ED ESTREMI

INTEGRALE DI LEBESGUE

- SEMPLICI

  $s = \sum_i^N \alpha_i \chi_{E_i} \qquad E_i \in \mathbb{R}^N$ MISURABILI

  $\int_E s = \sum_i^N \alpha_i \cdot \mu(E_i) \qquad E = \bigcup_i^N E_i$

- ESTREMI

  SE $\sup_{s \leq f} \int s = \inf_{s \geq f} \int s \to \int f$

- FINITO $\int f = \int f^+ - \int f^-$

QUASI OVUNQUE (QO)

SE PROPOSIZIONE $P(x)$ È FALSA SOLO IN INSIEMI DI MISURA NULLA

SE f LIMITATA E NULLA FUORI DA COMPATTO $\to$ <u>R → L</u>

$f_N : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ E MISURABILE

CONVERGENZA DOMINATA

$f_N \to f$ QO(E)

$\exists \varphi : |f_N| \leq \varphi$ QO(E)

$\to \int f = \lim_{N \to \infty} \int f_N$

CONVERGENZA MONOTONA

$f_N \to f$ QO(E)

$f_N \geq 0$ QO(E)

$f_{N+1} \geq f_N$ QO(E)

$\to \int f = \lim_{N \to \infty} \int f_N$

COROLLARIO

$f_N \geq 0$ QO(E) $\to \int \sum_0^\infty f_N = \sum_0^\infty \int f_N$

PARZIALI

$F(t) = \int_E f(t, x)\, dx \qquad t \in [a, b]$

$x \to f(t, x)$ MISURABILE $E \subseteq \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ $\exists$ PER $t \in U(t_0)$ QO(E)

$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| < \varphi(x)$ INTEGRABILE

$\longrightarrow F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$

FUBINI

$f(x, y)$ DEFINITA SU $A \times B \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M+N}$

f INTEGRABILE $\to$

- $y \in B$, $x \to f(x, y)$ INTEGRABILE IN A
- $y \to \int_A f(x, y)$ INTEGRABILE IN B
- $\int_{A \times B} f(x, y)\, dx\, dy = \int_B dy \int_A f(x, y)\, dx$

TONELLI

$f(x, y)$ MISURABILE DEFINITA SU $A \times B = \mathbb{R}^{M+N}$

- $y \in B$, $x \to f(x, y)$ INTEGRABILE IN A
- $y \to \int_A f(x, y)$ INTEGRABILE IN B
- $f(x, y) \geq 0$ QO$(A \times B)$

$\longrightarrow f$ INTEGRABILE

SPAZI L^p

$A \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO MISURABILE

V SPAZIO DI $f : A \to \mathbb{R}$ MISURABILI, INTEGRABILI

$\|f\|_p = \{ \int_A |f|^p \}^{1/p}$ PER DEFINIZIONE

$(L^p(A), \|f\|_p) \in$ BANACH $\forall p \geq 1$

EQUIVALENZA TRA FUNZIONI

$f \sim g \leftrightarrow f(x) = g(x)$ QUASI OVUNQUE $x \in A$

$L^1(A)$ SPAZIO CLASSI EQUIVALENZA $f : A \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI SECONDO LEBESGUE

NON È DEFINITO IL VALORE DI f IN UN PUNTO (HA MISURA NULLA)

CONTINUITÀ

$f \in L^1(A)$ CONTINUA $\leftrightarrow \exists g \in C^0(A) : f \sim g$

ESEMPIO $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f(x) \sim g(x) = 0$ POICHÉ $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ MISURABILE

SPAZIO L^∞

$L^\infty = \{ f : A \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty \}$

$\|f\|_\infty - \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \sup_{x \in A} |f(x)|$ QO $= \underline{\inf \{ M : |f(x)| \leq M \text{ QO } x \in A \}}$ (MINIMO DEI MAGGIORANTI)

SPAZIO ESSENZIALMENTE LIMITANTE f IN A

CONFRONTO

SENZA IPOTESI SU A NON SI PUÒ DIRE NULLA TRA L^p DIVERSI

ESPONENTE CONIUGATO

$p' = \frac{p}{p-1} \to \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \underline{p \geq 1}$

p	2	1	∞
p'	2	∞	1

HOLDER

$A \subseteq \mathbb{R}^N$ MISURABILE $f \in L^p(A)$, $g \in L^{p'}(A)$

$\longrightarrow \underline{\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}} \qquad f \cdot g \in L^1(A)$

$$\int |f \cdot g| \leq \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^{p'} \right)^{1/p'}$$

IMMERSIONE

A HA MISURA FINITA

SE $q \geq s$ ALLORA $L^q(A) \subseteq L^s(A)$

INFINITA IMMERSIONE

A HA MISURA FINITA

$L^\infty(A) \subseteq L^p(A) \quad \forall p \geq 1$

$\|f\|_p \leq |A|^{1/p} \cdot \|f\|_\infty$

INTERPOLAZIONE

$f \in L^q(A) \cap L^p(A)$, $f \in L^r(A) \quad \forall r \in [p, q]$

$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$

CON $\alpha \in [0, 1] : \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

CONVERGENZA $p \in [1, +\infty)$

$f_N \xrightarrow{L^p(A)} f \longleftrightarrow \lim_{N \to \infty} \|f_N - f\| = 0 \longleftrightarrow \lim_{N \to \infty} \left(\int_A |f_N - f|^p \right) = 0$

APPROSSIMAZIONE FUNZIONI REGOLARI

$\forall p \in [1, +\infty) \quad C_0^\infty(A)$ È DENSO IN $L^p(A)$

- $\forall f \in L^p(A) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_0^\infty(A) : \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$
- $\forall f \in L^p(A) \quad \exists \{ f_N \} \subseteq C_0^\infty : f_N \xrightarrow{L^p(A)} f$

È POSSIBILE APPROSSIMARE FUNZIONI DI $L^p(A)$ CON SUCCESSIONI DI FUNZIONI REGOLARI

CONVOLUZIONE

$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x - y) g(y)\, dy$

- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad f, g, f * g \in L^1(\mathbb{R})$
- $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \qquad f \in L^1(\mathbb{R}) \quad g, f * g \in L^p(\mathbb{R})$

$f \in L^1, \; g \in L^p \to f * g \in L^p$

PROPOSIZIONE

$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

- $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
- $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$
- $\forall p \in [1, +\infty) \quad \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$ CHIUSURA

MOLLIFICATORE

$\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+, \; \rho \in C_0^\infty([-1, +1]), \; \int_{\mathbb{R}} \rho = 1$

FAMIGLIA DI MOLLIFICATORI $\rho_N = N \rho(Nx)$

ρ_N MOLLIFICATORE $\forall N$ IN $[-\frac{1}{N}, +\frac{1}{N}]$

MOLLIFICAZIONE DI f VIA ρ

$f_N : f * \rho_N = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) \rho_N(y)\, dy$

FORMA BILINEARE SIMMETRICA

$a(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}, \underline{u}) = \alpha a(\underline{v}, \underline{u}) + \beta a(\underline{w}, \underline{u})$

$a(\underline{u}, \alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = \bar{\alpha} a(\underline{u}, \underline{v}) + \bar{\beta} a(\underline{u}, \underline{w})$

$a(\underline{u}, \underline{v}) = \overline{a(\underline{v}, \underline{u})}$

SU $\mathbb{C}$ SONO "FORME SESQUILINEARI HERMITIANE"

FORMA QUADRATICA

$f : V \to \mathbb{R}, \; f(\underline{v}) = a(\underline{v}, \underline{v})$

- $a(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{2}(f(\underline{u} + \underline{v}) - f(\underline{u}) - f(\underline{v}))$

SPAZIO DI HILBERT

SPAZIO $(V, \|\cdot\|)$ DOVE $\|\cdot\|^2 = a(\underline{v}, \underline{v})$ (BANACH)

IL QUADRATO DELLA NORMA È UNA FORMA QUADRATICA

NORMA HILBERTIANA (PRODOTTO SCALARE)

- BANACH È DI HILBERT SE:

$\|x^2 + y^2\| + \|x^2 - y^2\| = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ PARALLELOGRAMMO

$|a(\underline{x}, \underline{y})| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ CAUCHY-SCHWARTZ

$\mathbb{R}^N \in H \qquad a(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$

$L^2 \in H \qquad a(f, g) = \int_A f \cdot g \qquad \|f\|_2 = \left(\int_A f^2 \right)^{1/2}$