Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Seconda prova e preappello di Analisi III, 14 gennaio 2019 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....
□ SECONDA PROVA/ □ PREAPPELLO

SECONDA PROVA ES.1 (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Stabilire se l'equazione differenziale $-u''+u=\cos(6x)$, $x\in\mathbb{R}$, ammette soluzioni di periodo $\pi/3$, e in caso affermativo determinarle.

Soluzione. Utilizzando il metodo di ricerca di soluzioni periodiche tramite serie di Fourier, posto $\xi_k=k\frac{2\pi}{T}=6k$ e indicato con $P(\lambda)=-\lambda^2+1$ il polinomio caratteristico dell'equazione, osserviamo che si ha

$$P(i\xi_k)=-(6ik)^2+1=36k^2+1\neq 0 \qquad \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Quindi l'equazione assegnata ammette una e una sola soluzione di periodo $\pi/3$, data dalla funzione con coefficienti di Fourier

$$\hat{u}_k=\frac{\hat{f}_k}{36k^2+1}\,,$$

dove $\hat{f}_k$ sono i coefficienti di Fourier del termine noto $\cos(6x)$, ovvero

$$\hat{f}_k=\begin{cases}0 & \text{se } k\neq\pm1\\ \frac{1}{2} & \text{se } k=\pm1\,.\end{cases}$$

Pertanto,

$$u(x)=\frac{1}{2(36+1)}(e^{6x}+e^{-6x})=\frac{1}{37}\cos(6x)\,.$$

SECONDA PROVA ES. 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Sia $u(x)=e^{-x^2+8x}\chi_{[0,1]}$, e sia $\hat{u}$ la sua trasformata di Fourier. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) $\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R})$

(b) $\hat{u}\in L^2(\mathbb{R})$

(c) $\hat{u}\in C^\infty(\mathbb{R})$

(d) $\hat{u}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) vero, perché $u\in L^1(\mathbb{R})$

(b) vero, perché $u\in L^2(\mathbb{R})$

(c) vero, perché $x^nu\in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n\in\mathbb{N}$

(d) vero, perché $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

SECONDA PROVA ES. 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
(a) Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$\begin{cases} -u'' + (x+1)^2 u' + \arctan(x) u = e^{-x^2} & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \ u'(1) - u(1) = 0 \,. \end{cases}$$

(b) Mostrare che tale formulazione ammette una e una sola soluzione u.
(c) Determinare poi una limitazione superiore per $\|u\|_{L^2(0,1)}$.

Soluzione. (a) Posto $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$, sappiamo che per le funzioni di V valgono le maggiorazioni

$$(*) : \ \|v\|_{L^2(0,1)} \le \frac{2}{\pi} \|v'\|_{L^2(0,1)} \,, \qquad (**) : \ |v(1)| \le \|v'\|_{L^2(0,1)} \,;$$

grazie alla prima possiamo porre $\|v\|_V = \|v'\|_{L^2(0,1)}$. Da ora in avanti, per brevità, scriviamo L^2 anziché $L^2(0,1)$. Moltiplichiamo l'equazione per una funzione test $v \in V$ e integriamo: osservato che $u'(1) = u(1)$, si ottiene

$$\underbrace{\int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 (x+1)^2 u' v \, dx + \int_0^1 \arctan(x) uv \, dx - u(1)v(1)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} v \, dx}_{F(v)} .$$

La formulazione cercata è allora: Trovare $u \in V$ tale che $B(u,v) = F(v)$ per ogni $v \in V$.
(b) Applichiamo il Teorema di Lax Milgram. La linearità di B e di F è immediata; per la limitatezza di F osserviamo che, grazie a $(*)$:

$$|F(v)| \le \int_0^1 e^{-x^2} |v| \, dx \le \left\| e^{-x^2} \right\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \le 1 \cdot \frac{2}{\pi} \|v'\|_{L^2} = \frac{2}{\pi} \|v\|_V \,;$$

analogamente, per la limitatezza di B, maggiorando ciascuna delle funzioni $(x+1)^2$ e $\arctan x$ con il corrispondente massimo su $[0,1]$ e facendo uso di $(*)$ e $(**)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\le \int_0^1 |u'v'| \, dx + 4 \int_0^1 |u'v| \, dx + \frac{\pi}{4} \int_0^1 |uv| \, dx + |u(1)v(1)| \\ &\le \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + 4 \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \frac{\pi}{4} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \\ &\le \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + 4 \|u'\|_{L^2} \frac{2}{\pi} \|v'\|_{L^2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \|u'\|_{L^2} \frac{2}{\pi} \|v'\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \\ &= \left(2 + \frac{9}{\pi} \right) \|u\|_V \|v\|_V \,. \end{aligned}$$

Infine, per la coercività di B, osserviamo in via preliminare che

$$\int_0^1 (x+1)^2 u' u \, dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}(u^2) \, dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2} u^2 \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) u^2 \, dx = 2u^2(1) - \int_0^1 (x+1) u^2 \, dx$$

e dunque

$$\begin{aligned} B(u,u) \ &= \int_0^1 (u')^2 \, dx + 2u^2(1) - \int_0^1 (x+1) u^2 \, dx + \int_0^1 [\arctan(x)] u^2 \, dx - u^2(1) \\ &\ge \int_0^1 (u')^2 \, dx + \int_0^1 [\arctan(x) - (x+1)] u^2 \, dx \,. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $g(x) = \arctan(x) - (x+1)$ è decrescente, e il suo minimo su $[0,1]$ è $g(1) = \frac{\pi}{4} - 2 < 0$ e quindi

$$\int_0^1 [\arctan(x) - (x+1)] u^2 \, dx \ge \frac{\pi - 8}{4} \int_0^1 u^2 \, dx = \frac{\pi - 8}{4} \|u\|_{L^2}^2 \ge \frac{\pi - 8}{4} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \|u'\|_{L^2}^2 \,,$$

da cui

$$B(u,u) \ge \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{\pi - 8}{\pi^2} \|u'\|_{L^2}^2 = \underbrace{\left(1 + \frac{\pi - 8}{\pi^2} \right)}_{>0} \|u\|_V^2 \,.$$

(c) Infine, da

$$\frac{\pi^2 + \pi - 8}{\pi^2} \|u\|_V^2 \le B(u,u) = F(u) \le |F(u)| \le \frac{2}{\pi} \|u\|_V \,,$$

dividendo per $\|u\|_V$ si ottiene la stima a priori

$$\|u\|_V \le \frac{2\pi}{\pi^2 + \pi - 8}.$$

SECONDA PROVA TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Sia Ω un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$ con normale esterna ν, e sia $f \in L^2(\Omega)$. Fornire la formulazione variazionale del seguente problema di Neumann e dimostrare che una soluzione variazionale di classe C^2 è anche soluzione classica:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(b) Fornire la definizione dello spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ delle distibuzioni temperate in $\mathbb{R}$, e dimostrare che $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Soluzione. Per (a) e la definizione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si veda uno dei testi consigliati. Per dimostrare che $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si ragiona per assurdo. Posto $u = e^x$, si ha $u' = u$. Applicando la trasformata di Fourier in $S'(\mathbb{R})$, e le note regole di trasformazione, si ottiene $i\xi\hat{u} = \hat{u}$, ovvero $(i\xi - 1)\hat{u} = 0$, da cui $\hat{u} = 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Siccome in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vale la formula di inversione, segue $u = 0$, contraddizione.

PREAPPELLO ES.1 (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

(a) Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni $C^1([0,1])$ munito della norma $\|f\|_1 := \sup|f| + \sup|f'|$, e Y lo spazio vettoriale delle funzioni $C^0([0,1])$ munito della norma $\|f\|_0 := \sup|f|$. Sia $T : X \to Y$ l'operatore lineare definito da $T(f) = f'$. Mostrare che T è continuo e calcolarne la norma.

(b) Sia $p \in (1, +\infty)$. Sia $X = L^p([0,1])$ e sia $g \in L^{p'}([0,1])$, dove p' è l'esponente coniugato di p. Sia $T : X \to R$ l'operatore definito da $T(f) = \int_0^1 fg$. Mostrare che T è continuo e calcolarne la norma.

Soluzione. (a) L'operatore T è continuo con $\|T\| \leq 1$ poiché $\|f'\|_0 \leq \|f\|_1$.
Si ha $\|T\| = 1$ perché non si può migliorare la disuguaglianza sopra come si vede prendendo la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

(b) L'operatore T è continuo con $\|T\| \leq \|g\|_{L^{p'}}$ poiché per la disuguaglianza di Holder $|T(f)| \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$.
Si ha $\|T\| = \|g\|_{L^{p'}}$ perché non si può migliorare la disuguaglianza sopra come si vede prendendo la funzione $f = |g|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}(g)$.

PREAPPELLO ES. 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, determinare la soluzione del seguente problema di Dirichlet sul disco $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x| < r\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r \\ u(\theta) = \cos(n\theta) & \text{su } \partial B_r \, . \end{cases}$$

Soluzione. Ricercando la soluzione sotto forma di serie di Fourier, si trova che la funzione $u_\sharp(\rho,\theta) := u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ è data da

$$u_\sharp(\rho,\theta) = \sum_k \hat{g}_k \big(\frac{\rho}{r}\big)^{|k|} e^{ik\theta} \, ,$$

dove $\hat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier del dato $\cos(n\theta)$.
Poiché, per $g(\theta) = \cos(n\theta)$ si ha $\hat{g}_k = \pm 1/2$ per $k = \pm n$ e 0 altrimenti, si ottiene

$$u_\sharp(\rho,\theta) = \big(\frac{\rho}{r}\big)^n \cos(n\theta) \, .$$

PREAPPELLO ES. 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Mostrare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\alpha x)}{x^4+x^2+1}\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-|\alpha|\sqrt{3}/2} \cos(|\alpha|/2-\pi/3)\,.$$

Soluzione. Sia $F(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\alpha x)}{x^4+x^2+1}\, dx$, e $G(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-|\alpha|\sqrt{3}/2} \cos(|\alpha|/2-\pi/3)$. Poiché F e G sono funzioni pari, per mostrare che coincidono per ogni α in $\mathbb{R}$, basta mostrare che coincidono per $\alpha > 0$. Supponiamo quindi che sia $\alpha > 0$. Si ha che $F(\alpha)$ è la parte reale dell'integrale su $\mathbb{R}$ della funzione $f_\alpha(z) := \frac{\cos(\alpha z)}{z^4+z^2+1}$.
Tale funzione ha 4 singolarità, tutte date da poli semplici, nei punti

$$z_1 = e^{i\pi/3}, \qquad z_2 = -e^{i\pi/3}, \qquad z_3 = e^{-i\pi/3}, \qquad z_4 = -e^{-i\pi/3}.$$

Tra questi, hanno parte immaginaria positiva i punti

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), \qquad z_4 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),$$

con residui

$$\mathrm{Res}(f_\alpha, z_1) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{3}/2} e^{i\alpha/2}}{-3+i\sqrt{3}}, \qquad \mathrm{Res}(f_\alpha, z_4) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{3}/2} e^{-i\alpha/2}}{3+i\sqrt{3}}.$$

Pertanto applicando il lemma di Jordan si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(z) dz &= 2\pi i \Big(\frac{e^{-\alpha\sqrt{3}/2} e^{i\alpha/2}}{-3+i\sqrt{3}} + \frac{e^{-\alpha\sqrt{3}/2} e^{-i\alpha/2}}{3+i\sqrt{3}} \Big) \\
&= 2\pi e^{-\alpha\sqrt{3}/2} \Big(\frac{e^{i\alpha/2}}{\sqrt{3}+3i} + \frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{3}-3i} \Big) \\
&= 2\pi e^{-\alpha\sqrt{3}/2} \frac{1}{2\sqrt{3}} \Big(e^{i(\alpha/2-\pi/3)} + e^{-i(\alpha/2-\pi/3)} \Big) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\alpha\sqrt{3}/2} \cos(\alpha/2-\pi/3)\,.
\end{aligned}$$

Dunque si ha $F(\alpha) = G(\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$, e, per parità, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

PREAPPELLO TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Enunciare il teorema di proiezione su un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.

(b) Dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua. Stabilire, giustificando la risposta, se la stessa proprietà vale per $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. Per (a) e la prima parte di (b), si veda uno dei testi consigliati.
In generale la trasformata di Fourier di una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ non è una funzione continua, come si vede prendendo ad esempio la funzione $u(x) = \sin x/x \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, la cui trasformata è la funzione $\pi\chi_{[-1,1]} \notin C^0(\mathbb{R})$.