Analisi matematica 2		30 aprile 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = y^{2/3}\,(x^2 + y^2 - 1)$$

a) Stabilire in quali punti f è continua e in quali punti è differenziabile.

b) Trovare tutti gli estremi, locali e globali, della funzione.

c) Enunciare il teorema della funzione implicita e verificare che l'equazione

$$y^{2/3}\,(x^2 + y^2 - 1) = 1$$

definisce, in un intorno del punto $x = 1$, una funzione $y = g(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $g(1) = -1$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} - e^{-t}\,\mathbf{k}\,; \qquad t \in [-1, 1]$$

a) Verificare che la curva è semplice e regolare; calcolare la lunghezza della curva.

b) Determinare i versori tangente e normale principale.

c) Calcolare la curvatura e trovare in quale punto è massima.

Calcolare $\mathbf{r}'(0)$, $\mathbf{r}''(0)$, $\mathbf{r}'''(0)$ e dedurre dal risultato che la curva *non* è piana.

3.

3a)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 + 1}{2\,t\,y}.$$

i) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (motivare la risposta).

ii) Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$y(1) = 1, \quad y(1) = -1, \quad y(-1) = 1, \quad y(-1) = -1$$

specificandone gli intervalli massimali di definizione.

3b)

i) Studiare la stabilità dell'origine per il sistema lineare :

$$\begin{cases} x' = -5y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$$

ii) Trovare l'integrale generale del sistema.

iii) Disegnare le traiettorie nello spazio delle fasi.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ perchè è il prodotto delle funzioni $(x,y) \mapsto y^{2/3}$ e $(x,y) \mapsto x^2+y^2-1$, entrambe continue in tutto $\mathbb{R}^2$. La funzione è simmetrica per riflessione rispetto ai due assi cartesiani ($f(x,-y) = f(x,y),\ f(-x,y) = f(x,y)$).
Derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 2x\,y^{2/3}, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_y(x,y) = \frac{2}{3}y^{-1/3}(x^2+y^2-1) + 2y^{5/3}, \quad \text{per } y \neq 0$$

Nei punti dell'asse $y = 0$ *diversi da* $(\pm 1, 0)$ f_y non è definita. Considerando le restrizioni $y \mapsto f(\pm 1, y) = y^{8/3}$, si trova che $f_y(\pm 1, 0) = 0$.

Differenziabilità: la funzione è differenziabile nell'aperto

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \neq 0\big\}$$

perché le derivate parziali sono continue in D (condizione sufficiente). La funzione *non* è differenziabile nei punti $(x,0)$, $x \neq \pm 1$, poiché non esistono tutte le derivate parziali (condizione necessaria). Nei punti $(\pm 1, 0)$ si deve applicare la definizione. Per la simmetria di f, è sufficiente esaminare il punto $(1,0)$. Osserviamo che $f(1,0) = f_x(1,0) = f_y(1,0) = 0$, per cui basta verificare che $f(1+h,k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$ per $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$.
Ponendo $h = \rho\cos\theta$, $k = \rho\sin\theta$:

$$\frac{f(1+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{k^{2/3}(h^2+k^2+2h)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \rho^{2/3}(\sin\theta)^{2/3}(\rho + 2\cos\theta)$$

Dalla maggiorazione

$$\rho^{2/3}\big|(\sin\theta)^{2/3}(\rho+2\cos\theta)\big| \leq \rho^{2/3}|\sin\theta|^{2/3}(\rho + 2|\cos\theta|) \leq \rho^{5/3} + 2\rho^{2/3} \to 0,$$

segue che la funzione è *differenziabile* nei due punti $(\pm 1, 0)$.

b) Il gradiente si annulla nei punti $(\pm 1, 0)$ e nei punti di D che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x\,y^{2/3} = 0 \\ \frac{1}{3}y^{-1/3}(x^2+y^2-1) + y^{5/3} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x = 0$. Sostituendo nella seconda e dopo semplici passaggi, si ottiene

$$4y^2 - 1 = 0$$

Si trovano allora due punti critici in D : $(0, 1/2)$ e $(0, -1/2)$. Calcolando la matrice hessiana nei due punti, si conclude che sono punti di *minimo*.
Si arriva alla stessa conclusione osservando che $f(x,y) \leq 0$ nel cerchio $\{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$ e che sulla circonferenza e sul diametro del cerchio vale $f = 0$; per il teorema di Weierstrass, devono dunque esistere punti di minimo *all'interno* dei due semicerchi contenuti nei semipiani delle y positive e negative.

Tali punti sono i due punti critici trovati e sono *punti di minimo globale* nel cerchio, *ma anche in tutto* $\mathbb{R}^2$ dato che al di fuori del cerchio si ha $f \geq 0$. Non esistono punti di massimo globale in $\mathbb{R}^2$ poiché, ad esempio, vale $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = +\infty$.
Restano da esaminare i punti dell'asse $y = 0$; osservando che $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e *studiando il segno di* f *nell'intorno dei punti* $(x,0)$, si conclude che i punti con $|x| < 1$ sono *punti di massimo locale* e quelli con $|x| > 1$ *punti di minimo locale*, mentre i punti $(\pm 1, 0)$ sono punti di sella.

c) La funzione $F(x,y) = y^{2/3}\,(x^2 + y^2 - 1) - 1$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto $(1,-1)$ e soddisfa

$$F(1,-1) = 0; \qquad F_y(1,-1) = -\frac{8}{3} \neq 0$$

Valgono quindi le ipotesi del teorema del Dini; essendo inoltre $F_x(1,-1) = 2$, la funzione $g(x)$ (definita in un intorno del punto $x = 1$) ha derivata

$$g'(1) = -\frac{2}{-8/3} = \frac{3}{4}$$

L'equazione della retta tangente è allora

$$y + 1 = \frac{3}{4}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 4y - 7 = 0$$

2.

a) La curva è semplice perchè le componenti del vettore $\mathbf{r}(t)$ sono funzioni *iniettive* su $\mathbb{R}$, per cui è pure iniettiva la funzione $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ in $[0,1]$ (si osservi che era sufficiente l'iniettività di una sola componente).
La curva è regolare perchè vale

$$\mathbf{r}'(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \qquad \forall\, t \in [-1,1]$$

Calcolo della lunghezza

$$|\mathbf{r}'(t)| = \left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right)^{1/2} = e^t + e^{-t} = 2\cosh t$$

$$L = \int_{-1}^{1} 2\cosh t\, dt = \left[2\sinh t\right]_{-1}^{1} = 4\sinh 1$$

b)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{e^t}{2\cosh t}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2\cosh t}\,\mathbf{j} + \frac{e^{-t}}{2\cosh t}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{2\cosh^2 t}\,\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}\,\sinh t}{2\cosh^2 t}\,\mathbf{j} - \frac{1}{2\cosh^2 t}\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{2\cosh^2 t}\left(1 + 2\sinh^2 t + 1\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh^2 t}\sqrt{1+\sinh^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}\,\mathbf{i} - \frac{\sinh t}{\cosh t}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}\,\mathbf{k}$$

c)

$$k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{2\sqrt{2}\cosh^2 t}$$

La curvatura è massima ($= 1/2\sqrt{2}$) per $t=0$, cioè *nel punto* $\mathbf{r}(0) = (1,0,-1)$. L'espressione di $k(t)$ si poteva ottenere anche calcolando $\mathbf{r}''(t) = e^t\,\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{k}$ e usando la formula

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Se la curva fosse piana, i tre vettori $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}''(0) = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}'''(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, sarebbero complanari e quindi linearmente *dipendenti*. Calcolando il prodotto misto dei tre vettori, si vede che ciò non accade.

3a)

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t, y)$ al secondo membro è definita e continua per $t\,y \neq 0$, dunque nei 4 *quadranti aperti* del piano. La derivata parziale

$$f_y(t, y) = \frac{y^2 - 1}{2\,t\,y^2}$$

è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $t_0\,y_0 \neq 0$.

ii) Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{1}{t} dt + C,$$

da cui si ricava

$$\ln(y^2 + 1) = \ln|t| + C; \qquad y^2 + 1 = e^C |t|$$

oppure, ridefinendo la costante arbitraria,

$$y^2 + 1 = C\,t, \qquad C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Si tratta di una famiglia di parabole che rappresenta l'integrale generale in forma implicita. Esplicitando y dalla precedente equazione si ottengono *due soluzioni* per ogni valore di C,

$$y = \pm\sqrt{Ct - 1},$$

ciascuna definita e di classe $\mathcal{C}^1$ per $Ct - 1 > 0$.
Imponendo le condizioni assegnate, troviamo per i primi due problemi di Cauchy le soluzioni:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2t - 1}; \qquad \varphi_2(t) = -\sqrt{2t - 1},$$

entrambe nell'intervallo massimale $(1/2, +\infty)$, mentre per il terzo e quarto problema abbiamo:

$$\varphi_3(t) = \sqrt{-2t - 1}; \qquad \varphi_4(t) = -\sqrt{-2t - 1},$$

entrambe nell'intervallo massimale $(-\infty, -1/2)$.

3b)

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = -5 \neq 0$, l'origine è l'unico punto di equilibrio. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda + 4) - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$, dunque l'origine è instabile.

Due autovettori linearmente indipendenti sono, rispettivamente,

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'integrale generale del sistema si può allora scrivere

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Il sistema si poteva anche risolvere con il *metodo di eliminazione*: derivando la seconda equazione e sostituendo x' dato dalla prima, si ottiene l'equazione omogenea del secondo ordine

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

Risolvendo l'equazione caratteristica, si trova l'integrale generale

$$y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{-5t}$$

Dalla seconda equazione si ricava poi

$$x(t) = -y'(t) - 4y(t) = -5C_1\, e^t + C_2\, e^{-5t}$$

Ci sono 4 traiettorie rettilinee, due lungo la retta di equazione $y = x$ e due lungo $y = -x/5$; il punto rappresentativo della soluzione tende verso l'origine (punto di equilibrio) lungo le prime due traiettorie e si allontana indefinitamente dall'origine lungo le seconde. Le altre traiettorie sono asintotiche alla prima retta per $t \to -\infty$ e alla seconda per $t \to +\infty$.