Buona Pasqua!!

1) Calcolare il seguente limite, o mostrare che non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+3y^3}{3x^2+5y^2}.$$

2) Stabilire se la seguente funzione, definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, può essere prolungata con continuità nell'origine:

$$f(x,y) = \frac{e^{x^3}-1}{x^4+y^2}.$$

3) Studiare massimi e minimi locali delle seguenti funzioni di due variabili:

$$\begin{array}{ll} a) & f(x,y) = x^3y^2(6-x-y), \\ b) & f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y. \end{array}$$

4) Mostrare che la funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - xy$$

è dotata di minimo assoluto nella striscia

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 3\},$$

ma non di massimo assoluto.

5) Calcolare la lunghezza e la curvatura della seguente curva in forma polare:

$$r(\theta) = \sin\theta, \quad \theta \in [\pi, 4\pi].$$

6) Dimostrare che l'evoluta della curva <u>trattrice</u>, di equazione

$$\mathbf{r}(t) = [\log(\sec t + \tan t) - \sin t]\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2),$$

è la <u>catenaria</u>

$$y(x) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7) Verificare che l'equazione $\sin y - xy + \pi = 0$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(1,\pi)$ una sola funzione $y = f(x)$. Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f in $x = 1$.

Soluzioni

1) Il limite esiste ed equivale a zero (verificare, per esempio, tramite polari).

2) Dal momento che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste, la funzione non può essere prolungata con continuità nell'origine.

3a) Tutti i punti degli assi e il punto $P = (3, 2)$ sono critici. P è massimo locale (applicare il test dell'Hessiana), mentre i punti dell'asse y sono tutti punti di sella (ragionare sul segno di f). I punti $(x, 0)$ con $x < 0$ o $x > 6$ sono massimi locali, mentre per $0 < x < 6$ sono minimi locali; $(6, 0)$ è sella.

3b) L'unico punto critico è $(4, 2)$ ed è un minimo locale.

4) Studiare massimi e minimi (assoluti) della funzione f su $E_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq 3\}$ con a positivo. Mostrare che per ogni a grande, il minimo di f su E_a è sempre realizzato da $(3/2, 3) \in E_a$, mentre il massimo tende a $+\infty$.

5) $L = 3\pi$.

6) Tramite il procedimento visto ad esercitazioni (per esempio), si mostra che l'evoluta ha equazione

$$\mathbf{r}(t) = \log(\sec t + \tan t)\mathbf{i} + (\cos t)^{-1}\,\mathbf{j}, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Per concludere che $\mathbf{r}(t)$ è una catenaria, si può utilizzare il fatto che $\operatorname{arccosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

7) Verificare che è applicabile il teorema di Dini. Sfruttare la formula data dal teorema di Dini per il calcolo della derivata prima di f (e derivare nuovamente per ottenere la derivata seconda) per concludere che lo sviluppo è

$$f(x) = \pi - \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$