Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
ESAME DI ANALISI III A DISTANZA, 25/6/2020 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti) Scrivere solo le risposte, e.g. (a) Vero/Falso (b) Vero/Falso etc.

Sia f una funzione di variabile complessa definita sul disco $D := \{|z| < 1\}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(a) Se f ammette primitive in D allora è olomorfa su D. VERO (cf. Gilardi)

(b) Se $\text{Res}(f, z_0) = 0$ per ogni fissato $z_0 \in D$, allora f è olomorfa. FALSO (es. $f(z) = 1/z^2$)

(c) Se f è olomorfa su $D \setminus \{0\}$, f' è sviluppabile in serie di Laurent su $D \setminus \{0\}$. VERO (perché f' è olomorfa su $D \setminus \{0\}$)

(d) L'insieme degli zeri di f, $Z(f) := \{z \in D \ : \ f(z) = 0\}$, puó essere costituito da $D \cap \mathbb{R}$. VERO (es: $f(z) = \text{Im}z$).

TEST 2. (8 punti) Scrivere solo le risposte, e.g. (a) Vero/Falso (b) Vero/Falso etc.

Sia

$$u(x) := -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e sia $\widehat{u}$ la sua trasformata di Fourier. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(e) $\widehat{u}(\xi) = i\pi\xi e^{-|\xi|}$; VERO (poiché $u(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}$)

(f) $\widehat{\widehat{u}}(x) = (2\pi)u(-x)$; VERO (vale formula inversione, poiché $u, \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$)

(g) $\widehat{u} \in C^1(\mathbb{R})$; VERO (poiché $xu \in L^1(\mathbb{R})$)

(h) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. VERO (poiché $u \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$).

TEORIA. (5 punti) Scrivere coincisamente risposte, 2-3 righe per punto

(i) Esibire una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $T' = 2\delta_1$, dove δ_1 è la delta di Dirac in $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x > 1 \\ 0 & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

(l) Mostrare che, per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$, la funzione appartenente a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definita da $u(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ha derivata nulla nel senso delle distribuzioni.

Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, detto L un numero reale tale che $\varphi = 0$ fuori da $[-L, L]$, si ha

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = \int_{-L}^{L} c\varphi' = c[\varphi(L) - \varphi(-L)] = 0\,.$$

ESERCIZIO (10 punti) Scrivere le risposte E le loro motivazioni
Si considerino le due successioni di funzioni definite, sull'intervallo $[0,1]$, da

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}\,, \qquad g_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$

(m) Determinare le funzioni f e g tali che, rispettivamente, $f_n \to f$ e $g_n \to g$ puntualmente quasi ovunque su $[0,1]$.

(n) Stabilire, giustificando la risposta, se $f_n \to f$ e se $g_n \to g$ uniformemente su $[0,1]$.

(o) Stabilire, giustificando la risposta, se $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ e se $\int_0^1 g_n \to \int_0^1 g$.

Soluzione.

(m) Si ha $f_n \to 1$ e $g_n \to 1$ puntualmente quasi ovunque su $[0,1]$ (precisamente, entrambe f_n e g_n convergono puntualmente a 1 tranne che nel punto $x=0$, nel quale si ha $f_n(0) \equiv 0$ e $g_n(0) \to +\infty$).

(n) In entrambi i casi, f_n e g_n *non* convergono uniformemente a 1 su $[0,1]$ in quanto

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1| \geq |f_n(0) - 1| = 1 \not\to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 1| \geq |g_n(0) - 1| = n - 1 \not\to 0\,.$$

(nota: stessa conclusione per chi avesse considerato il sup essenziale, in quanto $\operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1| = 1$ e $\operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 1| = n - 1$).

(o) Per quanto riguarda la successione f_n, la risposta è affermativa per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue: si ha $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ in quanto $f_n \to f$ puntualmente q.o., e le f_n sono dominate dalla funzione costante 1, che è Lebsegue integrabile sull'intervallo $[0,1]$.

Per quanto riguarda la successione g_n, la risposta è negativa, in quanto

$$\int_0^1 g_n = 1 + (1 - \frac{1}{n}) \to 2 \neq 1 = \int_0^1 g;$$

si noti infatti che non è possibile applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue dato che la successione g_n non ammette una maggiorante integrabile; non è possibile applicare neanche il teorema di convergenza monotona di Beppo-Levi dato che la successione g_n non è monotona crescente.