Serie di Fourier in spazi di Hilbert

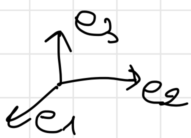
Def. Sia H un Hilbert.
Una famiglia di vettori $\{u_n\} \subseteq H$ si dice

SISTEMA ORTOGONALE se $(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$

SISTEMA ORTONORMALE se è ortogonale e $(u_n, u_n) = 1 \quad \forall n$

Es. • $H = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 1)$$



• $H = \ell^2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \sum_{n \geq 0} x_n^2 < +\infty \right\}$

è uno spazio vettoriale normato

$$\begin{cases} (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \\ (\lambda x_n) = \lambda x_n \end{cases} \qquad \left(\sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{1/2} := \|x\|_{\ell^2}$$

è di Hilbert $\quad ((x_n), (y_n)) = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$

$\mathbb{R}^N \qquad (x_1, \dots, x_N)$

$\qquad\quad (y_1, \dots, y_N) \qquad (N \to +\infty)$

$$e_n = (0, \_\_ \; 0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } n}}{1}, 0 \quad 0) \qquad n \in \mathbb{N}$$

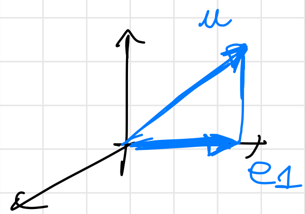
Def. Sia H Hilbert, sia (u_n) sistema ortonormale

Dato $u \in H$, definiamo:

- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$ — COEFF. DI FOURIER DI u (rispetto a (u_n))

- $\sum_n (u, u_n) u_n$ — SERIE DI FOURIER DI u (rispetto a (u_n))

<u>Esempi</u>



- $H = \mathbb{R}^3$

$\{e_1\}$ $\quad (u, e_1) e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$

$\{e_1, e_2\}$ $\quad (u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 = P_{\langle e_1, e_2 \rangle}(u)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad (u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 + (u, e_3)e_3 = u$

- $H = \ell^2$

$\{e_1\}$ $\quad (1, 0, 0, \ldots 0)$ $\quad (u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$

$\{e_i\}$ con i pari $\quad \sum_K (u, e_{2K}) e_{2K}$

$\{e_n\}$ con n qualsiasi $\quad \sum_n (u, e_n) e_n = u$

Teorema di convergenza per serie di Fourier

Sia H Hilbert, e sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale.
Dato $u \in H$, la serie di Fourier di u
CONVERGE in $H^{(*)}$ e

$$\sum_n (u, u_n) u_n = u'$$

dove u' è la PROIEZIONE ORTOGONALE di u su M,
dove M è la chiusura del sottospazio generato$^{(**)}$ dal sistema $\{u_n\}$.

(*) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (u, u_n) u_n$ converge in H $\iff$ $S_N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n$

$\exists \lim\limits_{N \to +\infty} S_N(u) = u'$

$\lim\limits_{N \to +\infty} \| S_N(u) - u' \| = 0$

(**) $\langle u_n \rangle := \{$comb. lineari degli $u_n\}$.

$M = \overline{\langle u_n \rangle} := \{$limiti di comb. lineari degli $u_n\}$

è un sottospazio chiuso.

Diseguaglianza di Bessel

Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale.
Dato $u \in H$,

$$\sum_n \underbrace{(u, u_n)^2}_{\uparrow \text{ quadrati dei coeff. di Fourier}} \leq \|u\|^2$$

<u>Dim.</u> Fisso $N \in \mathbb{N}$, e mostriamo

$$\sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2 \quad \left(\Rightarrow \text{tesi passando al lim per } N \to +\infty\right)$$

$$0 \leq \Big\| u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n \Big\|^2 =$$

$$= \Big(u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n ,\ u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n \Big) =$$

$$= \|u\|^2 - \cancel{2} \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 + \cancel{\sum_{n \leq N} (u, u_n)^2} \qquad \blacksquare$$

$$\big((u,u_1)u_1 + (u,u_2)u_2,\ (u,u_1)u_1 + (u,u_2)u_2\big) =$$
$$(u,u_1)^2 + (u,u_2)^2$$

Dim Teo convergenza per serie di Fourier

Per dimostrare la cv. della serie, basta mostrare che $S_N(u)$ è di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \|S_N(u) - S_M(u)\|^2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu.$

ovvero: (supponiamo $N > M$)

$$\|S_N(u) - S_M(u)\|^2 = (S_N(u) - S_M(u), \ S_N(u) - S_M(u)) =$$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n) u_n, \ \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n) u_n \right)$$

$$= \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n)^2 = |T_N(u) - T_M(u)| \quad \text{dove}$$

$$T_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$$

Bessel $\Rightarrow \{T_N(u)\}$ è di Cauchy!

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |T_N(u) - T_M(u)| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu.$

Quindi, poiché siamo in un Hilbert,

$S_N(u)$ converge!

Sia $u' := \sum_n (u, u_n) u_n$

Per dimostrare $u' = P_M(u)$, basta mostrare:

1) $u' \in M$
2) $u - u' \in M^{\perp}$

$\Rightarrow \quad u = \underbrace{u'}_{\in M} + \underbrace{(u-u')}_{\in M^{\perp}}$

$\Rightarrow$ per l'unicità nel teo delle proiezioni,

$u' = P_M(u)$, $\quad u - u' = P_{M^{\perp}}(u)$.

Infatti:

1) $u' \in M$ vale per costruzione:

$$u' = \underbrace{\lim_{N \to +\infty} S_N(u)}_{\in \overline{\langle u_n \rangle}} \qquad S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n$$

u' è limite di comb. lineari degli u_n.

$S_N(u) \in \langle u_n \rangle$ sono comb. lineari degli u_n

2) Per mostrare che $u - u' \in M^{\perp}$,

basta far vedere che $(u - u', u_m) = 0 \ \forall m$

($\Rightarrow u - u'$ sarà ortogonale ai limiti delle comb. lineari degli u_n, ovvero a tutti gli el di M)

$$(u - u', u_m) = \Big(u - \sum_n (u, u_n) u_n, u_m\Big)$$

$$= (u, \cancel{u_m}) - (u, \cancel{u_m}) \underbrace{(u_m, u_m)}_{=1}$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

Def. Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale.
Si dice che (u_n) è UN SISTEMA COMPLETO
se è massimale rispetto all'inclusione
ovvero: $\nexists$ (v_n) sistema ortonormale
che contenga propriamente (u_n) $\big((u_n) \subsetneq (v_n)\big)$

Proposizione (Caratterizzazione sistemi ortonormali completi)

Sia (u_n) un sistema ortonormale in H Hilbert.

Sono equivalenti:

(1) (u_n) è completo

(2) $u \in H : \quad (u, u_n) = 0 \ \forall n \implies u = 0$

(3) Posto $M := \overline{\langle u_n \rangle}$, si ha $M \equiv H$.

(4) $\sum_n (u, u_n) u_n = u \qquad \forall u \in H.$

(5) $\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v) \qquad \forall u, v \in H$

IDENTITÀ DI PARSEVAL

(6) $\sum_n (u, u_n)^2 = \|u\|^2 \qquad \forall u \in H$

IDENTITÀ DI BESSEL

Dim.

$(1) \iff (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6)$

$(6) \implies (2)$

Dim. • (6) $\Rightarrow$ (2) Se $(u, u_n) = 0 \ \forall n$, $\sum 0 = 0$.

• (1) $\Rightarrow$ (2) ovvero non (2) $\Rightarrow$ non (1).

$\exists u \in H$: $(u, u_n) = 0 \ \forall n$ MA $u \neq 0$.

Allora (u_n) NON massimale.

• (2) $\Rightarrow$ (1) ovvero non (1) $\Rightarrow$ non (2)

se (u_n) NON massimale, posso aggiungerci almeno un elemento $\Rightarrow \exists u \in H$ per cui la (2) è falsa.

• (2) $\Rightarrow$ (3). Per mostrare $M \equiv H$, basta mostrare $M^\perp = \{0\}$. vero per (2)

((2) $\Rightarrow$ se $u \in M^\perp$ allora $u = 0$).

• (3) $\Rightarrow$ (4). Se $M \equiv H$, allora $u' = P_M(u) = u$

• (4) $\Rightarrow$ (5)

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum (u, u_n) u_n \\ v &= \sum (v, u_n) u_n \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$(u, v) = \left(\sum (u, u_n) u_n, \sum (v, u_n) u_n\right) =$$

$$= \sum (u, u_n)(v, u_n) \underbrace{(u_n, u_n)}_{= 1}$$

• (5) $\Rightarrow$ (6) Prendere $u = v$ in Parseval. $\blacksquare$