Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 11/11/2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (a) Determinare l'insieme A delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$7e^{-i\frac{\pi}{2}} z^2\overline{z} - \mathrm{Im}\, z + 7i|z|^2 \mathrm{Re}\, z = 0.$$

(b) Sia $B = \{z = w + i | w \in A, w \notin \mathbb{R}\}$. Determinare gli elementi di B che hanno massimo modulo.

Soluzione. Scriviamo $z = x + iy$. Notando che $e^{-i\pi/2} = -i$ e che $z\,\overline{z} = |z|^2$ si ha:

$$\begin{aligned} 7e^{-i\frac{\pi}{2}} z^2\overline{z} - \mathrm{Im}\, z + 7i|z|^2\mathrm{Re}\, z &= -7iz^2\overline{z} - \mathrm{Im}\, z + 7i|z|^2\mathrm{Re}\, z \\ &= -7iz|z|^2 - \mathrm{Im}\, z + 7i|z|^2\mathrm{Re}\, z \\ &= 7i(x^2+y^2)[x - (x+iy)] - y \\ &= y[7(x^2+y^2) - 1], \end{aligned}$$

che si annulla se $y = 0$ (punti dell'asse reale) e se $x^2 + y^2 = 1/\sqrt{7}$ (circonferenza centrata nell'origine e di raggio $1/\sqrt{7}$).

Riguardo al secondo punto, nella definizione di B si richiede dapprima di considerare i punti di A che non siano reali. Dunque occorre considerare la sola circonferenza di cui sopra, privata dei punti $z = \pm 1/\sqrt{7}$. Tale circonferenza va poi traslata di un'unità nella direzione positiva dell'asse immaginario. Risulta dunque che B è la circonferenza di centro i e raggio $1/\sqrt{7}$, privata dei punti $i \pm 1/\sqrt{7}$. Ne segue che il punto di modulo (cioè distanza dall'origine) massimo è il punto $i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

2. Detti $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, e $\boldsymbol{k}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ f(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) &= -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

- Verificare che f è ben definita, quindi determinare la matrice A associata ad f .
- Esibire una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Posto $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, sia $\mathcal{V}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ individuato dai vettori per cui: $x + y = 0$. Determinare una base di $f(\mathcal{V})$.

Soluzione. La funzione f risulta ben definita in quanto è nota la sua azione sui vettori $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Ricordiamo che la matrice A_k associata alla funzione f_k è formata da tre vettori-colonna: $f(\boldsymbol{i})$, $f(\boldsymbol{j})$, $f(\boldsymbol{k})$. Utilizzando la linearità di f le equazioni vettoriali possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{j}) - f(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ f(\boldsymbol{i}) - f(\boldsymbol{j}) + f(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{j}) &= -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

ottenendo: $f(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $f(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $f(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.
La matrice A associata a f è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha rango 2, infatti le prime due colonne sono l. i. e la terza colonna dipende linearmente dalle prime due (è infatti la seconda colonna meno la prima: alternativamente basta notare che il determinante di A è zero).
Una base per l'immagine di f può essere formata dai vettori $f(\boldsymbol{i})$ e $f(\boldsymbol{j})$.
Dalla definizione di f si evince che il vettore $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ è soluzione non banale dell'equazione $f(\boldsymbol{v}) = 0$, pertanto il vettore $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ può essere scelto come base per il nucleo monodimensionale di f .

Sia $v \in \mathcal{V}$, allora: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Utilizziamo la matrice A per determinare l'azione di f su v :

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (z - x)$$

Quindi il vettore $f(\boldsymbol{k})$ può essere scelto come base dello spazio $f(\mathcal{V})$.

3. Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} h & 1 & h-1 \\ h & 0 & h \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di h la matrice A_h è diagonalizzabile.
- Determinare gli autovettori nel caso $h = 2$.

Soluzione. Equazione caratteristica: $\lambda(h-\lambda)(\lambda-1) = 0$.
Autovalori di A_h: $\{1, 0, h\}$.

Se $h \neq 0$ e $h \neq 1$ gli autovalori sono tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

Caso $h = 0$: $\mathrm{Sp}(A_0) = \{0^2, 1^1\}$.
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Il rango della matrice vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Caso $h = 1$: $\mathrm{Sp}(A_1) = \{0^1, 1^2\}$
$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il rango della matrice vale 2, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è uno, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h \neq 1$.

Se $h = 2$, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{0^1, 1^1, 2^1\}$. Calcolo degli autovettori.
$$\lambda_1 = 0, \qquad (A_2 - 0\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\lambda_2 = 1, \qquad (A_2 - 1\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\lambda_3 = 2, \qquad (A_2 - 2\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 11/11/2017**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (a) Determinare l'insieme A delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$16ie^{-i\frac{\pi}{2}}z^2\overline{z} - \operatorname{Re} z - 16i|z|^2 \operatorname{Im} z = 0.$$

(b) Sia $B = \{z = w - 1 | w \in A, iw \notin \mathbb{R}\}$. Determinare gli elementi di B che hanno massimo modulo.

Soluzione. Scriviamo $z = x + iy$. Notando che $e^{-i\pi/2} = -i$ e che $z\,\overline{z} = |z|^2$ si ha:

$$\begin{aligned} 16ie^{-i\frac{\pi}{2}}z^2\overline{z} - \operatorname{Re} z - 16i|z|^2 \operatorname{Im} z &= 16z^2\overline{z} - \operatorname{Re} z - 16i|z|^2 \operatorname{Im} z \\ &= 16z|z|^2 - \operatorname{Re} z - 16i|z|^2 \operatorname{Im} z \\ &= 16(x^2 + y^2)[x + iy - iy] - x \\ &= x[16(x^2 + y^2) - 1], \end{aligned}$$

che si annulla se $x = 0$ (punti dell'asse immaginario) e se $x^2 + y^2 = 1/(16)$ (circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1/4).

Riguardo al secondo punto, nella definizione di B si richiede dapprima di considerare i punti di A che non siano immaginari. Dunque occorre considerare la sola circonferenza di cui sopra, privata dei punti $z = \pm i/4$. Tale circonferenza va poi traslata di un'unità nella direzione negativa dell'asse reale. Risulta dunque che B è la circonferenza di centro -1 e raggio 1/4, privata dei punti $-1 \pm i/4$. Ne segue che il punto di modulo (cioè distanza dall'origine) massimo è il punto $-5/4$.

2. Detti $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, e $\boldsymbol{k}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k} \\ f(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) &= -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

- Verificare che f è ben definita, quindi determinare la matrice A associata ad f .
- Esibire una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Posto $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, sia $\mathcal{V}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ individuato dai vettori per cui: $y + z = 0$. Determinare una base di $f(\mathcal{V})$.

Soluzione. La funzione f risulta ben definita in quanto è nota la sua azione sui vettori $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Ricordiamo che la matrice A_k associata alla funzione f_k è formata da tre vettori colonna: $f(\boldsymbol{i})$, $f(\boldsymbol{j})$, $f(\boldsymbol{k})$.
Utilizzando la linearità di f le equazioni vettoriali possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{i}) - f(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k} \\ f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{j}) - f(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{j}) + f(\boldsymbol{k}) &= -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

ottenendo: $f(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $f(\boldsymbol{i}) = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.
La matrice A associata a f è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha rango 2, infatti le prime due colonne sono l. i. e la terza colonna dipende linearmente dalle prime due (è infatti la somma delle prime due colonne: alternativamente basta notare che il determinante di A è zero).
Una base per l'immagine di f può essere formata dai vettori $f(\boldsymbol{i})$ e $f(\boldsymbol{j})$.
Dalla definizione di f si evince che il vettore $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ è soluzione non banale dell'equazione $f(\boldsymbol{v}) = 0$, pertanto il vettore $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ può essere scelto come base per il nucleo monodimensionale di f .

Sia $v \in \mathcal{V}$, allora: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$. Utilizziamo la matrice A per determinare l'azione di f su v :

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} (x - y)$$

Quindi il vettore $f(\boldsymbol{i})$ può essere scelto come base dello spazio $f(\mathcal{V})$.

3. Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1+h & h & -1 \\ h & h & 0 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di h la matrice A_h è diagonalizzabile.
- Determinare gli autovettori nel caso $h = 3$.

Soluzione. Equazione caratteristica: $\lambda(h-\lambda)(\lambda+1) = 0$.
Autovalori di A_h: $\{-1, 0, h\}$.

Se $h \neq 0$ e $h \neq -1$ gli autovalori sono tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

Caso $h = 0$: $\mathrm{Sp}(A_0) = \{0^2, -1^1\}$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Caso $h = -1$: $\mathrm{Sp}(A_1) = \{0^1, -1^2\}$

$$A_{-1} + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice vale 2, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è uno, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h \neq -1$.

Se $h = 3$, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{-1^1, 0^1, 3^1\}$. Calcolo degli autovettori.

$$\lambda_2 = 0, \qquad (A_3 - 0\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad (A_3 + 1\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_3 = 3, \qquad (A_3 - 3\mathbb{I})\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 18/1/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left[1-\sin x+\sin(\sin x)\right]^{\frac{1}{\sin x-\sinh x}}.$$

Soluzione. Sviluppiamo separatamente la base e la quantitÃ a denominatore dell'esponente. Si ha:

$$\begin{aligned}
1-\sin x+\sin(\sin x) &= 1-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)+\sin\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\\
&= 1-x+\frac{x^3}{6}+x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^3+o(x^3)\\
&= 1-\frac{x^3}{6}+o(x^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x-\sinh x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left[x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\\
&= -\frac{x^3}{3}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Si osservi che

$$\left[1-\sin x+\sin(\sin x)\right]^{\frac{1}{\sin x-\sinh x}}=e^{\frac{\log[1-\sin x+\sin(\sin x)]}{\sin x-\sinh x}}.$$

L'esponente soddisfa:

$$\begin{aligned}
\frac{\log\left[1-\sin x+\sin(\sin x)\right]}{\sin x-\sinh x} &= \frac{\log\left[1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&\to \frac{1}{2}\quad \text{per } x\to 0.
\end{aligned}$$

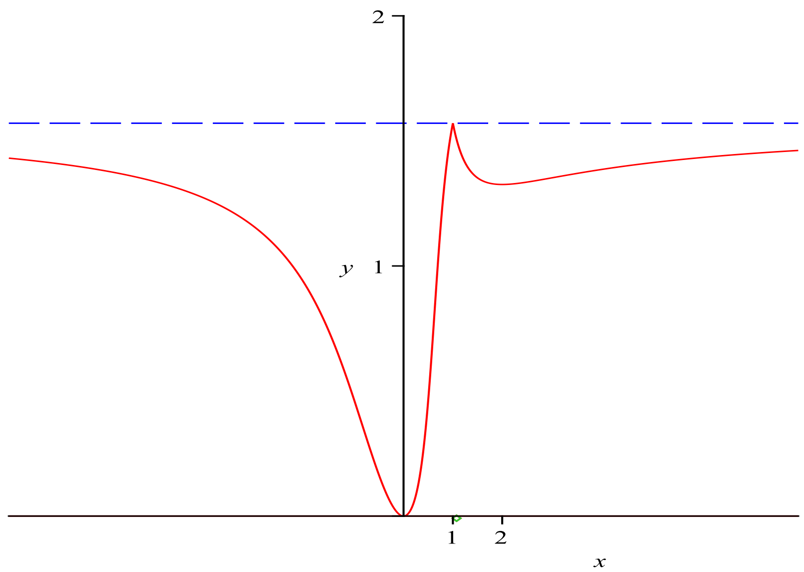
Per la continuità della funzione esponenziale il limite cercato vale dunque $\sqrt{e}$.

2. (punti 12) Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right).$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 1$. Non vi sono simmetrie. Vale:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
dato che l'argomento dell'arcotangente tende a $+\infty$ in ciascuno di questi casi. Ciò mostra in particulare che la funzione può essere estesa per continuità in $x = 1$ ponendo $f(x) = \pi/2$. Inoltre $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f per $x \to \pm\infty$. L'argomento dell'arcotangente è inoltre sempre non negativo ove definito, dunque $f(x) \geq 0$ $\forall x \neq 1$. La funzione si annulla solo per $x = 0$, e tale punto è quindi di minimo assoluto per f.

Calcoliamo la derivata, dapprima per $x > 1$. Vale:
$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2 + x^4}, \quad \forall x > 1.$$
Dunque $f'(x) > 0$ per $x > 2$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x \in (1,2)$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(2) = 0$. In particolare $x = 2$ è punto di minimo relativo per f, e in tale punto la funzione vale $\arctan 4$. Si ha infine
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1.$$
Analogamente si ha, per $x < 1$:
$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2 + x^4}, \quad \forall x < 1.$$
Dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x < 0$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(0) = 0$. In particolare $x = 0$, punto nel quale la funzione si annulla, è punto di minimo assoluto per f, come già notato in precedenza. Si ha infine
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1.$$
Si noti che la funzione non è definita in $x = 1$. Tuttavia, se si estendesse la funzione per continuità in $x = 1$ come detto sopra, $x = 1$ sarebbe punto di massimo assoluto per f e si avrebbe ivi un punto angoloso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



3. (punti 7+3)

- Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{4\cos x - 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x}.$$

- Calcolare l'area delle regioni finite di piano delimitate dall'asse x, dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$ e dal grafico di f.

Soluzione. Si ha, usando la relazione fondamentale della trigonometria e la sostituzione $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4\cos x - 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4 - 3\sin x}{1 + \sin^2 x + \sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{4 - 3t}{1 + t^2 + t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{2t+1}{1+t^2+t}\,\mathrm{d}t + \frac{11}{2}\int \frac{1}{1+t^2+t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{2t+1}{1+t^2+t}\,\mathrm{d}t + \frac{11}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{2}\int \frac{2t+1}{1+t^2+t}\,\mathrm{d}t + \frac{22}{3}\int \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{2}\log(1+t^2+t) + \frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{3}{2}\log(1+\sin^2 x+\sin x) + \frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sin x+1}{\sqrt{3}}\right),
\end{aligned}$$

avendo posto uguale a zero la costante additiva (è richiesto di calcolare *una* primitiva), e avendo notato che $1 + t^2 + t > 0$ per ogni t.

Circa il secondo punto, si noti che la funzione integranda si può scrivere (si veda sopra) come

$$f(x) = \frac{4 - 3\sin x}{1 + \sin^2 x + \sin x}\cos x$$

e che sia il numeratore che il denominatore della frazione appena scritta sono sempre positivi, dunque f ha il segno di $\cos x$ e quindi nell'intervallo richiesto essa è positiva per $x \in (0, \pi/2)$, negativa per $x \in (\pi/2, \pi)$. Le regioni in questione sono quindi due e le loro aree sono dunque date dagli integrali definiti (attenzione ai segni!)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x - 3\cos x\sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x, \quad -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4\cos x - 3\cos x\sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x,$$

dunque esse valgono entrambe $\frac{11}{6\sqrt{3}}\pi - \frac{3}{2}\log 3$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 18/1/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\sin x-\sin(\sin x)\right]^{\frac{1}{\sin x-\sinh x}}.$$

Soluzione. Sviluppiamo separatamente la base e la quantitÃ a denominatore dell'esponente. Si ha:

$$\begin{aligned}
1+\sin x-\sin(\sin x) &= 1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\sin\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\\
&= 1+x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{6}\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^3+o(x^3)\\
&= 1+\frac{x^3}{6}+o(x^3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x-\sinh x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left[x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\\
&= -\frac{x^3}{3}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Si osservi che

$$\left[1+\sin x-\sin(\sin x)\right]^{\frac{1}{\sin x-\sinh x}}=e^{\frac{\log[1+\sin x-\sin(\sin x)]}{\sin x-\sinh x}}.$$

L'esponente soddisfa:

$$\begin{aligned}
\frac{\log\left[1+\sin x-\sin(\sin x)\right]}{\sin x-\sinh x} &= \frac{\log\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&\to -\frac{1}{2}\quad \text{per } x\to 0.
\end{aligned}$$

Per la continuità della funzione esponenziale il limite cercato vale dunque $1/\sqrt{e}$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{|x+1|}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -1$. Non vi sono simmetrie. Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to -1} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

dato che l'argomento dell'arcotangente tende a $+\infty$ in ciascuno di questi casi. Ciò mostra in particulare che la funzione può essere estesa per continuità in $x = -1$ ponendo $f(x) = \pi/2$. Inoltre $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f per $x \to \pm\infty$. L'argomento dell'arcotangente è inoltre sempre non negativo ove definito, dunque $f(x) \geq 0$ $\forall x \neq 1$. La funzione si annulla solo per $x = 0$, e tale punto è quindi di minimo assoluto per f.

Calcoliamo la derivata, dapprima per $x > -1$. Vale:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2 + x^4}, \quad \forall x > -1.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x > 0$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 0)$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(0) = 0$. In particolare $x = 0$, punto nel quale la funzione si annulla, è punto di minimo assoluto per f, come già notato in precedenza. Si ha infine

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -1.$$

Analogamente si ha, per $x < -1$:

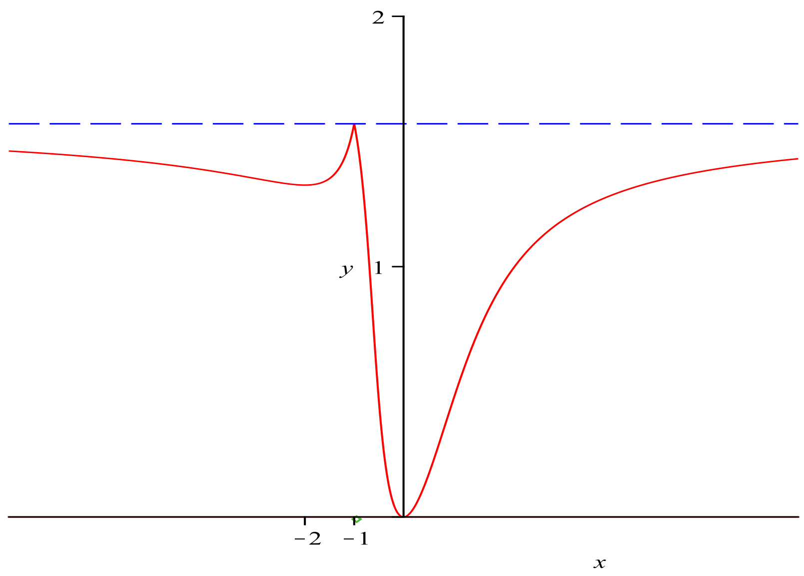
$$f'(x) = -\frac{x(2+x)}{(x-1)^2 + x^4}, \quad \forall x < 1.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (-2, -1)$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x < -2$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(-2) = 0$. In particolare $x = -2$ è punto di minimo relativo per f, e in tale punto la funzione vale $\arctan 4$. Si ha infine

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 1.$$

Si noti che la funzione non è definita in $x = -1$. Tuttavia, se si estendesse la funzione per continuità in $x = -1$ come detto sopra, $x = -1$ sarebbe punto di massimo assoluto per f e si avrebbe ivi un punto angoloso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



3. (punti 7+3)

- Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{4\cos x + 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x - \sin x}.$$

- Calcolare l'area delle regioni finite di piano delimitate dall'asse x, dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$ e dal grafico di f.

Soluzione. Si ha, usando la relazione fondamentale della trigonometria e la sostituzione $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4\cos x + 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x - \sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4 + 3\sin x}{1 + \sin^2 x - \sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{4+3t}{1+t^2-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-1}{1+t^2-t}\,\mathrm{d}t + \frac{11}{2}\int \frac{1}{1+t^2-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-1}{1+t^2-t}\,\mathrm{d}t + \frac{11}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t-1}{1+t^2-t}\,\mathrm{d}t + \frac{22}{3}\int \frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\log(1+t^2-t) + \frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\log(1+\sin^2 x - \sin x) + \frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}}\right),
\end{aligned}$$

avendo posto uguale a zero la costante additiva (è richiesto di calcolare *una* primitiva), e avendo notato che $1 + t^2 - t > 0$ per ogni t.

Circa il secondo punto, si noti che la funzione integranda si può scrivere (si veda sopra) come

$$f(x) = \frac{4 + 3\sin x}{1 + \sin^2 x - \sin x}\cos x$$

e che sia il numeratore che il denominatore della frazione appena scritta sono sempre positivi, dunque f ha il segno di $\cos x$ e quindi nell'intervallo richiesto essa è positiva per $x \in (0, \pi/2)$, negativa per $x \in (\pi/2, \pi)$. Le regioni in questione sono quindi due e le loro aree sono dunque date dagli integrali definiti (attenzione ai segni!)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x + 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x - \sin x}\,\mathrm{d}x, \quad -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4\cos x + 3\cos x \sin x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x - \sin x}\,\mathrm{d}x,$$

dunque esse valgono entrambe $\frac{11}{3\sqrt{3}}\pi$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 05/02/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Risolvere il seguente sistema, nelle variabili complesse z, w:

$$\begin{cases} e^{w-2z} = i \\ \overline{w} + iz = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Dalla seconda equazione si ha $w = 1 + i\overline{z}$. Notando che $i = e^{i\pi/2}$ la prima equazione diventa allora, posto $z = x + iy$:

$$e^{i\pi/2} = e^{w-2z} = e^{1+i\overline{z}-2z} = e^{1+i(x-iy)-2(x+iy)} = e^{1+y-2x+i(x-2y)} = e^{1+y-2x}e^{i(x-2y)}.$$

Due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli coincidono e le loro fasi differiscono di un multiplo intero di 2π. Dunque deve valere:

$$1 + y - 2x = 0,\ x - 2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Calcoli elementari mostrano allora che deve essere, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right),\ y = \frac{1}{3}\left(1 - \pi + 4h\pi\right),$$

cosicché $z = \frac{1}{6}(4-\pi+4h\pi)+\frac{i}{3}(1-\pi+4h\pi)$. I possibili valori di w si calcolano ricordando che $w = 1+i\overline{z} = 1+y+ix$ e dunque, essendo $y = 2x-1$, $w = x(2+i) = \frac{1}{6}(4-\pi+4h\pi)(2+i)$. Dunque le soluzioni al sistema sono le coppie z, w tali che, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi) + \frac{i}{3}(1 - \pi + 4h\pi) \\ w = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi)(2 + i). \end{cases}$$

2. Stabilire per quali valori del parametro reale h la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.
Per un particolare valore di h la matrice ammette un autospazio bidimensionale. Trovare la base di tale autospazio.

Soluzione. Si determinano gli autovalori della matrice:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (h-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-1) = 0.$$

Lo spettro della matrice A_h è: $\mathrm{Sp}(A_h) = \{h, -1, 1, 2\}$. Se $h \neq \pm 1 \wedge h \neq 2$ gli autovalori sono tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h = 1$. $\mathrm{Sp}(A_1) = \left\{-1, 1^2, 2\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla e altre due colonne uguali. Esistono minori di ordine due non nulli, dunque il rango di $A_1 - \mathbb{I}$ vale 2, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è uguale alla molteplicità algebrica (due), pertanto A_1 è diagonalizzabile.
Sia $h = -1$. $\mathrm{Sp}(A_{-1}) = \left\{-1^2, 1, 2\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -1$.

$$A_{-1} + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla. Esistono minori di ordine tre non nulli, infatti la sottomatrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, dunque il rango di $A_{-1} + \mathbb{I}$ vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è diversa dalla molteplicità algebrica (due), pertanto A_{-1} non è diagonalizzabile.
Sia $h = 2$. $\mathrm{Sp}(A_2) = \left\{-1, 1, 2^2\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$.

$$A_2 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla. Esiste un minore di ordine tre non nullo, dunque il rango di $A_2 - 2\mathbb{I}$ vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 2 è diversa dalla molteplicità algebrica (due), pertanto A_2 non è diagonalizzabile.

In definitiva, la matrice A_h è diagonalizzabile se $h \neq -1$ e $h \neq 2$.

Determiniamo infine una base dell'autospazio bidimensionale (relativo all'autovalore $\lambda = 1$) della matrice A_1. Eliminando le righe ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

da cui segue che: $x_4 = 0$ e $x_2 = x_3$. per base dell'autospazio si può scegliere la copia di autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2+3}\, e^{\frac{x}{x-1}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 1$. Essa non è né pari né dispari. Chiaramente la funzione è ovunque positiva ove definita, e $f(0) = \sqrt{3}$. Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

È possibile che siano presenti asintoti obliqui. Per verificarlo notiamo che, per $x \to \pm\infty$, vale (si usi l'ovvia proprietà $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to \pm\infty$):

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}e^{1+\frac{1}{x-1}} = e\,|x|\left[1+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left[1+\frac{1}{x-1}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = e\,|x|\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \begin{cases} e\,x+e+o(1) & \text{se } x\to+\infty \\ -(e\,x+e)+o(1) & \text{se } x\to-\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

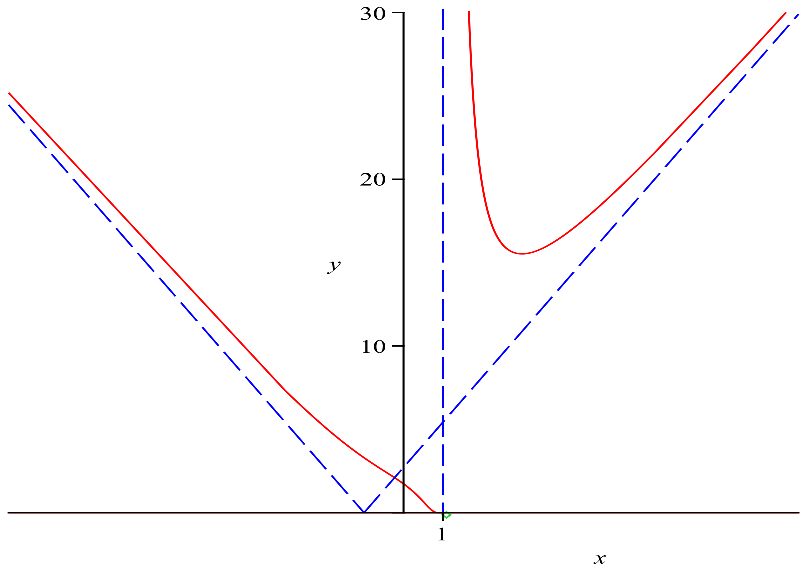
Quindi le rette $y = e\,x+e$ e $y = -(e\,x+e)$ sono asintoti obliqui per f se $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ rispettivamente.

La funzione è derivabile nel suo dominio di definizione. Calcoli elementari mostrano che, sempre per $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+3}}\, e^{\frac{x}{x-1}}.$$

Da ciò si deduce che f è crescente nell'intervallo $(3,+\infty)$, decrescente separatamente negli intervalli $(-\infty,1)$, $(1,3)$, in particolare $x = 3$ è punto di minimo relativo. Si noti infine che $\lim_{x\to1^-} f'(x) = 0$ (l'esponenziale prevale sulla potenza), dunque il grafico di f si avvicina al punto $(1,0)$ quando $x \to 1^-$ con tangente che tende a diventare orizzontale.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. Calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{1+\sqrt{x-1}}{x+2+2\sqrt{x-1}}.$$

Successivamente, calcolare *senza usare l'espressione esplicita della primitiva*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1+\sqrt{s-1}}{s+2+2\sqrt{s-1}}\,\mathrm{d}s.$$

Soluzione. Poniamo $\sqrt{x-1}=t$. Vale $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$. Dunque si ha:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x+2+2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2t(1+t)}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{t+3}{t^2+2t+3}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2t-2\int\frac{t+3}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale scritto. Vale (si noti che $t^2+2t+3\geq 0$ per ogni t):

$$\begin{aligned}\int\frac{2t+6}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t &= \int\frac{2t+2}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t+4\int\frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3)+4\int\frac{1}{(t+1)^2+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3)+2\int\frac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3)+2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Dunque si ha, con t come sopra:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x+2+2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= 2t-\log(t^2+2t+3)-2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\sqrt{x-1}-\log(x+2+2\sqrt{x-1})-2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}$$

dove si è posta uguale a zero la costante arbitraria.

Riguardo al secondo punto basta notare che la funzione integranda f è positiva nell'intervallo di integrazione e vale

$$f(s)\underset{s\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico per integrali impropri ne segue che il limite richiesto vale $+\infty$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 05/02/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Risolvere il seguente sistema, nelle variabili complesse z, w :

$$\begin{cases} e^{z-2w} = i \\ \overline{z} + iw = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Dalla seconda equazione si ha $z = 1 + i\overline{2}$. Notando che $i = e^{i\pi/2}$ la prima equazione diventa allora, posto**Soluzione.** $w = x + iy$:

$$e^{i\pi/2} = e^{z-22} = e^{1+i\overline{w}-2w} = e^{1+i(x-iy)-2(x+iy)} = e^{1+y-2x+i(x-2y)} = e^{1+y-2x}e^{i(x-2y)}.$$

Due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli coincidono e le loro fasi differiscono di un multiplo intero di 2π . Dunque deve valere:

$$1 + y - 2x = 0, \; x - 2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Calcoli elementari mostrano allora che deve essere, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right), \; y = \frac{1}{3}\left(1 - \pi + 4h\pi\right),$$

cosicché $w = \frac{1}{6}(4-\pi+4h\pi)+\frac{i}{3}(1-\pi+4h\pi)$. I possibili valori di z si calcolano ricordando che $z = 1+i\overline{w} = 1+y+ix$ e dunque, essendo $y = 2x-1$, $z = x(2+i) = \frac{1}{6}(4-\pi+4h\pi)(2+i)$. Dunque le soluzioni al sistema sono le coppie z, w tali che, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi)(2 + i) \\ w = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi) + \frac{i}{3}(1 - \pi + 4h\pi). \end{cases}$$

2. Stabilire per quali valori del parametro reale h la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.
Per un particolare valore di h la matrice ammette un autospazio bidimensionale. Trovare la base di tale autospazio.

Soluzione. Si determinano gli autovalori della matrice:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (3-\lambda)(h-\lambda)(\lambda^2-1) = 0.$$

Lo spettro della matrice A_h è: $\mathrm{Sp}(A_h) = \{h, -1, 1, 3\}$. Se $h \neq \pm 1 \wedge h \neq 3$ gli autovalori sono tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h = -1$. $\mathrm{Sp}(A_{-1}) = \left\{-1^2, 1, 3\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -1$.

$$A_{-1} + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla e altre due colonne uguali. Esistono minori di ordine due non nulli, dunque il rango di $A_{-1} + \mathbb{I}$ vale 2, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è uguale alla molteplicità algebrica (due), pertanto A_{-1} è diagonalizzabile.
Sia $h = 1$. $\mathrm{Sp}(A_1) = \left\{-1, 1^2, 3\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla. Esistono minori di ordine tre non nulli, infatti la sottomatrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, dunque il rango di $A_1 - \mathbb{I}$ vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è diversa dalla molteplicità algebrica (due), pertanto A_{-1} non è diagonalizzabile.
Sia $h = 3$. $\mathrm{Sp}(A_3) = \left\{-1, 1, 3^2\right\}$. Si determina la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$.

$$A_3 - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha una colonna nulla. Esiste un minore di ordine tre non nullo, dunque il rango di $A_3 - 3\mathbb{I}$ vale 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 3 è diversa dalla molteplicità algebrica (due), pertanto A_3 non è diagonalizzabile.

In definitiva, la matrice A_h è diagonalizzabile se $h \neq 1$ e $h \neq 3$.

Determiniamo infine una base dell'autospazio bidimensionale (relativo all'autovalore $\lambda = -1$) della matrice A_{-1}.
Eliminando le righe ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

da cui segue che: $x_1 = 0$ e $x_2 = -x_3$. per base dell'autospazio si può scegliere la copia di autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+3}\, e^{\frac{x}{x+1}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -1$. Essa non è né pari né dispari. Chiaramente la funzione è ovunque positiva ove definita, e $f(0) = \sqrt{3}$. Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0.$$

È possibile che siano presenti asintoti obliqui. Per verificarlo notiamo che, per $x \to \pm\infty$, vale (si usi l'ovvia proprietà $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to \pm\infty$):

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}e^{1-\frac{1}{x+1}} = e\,|x|\left[1+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left[1-\frac{1}{x+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = e\,|x|\left[1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \begin{cases} e\,x - e + o(1) & \text{se } x \to +\infty \\ -e\,x + e + o(1) & \text{se } x \to -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

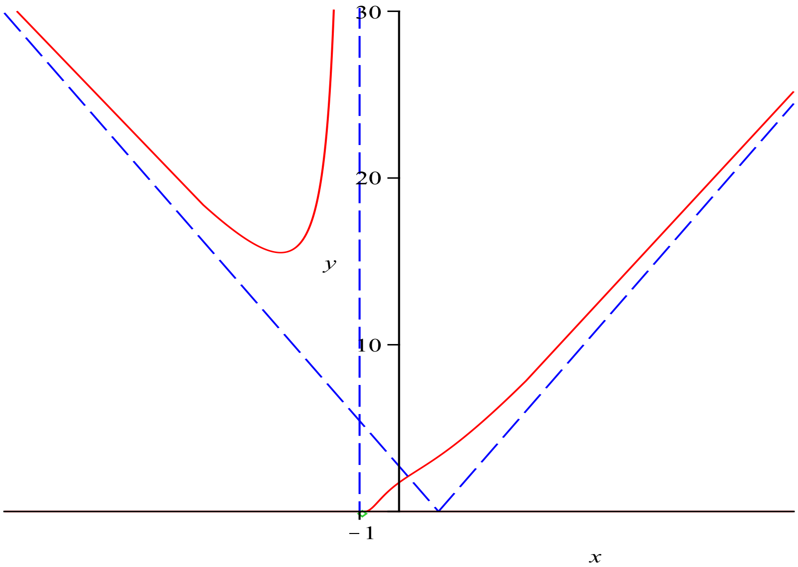
Quindi le rette $y = e\,x - e$ e $y = -e\,x + e$ sono asintoti obliqui per f se $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ rispettivamente.

La funzione è derivabile nel suo dominio di definizione. Calcoli elementari mostrano che, sempre per $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{(x+3)(x^2+1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+3}}\, e^{\frac{x}{x+1}}.$$

Da ciò si deduce che f è decrescente nell'intervallo $(-\infty,-3)$, crescente separatamente negli intervalli $(-3,-1)$, $(-1,+\infty)$, in particolare $x = 3$ è punto di minimo relativo. Si noti infine che $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$ (l'esponenziale prevale sulla potenza), dunque il grafico di f si avvicina al punto $(-1,0)$ quando $x \to (-1)^+$ con tangente che tende a diventare orizzontale.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. Calcolare una primitiva della funzione
$$\frac{1+\sqrt{x-2}}{x+1+2\sqrt{x-2}}.$$
Successivamente, calcolare *senza usare l'espressione esplicita della primitiva*
$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1+\sqrt{s-2}}{s+1+2\sqrt{s-2}}\,\mathrm{d}s.$$

Soluzione. Poniamo $\sqrt{x-2}=t$. Vale $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Dunque si ha:
$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x-2}}{x+1+2\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2t(1+t)}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{t+3}{t^2+2t+3}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2t - 2\int \frac{t+3}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Calcoliamo l'ultimo integrale scritto. Vale (si noti che $t^2+2t+3\geq 0$ per ogni t):
$$\begin{aligned}\int \frac{2t+6}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{2t+2}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3) + 4\int \frac{1}{(t+1)^2+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3) + 2\int \frac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \log(t^2+2t+3) + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$
Dunque si ha, con t come sopra:
$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x-2}}{x+1+2\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x &= 2t - \log(t^2+2t+3) - 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\sqrt{x-2} - \log(x+1+2\sqrt{x-2}) - 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}$$
dove si è posta uguale a zero la costante arbitraria.

Riguardo al secondo punto basta notare che la funzione integranda f è positiva nell'intervallo di integrazione e vale
$$f(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{s}}.$$
Per il criterio del confronto asintotico per integrali impropri ne segue che il limite richiesto vale $+\infty$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 19/06/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$z^2 - (\overline{z})^2 = 2i(|z + \overline{z}| - 1)$$

Stabilire in particolare se tale equazione ha soluzioni reali, se ha soluzioni immaginarie, e se vi sono soluzioni di modulo massimo.

Soluzione. Posto $z = x + iy$ si ha che l'equazione data e' soddisfatta se e solo se:

$$x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 - y^2 - 2ixy) = 2i(2|x| - 1)$$

ovvero se e solo se $2xy = 2|x| - 1$. Se $x = 0$ tale equazione non ha soluzioni. Se $x > 0$ essa diventa $y = 1 - \frac{1}{2x}$, ovvero il ramo individuato dalle condizione $x > 0$ della corrispondente iperbole. Se $x < 0$ la condizione diventa $y = -1 - \frac{1}{2x}$, ovvero il ramo individuato dalle condizione $x < 0$ della corrispondente iperbole. L'insieme delle soluzioni è dato, nel piano complesso, dall'unione di tali due insiemi. Chiaramente non vi sono quindi soluzioni immaginarie, mentre vi sono le soluzioni reali (corrispondenti a $y = 0$) $x = \pm\frac{1}{2}$). Non vi sono soluzioni di modulo massimo, infatti il modulo di un numero complesso rappresenta la distanza dall'origine e l'insieme sopra determinato e' chiaramente illimitato.

2. (punti 8) Date le rette in $\mathbb{R}^3$ di equazioni:

$$r_1 : \begin{cases} 2(x-1) = y+2 \\ z = 5 \end{cases} \qquad\qquad r_2 : \frac{x-4}{2} = -\frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$$

Sia π_1 il piano contenente la retta r_1 e parallelo a r_2 e sia π_2 il piano contenente la retta r_2 e parallelo a r_1. Determinare l'equazione del piano π equidistante da π_1 e da π_2.

Soluzione. Le rette possono essere riscritte nelle forme parametriche:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+2t, \\ z = 5 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 4+2t' \\ y = -2t' \\ z = -2+3t' \end{cases}, \qquad t, t' \in \mathbb{R}.$$

I vettori direzione delle due rette sono: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Tali vettori non sono proporzionali, dunque le rette non sono parallele. Le rette sono inoltre sghembe, infatti il sistema

$$\begin{cases} 1+t = 4+2t' \\ -2+2t = -2t' \\ 5 = -2+3t' \end{cases}$$

non ammette soluzioni nelle variabili t e t'.

Un vettore ortogonale alle direzioni delle due rette sarà proporzionale al vettore

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}.$$

Scegliamo ad esempio $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Il piano π_1 contenente la retta r_1 e parallelo a r_2 dovrà essere perpendicolare a $\boldsymbol{v}$. Di conseguenza la sua equazione cartesiana è: $2(x-x_1) - (y-y_1) - 2(z-z_1) = 0$. Come punto generico del piano (x_1, y_1, z_1) si può scegliere un qualsiasi punto appartenente alla retta r_1, per esempio: $P_1 = (1, -2, 5)$. Si ha:

$$\pi_1 : 2x - y - 2z = -6.$$

Analogamente l'equazione del piano π_2 contenente la retta r_2 e parallelo a r_1 è (si scelga $P_2 = (4, 0, -2)$ come punto appartenente alla retta r_2):

$$\pi_2 : 2x - y - 2z = 12.$$

Il piano π, equidistante dai piani π_1 e π_2 deve essere parallelo a tali piani, dunque sarà della forma $2x - y - 2z = k$ per un opportuno $k \in \mathbb{R}$, e conterrà il punto medio di un qualsiasi segmento P_1P_2 con $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \in \pi_2$.

Con le scelte di P_1 e P_2 fatte in precedenza si ricava facilmente l'equazione del piano:

$$\pi : 2x - y - 2z = 3.$$

3. (punti 8) Calcolare il polinomio di Taylor di grado quattro, centrato nell'origine, della funzione

$$f(x) = (x-5)\log(e^x - x) + e^{x^2-\sin(x^2)} - 1.$$

Soluzione. Per i noti sviluppi notevoli vale, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
&e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);\\
&\log(e^x - x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\\
&\qquad\qquad\qquad = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4);\\
&(x-5)\log(e^x - x) = (x-5)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4);\\
&x^2 - \sin\left(x^2\right) = x^2 - \left(x^2 + o(x^4)\right) = o(x^4);\\
&e^{x^2-\sin\left(x^2\right)} = e^{o(x^4)} = 1 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$(x-5)\log(e^x - x) + e^{x^2-\sin(x^2)} - 1 = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) + 1 + o(x^4) - 1 = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4).$$

Dunque il polinomio cercato è $P_4(x) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4$.

4. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e di convessità. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita se $x \neq 1$ e inoltre $\frac{x}{x-1} \in [-1, 1]$. Calcoli immediati mostrano che $\frac{x}{x-1} \leq 1$ è verificata se e solo se $x < 1$, e che $\frac{x}{x-1} \geq -1$ è soddisfatta, se si suppone $x < 1$ come da calcolo precedente, se $x \leq \frac{1}{2}$. Dunque la funzione è definita per $x \leq \frac{1}{2}$. Non vi sono simmetrie. Si ha:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}.$$

La funzione è derivabile per $x < \frac{1}{2}$ (*non* lo è, seppure da sinistra, per $x = \frac{1}{2}$). Vale, sempre per $x < \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x-1)^2}}} \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = -\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2 - x^2}} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-2x}},$$

dove si è notato che $|x - 1| = 1 - x$ nel dominio di definizione di f. Si noti in particolare che $f'(x) < 0$ per ogni $x < \frac{1}{2}$, dunque che f è ovunque decrescente nel suo dominio, e che

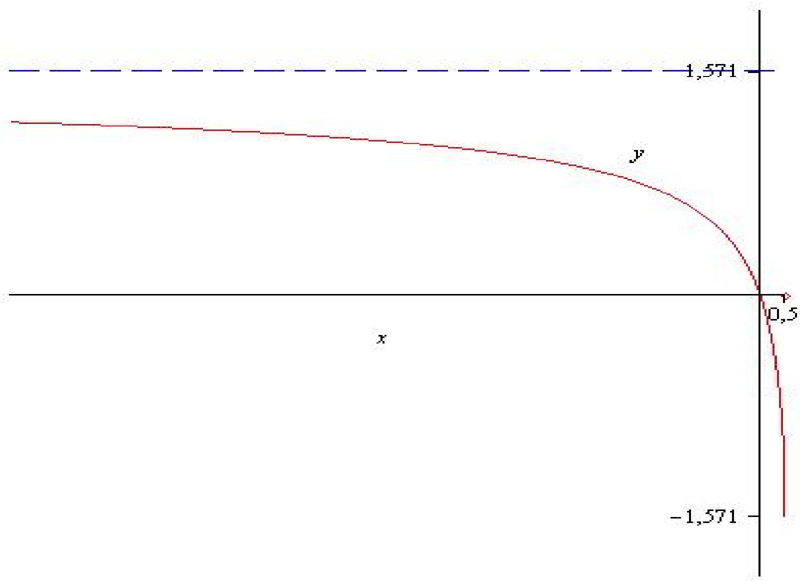
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f'(x) = -\infty,$$

dunque la tangente al grafico di f tende a diventare verticale in tale limite. Calcoli elementari forniscono poi, sempre per $x < \frac{1}{2}$,

$$f''(x) = \frac{3x - 2}{(x-1)^2(1-2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ciò mostra in particolare che la derivata seconda è ovunque negativa per $x < \frac{1}{2}$, e dunque che la funzione è concava in tutto il suo dominio di definizione.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 9/7/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Si consideri la funzione complessa di variabile complessa data da $f(z) = e^{z^2}$.

i. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ vale $|f(z)| > 1$;

ii. Sia D l'insieme di cui al punto precedente. Determinare quali punti appartengono all'insieme E così definito: $E := \{w \in \mathbb{C}, w = 2iz \text{ per qualche } z \in D\}$.

iii. Si consideri l'insieme $F := \{w \in \mathbb{C}, w = e^z \text{ per qualche } z \in D \text{ con } \operatorname{Re} z < 0\}$. Stabilire se F è o meno limitato.

Soluzione. Scrivendo $z = x + iy$ si ha $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e quindi $e^{z^2} = e^{x^2-y^2}\, e^{2ixy}$. Dunque $|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$. Ne segue che $|f(z)| > 1$ se e solo se $x^2 - y^2 > 0$ ovvero se e solo se $|x| > |y|$. Per quanto riguarda il punto *ii*) abbiamo, per quanto mostrato al punto precedente sulla struttura di D , che se $z \in D$ allora $2z \in D$. Poiché la molteplicazione per i nel campo complesso corrisponde a una rotazione centrata nell'origine, in senso antiorario e di ampiezza $\pi/2$, ne segue che l'insieme E coincide con l'insieme dei numeri complessi della forma $w = x + iy$ con $|y| > |x|$. Infine riguardo al punto *iii*) si noti ancora che se $z = x + iy$ allora $|e^z| = e^x$. Dunque $\sup_{z\in D} |e^z| = 1$ dato che per ipotesi $x < 0$ in D , e x può essere arbitrariamente vicino a zero in D per quanto notato nel primo punto. Dunque F è limitato, dato che per definizione un insieme $A \subset \mathbb{C}$ è limitato se esiste $M > 0$ tale che $|z| \le M$ $\forall z \in A$, cosa che vale nel caso in questione con la scelta $M = 1$.

2. (punti 8) Sia k un numero reale. Dati i piani π_1, π_2 e π_3 rispettivamente di equazione $kx + 2y = 0$, $kx + 4y - 2z + 2 = 0$ e $x + y + kz - k^2 = 0$, determinare la dimensione dell'insieme $\Omega = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ al variare del parametro k.

Nel caso in cui Ω sia monodimensionale, rappresentare tale insieme in forma parametrica.

Soluzione. Ω è l'insieme soluzione del sistema:

$$\begin{cases} kx + 2y = 0 \\ kx + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x + y + kz - k^2 = 0 \end{cases}$$

Per determinarne la dimensione occorre determinare il rango della matrice A dei coefficienti e della matrice completa $A|\mathbf{b}$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ k & 4 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad A|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 0 \\ k & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array}\right).$$

Il rango di A non è inferiore a due, infatti esiste una sottomatrice di A (ad esempio quella formata dalla prima e seconda riga e dalla seconda e terza colonna) con determinante diverso da zero.

Poiché $\det A = 2k^2 + 2k - 4 = 2(k-1)(k+2)$, il rango di A vale due se $k = 1 \vee k = -2$, vale tre altrimenti.

Sia $k = -2$, la matrice completa ha rango tre per la presenza della sottomatrice di ordine tre formata dalle ultime tre colonne che ha determinante palesemente non nullo.

Sia $k = 1$, la matrice completa ha rango due perché la colonna dei termini noti è uguale alla terza colonna della matrice dei coefficienti.

Pertanto, per il teorema di Rouchè-Capelli, se $k = 1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni, se $k = -2$ il sistema è impossibile, se $k \neq 1 \wedge k \neq -2$ il sistema ha un'unica soluzione.

Per rispondere al secondo quesito, si noti che da quanto svolto segue che lo spazio delle soluzioni è monodimensionale se e solo se $k = 1$. In tal caso Ω è rappresentato dalla retta soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

dove si è considerata ridondante la seconda equazione. Ponendo per esempio $y = t$, si ottiene per Ω la seguente equazione parametrica:

$$\Omega = \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{2x}\left(x^2 - |x+1|\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e di convessità. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è ovunque definita. Non vi sono simmetrie. Vale $f(0) = -1$. Se $x \geq -1$, vale $f(x) = e^{2x}\left(x^2 - x - 1\right)$, dunque f è positiva per $x \in \left[-1, (1-\sqrt{5})/2\right) \cup \left((1+\sqrt{5})/2, +\infty\right)$, negativa per $x \in \left((1-\sqrt{5})/2, (1+\sqrt{5})/2\right)$, si annulla in $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ (si noti che $(1-\sqrt{5})/2 > -1$). Se invece $x < -1$ vale $f(x) = e^{2x}\left(x^2 + x + 1\right)$ e dunque la funzione è sempre strettamente positiva in tale intervallo. Chiaramente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ visto che la crescita della funzione è esponenziale. Calcoliamo, separatamente per $x > -1$ e $x < -1$, la derivata prima. Vale

$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 - 3) \text{ se } x > -1, \quad f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 4x + 3) \text{ se } x < -1.$$

Calcoli immediati dunque mostrano che $f'(x) > 0$ se $x < -1$ e per $x > \sqrt{3/2}$, negativa, per $x \in \left(-1, \sqrt{3/2}\right)$, dunque f è crescente per $x \in (-\infty, -1)$ e per $x \in \left(\sqrt{3/2}, +\infty\right)$, descrescente per $x \in \left(-1, \sqrt{3/2}\right)$. Dunque $x = \sqrt{3/2}$ è punto di minimo per f, tale minimo essendo assoluto dato lo studio del segno di f e dei limiti svolto in precedenza. La funzione non è derivabile in $x = -1$ e tale punto è angoloso, infatti

$$\lim_{x\to-1^\pm} f'(x) = \mp e^{-2}.$$

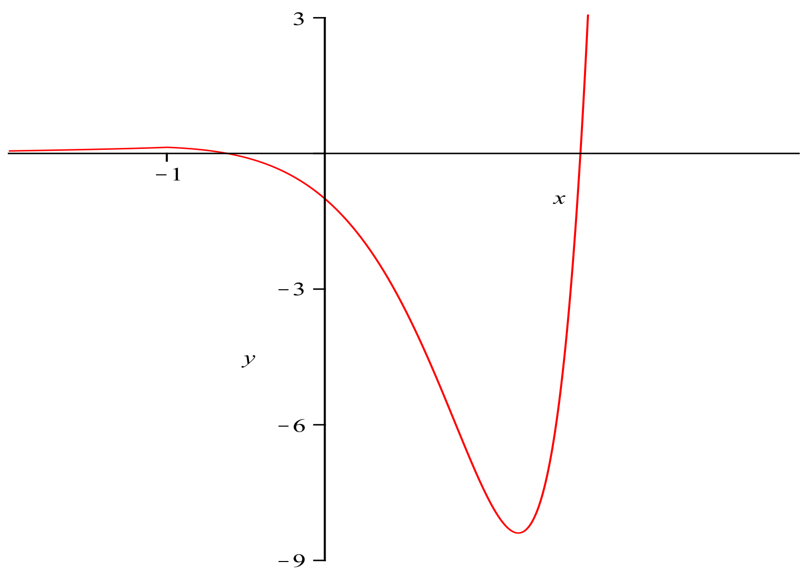
Il punto $x = -1$ è, essendo f continua e per lo studio del segno di f', un punto di massimo relativo, pur non essendo f derivabile in tale punto. Tale punto non è di massimo assoluto, essendo f illimitata dall'alto (si ricordi il limite di f per $x \to +\infty$).

Calcoliamo infine la derivata seconda, sempre per $x \neq -1$. Vale

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 2x - 3) \text{ se } x > -1, \quad f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 6x + 5) \text{ se } x < -1.$$

Ne segue che $f''(x) > 0$ per $x < -1$ e per $x > (-1+\sqrt{7})/2$ e quindi che f è convessa separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in (-1, (-1+\sqrt{7})/2)$ e quindi f è concava in tale intervallo. Il punto $x = (-1+\sqrt{7})/2$ è di flesso a tangente obliqua per f.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 8)

i. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x+1}}.$$

ii. Stabilire, *senza far uso dell'espressione della primitiva calcolata al punto precedente*, il dominio di definizione della funzione
$$F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{t\sqrt[3]{t+1}}\mathrm{d}t$$
e, se necessario qualitativamente, i limiti di F agli estremi di tale dominio.

Soluzione. Operiamo il cambio di variabile $(1+x)^{1/3} = s$. Si ha $x = s^3 - 1$ e $\mathrm{d}x = 3s^2\,\mathrm{d}s$. Quindi, sviluppando successivamente in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(s^3-1)s}3s^2\,\mathrm{d}s\\ &= 3\int \frac{s}{(s-1)(s^2+s+1)}\,\mathrm{d}s\\ &= \int\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1-s}{s^2+s+1}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Il primo contributo all'ultimo integrale scritto è immediato. Quando al secondo notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1-s}{s^2+s+1} &= -\frac{1}{2}\frac{2s+1}{s^2+s+1}+\frac{3}{2(s^2+s+1)}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{2s+1}{s^2+s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{2s+1}{s^2+s+1}+\frac{2}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}.\end{aligned}$$

Dunque si ha, tornando nell'ultimo passaggio alla variabile originaria x:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1-s}{s^2+s+1}\right)\mathrm{d}s\\ &= \int\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{2s+1}{s^2+s+1}+\frac{2}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\right)\mathrm{d}s\\ &= \log|s-1|-\frac{1}{2}\log(s^2+s+1)+\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \log\left|(1+x)^{1/3}-1\right|-\frac{1}{2}\log\left[(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1\right]+\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left((1+x)^{1/3}+\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

dove si è notato che $s^2+s+1>0$ per ogni s e si è posta per semplicità uguale a zero la costante di integrazione.

Riguardo alla seconda domanda notiamo che la funzione integranda ha singolarità in $t = 0$ e in $t = -1$. La funzione integranda è asintotica a $-1/(t+1)^{1/3}$ per $t \to -1$, dunque è integrabile in un intorno di tale punto, mentre è asintotica a $1/t$ per $t \to 0$, dunque non è integrabile in un intorno di tale punto. La funzione F è quindi definita per $x \in (-\infty, 0)$. Dalle considerazioni precedenti, e dal fatto che f è negativa in un intorno sinistro dell'origine, ne segue che $\lim_{x\to 0^-} F(x) = -\infty$.

Per $t \to -\infty$, la funzione integranda è asintotica a $1/t^{4/3}$, che è integrabile in un intorno di $-\infty$. Ne segue che $\lim_{x\to 0^-} F(x) = L$ per un opportuno $L \in \mathbb{R}$. È peraltro chiaro che $L < 0$, perché la funzione integranda è sempre positiva per $t < -1$, tuttavia per $x < -2$ l'intervallo di integrazione è orientato negativamente. Non è possibile calcolare esattamente L con le considerazioni qualitative appena svolte, né ciò è richiesto. Si noti tuttavia a titolo puramente integrativo che l'espressione della primitiva consentirebbe facilmente di desumere che $L = -\sqrt{3}\pi/2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 13/9/2018**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Si consideri la funzione complessa di variabile complessa data da $f(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$, $z \neq -i$.

i) Stabilire se f è suriettiva (cioè se l'equazione $f(z) = w$ ha almeno una soluzione per ogni $w \in \mathbb{C}$);

ii) Stabilire se f è iniettiva (cioè se l'equazione $f(z) = w$ ha al più una soluzione per ogni $w \in \mathbb{C}$);

iii) Si consideri l'insieme $D := \{w \in \mathbb{C}, w = f(z) \text{ per qualche } z \text{ t.c.} |z| \leq 2, z \neq -i\}$. Stabilire se D è o meno limitato.

Soluzione. Dato $w \in \mathbb{C}$ l'equazione $f(z) = w$ si riscrive come $iz(1+w) = w-1$, che è risolubile se e solo se $w \neq -1$. Ne segue che f non è suriettiva. Essa è invece iniettiva, perché se $w \neq -1$ la soluzione dell'equazione $f(z) = w$ è unica ed è data da $z = i(1-w)/(w+1)$. Circa l'ultimo punto notiamo che, posto $z = x + iy$, calcoli elementari mostrano che

$$|f(z)|^2 = \frac{(1-y)^2 + x^2}{(1+y)^2 + x^2}$$

(si ricordi che $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ se $z_2 \neq 0$), cosicché $|f(z)| \to +\infty$ se $z \to -i$, cioè se $y \to -1$, $x \to 0$. Dunque D è illimitato.

2. (punti 8) Sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica dello spazio $\mathbb{R}^3$ e sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che, posto $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, si ha: $f_h(\boldsymbol{v}) = (-hx + 2z)\boldsymbol{i} + ((h+1)x - y - z)\boldsymbol{j} + (2x + hy + 3z)\boldsymbol{k}$, dove h è un parametro reale.

- Deteminare la matrice A_h associata alla funzione f_h.
- Determinare i valori di h per cui l'applicazione risulta non suriettiva. Per uno solo di tali valori la matrice A_h risulta simmetrica, sia esso $\bar{h}$.
- Posto $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, determinare l'insieme dei vettori $\boldsymbol{v}$ tali che $f_{\bar{h}}(\boldsymbol{v}) = f_{\bar{h}}(\boldsymbol{w})$.
- Stabilire se la matrice $A_{\bar{h}}$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

- La forma della matrice A_h associata alla funzione f_h è la seguente:

$$A_h = \begin{pmatrix} -h & 0 & 2 \\ 1+h & -1 & -1 \\ 2 & h & 3 \end{pmatrix}.$$

- La funzione non è suriettiva se $\det A_h = h^2 + 5h + 4 = 0$, ovvero se $h = -1$ oppure $h = -4$.
  Nel caso $h = -1$ si ha:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

  dunque A_{-1} è simmetrica, è inoltre immediato verificare che A_{-4} non lo è. Sia dunque $\bar{h} = -1$.
- Per rispondere al quesito è sufficiente determinare il nucleo della funzione. Infatti sia f lineare e $\boldsymbol{n} \in \ker f$, allora $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}) \iff f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} f$. Dunque i vettori $\boldsymbol{v}$ richiesti sono quelli della forma $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{n} \in \operatorname{Ker} f$.

  Per determinare il nucleo di f_{-1} si risolve il seguente sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  da cui, ponendo per esempio $z = -t$, segue: $x = 2t$ e $y = t$, dove $t \in \mathbb{R}$.
  Pertanto: $\boldsymbol{n} \in \ker f_{-1}$ se $\boldsymbol{n} = 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}$, quindi: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{w} = (1+2t)\boldsymbol{i} + (2+t)\boldsymbol{j} + (4-t)\boldsymbol{k}$.
- A_{-1}, essendo reale e simmetrica, è diagonalizzabile in virtù del teorema spettrale. È comunque facile notare che gli autovalori risultano reali e distinti.

3. (punti 8) Si consideri la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{1}{\cos\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]} + \cos\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] - 2$$

i) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 di f, centrato nell'origine;

ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $1/f(x)^\alpha$ è integrabile in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine.

Soluzione. Notiamo dapprima che

$$\frac{x}{1+x} = x[1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)] = x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6}\left[x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)\right]^3 + o(x^4) \\
&= x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^4\right) + o(x^4) \\
&= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4); \\
\cos\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] &= 1 - \frac{1}{2}\left[x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right]^2 + \frac{1}{24}\left[x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right]^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[x^2 - 2x^3 + \frac{5}{3}x^4 + x^4 + o(x^4)\right] + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{31}{24}x^4 + o(x^4); \\
\frac{1}{\cos\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{31}{24}x^4 + o(x^4)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{31}{24}x^4 + o(x^4) + \left[\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{31}{24}x^4 + o(x^4)\right]^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{37}{24}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Se ne conclude che:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{37}{24}x^4 + o(x^4) + \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{31}{24}x^4 + o(x^4)\right] - 2 \\
&= \frac{x^4}{4} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque il polinomio di Taylor richiesto è $P_4(x) = \frac{x^4}{4}$.

Circa la seconda parte, è chiaro dal punto precedente che

$$\frac{1}{f(x)^\alpha} \sim \frac{4^\alpha}{x^{4\alpha}} \quad \text{per } x \to 0.$$

Per il noto criterio di integrabilità asintotica, ne segue che l'integrabilità richiesta ha luogo se e solo se $4\alpha < 1$, ovvero se e solo se $\alpha < \frac{1}{4}$.

4. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x \log |x|}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio dettagliato della derivata seconda, ma solo di indicare le informazioni qualitative sugli intervalli di concavità e di convessità che possono essere desunte dallo studio precedente. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0, x \neq \pm 1$. Non vi sono simmetrie. La funzione è ovunque strettamente positiva. Vale:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^{\pm},\\
&\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,\\
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+.
\end{aligned}$$

Per trarre tali conclusioni è sufficiente esaminare il limite dell'esponente nei vari casi da studiare. Nei casi di cui alla prima riga tale limite vale zero, nei casi di cui alla seconda riga vale $+\infty$, nei casi di cui alla terza riga vale $-\infty$. Gli asserti seguono usando tali informazioni e il teorema sui limiti delle funzioni composte.

Calcoliamo la derivata di f, che esiste per ogni x nel dominio di f. Vale, per $x \neq 0, x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x \log |x|}} \frac{1 + \log |x|}{x^2 \log^2 |x|}.$$

Dunque il segno di f' è determinato dal segno della quantità $-(1 + \log |x|)$. Ne segue che $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right)$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, e che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{1}{e}$. Quindi f è crescente separatamente negli intervalli $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, decrescente separatamente negli intervalli $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$, $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, $(1, +\infty)$, inoltre $x = -\frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo, mentre $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo. Si noti che f è illimitata dall'alto, quindi non vi sono massimi assoluti, e che non vi sono nemmeno minimi assoluti perché la funzione è sempre positiva e può assumere valori arbitrariamente vicini a zero, ma non si annulla mai.

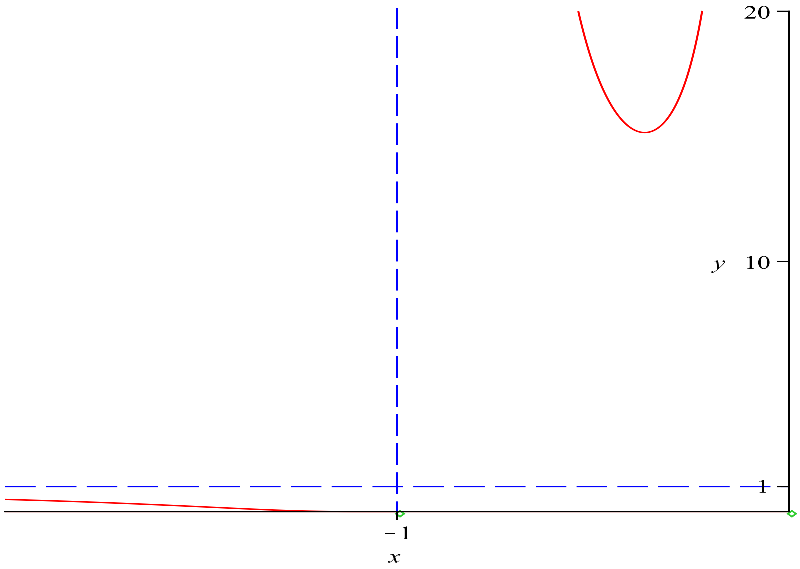
Notiamo infine che in ciascuno dei punti in cui il limite di f vale zero, anche il limite di f' vale zero. Infatti in tali casi prevale l'esponenziale (che, per ipotesi, ha limite zero) sulla frazione che ad esso si moltiplica per ottenere f'. Dunque:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

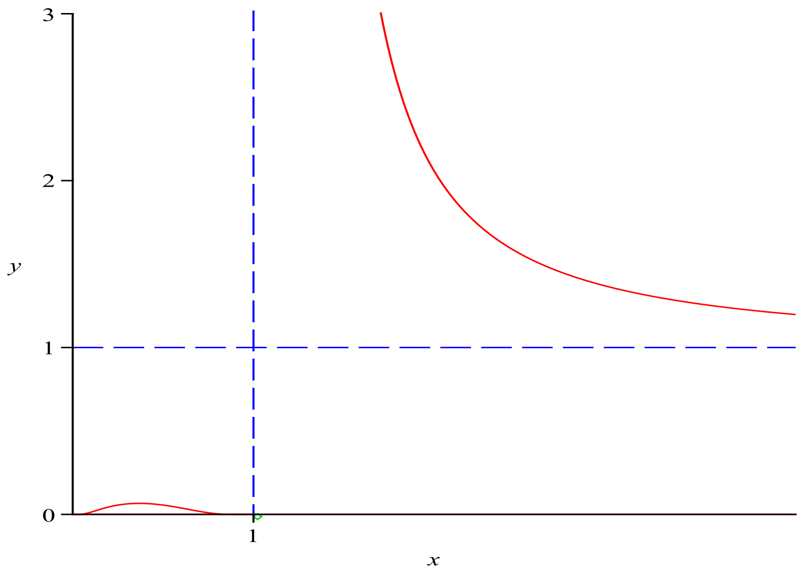
cioè in ciascuno di tali limiti la funzione si avvicina al proprio limite con tangente che tende a diventare orizzontale.

L'espressione della derivata seconda è laboriosa e comunque non richiesta. Le informazioni appena ottenute ci permettono di concludere però che vi sono *almeno* tre flessi: *almeno* uno nell'intervallo $(-\infty, -1)$ (la concavità deve passare almeno una volta dall'essere rivolta verso il basso all'essere rivolta verso l'alto) e *almeno* due nell'intervallo $(0, 1)$ (dato che i limiti di f e f' valgono zero sia a 0^+ che a 1^-, e che la funzione è positiva nell'intervallo dato, ne segue che la concavità deve passare da rivolta verso l'alto, a rivolta verso il basso, ad ancora rivolta verso l'alto).

Il grafico di f è qui sotto accluso, in due figure separate (relative a $x < 0$ e $x > 0$ rispettivamente) a causa delle diverse scale coinvolte



Il grafico di f per $x < 0$



Il grafico di f per $x > 0$