Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2011/2012
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Secondo appello di Metodi Analitici (25-6-12) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA

(i) Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni di variabile complessa rispettivamente con singolarità essenziale in z_0 e con singolarità di tipo polo in z_0. Si dimostri che la funzione $h(z) = f(z)g(z)$ possiede una singolarità essenziale in z_0.

[*Suggerimento: si ragioni per assurdo, concludendo che se così non fosse allora anche* $f(z)$ *avrebbe una singolarità di tipo polo in* z_0]

(ii) Si classifichino le singolarità della funzione

$$\frac{e^{\frac{1}{z^2}} z}{\sin^3(z)} .$$

Per la singolarità $z_0 = 0$ si usi il punto (i).

(iii) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{C_1(0)} \frac{e^{\frac{1}{z^2}} z}{\sin^3(z)} \, \mathrm{d}z ,$$

dove $C_1(0)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel piano complesso percorsa una volta in senso antiorario.

Soluzione.

(i) Supponiamo per assurdo che la singolarità di $h(z)$ in z_0 sia un polo di ordine k (eventualmente con $k = 0$ nel caso di singolarità eliminabile). Sia inoltre k_0 l'ordine del polo di $g(z)$. Abbiamo per definizione che

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z)(z - z_0)^k$$

esiste finito ed è diverso da zero. Ma allora anche

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^{k-k_0} = \lim_{z \to z_0} f(z)g(z)(z - z_0)^k \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z - z_0)^{k_0} g(z)}$$

esiste finito ed è diverso da zero. Ciò significherebbe che $f(z)$ in z_0 ha un polo di ordine $k - k_0$, il che è impossibile perché per ipotesi z_0 è una singolarità essenziale per $f(z)$.

(ii) La funzione $\frac{e^{z^{-2}} z}{\sin^3(z)}$ possiede singolarità nei punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $k \neq 0$ sono tutti poli di ordine 3, mentre la singolarità $z_0 = 0$ è di tipo essenziale perché lo è per la funzione $f(z) = e^{z^{-2}}$ e $g(z) = \frac{z}{\sin^3(z)}$ ha un polo di ordine 2 in z_0.

(iii) L'integrale è nullo dato che l'integranda è una funzione pari e quindi il suo residuo è 0.

II. ANALISI FUNZIONALE

Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) := \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \qquad \forall x \in [0,1] \ .$$

(i) Calcolare il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$.

(ii) Discutere la convergenza di f_n negli spazi $L^p[0,1]$ per ogni $p \in [1,\infty)$.

Soluzione.

(i) Per ogni $x \in (0,1]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x} = e^{-x} \ ,$$

mentre per $x = 0$ la successione è identicamente uguale a 1. Perciò il limite puntuale è $f(x) = e^{-x}$ per ogni $x \in [0,1]$.

(ii) Al punto precedente abbiamo mostrato che f_n converge puntualmente alla funzione e^{-x}. Siccome la successione è dominata dalla funzione costante $d(x) = 1$, che appartiene a $L^p[0,1]$ per ogni $p \in [1,\infty]$, dal teorema della convergenza dominata deduciamo che f_n converge a e^{-x} anche in $L^p[0,1]$ per ogni $p \in [1,\infty)$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

(i) Si enunci l'identità di Parseval in uno spazio di Hilbert.

(ii) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita su $[0, 2\pi]$ da

$$f(t) = \frac{1}{(t - \sin t)^\alpha} \ .$$

Si dica per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge la serie $\sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2$, dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) Per l'identità di Parseval la serie di Fourier di f appartiene a l^2 se e solo se $f \in L^2(0, 2\pi)$.
Poiché per $t \to 0$ si ha $f(t) \sim t^{-3\alpha}$, deve essere $6\alpha < 1$, ovvero $\alpha < 1/6$.