PAG 1995 N. 408 443

408

GRAFICO $f(x)=\sqrt{e^{3x}}$

V SOLIDO ROTAZIONE - X

$I_{x_0}: [0,1]$

STUDIO DI FUNZIONE

$f(x) = e^{\frac{3}{2}x}$

$f'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$

$f''(x) = \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}x}$

DOMINIO

$\forall x \in \mathbb{R}$

CODOMINIO

$0 < x < +\infty$

$]0,+\infty[$

1) SIMMETRIE

$f(x) \neq f(-x)$

$-f(x) \neq f(-x)$ $\Rightarrow$ NÈ PARI NÈ DISPARI

2) INTERSEZIONI

$X \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{e^{3x}}=0 \end{cases}$ IMP

$Y \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $P_1(0,1)$

3) I DERIVATA

$f'(x) > 0$

$\frac{3}{2}\sqrt{e^{3x}} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ SEMPRE CRESCENTE ↗

4) II DERIVATA

$f''(x) > 0$

$\frac{9}{4}\sqrt{e^{3x}} > 0$

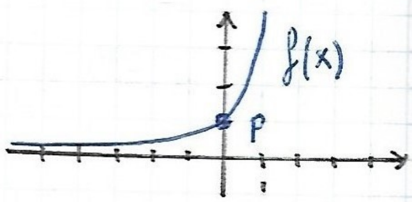
$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ CONCAVA SU

5) SEGNO

$f(x) > 0$

$f(x)$ POSITIVA IN TUTTO $\mathbb{R}$

GRAFICO

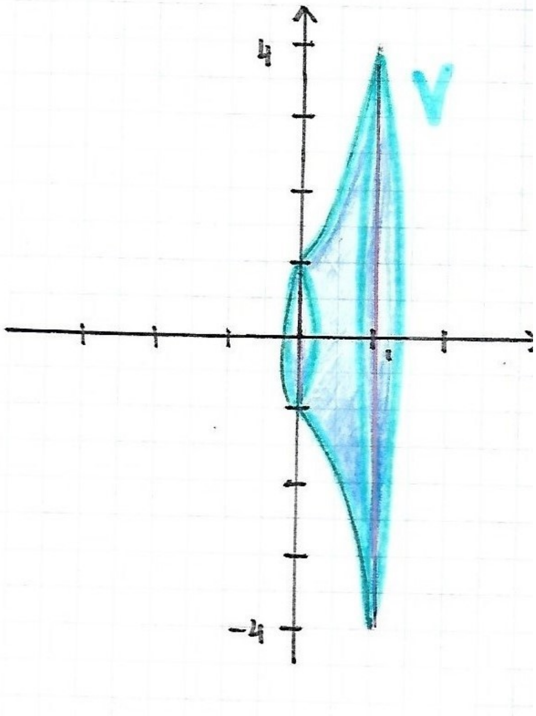


CALCOLO DEL VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE CREATO DAL GRAFICO DI $f(x)$ NELL'INTERVALLO $I_{x_0}: [0,1]$

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^1 \pi [e^{\frac{3}{2}x}]^2 dx = \pi \int_0^1 e^{3x} dx = \left[\frac{\pi}{3} e^{3x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^3 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(e^3 - 1)$$



432

$x = f(y) = y^2 - 3y$

$x = 0$ (ASSE-Y)

V SOLIDO ROTAZIONE COMPLETA ATTORNO Y

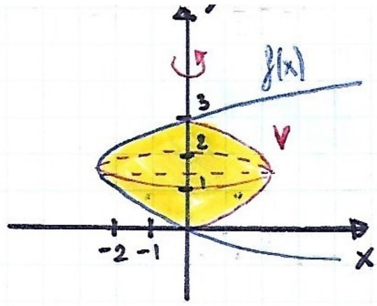
INTERSEZIONE FUNZIONE CON ASSE Y

$f(y) \times$ ASSE-Y

PER $y=0,\ y=+3$

CONSIDERIAMO L'INTERVALLO

$I_{y_0} : [0, +3]$



CALCOLIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE DI $f(y)$ PER L'INTERVALLO $I_{y_0} : [0, +3]$

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^3 [y^2 - 3y]^2 dy =$$

$$= \pi \int_0^3 [y^4 + 9y^2 - 6y^3]\, dy = \pi \int_0^3 y^4 + 9y^2 - 6y^3\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} + 3y^3 - \frac{3}{2} y^4 \right]_0^3 =$$

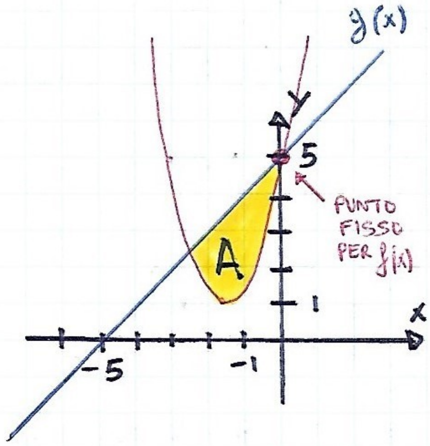
$$= \pi [\, 3^5/5 + 3 \cdot 3^4 - (3 \cdot 3^4)/2 \,] =$$

$$= \pi \left[\frac{81}{10} \right] = \frac{81}{10} \pi$$

385

$f(x) = a x^2 + 3x + 5$

$a \in \mathbb{R}$, $a = ?$ SE AREA $= \frac{1}{3}$
$f(x) \times g(x)$



$g(x) = x + 5$

$$A = \frac{1}{3} = \int_0^{?} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-?}^{0} f(x) - g(x)\, dx$$

PUNTO D'INTERSEZIONE TRA $f(x)$ E $g(x)$

$f(x) \times g(x) =$ $\quad \underline{x + 5 = a x^2 + 3x + 5} \quad a x^2 + 2x = 0 \quad x(ax + 2) = 0$

$x_1 = 0$ NON ACC

$x_2 = -2/a$ ACC

$$A = \frac{1}{3} = \int_0^{-\frac{2}{a}} f(x) - g(x) = \int_0^{-\frac{2}{a}} a x^2 + 2x = \left[\frac{a x^3}{3} + x^2 \right]_0^{-\frac{2}{a}} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{3} \cdot \left(-\frac{8}{a^3}\right) + 3\left(+\frac{4}{a^2}\right) \qquad 1 = -\frac{8}{a^2} + \frac{12}{a^2} \qquad 1 = \frac{4}{a^2}$$

$a = \pm 2$ $\qquad f(x)_1 = -2x^2 + 3x + 5 \qquad f(x)_2 = +2x^2 + 3x + 5$

↑ 1995 409 432 385

409

$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

VOLUME SOLIDO GENERATO DA ROTAZIONE 360° ATTORNO X (DA 3 A 4)

$V = \int_2^{10} \pi [f(x)]^2 dx$

INTEGRIAMO LA FUNZIONE USANDO LA REGOLA DEL VOLUME

$V = \int_2^b \pi \left[\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right]^2 dx =$

CALCOLIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE NELL'INTERVALLO CHIUSO $I_0 : [3,4]$

$V = \int_3^4 \pi \left(\frac{x+1}{x-2}\right) dx$

PORTIAMO FUORI π POICHÈ COSTANTE

RISOLVIAMO L'INTEGRALE DEFINITO

$$V = \pi \int_3^4 \frac{x+1}{x-2}\, dx = \pi \left[\int_3^4 \frac{x}{x-2}\, dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}\, dx \right] =$$
$$= \pi \left[\int_3^4 \frac{x}{x-2}\, dx + [\ln(x-2)]_3^4 \right]$$

RISOLVIAMO QUESTO PRECISO INTEGRALE CON IL METODO DELLA SOSTITUZIONE

$\int \frac{x}{x-2}\, dx =$ SE $u = x-2$, $x = u+2$, $dx = du$ $\rightarrow \int \frac{u+2}{u}\, du$

$$= \int \frac{u+2}{u}\, du =$$
$$= \int \frac{u}{u} + \int \frac{2}{u} = u + 2\ln u$$

ESSENDO UN INTEGRALE DEFINITO IN UN INTERVALLO $I_0 [3,4]$

SE $x = 3 \longrightarrow u = 1$

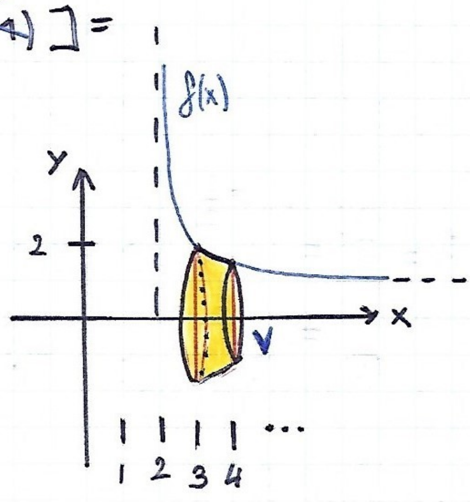
SE $x = 4 \longrightarrow u = 2$

$\int_1^2 \frac{u+2}{u} = [u + 2\ln u]_1^2$

TORNANDO ALL'INTEGRALE PRINCIPALE

$$V = \pi \left[[u+2\ln u]_1^2 + [\ln(x-2)]_3^4 \right] =$$
$$= \pi \left[2 + 2\ln(2) - 1 - \underbrace{\cancel{2\ln(1)}}_{=0} + \ln(2) - \underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{=0} \right] =$$
$$= \pi [1 + 3\ln(2)] = \pi + 3\pi \ln 2$$

$V = \pi + 3\pi \ln 2$

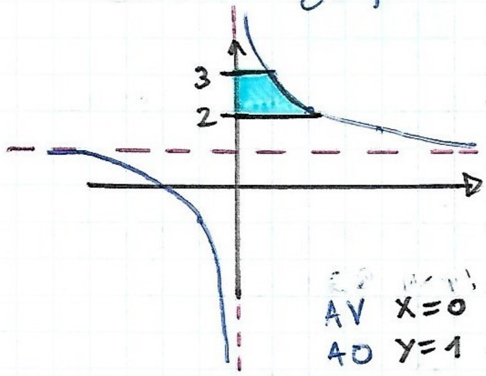


433

V solido rotazione 180° -y

$f(x) = \frac{2}{x} + 1$

$I_{y0}: [2, 3]$



IL TRAPEZOIDE GIACE SULL'ASSE y: E' NECESSARIO IL CAMBIO DI VARIABILE

$y = \frac{2}{x} + 1 \qquad y - 1 = \frac{2}{x} \qquad x(y-1) = 2 \qquad x = \frac{2}{y-1}$

SIAMO ORA PASSATI ALLA FORMA $x = f(y)$

$$V = \pi \int_2^3 [f(y)]^2 dy$$
$$= \pi \int_2^3 \frac{4}{(y-1)^2} dy = 4\pi \int_2^3 \frac{1}{(y-1)^2} dy = 4\pi \int_2^3 (y-1)^{-2} =$$
$$= 4\pi \left[+\frac{1}{1-x}\right]_2^3 = 4\pi \left[\frac{1}{1-3} - \frac{1}{1-2}\right] = 4\pi \left[-\frac{1}{2} + 1\right] = 2\pi$$

SICCOME LA ROTAZIONE EFFETTUATA E' 180°

$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$ L'INTERO VOLUME DOVRA A SUA VOLTA ESSERE MOLTIPLICATO PER QUESTO RAPPORTO

$$V_{y-180} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$