Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2009/2010
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Metodi Analitici (10-9-10) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{(z-a)(z-b)} \ .$$

(i) Determinare lo sviluppo di Laurent di f di centro $z_0 = a$.
(ii) Determinare il dominio di convergenza di tale sviluppo.
(iii) Dedurre il valore del residuo di f nel punto $z_0 = a$.

(i) Si ha:

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-a-(z-a)} = -\frac{1}{(b-a)\left(1-\frac{z-a}{b-a}\right)} = -\frac{1}{(b-a)}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^k \ ,$$

dove l'ultima uguaglianza è soddisfatta per ogni z tale che

$$\left|\frac{z-a}{b-a}\right| < 1 \ .$$

Pertanto

$$f(z) = -\sum_{k\geq 0}\frac{(z-a)^{k-1}}{(b-a)^{k+1}} = -\sum_{m\geq -1}\frac{(z-a)^m}{(b-a)^{m+2}}$$

(ii) Il dominio di convergenza è l'insieme $|z-a| < b-a$, ovvero il cerchio (aperto) di centro $z_0 = a$ e raggio $b-a$ privato del centro z_0.

(iii) Il residuo richiesto si ottiene prendendo il coefficiente c_{-1} nello sviluppo ottenuto, e il suo valore è quindi $-1/(b-a)$.

II. ANALISI FUNZIONALE

Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel in uno spazio di Hilbert.

Si vedano le slides del corso o uno dei testi consigliati.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Assegnata una funzione φ in $L^\infty(\mathbb{R})$, poniamo

$$u(x) := \chi_{[-1,1]}(x)\varphi(x) \ .$$

(i) Determinare il valore di

$$k_0 := \sup\{k \geq 0 \ : \ \widehat{u}(\xi) \in C^k(\mathbb{R})\} \ .$$

(ii) Nel caso $\varphi(x) = \cos x$, determinare esplicitamente $\widehat{u}(\xi)$.

(i) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x^k u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ (poiché u è a supporto compatto e φ è limitata). Quindi risulta $\widehat{u}(\xi) \in C^k(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e pertanto $k_0 = +\infty$.

(ii) La trasformata della funzione caratteristica $\chi_{[-1,1]}$ è uguale a $2\frac{\sin\xi}{\xi}$.

Scrivendo $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}$ e utilizzando le regole di trasformazione segue che

$$\widehat{u}(\xi) = -i\Big(\frac{\sin(\xi+1)}{\xi+1} + \frac{\sin(\xi-1)}{\xi-1}\Big) \ .$$