SERIE DI FOURIER

III.1 - SERIE DI FOURIER IN UNO SPAZIO DI HILBERT

Una famiglia di funzioni $\{u_n\}$ di uno spazio di Hilbert si dice **sistema ortonormale** se il prodotto scalare tra due elementi diversi della famiglia è nullo:

$$(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$$

Se in più ogni elemento ha norma 1, si parla di **sistema ortonormale**:

$$\|u_n\| = 1 \quad \forall n$$

In generale questi sistemi possono avere un numero finito o infinito di elementi.

Sia H uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}$ un suo sistema ortonormale. Data una funzione $u \in H$, si definisce coefficiente di Fourier di u rispetto al sistema dato il prodotto scalare tra u e u_n.

Sotto queste ipotesi, vale la seguente **disuguaglianza di Bessel**: $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$

Dimostrazione:

Essendo H uno spazio di Hilbert: $0 \leq \left\| u - \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n \right\|^2 = \left(u - \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n ,\ u - \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n \right) =$

$$= (u,u) - 2\left(u,\ \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n , \sum_{n=0}^{N} (u,u_n) u_n \right) = \|u\|^2 - 2\sum_{n=0}^{N} (u,u_n)^2 + \sum_{n=0}^{N} (u,u_n)^2$$

Da cui si deduce infine che:

$\sum_{n=0}^{N} (u,u_n)^2 \leq \|u\|^2$, che vale per ogni N, anche infinito (passando all'estremo superiore su N).

Si chiama dunque **serie di Fourier** di u rispetto al sistema dato la seguente:

$$\sum_{n=0}^{C} (u, u_n) u_n$$

dove si è indicata con C la cardinalità del sistema ortonormale: $C = \mathrm{card}(\{u_n\})$

- Se C è un numero finito, la serie è in realtà una somma finita che ha come somma la proiezione di u sul sottospazio di H generato dagli elementi del sistema ortonormale.
- Se C è infinito, si ha una serie vera e propria ed essa converge alla proiezione di u sulla chiusura del sottospazio di H generato dagli elementi del sistema ortonormale.

Dimostrazione:

- Il caso finito non necessita dimostrazione, in quanto la serie è appunto una somma finita. Inoltre in tale situazione il sottospazio generato dagli elementi del sistema ortonormale è sempre chiuso.
- Nel caso infinito, dobbiamo invece dimostrare la convergenza di $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n$.

  Sia consideri dunque $M > N$:

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{M} (u, u_n) u_n - \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} (u, u_n) u_n \right\|^2 = \left(\sum_{n=N+1}^{M} (u, u_n) u_n, \ \sum_{n=N+1}^{M} (u, u_n) u_n \right) =$$

$$= \left| \sum_{n=N+1}^{M} (u, u_n)^2 \right| = |T_M - T_N|$$, dove $T_N = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2$ sono le somme parziali di una serie numerica.

  Ma tale serie converge per la disuguaglianza di Bessel, e segue quindi la convergenza della serie di Fourier di partenza in quanto essendo in uno spazio di Hilbert ogni successione di Cauchy converge.

Per concludere, bisogna infine controllare che la serie converga proprio alla proiezione di u sulla chiusura M del sottospazio generato dal sistema ortonormale: $M = \overline{< u_n >_{n\in\mathbb{N}}}$.

Si indichi poi con u' la somma della serie: $u' = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n) u_n$.

- u' appartiene ad M, infatti:

  $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n \in < u_n >_{n\leq N}$, poiché è combinazione lineare degli u_n di coefficienti (u, u_n)

  $u' = \lim_{n\to+\infty} S_N \in \overline{< u_n >_{n\in\mathbb{N}}}$, poiché la chiusura di un insieme contiene per definizione tutti i suoi punti di accumulazione.

- $u - u'$ appartiene allo spazio ortogonale ad M, infatti:

  $$(u-u', u_{\overline{n}}) = (u, u_{\overline{n}}) - (u', u_{\overline{n}}) = (u, u_{\overline{n}}) - \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n) u_n, u_{\overline{n}} \right) = (u, u_{\overline{n}}) - \sum_{n\in\mathbb{N}} (u, u_n)(u_n, u_{\overline{n}}) =$$

  $= (u, u_{\overline{n}}) - (u, u_{\overline{n}}) = 0, \quad \forall \overline{n} \in \mathbb{N}$, e quindi $u - u'$ è ortogonale a qualsiasi elemento di M.

Un sistema ortonormale $\{u_n\}$ in uno spazio di Hilbert H si dice **completo** se è massimale rispetto all'inclusione, ovvero se non si può trovare un sistema ortonormale con più elementi che sia ancora ortonormale. Si ha allora che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) $\{u_n\}$ è completo.

2) $\forall u \in H: \quad (u, u_n) = 0 \ \ \forall n \Rightarrow u = 0$.

3) $H \equiv M := \overline{< u_n >_{n \in \mathbb{N}}}$.

4) $\forall u \in H: \quad u = \sum (u, u_n) u_n$

5) $\forall w, v \in H: \quad (w, v) = \sum (w, u_n)(v, u_n)$: identità di Parseval

6) $\forall u \in H: \quad \|u\|^2 = \sum (u, u_n)^2$: identità di Bessel

1) $\{u_n\}$ è completo.

2) $\forall u \in H: \quad (u,u_n)=0 \ \ \forall n \ \Rightarrow \ u=0$.

3) $H \equiv M := \overline{<u_n>}_{n\in\mathbb{N}}$.

4) $\forall u \in H: \quad u = \sum (u,u_n)u_n$

5) $\forall w,v \in H: \quad (w,v)=\sum (w,u_n)(v,u_n)$: identità di Parseval

6) $\forall u \in H: \quad \|u\|^2 = \sum (u,u_n)^2$: identità di Bessel

<u>*Dimostrazione:*</u>

1) $\Leftrightarrow$ 2) : Se 2) è falsa, allora $\exists \bar{u} \neq 0 : (\bar{u},u_n)=0 \ \ \forall n$. Ma se considero la famiglia $\{u_n, \ \bar{u}\}$, essa è un sistema ortonormale con più elementi di $\{u_n\}$, che quindi non è completo. Se 1) è falsa, allora la $\bar{u}$ (non nulla) che posso aggiungere al sistema $\{u_n\}$ è ortonormale agli elementi di quest'ultimo, e quindi $(u,u_n)=0 \ \ \forall n$, contro la 2).

2) $\Rightarrow$ 3) : Se 3) è falsa, allora $M \subset H \ \Rightarrow \ \exists v \in M^{\perp} \ \Rightarrow \ (v,u_n)=0$, contro la 2).

3) $\Rightarrow$ 4) : Se M coincide con H, la proiezione di u su M, e quindi su H, è u stessa.

4) $\Rightarrow$ 5) : Infatti $(w,v)=\left(\sum (v,u_n)u_n, \sum (w,u_n)u_n\right)=\sum (w,u_n)(v,u_n)$

5) $\Rightarrow$ 6) : L'identità di Bessel segue dall'identità di Parseval con $v=w=u$.

6) $\Rightarrow$ 2) : Se $(u,u_n)=0 \ \ \forall n: \quad \|u\|^2 = \sum (u,u_n)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$

Uno spazio di Hilbert si dice **separabile** se ammette un sistema ortonormale completo e numerabile.

Esempi:

- $H = \mathbb{R}^N$ è separabile con $\{e_i\}_{i \le N}$, dove gli e_i sono i versori della base canonica.

  Infatti, usando la 2), se $u \in \mathbb{R}^N$: $(u, e_i) = 0 \;\; \forall i \le N \;\Rightarrow\; u_i = 0 \;\; \forall i \le N \;\Rightarrow\; u = 0$

- $H = l^2(\mathbb{N})$ è separabile con $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ed e_i le successioni di zeri con un uno in i-esima posizione.

  Infatti, usando la 2), se $u \in l^2(\mathbb{N})$: $(u, e_i) = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; u_i = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; u = 0$

III.2 - SERIE DI FOURIER IN L^2

Lo spazio $L^2([a,b])$ è separabile e tra i sistemi ortonormali che lo rendono tale si hanno:

1. **Polinomi di Legendre:**

   Dalla teoria precedente si è visto che lo spazio $C_0^\infty([a,b])$ è denso in $L^2([a,b])$. L'idea è quella di approssimare le funzioni del primo spazio con polinomi. Si ha infatti che:

   Proposizione: data una qualsiasi funzione $\varphi \in C_0^\infty([a,b])$, esiste una successione di polinomi che converge uniformemente a φ.

Da questa proposizione segue quindi che $\overline{< u_n >} = L^2\left([a,b]\right)$, con $u_n = x^n$.

Tale sistema però si può vedere che non è ortonormale. Si può però utilizzare quindi l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, che in un qualsiasi spazio di Hilbert, data una famiglia di elementi in esso, permette di generare una nuova famiglia che sia un sistema ortonormale e che generi lo stesso sottospazio generato da quella di partenza.

- Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ la famiglia di partenza e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ il sistema ortonormale cercato.
- $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$
- $v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$, dove $\tilde{v}_2 = \alpha u_1 + u_2$ con $(\alpha u_1 + u_2, u_1) = 0$, da cui si ricava $\alpha = -\dfrac{(u_2, u_1)}{\|u_1\|^2}$
- $v_3 = \dfrac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|}$, dove $\tilde{v}_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 + u_3$ con $\begin{cases} (\alpha u_1 + \beta u_2 + u_3, u_1) = 0 \\ (\alpha u_1 + \beta u_2 + u_3, u_2) = 0 \end{cases}$

  Dove il sistema si vede essere risolvibile se u_1 e u_2 sono indipendenti.
- E si procede in maniera analoga fino al grado desiderato.

Esempio:

Si consideri $L^2([-1,1])$. I primi tre polinomi di Legendre per questo spazio sono:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}x, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3} + x^2\right)$$

Data quindi una funzione $f \in L^2([-1,1])$, il polinomio $(f, v_0)v_0 + (f, v_1)v_1 + (f, v_1)v_1$ è la migliore approssimazione, in norma $\| \cdot \|_{L^2}$, di tale funzione con un polinomio di grado massimo 2.

2. **Polinomi trigonometrici:**

Si consideri l'intervallo $I = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$, con $T > 0$, e si chiami $\xi_k = \frac{2\pi k}{T}$.

Teorema: la seguente famiglia di polinomi trigonometrici:

$$\left\{ p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, p_k = \frac{\cos\left(\xi_k x\right)}{\sqrt{T/2}}, q_k = \frac{\sin\left(\xi_k x\right)}{\sqrt{T/2}} \right\}, \text{ con } k \geq 1$$

è un sistema ortonormale completo in $L^2\left(I\right)$.

Dimostrazione:

Dalla teoria precedentemente svolta si ha che $C_0^\infty(I)$ è denso in $L^2(I)$. L'idea da seguire è quella di approssimare quindi le funzioni $L^2(I)$ con funzioni $C_0^\infty(I)$ e approssimare a loro volta quest'ultime con polinomi trigonometrici. Rimane quindi da dimostrare che $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, la serie di Fourier ad essa associata converge a φ nel senso di $L^2(I)$.

Dall'analisi B si ha che per una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ e periodica, la serie di Fourier ad essa associata converge a f puntualmente e uniformemente.

Se quindi si ha una funzione $\varphi \in C_0^\infty(I)$ si può applicare il risultato precedente considerando come funzione f la ripetizione di φ su tutto $\mathbb{R}$. Essa è una funzione $C^1(\mathbb{R})$ poiché nei punti di raccordo la funzione φ è nulla con derivata nulla (essendo definita a supporto compatto).

La dimostrazione segue quindi di conseguenza ricordando che la convergenza uniforme implica quella in $L^2(I)$.

In particolare segue che, data una funzione $f \in L^2(I)$, converge a f in norma $\|\cdot\|_{L^2}$ la serie:

$$(f, p_0)\, p_0 + \sum_{k\geq 1}\left[(f, p_k)\, p_k + (f, q_k)\, q_k\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x)\right]$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono dati dalle formule seguenti:

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{T}}(f, p_k) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\xi_k x)\,dx\,, \qquad b_k = \sqrt{\frac{2}{T}}(f, q_k) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\xi_k x)\,dx$$

Tale serie può anche essere espressa, in maniera più compatta, in forma esponenziale:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{i\xi_k x}\text{, con i coefficienti } \widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\xi_k x}\,dx$$

Osservazioni:

- Per l'identità di Bessel $\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \left\{ \widehat{f_k} \right\} \right\|_{l^2}^2$, si ha che $f \in L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \iff \left\{ \hat{f}_k \right\} \in l^2(\mathbb{Z})$.
- Si definisce $L_T^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ misurabili, T-periodiche: } \int_a^b |f|^2 < +\infty \ \ \forall a, b \right\}$.

  Si può dimostrare che $L_T^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert con stessa norma e prodotto scalare di $L^2(I)$ e che in esso continua a valere il precedente teorema.
- Se $f \in L_T^2(\mathbb{R}) \cap AC(I)$, allora $\widehat{f_k'} = (i\xi_k)\widehat{f_k} \ \ \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a_k' = \xi_k b_k, \ b_k' = -\xi_k a_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$

III.3 - APPLICAZIONI ALLE ODE

Le serie di Fourier possono essere utilizzate per trovare soluzioni T-periodiche di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti del tipo:

$$\sum_{j=0}^{N} a_j D^j u = f, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad f \in L_T^2$$

La soluzione generale di questo problema è data nella forma: $u = u_0 + u_p$, dove u_0 è la soluzione generale dell'omogenea ad essa associata, mentre u_p è una soluzione particolare.

Si cercano quindi soluzioni del tipo $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_k} e^{i\xi_k x}$, con $\xi_k = \dfrac{2\pi k}{T}$ e $\widehat{u_k} \in l^2$

Sia dunque $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} a_j \lambda^j$ e $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f_k} e^{i\xi_k x}$ (ciò è lecito essendo $f \in L_T^2$).

Poiché per l'identità di Bessel si ha che $f = g \iff \widehat{f_k} = \widehat{g_k} \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$, si può scrivere che:

$$\widehat{f_k} = \sum_{j=0}^{N} a_j \widehat{\left(D^j u\right)}_k = \sum_{j=0}^{N} a_j \left(i\xi_k\right)^j \widehat{u_k} = \widehat{u_k} \sum_{j=0}^{N} a_j \left(i\xi_k\right)^j = \widehat{u_k} P\left(i\xi_k\right)$$

Nel passaggio precedente si è derivato per serie, e bisogna quindi ricordarsi di controllare a posteriori, una volta trovata la soluzione, che ciò sia effettivamente lecito.

A questo punto non rimane altro che risolvere l'equazione algebrica: $\widehat{f_k} = \widehat{u_k} P(i\xi_k)$.

1. $P(i\xi_k) \neq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$: $\widehat{u_k} = \dfrac{\widehat{f_k}}{P(i\xi_k)} \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$ e bisogna controllare che tale successione stia in l^2.

   Poiché, per ipotesi, $\widehat{f_k} \in l^2(\mathbb{Z})$, allora anche $\widehat{u_k} P(i\xi_k) \in l^2(\mathbb{Z})$. Ma $|P(i\xi_k)| \sim |k|^N$ per $|k| \to \infty$

   e quindi $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{u_k}\right|^2 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2N} \left|\widehat{u_k}\right|^2 \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|P(i\xi_k)\widehat{u_k}\right|^2 < +\infty$.

   La soluzione è quindi unica ed è data dalla serie di Fourier con coefficienti gli $\widehat{u_k}$ appena trovati se sono verificate le ipotesi di derivazione per serie utilizzate precedentemente. In particolare la u deve essere ad esempio assolutamente continua insieme alle sue prime (*n-1*) derivate.

2. Se $P(i\xi_k)=0$ per $k=\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p$, rimane che $\widehat{f_{\overline{k}_i}}=0$ e si distinguono quindi due casi:

2a) Se $\widehat{f_k}\neq 0$ per qualche $k\in\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\}$, allora non esistono soluzioni in L^2_T

2b) Se $\widehat{f_k}=0$ $\forall k\in\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\}$ esistono infinite soluzioni: $\widehat{u_k}=\begin{cases}\widehat{f_k}\big/P(i\xi_k) & \text{per } k\notin\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\}\\ \text{arbitrario} & \text{per } k\in\{\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_p\}\end{cases}$

e bisogna ovviamente sempre controllare le condizioni di derivabilità per serie.

Esempio:

Trovare le soluzioni T-periodiche di $u''+u=\sin\left(\omega x\right), \quad \omega\in\mathbb{R}^+$

Detta $f(x)=\sin\left(\omega x\right)$, il periodo T delle soluzioni deve coincidere con quello di *f*, per cui:

$$f(x)=\sin\left(\omega x\right)=\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i} \Rightarrow \widehat{f}_k=\begin{cases}0 \text{ per } k\neq\pm1\\ \pm1/2i \text{ per } k=\pm1\end{cases}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \text{ e } \xi_k=\frac{2\pi k}{T}=\omega k\,;\ P\left(\lambda\right)=\lambda^2+1 \Rightarrow P\left(i\xi_k\right)=-\omega^2k^2+1$$

1. $P\left(i\xi_k\right) = -\omega^2 k^2 + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \neq \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\widehat{u_k} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq \pm 1 \\ \pm\dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{1}{1-\omega^2} & \text{per } k = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow u(x) = \frac{\sin(\omega x)}{1-\omega^2}$$

La soluzione trovata si vede facilmente essere C^∞ e quindi soddisfa tutte le ipotesi necessarie per la derivazione per serie. Essa è quindi l'unica soluzione T-periodica del problema.

2. $P\left(i\xi_k\right) = -\omega^2 k^2 + 1 = 0$ per qualche $\overline{k} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \dfrac{1}{\overline{k}}, \quad \overline{k} \in \mathbb{N}$

2a) Se $\overline{k} = 1 \Rightarrow \widehat{f_1} \neq 0$: non esistono soluzioni 2π-periodiche del problema con $\omega = 1$.

2b) Se $\overline{k} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Rightarrow \widehat{f_{\overline{k}}} = 0$: esistono infinite soluzioni periodiche del problema con $\omega = \dfrac{1}{\overline{k}}$:

$$\widehat{u_k} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq \pm 1, \pm\overline{k} \\ \pm\dfrac{1}{2i} \cdot \dfrac{1}{1-\omega^2} & \text{per } k = \pm 1 \\ \text{arbitrari} & \text{per } k = \pm\overline{k} \end{cases} \Rightarrow u(x) = \frac{\sin\left(\omega x\right)}{1-\omega^2} + c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

Anche in questo caso la soluzione è di classe C^∞ e non sorgono problemi sulle ipotesi.

III.4 - APPLICAZIONI ALL'EQUAZIONE DI LAPLACE

Si consideri l'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^2$ nel disco di raggio *R*:

$$\Delta u = 0 \quad in \;\; B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

È possibile utilizzare le serie di Fourier per trovare soluzioni in coordinate polari di tale problema:

$$u_\#\left(\rho,\theta\right) := u\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)$$

Si fissi quindi ρ e si consideri la funzione 2π-periodica $\theta \mapsto u_{\#}\left(\rho,\theta\right)$: $u_{\#}\left(\rho,\theta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u_k}(\rho)e^{ik\theta}$.

Supponendo di poter derivare per serie e ricordando la formula dell'operatore laplaciano in coordinate polari, l'equazione di Laplace si riscrive nella forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2}\left[\widehat{u_k}(\rho)\right]e^{ik\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\widehat{u_k}(\rho)\right]e^{ik\theta} - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho)e^{ik\theta} \right\} = 0$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{d^2}{d\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widehat{u_k}(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) \right] e^{ik\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{d\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widehat{u_k}(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}\widehat{u_k}(\rho) = 0$$

L'ultima espressione trovata è $\forall k \in \mathbb{Z}$ un'equazione differenziale ordinaria nella variabile ρ. In particolare, è un'equazione di Eulero: si provano a cercare soluzioni del tipo ρ^{α} per $\rho \neq 0$:

$$\rho^2 \widehat{u_k''} + \rho \widehat{u_k'} - k^2 \widehat{u_k} = 0 \;\rightarrow\; \rho^2 \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho\alpha\rho^{\alpha-1} - k^2\rho^{\alpha} = 0; \quad \rho^{\alpha}\left[\alpha^2 - k^2\right] = 0; \quad \alpha = \pm|k|$$

- Se $k \neq 0$: $\widehat{u_k}(\rho) = c_k \rho^{|k|} + c_k' \rho^{-|k|}$
- Se $k = 0$: $\rho^2 \widehat{u_0''} + \rho \widehat{u_0'} = 0; \quad \rho \widehat{u_0''} + \widehat{u_0'} = 0 \xrightarrow{\widehat{v_0} = \widehat{u_0'}} \rho \widehat{v_0'} + \widehat{v_0} = 0; \quad \widehat{v_0} = \dfrac{c_0'}{\rho} \Rightarrow \widehat{u_0} = c_0' \log\rho + c_0$

Si ricava quindi che: $u_{\#}(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u_k}(\rho) e^{ik\theta} = c_0' \log\rho + c_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(c_k \rho^{|k|} + c_k' \rho^{-|k|}\right) e^{ik\theta}$

Ma per poter estendere tale funzione con continuità in $\rho = 0$ si vede che deve essere:

$$c_0' = c_k' = 0 \Rightarrow u_\#(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \rho^{|k|} e^{ik\theta}$$

che può anche essere scritta nella forma seguente:

$$u_\#(\rho,\theta) = \sum_{k\geq 0} c_k \rho^k e^{ik\theta} + \sum_{k<0} c_k \rho^{-k} e^{ik\theta} = \sum_{k\geq 0} c_k \rho^k e^{ik\theta} + \sum_{h>0} c_{-h} \rho^h e^{-ih\theta} = \sum_{k\geq 0} c_k z^k + \sum_{h>0} c_{-h} \overline{z}^h$$

La funzione trovata risolve il problema (e quindi è una funzione armonica) se i c_k sono tali che si possa derivare per serie, in modo che siano verificate le ipotesi a priori precedentemente fatte.
A questo proposito è utile introdurre il concetto seguente: una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si dice <u>temperata</u> se ha una crescita al più polinomiale, ovvero più precisamente se:

$$\exists C > 0,\ m \in \mathbb{N} : \quad |x_k| \le C\left(1+|k|\right)^m$$

Teorema: per ogni $\{c_k\}$ tale che $\left\{c_k R^{|k|}\right\}$ è temperata, $u_{\#}(\rho,\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \rho^{|k|} e^{ik\theta}$ definisce una funzione armonica su B_R.

Dimostrazione:

$$\sum_{k\geq 0} c_k z^k = \sum_{k\geq 0} c_k R^k \left(\frac{z}{R}\right)^k \leq \sum_{k\geq 0} C\left(1+|k|\right)^m \left(\frac{z}{R}\right)^k$$ che è una serie di potenze.

$\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{C\left(1+|k|\right)^m} = 1 \Rightarrow$ si ha convergenza per $\left|\frac{z}{R}\right| < 1, \quad |z| < R$.

Per concludere la trattazione, vengono presentati due problemi particolari per l'equazione di Laplace appena risolta.

- **Problema di Dirichlet:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial B_R} = g(\theta) \end{cases}, \quad con \;\; g \in L^2_{2\pi}$$

$$g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k R^{|k|} e^{ik\theta} \;\Rightarrow\; c_k = \frac{\widehat{g_k}}{R^{|k|}}$$

dove $c_k R^{|k|} \in l^2$, poiché $\widehat{g_k} \in l^2$, e quindi c_k è temperata.

La soluzione del problema è quindi: $u_{\#}(\rho,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}$

- **Problema di Neumann:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial B_R} = g(\theta), \quad con \;\; g \in L^2_{2\pi} \end{cases}$$

$$g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_k} e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,|k|\, R^{|k|-1} e^{ik\theta} \quad \left\langle \begin{array}{l} g_0 \neq 0: \quad \nexists \text{ soluzione} \\[2ex] g_0 = 0: \quad c_0 \text{ arbitrario, } c_k = \dfrac{\widehat{g_k}}{|k|\, R^{|k|-1}} \;\; \forall k \neq 0 \end{array} \right.$$

Il problema di Neumann ammette quindi infinite soluzioni, ma solo se la funzione g ha media nulla sul bordo di B_R.

Tali soluzioni sono date da: $u_{\#}\left(\rho,\theta\right) = c_0 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k\neq 0}} \dfrac{\widehat{g_k}}{|k|\, R^{|k|-1}} \rho^{|k|} e^{ik\theta}$.