Formule utili

- Condizioni affinché F sia conservativo

$\rightarrow \operatorname{rot} F = 0$, Ω semplicemente connesso

∀ γ chiusa Ω può essere ridotta ad un punto mediante deformazioni senza mai uscire da Ω

In un campo piano esprime la densità superficiale di circolazione.

Se Ω non semplicemente connesso?

- $\oint_{\gamma_i} F \cdot dr = 0 \quad \forall \gamma_i$
- $\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr \quad \forall \gamma_{1,2}$ con uguali punti iniziali e finali

PER I CAMPI CONSERVATIVI : $F = \nabla U$

- Lavoro di un campo vettoriale

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

NOTAZIONE
$\omega := F \cdot dr$

in caso di curva chiusa $\Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dr$

- Funzioni integrabili

– funzioni limitate con un insieme di punti di discontinuità di f di MISURA NULLA.

insiemi ricopribili con un n. finito di rettangoli di area a piacere.

- Cambio di variabili

Ω aperto e limitato, $(u,v) \in \Omega$

$\underline{T}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ biunivoca. $(\det(\underline{T}) \neq 0)$

non è necessario per insiemi a misura nulli

$S \subseteq \Omega$ misurabile $\Leftrightarrow D := \underline{T}(S)$ misurabile

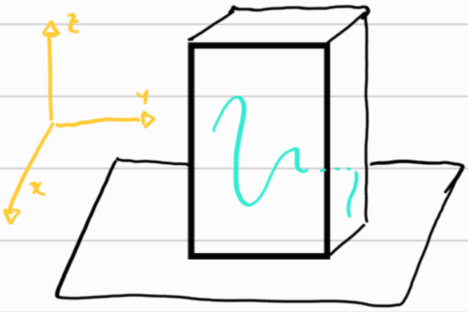
$\Rightarrow$

se f è continua e limitata $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\, |\det J|\, du\, dv$$

- Integrali di volume

$f(x,y,z)$ limitato su un parallelepipedo



Condizione sufficiente di integrabilità

↳ Una funzione limitata e continua in un insieme misurabile, è integrabile

- Formula GAUSS-GREEN

$$\iint_D Q_x - P_y \, dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

Condizioni da verificare

- D dominio limitato
- ∂D curva di Jordan.
- ∂D regolare (a tratti) e orientata positivamente.

- DOMINI AMMISSIBILI
  - ∂D curva di Jordan unione di γ_i regolari a tratti con intersezione nulla,
  - D decomponibile in sottoinsiemi semplici rispetto agli assi

- Area di una superficie

- D misurabile
- Σ semplice (non ha autointersezioni)

$$A(\Sigma) = \iint_D dS = \iint_D \underbrace{|r_u \wedge r_v|}_{\text{deve essere integrabile (limitato)}} du dv$$

Flusso campo vettoriale

- VERSORI NORMALI $\Rightarrow \pm n(u,v) := \dfrac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$

$$\Phi_\Sigma(F) := \iint_\Sigma F \cdot n \cdot dS = \iint F \cdot (r_u \wedge r_v) \, du dv$$

Teorema divergenza e rotore

$\mathrm{div}\, F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = \nabla \cdot F$

- $\iiint_D \mathrm{div} F = \Phi_D (F) \Rightarrow$ densità volumetrica del flusso di F attraverso D.

Teorema Gauss

- Ω limitato e semplice rispetto ai 3 assi
- $\partial\Omega$ regolare (a tratti)
- $F \in C^1(\Omega)$

$$\boxed{\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot n_e \cdot dS}$$

Teorema rotore (STOKES)

- Σ superficie regolare (a tratti) orientata con n_e
- Γ bordo superficie, orientata positivamente.
- $\Gamma = \bigcup_i \gamma_i$ regolari a tratti
- $F \in C^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_\Sigma \mathrm{rot}\, F \cdot n \cdot dS = \int_\Gamma F \cdot dr}$$

RICORDA!

- $\Sigma \in$ piano x-y $\Rightarrow$ formule G-G
- Σ chiusa, $\int_\Gamma F \cdot dr = 0$