Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova di autovalutazione/simulazione esame di Analisi 3, 9/11/2021 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti)

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere, per la successione di funzioni di variabile reale definita da

$$f_n(x) = (1 - nx)\chi_{[0,1/n]} .$$

a. f_n converge puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$

   FALSO $f_n(0) = 1$ per ogni n

b. f_n converge puntualmente a 0 per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$

   VERO $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \neq 0$

c. f_n converge a 0 in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$

   VERO $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p = \frac{1}{(p+1)n} \to 0$

d. f_n converge a 0 in $L^\infty(\mathbb{R})$

   FALSO $\|f_n\|_\infty = 1$

TEST 2. (8 punti)

Stabilire quali dei seguenti operatori $T : X \to Y$ sono lineari continui:

e. $X = (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = f(0)$.
   SI $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$

f. $X = (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = f(0)$.
   NO (ad esempio la successione $g_n(x) := f_n(|x|)$, dove la f_n è la successione proposta nel Test 1, è una successione di funzioni continue che soddisfa $g_n(0) = 1$ ma $\|g_n\|_1 \to 0$)

g. $X = (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = \int_{-1}^{1} |f|$.
   NO, T non è lineare

h. $X = (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $Y = (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ e $T(f) = \chi_{[-1,1]} * f$
   SI $||T(f)||_1 \leq \|\chi_{[-1,1]}\|_1 \|f\|_1 = 2\|f\|_1$

ESERCIZIO (10 punti) Calcolare il seguente integrale in campo complesso:

$$\int_{Q_4(0)} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^2 - 2i)^2} \, dz ,$$

dove $Q_l(z_0)$ è bordo del quadrato di lato l con centro (incrocio delle diagonali) nel punto z_0, percorso una volta in senso orario.

Soluzione. La funzione integranda $f(z) = e^{1/z^2}/(z^2 - 2i)^2$ ha una singolarità essenziale ($z_0 = 0$) e due poli di ordine 2 ($z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 - i$). Poiché f è pari, il residuo corrispondente a 0 è nullo (lo sviluppo in serie di Laurent attorno a 0 è costituito da sole potenze pari). Inoltre, i contributi dei due poli si cancellano a vicenda. Infatti, siccome $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -z_1$, se c_k è il k-esimo coefficiente dello sviluppo in serie di Laurent di f attorno a z_1, $(-1)^k c_k$ è il k-esimo coefficiente dello sviluppo in serie di Laurent di f attorno a z_2 (questa è ancora una conseguenza della parità di f). L'integrale è perciò nullo.

TEORIA (6 punti)

(i) Siano f e g in $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f * g$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$, e se il supporto di $f * g$ è compatto.

Soluzione. Poiché $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, si ha in particolare $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, da cui $f * g \in L^p(\mathbb{R})$. Inoltre, il supporto di $f * g$ è compatto: infatti, posto $K = \operatorname{supp} f$ e $L = \operatorname{supp} g$, si ha $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy = 0$ per ogni x tale che $(x - L) \cap K = \emptyset$, cioè per ogni $x \notin K + L = \{z + y \ : \ z \in K \ \ y \in L\}$.

(ii) Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ una funzione C^∞. Mostrare che la funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita come $g(z) := f(|z|)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ se e solo se f è costante.

Soluzione. Se f è costante, g è chiaramente olomorfa. Occorre mostrare il viceversa. A tale scopo, conviene sfruttare le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari (valide per $\rho \neq 0$):

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\rho} u_\rho - \dfrac{y}{\rho^2} u_\theta = \dfrac{y}{\rho} v_\rho + \dfrac{x}{\rho^2} v_\theta \\ -\dfrac{y}{\rho} u_\rho - \dfrac{x}{\rho^2} u_\theta = \dfrac{x}{\rho} v_\rho - \dfrac{y}{\rho^2} v_\theta \end{cases},$$

dove $g = g(\rho, \theta) = u(\rho, \theta) + i\, v(\rho, \theta)$. In particolare, moltiplicando la prima equazione per y, la seconda per x e sommando otteniamo

$$-u_\theta = \rho v_\rho \,, \tag{1}$$

mentre moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per $-y$ e sommando abbiamo

$$\rho u_\rho = v_\theta \,. \tag{2}$$

Nel caso in cui g dipenda solo da $|z| = \rho$, la (1) e la (2) implicano che anche $u_\rho = v_\rho = 0$, ovvero f costante.