Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Terzo appello di Metodi Analitici (13-7-15) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

(i) Enunciare le condizioni di Cauchy-Riemann.

(ii) Mostrare che una funzione olomorfa non costante non può essere tale che $\mathrm{Re}(f(z)) = f(z)$.

(iii) Dire giustificando la risposta se ciascuna delle seguenti funzioni $u_1, u_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la parte reale di una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$u_1(x, y) = (\sin x)(1 + y^2)\,, \qquad u_2(x, y) = (\sin x)e^y\,.$$

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) Se scriviamo f come $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, la condizione $\mathrm{Re}(f(z)) = f(z)$ si traduce in $v \equiv 0$, ovvero $f(z) = u(x, y)$. Allora, dalle condizioni di Cauchy-Riemann, ricaviamo $u_x = u_y = 0$, da cui si ricava che f è costante.

(iii) Per stabilire se una funzione u è la parte reale di una funzione olomorfa, basta guardare se è armonica, ovvero calcolare $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ e verificare se si annulla. Nel caso delle funzioni assegnate, semplici calcoli mostrano che $\Delta u_1 \neq 0$, mentre $\Delta u_2 = 0$, per cui la funzione u_2 è la parte reale di una funzione olomorfa, mentre u_1 non lo è.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Si consideri, per $x \in (0,1)$, la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{x(1-x)^{1/n}}\,, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(i) Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione f_n appartiene a $L^1(0,1)$.

(ii) Studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$ in $L^1(0,1)$, ovvero stabilire se ammette limite, e in caso affermativo determinarlo.

Soluzione.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che $f_n(x)$ tende a 1 per $x \to 0^+$, pertanto non si hanno problemi di integrabilità vicino a $x = 0$. D'altra parte per $x \to 1^-$, f_n si comporta come $\frac{1}{(1-x)^{1/n}}$ e pertanto è integrabile se $1/n < 1$, ovvero se $n > 1$. Pertanto si ha $f_n \in L^1(0,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

(ii) Il limite puntuale della successione f_n è la funzione

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{x}\,.$$

D'altra parte, per ogni $n \geq 2$, si ha

$$\frac{1}{(1-x)^{1/n}} \leq \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \qquad \forall x \in (0,1)\,,$$

e quindi

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \varphi(x) := \frac{e^x - 1}{x(1-x)^{1/2}}\,.$$

Poiché la funzione φ appartiene a $L^1(0,1)$, applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue deduciamo che f_n converge a f in $L^1(0,1)$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(x) := |x|e^{-|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Stabilire se tale trasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

(iii) Stabilire se tale trasformata appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(i) Poiché u è pari e reale, anche la sua trasformata è pari e reale. Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} u(x)\cos(\xi x)\,dx = \\ &= 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\frac{e^{i\xi x}+e^{-i\xi x}}{2}\,dx = \int_0^{+\infty} x\Big[e^{(i\xi-1)x}+e^{-(i\xi+1)x}\Big]\,dx\,. \\ & x\Big[e^{(i\xi-1)x}+e^{-(i\xi+1)x}\Big]\,dx\,.\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene quindi

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(i\xi-1)^2} + \frac{1}{(i\xi+1)^2} = 2\,\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

(ii) Si' (poiché dal punto (i) $\hat{u}$ risulta infinitesima di ordine 2 all'infinito).

(iii) Si' (poiché dal punto (i) $\hat{u}$ risulta infinitesima di ordine 2 all'infinito, oppure anche poiché $u \in L^2(\mathbb{R})$.