EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI

1. Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} t\, y_1' = y_2 \\ t\, y_2' = y_1 \end{cases}$$

e individuare un sistema fondamentale di soluzioni.
Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y_1(2) = 0$, $y_2(2) = 1$.

2. Trovare l'integrale generale del sistema *non* omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 + e^t \\ y_2' = -y_1 + \sin t \end{cases}$$

3. Discutere, al variare del parametro reale ν, la risolubilità del problema ai limiti

$$y'' + \nu^2 y = e^{-x}, \;\; y'(0) = 0, \;\; y'(\pi) = 0.$$

SOLUZIONI

1. Si tratta di un sistema lineare omogeneo *non* autonomo (coefficienti dipendenti da t). Scrivendo il sistema in forma normale, si vede che la matrice dei coefficienti è formata da funzioni continue per $t \neq 0$. Risolviamo il sistema con il metodo di eliminazione; derivando la prima equazione, troviamo

$$ty_1^{''} + y_1' = y_2'.$$

Moltiplicando entrambi i membri per t e sostituendo l'espressione di ty_2' data dalla seconda equazione troviamo l'*equazione di Eulero*

$$t^2 y_1^{''} + ty_1' - y_1 = 0.$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0,$$

ovvero

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

che ha le due radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Le corrispondenti soluzioni linearmente indipendenti sono t e $1/t$. L'integrale generale dell'equazione è allora

$$y_1(t) = c_1 t + c_2 \frac{1}{t},$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie. Dalla prima equazione del sistema otteniamo poi

$$y_2(t) = c_1 t - c_2 \frac{1}{t}.$$

L'integrale generale in forma vettoriale si scrive

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t \end{pmatrix}$$

Le funzioni a valori vettoriali

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \;;\; t \mapsto \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t \end{pmatrix}$$

rappresentano un sistema fondamentale di soluzioni. Il determinante della corrispondente matrice wronskiana è $W(t) = -2$.
La soluzione del problema di Cauchy si determina risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \\ 2c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

che ha per unica soluzione $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -1$. Il corrispondente vettore soluzione del problema di Cauchy è dato da

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t - 1/t \\ \frac{1}{4}t + 1/t \end{pmatrix}$$

2. Derivando la prima equazione e sostituendo l'espressione di y_2' data dalla seconda, otteniamo l'equazione lineare

$$y_1^{''} + 4y_1 = e^t + 4\sin t$$

nella sola componente y_1. L'equazione omogenea associata è

$$z^{''} + 4z = 0,$$

che ha come integrale generale

$$z(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t.$$

Utilizzando il *metodo di somiglianza* e la linearità dell'equazione, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\psi(t) = Ae^t + B\sin t.$$

Sostituendo nell'equazione troviamo la relazione

$$Ae^t - B\sin t + 4Ae^t + 4B\sin t = e^t + 4\sin t,$$

da cui ricaviamo

$$A = \frac{1}{5},\ B = \frac{4}{3}$$

L'integrale generale dell'equazione per y_1 è dunque

$$y_1(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{3}\sin t.$$

Derivando e sostituendo nella *prima equazione del sistema* si trova poi

$$y_2(t) = \frac{1}{4}\left(y_1' - e^t\right) = \frac{c_1}{2}\cos 2t - \frac{c_2}{2}\sin 2t - \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{3}\cos t$$

Concludere scrivendo l'integrale generale in forma *vettoriale*; verificare che ha la struttura prevista dalla teoria.

3. Consideriamo prima il *problema omogeneo* : l'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea

$$\lambda^2 + \nu^2 = 0$$

ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda = \pm i\nu$ se $\nu \neq 0$ e la soluzione (doppia) $\lambda = 0$ se $\nu = 0$. L'integrale generale dell'equazione omogenea si scrive

$$z(x) = c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x) \qquad \text{se} \quad \nu \neq 0$$

e

$$z(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{se} \quad \nu = 0$$

In quest'ultimo caso, imponendo le condizioni ai limiti $z'(0) = z'(\pi) = 0$ si trova subito la soluzione $z(x) = c_2$, costante arbitraria.
Se $\nu \neq 0$, dalle condizioni ai limiti si ricava il sistema

$$\begin{cases} \nu c_2 = 0 \\ -\nu c_1 \sin(\nu\pi) + \nu c_2 \cos(\nu\pi) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $c_2 = 0$ e dalla seconda $c_1 \sin(\nu\pi) = 0$. Dunque, esistono soluzioni *diverse da zero* solo per i valori di ν che soddisfano

$$\sin(\nu\pi) = 0$$

Abbiamo dunque gli *autovalori* $\nu_n = n$, $n = 1, 2, ...$ e le corrispondenti *autofunzioni* del problema omogeneo

$$z_n(x) = c_1 \cos(nx)$$

Ricordando che anche la soluzione costante è una autofunzione (corrispondente all'autovalore $n = 0$), concludiamo che il problema *non* omogeneo avrà *una sola soluzione* per i valori di ν diversi da n, con $n = 0, 1, 2, ...$
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma Ae^{-x}; sostituendo nell'equazione si trova

$$Ae^{-x} + \nu^2 Ae^{-x} = e^{-x},$$

che è soddisfatta (per ogni x) se

$$A = \frac{1}{1 + \nu^2}$$

L'integrale generale dell'equazione completa è dunque:

$$y(x) = c_1 x + c_2 + e^{-x} \qquad \text{per} \quad \nu = 0;$$

$$y(x) = c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x) + \frac{e^{-x}}{1 + \nu^2} \qquad \text{per} \quad \nu \neq 0$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo le condizioni ai limiti

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

Se $\nu = 0$ troviamo le condizioni

$$c_1 = 1, \qquad c_1 = e^{-\pi}$$

che ovviamente non possono essere entrambe soddisfatte. Se $\nu \neq 0$ troviamo

$$\begin{cases} \nu c_2 = \frac{1}{1+\nu^2} \\ -\nu c_1 \sin(\nu\pi) + \nu c_2 \cos(\nu\pi) = \frac{e^{-\pi}}{1+\nu^2} \end{cases}$$

Questo sistema lineare è univocamente risolubile, se $\nu \neq n$, $n = 1, 2, ...$
In corrispondenza agli autovalori $n = 1, 2, ...$, abbiamo le due equazioni

$$\begin{cases} n c_2 = \frac{1}{1+n^2} \\ n \cos(n\pi) c_2 = \frac{e^{-\pi}}{1+n^2} \end{cases}$$

che sono chiaramente incompatibili.
In conclusione, il problema ai limiti non omogeneo ha un'unica soluzione per $\nu \neq n$, $n = 0, 1, 2, ...$, ed è impossibile per $\nu = 0, 1, 2, ...$