Analisi matematica 2		27 agosto 2018
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = x - \frac{\sin x}{y}$$

a) Determinare l'insieme di definizione D della funzione. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Verificare che la funzione f è differenziabile in D e calcolare $\nabla f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in D$.

c) Trovare i punti critici di f e classificarli.

d) Trovare i massimi e i minimi di f sull'insieme $C := \{(x,y) \,|\, -\pi/3 \leq x \leq \pi/3,\ 1/2 \leq y \leq \cos x\}$.

2.

a) Stabilire in quale regione del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = -2\sqrt{y-1}$$

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e determinare la soluzione $\phi(t)$ che soddisfa la condizione $\phi(0) = 5$

b) Determinare, per ogni $\omega > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = \sin(\omega t) - \cos(\omega t)$$

3.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$\Omega := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 - z, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

a) Calcolare il volume di Ω.

b) Verificare che la frontiera $\partial\Omega$ è una superficie chiusa e regolare a pezzi e calcolarne l'area.

4.

a) Trovare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} (x + 1/2)^n$$

b) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo per rappresentare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} \, dx$$

come somma di una serie numerica (suggerimento: utilizzare la serie di Maclaurin di e^{-x}).

c) Verificare che la *successione* di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

converge *uniformemente* a zero su tutto $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in $D = \{(x,y)\,|\,y \neq 0\}$. Si tratta di un insieme aperto, non limitato e non connesso (unione disgiunta di due aperti connessi).

b) Derivate parziali:
$$f_x(x,y) = 1 - \frac{\cos x}{y}; \quad f_y(x,y) = \frac{\sin x}{y^2}.$$
Sono entrambe funzioni continue per $y \neq 0$, quindi f è differenziabile in D per la condizione sufficiente di differenziabilità.
$$\nabla f(x,y) = \big(1 - \frac{\cos x}{y}\big)\,\mathbf{i} + \frac{\sin x}{y^2}\,\mathbf{j}$$

c) I punti critici si trovano risolvendo il sistema
$$\begin{cases} y - \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}.$$
La seconda equazione è risolta da $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; sostituendo nella prima si trova $y = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Si trova dunque un'infinità numerabile di soluzioni
$$P_n = \big(n\pi, (-1)^n\big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$
La funzione è derivabile due (k) volte con continuità in D, per cui possiamo classificare i punti critici calcolando le derivate seconde:
$$f_{xx}(x,y) = \frac{\sin x}{y}; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\cos x}{y^2}; \quad f_{yy}(x,y) = -2\frac{\sin x}{y^3}.$$
Nei punti critici il determinante della matrice Hessiana vale $\det H_f(P_n) = -1$; dunque, sono tutti *punti di sella*.

d) Si osserva subito che C è chiuso e che $C \subset D$, per cui f e assume massimo e minimo in C per il teorema di Weierstrass. Inoltre, non avendo f estremi locali liberi, i punti di estremo saranno sulla frontiera ∂C, che è l'unione del segmento
$$\gamma_1 := \{(t, 1/2)\,,\ -\pi/3 \le t \le \pi/3\}$$
e dell'arco di curva (cartesiana)
$$\gamma_2 := \{(t, \cos t)\,,\ -\pi/3 \le t \le \pi/3\}.$$
Studiamo allora le restrizioni
$$f_1(t) := f(t, 1/2) = t - 2\sin t, \qquad f_2(t) := f(t, \cos t) = t - \tan t, \qquad -\pi/3 \le t \le \pi/3.$$
Entrambe queste funzioni sono *decrescenti nell'intervallo considerato*, come si verifica subito calcolando le derivate
$$f_1'(t) = 1 - 2\cos t, \qquad f_2'(t) = -\tan^2 t.$$
Il massimo e il minimo sono allora $f(-\pi/3, 1/2) = \sqrt{3} - \pi/3$ e $f(\pi/3, 1/2) = -\sqrt{3} + \pi/3$.

2.

a) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione

$$f(t,y) = -2\sqrt{y-1}$$

al secondo membro è indipendente da t ed è definita e continua per $y \geq 1$; la derivata parziale

$$f_y(t,y) = -\frac{1}{\sqrt{y-1}}$$

è definita e continua per $y > 1$. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy con dati nel semipiano aperto

$$E = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 1\}\,.$$

La funzione costante $y = 1$ è soluzione dell'equazione; le soluzioni non costanti si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\,dy = -\int dt + C,$$

da cui si ricavano le soluzioni in forma implicita

$$\sqrt{y-1} = C - t\,,$$

Risolvendo rispetto a y si ottiene

$$y = 1 + (C-t)^2, \qquad t < C\,.$$

Si osserva che per $t \to C^-$ le soluzioni escono dall'aperto D e si raccordano con la soluzione costante. La soluzione del problema di Cauchy è

$$\phi(t) = 1 + (2-t)^2 = t^2 - 4t + 5\,, \qquad t < 2\,.$$

b) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $z'' + z = 0$, è

$$z(t) = C_1\,\sin t + C_2\,\cos t\,.$$

Si può cercare la soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di somiglianza, distinguendo i due casi $\omega \neq 1$ e $\omega = 1$. Nel primo caso, cerchiamo la soluzione nella forma $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$; sostituendo nell'equazione si ottiene

$$(1-\omega^2)A\sin(\omega t) + (1-\omega^2)B\cos(\omega t) = \sin(\omega t) - \cos(\omega t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

da cui si ricava

$$A = \frac{1}{1-\omega^2} = -B\,.$$

L'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1\,\sin t + C_2\,\cos t + \frac{1}{1-\omega^2}\big(\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\big)\,, \quad \omega \neq 1\,.$$

Nel caso $\omega = 1$ (risonanza) la soluzione va cercata nella forma

$$t\,\big(A\sin t + B\cos t\big)$$

Si ottiene ora la condizione

$$2A\cos t - 2B\sin t = \sin t - \cos t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

che è soddisfatta se e solo se $A = B = -1/2$. L'integrale generale è in questo caso

$$y(t) = C_1\,\sin t + C_2\,\cos t - \frac{t}{2}(\sin t + \cos t)\,.$$

3.

a) Integrando per strati:

$$|\Omega| = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^1 \Big(\int\int_{x^2+y^2 \le 1-z} dxdy \Big)\, dz = \pi \int_0^1 (1-z)\, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

b) La frontiera è composta dal cerchio unitario sul piano (x, y) e dalla superficie di equazione

$$z = 1 - x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 \le 1\,.$$

Sono entrambe superfici cartesiane regolari, aventi la circonferenza unitaria sul piano xy come frontiera comune. Quindi $\partial\Omega$ è chiusa e regolare a pezzi. L'area del cerchio di base vale π, mentre l'area della porzione di paraboloide si calcola con l'integrale

$$\int\int_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5} - 1\big)\,.$$

L'area totale è quindi

$$|\partial\Omega| = \pi + \frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5} - 1\big) = \frac{5}{6}\,(\sqrt{5} + 1)\,\pi\,.$$

4.

a) La serie è centrata in $x_0 = -1/2$; applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza $R = 1/2$, per cui converge (assolutamente) nell'intervallo $(-1, 0)$. Agli estremi $x = -1$ e $x = 0$, abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

entrambe convergenti. La serie converge nell'intervallo chiuso $[-1, 0]$.

b)
Dallo sviluppo di McLaurin

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n$$

ricaviamo

$$1 - e^{-x} = -(e^{-x} - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, x^n\,,$$

e quindi

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, x^{n-1} \Rightarrow_{\{m=n-1\}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\, x^m\,.$$

La serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Integrando termine a termine nell'intervallo $[0, 1]$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \int_0^1 x^m\, dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!(m+1)} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} + \ldots$$

c) Per ogni fissato $n \geq 1$, la funzione $f_n(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, dispari, regolare e tende a zero per $x \to \pm\infty$; la derivata

$$f_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}\,,$$

si annulla per $x = n$ e $x = -n$. Dallo studio del segno di f_n', si ricava che $x = n$ è punto di massimo assoluto e $x = -n$ è punto di minimo assoluto. Abbiamo allora

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq |f_n(\pm n)| = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}\,.$$

Poiché $1/2n \to 0$ per $n \to \infty$, la successione f_n converge uniformemente a zero su $\mathbb{R}$.