Analisi matematica 2		18 aprile 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 - x + y\,.$$

a) Disegnare nel piano xy l'insieme di livello $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$. Dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Spiegare perché f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e determinare la direzione di massima crescita di f nell'origine.

c) Trovare tutti i punti critici di f e classificarli.

d) Verificare che la funzione f ha un *punto critico vincolato* sulla curva di equazione $x^3 - y^3 = 1$ (la classificazione del punto critico vincolato è facoltativa).

2.

a)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}\,.$$

i) Trovare l'integrale generale dell'equazione.

ii) Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni: $y(1) = 1$ e $y(-1) = -1$, specificandone gli intervalli massimali di esistenza.

b)

i) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione *lineare del secondo ordine* in forma normale.

ii) Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = 1 - \cos t$$

e determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \cosh t\,\mathbf{k}\,; \qquad t \in [-\pi, \pi]\,.$$

a) Verificare che la curva è chiusa, semplice e regolare.

b) Calcolare la lunghezza della curva.

c) Calcolare la curvatura e trovare in quale punto della curva è massima.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è un polinomio di terzo grado. Scrivendo in forma fattorizzata

$$f(x,y) = (xy-1)(x-y)\,,$$

si vede che l'insieme di livello zero è l'unione dei due rami di iperbole $xy = 1$ con la retta $x = y$. Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e connesso.

b) La funzione è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ perchè le sue derivate parziali

$$\partial_x f(x,y) = 2xy - y^2 - 1, \qquad \partial_y f(x,y) = x^2 - 2xy + 1\,,$$

sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ (condizione sufficiente per la differenziabilità). La direzione di massima crescita nell'origine è la direzione del vettore gradiente

$$\nabla f(0,0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

(ovvero la direzione del versore $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$).

c) Punti critici: il gradiente si annulla nei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $x^2 - y^2 = 0$, cioè $y = x$ oppure $y = -x$. Nel primo caso si trova (sostituendo in una delle due equazioni) $x = \pm 1$. Nel secondo caso non si trovano soluzioni reali. Dunque, si ottengono due punti critici $P_1(1,1)$ e $P_2(-1,-1)$.
Calcolando le derivate seconde

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2y, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 2(x-y), \qquad \partial_{yy} f(x,y) = -2x,$$

e la matrice hessiana nei punti trovati, si trova $H_f(P_1) = H_f(P_2) = -4$. Si conclude che entrambi i punti sono punti di sella.
Si arrivava alla stessa conclusione osservando che $f(P_1) = f(P_2) = 0$ e che il segno di f cambia in ogni intorno dei due punti (usare la forma fattorizzata di f).

d) Per determinare i punti critici vincolati conviene usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Osserviamo che non ci sono punti singolari sul vincolo

$$g(x,y) \equiv x^3 - y^3 - 1 = 0$$

in quanto ∇g si annulla solo nell'origine, ma $g(0,0) \neq 0$.
Cerchiamo allora i punti critici della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 y - xy^2 - x + y - \lambda(x^3 - y^3 - 1)\,.$$

Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + 1 + 3\lambda y^2 = 0 \\ x^3 - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni otteniamo $(x^2 - y^2)(1 - 3\lambda) = 0$, da cui le alternative $y = x$, $y = -x$, $\lambda = 1/3$. La prima alternativa è incompatibile con l'equazione del vincolo; scegliendo la terza e sostituendo il valore $\lambda = 1/3$ nella prima (o nella seconda) equazione si trova $(x - y)^2 + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Rimane quindi $y = -x$, che sostituita nella terza equazione fornisce

$$2x^3 - 1 = 0\,.$$

L'unica soluzione del sistema è dunque $x = 2^{-1/3}$, $y = -2^{-1/3}$. Il punto trovato è il minimo di f ristretta al vincolo. Per dimostrarlo, osserviamo che il vincolo si può esplicitare in termini della funzione $y = (x^3 - 1)^{1/3}$, il cui grafico giace nel semipiano $y < x$ e ha la retta $y = x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Ma dallo studio del segno di f si ricava che, nel semipiano $y < x$, $f(x, y) < 0$ per $xy < 1$, cioè nella regione compresa tra i due rami di iperbole e $f(x, y) > 0$ per $xy > 1$.
Se ne deduce che la f *ristretta al vincolo* è negativa sul tratto *limitato* del grafico di $(x^3 - 1)^{1/3}$ che è compreso tra i due rami dell'iperbole (mentre è positiva sulle due parti illimitate del grafico al di sopra e al di sotto dell'iperbole); dunque, per il teorema di Weierstrass, f assumerà in questo tratto il *minimo vincolato*, in un punto che deve coincidere con l'unico punto critico vincolato trovato. Il valore di f nel punto di minimo è $f(2^{-1/3}, -2^{-1/3}) = -\big(4^{1/3} + 1\big)$.

2a)

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine in forma normale (equazione omogenea). Con la sostituzione di funzione incognita

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}$$

l'equazione diviene

$$tz' + z = z + \frac{1}{z},$$

ovvero

$$z' = \frac{1}{tz}\,,$$

che è un'equazione a variabili separabili. Non esistono soluzioni costanti, per cui l'integrale generale (in forma implicita) si trova applicando la formula risolutiva

$$\int z dz = \int \frac{1}{t} dt + C, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

da cui si ricava la soluzione in forma implicita

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Esplicitando z dalla precedente equazione (ridefinendo la costante arbitraria) e sostituendo $z = y/t$, si ottengono, per ogni valore di C, *due funzioni*

$$y = \pm t\sqrt{\ln t^2 + C},$$

ciascuna definita e di classe $\mathcal{C}^1$ per $|t| > e^{-C/2}$.
Imponendo le condizioni assegnate, troviamo per i due problemi di Cauchy le soluzioni:

$$\varphi_1(t) = t\sqrt{\ln t^2 + 1}; \qquad \varphi_2(t) = t\sqrt{\ln t^2 + 1},$$

con $\varphi_1(t)$ definita (di classe $\mathcal{C}^1$) nell'intervallo $(e^{-1/2}, +\infty)$, $\varphi_2(t)$ nell'intervallo $(-\infty, -e^{-1/2})$.

2b)

L'equazione omogenea

$$z'' + 2z' + z = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,,$$

che ha la radice doppia $\lambda = -1$.
L'integrale generale è allora

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t\, e^{-t}\,.$$

Usando il metodo di similitudine e il pricipio di sovrapposizione, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = A + B\sin t + C\cos t\,.$$

Sostituendo nell'equazione, troviamo $A = 1$, $B = -1/2$, $C = 0$. L'integrale generale è:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t\, e^{-t} + 1 - \frac{1}{2}\sin t\,.$$

Calcolando la derivata

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2\big(e^{-t} - t\, e^{-t}\big) - \frac{1}{2}\cos t$$

e imponendo le condizioni iniziali, si ottiena il sistema

$$C_1 + 1 = 0, \qquad -C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0\,,$$

che ha l'unica soluzione $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$\varphi(t) = 1 - e^{-t} - \frac{1}{2}t\, e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t\,.$$

3.

a) La curva è chiusa poiché

$$\mathbf{r}(-\pi) = -\mathbf{i} + \cosh(\pi)\,\mathbf{k} = \mathbf{r}(\pi)\,.$$

Verifichiamo che la curva è semplice: siano t_1, $t_2 \in [-\pi, \pi)$ tali che $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$. In particolare avremo $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ e $\sin(t_1) = \sin(t_2)$ *nell'intervallo* $[-\pi, \pi)$; ma questo implica $t_1 = t_2$. Dunque la curva è semplice. La curva è regolare perché:

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sinh t\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \qquad \forall\, t\,.$$

b) Calcolo della lunghezza:

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sinh^2 t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \sinh^2 t}\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t\,dt = 2\sinh\pi = e^{\pi} - e^{-\pi}\,.$$

c) Per calcolare la curvatura conviene usare la formula

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Calcoliamo dunque il *vettore accelerazione*:

$$\mathbf{r}''(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} + \cosh t\,\mathbf{k}\,,$$

e il prodotto vettoriale

$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = \big(\cos t \cosh t + \sin t \sinh t\big)\,\mathbf{i} + \big(\sin t \cosh t - \cos t \sinh t\big)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,.$$

Abbiamo allora

$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|^2 = \cosh^2 t + \sinh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$$

e dunque:

$$k(t) = \frac{\sqrt{2}\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 t}\,.$$

Evidentemente, la curvatura è massima ($= \sqrt{2}$) per $t = 0$, cioè nel punto

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

di coordinate $(1, 0, 1)$.