ANALISI FUNZIONALE

II.1 - SPAZI NORMATI

Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$). Si dice **norma** su V un'applicazione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ con le seguenti proprietà:

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \iff v = 0, \quad \forall v \in V$ (positività)
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C}), \ \forall v \in V$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Da cui seguono immediatamente anche:

4. $\|0\| = 0$
5. $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$

Uno **spazio normato** è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su V.

Esempi:

- $V=\mathbb{R}, \quad \|\cdot\|=|\cdot|$: modulo
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$: norma euclidea
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_p:=\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$: norma p, con $p\geq 1$
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_\infty:=\max_{i\in[1,N]}\{|x_i|\}$: norma del massimo
- $V=\mathbb{C}, \quad \|\cdot\|=|\cdot|_{\mathbb{C}}$: modulo complesso
- $V=C^0([a,b]), \quad \|f\|_1:=\int_a^b |f(x)|\,dx$
- $V=C^0([a,b]), \quad \|f\|_\infty:=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è anche metrico con la seguente **distanza**:

$$d(u,v) = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$$

che soddisfa le proprietà:

1. $d(u,v) \geq 0, \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v, \quad \forall u, v \in V$
2. $d(u,v) = d(v,u), \quad \forall u, v \in V$
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v), \quad \forall u, v, w \in V$

Con l'introduzione di una distanza è possibile ora definire i principali elementi topologici in V.

Si definisce **sfera** di raggio R e centro v_0 l'insieme dei punti distanti da v_0 meno di R:

$$B_R(v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| < R\}$$

Il bordo di una tale sfera è invece l'insieme dei punti distanti da v_0 esattamente R:

$$\partial B_R(v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| = R\}$$

Si dice **intorno** di un punto v_0 un insieme contenuto in V che contiene una palla centrata in v_0.
Un sottoinsieme E di V si dice <u>limitato</u> se esiste una palla in cui è incluso:

$$E\,(\subseteq V) \text{ limitato} \quad \Leftrightarrow \quad \exists R: \; E \subseteq B_R(0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists R: \; \|v\| \leq R, \; \forall v \in E$$

Sia E un sottoinsieme di V, si definiscono:

- <u>parte interna</u> di E: $\overset{o}{E} := \{v \in V : \exists \mathcal{U}(v) \subseteq E\}$
- <u>chiusura</u> di E: $\overline{E} := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \mathcal{U}(v) \cap E \neq 0\}$
- <u>frontiera</u> di E: $\partial E = E \setminus \overset{o}{E}$
- <u>punti di accumulazione</u> di E: $acc(E) := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \mathcal{U}(v) \cap (E \setminus \{v\}) \neq 0\}$

Sia $f : V \to W$ una funzione tra due spazi vettoriali normati $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$. Si dice che il **limite** di f per $v \to v_0$ (con $v, v_0 \in V$) è l (con $l \in W$) se:

$$\forall \mathcal{U}(l) \ \exists \mathcal{U}(v_0) : \ \forall v \in \mathcal{U}(v_0) \setminus \{v_0\} \ \ f(v) \in \mathcal{U}(l)$$

Una **successione** in V può essere vista come una funzione che associa ad ogni elemento di $\mathbb{N}$ uno ed un solo elemento di V:

$$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V \quad o \quad f:\mathbb{N}\to V$$

Si dice che una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ tende a $v \in V$ se il limite di v_n per $n \to +\infty$ è v, ovvero:

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\|_V \to 0, \;\; per \;\; n \to +\infty$$

Una **serie** in V è una successione di somme parziali S_N, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n := \left(\lim_{n\to+\infty}\right) S_N, \quad dove \;\; S_N := \sum_{n=0}^{N} v_n$$

Nell’ambito degli spazi normati continuano a valere i seguenti risultati:

- unicità del limite
- linearità del limite
- caratterizzazione del limite per successioni
- una successione convergente è limitata
- una serie convergente ha termine generale infinitesimo

Alcuni risultati, invece, continuano a valere solo nel caso degli spazi a dimensione finita, mentre in generale non sono veri se la dimensione è infinita.
Un primo esempio è il seguente: sia V uno spazio vettoriale normato e W un suo sottospazio. Se V ha dimensione finita, allora W è chiuso.

II.2 - NORME EQUIVALENTI

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale V si dicono **equivalenti** se:

- $\exists c_1 : \|v\|_1 \leq c_1 \|v\|_2 , \quad \forall v \in V$
- $\exists c_2 : \|v\|_2 \leq c_2 \|v\|_1 , \quad \forall v \in V$

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, si può dimostrare che tutte le norme su di esso sono equivalenti. Ciò è invece falso in generale per gli spazi a dimensione infinita.

Esempi:

- $V = \mathbb{R}^2 : \quad \left\langle \begin{array}{l} \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \\ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \end{array} \right.$, spazio di dimensione finita.

$$\left.\begin{array}{l} - \ \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 2\max\{|x_1|, |x_2|\} = 2\|\underline{x}\|_\infty \\ - \ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq |x_1| + |x_2| = \|\underline{x}\|_1 \end{array}\right\} \text{le due norme sono equivalenti.}$$

- $v = C^0([a,b])$: $\left\langle \begin{array}{l} \|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \\ \|f\|_\infty = \max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| \end{array} \right.$, spazio di dimensione infinita.

  Si può vedere che solo una delle due disuguaglianze della definizione di equivalenza è sempre verificata. Infatti:

  – $\|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \le (b-a) \max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| = (b-a)\|f\|_\infty$

  – si costruisce ora un controesempio in cui la seconda disuguaglianza non vale:

  $$[a,b]=[0,1], \quad f_n(x) = x^n : \left\langle \begin{array}{l} \|f_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} \left|x^n\right| = 1, \ \forall n \\ \|f_n\|_1 = \int_0^1 \left|x^n\right| dx = \left.\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0, \ \ per \ \ n \to +\infty \end{array} \right.$$

  si vede facilmente quindi come sia impossibile trovare una costante (indipendente da n) tale che $\|f_n\|_\infty \le c\|f_n\|_1$.

II.3 - OPERATORI LINEARI

Siano $(V,\|\cdot\|_V)$ e $(W,\|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Si chiama **operatore lineare** da V a W un operatore $T:V\to W$ tale che:

$$T(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1 T(v_1)+\lambda_2 T(v_2),\quad \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall v_1,v_2\in V$$

Si può dimostrare che, se V ha dimensione finita, ogni operatore lineare è anche continuo.
Inoltre si può facilmente vedere che la continuità per un operatore lineare equivale alla continuità nell'origine.

Dimostrazione:

- l'implicazione "continuità" $\Rightarrow$ "continuità in 0" è ovvia
- per l'altra implicazione, utilizziamo la caratterizzazione del limite per successioni:

  $$x_n\to x;\quad x_n-x\to 0\quad\Rightarrow\quad T(x_n-x)\to T(0)=0;\quad T(x_n)-T(x)\to 0;\quad T(x_n)\to T(x)$$

In particolare, la continuità nell'origine significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < \|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(x)\| < \varepsilon$$

che è equivalente alla proprietà di limitatezza:

$$\exists M > 0: \quad \|T(x)\| < M\|x\|, \quad \forall x \in V$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

- per l'implicazione "limitato" $\Rightarrow$ "continuo in 0", basta scegliere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.
- per l'altra implicazione, si procede per assurdo: sia T non limitato, $\exists\{x_n\}: \quad \|T(x_n)\| = 1, \quad \|x_n\| \to 0$

  $$\frac{x_n}{\|T(x_n)\|} = x_n \to 0, \; ma \;\; T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|}\right) = \frac{T(x_n)}{\|T(x_n)\|} \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad T \; non \; è \; continuo$$

Per un operatore lineare, quindi, continuità e limitatezza sono equivalenti. In particolare, se lo spazio V è a dimensione finita, per quanto appena visto, ogni operatore lineare è anche limitato.

Esempio:

$V = C^0([a,b]), \quad W = \mathbb{R};$ Si fissi $c \in [a,b]$ e si consideri l'operatore lineare:

$$T : V \to W; \quad T : f \mapsto f(c)$$

- $\|T(f)\|_\infty = |f(c)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$: T è limitato con $M = 1$.

- $[a,b]=[0,1], \quad c=1, \quad f_n(x)=x^n: \quad \|T(f)\|_1 = |f(c)| = 1; \quad \|f\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0$

  Con la norma $\|\cdot\|_1$, quindi, T è lineare ma non è limitato!

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Si indica con $\mathcal{L}(V,W)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari e limitati da V a W (se V ha dimensione finita, esso coincide con l'insieme di tutti gli operatori lineari). Esso è uno spazio vettoriale su cui si può introdurre la seguente norma:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{\substack{x\in V \\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|_V = 1}} \|T(x)\|_W$$

II.4 - SPAZI DI BANACH

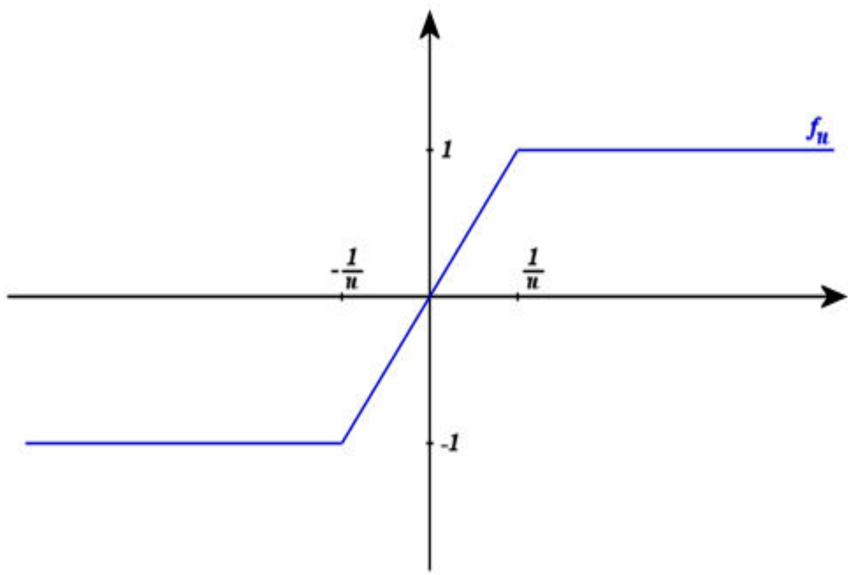
Sia V uno spazio vettoriale normato e $\{x_n\}$ una **successione di Cauchy** in V, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N}: \quad \|v_n - v_m\| < \varepsilon, \quad \forall n,m > \overline{n}$$

Una successione convergente è sempre di Cauchy, mentre non è valido in generale il viceversa. In particolare si dimostra che se la dimensione di V è finita data una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in V, allora $\{x_n\}$ è convergente.

Esempio:

$V = C^0([-a,a]), \quad \|\cdot\|_1$



- f_n è di Cauchy, infatti:

$$\|v_n - v_m\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f_m| = 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right) < \frac{1}{n} \to 0, \quad con \;\; m > n$$

- f_n non converge:
  - sia u il limite con la norma $\|\cdot\|_1$
  - sia $v = \operatorname{sign} x$ il limite puntuale

Se u esiste, allora si può facilmente verificare che deve essere $u = v$, ma essendo v discontinua nell'origine, si ha che u non appartiene a V e quindi la successione non converge.

Uno spazio vettoriale normato si dice completo se in esso tutte le successioni di Cauchy convergono. Un tale spazio è detto anche **spazio di Banach**.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Si chiama $C^0(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni da Ω a $\mathbb{R}$ continue che si possono estendere con continuità alla chiusura di Ω:

$$C^0(\bar{\Omega}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ continue : \ \ \exists \tilde{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \ \ estensione \ \ continua \ \ di \ \ f \right\}$$

Si dice poi $C^k(\bar{\Omega})$, con $k \geq 1$, l'insieme delle funzioni appartenenti a $C^0(\bar{\Omega})$ con tutte le derivate fino all'ordine *k* appartenenti a tale spazio:

$$C^k(\bar{\Omega}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ continue : \ \ D^\alpha f \in C^0(\bar{\Omega}), \ |\alpha| \leq k \right\}$$

Si può dimostrare che gli spazi $C^k(\bar{\Omega})$ sono di Banach con la seguente norma:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$