Def. Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y$ (x ORTOGONALE A y) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(x,y)=0$

Es. $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\int_0^1 fg = 0$.

- $M^\perp := \{x \in H : (x,y)=0 \ \forall y \in M\}$

ORTOGONALE DI M.

Es. $M = \{$funzioni costanti in $L^2(0,1)\}$

$$M^\perp = \{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0 \}.$$

Oss. $x \perp y \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Teorema di Pitagora!).

Dim.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$

$\boxtimes$

Oss. $M \cap M^\perp = \{0\}$. Infatti $x \in M \cap M^\perp \Rightarrow$

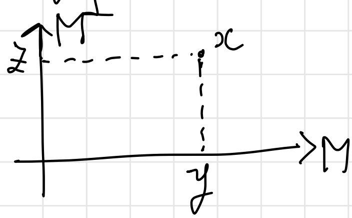
$$(\underset{M^\perp}{\underset{\uparrow}{x}}, \underset{M}{\underset{\uparrow}{x}}) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Teorema delle proiezioni

Sia H un Hilbert e M un sottospazio chiuso.

Allora $\forall x \in H$, esiste un'unica rappresentazione di x come: $x = y + z$ con $y \in M$ e $z \in M^\perp$

Inoltre, le applicazioni



$$\begin{cases} x \longmapsto y = P_M(x) \\ x \longmapsto z = P_{M^\perp}(x) \end{cases}$$

sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

__Dim.__ Basta prendere $y = P_M x$ (che esiste dal teo precedente): sappiamo che $(x - P_M x, v) = 0 \quad \forall v \in M$

$\Rightarrow x - P_M x \in M^\perp$, ovvero $z := x - y \in M^\perp$.

__Unicità:__ $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Rightarrow \underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0.$

P_M lineare: $P_M(x_1 + x_2) = P_M(x_1) + P_M(x_2)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \overset{P_M(x_1)}{y_1} + \overset{P_{M^\perp}(x_1)}{z_1} \\ x_2 &= \overset{P_M(x_2)}{y_2} + \overset{P_{M^\perp}(x_2)}{z_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = \underbrace{y_1 + y_2}_{\in M} + \underbrace{z_1 + z_2}_{\in M^\perp}$$

$\Rightarrow$ per l'unicità $\overset{P_M(x_1)}{y_1} + \overset{P_M(x_2)}{y_2} = P_M(x_1 + x_2)$, $z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$

P_M limitato : $\quad x = y + z = P_M(x) + P_{M^\perp}(x) \Rightarrow$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2 \Rightarrow$$

$$\|P_M(x)\|^{\cancel{2}} \underset{K=1}{\leq} \|x\|^{\cancel{2}} \Rightarrow$$ P_M limitato con norma ≤ 1

$\|P_M\| = 1$: basta prendere $x \in M \Rightarrow x = P_M x = y$

$\Rightarrow$ vale l'uguaglianza $\|P_M(x)\| = \|x\|$. $\boxtimes$

Problema: dato H Hilbert, caratterizzare H'

$$H' = \{ \varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineari e continui} \} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R}).$$

$\uparrow$ spazio duale di H

Oss. Fissato $u \in H$, possiamo associargli $\varphi_u \in H'$ definito da

$$\varphi_u : H \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_u(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Verifica che $\varphi_u \in H'$:

- lineare: $\varphi_u(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$
$$= \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2)$$
$$= \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2).$$

- continuo (limitato): $\underset{|(u,v)|}{\underset{\parallel}{|\varphi_u(v)|}} \leq M \|v\|$, con $M = \|u\|$ per Cauchy-Schwarz.

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioè $M = \|u\|$ è la costante miglior possibile $(v = u)$

In conclusione

$$\boxed{\begin{array}{ccc} H & \subseteq & H' \\ u & \longmapsto & \varphi_u \end{array}}$$

(immersione isometrica)

$\|u\|_H = \|\varphi_u\|_{H'}$

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n \qquad (u,v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

$$\varphi_u(v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

- $H = L^2(\Omega) \qquad (u,v) = \int_\Omega uv$

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega uv \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

- $H = H^1(\Omega) \qquad (u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Teorema di Riesz

Sia H un Hilbert, e sia $\varphi \in H'$.

Allora, esiste unico $u \in H$ tale che

$\varphi = \varphi_u$ ovvero

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \forall v \in H.$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H.$$

$$\boxed{\begin{aligned} H' &\subseteq H \\ \varphi &\longmapsto u \text{ (tale che } \varphi = \varphi_u) \end{aligned}}$$

Conclusione:

$$H \text{ “}=\text{” } H'$$

Forme bilineari

Def. Sia H Hilbert. Una FORMA BILINEARE su H è un'applicazione $a: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \, a(u_1, v) + \alpha_2 \, a(u_2, v)$
- $a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \, a(u, v_1) + \alpha_2 \, a(u, v_2)$.

Esempi

- In H Hilbert qualsiasi $a(u,v) = (u,v)$
- $H = H^1(\Omega)$ $\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \\ a(u,v) = \int_\Omega uv \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \end{cases}$

Def. Sia $a: H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare

- a SIMMETRICA se
$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in H$$
- a CONTINUA se $\exists\, C > 0$ tale che
$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in H.$$
- a COERCIVA se $\exists\, \alpha > 0$ tale che
$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Esempi

- In H Hilbert qualsiasi, $a(u,v) = (u,v)$ è
  - → simmetrica (per def. di prodotto scalare)
  - → continua $\left(|(u,v)| \leq \|u\| \|v\| \quad C.S. \right)$
  - → coerciva $\left((u,u) = \|u\|^2, \ \alpha = 1 \right)$

- In $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$
  spazio di Hilbert, con Ω limitato.

→ simmetrica

→ continua:

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| \overset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \|\nabla u\|_2 \, \|\nabla v\|_2$$

$$\leq \|u\|_{H^1} \, \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

→ coerciva

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \overset{?}{\geq} \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

Ver per la disuguaglianza di Poincaré.

<u>Oss.</u> $a(u,v)$ NON sarebbe coerciva su $H^1(\Omega)$

Su $H^1(\Omega)$ è FALSO che

$$\underbrace{a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2}_{=0} \geq \alpha \underbrace{\|u\|_{H^1}}_{>0}$$

Basta prendere $u =$ costante > 0.

Teorema di Lax-Milgram.

Sia H Hilbert, e sia $\varphi \in H'$.

Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, continua e coerciva.

Allora esiste unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = a(u,v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre, u è CARATTERIZZATA dalla proprietà seguente: posto

$$E(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \quad \forall v \in H,$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u).$$

<u>Esempio</u> (Ω limitato)

$H = H^1_0(\Omega)$, $\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$,

$\varphi(v) = \int_\Omega f v$ dove $f \in L^2(\Omega)$.

$$\left(\varphi \in H' : \quad \left|\int_\Omega f v\right| \le \int_\Omega |f v| \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le \underbrace{\|f\|_{L^2}}_{M} \|v\|_{H^1}\right)$$

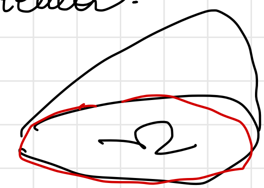
Lax-Milgram: $\exists$ unico $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che $\varphi(v) = a(u,v)$ $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$(*) \quad \int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

(è una "formulazione debole" del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

)



Inoltre u risolve:

$$\min_{v \in H^1_0(\Omega)} E(v) = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v\right)$$

Sulla proprietà variazionale di u

$$E(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2} a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - \varphi(u+\varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(u,u) + 2\varepsilon a(u,v) + \varepsilon^2 a(v,v)\right] - \varphi(u) - \varepsilon\varphi(v)$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u)}_{= E(u)}\Big] + \varepsilon\left[a(u,v) - \varphi(v)\right] + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v)$$

$$\Rightarrow E(u+\varepsilon v) - E(u) = \varepsilon\left[a(u,v) - \varphi(v)\right] + o(\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{E(u+\varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = \underbrace{a(u,v) - \varphi(v)}_{= 0}.$$

- Se $a(u,v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$,

  $$E(u+\varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v) \geq 0.$$

  Quindi u minimizza E.

- Viceversa, se u minimizza E:

  $$E(u+\varepsilon v) \geq E(u) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

  $$\Rightarrow a(u,v) - \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in H.$$

$\boxtimes$