Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova intermedia di Analisi III, 9 novembre 2019 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Si consideri la seguente funzione:

$$u(x) = \sum_{k>1} \frac{(-1)^k}{k} \chi_{(k-1,k)}\,, \qquad x \in (1, +\infty)\,.$$

Stabilire se:

(a) u è integrabile secondo Riemann su $(1, +\infty)$;

(b) u è integrabile secondo Lebesgue su $(1, +\infty)$;

(c) $u \in L^2(1, +\infty)$;

(d) $u \in L^\infty(1, +\infty)$.

Soluzione.

(a) Si', perché $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n u = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$.

(b) No, perché $|u|$ non è integrabile secondo Lebesgue in quanto $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

(c) Si', perché $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = +\infty$

(d) Si', perché ess-sup $|u| \leq 1$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Sia $X = L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, munito della norma $\|f\|_\infty := \text{esssup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, e sia

$$f_n(x) := \frac{1}{1+|x|}\chi_{[-n,n]}(x)\,, \qquad f(x) = \frac{1}{1+|x|}\,.$$

Stabilire se:

(a) $f_n \in X$;

(b) $f \in X$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(d) X è uno spazio di Banach.

Soluzione.

(a) Si', perché le funzioni f_n sono limitate e nulle fuori dall'insieme compatto $[-n, n]$.

(b) No, perché f decade come $1/|x|$ e quindi non è integrabile vicino a $\pm\infty$.

(c) Si', perché $\sup|f_n - f| = \frac{1}{1+n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

(d) No, perché per il punto (c) la successione f_n è di Cauchy in X, ma il suo limite (la funzione f) non appartiene a X.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Siano α e β due numeri reali concordi con $\alpha \neq \beta$. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2(1+x^2)}\, dx\,.$$

Soluzione. La funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(1+z^2)}$$

ha singolarità isolate in $z = 0$ e $z = \pm i$. Si tratta di poli semplici, e si ha:

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z(1+z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z} = i\alpha - i\beta\,;$$

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(z+i)} = \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{-2i}\,.$$

Poiché f rispetta le condizioni di decadimento all'infinito (rispettivamente sulla semicirconferenza superiore o inferiore secondo il segno dei due parametri), possiamo quindi applicare il teorema dei residui e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \pi i(i\alpha - i\beta) + 2\pi i\Big(\frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{-2i}\Big) = \pi(\beta - \alpha + e^{-\beta} - e^{-\alpha})\,.$$

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Enunciare la formula di Cauchy per la derivata k-esima.

(b) Enunciare una condizione necessaria affinché una funzione di variabile complessa ammetta primitive.

(c) Dimostrare che se u è una funzione armonica su $\mathbb{R}^2$ ed appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$, u è identicamente nulla.
(*Suggerimento:* sfruttare il fatto che le funzioni armoniche hanno la proprietà della media, ovvero se u è armonica su $\mathbb{R}^2$ si ha: $u(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, dove $B_r(x)$ indica il disco di centro x e raggio r.)

Soluzione. (a)-(b) Si veda uno dei testi consigliati.
(c) Sfruttando la proprietà della media, si ha (per ogni $r > 0$)

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} |u(y)|\, dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_r(x)}(y)|u(y)|\, dy\,.$$

Per $r \to +\infty$, si ha $\chi_{B_r(x)}(y)|u(y)| \to |u(y)|$, e d'altra parte $\chi_{B_r(x)}(y)|u(y)| \leq |u(y)|$. Quindi, applicando il teorema di convergenza dominata, poiché per ipotesi $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, possiamo scrivere

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_r(x)}(y)|u(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} |u(y)|\, dy < +\infty\,.$$

Pertanto, passando al limite nella prima disuguglianza scritta per $|u|$, possiamo concludere che

$$|u(x)| \leq \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_r(x)}(y)|u(y)|\, dy = 0\,,$$

da cui la tesi.