ESEMPIO DI STUDIO DI DIFFERENZIABILITÁ

La funzione

$$f(x, y) = |xy|$$

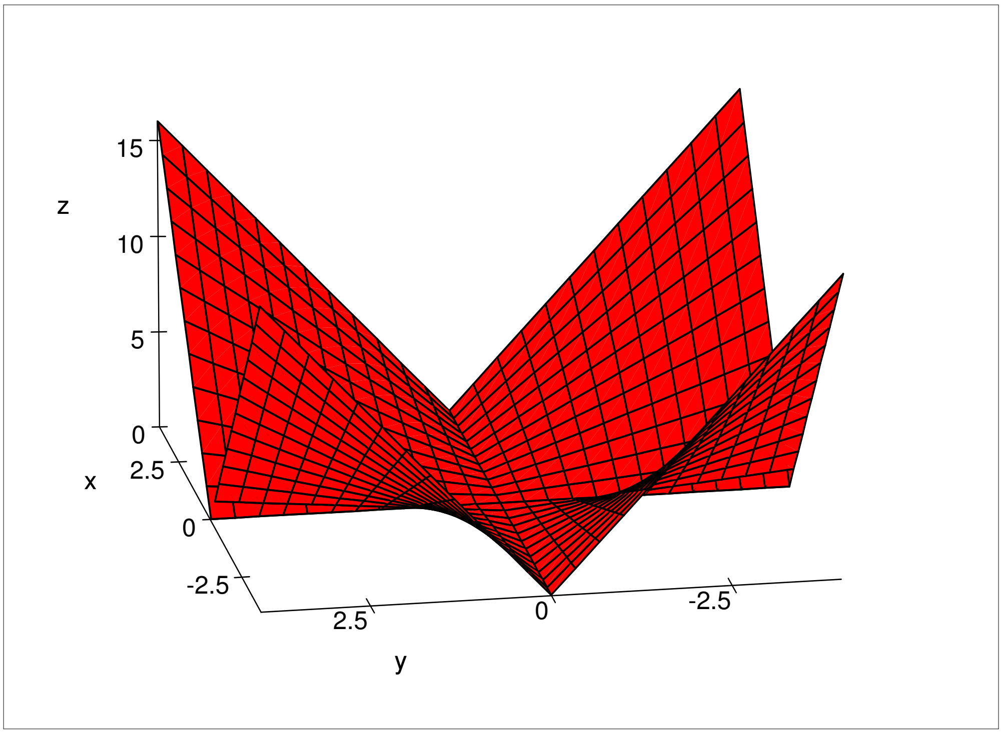
ha derivate parziali continue e quindi *è differenziabile* in tutti i punti (x, y) tali che

$$xy \neq 0$$

ovvero al di fuori degli assi x e y. Si può verificare che nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ non esiste la derivata parziale f_y , mentre nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ non esiste la derivata parziale f_x .
Quindi la funzione *non è differenziabile* nei punti degli assi *esclusa eventualmente l'origine*.
Studiamo la differenziabilità nell'origine: poiché $f(x, 0) = 0$ per ogni x e $f(0, y) = 0$ per ogni y, le derivate parziali nell'origine *esistono* e valgono $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Inoltre, per ogni spostamento (h, k) dall'origine si ottiene:

$$f(h, k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)h = |hk| = o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

Ricordando la definizione di differenziabilità, si conclude che la funzione *è differenziabile nell'origine*. Dunque, la superficie di equazione $z = |xy|$ ammette piano tangente di equazione $z = 0$ nell'origine.



La superficie cartesiana di equazione $z = |xy|$