ANALISI COMPLESSA

I.1 - FUNZIONI ELEMENTARI

Si chiama **funzione di variabile complessa** una relazione che associa ad ogni elemento di un dominio Ω, sottoinsieme di $\mathbb{C}$, un numero complesso:

$$f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C} \qquad f:z\mapsto f(z),\quad z\in\mathbb{C}$$

Ad ogni funzione di questo tipo è possibile associare due funzioni reali di due variabili reali. Infatti, se si identifica il piano complesso con $\mathbb{R}^2$ mediante la relazione $(x, y) = x + iy$:

$$f:z=x+iy\mapsto f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{matrix} u:(x,y)\mapsto u(x,y) \\ v:(x,y)\mapsto v(x,y) \end{matrix} \quad con\ (x,y)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$$

Esempi:

- $f(z)=z=x+iy \quad\Leftrightarrow\quad u(x,y)=x,\ \ v(x,y)=y$
- $f(z)=P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0,\quad con\ a_i\in\mathbb{C}$
- $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)},\quad dove\ Q(z)\neq 0$
- $f(z)=|z| \quad\Leftrightarrow\quad u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ \ v(x,y)=0$
- $f(z)=\mathrm{Re}(z) \quad\Leftrightarrow\quad u(x,y)=x,\ \ v(x,y)=0$
- $f(z)=\mathrm{Im}(z) \quad\Leftrightarrow\quad u(x,y)=y,\ \ v(x,y)=0$

Si definiscono anche in questo caso le più importanti funzioni elementari, che risulteranno essere estensioni nel campo complesso di quelle di variabile reale.

1. ***Funzione esponenziale***: $e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

   Le principali proprietà di questa funzione sono:

   - $e^z\big|_{\Re} = e^x$
   - $\left|e^z\right| = \left|e^x(\cos x + i\sin y)\right| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$
   - $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
   - $e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$

     La funzione esponenziale in campo complesso è quindi periodica di periodo T=2πi. Ciò implica quindi che essa non è biunivoca e per questa ragione non esiste globalmente la sua funzione inversa.

2. ***Funzioni iperboliche***: $\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \quad \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$

3. ***Funzioni circolari***: $\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

Le principali proprietà della funzione coseno sono:

- $\cos z\big|_{\mathbb{R}} = \cos x = \cos(\mathrm{Re}(z))$
- $\cos(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \dfrac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

  Anche in campo complesso la funzione coseno è periodica di periodo T=2π.

- $\cos z = \cos(x+iy) = \dfrac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \dfrac{1}{2}(\cos x + i\sin x)e^{-y} + \dfrac{1}{2}(\cos x - i\sin x)e^{y} =$

  $= \dfrac{1}{2}\cos x(e^{-y} + e^{y}) + \dfrac{1}{2}i\sin x(e^{-y} - e^{y}) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Alla funzione coseno in campo complesso possiamo quindi associare le seguenti due funzioni di variabile reale:

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(x,y) = \cos x \cosh y \\ v(x,y) = -\sin x \sinh y \end{cases}$$

- $\cosh(iz) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad \Rightarrow \quad \cos(iy) = \cosh(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

  Le funzioni circolari sull'asse immaginario corrispondono quindi alle funzioni iperboliche (al più con un cambiamento di segno) sull'asse reale. Le funzioni circolari non sono quindi in generale limitate (lo sono solo le loro restrizioni all'asse reale).

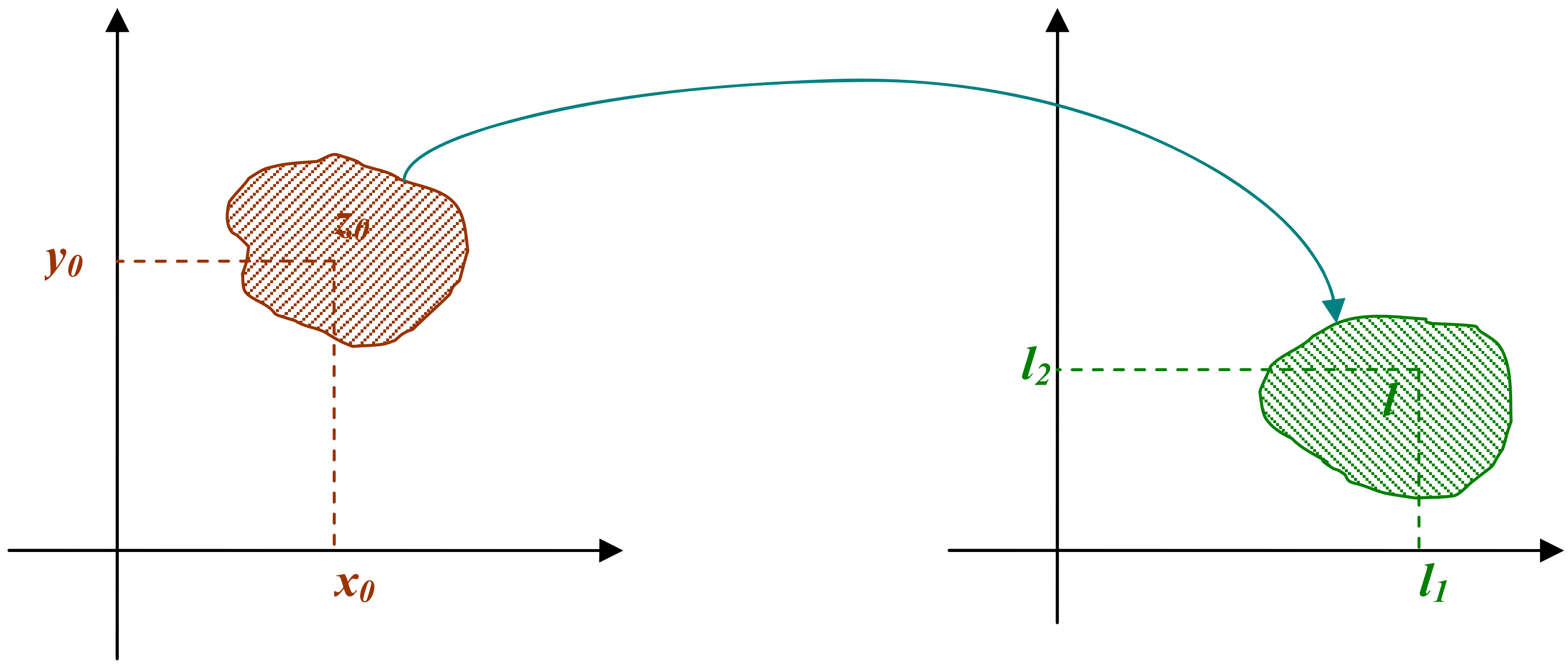
- $\cos z = \cos(x+iy) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 0$

NB: Per le altre tre funzioni valgono proprietà del tutto simili che si ricavano allo stesso modo.

I.2 - LIMITI

Si consideri una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω aperto, e sia z_0 un punto di accumulazione per Ω.
Si dice che $l \in \mathbb{C}$ è limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall V(l) \ \exists U(z_0): \ z \in U(z_0) \setminus \{z_0\} \Rightarrow f(z) \in V(l)$$



Tale definizione può essere espressa anche in termini delle funzioni u e v. Siano dunque a tale proposito $z_0 = x_0 + iy_0$, $f = u + iv$, $l = l_1 + il_2$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = l_1, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = l_2$$

Si può ora estendere il concetto di continuità alle funzioni di variabile complessa: una funzione $f(z)$ si dice **continua** in un punto z_0 se esiste il limite per $z \to z_0$ di $f(z)$ e tale limite è uguale a $f(z_0)$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

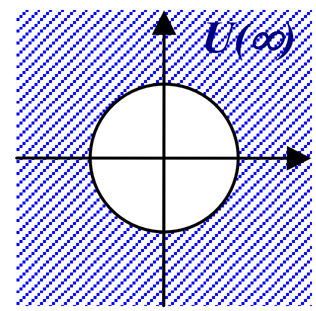
In particolare si dimostra che una funzione $f = u + iv$ è continua in $z_0 = x_0 + iy_0$ se sono continue in (x_0, y_0) le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Si dirà poi che $f(z)$ è continua in un insieme Ω se è continua in ogni punto z_0 di Ω.

Osservazioni:

- Sono continue nel loro dominio tutte le funzioni elementari
- Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta

- Si indica con $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'ampliamento del campo complesso con il "punto all'infinito", che è definito mediante un suo intorno, cioè il complementare di una palla di raggio R centrata in **0**:

$$U(\infty) = \{|z| \le R\}^C = \{|z| > R\}$$



È quindi possibile dare un senso alle seguenti espressioni:

$z \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z| \to +\infty$

$f(z) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| \to +\infty$

I.3 - DERIVABILITÀ

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω aperto di $\mathbb{C}$. Si dice che f è **derivabile** in z_0 se esiste finito per $z \to z_0$ il limite del rapporto incrementale di f:

$$\exists finito \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

$$\exists finito \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(h), \quad dove \;\; \lambda = f'(z_0)$$

Le tre condizioni precedenti sono equivalenti. L'ultima, in particolare, è propriamente la definizione di differenziabilità per f.

Esempi:

- $f(z)=z^3,\ z_0:\quad (z_0+h)^3 = z_0^{\,3} + 3z_0^{\,2}h + 3z_0h^2 + h^3 = z_0^{\,3} + 3z_0^{\,2}h + o(h) \quad \Rightarrow \quad \lambda = f'(z_0) = 3z_0^{\,2}$

  Tale funzione è quindi derivabile in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

- $f(z)=\mathrm{Im}(z),\ z_0=0:\quad \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Im}(h)}{h} = \begin{cases} 0 & \textit{lungo l'asse reale } (h=x) \\ 1 & \textit{lungo l'asse immaginario } (h=iy) \end{cases}$

  La funzione Im(z) non è quindi derivabile in 0.

Osservazioni:

- Vale l'algebra della derivazione e il teorema della derivata di una funzione composta.
- Sono derivabili tutte le funzioni elementari, i polinomi di grado n e le funzioni razionali fratte (considerate nel loro dominio).

Richiamo di analisi B: ***differenziabilità per le funzioni di*** $\mathbb{R}^2$

Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice differenziabile in *(x₀, y₀)* se e solo se esiste un'applicazione *df(x₀, y₀)*: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - df(x_0,y_0)\bullet(h_1,h_2)}{|(h_1,h_2)|} = 0$$

Ciò implica in particolare che:

- $\exists \dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)\bullet \nu, \quad \forall\, \nu$ *direzione*
- $df(x_0,y_0)\bullet(h_1,h_2) = f_x(x_0,y_0)h_1 + f_y(x_0,y_0)h_2$

I.4 - CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Teorema: sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω aperto di $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, con $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$, allora f è derivabile in z_0 se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1. u e v sono differenziabili in (x_0, y_0).
2. u e v soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

In tal caso la derivata di f si può calcolare a partire da u e v con la seguente formula:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Una funzione f viene detta **olomorfa** su Ω se è derivabile in z_0 $\forall z_0 \in \Omega$.

Dimostrazione:

1. Sia f derivabile: $\exists f'(z_0) = \alpha + i\beta, \quad f = u + iv, \quad h = h_1 + ih_2$. Dobbiamo dimostrare che u e v sono differenziabili e che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.
   Prima di iniziare la dimostrazione scomponiamo il termine $o(h)$, in generale complesso, nel modo seguente: $o(h) = g_1 + ig_2$

$$\frac{o(h)}{h} \to 0; \quad \frac{|g_1 + ig_2|}{|h|} \to 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{|g_1|}{|h|} \to 0 \ e \ \frac{|g_2|}{|h|} \to 0, \quad per \ \ h \to 0$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h) = f(z_0) + (\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) + g_1 + ig_2 \text{ (per la derivabilità di } f\text{)}$$

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + i(\alpha h_2 + \beta h_1) + g_1 + ig_2$$

Consideriamo ora separatamente i termini con le *i* e quelli senza:

- $u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + g_1$

  $$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - (\alpha, -\beta) \cdot (h_1, h_2)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1}{|h|} = 0$$

  Abbiamo quindi che u è differenziabile e che il suo gradiente è $(u_x, u_y) = (\alpha, -\beta)$

- $v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + (\alpha h_1 + \beta h_2) + g_2$

  $$\lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - (\beta, \alpha) \cdot (h_1, h_2)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{g_2}{|h|} = 0$$

  Abbiamo quindi che v è differenziabile e che il suo gradiente è $(v_x, v_y) = (\beta, \alpha)$

  Sia u che v sono quindi differenziabili ed inoltre abbiamo che $\alpha = u_x = v_y$, $\beta = -u_y = v_x$, che sono proprio le condizioni di Cauchy-Riemann.

2. Siano u e v differenziabili, con $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Dobbiamo dimostrare che f è derivabile.

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) = (u_x, u_y) \bullet (h_1, h_2) + o(|h|)$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) = (v_x, v_y) \bullet (h_1, h_2) + o(|h|)$$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) =$$
$$= (u_x, u_y) \cdot (h_1, h_2) + i(v_x, v_y) \cdot (h_1, h_2) + o(|h|) + io(|h|) = u_x h_1 + u_y h_2 - iu_y h_1 + iu_x h_2 + o(|h|) + io(|h|)$$
$$= (u_x - iu_y)(h_1 + ih_2) + o(h) = \lambda h + o(h), \quad con \ \ \lambda = u_x - iu_y$$

Abbiamo quindi che f è derivabile e che la sua derivata è $f'(z_0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Esempi:

- Im z non è derivabile in z = 0:

$$\begin{cases} u(x,y) = y \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \left\langle \begin{array}{l} sono \;\; differenziabili \\ u_x = v_y = 0; \;\; u_y = 1 \neq -v_x = 0 \end{array} \right.$$

- e^z è derivabile nel suo dominio

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases} \qquad \left\langle \begin{array}{l} sono \;\; differenziabili \\ u_x = e^x \cos y = v_y; \;\; u_y = -e^x \sin y = -v_x \end{array} \right.$$

Inoltre, la derivata di e^z è sempre e^z. Infatti:

$$\frac{d}{dz}\left[e^z\right] = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

I.5 - INVERTIBILITÀ LOCALE

Proposizione: sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, derivabile in Ω aperto di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Se la derivata di f in z_0 è diversa da zero, allora f è localmente invertibile in un intorno U di z_0, nel senso che è invertibile la restrizione di f valutata in U. Detta φ l'inversa locale, essa è derivabile in $f(z_0)$ e la sua derivata è:

$$\varphi'\big|_{f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Esempi:

- $f(z) = e^z,\ f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0\ \ \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \to \quad$ f è localmente invertibile e:

  $\varphi'\big|_{e^{z_0}} = \dfrac{1}{e^{z_0}} \quad \to \quad \varphi'(w_0) = \dfrac{1}{w_0}$

- $f(z) = z^n,\ f'(z_0) = n{z_0}^{n-1} \neq 0\ \ \forall z_0 \neq 0 \quad \to \quad$ f è localmente invertibile per ogni $z_0 \neq 0$.

<u>Richiamo di analisi B:</u> teorema di inversione locale

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una funzione vettoriale $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ classe C^1. Se il Jacobiano di f nel punto (x_0, y_0) è diverso da zero, allora esistono un intorno V di (x_0, y_0) ed un intorno W di $f(x_0, y_0)$ tali che f è una corrispondenza biunivoca tra V e W. È quindi definita in W una funzione φ che è l'<u>inversa</u> di f e la cui Jacobiana è l'inversa della Jacobiana di f:

$$J[\varphi]\rrbracket_{f(x,y)} = \left\{ J[f]\rrbracket_{(x,y)} \right\}^{-1}$$

Dimostrazione:

Sia $f = u + iv$, con u e v di classe C^1 (tale richiesta, che può sembrare più restrittiva delle ipotesi della proposizione, è in realtà sempre verificata quando valgono quest'ultime) e $z_0 = x_0 + iy_0$. Consideriamo ora la funzione vettoriale equivalente (u, v) e valutiamone il Jacobiano in (x_0, y_0):

$$f'(z_0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \alpha + i\beta \quad \Rightarrow \quad J(u,v)\big|_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det J(u,v)\big|_{(x_0,y_0)} = \alpha^2 + \beta^2$$

Poiché tale determinante è sempre diverso da zero (essendo per ipotesi $\alpha + i\beta \neq 0$), possiamo applicare il teorema di inversione locale per le funzioni vettoriali. Abbiamo quindi l'esistenza di una funzione definita in un intorno di $f(z_0)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ che inverte localmente (u, v) ovvero, in altri termini, una funzione complessa $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ che inverte localmente f.
Sappiamo inoltre dallo stesso teorema che Φ è di classe C^1 e che il suo Jacobiano in (x_0, y_0) è:

$$J(\Phi)\big|_{f(z_0)} = \left[J(u,v)\big|_{f(z_0)} \right]^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Ne deriva quindi che l'inversa φ rispetta anch'essa le condizioni di Cauchy-Riemann e quindi è derivabile (essendo φ_1 *e* φ_2 differenziabili). In particolare la sua derivata è:

$$\varphi'\big|_{f(z_0)} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Richiamo di analisi B: ***forme differenziali lineari in*** $\mathbb{R}^2$

Sia $\underline{F}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$, con A e B di classe C^1, un campo vettoriale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. L'applicazione seguente è chiamata **forma differenziale** associata ad $\underline{F}$:

$$\omega := A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

Se il campo $\underline{F}$ è irrotazionale, la forma differenziale ad esso associata si dice <u>chiusa</u>. Nel piano una condizione necessaria e sufficiente perché ω sia chiusa è che:

$$A_y = B_x$$

Se il campo $\underline{F}$ è conservativo (ovvero esiste una funzione $U(x, y)$, detta potenziale, tale che $\underline{F}$ sia il gradiente di $U(x,y)$), la forma differenziale ad esso associata si dice <u>esatta</u>.

Si chiama **curva** (o cammino) nel piano l'insieme di:

- una parametrizzazione, ovvero una funzione $\underline{r}$: $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
- un sostegno γ, ovvero l'immagine di $\underline{r}$ in $\mathbb{R}^2$

Se la parametrizzazione è una funzione di classe C^1, la curva si dice regolare (se la condizione precedente è valida tranne che in un numero finito di punti la curva si dirà invece regolare a tratti).
Se succede che $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$, allora si parla di curva chiusa o circuito.
NB: curve con lo stesso sostegno possono essere parametrizzate in maniera differente

Due curve con parametrizzazioni r: $[a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\tilde{r}$: $[c, d] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dicono equivalenti se esiste una funzione φ crescente di classe C^1 tale che:

$$\tilde{r} = r \circ \varphi$$

Si consideri un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e due curve i cui sostegni siano entrambi contenuti in Ω. Si dice che esse sono Ω-omotope se possono essere deformate con continuità una nell'altra. Se ciò avviene si dice che le due curve appartengono alla stessa classe di omotopia.

Si definisce l'integrale di ω lungo una cammino γ che ammette parametrizzazione $\underline{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, dove $\underline{r}$: $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la seguente espressione (che non dipende dalla parametrizzazione scelta per γ):

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b [A(r_1(t), r_2(t))r_1'(t) + B(r_1(t), r_2(t))r_2'(t)]\,dt$$

Si possono dimostrare i seguenti risultati: siano γ un circuito e χ un cammino aperto del piano di estremi (x_0, y_0) e (x, y) i cui sostegni appartengano al dominio della forma differenziale ω

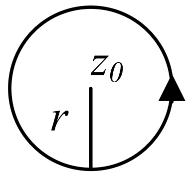
- *ω esatta* $\Leftrightarrow$ $\int_\gamma \omega = 0 \ \forall \gamma$ $\Leftrightarrow$ $\int_\chi \omega$ *dipende solo dagli estremi di χ.*

  In questo caso esiste una funzione potenziale $U(x, y)$ tale che: $U(x,y) = \int_\chi \omega$

- *ω chiusa* $\Rightarrow$ $\int_\gamma \omega$ *dipende solo dalla classe di omotopia di γ.*

- Alcuni cammini di uso frequente vengono indicati con una notazione particolare:

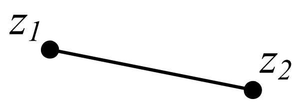
  - ✓ $C_r(z_0)$: circonferenza centrata in z_0 di raggio r (percorsa una volta in senso antiorario)
    $r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$



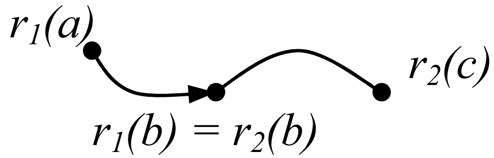
  - ✓ $C_r^+(z_0)$: semicirconferenza superiore
    $r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, \pi]$

  - ✓ $C_r^-(z_0)$: semicirconferenza inferiore
    $r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [\pi, 2\pi]$

  - ✓ $[z_1, z_2]$: segmento orientato di estremi z_1 e z_2
    $r(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1]$



- ✓ Se γ_1 e γ_2 sono due cammini con un estremo in comune e parametrizzazioni r_1 ed r_2, tali che $r_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ e $r_2: [b, c] \rightarrow \Omega'$ (e quindi $r_1(b) = r_2(b)$), indichiamo con $\gamma_1 + \gamma_2$ il cammino individuato dalla parametrizzazione $r: [a, b] \cup [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$, tale che le sue restrizioni su $[a, b]$ e su $[b, c]$ siano rispettivamente uguali a r_1 e r_2.



- ✓ $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$: spezzata poligonale che congiunge i punti $z_1, \ldots, z_n$

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \ldots + [z_{n-1}, z_n]$$

- ✓ Se γ ha parametrizzazione $r: [a, b] \rightarrow \Omega$, indichiamo con $-\gamma$ il cammino una cui parametrizzazione è data da $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$, con $\varphi = r[b + t(a - b)]$.

I.6 - PRIMITIVE

Sia data una funzione $f : \Omega$ *aperto di* $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si vuole sapere se esiste una funzione $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, che chiameremo **primitiva** di f, tale che la sua derivata sia uguale ad f in ogni punto di Ω:

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega$$

Osservazione:

Se una primitiva F esiste, essa è definita a meno di una costante arbitraria. Infatti:

1. F è primitiva, $c \in \mathbb{C} \rightarrow (F + c)' = f$
2. F_1, F_2 primitive $\rightarrow (F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = c$

Sia dunque $f = u + iv$ una funzione nota e $F = U + iV$ la primitiva per ora incognita che si vuole determinare.

$$F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x = u + iv \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \; e \; \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

Il problema equivale a trovare i potenziali U e V (se esistono) delle seguenti due <u>forme differenziali</u>:

$$\omega_1 = u(x,y)dx - v(x,y)dy = U_x dx + U_y dy$$

$$\omega_2 = v(x,y)dx + u(x,y)dy = V_x dx + V_y dy$$

Dalla teoria sulle forme differenziali si può quindi dedurre che:

- f ammette primitive se e solo se ω_1 e ω_2 sono esatte.
- f è olomorfa se e solo se ω_1 e ω_2 sono chiuse.
- Se f ammette primitive, allora f è olomorfa.
- Se f olomorfa e Ω è semplicemente connesso, allora f ammette primitive.

Questi risultati sono riassunti brevemente nel seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ ammette primitive} & \Longleftrightarrow & \omega_1 \text{ e } \omega_2 \text{ sono esatte} & \Longleftrightarrow & \omega_1 \text{ e } \omega_2 \text{ ammettono potenziale} \\ & & \Downarrow \quad \Uparrow \longrightarrow \boxed{\text{solo se } \Omega \text{ è semplicemente connesso}} & & \\ f \text{ è olomorfa} & \Longleftrightarrow & \omega_1 \text{ e } \omega_2 \text{ sono chiuse} & \Longleftrightarrow & u_x = v_y \text{ e } u_y = -v_x \end{array}$$

Sia γ un cammino nel piano complesso e $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$, con $r\colon [a,b] \to \Omega$, una sua parametrizzazione. Si definisce l'integrale di $f(z)$ lungo γ come:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

Tale integrale può essere scritto in forma estesa nella seguente maniera:

$$\int_a^b f(r(t))r'(t)dt = \int_a^b \{[u(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - v(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)] + i[v(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - u(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)]\}dt$$

Dalle relazioni precedenti si ricava che:

- $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (\omega_1 + i\omega_2)$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \omega_i = 0 \;\; i = 1,2$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall\gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ se e solo se *f* ammette primitive.
- ***Teorema di Morera:*** se $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall\gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ allora *f* è olomorfa.
- ***Teorema di Cauchy:*** se *f* è olomorfa allora $\int_\gamma f(z)dz$ dipende solo dalla classe di omotopia di γ.

Osservazioni:

- Dal teorema di Cauchy segue subito che dati due circuiti γ_1 e γ_2 tra loro omotopi e f olomorfa:
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$
Tale integrale è poi nullo se i due circuiti sono omotopi anche a zero.
- Il fatto che $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia semplicemente connesso è sempre vero localmente. Più precisamente, se f è olomorfa su Ω, allora $\forall z_0 \in \Omega \;\; \exists U(z_0): \quad f|_U$ ammette primitive.
- $\oint_\gamma f(z)dz$ non dipende dalla parametrizzazione scelta per γ.

Esempio:

$f(z)=\dfrac{1}{z},\ con\ \ \Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$: f è olomorfa in Ω, ma non ammette primitive definite su tutto Ω.

$$f(z)=f(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ \ v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_x(x,y)=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=v_y\,;\qquad u_y=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-v_x$$

Si ha che u e v sono differenziabili e rispettano le condizioni di Cauchy-Riemann: f è quindi olomorfa. Si provi ora a calcolare l'integrale di tale funzione lungo una circonferenza centrata nell'origine degli assi e raggio 1 (quindi su $\gamma = C_1(0)$):

$$r(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t,\ \ t\in[0,2\pi]$$

$\oint_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi} f(r(t))r'(t)dt=\int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt=2\pi i\neq 0$, da cui si deduce che ω_1 e ω_2 non sono esatte e quindi f non ammette primitive.

I.7 - SERIE DI POTENZE IN CAMPO COMPLESSO

Prima di proseguire con la teoria è necessario elencare brevemente in principali risultati riguardo alle **serie di potenze in campo complesso** (centrate in z_0), ovvero una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad con \;\; c_n \in \mathbb{C}$$

Come nel caso reale, essa non è altro che la successione delle somme parziali definite da:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n$$

- Si dice che la serie <u>converge puntualmente</u> in z se esiste finito (in $\mathbb{C}$) il limite della successione delle somme parziali $S_N(z)$.

- Si dice che la serie <u>converge uniformemente</u> a $S(z)$ su Ω se $\lim_{N\to+\infty} \sup \left|S_N(z) - S(z)\right|_{\boldsymbol{C}} = 0$

- Si dice che la serie <u>converge assolutamente</u> in z se ivi converge la serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||z - z_0|^n$.

Per le serie di potenze complesse valgono in particolare i seguenti risultati:

1. L'insieme $D = \{z \in \mathbb{C}:\ S_N(z)\ \textit{converge}\}$ è detto *dominio di convergenza* della serie. In particolare per le serie di potenze si può dimostrare che l'interno di tale insieme è un disco di raggio R (che viene chiamato *raggio di convergenza*):
$$\overset{o}{D} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z - z_0| < R\}$$
Sui punti di frontiera dell'insieme D è invece necessario effettuare un'analisi punto per punto. La serie converge inoltre assolutamente in D e uniformemente in ogni compatto incluso in D, in particolare in ogni insieme $\{z \in \mathbb{C}:\ |z - z_0| \le \rho,\ \rho < R\}$.

2. Ripetendo la dimostrazione come nel caso reale, si ha che il raggio di convergenza è:
$$R = \frac{1}{l}, \quad \textit{dove}\ \ l := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

3. Le serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza della serie di potenze e quindi è possibile derivare per serie infinite volte

I.8 - FUNZIONI ANALITICHE

Sia data una $f : \Omega$ *aperto di* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; essa si dice **analitica** su Ω se $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ essa può essere scritta, in un intorno di z_0, come una serie di potenze (sviluppo di Taylor di f) centrate in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in U(z_0)$$

In particolare, se f è analitica, allora è anche C^∞. In particolare si ha, dalle proprietà delle serie di potenze in campo complesso, che le derivate di f hanno la forma seguente:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = c_1$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n n(n-1)(z - z_0)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad f''(z_0) = 2c_2$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(z_0) = k! c_k$$

Da cui si deduce che, come nel caso reale, i coefficienti c_n si possono calcolare come:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

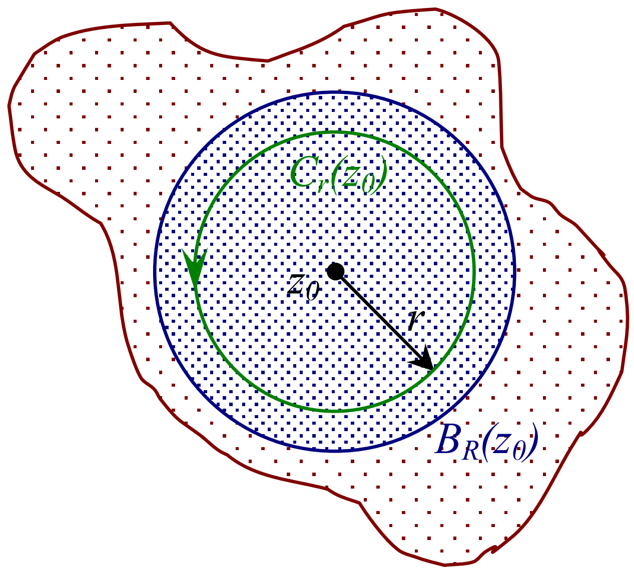
A differenza del caso reale, però, tali coefficienti si possono trovare anche in un altro modo. Si consideri a questo proposito una funzione complessa f analitica su Ω *aperto di* $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

Si fissino a questo punto un $r \in (0, R)$ ed un intero $k \geq 0$

Prima di proseguire si calcoli il risultato del seguente integrale, necessario per lo sviluppo della trattazione, dove m è un intero relativo:

$$\int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^m \, dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} i r e^{it} dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 0 & se\ m \neq -1 \\ 1 & se\ m = -1 \end{cases}$$



Utilizzando tale risultato e la proprietà di scambio serie - integrale (garantita dalla convergenza uniforme), si ottiene quindi che:

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{C_r(z_0)} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \right] dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz \right] = 2\pi i \, c_k$$

Per una serie di potenze complessa, i coefficienti possono quindi essere trovati in due modi:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Da tale relazione si ricava subito la ***formula di Cauchy per la derivata*** n-esima:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Se si pone $n = 0$, otteniamo la relazione:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Più in generale si può dimostrare che se f è una funzione olomorfa su $\Omega \supseteq \overline{B_R(z_0)}$, fissato $r \in (0, R)$, vale la seguente ***formula di Cauchy***:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

che valutata in z_0 permette di ritrovare subito la formula precedente.

<u>*Osservazioni:*</u>

- Gli integrali precedenti non dipendono dal particolare r scelto (sempre con $r \in (0, R)$), poiché tutte le circonferenze centrate in z_0 appartengono alla stessa classe di omotopia (nel caso ad esempio della formula di Cauchy per la derivata n-esima con $n = 0$ il dominio della funzione integranda è infatti $\Omega \setminus \{z_0\}$).
- La formula di Cauchy implica che conoscendo i valori di una funzione olomorfa sul bordo di un disco, si conoscono tutti i valori della funzione nei punti interni a tale disco.

Teorema: Se una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω, allora essa è ivi analitica. In particolare $\forall z_0 \in \Omega$, detta $B_R(z_0)$ la più grande sfera di centro z_0 contenuta in Ω, si ha che:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

dove i c_n sono proprio quelli trovati precedentemente.

La dimostrazione di tale teorema è basata sulla seguente osservazione: dalla formula di Cauchy si può vedere che la funzione $f(z)$ è l'integrale di una funzione dipendente in maniera regolare da un parametro z. Tale regolarità si può dimostrare che viene trasferita all'integrale stesso e quindi alla f.

I.9 - SINGOLARITÀ ISOLATE E LORO CLASSIFICAZIONE

Si dice che un punto z_0 è di **singolarità isolata** per una funzione complessa f se tale funzione è olomorfa in tutto un intorno di z_0, tranne tale punto.

In particolare, se z_0 è una singolarità isolata per f, essa può essere di tre tipi:

1. **eliminabile**: se esiste una funzione $\tilde{f}$ olomorfa su un intorno di z_0 che ivi estende f, ovvero se:

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & per\ z \neq z_0 \\ \lambda & per\ z = z_0 \end{cases} \quad sia\ \ olomorfa$$

2. **polo**: se $f(z)$ tende all'infinito quando z tende a z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

3. **essenziale**: in tutti gli altri casi.

Esempi:

- $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata eliminabile per f. Infatti la funzione:

$$\tilde{f} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

  È analitica (e quindi olomorfa) ed estende la f nel punto di singolarità.

- $f(z)=\dfrac{1}{z^m}$, $m \in \mathbb{N}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata di tipo polo per f

- $f(z)=e^{1/z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata essenziale per *f*. Se infatti prendiamo i limiti di *f(z)* per $z \to 0$ lungo l'asse dei reali prima da destra e poi da sinistra, essi sono diversi:

$$z = x \begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0^+} e^{1/z} = +\infty \\ x \in \mathbb{R}^- & \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/z} = 0 \end{cases}$$

La singolarità non è quindi né un polo, né eliminabile. Essa e quindi essenziale, e si può vedere come fissato un certo valore $w \neq 0$, la funzione assume tale valore in un qualsiasi intorno di z_0.

$$w = \rho e^{i\vartheta},\ \frac{1}{z} = x + iy \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{1/z} = w; \quad e^{x+iy} = \rho e^{i\vartheta}; \quad e^x e^{iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

Le cui soluzioni sono: $x = \ln\rho$ e $y = \vartheta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Si ha perciò:

$$z = \frac{1}{\ln\rho + i(\vartheta + 2k\pi)}$$

il cui modulo può essere reso piccolo a piacere al variare di *k*. Fissati quindi ρ e ϑ, esistono infiniti punti *z* in cui la funzione assume il valore $\rho e^{i\vartheta}$ in un qualunque intorno di *0* se $\rho \neq 0$.

- $f(z) = \left[\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}$: $z_0 = 0$ non è una singolarità isolata per f. Infatti:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = k\pi, \quad z = \frac{1}{k\pi}, \ con\ k \in \mathbb{Z}$$

  Un qualsiasi intorno dell'origine contiene quindi infiniti zeri del seno e quindi infiniti punti in cui f non è olomorfa.

Osservazioni:

- Nel caso della singolarità eliminabile, la funzione $\tilde{f}$ che estende f è unica.
- ***Teorema di rimozione della singolarità:*** sia z_0 una singolarità isolata per f: z_0 è una singolarità eliminabile se e solo se f è limitata in un intorno di z_0.
- ***Teorema di Picard:*** se z_0 è una singolarità essenziale per f, allora in ogni intorno di z_0 la funzione assume tutti i valori di $\mathbb{C}$ tranne al più uno.

$$\forall U(z_0) \quad f(U(z_0)) = \left\langle \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \setminus \{w_0\} \end{array} \right., \quad con\ w_0 \in \mathbb{C}$$

I.10 - SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT

Teorema: Sia f una funzione olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$ e $B_R(z_0) \subseteq \Omega$. Tale funzione ammette uno sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 per ogni z in $B_R(z_0)$ tolto z_0, ovvero:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad \forall z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$$

Le due serie che compaiono in tale sviluppo prendono il nome di:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n : \text{parte regolare} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} : \text{parte singolare}$$

Osservazioni:

- I coefficienti c_n si possono calcolare con la formula trovata precedentemente per lo sviluppo in serie di Taylor di funzioni in campo complesso:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

  In questo caso, però, non è più valida la formula utilizzabile nel caso reale: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
- Il teorema è valido più in generale se f è olomorfa in una corona circolare centrata in z_0, ovvero un dominio Ω del tipo $B_R(z_0) \setminus B_r(z_0)$ con $r < R$.
- Nel caso di una singolarità eliminabile, lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor ed è quindi presente solo la parte regolare.

I.11 - ZERI E POLI, PRINCIPIO DI IDENTITÀ

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto z_0 sia un polo per una funzione f è che tale punto sia uno zero per il prolungamento della funzione $1/f$. Infatti:

- Se $f(z)$ ha un polo in z_0, allora esiste un intorno di tale punto in cui la funzione non si annulla ed è quindi ben definita la funzione $1/f(z)$, che ha limite nullo per $z \to z_0$. Quest'ultima ha quindi una singolarità eliminabile in z_0 e per il teorema di rimozione della singolarità esiste un prolungamento di $1/f(z)$ e tale prolungamento ha in z_0 uno zero.
- Se $1/f(z)$ non si annulla in un intorno di z_0 e tende a 0 per $z \to z_0$, allora il limite per $z \to z_0$ di $f(z)$ è infinito e quindi tale funzione ha un polo in z_0.

È quindi possibile ricondurre lo studio dei poli di una funzione a quello degli zeri della sua reciproca. In quest'ottica molto utile è il seguente risultato.

Principio di identità: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme connesso (cioè tale che per ogni coppia di punti z_1 e z_2 di tale insieme esista almeno un cammino continuo che li collega in esso interamente contenuto), $f(z)$ una funzione olomorfa su Ω e z_0 un punto di tale insieme.

Chiamiamo $\mathcal{Z}(f)$ l'insieme degli zeri della funzione, ovvero: $\mathcal{Z}(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni:

1. z_0 è un punto di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$, ovvero: $\exists \{z_n\} \subseteq \mathcal{Z}(f) \setminus \{z_0\} : z_n \to z_0$.
2. Tutte le derivate di f hanno uno zero in z_0: $f^{(n)}(z_0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{Z}(f)$ contiene un intorno di z_0.
4. $\mathcal{Z}(f)$ coincide con Ω.

In particolare quindi, se una funzione olomorfa non è identicamente nulla in tutto il suo dominio (che deve però per ipotesi essere connesso), ovvero se $\mathcal{Z}(f) \neq \Omega$, allora l'insieme degli zeri di tale funzione $\mathcal{Z}(f)$ è fatto di punti isolati:

$$f(z_0) = 0 \ \Rightarrow \ \exists \mathcal{U}(z_0): \ f(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathcal{U}$$

Sia f una funzione olomorfa non identicamente nulla su un dominio Ω connesso e z_0 uno zero per tale funzione. Si definisce **ordine dello zero** (ν) il minimo ordine delle derivate di f che non sono nulle in tale punto (grazie al principio di identità si ha che almeno una tale derivata deve esistere):

$$\nu := \min\{n > 0 : \ f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

Tale valore può essere caratterizzato anche nei seguenti due modi:

- L'indice v a partire da cui inizia lo sviluppo di Taylor di f in z_0: $f(z) = \sum_{n=\nu}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \ c_\nu \neq 0$.
- Il valore v tale per cui esista finito e non nullo il seguente limite: $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu}$.

Infatti il coefficiente c_k dello sviluppo di Taylor di f è proporzionale alla derivata *k-esima* di f in z_0, per cui sono tutti nulli quei coefficienti con $k < v$ ed il primo termine non nullo dello sviluppo è proprio quello di ordine v.
Se poi nel limite precedente si sostituisce quindi lo sviluppo di Taylor di f si vede subito che esso è finito e non nullo solo quando v coincide con l'ordine del primo termine dello sviluppo (poiché gli altri sono infinitesimi di ordine superiore e possono essere tralasciati nel calcolo del limite).

Se invece z_0 è un polo per una funzione f, si definisce **ordine del polo** l'ordine dello zero che la funzione $1/f$ ha in z_0. Anche esso può essere caratterizzato in altri due modi:

- Il valore ν tale per cui esista finito e non nullo il limite: $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^{\nu}$.
- L'indice ν tale per cui f ammette il seguente sviluppo di Laurent: $f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \; c_{-\nu} \neq 0$.

Infatti, il limite precedente è finito e non nullo se e solo se è finito e non nullo il limite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)(z - z_0)^{\nu}}$$

che caratterizza proprio l'ordine dello zero per la funzione $1/f$.

La funzione $f(z)(z - z_0)^{\nu}$ ha quindi una singolarità eliminabile in z_0. Il suo sviluppo di Laurent è quindi formato dalla sola parte regolare, per cui:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad f(z)(z - z_0)^{\nu} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+\nu}, \; con \;\; n + \nu > 0 \quad \Rightarrow \quad n > -\nu$$

Si possono quindi distinguere le singolarità isolate di una funzione in base alla struttura della parte singolare dello sviluppo di Laurent di tale funzione:

- singolarità eliminabile: la parte singolare non contiene alcun termine.
- singolarità di tipo polo: la parte singolare contiene un numero finito di termini.
- singolarità essenziali: la parte singolare contiene un numero infinito di termini.

I.12 - TEOREMA DEL PROLUNGAMENTO ANALITICO

Teorema di unicità del prolungamento analitico: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e $S \subseteq \mathbb{C}$ un insieme che contenga almeno un punto di accumulazione in Ω. Data una funzione f definita da S a valori in $\mathbb{C}$, allora esiste al più un prolungamento analitico di f in Ω.

Dimostrazione:

Siano f_1 e f_2 due prolungamenti analitici di f a Ω. Si consideri la funzione $(f_1 - f_2)$: essa si annulla in tutti i punti di S. Poiché l'insieme degli zeri di f (che contiene sicuramente S) ha almeno un punto di accumulazione, per il principio di identità $(f_1 - f_2) \equiv 0$ in Ω e quindi $f_1 \equiv f_2$.

Esempio:

Si vuole dimostrare che anche in campo complesso vale la formula: $\sin(2z) = 2\sin z \cos z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Ammesso di sapere che tale uguaglianza è vera per i numeri reali, si può applicare il teorema di unicità del prolungamento analitico nel modo seguente:

$\Omega = \mathbb{C}, \quad S = \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(2x) - 2\sin x \cos x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Si considerano ora le due seguenti funzioni in campo complesso:

1. $f_1(z) = \sin(2z) - 2\sin z \cos z$
2. $f_2(z) \equiv 0$

Poiché esse sono due funzioni olomorfe che coincidono con *f* in *S*, per l'unicità del prolungamento esse devono essere uguali, per cui:

$\sin(2z) - 2\sin z \cos z = 0; \quad \sin(2z) = 2\sin z \cos z$

Allo stesso modo si possono estendere al campo complesso le principali uguaglianze trigonometriche valide in ambito reale.

I.13 - DEFINIZIONE E CALCOLO DEI RESIDUI

Sia $\gamma \subseteq \Omega$ un circuito in campo complesso omotopo a zero. Si vuole calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

Se la funzione f è olomorfa in Ω tale integrale è nullo per la teoria già vista sulle primitive.

Si consideri ora una funzione con una singolarità isolata in un punto z_0. Dalla formula per trovare i coefficienti dello sviluppo di Laurent si ha che:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}; \quad se \;\; n=-1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi i\, c_{-1} = \int_{C_r(z_0)} f(z)dz$$

Si può iniziare a vedere come il coefficiente c_{-1} abbia un ruolo molto importante nel calcolo degli integrali in campo complesso: data una funzione f con una singolarità isolata in un punto z_0 si definisce **residuo** di f in z_0 il coefficiente di ordine -1 dello sviluppo di Laurent di f centrato in z_0.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n : \quad \mathrm{Res}(f, z_0) := c_{-1}$$

Si pone quindi il problema del calcolo dei residui in un qualche modo che sia diverso dalla definizione dei coefficienti dello sviluppo di Laurent.

Se la singolarità in z_0 è eliminabile si può subito concludere che il residuo sia nullo. Se la singolarità è essenziale non si può dire altro a riguardo.
Se invece z_0 è un polo di ordine v per la funzione f, vale la seguente formula:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(\nu - 1)!} D^{(\nu-1)}\left[f(z)(z - z_0)^{\nu} \right]$$

In particolare, in caso di polo semplice (ovvero con $v = 1$), essa si semplifica nella seguente:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Infatti:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \ c_{-1} \neq 0: \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} = c_{-1}$$

Vale inoltre la seguente formula: date *g* e *h* due funzioni olomorfe e z_0 uno zero di ordine 1 per *h*:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Esempi:

- $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{-2n}}{n!}$: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f. Res(f, 0) = c_{-1} = 0.
- $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$: $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2, infatti: $\lim_{z\to 0} z^2 f(z)=\lim\frac{\sin z}{z}=1\neq 0$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - z\sin z-\cos z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{2}=0$$

Esempi:

- $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f. Res(f, 0) = c_{-1} = 0.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$: $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2, infatti: $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

  $\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{2} = 0$

- $f(z) = z\cot z = \dfrac{z\cos z}{\sin z}, \quad \sin z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  - $k = 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}\right)\cos z = 1$: $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile. Res(f, 0) = 0.
  - $k \neq 0$: $z_0 = k\pi$ è un polo di ordine 1.

$$\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)z\frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to k\pi} z\cos z\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi+k\pi)} =$$

$$= (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)\cos(k\pi)+\cos(z-k\pi)\sin(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(-1)^k}k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)} = k\pi = \mathrm{Res}(f,k\pi)$$

I.14 - Indice di avvolgimento

Sia γ un circuito contenuto in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e z_0 un punto non appartenente a γ. Intuitivamente, si chiama **indice di avvolgimento** (che viene indicato con la scrittura $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$) di γ rispetto a z_0 il numero di volte che la curva gira attorno al punto, contate positive per un giro in senso antiorario, negative in caso contrario.

Per una definizione più rigorosa, si consideri una parametrizzazione $r(t)$ di γ, con $r: [a, b] \to \mathbb{C}$ e sia $\rho(t) := |r(t) - z_0|$. Si può dimostrare che esiste una funzione $\theta(t): [a , b] \to \mathbb{C}$ tale che:

$$r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Poiché, essendo γ un circuito, $r(a) = r(b)$, allora anche $\rho(a) = \rho(b)$, e quindi:

$$\left.\begin{aligned} r(a) &= z_0 + \rho(a)e^{i\theta(a)} \\ r(b) = r(a) &= z_0 + \rho(a)e^{i\theta(b)} \end{aligned}\right\rangle \quad e^{i\theta(b)} = e^{i\theta(b)} \quad \Rightarrow \quad \theta(b) - \theta(a) = 2\pi m \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

Analiticamente, questo valore si può calcolare mediante il seguente integrale:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Dimostrazione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)ie^{i\theta(t)}\theta'(t)}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}dt = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\rho(t)\Big|_a^b + i\int_a^b \theta'(t)dt\right] = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

I.15 - TEOREMA DEI RESIDUI

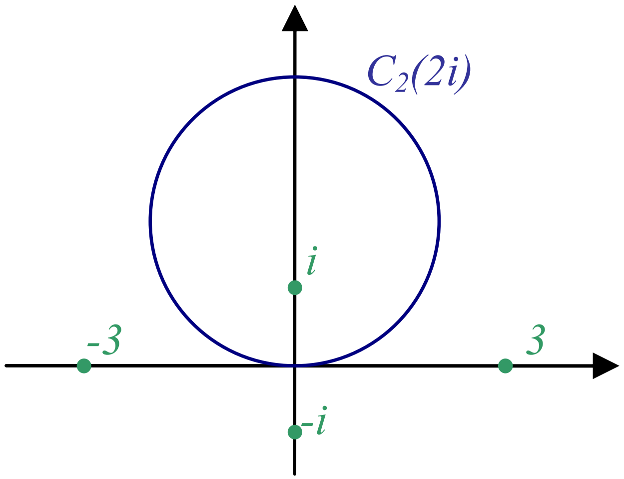
Teorema dei residui: sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, γ un circuito in Ω omotopo a zero e f: $\Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa sul suo dominio, dove S, detto "insieme singolare", è tale che:

- S non abbia punti di accumulazione in Ω: $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega = 0$.
- La curva γ sia interamente contenuta in $\Omega\setminus S$: $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$.

Allora si ha che:

1. L'indice di avvolgimento di γ è diverso da zero per al più un numero finito di punti di S.
2. $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = (2\pi i)\sum\limits_{z\in S} \operatorname{Ind}(\gamma, z)\operatorname{Res}(f, z)$

Esempio:



Si vuole calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_{C_2(2i)} \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}\,dz$

Per applicare il teorema dei residui, si considerino:

$$\Omega = \mathbb{C}, \quad S = \{i, -i, 3, -3\}, \quad \gamma = C_2(2i), \quad f(z) = \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}$$

Si controlla subito che S non ha punti di accumulazione e che γ non passa per nessuno dei punti di S. Si vede inoltre che l'unico punto di S ad avere indice di avvolgimento non nullo è i, il cui indice in particolare vale +1. Si ha quindi che:

$$\int_{C_2(2i)} \frac{1}{(z^2-9)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i(+1)\,\mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-1)}{(z^2-9)(z^2+1)} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{2}{(z^2-9)(z+i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-10\cdot 2i} = -\frac{\pi}{10}$$

Osservazioni:

- Se Ω è semplicemente connesso, allora γ può essere un circuito qualsiasi.
- L'omotopia a zero di γ è da considerarsi in Ω, non in $\Omega \setminus S$.
- Al seguente integrale non si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_{C_1(0)} \left[\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} dz, \quad dove \;\; \Omega = \mathbb{C}, \;\; S = \left\{z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

  Infatti l'origine è un punto di accumulazione di S contenuto in Ω.

I.16 - Residuo all'infinito

Sia f una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$. Si dice che ∞ è una singolarità isolata per f e si pone per definizione come residuo all'infinito di f il seguente:

$$\operatorname{Res}(f,\infty) := \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Proposizione: se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ tranne che in un numero finito di punti, allora la somma di tutti i residui di f (compreso quello all'infinito) è uguale a zero.

<u>*Esempio:*</u>

$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1}$: la funzione ha 5 singolarità, che sono in tutte contenuto all'interno della circuito $C_2(0)$.

Esse hanno inoltre tutte lo stesso indice (che è +1) ed essendo f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tranne questi 5 punti, possiamo quindi scrivere:

$$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1} = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\left(1/z^2\right) e^z}{(1/z^4)+1} = -\frac{e^z}{1+z^4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to 0}\left[-\frac{e^z}{1+z^4}\right] = -1$$

Tale funzione ha nell'origine una singolarità eliminabile e quindi il suo residuo è ivi nullo.
L'integrale che si voleva calcolare è quindi nullo.

I.17 - APPLICAZIONI DEL TEOREMA DEI RESIDUI

È utile ora elencare alcuni risultati e definizioni che verranno utilizzati successivamente:

1. Lemma di decadimento: sia f una funzione olomorfa che rispetta la condizione di decadimento

$$\exists \beta > 1 : |f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{\beta}}, \quad se \ |z| > R$$

Allora vale il seguente risultato: $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$

2. ***Lemma di Jordan:*** sia *f* una funzione olomorfa che rispetti rispettivamente le condizioni

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^+(0)}|f(z)|=0\right] \quad \text{oppure} \quad \lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^-(0)}|f(z)|=0\right]$$

Allora valgono rispettivamente i seguenti risultati:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega z}dz=0,\ \omega\in\mathbb{R}^+ \quad \text{oppure} \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^-(0)} f(z)e^{i\omega z}dz=0,\ \omega\in\mathbb{R}^-$$

Analogamente, detti D_R^- e D_R^+ le semicirconferenze rispettivamente sinistra e destra, si possono ottenere le varianti:

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{D_R^-(0)}|f(z)|=0\right] \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R^-(0)} f(z)e^{\omega z}dz=0,\ \omega\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{D_R^+(0)}|f(z)|=0\right] \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R^+(0)} f(z)e^{\omega z}dz=0,\ \omega\in\mathbb{R}^-$$

3. ***Lemma:*** sia z_0 un polo semplice per f. Detto $C_\varepsilon(z_0,\theta_1,\theta_2)$ l'arco di circonferenza di centro z_0, raggio ε, compreso tra gli angoli θ_1 e θ_2, si ha che:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(z_0,\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = (\theta_2-\theta_1)i\,\mathrm{Res}(f,z_0), \quad dove \;\; r(t) = z_0 + re^{it},\; t\in[\theta_1,\theta_2],$$

Sia $f(x)$ una funzione con una singolarità in $x_0 \in \mathbb{R}$, integrabile su $\varepsilon < |x-x_0| < R, \quad \forall \varepsilon, R > 0$. Si definisce valore principale dell'integrale di f tra più e meno infinito:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{\varepsilon<|x-x_0|<R} f(x)dx$$

Tale definizione si può estendere con le opportune modifiche anche al caso di un numero finito di singolarità.

- <u>*Caso 1:*</u>

  Integrali di funzioni reali nella forma: $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$

  Si cerca di trasformare tale integrale in un integrale in campo complesso del tipo:

$$\int_0^{2\pi} g(e^{it})ie^{it}dt = \int_{C_1(0)} g(z)dz, \quad con \;\; r(t) = e^{it}$$

  Se la funzione g è olomorfa su $\Omega \setminus S$, dove:

  - Ω contiene $B_1(0)$.
  - S è formato da un numero finito di punti contenuti in $B_1(0)$.

  possiamo applicare il teorema dei residui e, se z_i sono i punti di singolarità isolata per g:

$$\int_{C_1(0)} g(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(g, z_i)$$

Esempio:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}=\int_0^{2\pi}\frac{2idt}{4i+e^{it}-e^{-it}}=2\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}dt}{4ie^{it}+e^{2it}-1}=2\int_{C_1(0)}\frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

L'ultimo integrale può essere risolto con il teorema dei residui, considerando:

$$g(z)=\frac{1}{z^2+4iz-1},\quad \Omega=\mathbb{C},\quad S=\{z:\ z^2+4iz-1=0\}$$

- *Caso 2:*

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ con le seguenti caratteristiche:

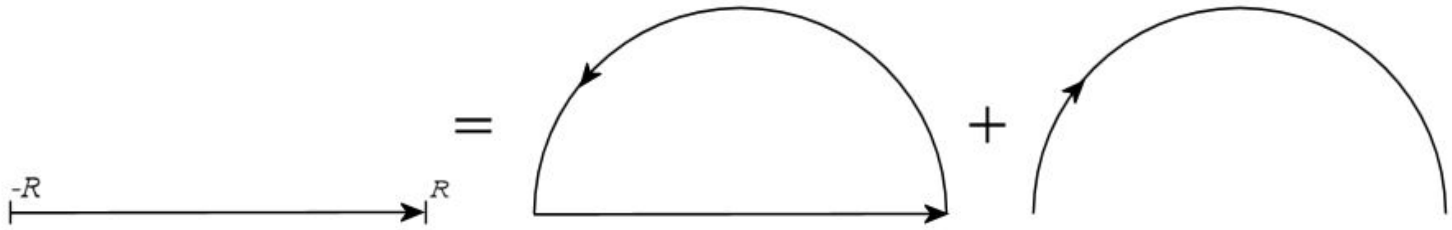
- *f(x)* ammette estensione *f(z)* in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e nessuna su $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\exists \beta > 1 : |f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{\beta}}, \quad se \ |z| > R$

Un esempio di funzioni che soddisfano queste ipotesi sono le funzioni razionali fratte, se il denominatore è di almeno due gradi più grande del numeratore ed è privo di radici reali:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad con \ \operatorname{grad}(Q) \geq \operatorname{grad}(N) + 2, \ \mathcal{Z}(Q(x)) \cap \mathbb{R} = 0$$

In questo caso si può calcolare l'integrale in questione nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)dz - \cancel{\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz}$$



Il secondo termine di tale espressione tende a 0 per il lemma di decadimento, mentre il primo può essere calcolato mediante il teorema dei residui: per R che tende all'infinito il circuito tenderà ad includere tutto il semipiano dei numeri immaginari positivi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_i)$$

Con opportuni cambiamenti di segni, tale procedimento può essere applicato se la funzione in esame è prolungabile nel semipiano dei numeri immaginari negativi.

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ La *f(x)* rispetta la condizione di decadimento, essendo una razionale fratta del tipo precedentemente considerato.

Consideriamo ora la sua estensione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, che ha due poli semplici in $z = \pm i$.

Di questi, solo $z = i$ è nel semipiano dei numeri immaginari positivi, e applicando il procedimento appena descritto, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), i) = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{z-i}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

- *Caso 3:*

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$ con le seguenti caratteristiche:

- *f(x)*$e^{i\omega x}$ ammette estensione *f(z)*$e^{i\omega z}$ in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e nessuna su $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^+(0)} |f(z)| = 0\right], \quad \omega \in \mathbb{R}^+$

Con le stesse considerazioni del caso precedente, utilizzando in questo caso il lemma di Jordan, si arriva a concludere che anche in questo caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega z}dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z_i)$$

Risultati analoghi si possono ottenere applicando, con gli opportuni cambiamenti, le altre versioni del Lemma di Jordan.

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$: è possibile riscrivere tale integrale nella forma seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right]$$

Si può però notare come la parte immaginaria di tale integrale sia nulla, e quindi la parte reale dell'integrale coincide con l'integrale stesso. Infatti:

$\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$ per la disparità dell'integrando.

Applicando il teorema dei residui si ottiene dunque:

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{1+x^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{1+x^2}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2},i\right)=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{1+z^2}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}=\frac{\cancel{2}\,\pi\,\cancel{i}e^{-1}}{\cancel{2}\,\cancel{i}}=\frac{\pi}{e}$$

Si può infatti verificare facilmente che è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R^+(0)}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|=0$$

necessaria per applicare il lemma di Jordan.

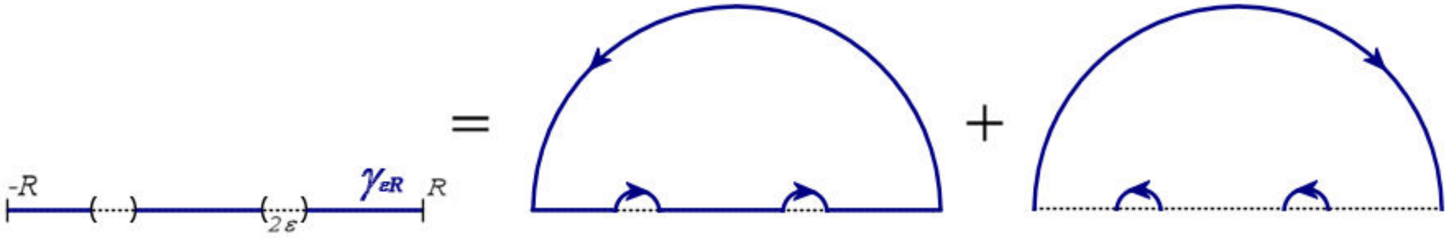
- <u>*Caso 4:*</u>

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ con le seguenti caratteristiche:

- *f(x)* ammette estensione *f(z)* in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e un numero finito di poli semplici sull'asse reale $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$

Si vuole in questo caso calcolare il valore principale dell'integrale dato (essendo in generale la funzione non integrabile su tutto l'asse reale).

Si consideri per esempio il caso di due poli semplici (indicati con x_1 e x_2, mentre si denotino con z_i le singolarità isolate in $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$) sull'asse reale. Bisogna prima di tutto calcolare l'integrale di $f(x)$ lungo $\gamma_{\varepsilon R}$. In maniera analoga al caso 2, consideriamo i seguenti circuiti:



L'integrale sul primo circuito può essere calcolato mediante il teorema dei residui. Per calcolare quello sul secondo circuito, si considerino separatamente la semicirconferenza di raggio R e quelle di raggio ε:

- L'integrale sulla semicirconferenza di raggio R è zero per ipotesi.
- L'integrale su ciascuna delle semicirconferenze di raggio ε vale, per il lemma 3: $\pi i \,\mathrm{Res}(f, x_i)$

In definitiva, se sull'asse reale sono presenti uno o più poli semplici, il risultato complessivo dell'integrazione è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) + \pi i \sum_j \mathrm{Res}(f, x_j)$$

<u>Esempio:</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2} dx = \mathrm{Re}\left[v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i2x}}{2x^2} dx \right]$$

Con lo stesso ragionamento dell'esercizio precedente si può vedere che la parte reale dell'integrale corrisponde anche in questo caso all'integrale stesso. Si considera quindi:

$f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{2z^2}$, olomorfa su $\Omega \setminus \{0\}$ e con in $x_1 = 0$ un polo semplice

Si può quindi utilizzare il procedimento appena illustrato e si ottiene:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}dx = \cancel{2\pi i\sum_i \mathrm{Res}(f(z),z_i)} + \pi i\sum_j \mathrm{Res}(f(z),x_j) = \pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0) = \pi i\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2iz}}{2z} =$$

$$= \pi i\lim_{z\to 0}\frac{-\cancel{2}ie^{2iz}}{\cancel{2}} = \pi i\cdot(-i) = \pi$$

Si può infatti verificare che la condizione $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{1-e^{2iz}}{2z^2}=0$ è soddisfatta in quanto:

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{1}{2z^2}=0$ per il lemma di decadimento

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{e^{2iz}}{2z^2}=0$ per il lemma di Jordan

I.18 - BREVI CENNI SULLE FUNZIONI POLIDROME

Il concetto di **funzione polidroma** è una generalizzazione del concetto di una funzione in campo complesso che interviene ad esempio quando, come nel caso della radice n-esima e del logaritmo, non è possibile determinare univocamente una funzione inversa.

Si consideri ad esempio il caso della *radice n-esima*:

Prima di tutto si esprima il generico numero complesso z in forma esponenziale: $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$, dove:

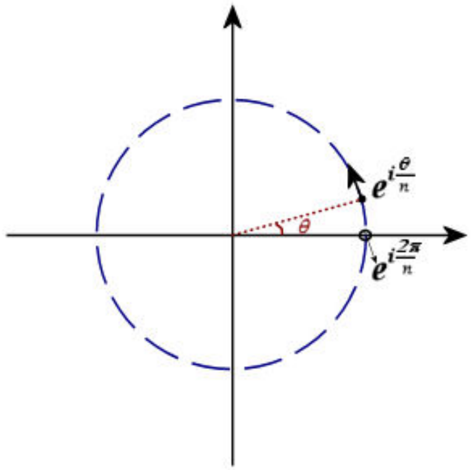
$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \arg_{[0,2\pi]} z + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

è l'insieme degli infiniti argomenti che determinano lo stesso z.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)},\ \ k \in [0, n-1]$$

Si nota subito quindi che la relazione $z \mapsto \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$ non è una funzione. Diventa tale se considero solamente un intervallo di lunghezza *2π*: $\operatorname{Arg} z \in \left[\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi \right)$, ottenendo in tale modo un branca o determinazione della radice n-esima, che però in generale non è neanche continua. Infatti:

$|z|=1,\ \theta\in[0,2\pi),\quad z\mapsto\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}z}{n}}$



Per $\theta=0$ la funzione vale 1, mentre per $\theta\to 2\pi$ la funzione vale $e^{i\frac{2\pi}{n}}$: dopo un giro intorno all'origine la funzione passa da una branca alla successiva e ritorna alla branca di partenza solo dopo n giri (si dice in questo casi che l'origine è un punto di diramazione di ordine n).

Se però considero come dominio $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z:\ \operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Im}z=0\}$, si può dimostrare che la branca è ivi olomorfa (sempre nel caso $\theta\in[0,2\pi)$)

Si può inoltre dimostrare che è impossibile incollare due branche olomorfe ed ottenere una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. È proprio questo il caso in cui si parla di funzione polidroma.

Lo stesso discorso si può fare anche per il *logaritmo*: $z \mapsto \log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$

Se ci si restringe ad $\operatorname{Arg} z \in \left[\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi\right)$, si ottiene una branca e in questo caso l'origine è un punto di diramazione di ordine infinito (non si torna cioè mai alla branca di partenza).

I.19 - BREVI CENNI SULLE FUNZIONI ARMONICHE

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, si dice **armonica** se $\Delta f(x) = 0,\ \forall x \in A$. Le funzioni armoniche hanno molte proprietà importanti, tra cui si elencano soltanto:

- La media di f su una sfera è pari al valore di f nel centro di questa.
- Il caso $N = 2$ è strettamente legato alla teoria delle funzioni olomorfe.
  Data infatti $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su Ω, per le condizioni di Cauchy-Riemann si vede subito che le due funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ad essa associate sono armoniche.
- Se Ω è semplicemente connesso, data una funzione $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armonica, esiste una funzione, detta armonica coniugata, $v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f = u + iv$ sia olomorfa.

NB: $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x_i}^2}$