Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2011/2012
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Terzo appello di Metodi Analitici (11-9-12) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA

Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$.

(i) Determinare il dominio D di olomorfia di f.

(ii) Classificare le singolarità isolate di f.

(iii) Per $r > 0$, sia C_r una circonferenza di centro 0 e raggio r interamente contenuta in D, percorsa una volta in senso antiorario. Calcolare, al variare di r,

$$I_r := \int_{C_r} f(z)\, dz \ .$$

Soluzione.

(i) Il dominio D di olomorfia di f è dato dal piano complesso privato dell'origine.

(ii) Il punto $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile.

(iii) Per il teorema dei residui, essendo il residuo in $z_0 = 0$ nullo, si ha $I_r = 0$.

II. ANALISI FUNZIONALE

Sia $I = (0,1)$ e $f(t) = \sqrt{t}$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:

(i) $f \in L^1(I)$

(ii) $f \in AC(I)$

(iii) $f' \in L^1(I)$

(iv) $f' \in AC(I)$

(v) $f'' \in L^1(I)$

(vi) $f'' \in AC(I)$

Soluzione.

(i) Si ha $f \in L^1(I)$, in quanto f è una funzione continua.

(ii) Si ha $f \in AC(I)$, in quanto $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$ che è integrabile su $(0,1)$.

(iii) Si ha $f' \in L^1(I)$, vedi punto precedente.

(iv) Si ha $f' \notin AC(I)$, in quanto $f''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$ che non è integrabile su $(0,1)$.

(v) Si ha $f'' \notin L^1(I)$, vedi punto precedente.

(vi) Si ha $f'' \notin AC(I)$, in quanto $f'''(t) = \frac{3}{8}t^{-5/2}$ che non è integrabile su $(0,1)$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Determinare tutte le soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione integrodifferenziale

$$\left(u * e^{-x^2}\right)' + 2x\left(u * e^{-x^2}\right) = 0 \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\ .$$

[*Suggerimento: si risolva esplicitamente l'equazione differenziale ordinaria* $f'(x) + 2xf(x) = 0$]

Soluzione.
Poniamo $f(x) = \left(u * e^{-x^2}\right)$. Poiché f risolve l'equazione differenziale ordinaria $f' + 2xf = 0$, si ha

$$f(x) = ke^{-x^2} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}\ .$$

Pertanto, se u è una soluzione in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione assegnata, si ha

$$u * e^{-x^2} = ke^{-x^2}\ .$$

Applichiamo la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ ad ambo i membri. Si ottiene:

$$\mathcal{F}\left(u * e^{-x^2}\right) = \mathcal{F}\left(ke^{-x^2}\right)\ .$$

Tenendo conto del comportamento della trasformata rispetto al prodotto di convoluzione, e della sua linearità, si ha quindi

$$\mathcal{F}(u)\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right) = k\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)\ .$$

Infine, dividendo per $\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$, si conclude che

$$\mathcal{F}(u) = k.$$

Poiché la trasformata di una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ è infinitesima all'infinito, non esiste alcuna funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ la cui trasformata sia una costante diversa da zero, e quindi l'unica soluzione in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione assegnata è la funzione $u = 0$.