ORDINE DI UN POLO

Vorrei capire qualcosa in più sull'**ordine dei poli di una funzione**. Una volta individuate le singolarità isolate di una funzione e scoperto che sono singolarità di tipo polare, come faccio a capire di che ordine sono i poli?

Per farla breve: **come faccio a trovare l'ordine di un polo** (o di una singolarità di tipo polare che dir si voglia)?

Domanda di FAQ

Soluzioni

Ciao! La risposta sarà un lunghetta ma ti invito a leggerla tutta e con attenzione! **Alla fine non avrai più alcun dubbio sulle singolarità di tipo polare**.. Te lo assicuro ;)

Inizio col consigliarti una lettura a questa discussione: come classificare le singolarità.

Ora, una volta scoperto che la singolarità è di tipo polare (avrai di sicuro seguito uno dei metodi al precedente link), per trovarne l'ordine, dipende da quello che hai fatto in precedenza. Cerco di spiegarmi meglio..

1) Se sei arrivato a dire che la singolarità è di tipo polare calcolando lo sviluppo in serie di Laurent nel punto, per determinarne l'ordine ti basta semplicemente guardare tale sviluppo dritto dritto negli occhi, concentrandoti soprattutto sulla parte singolare.

Essendo infatti giunto alla conclusione che la singolarità è di tipo polare, la parte singolare dello sviluppo in serie avrà un numero finito di termini. Guardiamo " l'esponente negativo più piccolo "(non dire una cosa del genere all'esame :P).

Esso ci dirà l'ordine del polo.

Per ulteriore chiarezza faccio un esempio. Sia

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$$

Il suo unico punto singolare è $z_0 = 0$. Partendo dallo sviluppo di McLaurin della funzione seno è abbastanza semplice calcolare lo sviluppo in serie di Laurent di questa funzione. Esso sarà:

$$\underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z}}_{parte\ singolare} + \frac{z}{120} + ...$$

Poiché la parte singolare ha un numero finito di termini, $z_0 = 0$ è un polo. **Di che ordine?** Di ordine 3. ;)

2) Se sei arrivato a dire che la singolarità z_0 è di tipo polare perché:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$$

Allora esisterà un intero positivo p tale che:

$$(*) \quad \lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)^p) = a_{-p} \quad \in \mathbb{C} - \{0\}$$

L'intero p per cui si verifica tale proprietà è proprio l'ordine del polo.

Esempio

Consideriamo la stessa funzione dell'esempio precedente:

$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$ la cui singolarità isolata, come già abbiamo visto è $z_0 = 0$

e supponendo che non ci venga in mente di andare a trovare lo sviluppo in Serie di Laurent (che in questo caso è la strada più veloce), procediamo

come appena visto:

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{\sin(z)}{z^4} \right| = +\infty$$

Bene! Possiamo concludere che lo zero è un polo. **Di che ordine?** Dobbiamo trovare l'intero positivo p per cui valga la relazione (*)

Iniziamo:

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z^4} \cdot (z - 0)^1 \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z^3} \right) = +\infty$$

Non ci siamo.. Proseguiamo:

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z^4} \cdot (z - 0)^2 \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z^2} \right) = +\infty$$

Ancora niente:

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z^4} \cdot (z - 0)^3 \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z} \right) = 1 = a_{-3}$$

Perfetto! Ne deduciamo che lo zero è un polo di ordine $p = 3$ e non solo! Possiamo dire un'altra cosa!

Tale a_{-p} sarà il coefficiente del termine $\frac{1}{(z - z_0)^p}$ nello sviluppo in serie di Laurent!

Osserva infatti lo sviluppo in serie di

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$$

prima scritto. Il coefficiente del termine

$$\frac{1}{z^3}$$

è proprio 1, ovvero il risultato del limite!

Questo potrebbe bastare, ma esiste un altro risultato, noto col nome di "**Identificazione dei poli**" che, *in certi casi*, ci permette (ATTENZIONE ATTENZIONE) in un solo passaggio di IDENTIFICARE una singolarità di tipo polare e TROVARNE L'ORDINE!

Vediamola!

Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un disco (anche tutto il campo complesso) privato di un punto z_0 e z_0 è uno zero isolato di ordine p per $f(z)$ allora $\frac{1}{f(z)}$ ha in z_0 un polo di ordine p.

Tale risultato si può estendere alle funzioni del tipo $\frac{f(z)}{g(z)}$ a patto che z_0 non sia uno zero comune a numeratore e denominatore.

Insomma, per farla breve se siamo di fronte ad una funzione del tipo $\frac{f(z)}{g(z)}$ e $g(z)$ ha ad esempio z_0 come zero del secondo ordine allora z_0 è un polo di ordine 2 per $\frac{f(z)}{g(z)}$ sempre però a patto che z_0 NON SIA UNO ZERO COMUNE a numeratore e denominatore.

Esempio:

Prendiamo sempre la nostra ormai famosa funzione

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$$

Spinti dall'entusiasmo della proposizione appena vista essendo $z_0 = 0$ uno zero di ordine 4 per il denominatore ci potrebbe essere la tentazione di dire

che $z_0 = 0$ è un polo di ordine 4 per $f(z)$ ... Ed ecco, scattante, la bocciatura :(

Tale proposizione, infatti, come ribadito più volte, vale a patto che lo zero del denominatore NON sia uno zero per il numeratore. In questo caso, infatti, poiché anche la funzione seno si annulla nello zero, tale proposizione non può essere applicata! Applicandola infatti giungiamo ad un risultato errato! (In ben due modi diversi, infatti, abbiamo visto che lo zero è un polo di ordine 3 per questa funzione).

Se invece prendiamo la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

gli zeri del denominatore sono $z_1 = 2i$ e $z_2 = -2i$ entrambi con molteplicità due. Essi non sono zeri per il numeratore, pertanto, per l'Identificazione dei poli, possiamo concludere che $z_1 = 2i$ e $z_2 = -2i$ sono poli di ordine due per la nostra funzione!

Questo è tutto! ;)

Risposta di Galois

Esercizi simili e domande correlate

1 Risposta — Equazione differenziale lineare del primo ordine
In Università - Analisi Matematica, domanda di maria rosaria

1 Risposta — Trovare l'ordine di grandezza dei numeri
In Scuole Medie - Algebra e Aritmetica, domanda di cifratonda

4 Soluzioni — Equazione non omogenea del 2 ordine con seno e coseno
In Università - Analisi Matematica, domanda di maria rosaria

1 Risposta — Esercizio: esistono matrici reali di ordine 3,4 con un autovalore = 0?
In Università - Algebra Lineare, domanda di namis

1 Risposta — Calcolare l'ordine di grandezza di un numero
In Scuole Medie - Algebra e Aritmetica, domanda di cifratonda

Domande della categoria Wiki

1 Risposta — Perimetro quadrato
In Wiki, domanda di FAQ

1 Risposta — r quadro
In Wiki, domanda di FAQ

1 Risposta — Ordine di un polo
In Wiki, domanda di FAQ

1 Risposta — Classificare le singolarità
In Wiki, domanda di FAQ

1 Risposta — Congettura di Poincaré
In Wiki, domanda di FAQ