PROBLEMI DI CALCOLO VETTORIALE

Mathematics seems to endow one with something like a new sense

Charles Darwin

1. Sia $\mathbf{u}$ un *versore* nello spazio tridimensionale. Dimostrare che

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k},$$

dove α, β e γ sono, rispettivamente, gli angoli compresi tra il versore $\mathbf{u}$ ed i versori degli assi coordinati $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ e soddisfano la relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2. Verificare che il triangolo T avente i vertici nei punti $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,2,0)$ e $P_3(1,1,\sqrt{6})$ è equilatero.

3. Calcolare la *proiezione* del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ nella direzione del vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

4. Determinare l'area del *parallelogramma* costruito sui due vettori : $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Calcolare il volume del *tetraedro* avente come spigoli i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}$

5. Una forza $\mathbf{F}$ di intensità $|\mathbf{F}| = 2$ e diretta come l'asse y, è applicata nel punto $P(2,1,0)$ del piano di base xy. Calcolare il momento della forza rispetto all'origine.

6. Calcolare il coseno dell'angolo compreso tra la diagonale e il lato di un cubo. Verificare, senza usare la calcolatrice, che tale angolo è minore di $\pi/3$.

7. Dimostrare, utilizzando la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ (v. Pagani-Salsa, vol. 1 cap. 3) che per ogni coppia di vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^n$ vale

$$\big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\big| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Interpretare geometricamente tali relazioni nel caso $n = 3$ (o $n = 2$).

Soluzioni :

1. Sia $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$. Per le proprietà prodotto scalare abbiamo $u_1 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha$, $u_2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{j} = \cos\beta$, $u_3 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = \cos\gamma$. La relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ segue ora dal fatto che $|\mathbf{u}|^2 = 1$. Nel caso bidimensionale, possiamo scrivere un generico versore nella forma $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$, dove θ è l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e il versore dell'asse x.

2. Le lunghezze dei tre vettori $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1, 1, \sqrt{6})$, $\overrightarrow{P_2P_3} = (1, -1, \sqrt{6})$ sono uguali; abbiamo infatti

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_1P_3}| = |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Si poteva fare la verifica anche calcolando la lunghezza di due vettori e il coseno dell'angolo compreso con il prodotto scalare.

3. Se θ è l'angolo tra i due vettori, la proiezione di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{w}$ è data da

$$|\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$

Dal calcolo del prodotto scalare ricaviamo $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 3 - 1 - 1 = 1$; risulta inoltre $|\mathbf{w}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. La proiezione cercata vale allora $|\mathbf{v}|\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

4. L'area del parallelogramma è uguale alla *norma del prodotto vettoriale*

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k};$$

dunque:

$$\text{Area} = |8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \sqrt{64+4+36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Consideriamo il parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$; il tetraedro avente per spigoli gli stessi vettori è una piramide con base triangolare di area pari alla metà dell'area di una faccia del parallelepipedo e altezza uguale all'altezza del parallelepipedo (relativa alla medesima faccia). Il volume del tetraedro sarà allora uguale a 1/6 del volume del parallelepipedo; quest'ultimo volume è dato dal valore assoluto del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} + 8$$

Quindi il volume del tetraedro vale $\sqrt{3} + 4/3$.

5. Il momento è dato dal prodotto vettoriale $\mathbf{M} = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F}$, dove $\mathbf{r} = (2, 1, 0)$ è il *vettore posizione* del punto P rispetto all'origine e $\mathbf{F} = (0, 2, 0)$. Osserviamo che entrambi i vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ giacciono nel piano xy, per cui il loro prodotto vettoriale sarà diretto come l'asse z. Si trova infatti

$$\mathbf{M} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})\wedge 2\mathbf{j} = 4\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = 4\,\mathbf{k}.$$

6. Possiamo supporre che il cubo abbia lato di lunghezza unitaria e che giaccia nel primo ottante, con tre spigoli lungo gli assi coordinati ed un vertice coincidente con l'origine O. Sia P il vertice opposto; il problema equivale allora a calcolare l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$ ed il versore $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ (o qualunque altro dei versori fondamentali). Detto θ l'angolo cercato, abbiamo allora:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{i}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Poiché $1/\sqrt{3} > 1/2 = \cos(\pi/3)$ e ricordando che il coseno *decresce* al crescere dell'angolo (nell'intervallo $[0, \pi]$) deduciamo che $\theta < \pi/3$. (Il valore approssimato di θ è $0,95$ radianti, pari a circa $54,73$ gradi.)

7. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nella forma

$$-|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \le \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

ricaviamo facilmente

$$(|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|)^2 \le |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \le (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

Ma, per le proprietà del prodotto scalare:

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$$

Sostituendo nelle precedenti disuguaglianze si ottiene

$$(|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|)^2 \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 \le (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2,$$

da cui segue il risultato. Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sono tre vettori che uniscono i vertici di un triangolo, le disuguaglianze affermano che la lunghezza di un lato è sempre minore della somma delle lunghezze degli altri due lati e maggiore del valore assoluto della loro differenza; da qui il nome di *disuguaglianze triangolari*.