Funzioni di più variabili a valori reali

1) Trovare l'insieme di definizione D della funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

Dire se D è aperto, chiuso, limitato, connesso. Determinare la frontiera ∂D e l'insieme dei punti di accumulazione di D. In quali punti di D la funzione f è continua ? Verificare che, qualunque sia $(x_0, y_0) \in \partial D$, *non* esiste il

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Determinare *l'immagine* della funzione f, cioè il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$f(D) \equiv \{f(x,y) \,\big|\, (x,y) \in D\}$$

2) Determinare in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = (x+1)\sqrt{|y|}$$

è differenziabile.

3) Una biglia viene appoggiata su un piano inclinato liscio (attrito trascurabile) di equazione $z = -x + y - 1$, nel punto di coordinate $(1, 5, 3)$ ed inizia a scendere lungo il piano sotto l'azione della forza peso e della reazione vincolare (normale al piano). Sapendo che la biglia seguirà la *traiettoria di massima pendenza*, determinare il punto in cui raggiunge il piano di base xy.

4) Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (x_0, y_0) ed esistono due versori *linearmente indipendenti* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tali che $D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = D_{\mathbf{w}} f(x_0, y_0) = 0$ allora $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

5) Sia $g(x,y,z) = z(1 - x^2 - y^2)$. Studiare il segno di g e descrivere l'insieme di livello $g = 0$. Calcolare il vettore (tridimensionale) $\nabla g(x,y,z)$ e discuterne lunghezza, direzione e verso nei punti (x,y,z) dell'insieme $g = 0$.

Soluzioni.

1) La funzione è definita se $xy \neq 0$, per cui l'insieme D è costituito dai punti del piano che non appartengono agli assi. Si tratta di un insieme aperto, non limitato e non connesso. La frontiera di D è formata dall'unione dei due assi, che sono pure punti di accumulazione per D. Dunque l'insieme dei punti di accumulazione è $\mathbb{R}^2$. la funzione è continua in ogni punto di D

Per ogni fissato $y_0 \neq 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y_0) = \pi/2, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x,y_0) = -\pi/2$$

e per ogni fissato $x_0 \neq 0$

$$\lim_{y\to 0^+} f(x_0,y) = -\pi/2, \qquad \lim_{y\to 0^-} f(x_0,y) = \pi/2$$

Dunque i limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$$

non esistono. Nemmeno il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ esiste perchè in *qualsiasi* intorno dell'origine la funzione assume valori arbitrariamente vicini sia a $\pi/2$ che a $-\pi/2$. La stessa conclusione segue avvicinandosi all'origine lungo la retta $y = -x$.

L'immagine di f è necessariamente contenuta nell'immagine dell' arcotangente, ovvero nell'intervallo $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$; dimostriamo che in effetti vale

$$f(D) = \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$$

Fissato $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, ci sono punti nel primo quadrante in cui la f assume il valore $\frac{\pi}{2} - \epsilon$ e punti in cui assume il valore $-\frac{\pi}{2} + \epsilon$; poiché un quadrante è connesso, per il *teorema dei valori intermedi* (corollario del teorema degli zeri) f assume tutti i valori nell'intervallo $\big(-\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon\big)$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di ϵ.

2) Poichè

$$f(x,y) = (x+1)\sqrt{y} \quad \text{per} \quad y > 0$$

$$f(x,y) = (x+1)\sqrt{-y} \quad \text{per} \quad y < 0$$

la funzione è di classe $\mathcal{C}^1$ e quindi differenziabile nei semipiani aperti $y > 0$ e $y < 0$.

Esaminiamo ora i punti sull'asse x $(y = 0)$. Poiché $f(x,0) = 0$ per ogni x, la derivata parziale rispetto ad x esiste in tutti i punti dell'asse e vale $f_x(x,0) = 0$. Per la derivata rispetto ad y consideriamo, per ogni x *fissato*, il rapporto:

$$\frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \frac{(x+1)\sqrt{|k|}}{k}$$

Vediamo che il limite per $k \to 0$ non esiste, *tranne che nel caso* $x = -1$ (in cui vale ovviamente 0). Concludiamo che nei punti $(x, 0)$ con $x \neq -1$, la funzione *non* è differenziabile, non essendo soddisfatta la *condizione necessaria* di esistenza delle derivate parziali.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(-1, 0)$, dove sia f che le derivate parziali f_x e f_y sono nulle. Applicando la definizione, consideriamo il quoziente:

$$\frac{f(-1+h,k) - f(-1,0) - f_x(-1,0)h - f_y(-1,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h\sqrt{|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Utilizzando le coordinate polari abbiamo $h = \rho\cos\theta$, $k = \rho\sin\theta$, e quindi

$$\frac{h\sqrt{|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\rho^{3/2}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}}{\rho} = \sqrt{\rho}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}$$

Poichè vale la stima $\left|\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}\right| \leq 1$, abbiamo

$$\left|\sqrt{\rho}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}\right| \leq \sqrt{\rho} \longrightarrow 0$$

per $\rho \to 0$ uniformemente rispetto a θ. Dunque, f è differenziabile in $(-1, 0)$.

3) La biglia scende lungo il piano $z = f(x,y) = -x+y-1$ (nella direzione determinata dalla risultante della forza peso e della reazione vincolare) a partire dal punto $(1, 5, 3)$. La *proiezione della traiettoria sul piano di base xy* starà allora sulla retta passante per il punto $(1, 5)$ e diretta come il vettore

$$-\nabla f(1,5) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

Le *equazioni parametriche* di tale retta sono

$$x = 1+t, \qquad y = 5-t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

L'equazione cartesiana si scrive

$$x + y - 6 = 0$$

L'intersezione con la *curva di livello zero di* f :

$$-x + y - 1 = 0$$

è nel punto $x = 5/2$, $y = 7/2$.

4) Se f è differenziabile le derivate direzionali si calcolano con la formula del gradiente, per cui abbiamo

$$0 = D_{\mathbf{v}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{v}, \quad 0 = D_{\mathbf{w}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{w}$$

I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti e perciò formano una *base* in $\mathbb{R}^2$; poiché anche $\nabla f(x_0, y_0)$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$, esistono due scalari λ_1, λ_2 tali che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{w}$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri dell'equazione per $\nabla f(x_0, y_0)$ si ottiene

$$\|\nabla f(x_0, y_0)\|^2 = \lambda_1 \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} + \lambda_2 \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{w} = \lambda_1\, 0 + \lambda_2\, 0 = 0$$

e dunque $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

5) Per la regola dei segni, la funzione g è positiva nel semispazio $z > 0$ all'interno del *cilindro* di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e nel semispazio $z < 0$ all'esterno di tale cilindro. L'insieme di livello $g = 0$ è formato dall'*unione* del piano $z = 0$ con il cilindro.

Vettore gradiente:

$$\nabla g(x, y, z) = -2xz\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$$

Sul piano $z = 0$ si trova

$$\nabla g(x, y, 0) = (1 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$$

La lunghezza è pari a $|1 - x^2 - y^2|$; il gradiente si annulla nei punti di intersezione del piano con il cilindro. Nei punti del piano all'interno del cilindro, il gradiente ha direzione e verso di $\mathbf{k}$, nei punti esterni al cilindro il verso è opposto. In entrambi i casi, il gradiente è ortogonale alla superficie di livello $z = 0$.

Sulla superficie cilindrica:

$$\nabla g(x, y, z) = -2xz\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} = -2z(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})$$

$$\|\nabla g(x, y, z)\| = 2|z|\sqrt{x^2 + y^2} = 2|z|$$

Se $z \neq 0$ la direzione del gradiente è sempre ortogonale alla superficie cilindrica; infatti, in ogni punto della superficie (con $z \neq 0$) $\nabla g(x, y, z)$ è diretto come il vettore $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, ovvero ha direzione radiale rispetto all'asse z. Il verso è uscente dal cilindro se $z < 0$, entrante se $z > 0$.