Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello d'esame di Analisi Matematica III, 3 settembre 2019 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Sia

$$f(z) = \frac{z^2+4}{z(z^2+1)}\,.$$

(a) Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $\int_{\gamma_n} f(z)\,dz$, dove $\gamma_n(\theta) = ne^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(b) Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $\int_{\Gamma_n} f(z)\,dz$, dove $\Gamma_n(\theta) = ne^{in\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. Si ha

$$f(z) = \frac{4}{z} - \frac{3}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{3}{2}\frac{1}{z-i}\,.$$

(a) Per il teorema dei residui, poiché per ogni $n \geq 2$,

$$\mathrm{Ind}(\gamma_n)(0) = \mathrm{Ind}(\gamma_n)(-i) = \mathrm{Ind}(\gamma_n)(i) = 1\,,$$

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z}, 0\Big) = \mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z+i}, -i\Big) = \mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z-i}, +i\Big) = 1\,,$$

si ha

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i\Big(4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\Big) = 2\pi i\,.$$

(b) Per il teorema dei residui, poiché per ogni $n \geq 2$,

$$\mathrm{Ind}(\Gamma_n)(0) = \mathrm{Ind}(\Gamma_n)(-i) = \mathrm{Ind}(\Gamma_n)(i) = n\,,$$

si ha (calcolando i residui come sopra)

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2n\pi i\Big(4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\Big) = 2n\pi i\,.$$

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Sia

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,.$$

(a) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$, si ha che $f \in L^\infty([\alpha, +\infty))$;

(b) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$, si ha che $f \in L^2([\alpha, +\infty))$.

Soluzione. (a) Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, si ha

$$f \in L^\infty([\alpha, +\infty)) \Leftrightarrow \alpha > 0\,.$$

(b) Poiché f decade esponenzialmente per $x \to +\infty$, si ha che f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f^2 \sim \frac{1}{x}$, f^2 non è integrabile in un intorno destro di 0, e pertanto

$$f \in L^2([\alpha, +\infty)) \Leftrightarrow \alpha > 0\,.$$

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
(a) Dimostrare che esiste una e una sola funzione $u \in H_0^1(0,1)$ tale che

$$\int_0^1 (3x+1)u'v'\,dx = \int_0^1 (12x-1)v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)\,.$$

(b) Dimostrare che si tratta della funzione $u(x) = x - x^2$.

Soluzione. (a) L'esistenza e unicità della funzione u segue dal teorema di Lax Milgram. Infatti il funzionale lineare

$$f(v) = \int_0^1 (12x-1)v\,dx$$

e' continuo su $H_0^1(0,1)$, in quanto

$$|f(v)| \leq \|12x-1\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|12x-1\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1}\,,$$

mentre la forma bilineare

$$B(u,v) = \int_0^1 (3x+1)u'v'\,dx$$

è continua e coerciva su $H_0^1(0,1)$, rispettivamente in quanto

$$|B(u,v)| \leq \|3x+1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|3x+1\|_{L^\infty}\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

e (grazie al fatto che $3x+1 \geq 1$ su $[0,1]$ e alla la disuguaglianza di Poincaré)

$$B(u,u) \geq \|u'\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{H_0^1}^2\,.$$

(b) Si ha $u \in H_0^1(0,1)$, in quanto u è di classe C^1 e nulla al bordo. Sostituendo al posto di $u' = 1-2x$, si ottiene

$$\int_0^1 (3x+1)(1-2x)v'\,dx = \int_0^1 (12x-1)v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

ovvero

$$\int_0^1 (-6x^2+x+1)v'\,dx = \int_0^1 (12x-1)v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)\,.$$

La tesi segue integrando per parti, in quanto:

$$\int_0^1 (-6x^2+x+1)v'\,dx = \int_0^1 (12x-1)v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)\,.$$

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Scrivere la formula risolutiva per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in una variabile spaziale.

(b) Fornire la definizione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali normati e fornire un esempio di operatore lineare non limitato.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati. Come operatore lineare non limitato in (b) si può prendere ad esempio:
$X = C^0([-1,1])$ munito della norma $\int_{-1}^{1} |f|$
$Y = \mathbb{R}$ munito della norma $|\cdot|$
$T : X \ni f \mapsto f(0) \in Y$