Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2010/2011
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Modulo di Metodi Analitici (12-9-11) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

(i) Enunciare il teorema dei residui.
(ii) Calcolare

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2} \ ,$$

dove Γ è il quadrilatero che congiunge i punti -2, $2i$, 2, $-2i$, ordinati come elencato.

Soluzione. Applicando il teorema dei residui, tenuto conto che Γ è orientato in senso orario, e che delle tre singolarità $z = 0, 1, 3$ della funzione integranda solo le prime due risultano essere interne a Γ, detto I l'integrale assegnato, si ha

$$I = -2\pi i \big[\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, 1)\big] \ .$$

Poiché entrambe le singolarità $z = 0, 1$ sono poli semplici, i rispettivi residui sono dati da

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} = -\frac{1}{9} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{1}{4} \ .$$

Pertanto

$$I = -2\pi i \big[-\frac{1}{9} + \frac{1}{4} \big] = -\frac{5\pi i}{18} \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

Dimostrare che

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{e^x}{1+x^2}}\, dx \le \frac{1}{2}\sqrt{\pi(e-1)}\ .$$

Soluzione. La disuguaglianza voluta è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Hölder, la quale fornisce:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{e^x}{1+x^2}}\, dx \le \Big(\int_0^1 e^x\, dx\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx\Big)^{1/2} = \sqrt{e-1}\sqrt{\arctan(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi(e-1)}\ .$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Si trovi una funzione $u \in L^2(\mathbb{R})$ la cui trasformata di Fourier $\hat{u}$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$(\hat{u})'(\xi) = (\sin \xi) \cdot \chi_{(-\pi,\pi)}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R} \ .$$

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto la trasformata di Fourier del membro destro, $g(\xi) := (\sin \xi) \cdot \chi_{(-\pi,\pi)}(\xi)$. Si ha

$$\hat{g}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \xi e^{-ix\xi} \, d\xi = -2i \int_0^{\pi} \sin \xi \sin(x\xi) \, d\xi = i \int_0^{\pi} [\cos(\xi(1+x)) - \cos(\xi(1-x))] \, d\xi = \frac{2i \sin(\pi x)}{x^2 - 1} \ .$$

Supponiamo poi che u abbia la regolarità necessaria per applicare le formule

$$(*) \qquad \widehat{xu} = i(\hat{u})'(\xi) \qquad \text{e} \qquad u(-x) = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{u}}(x) \ .$$

Dall'equazione si ottiene

$$\widehat{xu} = ig(\xi) \ .$$

Quindi trasformando si ha

$$-xu(-x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{xu}} = \frac{i}{2\pi} \hat{g}(x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x^2 - 1)} \ ,$$

da cui si ricava

$$u(-x) = u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x(x^2 - 1)} \ .$$

Tale funzione appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e soddisfa l'equazione assegnata. (Si noti che u ha la regolarità necessaria per la validità di $(*)$: la prima uguaglianza vale in quanto sia u che xu appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, la seconda in quanto $u \in L^2(\mathbb{R})$).

Nota: alla stessa conclusione si sarebbe potuti giungere ricordando la trasformata nota di $\frac{\sin x}{x}$ e antitrasformando il secondo membro dell'equazione. Infatti, si ha

$$(\sin \xi) \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi) = \frac{1}{2i} \mathcal{F} \Big[\frac{\sin(\pi(x-1))}{(\pi(x-1))} - \frac{\sin(\pi(x+1))}{(\pi(x+1))} \Big] = -i \mathcal{F} \big[\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x^2-1)} \big] \ .$$