Integrali multipli

Integrali doppi su rettangoli

La nota definizione di integrale come limite di somme di Riemann ha una naturale estensione alle funzioni di due variabili definite su rettangoli.

Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Dividiamo $[a, b]$ in n intervalli di ampiezza $(b-a)/n$ mediante i punti:

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\,, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n\,.$$

Allo stesso modo, consideriamo una partizione di $[c, d]$ in n intervalli di ampiezza $(d-c)/n$ definita dai punti

$$y_j = c + j\,\frac{d-c}{n}\,, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n\,.$$

Di conseguenza, il rettangolo $R := [a, b] \times [c, d]$ viene suddiviso in n^2 rettangoli

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \qquad i, j = 1, 2, ..., n\,,$$

ciascuno di *area* $|R_{ij}| = (b-a)(d-c)/n^2$.

Scegliamo a piacere dei punti $\mathbf{r}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$ e definiamo la *somma di Riemann*:

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} |R_{ij}| f(\mathbf{r}_{ij}) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(\mathbf{r}_{ij})\,.$$

Se $f \geq 0$, ogni termine della somma di Riemann è il volume di un parallelepipedo di base R_{ij} e altezza $f(\mathbf{r}_{ij})$. In questo caso, la somma stessa rappresenta il volume di una regione dello spazio che 'approssima' la regione compresa tra la superficie cartesiana $z = f(x, y)$ e il rettangolo R nel piano $z = 0$.

Se f è limitata di segno qualsiasi, la somma S_n è comunque ben definita per ogni intero positivo n.

Definizione

Si dice che una funzione limitata $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è integrabile nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ se esiste il $\lim_{n\to+\infty} S_n$ e non dipende dalla scelta dei punti $\mathbf{r}_{ij} \in R_{ij}$ ad ogni passo della costruzione di S_n.

Tale limite prende il nome di *integrale doppio* di f in R e si denota con il simbolo

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j=1}^{n} |R_{ij}| f(\mathbf{r}_{ij})$$

Osservazione

Se $f \geq 0$, l'integrale si può considerare come una definizione rigorosa della nozione di *volume* della regione : $\{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ nello spazio tridimensionale.

Consideriamo ora tre questioni fondamentali:

1. Quali funzioni sono integrabili.
2. Come si calcolano gli integrali doppi.
3. Come definire (e calcolare) gli integrali doppi in regioni più generali.

Una risposta (parziale) alla prima domanda è data dal

Teorema

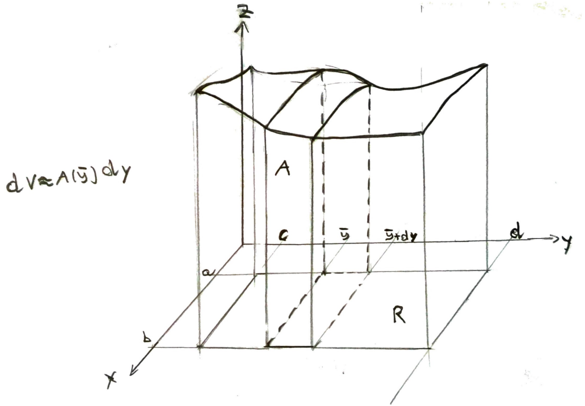
$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile.

Dunque la continuità di una funzione in un rettangolo (chiuso) è una condizione *sufficiente* per la sua integrabilità. Vedremo in seguito che la classe delle funzioni integrabili è più ampia.

Per quanto riguarda il calcolo degli integrali doppi nei rettangoli, esistono *formule di riduzione* di tali integrali a due *integrali iterati* di funzioni di una sola variabile.

La dimostrazione di tali formule si basa sulle seguente idea geometrica:

il volume sotteso da una superficie cartesiana $z = f(x, y)$ si può approssimare sezionando la regione con piani verticali a y costante (o a x costante), calcolando le aree $A(y)$ ($A(x)$) delle diverse sezioni e infine sommando i volumi $A(y)\,dy$ ($A(x)\,dx$) delle 'fette' comprese tra due piani vicini.



Teorema

Sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Valgono allora le formule (di riduzione)

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx\,.$$

Esempi

Calcoliamo l'integrale doppio di $f(x,y) = 2 - x - y$ nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Applicando la prima formula di riduzione abbiamo:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} (2 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 (2 - x - y)\,dx \Big)\,dy$$

Nella prima iterazione, si calcola l'integrale rispetto ad x per ogni *fissato* y:

$$\int_0^1 (2 - x - y)\,dx = \Big[(2 - y)x - x^2/2\Big]_0^1 = 3/2 - y\,.$$

Calcolando il secondo integrale:

$$\int_0^1 (3/2 - y)\,dy = \Big[3y/2 - y^2/2\Big]_0^1 = 3/2 - 1/2 = 1\,.$$

Esercizio

Calcolare lo stesso integrale utilizzando la seconda formula di riduzione. Disegnare la porzione del piano di equazione $z = 2 - x - y$ che si proietta sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$ nel piano xy e verificare che il valore dell'integrale è uguale al volume della regione tra il piano e il quadrato.

Osservazione:

Se $f(x,y)$ si fattorizza nel prodotto $g(x)h(y)$, segue dalle formule di riduzione che anche l'integrale doppio si fattorizza:

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,dx\,dy = \Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big)\Big(\int_c^d h(y)\,dy\Big)\,.$$

Per esempio:

$$\int_{[-2,1]\times[0,\pi]} x\sin y\,dx\,dy = \Big(\int_{-2}^1 x\,dx\Big)\Big(\int_0^\pi \sin y\,dy\Big) = \,.$$

$$= \big[x^2/2\big]_{-2}^1\,\big[-\cos y\big]_0^\pi = -\frac{3}{2}\,2 = -3\,.$$

Integrali doppi in insiemi più generali

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Vogliamo definire l'integrale di f in D.

Consideriamo un rettangolo $R \supset D$ e definiamo la funzione

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Diciamo che f è integrabile in D se e solo se $\tilde{f}(x,y)$ è integrabile in R e *definiamo*

$$\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy := \int\int_R \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy\,.$$

Si dimostra che l'integrale a destra non dipende dalla scelta del rettangolo R che contiene D.

Osserviamo che in generale la funzione $\tilde{f}$ è discontinua nei punti di ∂D (anche se f è continua in D) per cui l'integrabilità dipenderà sia dalla funzione f che dall'insieme D.

Definizione

Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se la funzione $f(x, y) = 1$, $(x, y) \in D$, è integrabile.

La *misura* (area) di D è per definizione

$$|D| := \int\int_D 1\, dx\, dy \quad \left(= \int\int_D dx\, dy \right).$$

La misurabilità di un insieme D, cioè l'integrabilità in un rettangolo $R \supset D$ della *funzione indicatrice di D*, dipende dalle proprietà della frontiera ∂D (l'insieme dei punti di discontinuità di tale funzione).
Vale infatti la seguente caratterizzazione:

Proposizione

Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ (limitato) è misurabile se e solo se ∂D è misurabile e $|\partial D| = 0$. $\diamond$

Gli insiemi misurabili $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ tali che $|\Gamma| = 0$ si dicono *insiemi di misura nulla*.

Esempi di insiemi di misura nulla sono: un punto o un numero finito di punti, un segmento, il grafico di una funzione continua, il sostegno di una curva regolare a tratti (non confondere la misura *bidimensionale* con la lunghezza).

Gli insiemi di misura nulla si caratterizzano come gli insiemi che si possono ricoprire con un numero finito di rettangoli di *area complessiva* piccola a piacere.

L'importanza di tali insiemi nella teoria dell'integrazione si evidenzia nel seguente risultato, che generalizza il teorema sull'integrabilità delle funzioni continue di pag. 4:

<ins>Teorema</ins>

Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ limitata. Se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla, allora f è integrabile. $\diamond$

Le funzioni che sono continue eccetto che nei punti di un insieme di misura nulla si dicono *generalmente continue.*

La funzione indicatrice dei punti con ascissa razionale nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ *non* è integrabile.

Torniamo ora alla definizione di integrale in un insieme limitato D:
dal Teorema e dalla precedente Proposizione si ricava in particolare che se D è misurabile allora ogni $f : D \to \mathbb{R}$ *limitata e continua* è integrabile in D.

Infatti, prolungando f a zero all'esterno di D si ottiene una funzione $\tilde{f}$ che è discontinua solo nei punti di ∂D, che ha misura nulla.

Domini semplici e formule di riduzione

Una classe di insiemi di particolare rilevanza è quella dei *domini semplici*:
Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice:

i) semplice rispetto all'asse y (o y-semplice) se esistono $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \right\};$$

ii) semplice rispetto all'asse x (o x-semplice) se esistono $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [c, d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \right\}.$$

Dalla definizione segue che gli insiemi semplici sono chiusi, limitati e misurabili.

Quindi una funzione continua in un dominio semplice D è limitata (per il teorema di Weierstrass) e integrabile. Lo stesso vale per una funzione limitata e continua in $\mathring{D}$.

In questi casi, valgono le seguenti **formule di riduzione in domini semplici**:

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx\,, \quad (D\,\text{semplice rispetto a}\,y).$$

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy\,, \quad (D\,\text{semplice rispetto a}\,x).$$

Per giustificarle, ricordiamo che gli integrali a sinistra sono *per definizione* uguali agli integrali in un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \supset D$ della funzione $\tilde{f}$ definita a pag.8.
Inoltre, si dimostra che il teorema di riduzione degli integrali nei rettangoli (v. pag.6) si estende al caso di funzioni generalmente continue.
Applicando allora il teorema a $\tilde{f}$ e ricordando che

$$\tilde{f}(x,y) = 0 \quad \text{per} \quad (x,y) \in R \backslash D\,,$$

le due formule seguono facilmente.

Esempi

Calcolare

$$\int\int_D (1-x-y)\,dxdy, \qquad \text{dove} \quad D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}\,.$$

Il dominio è y-semplice, per cui si applica la formula

$$\int\int_D (1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(\big[\,(1-x)y - y^2/2\,\big]_0^{1-x}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}\,.$$

Dare un'interpretazione geometrica al risultato dell'integrale.

Notiamo che D (il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$) è anche x-semplice, per cui si poteva usare anche l'altra formula di riduzione.

Verificare che la funzione $f(x,y) = e^{x/y}$ è integrabile in

$$D = \{(x,y)\,|\,0 < y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\}$$

e calcolarne l'integrale.

Soluzione.
La chiusura di D è un insieme x-semplice e f è continua in D.
Perchè sia integrabile in D occorre verificare che sia anche limitata.
Ma per ogni $(x,y) \in D$ vale $0 \leq x/y \leq y^2/y = y \leq 1$, per cui $1 \leq e^{x/y} \leq e$.
Applicando la appropriata formula di riduzione:

$$\int\int_D e^{x/y} = \int_0^1 \Big(\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx \Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 y(e^y - 1)\,dy = \int_0^1 ye^y - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Proprietà degli integrali doppi

Le proprietà dell'operazione di integrazione ne chiariscono il significato e allo stesso tempo sono utili per il calcolo.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato e siano f, g funzioni integrabili in D. Allora:

1. *Linearità*:
   Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è integrabile e
   $$\int\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\int_D f + \beta \int\int_D g\,.$$
2. *Monotonia*:
   i) $f \geq g \;\Rightarrow\; \int\int_D f \geq \int\int_D g$.
   ii) $|f|$ è integrabile e $\left|\int\int_D f\right| \leq \int\int_D |f| \leq$ (se D misurabile) $\sup_D |f|\; |D|$.
3. *Teorema della media*:
   Se D è misurabile e $m = \inf_D f$, $M = \sup_D f$, allora
   $$m \leq \frac{1}{|D|} \int\int_D f \leq M\,.$$

Osservazioni:

- La proprietà 1 giustifica il metodo di scomposizione nel calcolo degli integrali.
- Usando la proprietà 2 si possono ottenere delle *stime* di un dato integrale senza calcolare l'esatto valore.
  Inoltre, dal punto ii) segue che per ogni f integrabile in D

$$|D| = 0 \;\Rightarrow\; \int\int_D f(x,y)\,dxdy = 0\,.$$

- Se f è continua in D compatto, connesso e misurabile, segue dal punto 3 che esiste $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ tale che

$$\frac{1}{|D|}\int\int_D f(x,y)\,dxdy = f(\bar{x},\bar{y})\,.$$

Se (x_0, y_0) è un punto di un aperto in cui f è continua, si ricava dall'ultima osservazione:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{B_r(x_0,y_0)} f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\,.$$

Consideriamo infine l'importante proprietà di *additività rispetto al dominio di integrazione*:

Proposizione

Siano D, D_1, D_2 misurabili tali che $D = D_1 \cup D_2$ e $|D_1 \cap D_2| = 0$.
Se f è integrabile in D, allora è integrabile in D_1 e in D_2 e vale

$$\int\int_D f = \int\int_{D_1} f + \int\int_{D_2} f \,.$$

La Proposizione si applica al calcolo degli integrali definiti in *domini regolari*, cioè insiemi che sono unione di un numero finito di insiemi semplici.
Questi integrali si scompongono nella somma di un numero finito di integrali in insiemi semplici che si possono calcolare con le formule di riduzione.

Esercizi

i) Dimostrare per via grafica che una corona circolare si può suddividere nell'unione di due insiemi y-semplici o nell'unione di due insiemi x-semplici.

ii) Verificare mediante esame diretto (con considerazioni geometriche e usando le proprietà degli integrali) le uguaglianze:

$$\int\int_{[-1,1]\times[0,1]} \left[1 + \sin(x^3 y)\right] dxdy = 2\,; \qquad \int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \frac{2}{3}\pi\,.$$

Cambiamento delle variabili di integrazione

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato e $f : D \to \mathbb{R}$ integrabile.

Vogliamo calcolare $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ mediante una *sostituzione di variabili* $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

Teorema

Assumiamo $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e limitato e che la trasformazione $\mathbf{T}$ definita da

$$\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

sia biunivoca (tra Ω e $\mathbf{T}(\Omega)$) e di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Se $x(u,v)$, $y(u,v)$ e le loro derivate parziali sono limitate in Ω e se $\det J_{\mathbf{T}}(u,v) \neq 0$ per $(u,v) \in \Omega$, allora:

- $S \subseteq \Omega$ è misurabile se e solo se $D := \mathbf{T}(S)$ è misurabile;
- se $f : D \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, vale la formula:

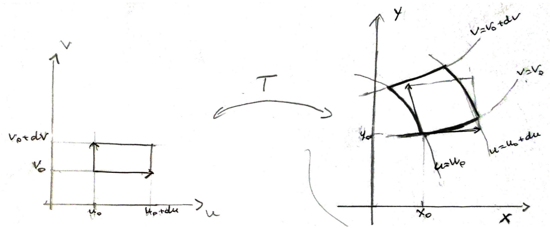
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_S f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|\det J_{\mathbf{T}}(u,v)\big|\,dudv\,.$$

Si possono indebolire le ipotesi del teorema richiedendo che la biunivocità di $\mathbf{T}$ e $\det J_{\mathbf{T}} \neq 0$ valgano eccetto al più in un *insieme di misura nulla*.

La presenza del valore assoluto del determinante Jacobiano nell'integrale a destra della formula si deve al fatto che, in generale, una trasformazione di variabili *non* conserva le aree:

il rettangolo nel piano (u, v) compreso tra le rette $u = u_0$, $u = u_0 + du$ e $v = v_0$, $v = v_0 + dv$, viene mappato da $\mathbf{T}$ in una regione del piano (x, y) che è approssimata dal parallelogramma di lati

$$\partial_u \mathbf{T}(u_0, v_0)\, du = \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) \end{pmatrix} du\,; \qquad \partial_v \mathbf{T}(u_0, v_0)\, dv = \begin{pmatrix} x_v(u_0, v_0) \\ y_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} dv\,.$$



L'*area* di questo parallelogramma è proprio uguale a:

$$\left|\partial_u \mathbf{T}(u_0, v_0) du \wedge \partial_v \mathbf{T}(u_0, v_0)\, dv\right| = \left|\det J_{\mathbf{T}}(u_0, v_0)\right| du dv\,.$$

Il valore assoluto del determinante Jacobiano è quindi il rapporto tra gli 'elementi di area', *dxdy* nel piano (x, y) e *dudv* nel piano (u, v), che si corrispondono nella trasformazione (*fattore di riscalamento delle aree*).

Esempio

Un cerchio D di raggio R e centro nell'origine è l'immagine (nel piano (x, y)) del rettangolo $\{(\rho, \theta) \,|\, 0 \leq \rho \leq \mathrm{R},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ nel piano (ρ, θ) delle coordinate polari.
Usando questa trasformazione, calcoliamo l' area $|D| = \int\int_D dxdy$ applicando il teorema con $f = 1$ e $\det J_{\mathbf{T}} = \rho$:

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{[0,\mathrm{R}]\times[0,2\pi]} \rho \, d\theta d\rho = 2\pi \int_0^{\mathrm{R}} \rho \, d\rho = \pi \mathrm{R}^2 \, .$$

Vediamo che si ottiene il valore corretto dell'area proprio grazie al fattore di riscalamento ρ.

Esercizio

Calcolare $\int\int_D y^2 \, dxdy$, dove D è la regione piana del primo quadrante delimitata dalle iperboli $xy = 1$, $xy = 2$ e dalle rette $y = x$, $y = 2x$.

(Considerare il cambio di variabili definito dalle equazioni: $xy = u$, $y/x = v$).

Applicazione al calcolo di un baricentro

Una lamina piana D di densità superficiale costante δ occupa il settore circolare $0 \le \rho \le \mathrm{R}$, $-\alpha \le \theta \le \alpha$. Calcolare le coordinate del baricentro. La massa totale della lamina è $M = \delta\alpha\mathrm{R}^2$. Dette (x_b, y_b) le coordinate del baricentro, avremo $y_b = 0$ per ragioni di simmetria; rimane da calcolare

$$x_b = \frac{1}{M}\int\int_D \delta\, x\, dxdy = \frac{1}{\delta\alpha\mathrm{R}^2}\int\int_D \delta\, x\, dxdy = \frac{1}{\alpha\mathrm{R}^2}\int\int_D x\, dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari abbiamo

$$\int\int_D x\, dxdy = \int_0^{\mathrm{R}}\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho\cos\theta\,\rho\, d\theta d\rho = \Big(\int_0^{\mathrm{R}} \rho^2\, d\rho\Big)\Big(\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta\Big) =$$

$$\big(\frac{1}{3}\mathrm{R}^3\big)\big(2\sin\alpha\big) = \frac{2}{3}\sin\alpha\,\mathrm{R}^3\,.$$

Infine:

$$x_b = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{R}^2}\,\frac{2}{3}\sin\alpha\,\mathrm{R}^3 = \frac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\mathrm{R}\,.$$

Integrali di volume

La definizione degli integrali multipli nel caso $n > 2$ segue lo stesso percorso compiuto per gli integrali doppi.
In particolare, gli integrali *tripli* o integrali *di volume* si definiscono inizialmente per funzioni limitate $f(x, y, z)$ sui parallelepipedi

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

come limiti opportuni di somme di Riemann.

Successivamente, l'integrale di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitato, si definisce racchiudendo Ω in un parallelepipedo Q e prolungando f a zero in $Q \backslash \Omega$. Per gli integrali tripli si usano le notazioni

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz\,, \quad \int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dV\,, \quad \int\int\int_\Omega f\,.$$

Un insieme Ω è misurabile se la funzione indicatrice di Ω è integrabile. La misura o volume di Ω è per definizione

$$|\Omega| := \int\int\int_\Omega dxdydz\,.$$

Vale ancora la Proposizione:

Ω è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ è misurabile e $|\partial\Omega| = 0$.

Occorre solo fare attenzione che in $\mathbb{R}^3$ hanno misura nulla anche porzioni limitate di un piano o di una superficie regolare, nonché i grafici di funzioni continue di 2 variabili.

Continua a valere l'integrabilità delle funzioni limitate e continue su insiemi misurabili.

Osservazione

L'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f$ di una funzione *positiva* si potrebbe interpretare come 'ipervolume' di una regione dello spazio quadridimensionale delimitata dalla base (tridimensionale) Ω e dalla ipersuperficie di equazione $w = f(x, y, z)$. Questa interpretazione (geometrica) non è particolarmente utile, mentre ne esistono di più interessanti in Fisica.

Ad esempio, se $f(x, y, z)$ rappresenta la densità di massa (o di carica) nel punto (x, y, z) di un corpo esteso che occupa il dominio Ω dello spazio, allora l'integrale triplo rappresenta la massa totale (o la carica totale) del corpo.

Analogamente, con gli integrali di volume si possono calcolare baricentri e momenti di inerzia di solidi tridimensionali.

Formule di riduzione

Per gli integrali di volume esistono due tipologie di formule di riduzione.

Integrazione per fili

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D\,,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\Big\}\,,$$

dove D è un dominio regolare (unione finita di insiemi semplici) *del piano* e $g_1,\, g_2\ :\ D \to \mathbb{R}$ sono continue.

Per ogni funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vale la formula

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_D \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\Big)\, dxdy\,.$$

Il dominio Ω si dice z-semplice. In modo simile, si definiscono in $\mathbb{R}^3$ gli insiemi x-semplici, y-semplici e si ricavano le corrispondenti formula di riduzione.

Esempio

Calcolo del baricentro di una semisfera omogenea (densità $=1$) di centro nell'origine, raggio R, contenuta nel semispazio $z \geq 0$.
In questo caso abbiamo:

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in D\,,\ 0 \leq z \leq \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

con $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq \mathrm{R}^2\}$.
Dette (x_b, y_b, z_b) le coordinate del baricentro, avremo $x_b = y_b = 0$ per ragioni di simmetria; rimane da calcolare

$$z_b = \frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega z\,dxdydz = \frac{3}{2\pi\mathrm{R}^3}\int\int\int_\Omega z\,dxdydz$$

Applichiamo la formula di integrazione per fili:

$$\int\int\int_\Omega z\,dxdydz = \int\int_D\Big(\int_0^{\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2-y^2}} z\,dz\Big)\,dxdy\ =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_D(\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2)\,dxdy\,.$$

L'ultimo integrale si calcola in coordinate polari:

$$\frac{1}{2}\int\int_D (\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2)\, dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}} (\mathrm{R}^2 - \rho^2)\,\rho\, d\rho d\theta =$$

$$= \pi\Big[\mathrm{R}^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\Big]_0^{\mathrm{R}} = \frac{1}{4}\pi\,\mathrm{R}^4\,.$$

Abbiamo infine:

$$z_b = \frac{3}{2\pi\mathrm{R}^3}\,\frac{1}{4}\pi\;\mathrm{R}^4\; = \frac{3}{8}\,\mathrm{R}\,.$$

Integrazione per strati

Supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sia della forma

$$\Omega = \Big\{ (x,y,z) \,|\; h_1 \le z \le h_2\,,\ (x,y) \in \Omega_z \Big\}\,,$$

dove, per ogni $z \in [h_1, h_2]$, l'insieme Ω_z è un dominio regolare *del piano*.

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, vale la formula:

$$\int\!\!\int\!\!\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{h_1}^{h_2} \Big(\int\!\!\int_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dxdy \Big)\,dz\,.$$

Si osservi che, per un fissato $\bar{z} \in [h_1, h_2]$, l'insieme del piano in cui si calcola l'integrale doppio è uguale all'intersezione di Ω con il piano orizzontale $z = \bar{z}$.

Esempio

Consideriamo un cono circolare di altezza H, raggio R, vertice nell'origine e asse lungo l'asse z positivo:

$$\Omega = \Big\{ (x,y,z) \,|\; 0 \le z \le H\,,\ \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{\mathrm{R}}{H}\,z \Big\}\,.$$

Si verifica facilmente che lo 'strato' Ω_z (con $z \in [0, H]$) è un cerchio centrato nell'origine e di raggio $\frac{\mathrm{R}}{H}\, z$.

Se il cono rappresenta un solido omogeneo (di densità $= 1$), il suo *momento d'inerzia* rispetto all'asse z è dato dall'integrale

$$I = \int\int\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dxdydz = \int_0^H \Big(\int\int_{\Omega_z} (x^2 + y^2)\, dxdy \Big)\, dz \; =$$

$$= \int_0^H \Big(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\mathrm{R}}{H} z} \rho^3 \, d\theta d\rho \Big)\, dz \; = 2\pi \int_0^H \Big(\int_0^{\frac{\mathrm{R}}{H} z} \rho^3 \, d\rho \Big)\, dz \; =$$

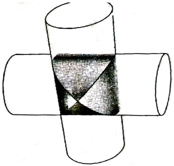
$$= \frac{\pi}{2} \, \frac{\mathrm{R}^4}{H^4} \int_0^H z^4 \, dz = \frac{\pi}{10}\, \mathrm{R}^4\, H \, .$$

Poichè la massa totale del solido è uguale al volume, $M = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 H$, abbiamo la relazione: $I = \frac{3}{10}\, M\, \mathrm{R}^2$.

Vediamo infine un'applicazione geometrica dell'integrazione per strati:

Calcolare il volume del solido Ω formato dall'intersezione dei due cilindri

$$\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le \mathrm{R}^2\right\}\cap\left\{(x,y,z)\,|\,y^2+z^2\le \mathrm{R}^2\right\}.$$



Sezioniamo il solido con un piano di equazione $y=\bar{y}$, dove $-\mathrm{R}\le\bar{y}\le\mathrm{R}$.
Si ottiene, nel piano $y=\bar{y}$, il *quadrato*

$$-\sqrt{\mathrm{R}^2-\bar{y}^2}\le x\le\sqrt{\mathrm{R}^2-\bar{y}^2}\,,\qquad -\sqrt{\mathrm{R}^2-\bar{y}^2}\le z\le\sqrt{\mathrm{R}^2-\bar{y}^2}$$

di lato $2\sqrt{\mathrm{R}^2-\bar{y}^2}$.
Denotando con Ω_y gli stessi quadrati nel piano (x,z) abbiamo:

$$|\Omega|=\int\int\int_\Omega dxdydz=\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\Big(\int\int_{\Omega_y}dxdz\Big)\,dy=$$

$$=\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}|\Omega_y|\,dy=\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}4(\mathrm{R}^2-y^2)\,dy=\frac{16}{3}\mathrm{R}^3\,.$$

Cambiamento di variabili negli integrali tripli

Il teorema sul cambiamento di variabili si estende direttamente agli integrali di volume.
Denotando con

$$\mathbf{T}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

la trasformazione, con $S \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile e con $\Omega := \mathbf{T}(S)$, vale la formula:

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_S f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,\big|\det J_{\mathbf{T}}(u,v,w)\big|\,dudvdw$$

per ogni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

Ancora si può assumere che la biunivocità di $\mathbf{T}$ e la condizione $\det J_{\mathbf{T}} \neq 0$ valgano eccetto in un insieme di misura (tridimensionale) nulla.

Esempi di trasformazioni sovente utilizzate nel calcolo degli integrali di volume sono le coordinate cilindriche (ρ, θ, z) e le coordinate sferiche (r, ϕ, θ). Inserendo nella formula del cambiamento di variabili l'espressione del determinante Jacobiano per queste trasformazioni, vediamo che l'elemento di volume (in coordinate cartesiane) $dV = dxdydz$ assume la forma:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \quad (\text{coordinate cilindriche})$$

$$dV = r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta \quad (\text{coordinate sferiche}) \, .$$

Esempio

Usiamo le coordinate sferiche per calcolare l'integrale

$$\int\int\int_{B_{\mathrm{R}}} (x^2 + y^2) \, dxdydz \, ,$$

dove B_{R} è la palla di raggio R centrata nell'origine.

Ponendo $x = r \sin\phi \cos\theta$, $y = r \sin\phi \sin\theta$, $z = r \cos\phi$ e applicando la formula si ottiene l'integrale

$$\int_0^{\mathrm{R}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2\phi)\, r^2 \sin\phi \, dr\, d\phi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\mathrm{R}} r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi = 2\pi \, \frac{\mathrm{R}^5}{5} \, \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \, \pi \, \mathrm{R}^5$$

($= \frac{2}{5} M\mathrm{R}^2$ se è una palla omogenea di densità volumetrica $\rho = 1$).

Esercizio

Calcolare il volume dell'ellissoide solido

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \qquad (a,\, b,\, c \,>\, 0)$$

mediante il cambiamento di variabili: $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.