Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Preappello di Metodi Analitici (29-1-13) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Studiare le singolarità delle seguenti funzioni di variabile complessa, e calcolarne i rispettivi residui:

(i) $f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{3\pi}{2}z\right)}{z^2+1}$.

(ii) $f(z) = \frac{\sin z}{\sin \frac{1}{z}}$;

Soluzione.

(i) Due singolarità eliminabili in $z = \pm i$;

(ii) Una singolarità *non* isolata in $z = 0$ e infiniti poli semplici in $z = \frac{1}{k\pi}$ di residui $\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{1}{k\pi}\right)$, per $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la seguente successione (definita per $n \in \mathbb{N}: \; n \geq 2$) ammette limite in $L^p(\mathbb{R})$:

$$f_n(x) = \frac{n}{\log n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

(ii) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la seguente funzione appartiene a $L^p(\mathbb{R})$:

$$g(x) = \frac{\log(|x| + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

(iii) Stabilire per quali $p \in (1, +\infty]$ la successione $h_n := g * f_n$ ammette limite in $L^p(\mathbb{R})$.

(iv) (*facoltativo*) Stabilire se gli elementi della successione h_n di cui al punto precedente appartengono a $L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(i) Con un calcolo diretto ricaviamo:

$$\|f_n\|_p^p = \frac{n^{p-1}}{\log^p n} \quad \forall p \in [1, \infty) \,, \quad \|f_n\|_\infty = \frac{n}{\log n} \,,$$

da cui $\{f_n\}$ converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $p = 1$.

(ii) La funzione g appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per $p \in (1, \infty]$ ma *non* per $p = 1$: infatti essa è limitata e il comportamento di $|g(x)|^p$ per $|x| \to \infty$ equivale a quello di

$$\frac{\log^p |x|}{|x|^p} \,.$$

(iii) Ricordiamo la disuguaglianza

$$\|h_n\|_p = \|g * f_n\|_p \leq \|g\|_p \, \|f_n\|_1 \,. \tag{1}$$

Siccome $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$ per $p \in (1, \infty]$, dalla (1) deduciamo immediatamente che anche $\{h_n\}$ converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in (1, \infty]$.

(iv) Mostriamo che h_n non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$:

$$\|h_n\|_1 = \frac{n}{\log n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x - y) \, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x = \frac{n}{\log n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{x - \frac{1}{n}}^{x} \frac{\log(|y| + 1)}{\sqrt{y^2 + 1}} \, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \,; \tag{2}$$

ora minoriamo l'integrale a membro destro della (2) nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{x - \frac{1}{n}}^{x} \frac{\log(|y| + 1)}{\sqrt{y^2 + 1}} \, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \left| \int_{x - \frac{1}{n}}^{x} \frac{\log(y + 1)}{y + 1} \, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \left[\log^2(x + 1) - \log^2 \left(x + 1 - \frac{1}{n} \right) \right] \mathrm{d}x \,. \tag{3}$$

Per $x \to +\infty$ abbiamo:

$$\log^2(x + 1) - \log^2 \left(x + 1 - \frac{1}{n} \right) = \left[\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]^2 - \left[\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \right]^2 \sim \frac{2 \log x}{nx} \,,$$

da cui l'integrale a membro destro della (3) è infinito e così anche $\|h_n\|_1$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua.

(ii) Fornire una condizione sufficiente su $u \in L^1(\mathbb{R})$ affinché la sua trasformata di Fourier sia di classe C^1.

(iii) Esibire un esempio di funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ la cui trasformata non sia di classe C^1.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) $xu(x) \in L^1(\mathbb{R})$

(iii) $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.