Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova di autovalutazione/simulazione esame di Analisi 3, 9/11/2021 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti)

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere, per la successione di funzioni di variabile reale definita da

$$f_n(x) = (1 - nx)\chi_{[0,1/n]}\,.$$

a. f_n converge puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. f_n converge puntualmente a 0 per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$

c. f_n converge a 0 in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$

d. f_n converge a 0 in $L^\infty(\mathbb{R})$

TEST 2. (8 punti)

Stabilire quali dei seguenti operatori $T : X \to Y$ sono lineari continui:

e. $X = (C^0([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = f(0)$.

f. $X = (C^0([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = f(0)$.

g. $X = (C^0([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $T(f) = \int_{-1}^1 |f|$.

h. $X = (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $Y = (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ e $T(f) = \chi_{[-1,1]} * f$

ESERCIZIO (10 punti) Calcolare il seguente integrale in campo complesso:

$$\int_{Q_4(0)} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^2 - 2i)^2}\,\mathrm{d}z\,,$$

dove $Q_l(z_0)$ è bordo del quadrato di lato l con centro (incrocio delle diagonali) nel punto z_0, percorso una volta in senso orario.

TEORIA (6 punti)

(i) Siano f e g in $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f * g$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$, e se il supporto di $f * g$ è compatto.

(ii) Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ una funzione C^∞. Mostrare che la funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita come $g(z) := f(|z|)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ se e solo se f è costante.