Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
II Appello estivo di Metodi Analitici (18-7-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{Z}$, la funzione di variabile complessa definita da

$$f(z) := \frac{e^{\frac{2}{z+1}}}{(z+1)^k}\,.$$

(i) Determinare le singolarità isolate di f e classificarle.

(ii) Calcolare i corrispondenti residui.

Soluzione.

(i) La funzione f ha un'unica singolarità, posta nel punto $z_0 = -1$. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f è dato da

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{2^n}{(z+1)^{k+n}}\,,$$

indipendentemente da quale sia il valore di $k \in \mathbb{Z}$ si ha che il punto $z_0 = -1$ è una singolarità essenziale.

(ii) Osserviamo che si ha $k + n = 1$ se e solo se $n = 1 - k$. Quindi:

- se $1 - k < 0$, ovvero se $k > 1$, il residuo di f in z_0 è nullo;
- se $1 - k \geq 0$, ovvero se $k \leq 1$ il residuo di f in z_0 è il coefficiente dello sviluppo corrispondente a $n = 1 - k$, ovvero

$$\frac{2^{1-k}}{(1-k)!}\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia V il sottoinsieme di l^2 dato dalle successioni $\{x_n\}$ tali che $\sum_{n\geq 0}(nx_n)^2 < +\infty$ e sia $T : V \to l^2$ l'operatore definito da $T(\{x_n\}) := \{nx_n\}$.

(i) Mostrare che V è un sottospazio vettoriale di l^2.

(ii) Mostrare che T è un operatore lineare.

(iii) Stabilire se T è continuo e, in caso affermativo, determinarne la norma.

Soluzione.

(i) Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ appartengono a V, significa che $\{nx_n\}$ e $\{ny_n\}$ appartengono a l^2, quindi $\{nx_n + ny_n\}$ appartiene a l^2, ovvero $\{n(x_n + y_n)\}$ appartiene a l^2, e quindi $\{x_n + y_n\} \in V$. Se $\{x_n\}$ appartiene a V è immediato che anche $\{\lambda x_n\}$ appartiene a V. Pertanto V è un sottospazio vettoriale di l^2.

(ii) T è lineare poiché $n(x_n + y_n) = nx_n + ny_n$ e $n(\lambda x_n) = \lambda(nx_n)$.

(iii) T è continuo se e solo se è possibile trovare una costante $M > 0$ tale che

$$\sum_{n\geq 0} n^2 x_n^2 \leq M \sum_{n\geq 0} x_n^2 \,.$$

Prendendo, per un fissato $k \in \mathbb{N}$, la successione

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

la disuguaglianza sopra diventa

$$k^2 \leq M \,.$$

Per l'arbitrarietà di k, deduciamo che non esiste una costante positiva M con la proprietà voluta, ovvero l'operatore lineare T non è continuo.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Sia f la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \,, \end{cases}$$

e sia $\hat{f}$ la sua trasformata di Fourier.

(i) Senza calcolare $\hat{f}$, stabilire a priori (giustificando la risposta) se $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Senza calcolare $\hat{f}$, stabilire a priori (giustificando la risposta) se $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

(iii) Senza calcolare $\hat{f}$, stabilire a priori (giustificando la risposta) per quali $k \in \mathbb{N}$ si ha $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$.

(iv) Calcolare $\hat{f}$.

Soluzione.

(i) Si ha $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$, poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Si ha $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, poiché $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(iii) Si ha $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, poiché $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(iv) Si ha

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ix(1-\xi)} - e^{-ix(1+\xi)} \right) dx = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(1-\xi)} e^{ix(1-\xi)} + \frac{1}{i(1+\xi)} e^{-ix(1+\xi)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{i(1-\xi)} e^{-i\pi\xi} + \frac{1}{i(1+\xi)} e^{i\pi\xi} + \frac{1}{i(1-\xi)} e^{i\pi\xi} - \frac{1}{i(1+\xi)} e^{-i\pi\xi} \right] \\
&= \frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i} 2i = 2i \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi^2 - 1}
\end{aligned}$$

(si osservi che il calcolo sopra è valido per $\xi \neq \pm 1$, ma che l'espressione ottenuta per $\hat{f}$ continua ad essere valida anche per $\xi = \pm 1$ per prolungamento continuo).