1.

Trovare tutti i punti critici della funzione di tre variabili :

$$f(x,y,z) = (x^2-1)(y^2-1) - 2z^2\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

e studiarne la natura.

Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $f(x,y,z) = 0$ nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2.

Trovare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Descrivere le traiettorie nel piano xy.

3.

Sia Σ la superficie di equazione

$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + uv\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ \ u^2+v^2 \leq 1\,.$$

a) Calcolare l'area di Σ.

b) Identificare il bordo di Σ, parametrizzarlo come curva regolare e scrivere la formula per il calcolo della lunghezza (non richiesto il calcolo).

4.

i) Rappresentare l'integrale

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx$$

come somma di una serie numerica. Scrivere i primi quattro termini della serie. (Suggerimento: utilizzare la serie di MacLaurin dell'esponenziale e il teorema di integrazione per serie, verificandone le ipotesi).

ii) Trovare tutti i coefficienti di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = 1 + 2\sin x + \sin(2x) - \sin^2 x\,.$$

Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ utilizzando l'identità di Parseval.

SOLUZIONI

1.

Vettore gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = 2x(y^2-1)\,\mathbf{i} + 2y(x^2-1)\,\mathbf{j} - 4z\,\mathbf{k}$$

Annullando il gradiente, si trovano 5 punti critici :

$$P_0(0,0,0)\,,\quad P_1(1,1,0)\,,\quad P_2(-1,1,0)\,,\quad P_3(-1,-1,0)\,,\quad P_4(1,-1,0).$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(y^2-1) & 4xy & 0 \\ 4xy & 2(x^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Data la simmetria della funzione, è sufficiente considerare la matrice Hessiana nell'origine P_0 e in P_1.

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nell'origine H_f è diagonale con autovalori negativi, per cui abbiamo un massimo locale (stretto).
Cerchiamo gli autovalori di H_f in P_1:

$$\det(H_f(1,1,0) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-4 \end{pmatrix} = -(\lambda+4)(\lambda^2-16)\,.$$

Annullando il determinante, troviamo gli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = 4$. Dunque P_1 è un colle e lo stesso vale per gli altri tre punti P_2, P_3, P_4.
Alla stessa conclusione si poteva arrivare osservando che $f(P_i) = 0$ per $i = 1,2,3,4$, e studiando il segno di f in un intorno di questi punti.

Il punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, appartiene all'insieme di livello $f = 0$; il gradiente di f in questo punto vale

$$\nabla f\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 2\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{j} - 2\sqrt{2}\,\mathbf{k} = 2\sqrt{2}\big(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}\big)\,.$$

Equazione del piano tangente:

$$(x-\sqrt{2}) + (y-\sqrt{2}) - (z - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0\,,$$

$$x + y - z - 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0\,,$$

$$x + y - z - \frac{3}{2}\sqrt{2} = 0\,.$$

2.

La prima equazione non contiene la funzione incognita y; l'integrale generale è

$$x(t) = C_1 e^t.$$

Sostituendo nella seconda equazione, otteniamo

$$y' = -y + 2C_1 e^t,$$

che è un'equazione *non* omogenea del primo ordine per la y. Applicando la formula risolutiva, si ottiene

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

L'integrale generale del sistema si scrive dunque

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

I due vettori in questa espressione sono autovettori della matrice dei coefficienti del sistema, corrispondenti rispettivamente agli autovalori 1 e -1.

Le traiettorie del sistema si possono ricavare eliminando t nelle due equazioni che esprimono l'integrale generale, oppure risolvendo l'equazione differenziale delle traiettorie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + 2, \qquad x \neq 0,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine. Integrando, si ricava la famiglia di curve

$$y = x + C\frac{1}{x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

a cui occorre aggiungere la retta $x = 0$, che include tutte le traiettorie nel caso $C_1 = 0$ (compresa l'origine, soluzione di equilibrio) ma che non si può rappresentare come grafico di una funzione di x.

3.

a)

$$\mathbf{r}_u(u,v) = \mathbf{i} + v\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{r}_v(u,v) = u\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,,$$

$$\left(\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\right)(u,v) = v\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + u\,\mathbf{k}\,.$$

$$dS = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv = \sqrt{u^2+v^2+1}\,dudv$$

Area:

$$\int\int_\Sigma dS = \int\int_{u^2+v^2\le 1} \sqrt{u^2+v^2+1}\,dudv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\rho^2+1}\,\rho\,d\rho d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(\rho^2+1\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\,.$$

b) Poiché la funzione $\mathbf{r}$ è biunivoca tra il cerchio *chiuso* nel piano (u,v) e la sua immagine Σ, il bordo di Σ è l'immagine dei punti della frontiera del cerchio, cioè della circonferenza di equazione $u^2+v^2=1$.
Ponendo allora $u=\cos t$, $v=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, abbiamo la parametrizzazione:

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(\cos t,\sin t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\sin t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$$

$$= \cos t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$

Si tratta di una curva regolare con

$$\tilde{\mathbf{r}}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos(2t)\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$$

$$|\tilde{\mathbf{r}}'(t)| = \sqrt{1+\cos^2(2t)}\,.$$

La lunghezza è data dalla formula

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2(2t)}\,dt$$

4.

i)

Dallo sviluppo dell'esponenziale si ottiene:

$$e^{-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}\, x^{2n}$$

La serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Integrando termine a termine nell'intervallo $[0,1]$ si ottiene

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}\, \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{4}{21} + ...$$

ii) La funzione è periodica di periodo 2π. Applicando note identità trigonometriche, possiamo scrivere

$$f(x) = 1 + 2\sin x + \sin(2x) + \frac{\cos(2x) - 1}{2}\,,$$

cioè

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\sin x + \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Dunque, i coefficienti di Fourier di f *diversi da zero* sono

$$a_0 = 1; \qquad b_1 = 2; \qquad b_2 = 1; \qquad a_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Dall'identità di Parseval si ricava:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi(1/2 + 4 + 1 + 1/4) = \frac{23}{4}\pi\,.$$