Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2015/2016
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Preappello di Metodi Analitici (4-2-16) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, calcolare

$$I_n := i \int_0^{2\pi} [2\cos t]^{2n} \, dt \, .$$

Soluzione.

Si ha:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{[e^{it} + e^{-it}]^{2n}}{e^{it}} ie^{it} \, dt \, .$$

Pertanto, considerando la curva γ parametrizzata da $r(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, si ottiene

$$I_n = \int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z} \, dz \, .$$

Utilizzando il binomio di Newton, si ha

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k}$$

e quindi

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k+1} .$$

Pertanto

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \int_\gamma \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k+1} dz \, .$$

Poiché (si vedano le slides del corso) $\int_\gamma \frac{1}{z^m} \, dz$ è uguale a 0 se $m \neq 1$ e a $2\pi i$ se $m = 1$, si ha che $\int_\gamma \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k+1} dz$ è uguale da 0 se $k \neq n$, e a $2\pi i$ se $k = n$. In conclusione,

$$I_n = 2\pi i \binom{2n}{n} = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2} \, .$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Fornire la definizione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali normati, e di norma per un tale operatore.
(ii) Sia $T : L^2([0,1]) \to L^\infty([0,1])$ l'operatore lineare definito da

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

Stabilire se T è limitato e in caso affermativo calcolarne la norma.
(iii) Dimostrare che, se T è definito come al punto (ii), vale la disuguaglianza

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq |x-y|^{1/2} \|f\|_{L^2(0,1)}\,.$$

Soluzione.
(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.
(ii) Per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|Tf(x)| = \Big| \int_0^x f(t)\, dt \Big| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \Big\{ \int_0^1 |f(t)|^2\, dt \Big\}^{1/2}.$$

Pertanto T è continuo e $\|T\| \leq 1$.
Inoltre, prendendo la funzione $f(x) \equiv 1$, si ha $Tf(x) = x$. Quindi

$$\|f\|_2 = 1 \quad \text{ e } \quad \|Tf\|_\infty = 1\,,$$

pertanto $\|T\| = 1$.
(iii) Si ha

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \Big| \int_y^x f(t)\, dt \Big| \leq \int_y^x |f(t)|\, dt = \int_0^1 \chi_{(x,y)}(t) |f(t)|\, dt \leq \|\chi_{(x,y)}\|_{L^2} \|f\|_{L^2} = |y-x|^{1/2} \|f\|_{L^2}$$

(dove per ottenere l'ultima disuguaglianza si è applicato la disuguaglianza di Hölder).

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Stabilire se esiste una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione

$$u''(x) + 2u(x) + u(x) = p(x)e^{-x^2} \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\,,$$

dove $p(x)$ è un polinomio assegnato, e in caso affermativo determinare una formula risolutiva che permetta di ricavare u in termini di p.

Soluzione.
Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione, supponendo che $u, u' \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$.
Posto per comodità $f(x) = p(x)e^{-x^2}$, osserviamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$ (per qualsiasi polinomio p), e quindi possiamo trasformare f. Otteniamo

$$-\xi^2\hat{u} + 2i\xi\hat{u} + \hat{u} = \hat{f}\,,$$

da cui si ricava immediatamente che che $\hat{u}$ è data da

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,.$$

Antitrasformando, si ottiene

$$u(x) = -\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\Big) * f\,.$$

Calcoliamo $v(x) := \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{\xi^2-2i\xi-1}\Big)$. Si ha:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,d\xi\,.$$

Poniamo

$$g(z) := \frac{e^{ixz}}{z^2 - 2iz - 1} = \frac{e^{ixz}}{(z-i)^2}$$

e distinguiamo i casi $x > 0$ e $x \le 0$.

Caso $x > 0$. Osserviamo che la funzione $g(z)$ ha un polo doppio in $z = i$ (che cade nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$). Pertanto applicando il Lemma di Jordan e il Teorema dei Residui, si ottiene

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,d\xi = 2\pi i\mathrm{Res}(g(z), i)\,.$$

Trattandosi di un polo doppio, la formula per il calcolo del residuo fornisce immediatamente

$$\mathrm{Res}(f(z), i) = \lim_{z\to i} D(e^{ixz}) = \lim_{z\to i}(ixe^{ixz}) = ixe^{-x}\,,$$

e quindi

$$v(x) = -2\pi xe^{-x}\,.$$

Caso $x \le 0$. Poiché la funzione $g(z)$ non presenta singolarità nel semipiano semipiano $\mathrm{Im}(z) \le 0$, applicando il Lemma di Jordan e il Teorema dei Residui, si ottiene $v(x) = 0$.

Pertanto abbiamo ottenuto

$$v(x) = -xe^{-x}H(x)\,, \qquad \text{con } H(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x)\,,$$

da cui

$$u(x) = xe^{-x}H(x) * f(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(y)(x-y)e^{-(x-y)}\chi_{(0,+\infty)}(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)e^{-(x-y)}\,dy\,.$$

Osserviamo che la u cosí trovata soddisfa le condizioni imposte all'inizio $u, u' \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$.
Infatti $xe^{-x}H(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, dunque $u \in L^1(\mathbb{R})$ in quanto è il prodotto di convoluzione di due funzioni di $L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha anche $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, e $u^{(k)} = xe^{-x}H(x) * f^{(k)}(x)$. Dato che tutte le derivate di f appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, in particolare le funzioni u' e u'' sono in $L^1(\mathbb{R})$ in quanto prodotti di convoluzione tra funzioni di $L^1(\mathbb{R})$.
In conclusione possiamo affermare che la formula

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)e^{-y^2}(x-y)e^{-(x-y)}\,dy$$

permette di ricavare una soluzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione assegnata in termini del polinomio p.