Integrali di linea di campi vettoriali

Lavoro e circolazione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso e sia $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(D)$ che interpretiamo come campo vettoriale (stazionario) definito in D.

Consideriamo una curva regolare di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ e sostegno $\gamma \subset D$.

Definizione (Lavoro di un campo vettoriale)

Si definisce *integrale di linea (o lavoro) di* $\mathbf{F}$ *lungo* γ l'espressione

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\, \mathbf{i} + F_2(x, y, z)\, \mathbf{j} + F_3(x, y, z)\, \mathbf{k}\,,$$

e $\mathbf{r}(t) = x(t)\, \mathbf{i} + y(t)\, \mathbf{j} + z(t)\, \mathbf{k}$, si scrive per esteso:

$$\int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \Big[F_1\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t)$$
$$+F_2\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) + F_3\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t)\Big] dt$$

Se γ è una curva semplice e chiusa, l'integrale prende il nome di *circolazione* del campo **F** lungo la linea chiusa γ e si denota con il simbolo $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
Se **F** rappresenta un campo di forze, si può interpretare l'espressione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)\, ds\,,$$

come il *lavoro* compiuto dal campo su un punto che si sposta lungo la curva (a partire da $\mathbf{r}(t)$ nella direzione e verso di $\mathbf{T}(t)$) percorrendo una distanza 'infinitesima' ds.

Esempi

Calcoliamo il lavoro del campo $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}\,,$ lungo la linea γ di equazione $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k},\ t \in [-\pi, \pi]$.

Abbiamo:

$\mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} - 2t\cos t\,\mathbf{k}\,,\ \mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, per cui

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 - 4t\cos t\big)\, dt = 2\pi\,.$$

Dato il campo vettoriale (piano) $\mathbf{F}(x,y) = xy\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, calcolare $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dove

$$\gamma_1 \,:\, \mathbf{r}_1(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}\,, \quad t\in[0,1]\,; \qquad \gamma_2 \,:\, \mathbf{r}_2(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}\,, \quad t\in[0,1]\,.$$

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j})\,dt = \int_0^1 (t^2+t)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\,.$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j})\,dt = \int_0^1 3t^3\,dt = \frac{3}{4}\,.$$

Calcolare la circolazione del campo

$$\mathbf{H}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}\,,$$

lungo una circonferenza di equazione $x(t) = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

$$\oint_\gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}\big[(-R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t)(R\cos t)\big]\,dt = 2\pi\,.$$

Il linguaggio delle forme differenziali

L'espressione formale

$$\omega := \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz\,,$$

dove $\mathbf{F} = F_1\, \mathbf{i} + F_2\, \mathbf{j} + F_3\, \mathbf{k} \in C^1(D)$ e $d\mathbf{r} = dx\, \mathbf{i} + dy\, \mathbf{j} + dz\, \mathbf{k}\,,$
prende il nome di *forma differenziale* (o 1-forma) di coefficienti F_1, F_2, F_3.

Nella teoria delle forme differenziali, il concetto di lavoro del campo $\mathbf{F}$ si traduce nella definizione equivalente di *integrale della forma* ω *lungo* γ :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,.$$

Proprietà che seguono dalla definizione:

- $\int_\gamma (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2,\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ (linearità);
- $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$ (additività rispetto al cammino di integrazione);
- $\int_\gamma \omega$ non cambia per parametrizzazioni equivalenti di γ e cambia di segno per parametrizzazioni opposte (l'integrale *dipende dall'orientazione di* γ).

Campi conservativi e forme esatte

Definizione

Un campo vettoriale $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$ si dice *conservativo in D* se esiste una funzione scalare $U \in \mathcal{C}^2(D)$, detta *potenziale*, tale che $\nabla U = \mathbf{F}$ in D, cioè

$$\partial_x U = F_1\,, \quad \partial_y U = F_2\,, \quad \partial_z U = F_3 \qquad \text{in } D\,.$$

Nel linguaggio delle forme differenziali, la forma $\omega = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si dice *esatta* se esiste $U \in \mathcal{C}^2(D)$ tale che

$$dU = \omega \qquad \text{in } D\,,$$

ovvero se ω è il *differenziale della funzione* $U : D \to \mathbb{R}$.

L'equivalenza delle due definizioni segue subito ricordando che per ogni funzione differenziabile U

$$dU = \partial_x U\, dx + \partial_y U\, dy + \partial_z U\, dz\,,$$

e dunque

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = \partial_x U\,,\ F_2 = \partial_y U\,,\ F_3 = \partial_z U\,.$$

Se U è un potenziale, anche $U + c$ lo è per ogni arbitraria costante c; viceversa, essendo D connesso, ogni altro potenziale differisce da U per una costante.

La funzione $E_p := -U$, si dice *energia potenziale* associata al campo. Il nome campo conservativo deriva dalla *legge di conservazione dell'energia*, che vale per una particella di massa m in moto sotto l'azione del campo $\mathbf{F}$ secondo l'equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Definendo l'energia cinetica $E_c = \frac{m}{2}|\mathbf{r}'(t)|^2$ e l'*energia totale*

$$E_T = E_c + E_p = \frac{m}{2}|\mathbf{r}'(t)|^2 - U(\mathbf{r}(t)) \,,$$

abbiamo in ogni istante t del moto

$$\frac{d}{dt}E_T = m\,\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) - \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) =$$

$$= \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$.

Esempio.

Ogni campo centrale a simmetria sferica

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(r)\,\mathbf{r} = f(r)\left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\right),$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $f \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$, è conservativo.
Infatti, definendo

$$U(r) := \int r\, f(r)\, dr\,,$$

abbiamo

$$\nabla U = U'(r)\nabla r = r\, f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\,\mathbf{r} = \mathbf{F}\,.$$

In particolare, per i campi del tipo

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\,\mathbf{r} = -\frac{k}{r^3}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\,,$$

la funzione potenziale che si annulla all'infinito è

$$U(r) = \frac{k}{r}\,.$$

L'integrale di linea di un campo conservativo è indipendente dal cammino.

Precisamente, se **F** è conservativo in D (aperto connesso) con funzione potenziale U, allora per ogni curva regolare $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, tale che $\gamma \subset D$:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U\big(\mathbf{r}(b)\big) - U\big(\mathbf{r}(a)\big) \,.$$

In modo equivalente, si può dire che se ω è una forma esatta e se $dU = \omega$, allora $\int_\gamma \omega = U\big(\mathbf{r}(b)\big) - U\big(\mathbf{r}(a)\big)$.

Dimostrazione:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \nabla U\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U\big(\mathbf{r}(t)\big)\, dt = U\big(\mathbf{r}(b)\big) - U\big(\mathbf{r}(a)\big) \,,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal teorema fondamentale del Calcolo. $\diamond$

Se γ è una linea chiusa $\big(\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)\big)$ abbiamo in particolare:

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \,.$$

Esempio

Il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x+y)\,\mathbf{i} + (x+2y)\,\mathbf{j}\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,,$$

è conservativo poiché $\mathbf{F} = \nabla U$, dove

$$U(x,y) = x^2 + xy + y^2\,.$$

Calcolare il lavoro del campo lungo le linee γ_1 e γ_2 di pag.4 e verificare che

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(1,1) - U(0,0) = 3.$$

Si pone ora il problema di come riconoscere se un dato campo è conservativo (o se una forma è esatta) e, in caso affermativo, come calcolarne un potenziale.

Riconoscimento dei campi conservativi.

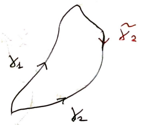
<u>Teorema</u>

Sia $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) $\mathbf{F}$ è conservativo;
b) $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ per *ogni* curva chiusa regolare a tratti $\gamma \subset D$;
c) $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ per *ogni coppia* di curva regolari a tratti $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale (e per il resto disgiunte).

Dimostrazione:

Dimostreremo che $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$ e $c) \Rightarrow a)$.
La prima implicazione è già stata dimostrata a pag. 9. Supponiamo allora che valga *b*) e consideriamo due curve γ_1, γ_2 come in *c*). Denotando con $\tilde{\gamma}_2$ la curva *opposta* a γ_2, si verifica facilmente che *l'unione* $\gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ è una curva chiusa e regolare a tratti.



Perciò:

$$\oint_{\gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,.$$

Per le proprietà degli integrali di linea abbiamo allora

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,,$$

da cui segue c).

Supponiamo infine che valga c) e fissiamo un punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$.
Sia γ una qualsiasi curva regolare (a tratti) che ha P_0 come punto iniziale e $P(x, y, z) \in D$ come punto finale.
Per ipotesi, l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dipende solo dagli estremi per cui, *al variare di* P, definisce una funzione delle coordinate (x, y, z):

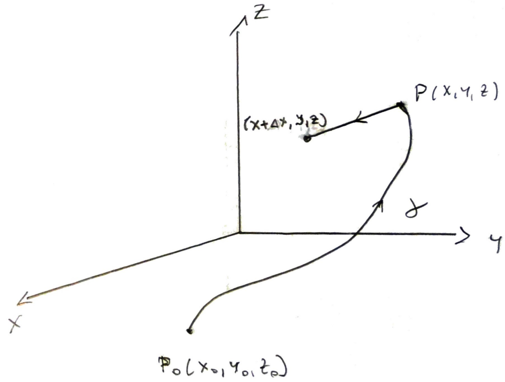
$$U(x, y, z) := \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

Dimostreremo che $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

Sarà sufficiente mostrare che $\partial_x U = F_1$, le altre relazioni si ricavano in modo simile.
Consideriamo allora un incremento Δx e percorriamo il segmento:

$$\mathbf{r}(t) = (x + t\,\Delta x)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,, \qquad t \in [0,1]\,,$$

che unisce il punto (x, y, z) a $(x + \Delta x, y, z)$.



Poiché $\mathbf{r}'(t) = \Delta x\, \mathbf{i}$, avremo lungo il segmento:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_1(\mathbf{r}(t))\Delta x\, dt\,.$$

Possiamo allora calcolare:

$$U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z) = \int_0^1 F_1(x+t\Delta x, y, z)\, \Delta x\, dt = \int_x^{x+\Delta x} F_1(\tau, y, z)\, d\tau$$

(avendo sostituito $\tau = x + t\,\Delta x$, $d\tau = \Delta x\, dt$).

Dividendo per Δx e facendo il limite per $\Delta x \to 0$, si ottiene

$$\partial_x U(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} F_1(\tau, y, z)\, d\tau\ = F_1(x, y, z)\,.$$

L'ultimo passaggio segue dal teorema del valor medio (per gli integrali di funzioni di una variabile) e dalla continuità di F_1. $\diamond$

Il teorema precedente *caratterizza* i campi conservativi, ma le sue ipotesi non sono facili da verificare.
Esiste una condizione (necessaria) di carattere *locale* che si esprime in termini di un operatore differenziale detto **rotore** di un campo vettoriale.

<u>Definizione</u>

Se $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$, si definisce rotore di $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \big(\partial_y F_3 - \partial_z F_2\big)\, \mathbf{i} + \big(\partial_z F_1 - \partial_x F_3\big)\, \mathbf{j} + \big(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\big)\, \mathbf{k}\,.$$

Nel caso di un campo piano $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\, \mathbf{i} + F_2(x, y)\, \mathbf{j}$, risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \big(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\big)\, \mathbf{k}\,.$$

Se $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in D, si dice che il campo è *irrotazionale*.

Proposizione

Se **F** è conservativo in D, allora $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in D.

Dimostrazione:

Se esiste $U \in \mathcal{C}^2(D)$ tale che $\mathbf{F} = \nabla U$, allora

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathrm{rot}\,\nabla U$$

$$= \big(\partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U\big)\,\mathbf{i} + \big(\partial_z \partial_x U - \partial_x \partial_z U\big)\,\mathbf{j} + \big(\partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U\big)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}\,,$$

per il teorema di Schwarz. $\diamond$

Dunque, se un campo è conservativo allora è irrotazionale, ma (in generale) *non vale il viceversa*. Per esempio, il campo

$$\mathbf{H}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}\,,$$

è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ poiché

$$\partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Tuttavia, la sua circolazione lungo circonferenze centrate nell'origine è diversa da zero (vedi a pag. 4) e dunque tale campo *non* è conservativo in $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ per il precedente teorema.

Perchè la condizione $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ *non è sufficiente* a garantire che il campo **F** sia conservativo? Tutto dipende dalle *proprietà topologiche* dell'insieme *D* in cui il campo è irrotazionale.
La nozione cruciale è quella di insieme *semplicemente connesso*, che ci limitiamo a definire in modo intuitivo.

Definizione

Un aperto connesso *D* si dice semplicemente connesso se ogni curva semplice chiusa contenuta in *D* può essere ridotta a un punto mediante una deformazione continua senza mai uscire da *D*. $\diamond$

Esempi

Il piano $\mathbb{R}^2$, un semipiano, un cerchio e tutti gli insiemi che si ottengono da questi per deformazioni continue sono semplicemente connessi.
Il piano privato di un punto o di un segmento, una corona circolare, sono connessi ma *non* semplicemente connessi.

Lo spazio $\mathbb{R}^3$, una sfera, lo spazio o una sfera privati di un punto sono semplicemente connessi.
Lo spazio privato di una retta, una sfera privata di un diametro, un toro, *non* sono semplicemente connessi.

Teorema

Sia $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$, con D semplicemente connesso. Allora, se $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in D, $\mathbf{F}$ è conservativo in D.

Osservazioni

i) Poiché una sfera è semplicemente connessa, il teorema implica che in un intorno di ogni punto di un aperto un campo irrotazionale ammette un potenziale.
Si dice che un campo irrotazionale è *localmente conservativo*.

ii) Il teorema *non esclude* che un campo irrotazionale in un insieme non semplicemente connesso possa comunque essere conservativo.
Per esempio, il campo

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}\,,$$

è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, che non è semplicemente connesso; quindi le ipotesi del teorema non valgono in questo caso.
Tuttavia $\mathbf{E}$ è conservativo (essendo un campo centrale) ed un suo potenziale è

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\,.$$

Costruzione della funzione potenziale

Una volta verificato che un campo è conservativo, si pone il problema di determinare un potenziale.
Descriviamo due possibili tecniche con un esempio semplice:
il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = (4x+2y)\,\mathbf{i} + (2x-6y)\,\mathbf{j}\,,$$

è conservativo in $\mathbb{R}^2$ poiché $\partial_x F_2(x,y) = \partial_y F_1(x,y) = 2$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Esiste quindi $U(x,y)$ tale che $\nabla U = \mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\partial_x U(x,y) = 4x+2y \qquad \text{e} \qquad \partial_y U(x,y) = 2x-6y\,.$$

Integrando rispetto a x la prima equazione si trova

$$U(x,y) = 2x^2 + 2xy + g(y)\,,$$

dove g è una *funzione* (derivabile) arbitraria.
Inserendo questa espressione nella seconda equazione abbiamo

$$2x + g'(y) = 2x - 6y\,,$$

da cui si ottiene $g(y) = -3y^2 + c$.

Il generico potenziale si scrive allora

$$U(x, y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + c\,.$$

In alternativa, si sceglie un punto iniziale, per esempio l'origine, e si valuta la differenza $U(x, y) - U(0, 0)$ calcolando il lavoro del campo lungo una linea spezzata, unione di segmenti paraleli agli assi, che collega il punto iniziale con il punto finale (x, y).

Naturalmente, il risultato non dipenderà dalla linea scelta. Percorrendo prima il segmento che unisce l'origine al punto $(x, 0)$ e poi un segmento verticale fino al punto (x, y), si ottiene

$$\begin{aligned} U(x, y) - U(0, 0) &= \int_0^x 4t\,dt + \int_0^y (2x - 6t)\,dt \\ &= \left[2t^2\right]_0^x + \left[2xt - 3t^2\right]_0^y = 2x^2 + 2xy - 3y^2\,. \end{aligned}$$

Le stesse tecniche si estendono in modo naturale ai campi in $\mathbb{R}^3$.