Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2009/2010
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Metodi Analitici (1-7-10) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Discutere le relazioni esistenti tra le seguenti affermazioni:

1. f è olomorfa in Ω;
2. f ammette primitive in ogni palla contenuta in Ω;
3. f ammette primitive in Ω.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

II. ANALISI FUNZIONALE

Sia

$$f(x) := \frac{x^2}{x^4+1}\,\sin x\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

Stabilire, motivando la risposta, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

1. $f \in L^2(\mathbb{R})$
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. $f \in AC(\mathbb{R})$
4. $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$
5. $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$
6. $(\widehat{f})' \in L^2(\mathbb{R})$
7. $f * f \in L^1(\mathbb{R})$
8. $f * \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

1. vero perché sui compatti f è integrabile in quanto continua, e all'infinito si comporta come x^{-2}

2. falso perché ad esempio $x^5 f$ non è limitata

3. vero perché f è la primitiva di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ (come si verifica immediatamente dal calcolo della derivata)

4. vero perché $f \in L^1(\mathbb{R})$

5. vero perché $f \in L^2(\mathbb{R})$

6. vero perché $xf \in L^2(\mathbb{R})$ (in quanto all'infinito si comporta come x^{-1})

7. vero perché $f \in L^1(\mathbb{R})$

8. vero perché $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Calcolare, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$I(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2+2)^2} e^{i(2-\xi^2)x}\, dx \ .$$

Soluzione. Posto

$$f(x) := \frac{x}{(x^2+2)^2} \ ,$$

si ha $I(\xi) = \widehat{f}(\xi^2 - 2)$.

Poiché

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2+2}\Big) \ ,$$

si ha

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{i\xi}{2}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{x^2+2}\Big) = -\frac{i\xi}{4}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\Big) = -\frac{i\pi\xi}{4}\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}|\xi|} \ .$$

Pertanto

$$I(\xi) = -\frac{i\pi(\xi^2-2)}{4}\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}|\xi^2-2|} \ .$$