| Analisi matematica 2 | | 20/09/2013 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

**1.**

a) Trovare i punti critici della funzione :

$$g(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y} + 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e studiarne la natura. Dire se esistono estremi globali.

b) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 con centro nell'origine e con resto nella forma di Peano per la funzione $g$.

c) Trovare quante funzioni $x = h(y)$ di classe $\mathcal{C}^1$ sono definite implicitamente dall'equazione

$$g(x,y) = 0$$

in un intorno di $y = 0$; calcolarne le derivate nell'origine.

**2.** Discutere, al variare del parametro reale $\kappa$, la risolubilità del problema ai limiti:

$$\begin{cases} y''(x) + \kappa\, y(x) = 1, & x \in (0, \pi) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

**3.** Calcolare il volume e la superficie *totale* del solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2\}$$

**4.** Calcolare, facendo uso del Teorema di Stokes, la circolazione del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = zx^2\,\mathbf{i} + zy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

lungo la curva $\Gamma$ di intersezione del *cilindro* di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $z = x - y + 5$. La curva è orientata in modo che la sua proiezione sul piano $xy$ sia percorsa in senso antiorario.

SOLUZIONI

**1.**

a) La funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$; calcolando il gradiente

$$\nabla g(x,y) = 3(e^y - x^2)\,\mathbf{i} + 3e^y(x - e^{2y})\,\mathbf{j}$$

vediamo che si annulla nei punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} e^y - x^2 = 0 \\ x - e^{2y} = 0 \end{cases}$$

Si trova che *l'unico punto critico* è $P(1,0)$, dove la funzione vale: $g(1,0) = 2$.
Derivate seconde:

$$g_{xx}(x,y) = -6x \qquad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = 3e^y \qquad g_{yy}(x,y) = 3e^y(x - 3e^{2y})$$

La matrice Hessiana in $P$ è allora:

$$H_g(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che $P$ è un punto di *massimo locale*. Non esistono estremi globali in quanto la funzione non è limitata superiormente, né inferiormente. Infatti, considerando i valori della funzione sull'asse $x$, abbiamo $g(x,0) = 3x - x^3$, per cui $\lim_{x\to+\infty} g(x,0) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x,0) = +\infty$.

b) Nella formula di Taylor con centro nell'origine, possiamo identificare l'incremento $(h,k)$ con il punto $(x,y)$ dell'intorno di $(0,0)$ in cui si valuta la funzione. Lo sviluppo di Taylor si trova calcolando i differenziali primo e secondo di $f$. In alternativa, si può usare lo sviluppo degli esponenziali in $y$ e ricavare

$$g(x,y) = 3x - 3y + 3xy - \frac{9}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

c) L'equazione $g(x,0) = 0$ si scrive $3x - x^3 = 0$, che ha le tre soluzioni $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$. La funzione $g$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e soddisfa

$$g_x(0,0) = 3; \qquad g_x(\pm\sqrt{3},0) = -6$$

Per il teorema della funzione implicita, in un intorno di $y = 0$ sono definite le funzioni $h_0(y)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$, tali che

$$h_0(0) = 0, \qquad h_0'(0) = -\frac{g_y(0,0)}{g_x(0,0)} = -\frac{-3}{3} = 1$$

$$h_1(0) = \sqrt{3}, \qquad h_1'(0) = -\frac{g_y(\sqrt{3},0)}{g_x(\sqrt{3},0)} = -\frac{3(\sqrt{3}-1)}{-6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$h_2(0) = -\sqrt{3}, \qquad h_2'(0) = -\frac{g_y(-\sqrt{3},0)}{g_x(-\sqrt{3},0)} = -\frac{-3(\sqrt{3}+1)}{-6} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

**2.** Cerchiamo eventuali autovalori e autofunzioni del problema omogeneo: l'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è

$$\lambda^2 + \kappa = 0$$

Per $\kappa < 0$ ci sono due soluzioni reali distinte $\lambda = \pm\sqrt{-\kappa}$; per $\kappa = 0$ abbiamo la soluzione doppia $\lambda = 0$; per $\kappa > 0$, ci sono due radici complesse coniugate $\lambda = \pm i\sqrt{\kappa}$. Le corrispondenti soluzioni dell'equazione sono

$$\begin{array}{ll} C_1 e^{\sqrt{-\kappa}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\kappa}\,x}, & \text{se } \kappa < 0; \\ C_1 + C_2 x, & \text{se } \kappa = 0; \\ C_1 \cos(\sqrt{\kappa}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\kappa}\,x), & \text{se } \kappa > 0. \end{array}$$

Imponendo le condizioni ai limiti, si vede che per $\kappa \neq n^2$, $n = 0, 1, 2, ...$ si ottiene $C_1 = C_2 = 0$; in questi casi, il problema omogeneo ammette solo la soluzione nulla. Se invece

$$\kappa = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

si ottengono le soluzioni

$$C \cos(nx), \qquad C \in \mathbb{R}$$

dove $C$ è arbitraria. Il problema omogeneo ha dunque gli *autovalori* $n^2$ e le *autofunzioni* $C\cos(nx)$ per $n = 0, 1, 2, ...$; si osservi che ogni costante $C$ è autofunzione corrispondente all'autovalore $n = 0$. Il problema ai limiti *non* omogeneo avrà quindi un'unica soluzione se e solo se $\kappa \neq n^2$. Per $k \neq 0$, una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\psi(x) = \frac{1}{k}$$

mentre per $k = 0$ si trova

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}x^2$$

L'integrale generale dell'equazione completa è dunque

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\kappa}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\kappa}\,x} + \frac{1}{\kappa}, \qquad \text{se } \kappa < 0$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{se } \kappa = 0$$

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\kappa}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\kappa}\,x) + \frac{1}{\kappa}, \qquad \text{se } \kappa > 0$$

Per $\kappa \neq n^2$, $n = 0, 1, 2, ..$ imponendo le condizioni ai limiti $y'(0) = y'(\pi) = 0$ si determinano univocamente le costanti:

$$C_1 = C_2 = 0$$

Quindi, in questi casi l'unica soluzione del problema ai limiti è la funzione costante

$$y(x) = \frac{1}{\kappa}$$

Per $\kappa = n^2$, $n = 1, 2, 3, ...$, abbiamo infinite soluzioni della forma

$$y(x) = C\cos(nx) + \frac{1}{n^2}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Per $k = 0$ nessun valore delle costanti $C_1$, $C_2$ soddisfa le condizioni. In questo caso, il problema ai limiti non ha soluzioni.

**3.** *Calcolo del volume:* Il dominio $\Omega$ è semplice rispetto all'asse $z$. Applicando le formule di riduzione all'integrale

$$\int\int\int_{\Omega} dxdydz$$

si ottiene

$$|\Omega| = \int\int_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy \int_{x^2/4+y^2/4-1}^{5-x^2-y^2} dz = \int_{x^2+y^2\leq 4} \Big(6 - \frac{5}{4}(x^2+y^2)\Big) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \Big(6 - \frac{5}{4}\rho^2\Big)\rho\,d\rho = 2\pi\Big[3\rho^2 - \frac{5}{16}\rho^4\Big]_0^2 = 14\pi$$

*Calcolo della superficie:* la superficie totale è l'unione di 3 superfici liscie: la superficie cilindrica $\Sigma_L$ di equazioni $x^2+y^2=4$, $0\leq z\leq 1$ e le due superfici cartesiane $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, rispettivamente di equazioni

$$z = 5 - x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 1, \qquad \text{con} \quad x^2+y^2\leq 4$$

Dalla geometria elementare segue $|\Sigma_L| = 4\pi$. Per le superfici cartesiane abbiamo

$$|\Sigma_1| = \int\int_{\Sigma_1} dS = \int\int_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho = 2\pi\Big[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

$$|\Sigma_2| = \int\int_{\Sigma_1} dS = \int\int_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1+x^2/4+y^2/4}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+\rho^2/4}\,\rho\,d\rho = 2\pi\Big[\frac{4}{3}(1+\rho^2/4)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$$

**4.** La curva $\Gamma$ è la frontiera di una ellisse $\Sigma$ che si ottiene intersecando il piano e il cilindro. La proiezione dell'ellisse sul piano $xy$ è il disco circolare $D$ di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$, il cui bordo $\partial^+ T$ è orientato positivamente per ipotesi. Quindi $\Gamma$ sarà orientata positivamente rispetto all'ellisse $\Sigma$ se si sceglie la normale $\mathbf{n}$ che punta verso l'alto. Per il teorema di Stokes

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Poiché l'ellisse è contenuta nel piano $z = x - y + 5$, avremo

$$\mathbf{n} \, d\sigma = (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dxdy$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = -y^2 \, \mathbf{i} + x^2 \, \mathbf{j}$$

Dunque

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int\int_D (y^2 + x^2) \, dxdy = 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2}$$