Idea per applicare $\mathcal{F}$ alla risoluzione di eq. differenziali

eq. differenziale in $u = u(x)$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

eq. algebrica in $\hat{u} = \hat{u}(\xi)$

$$\Big\downarrow$$

ricavo $\hat{u}$

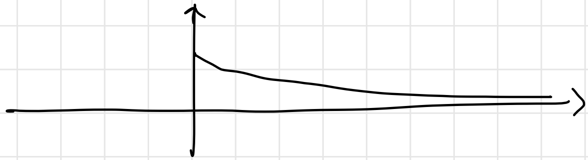
$$\Big\downarrow$$

trovo u a partire da $\hat{u}$

Esempio

$$u'(x) - u(x) = e^{-x} H(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Cerco soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$.

$$\widehat{u'} - \hat{u} = \widehat{e^{-x} H(x)}$$

$$i\xi \hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$(i\xi - 1)\hat{u} = \frac{1}{1+i\xi} \quad \leftarrow \text{ eq. algebrica in } \hat{u}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \qquad \left(u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{i\xi_k x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

↑

trasformate notevoli

Formule di inversione per $\mathcal{F}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora:

$$\boxed{u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\check{u}(x) := u(-x)$$

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}.$$

Pb. Esiste uno spazio X tale che

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow X$$

e valga in X la formule d'inversione?

R. $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Formula di inversione per $\mathcal{F}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Allora $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e vale:

$$\boxed{u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n}$$

Ma .... chi è $\hat{u}$ in $L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$?

Es. $u(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } u \in L^1(\mathbb{R})}}{<} +\infty$$

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Spazio delle funzioni a decrescenza rapida

Def. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\forall \alpha, \beta$ multiindici $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \}$

(Es. In $\mathbb{R}^2$ $\alpha = (1,2)$ $\beta = (3,3)$

$$x^\alpha D^\beta u = x_1^1 x_2^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^3}$$
)

<u>Esempi</u>/<u>Osservazioni</u>

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\subset} C^\infty(\mathbb{R}^n)$

  es. $u(x) = e^{-x^2}$ ↑   ↑ es. $u(x) = 1$

- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\gamma u,\ D^\gamma u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$

  $\Rightarrow$ posso calcolare $\mathcal{F}$ per $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Valgono in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le formule:

(1) $\widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}$

(2) $D^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha u}$

- <u>Formula di inversione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$</u>

  Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}.$$

<u>Dim.</u> Se dimostro che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora vale la formula di inversione. (come conseguenza di quella in $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$).

- $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ perché $\forall \alpha$, $x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ per la prop. 2. $\hat{u}$ ha derivate d'ogni ordine).

- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta$

perché $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modulo} \\ \text{coeff.}}}{\sim} \xi^\alpha \widehat{x^\beta u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modulo} \\ \text{coeff.}}}{\sim} \widehat{D^\alpha (x^\beta u)}$$

e $D^\alpha(x^\beta u)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow$ per Riemann-Lebesgue la sua trasformata sta in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ∎

Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- $$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, v = \int_{\mathbb{R}^n} u\, \hat{v}$$

- $$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2}$$

  IDENTITÀ DI PLANCHEREL

- $$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

- $$\widehat{u v} = (2\pi)^{-n}\, \hat{u} * \hat{v}$$

Def. Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e sia $\{u_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.(*)

Considero $\hat{u}_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e definisco

$$\hat{u} := \lim_h \hat{u}_h \qquad (\text{in } L^2(\mathbb{R}^n))$$

Idea:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \ni u_h \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & u \in L^2 \\
\mathcal{S} \ni \hat{u}_h \arrow[r] & \hat{u} \in L^2
\end{tikzcd}$$

(*) esiste una tale u_h perché $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Osservazioni:

1) $\exists \lim_h \hat{u}_h$ (in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

perché $\hat{u}_h$ è di Cauchy: infatti

$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_h - u_k\|_2$$

id di Plancherel in $\mathcal{S}$

e la successione u_h è di Cauchy.

2) $\lim_h \hat{u}_h$ è indip. dalla scelta di u_h:

$u_h \xrightarrow{L^2} u$, $v_h \xrightarrow{L^2} u$ $\Longrightarrow$

$\lim_h \hat{u}_h = \lim_h \hat{v}_h$ perché

$u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0 \underset{\text{Plancherel}}{\Longrightarrow} \hat{u}_h - \hat{v}_h \longrightarrow 0$

3) Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

Allora $\hat{u} = \overset{\bowtie}{u}$.

Infatti prendendo $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$ (possibile tramite mollificatori)

si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \overset{\bowtie}{u} \end{cases}$$ (perché $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$ continuo) (per def di $\mathcal{F}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$).

$\Rightarrow \hat{u} = \overset{\bowtie}{u}$ q.o.

4) Vale l'id. di Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Infatti, presa $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $u_h \xrightarrow{L^2} u$:

$$\|u_h\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}_h\|_{L^2}^2 \quad \forall h$$

passando al limite per $h \to +\infty$, ho la tesi

5) Come calcolare in pratica $\hat{u}$ (in dim 1):

Basta osservare che la successione

$$u_h = \underset{\sim}{u} \cdot \chi_{(-h,h)} = \begin{cases} u & \text{su } (-h,h) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$u_h \longrightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R})$

(conv. puntuale q.o., $|u_h|^2 \le u^2 \in L^1(\mathbb{R})$.)

$\Rightarrow \hat{u_h} \longrightarrow \hat{u}$ in $L^2(\mathbb{R})$

(per Plancherel in $L^2(\mathbb{R})$,

$$\underset{\downarrow 0}{\|\hat{u_h} - \hat{u}\|_{L^2}} = \frac{1}{2\pi} \underset{\downarrow 0}{\|u_h - u\|_{L^2}})$$

Quindi $\in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{u}(\xi) = \lim_h \hat{u}_h(\xi)$$

$$\boxed{\hat{u}(\xi) = \lim_h \int_{-h}^{h} u(x) e^{-i\xi x} \, dx}$$

Esempio:

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \pi \chi_{(-1,1)}$$

Inoltre

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$$

6) Perché vale la formula di inversione in L^2?

Basta prendere $u_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\underline{u_h \xrightarrow{L^2} u}$

Sappiamo:

$$\check{u}_h = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}_h \qquad \forall h$$

Basta passare al limite per $h \to +\infty$.

$$\check{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}$$

Esempio:

$u(x) = e^{-x^2}$ cf. ESERCITAZIONE.