Equazioni differenziali 1

Definizioni e terminologia

Si dice *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n* una relazione del tipo

$$F\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)\big) = 0\,,$$

dove F è una assegnata funzione, definita in un aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, mentre $y(t)$ è la funzione incognita che compare nell'equazione con le sue derivate fino all'ordine n incluso.

Si dice *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale una funzione $\varphi(t)$, definita e derivabile n volte in un intervallo $I \subseteq R$, tale che

$$F\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)\big) = 0\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Con il termine *integrale generale* si intende una famiglia di funzioni, dipendente da uno o più parametri, che rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.

Si chiamano *equazioni lineari* (di ordine n) le equazioni della forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

Se $b(t) = 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*.

Infine, se un'equazione differenziale è scritta nella forma

$$y^n(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)\,, \qquad \text{con} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\,,$$

si dice che è in *forma normale*.

Un'equazione lineare si può scrivere in forma normale se $a_n(t) \neq 0$.

Osservazione sulle notazioni:

in diversi contesti le equazioni possono essere scritte con altre notazioni, sia per la funzione incognita che per la variabile indipendente:

$$x(t)\,, \qquad y(x)\,, \qquad u(x)\,, \quad ...$$

Esempi.

Data una funzione di due variabili $f(t,y)$, l'equazione

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)\,,$$

è del *primo* ordine in *forma normale*.

L'equazione della caduta libera dei gravi (nel vuoto)

$$y''(t) = -g$$

è *lineare* del *secondo* ordine (in forma normale).
L'*integrale generale* dell'equazione si scrive

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + c_1\, t + c_2\,,$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

L'equazione

$$y(t) = t\, y'(t) + y'(t)^2\,,$$

è del primo ordine *non* in forma normale.

Problema di Cauchy (o dei valori iniziali).

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} = f\big(t, y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)\,,$$

che in un punto dato t_0 soddisfa le n condizioni aggiuntive (condizioni iniziali)

$$y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = y_1\,, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}\,,$$

dove y_0, y_1,...,y_{n-1} sono costanti assegnate.

Per soluzione di un problema di Cauchy si intende una funzione *definita in un intervallo* I che contiene t_0 e che soddisfa l'equazione in tutto I e le condizioni iniziali in t_0.

Esempio.

Un problema di Cauchy per l'equazione $y'' = -g$ è: trovare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = H$, $y'(0) = 0$ (caduta da un'altezza H, da fermo).

Soluzione: $\varphi(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H$.

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del primo ordine della forma

$$y' = a(t)b(y)\,,$$

dove $a(t)$ e $b(y)$ sono funzioni *continue* in intervalli di $\mathbb{R}$.

Una prima osservazione:
se un numero $\bar{y}$ risolve $b(\bar{y}) = 0$, allora la *funzione* costante $y(t) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione.
Infatti, poiché la derivata di una costante è zero, inserendo $y(t) = \bar{y}$ nell'equazione si ottiene $0 = 0$.

L'insieme delle altre soluzioni (non costanti) è dato *in forma implicita* dalla formula

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t)\, dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, se $y(t)$ $(t \in I)$ è soluzione e $b(y(t)) \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Prendendo l'integrale indefinito (cioè le primitive):

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))}dt = \int a(t)\,dt + c\,.$$

Nel primo integrale facciamo il cambio di variabile $y = y(t)$, $dy = y'(t)dt$ e otteniamo la formula

$$\int \frac{1}{b(y)}dy = \int a(t)\,dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Suggerimento per ricordare la formula:
scrivere l'equazione con la notazione di Leibniz

$$\frac{dy}{dt} = a(t)b(y)\,,$$

e trattare la derivata come un quoziente:

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt\,.$$

Integrando (a sinistra in y, a destra in t) si ricava la formula.

Esempi.

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = 2t\,(y-1)^2\,.$$

Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali:

$$y(0) = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \qquad y(0) = 2\,.$$

Soluzione:

L'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 1$, che ovviamente soddisfa anche la condizione aggiuntiva $y(0) = 1$.

Le altre soluzioni sono definite (in forma implicita) dall'equazione

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = \int 2t\,dt + c\,.$$

Integrando si ottiene

$$-\frac{1}{y-1} = t^2 + c\,.$$

Infine, risolvendo rispetto a y:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\varphi(t)$ che passa per l'origine $(0, 0)$ si ottiene risolvendo

$$0 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = 1\,.$$

Abbiamo allora

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + 1}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\psi(t)$ che passa per il punto $(0, 2)$ corrisponde al valore di c che risolve l'equazione

$$2 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = -1\,.$$

Quindi

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 - 1}\,, \qquad t \in (-1, 1)\,.$$

Tempo di svuotamento di un serbatoio.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -k\sqrt{y(t)}, \\ y(0) = H, \end{cases}$$

dove k, H, sono costanti positive. Calcolare in quale istante t la soluzione si annulla.

Soluzione:

Osserviamo subito che l'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale; le altre soluzioni sono date dalla formula

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\int k\, dt + c\,,$$

da cui la forma implicita

$$2\sqrt{y} = -kt + c\,.$$

La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 2\sqrt{H}$.

Risolvendo per y si ricava

$$y = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2}t\right)^2 .$$

Il tempo di svuotamento è quindi $\bar{t} = 2\sqrt{H}/k$.

Osservazione.

Nel primo esempio, si verifica facilmente che per ogni punto (t_0, y_0) del piano esiste *un'unica soluzione* dell'equazione (definita almeno in un intervallo che contiene t_0) passante per quel punto.

Nel secondo caso, l'unicità non vale per i punti $(t_0, 0)$ sull'asse t, dove le soluzioni non costanti 'incontrano' la soluzione $y = 0$.

Dunque, la soluzione di un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\, b(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

non è sempre univocamente determinata.
Si può dimostrare che *se* $b(y_0) \neq 0$, esiste un'unica soluzione definita in un intorno di t_0.

Equazioni lineari del primo ordine

La generica equazione lineare del primo ordine ha la forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,.$$

Se $a_1(t) \neq 0$, possiamo dividere per questo coefficiente e scrivere l'equazione in *forma normale*

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)\,.$$

Assumiamo $a(t)$ e $f(t)$ *continue* in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si può ricavare una formula per l'integrale generale di queste equazioni:

Sia $A(t) = \int a(t)\,dt$ una qualsiasi primitiva di $a(t)$; moltiplicando l'equazione per $e^{A(t)}$, abbiamo

$$e^{A(t)}y'(t) + a(t)\,e^{A(t)}\,y(t) = e^{A(t)}f(t)\,.$$

A sinistra si riconosce la derivata di un prodotto:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{A(t)}y(t)\right] = e^{A(t)}f(t)\,.$$

Integrando si ottiene

$$e^{A(t)} y(t) = \int e^{A(t)} f(t)\, dt + c\,,$$

e infine

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} f(t)\, dt\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$

dove $A(t) = \int a(t)\, dt$.

Osservazione. L'arbitrarietà nella scelta delle primitive nei due integrali indefiniti della formula equivale a una ridefinizione dell'*unica* costante arbitraria c.

Esempi.

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' - \frac{2}{t}\, y = t^2\,.$$

Abbiamo $a(t) = -2/t$, $f(t) = t^2$. Dunque $A(t) = -2 \ln|t| = -\ln t^2$.
Inserendo nella formula troviamo

$$y(t) = c\, t^2 + t^2 \int \frac{1}{t^2}\, t^2\, dt = c\, t^2 + t^3\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Circuito resistenza-induttanza.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)\,,$$

dove $I = I(t)$ intensità di corrente, $E(t)$ f.e.m., R resistenza, L induttanza.
Poniamo: $y(t) = I(t)$, $k = R/L$, $f(t) = E(t)/L$. L'equazione diventa

$$y'(t) + k\,y(t) = f(t)\,.$$

Integrale generale:

$$y(t) = c\,e^{-kt} + e^{-kt}\int e^{kt} f(t)\,dt$$

Esercizio

Calcolare l'integrale generale nei casi :

$$1)\ f(t) = \frac{1}{L}E_0\ \ (\,\text{costante}\,)\,; \qquad\qquad 2)\ f(t) = \frac{E_0}{L}\cos(\omega t)\,.$$

Problema di Cauchy per le equazioni lineari.

Data un'equazione lineare del primo ordine con coefficienti continui in un intervallo I, sia $t_0 \in I$ e sia $y_0 \in \mathbb{R}$.
Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione, definita in I, che verifica la condizione $y(t_0) = y_0$.

Dimostrazione.
Facciamo vedere che nella formula dell'integrale generale si può sempre scegliere il valore di c in modo da soddisfare il problema di Cauchy.
Infatti, se nella formula scegliamo come primitive le *funzioni integrali*

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,, \qquad \int e^{A(t)} f(t)\, dt \, = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

queste ultime sono nulle in t_0; quindi, la soluzione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ è

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

Discussione del problema di Cauchy.

Dalla risoluzione dei diversi problemi di Cauchy per le precedenti equazioni, evidenziamo le seguenti proprietà delle soluzioni ottenute :

- Per le equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, una soluzione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ esiste se t_0 e y_0 appartengono ad intervalli dove $a(t)$ e $b(y)$ sono continue. L' unicità non è garantita in queste sole ipotesi. In ogni caso, l'intervallo di definizione di una soluzione dipende dai dati iniziali e in generale non è determinato *a priori*.
- Per le equazioni lineari $y' + a(t)y = f(t)$, abbiamo esistenza e unicità della soluzione passante per (t_0, y_0) se t_0 appartiene all'intervallo I dove $a(t)$ e $f(t)$ sono continue, e *per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre, la soluzione è sempre definita su tutto I.

Queste differenti proprietà si spiegano alla luce di importanti risultati della teoria delle equazioni differenziali, che prendono il nome di *teoremi di esistenza e unicità*, locale e globale, delle soluzioni del problema di Cauchy.

Grazie a questi teoremi si possono ricavare informazioni *qualitative* sulle soluzioni di un'equazione a prescindere dall'esistenza di metodi espliciti di risoluzione.

Teorema (Esistenza e unicità locale).

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in D e sia $(t_0, y_0) \in D$.
Esiste allora un intorno I di t_0 tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette una soluzione φ definita in I. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo comune di definizione. $\diamond$

A volte si usa la notazione $\varphi = \varphi(t; t_0, y_0)$ per evidenziare la dipendenza della soluzione dai dati iniziali.

Non dimostriamo il teorema, ma faremo numerose osservazioni sulle sue ipotesi e sulle proprietà delle soluzioni.

Sulle ipotesi del teorema:

i) La sola continuità della f garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema di Cauchy (Peano), ma non l'unicità.

Questo spiega, nel caso delle equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, la mancanza di unicità delle soluzioni del problema di Cauchy in certi punti dove $b(y)$ è continua ma non derivabile.

ii) L'ipotesi di continuità della derivata parziale $\partial_y f$ si può indebolire.

Basta richiedere che f soddisfi la proprietà seguente:
per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$ esiste una costante L_K tale che

$$\left|f(t, y_1) - f(t, y_2)\right| \leq L_k |y_1 - y_2| \qquad \text{per ogni} \quad (t, y_1),\ (t, y_2)\ \in K\,.$$

In questo caso si dice che f soddisfa (localmente) la *condizione di Lipschitz* rispetto ad y, uniformemente rispetto a t.

Se $\partial_y f$ esiste continua, si dimostra che f soddisfa la condizione di Lipschitz; ovviamente il viceversa non vale in generale.

Regolarità delle soluzioni.

Una soluzione φ del problema di Cauchy è di classe $\mathcal{C}^1(I)$.
Infatti, φ è derivabile (e dunque continua) e soddisfa $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in I$.
Ma la funzione $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ è continua per il teorema di continuità delle funzioni composte. Dunque, anche $\varphi'(t)$ è continua in I.

Iterando l'argomento, si dimostra che $f \in \mathcal{C}^k(D) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.

Intervallo di esistenza delle soluzioni.

Dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale si ricava che la soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$ è definita almeno in un intervallo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, dove $\delta > 0$ dipende da f e dal punto (t_0, y_0); il grafico di $\varphi(t)$, $t \in I$, è contenuto in D.

Si può allora *prolungare* la soluzione a destra e a sinistra di questo intervallo considerando i problemi di Cauchy rispettivamente con i dati $(t_0 + \delta, \varphi(t_0 + \delta))$ e $(t_0 - \delta, \varphi(t_0 - \delta))$.
Infatti, sempre per il teorema di esistenza e unicità locale, ciascun problema ha un'*unica soluzione*, definite rispettivamente in un intorno I_1 di $t_0 + \delta$ e in un intorno I_2 di $t_0 - \delta$.
Per l'unicità, tali soluzioni coincidono con $\varphi(t; t_0, y_0)$ rispettivamente in $I \cap I_1$ e in $I \cap I_2$ e quindi realizzano l'estensione della soluzione ad un intervallo più ampio.

Iterando il procedimento nelle due direzioni, si arriva a definire un *intervallo massimale di esistenza* $(t_{\min}, t_{\max})$ della soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$, dove:

$$t_{\max} = \sup\left\{t \ \text{ t.c. } \ \varphi \text{ è definita in } [t_0, t]\right\};$$
$$t_{\min} = \inf\left\{t \ \text{ t.c. } \ \varphi \text{ è definita in } [t, t_0]\right\}.$$

Si dimostra che per $t \to t_{\max}^-$ e per $t \to t_{\min}^+$ il grafico di φ esce *definitivamente* da ogni insieme chiuso e limitato contenuto D.

<u>Esempio</u>.

Consideriamo l'equazione (logistica) $y' = y(1-y)$, con la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dove $0 < \alpha < 1$.
Osserviamo che per questa equazione le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale valgono in tutto $\mathbb{R}^2$.
Possiamo allora affermare che la soluzione $\varphi_\alpha(t)$ è *limitata*; infatti, il suo grafico non può intersecare le due rette $y = 0$ e $y = 1$, che sono pure soluzioni (costanti), per cui sarà sempre $0 < \varphi_\alpha(t) < 1$.
Segue allora che $t_{\max} = +\infty$ e $t_{\min} = -\infty$, cioè φ_α *è definita su tutto* $\mathbb{R}$.
Inoltre φ_α è strettamente crescente ($\varphi'_\alpha(t) > 0$) e si dimostra che ha le due rette come asintoti orizzontali.

Verificare le previsioni qualitative risolvendo esplicitamente l'equazione.

Teorema (Esistenza e unicità globale).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}$ e supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in $\bar{S}$.
Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \qquad \forall\ (t, y) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ con valori iniziali $(t_0, y_0) \in S$ è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazioni.

L'ipotesi sulla crescita di f nella striscia $\bar{S}$ è verificata in particolare se:
i) f è limitata in $\bar{S}$, oppure ii) $\partial_y f$ è limitata in $\bar{S}$.

Nel caso delle equazioni lineari $y' = -a(t)y + b(t)$, le ipotesi del teorema valgono se i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue in $[a, b]$.
Infatti, in tal caso abbiamo

$$|-a(t)y + b(t)| \leq |b(t)| + |a(t)|\,|y| \leq h + k\,|y|\,,$$

dove $h = \max_{[a,b]} |b(t)|$, $k = \max_{[a,b]} |a(t)|$.
Vengono così giustificati gli intervalli di esistenza delle soluzioni di queste equazioni.