Marco Boella

ANALISI MATEMATICA 1 E ALGEBRA LINEARE

Eserciziario

Seconda edizione

ALWAYS LEARNING

PEARSON

ANALISI MATEMATICA 1 E ALGEBRA LINEARE

Eserciziario

Seconda edizione

Sommario

Prefazione IX
Simbologia XI

Capitolo 1 Nozioni preliminari – Numeri reali 1

1.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 1
1.1.1 Sommatorie – Binomio di Newton 1
1.1.2 Insiemi numerici 5

1.2 Esercizi proposti 12
1.2.1 Suggerimenti 14

Capitolo 2 Elementi di geometria analitica 15

2.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 15
2.1.1 Rappresentazione e operazioni con i vettori 15
2.1.2 Prodotti, angoli, proiezioni, aree e volumi 17
2.1.3 Rette nel piano 21
2.1.4 Distanze nel piano 26
2.1.5 Piani nello spazio 28
2.1.6 Rette nello spazio 33
2.1.7 Distanze nello spazio 42
2.1.8 Coniche e quadriche 45

2.2 Esercizi proposti 60
2.2.1 Suggerimenti 64

Capitolo 3 Numeri complessi 65

3.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 65
3.1.1 Rappresentazione dei numeri complessi 65
3.1.2 Le quattro operazioni con i numeri complessi 71
3.1.3 Potenze e radici n-esime dei numeri complessi 77
3.1.4 Equazioni algebriche e non algebriche
Disequazioni che coinvolgono numeri complessi 88
3.1.5 Trasformazioni e rappresentazioni nel piano complesso 96

3.2 Esercizi proposti 98

Capitolo 4 Funzioni – Proprietà generali 103

4.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 103
4.1.1 Definizioni preliminari 103
4.1.2 Le principali funzioni elementari 109
4.1.3 Alcune proprietà delle funzioni 120
4.1.4 Grafici di funzioni 123

4.2 Esercizi proposti 126

Capitolo 5 Limiti e continuità 129

5.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 129
5.1.1 Verifica di limiti con la definizione metrica 129
5.1.2 Funzioni continue 134
5.1.3 Algebra dei limiti, forme d'indecisione 136
5.1.4 Equivalenza asintotica, o-piccolo. Infiniti e infinitesimi 146

5.2 Esercizi proposti 155
5.2.1 Suggerimenti 157

Capitolo 6 Successioni e serie 159

6.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 159
6.1.1 Successioni 159
6.1.2 Serie numeriche 170
6.1.3 Serie a termini positivi 173
6.1.4 Serie a termini di segno qualsiasi 177

6.2 Esercizi proposti 183
6.2.1 Suggerimenti 186

Capitolo 7 Calcolo differenziale e applicazioni 187

7.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 187
7.1.1 Applicazioni delle derivate 204
7.1.2 Studio del grafico di una funzione 215

7.2 Esercizi proposti 233

Capitolo 8 Calcolo integrale e applicazioni 237

8.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 237
8.1.1 Integrazioni per parti 245
8.1.2 Integrazione delle funzioni razionali 248
8.1.3 Integrazione per sostituzione 259

8.1.4 Integrali impropri 274
8.1.5 Applicazioni 284
8.1.6 Funzioni integrali 287

8.2 Esercizi proposti 295

Capitolo 9 Limiti e continuità 299

9.1 Esercizi svolti e richiami di teoria 299
9.1.1 Algebra delle matrici e dei vettori 299
9.1.2 Combinazione lineare di vettori. Rango di una matrice. Determinante 307
9.1.3 Matrici inverse 319
9.1.4 Sistemi lineari. Impostazione e soluzione 322
9.1.5 Sistemi lineari. Interpretazione geometrica e discussione 327
9.1.6 Spazi vettoriali e sottospazi, dimensione 343
9.1.7 Applicazioni lineari 355
9.1.8 Autovalori e autovettori. Diagonalizzazione 367
9.1.9 Ortogonalità 380
9.1.10 Matrici simmetriche e forme quadratiche. Similitudine 390

9.2 Esercizi proposti 406
9.2.1 Suggerimenti 410

Prefazione

La prima edizione di questo libro vide la luce cinque anni fa, in un momento nel quale, in virtù della trasformazione dei vecchi Corsi di Laurea quadriennali o quinquennali in Lauree di primo e secondo livello, era stato necessario ripensare l'offerta didattica dei corsi di Matematica di base. In quella fase, quasi pionieristica, i programmi di Analisi Matematica e di Geometria e Algebra lineare erano stati in vario modo rimaneggiati e riorganizzati. Il taglio dell'esposizione e la scelta degli argomenti da includere nel testo erano stati il frutto dell'osservazione di questa varietà di corsi e di programmi.

In questi ultimi anni, la situazione è andata via via stabilizzandosi, e in qualche modo anche la distribuzione degli argomenti dei vari corsi si è un poco standardizzata. Tutto cià ha permesso di confezionare una nuova edizione.

Accanto a varie piccole aggiunte e migliorie, le novità più evidenti riguardano la geometria analitica, con l'introduzione di coniche e quadriche (almeno a livello di riconoscimento di una forma canonica), e gli integrali, con l'introduzione di integrali abeliani e funzioni integrali.

Un discorso a parte va fatto per l'Algebra lineare: il relativo capitolo è stato spostato in fondo al libro, a valle dei capitoli sul calcolo infinitesimale e integrale, per poter appoggiare lo svolgimento di alcuni esercizi anche su concetti base di Analisi; inoltre, vi sono stati notevoli ampliamenti, volti a introdurre argomenti come l'Eliminazione di Gauss e lo studio delle forme quadratiche (al quale si riconduce la parte riguardante coniche e quadriche, cui accennavo più sopra). La scelta è stata dettata dal fatto che, ormai, l'insegnamento dell'Algebra lineare è in generale posposto rispetto a quello degli argomenti della vecchia *Analisi Uno*.

L'impianto è rimasto invariato: ogni capitolo è suddiviso in due sezioni, gli esercizi della prima sezione, svolti in dettaglio, hanno il duplice scopo di aiutare in un ripasso degli aspetti teorici della materia e di guidare passo dopo passo nelle varie "tecniche" e metodologie di risoluzione. Gli esercizi della seconda sezione, dei quali è in genere indicata solamente la risposta finale, possono servire come verifica dell'avvenuto apprendimento. Talvolta, nei casi in cui poteva essere opportuno, è stato aggiunto un suggerimento, per la soluzione degli esercizi non svolti. L'idea che sta alla base di tale scelta, comunque, è che la preparazione sia frutto di impegno individuale: non basta e non basterà mai assistere allo svolgimento di un esercizio, per arrivare a risolvere problemi simili. Se, da un lato, è evidente che per incominciare a studiare matematica occorra essere guidati passo dopo passo nell'acquisizione di nuove strategie, d'altra parte spesso la sicurezza di aver "capito", se deriva unicamente dall'avere letto la soluzione di un esercizio, si rivela una falsa sicurezza.

Accanto allo studio pedissequo degli aspetti più meccanici della soluzione degli esercizi, è fondamentale poi sviluppare un seppur minimo spirito critico, unito magari a una qualche capacità di vedere gli esercizi nel loro complesso. Negli anni, mi è capitato molte volte di assistere ai goffi tentativi, da parte di qualche malcapitato studente, di riportare un esercizio d'un esame alla falsariga di un altro esercizio, da lui in precedenza studiato. Imparare a svolgere esercizi di matematica non significa mai imparare una casistica di ricette, pronte a ogni uso. Occorre, certo, studiare quello che un musicista definirebbe "il repertorio", non bisogna pensare però che aver visto una mezza dozzina di esercizi su di un argomento sia sufficiente per saper attaccare qualsiasi nuovo problema ci si pari dinnanzi: è meglio considerare gli esercizi che abbiamo imparato come altrettanti mattoncini che possono essere usati, combinati in vario modo, per la soluzione di problemi; tali problemi possono presentarsi in una varietà pressoché infinita ed è impossibile stilarne un catalogo completo. Potremmo dire che risolvere un esercizio di matematica un pochino più articolato dello standard sia come trovarsi di fronte alla necessità di preparare un pranzo: è necessario conoscere gli ingredienti che abbiamo a disposizione, per poter riuscire a combinarli con successo.

Ringraziamenti

A questo punto, è doveroso procedere ai ringraziamenti: ringrazio innanzitutto colleghi e studenti che, nel corso di questi anni, mi hanno segnalato errori e manchevolezze della prima edizione. Ringrazio anche i miei colleghi che, in occasione di qualche scambio di vedute, mi hanno aiutato a reinquadrare questo o quell'aspetto degli argomenti; va comunque da sé che sono il solo responsabile di quello che ho scritto.

Un caloroso ringraziamento va a Micaela Guerra, della Pearson: la sua stoica pazienza, in particolar modo nel tollerare i miei ritardi, è degna d'ammirazione.

Infine, un grazie va alle mie due donne di casa: a mia moglie, che si è sopportata dubbi e perplessità riguardo la stesura di questo o di quell'argomento, e a mia figlia, per essere stata, con le sue esigenze di bimba, la causa principale dei ritardi di cui ho detto.

Marco Boella

Milano, giugno 2012

Simbologia

Nel corso del libro, sono stati utilizzati i simboli seguenti:

$A \cup B$	unione insiemistica di A e B: tutti gli elementi che appartengono ad A o a B.
$A \cap B$	intersezione insiemistica di A e B: tutti gli elementi che appartengono ad A e a B.
$A \equiv B$	A e B coincidono (sono composti dagli stessi elementi).
$A \subset B$	A è un sottoinsieme *proprio* di B: tutti gli elementi di A appartengono anche a B, ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A.
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B, eventualmente coincidente con B.
$A \setminus B$	differenza insiemistica: gli elementi di A che non sono elementi di B.
$\alpha \in A$	l'elemento α appartiene all'insieme A.
$\alpha \notin A$	l'elemento α non appartiene all'insieme A.
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri interi non negativi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_*$	insieme dei numeri interi positivi: $\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_*\}$.
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	insieme dei numeri reali, insieme dei numeri complessi.
$\{x \in E : P(x)\}$	insieme dei numeri in E, che verificano la proprietà P.
$[a, b]$	intervallo, composto dai numeri reali x per cui $a \leq x \leq b$.
$[a, b)$	intervallo, composto dai numeri reali x per cui $a \leq x < b$.
(a, b)	intervallo, composto dai numeri reali x per cui $a < x < b$.
$\sup E$	estremo superiore dell'insieme E.
$\inf E$	estremo inferiore dell'insieme E.
$\max E$	massimo dell'insieme E.
$\min E$	minimo dell'insieme E.
$\operatorname{Re} z$	parte reale del numero complesso z.
$\operatorname{Im} z$	parte immaginaria del numero complesso z.
$\lvert z \rvert$	modulo del numero complesso z.
$\arg z$	argomento del numero complesso z.
$\mathfrak{P}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$	piano e rette, nello spazio a tre dimensioni.
$\mathfrak{r} \perp \mathfrak{s}$	perpendicolarità tra piani e rette.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	vettori nello spazio a tre dimensioni, elementi di generici spazi vettoriali.
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	prodotto scalare tra **u** e **v**, intesi come vettori dello spazio a tre dimensioni.
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$	prodotto vettore tra **u** e **v**, intesi come vettori dello spazio a tre dimensioni.
$\mathbf{0}$	vettore le cui componenti sono tutte nulle.
$\mathscr{V}, \mathscr{W}$	spazi vettoriali generici.
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	prodotto scalare in spazi vettoriali generici.
$\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$	vettore nullo dello spazio $\mathscr{V}$.
$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_i\}$	sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_i$.
$\mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$	basi generiche di spazi vettoriali.
$\mathcal{C}$	base canonica di $\mathbb{R}^n$.
$\mathbf{e}_i$	elementi di $\mathcal{C}$.
$\mathscr{L}$	applicazione lineare tra spazi vettoriali.
$\operatorname{im} \mathscr{L}$	immagine dell'applicazione lineare $\mathscr{L}$.
$\ker \mathscr{L}$	nucleo dell'applicazione lineare $\mathscr{L}$.
$\mathscr{M}(m,n)$	spazio vettoriale delle matrici a m righe e n colonne.
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	matrici.
$\operatorname{rk} \mathbf{A}$	rango della matrice **A**.
$\det \mathbf{A}$	determinante della matrice **A**.
$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$	trasposta della matrice **A**.
$\operatorname{col} \mathbf{A}$	spazio colonna della matrice **A**.
$\operatorname{row} \mathbf{A}$	spazio riga della matrice **A**.
$f(x) \equiv a$	funzione di x identicamente uguale a a: $\forall x,\ f(x) = a$.
$g \circ f(x)$	funzione composta: $g \circ f(x) = g(f(x))$.
$f^{-1}(x)$	funzione inversa: $f^{-1}(f(x)) = x$.
$\limsup$	massimo limite.
$\liminf$	minimo limite.
$\ln x$	logaritmo naturale di x.
$\log_b x$	logaritmo in base b di x.
$H(x)$	funzione di Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.
$\operatorname{sgn} x$	segno di x: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.
$\lfloor x \rfloor$	parte intera di x: massimo intero minore o uguale a x.
$\operatorname{mant} x$	mantissa di x: $x - \lfloor x \rfloor$.
$f(x) \sim g(x)$	equivalenza asintotica, tra infiniti o infinitesimi.
$f(x) = o(g(x))$	o-piccolo: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

CAPITOLO 1

Nozioni preliminari – Numeri reali

1.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

1.1.1 Sommatorie – Binomio di Newton

ESERCIZIO 1.1 **Il simbolo di sommatoria**

Scrivere, usando il simbolo di sommatoria, le somme seguenti:

① $4 + 8 + \ldots + 1024$, *le potenze di 2 da 2^2 a 2^{10};*
② $a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9$, *(attenzione ai segni alternati);*
③ $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + 17 - 19$, *i dispari da 1 a 19, a segni alternati.*

Scrivere per disteso le seguenti sommatorie:

$$④ \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^{k-1}}; \qquad ⑤ \sum_{n=0}^{8} (-1)^n a_{2n+1}; \qquad ⑥ \sum_{n=1}^{15} (a_n - a_{n-1}).$$

Soluzione

Il simbolo di sommatoria è uno strumento per scrivere in modo compatto le somme (soprattutto se composte da un alto numero di addendi), con la scrittura

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} \langle \text{espressione} \rangle$$

intendiamo l'operazione che consiste nel sommare l'espressione che compare a destra in corrispondenza di tutti i valori di i, a cominciare da n_1 fino a n_2:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} \langle \text{espressione} \rangle = \langle \text{espressione} \rangle_{i=n_1} + \ldots + \langle \text{espressione} \rangle_{i=n_2}.$$

Per esempio:

$$\sum_{i=1}^{4} 2^i = (2^i)_{i=1} + (2^i)_{i=2} + (2^i)_{i=3} + (2^i)_{i=4} = 2 + 4 + 8 + 16 = 30;$$

$$\sum_{n=4}^{7} 5 = (5)_{n=4} + (5)_{n=5} + (5)_{n=6} + (5)_{n=7} = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

① Gli addendi sono tutti potenze di due, ossia numeri della forma 2^n, quando n assume i valori interi da 2 a 10, quindi

$$4 + 8 + 16 + \ldots + 1024 = \sum_{n=2}^{10} 2^n.$$

② Una somma in cui alternativamente gli addendi debbano essere sommati o sottratti (cioè della forma $a-b+c-d\ldots$) può essere scritta come addizione, in cui ciascun addendo ha la forma $(-1)^n \cdot |\text{addendo}|$:

$$a - b + c - d + \ldots = [(-1)^0 a] + [(-1)^1 b] + [(-1)^2 c] + [(-1)^3 d] + \ldots;$$

poiché $(-1)^n$ è uguale a 1 se n è pari e a -1 se n è dispari, la sua presenza realizzerà alternativamente una somma o una sottrazione, nel nostro caso dobbiamo premettere agli a_n con n pari il segno meno, agli a_n con n dispari il segno più, un modo può essere scrivere $(-1)^{n+1}a_n$, e quindi

$$a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 = \sum_{n=3}^{9} (-1)^{n+1} a_n.$$

③ Ogni numero pari può essere scritto come il doppio di un numero intero k, ogni numero dispari come il doppio di k, più uno:

$$n \text{ pari} : n = 2k \qquad\qquad n \text{ dispari} : n = 2k + 1;$$

i numeri dispari da 1 a 19 sono allora descritti dalla formula $2k + 1$ quando k assume i valori che vanno da 0 a 9; nella somma $1-3+5-7+\ldots$ dobbiamo sommare i numeri dispari 1,5,9,... (cioè i numeri della forma $2k + 1$ con k pari) e sottrarre i numeri 3,7,11,... (cioè i numeri della forma $2k + 1$ con k dispari), usando ancora le potenze di -1:

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots - 19 = \sum_{k=0}^{9} (-1)^k (2k + 1).$$

④ ⑤ È sufficiente scrivere gli addendi:

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{31}{16};$$

$$\sum_{n=0}^{8} (-1)^n a_{2n+1} = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13} - a_{15} + a_{17}.$$

⑥ L'ultima somma viene spesso definita "telescopica" o "a cannocchiale":

$$\sum_{n=1}^{15} (a_n - a_{n-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{15} - a_{14})$$

il nome è dovuto al fatto che tutti gli addendi si semplificano a coppie (come un cannocchiale che si richiude su di sé) tranne il primo e l'ultimo:

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{15} - a_{14}) = a_{15} - a_0.$$

ESERCIZIO 1.2 **Fattoriali e coefficienti binomiali**

Calcolare

$$① \ 2!, \quad 5!, \quad \frac{32!}{29!}; \qquad ② \ \binom{5}{2}, \quad \binom{k}{k}, \quad \binom{116}{113}.$$

Soluzione

Dato un numero intero $n \geq 0$, si chiama *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il prodotto di tutti gli interi da 1 fino a n (con la convenzione $0! = 1$); dati due numeri interi n e k, con $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, si chiama *coefficiente binomiale* di n su k e si indica con $\binom{n}{k}$ la seguente espressione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

① Con la definizione appena ricordata

$$2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

se in un'espressione compaiono più fattoriali, prima di calcolarla effettivamente conviene semplificare il più possibile i calcoli da fare, solo in un secondo momento i calcoli vanno davvero completati:

$$\frac{32!}{29!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29!}{29!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760.$$

② Come appena ricordato, se in una formula appaiono più fattoriali, conviene semplificarla prima di procedere con i conti, questo è sovente necessario con i coefficienti binomiali; notiamo infatti che nell'espressione di $\binom{n}{k}$, semplificando $(n-k)!$ a numeratore e denominatore, si ottiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!};$$

notiamo anche che, nell'ultima frazione, al numeratore e al denominatore compaiono due prodotti, composti ciascuno esattamente da k fattori.
Vediamo allora cosa accade nel primo caso (ove in effetti i conti, anche con tutti i fattoriali, sono ancora fattibili):

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 10;$$

nel secondo caso, si ottiene immediatamente

$$\binom{k}{k} = \frac{k!}{k!0!} = 1;$$

nel terzo caso, non è assolutamente abbordabile effettuare il calcolo dei fattoriali (si tratta infatti di numeri enormi, per esempio $116! = 3.3931 \cdot 10^{190}$), ma anche la semplificazione sopra scritta è inefficace; la strategia migliore consiste nell'uso di una proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \Rightarrow \quad \binom{116}{113} = \binom{116}{3}$$

e a questo punto possiamo applicare la formula "a fattoriali semplificati":

$$\binom{116}{113} = \binom{116}{3} = \frac{116 \cdot 115 \cdot 114}{3!} = 253\,460\,.$$

ESERCIZIO 1.3 **Binomio di Newton**

Calcolare i coefficienti di π^2 e di π^3 nello sviluppo di

$$\left(\frac{2}{\pi} - \pi^2\right)^7.$$

Soluzione

Usando il binomio di Newton[a] possiamo scrivere

$$\left(\frac{2}{\pi} - \pi^2\right)^7 = \left(\frac{2}{\pi} + (-\pi^2)\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k (-\pi^2)^{7-k};$$

ora nella somma a destra mettiamo in evidenza ogni fattore:

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k (-\pi^2)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k \pi^{-k} (-1)^{7-k} \pi^{14-2k}$$

e quindi, raccogliendo i termini in π:

$$\left(\frac{2}{\pi} - \pi^2\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \left[\binom{7}{k} 2^k (-1)^{7-k}\right] \pi^{14-3k}.$$

[a] **Binomio di Newton**: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si dimostra che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Il monomio contenente π^2 si ottiene scegliendo $k = 4$, e corrisponde a

$$\left[\binom{7}{4}2^4(-1)^{7-4}\right]\pi^{14-3\cdot 4} = -560\pi^2$$

Invece, poiché non esiste alcun valore (intero) di k per cui $14 - 3k = 3$, possiamo affermare che π^3 non compare, ovvero che il corrispondente coefficiente è zero.

ESERCIZIO 1.4 **Uso "esteso" dei coefficienti binomiali**

Calcolare

$$\binom{\frac{1}{3}}{3} \quad e \quad \binom{\sqrt{5}}{4}.$$

Soluzione

I coefficienti binomiali di questo esercizio hanno forma $\binom{\alpha}{k}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$; ovviamente in un caso come questo l'impiego del fattoriale nel numeratore non ha alcun significato, se però ci rifacciamo all'espressione di $\binom{n}{k}$ "a fattoriali semplificati", notiamo che tale espressione ha senso anche se n è un numero reale qualsiasi (mentre il numero k deve in ogni caso essere intero). Al denominatore compare il prodotto di k fattori, decrescenti di un'unità in un'unità, a partire da k (ossia $k!$) mentre al numeratore compare il prodotto di k fattori, decrescenti di un'unità in un'unità, a partire da n, nel caso generale avremo quindi

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{\underbrace{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{k \text{ fattori}}};$$

usiamo allora quest'ultima espressione:

$$\binom{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} = \frac{5}{81},$$

e

$$\binom{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)}{4!} = \frac{80-36\sqrt{5}}{4!} = \frac{20-9\sqrt{5}}{6}.$$

1.1.2 Insiemi numerici

ESERCIZIO 1.5 **Insiemi superiormente e inferiormente limitati**

Stabilire se ciascuno dei seguenti insiemi è superiormente o inferiormente limitato:

① $\mathbb{N}$; ② $E = [-3, 4)$; ③ $\mathbb{Z}$.

Soluzione

Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ si dice *superiormente limitato* se esiste (almeno) un numero reale M maggiore o uguale a ciascun elemento di E, un numero M di questo genere si dice *maggiorante*; E si dice *inferiormente limitato* se esiste (almeno) un numero reale m minore o uguale a ciascun elemento di E, m si dice *minorante*; si dice *limitato* un insieme che è al contempo superiormente e inferiormente limitato.

① I numeri $-21, -4.1, -0.3, 0$ sono tutti minoranti di $\mathbb{N}$, mentre non esiste alcun numero reale M più grande di ogni numero intero, quindi $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato.

② I numeri $-21, -4.1, -371$ sono tutti minoranti di E, i numeri $10, 12.1, 3124$ sono tutti maggioranti di E che pertanto è un insieme limitato.

③ Poiché non esiste alcun numero più grande o più piccolo di ogni numero intero relativo, $\mathbb{Z}$ non è né superiormente né inferiormente limitato.

ESERCIZIO 1.6 **Estremo superiore ed estremo inferiore**
Massimo e minimo di $E \subset \mathbb{R}$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono) degli insiemi seguenti:

① $E_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

② $E_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \dfrac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

③ $E_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$;

④ $E_4 = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x} > x\right\}$;

⑤ $E_5 = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x} < x\right\}$.

Soluzione

Dato un insieme di numeri reali $E \subset \mathbb{R}$ si chiama *estremo superiore* di E (e si indica con $\sup E$) il minimo dei suoi maggioranti. Se E non è superiormente limitato l'estremo superiore di E non esiste (alternativamente, si pone $\sup E = +\infty$). Se l'estremo superiore di E è esso stesso un elemento di E, allora viene detto anche *massimo* di E (in simboli $\max E$), se $\sup E \notin E$, allora il massimo di E non esiste; analoghe definizioni valgono per l'*estremo inferiore* e per il *minimo*.

① L'insieme E_1 è formato dai numeri

$$E_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots\right\},$$

si tratta di frazioni con il numeratore sempre uguale a 1, mentre il denominatore cresce al crescere di n, quindi $x = 1$ è il più grande elemento di E_1, per cui $\max E_1 = \sup E_1 = 1$; al crescere di n le frazioni diventeranno sempre più piccole, e quindi vicine a 0, che potrebbe quindi essere l'estremo inferiore di E_1; verifichiamo questo fatto: innanzitutto osserviamo, poiché nessun elemento di E_1 è negativo, che 0 è un minorante, dobbiamo poi mostrare che 0 è il più grande di tutti i minoranti di E_1, procediamo per assurdo: supponiamo che esista un numero $\bar{y}$ più grande di 0 e più piccolo di ogni elemento x di E_1, ossia un numero $\bar{y}$ tale per cui

$$0 < \bar{y} \leq x, \ \forall x = \frac{1}{n^2+1} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \bar{y} \leq \frac{1}{n^2+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

se risolviamo rispetto a n questa disequazione troviamo

$$n \leq \sqrt{\frac{1}{\bar{y}} - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

e quest'ultima disequazione afferma che ogni numero intero positivo è minore di $\sqrt{\frac{1}{\bar{y}} - 1}$, ossia che $\mathbb{N}$ è superiormente limitato, siamo arrivati all'assurdo; possiamo allora affermare che $\inf E_1 = 0$, poiché poi $0 \notin E_1$, allora $\min E_1$ non esiste.

② In questo caso, l'insieme E_2 è formato da

$$E_2 = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{17}, -\frac{1}{26}, \dots\right\},$$

gli elementi di E_2 si addensano attorno a 0 da entrambe le direzioni, e quindi si vede subito che l'insieme E_2 ha un massimo ($x = 1$) e un minimo ($x = -\frac{1}{2}$), pertanto

$$\sup E_2 = \max E_2 = 1, \qquad \inf E_2 = \min E_2 = -\frac{1}{2}.$$

③ L'insieme E_3 è formato da numeri che, se n è pari, si addensano verso $x = 1$ da sinistra, mentre se n è dispari si addensano verso $x = -1$ da destra:

si dimostra, come nel punto ①, che -1 e 1 sono gli estremi inferiore e superiore di E_3, mentre non sono elementi di E_3, quindi

$$\sup E_3 = 1, \qquad \inf E_3 = -1, \qquad \nexists \max E_3, \qquad \nexists \min E_3.$$

④ Risolvendo la disequazione, otteniamo

$$E_4 = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

e quindi

$$\sup E_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \inf E_4 = -1, \qquad \nexists \max E_4, \qquad \min E_4 = -1.$$

⑤ Risolvendo ancora la disequazione, otteniamo

$$E_5 = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$

e quindi[b]

$$\nexists \sup E_5, \qquad \inf E_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \nexists \max E_5, \qquad \nexists \min E_5.$$

ESERCIZIO 1.7 **Differenza tra $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$**

Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (qualora esistano) di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

① $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 \leq 20\}$;
② $E_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \leq 20\}$;
③ $E_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0, x^2 \leq 20\}$.

Soluzione

Tutti e tre gli insiemi sono costituiti da numeri che verificano due richieste: sono positivi e il loro quadrato non supera 20; la differenza fondamentale tra E_1, E_2 e E_3 risiede nella diversa natura dei numeri da cui sono composti, infatti notiamo innanzitutto che, poiché gli interi relativi sono un sottoinsieme dei numeri razionali, che a loro volta costituiscono un sottoinsieme dei numeri reali (in simboli: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), allora

$$E_3 \subset E_2 \subset E_1.$$

① Partiamo da E_1: essendo formato da tutti i numeri reali x maggiori di 0 e minori o uguali di $\sqrt{20}$, possiamo immediatamente dire che $E_1 = (0, \sqrt{20}]$, e quindi

$$\sup E_1 = \sqrt{20}, \qquad \inf E_1 = 0, \qquad \max E_1 = \sqrt{20}, \qquad \nexists \min E_1.$$

[b] In alternativa, si dice che $\sup E_5 = +\infty$.

② E_2 è composto da tutti i numeri razionali appartenenti all'intervallo $(0, \sqrt{20}]$:

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x \in (0, \sqrt{20}]\};$$

osserviamo che $\sqrt{20} \notin \mathbb{Q}$, e che tuttavia esistono numeri razionali prossimi quanto si vuole a $\sqrt{20}$, che quindi rimane estremo superiore di E_2, anche se non ne può più costituire il massimo:

$$\sup E_2 = \sqrt{20}, \qquad \inf E_2 = 0, \qquad \nexists \max E_2, \qquad \nexists \min E_2.$$

③ Radicalmente diversa è la natura di E_3: esso è infatti costituito da un numero *finito* di elementi:

$$E_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \in (0, \sqrt{20}]\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

in un insieme finito di numeri, troveremo necessariamente il più piccolo e il più grande, che quindi saranno il minimo e il massimo, i numeri trovati ne saranno anche estremo inferiore e superiore rispettivamente, pertanto

$$\sup E_3 = \max E_3 = 4, \qquad \inf E_3 = \min E_3 = 1.$$

ESERCIZIO 1.8 **Dimostrazioni per induzione, I**

Dimostrare, usando il principio di induzione, che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *valgono le due relazioni seguenti*:

$$① \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad ② \ 2^n \geq 2n.$$

Soluzione

La dimostrazione per induzione si usa per provare la validità di una formula (o più in generale: di una proprietà) che dev'essere vera per tutti i valori dell'intero n che vi è contenuto, a partire da un determinato n_0 (nei due casi del testo: $n_0 = 1$). Si procede in due passi, nel modo seguente:

passo 1: si dimostra che la formula è valida se $n = n_0$;
passo 2: si dimostra che, se la formula è valida per un generico intero $\bar{n} \geq n_0$, allora è valida anche per l'intero successivo[c] $\bar{n} + 1$.

[c] Si può vedere la dimostrazione per induzione come l'equivalente matematico di un *effetto domino*, se allineiamo in piedi una dopo l'altra tante tessere del domino, e vogliamo farle cadere tutte in un'unica occasione, dobbiamo accertarci di due fatti: 1) che qualcuno dia una spinta alla prima (e questo è l'equivalente del passo 1, e 2) che le tessere siano sufficientemente vicine l'una all'altra in modo che ciascuna, cadendo, spinga la successiva (l'equivalente del passo 2).

① Verifichiamo che la formula è vera per $n = 1$:

$$1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}; \qquad \text{(vero)}$$

ora, supponendo vera la formula per un generico $\bar{n}$, dimostriamo che vale anche la formula per $\bar{n} + 1$: ovvero, potendo affermare per ipotesi che

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} i^2 = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1)}{6},$$

dobbiamo arrivare a dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}+1} i^2 = \frac{(\bar{n}+1)[(\bar{n}+1)+1][2(\bar{n}+1)+1]}{6};$$

partiamo allora da ciò che dobbiamo dimostrare, e mettiamo in evidenza la parte ove compare la nostra ipotesi (nel nostro caso: la somma dei quadrati di tutti gli interi da 1 a $\bar{n} + 1$ può essere vista come la somma dei quadrati di tutti gli interi da 1 a $\bar{n}$, più il quadrato di $\bar{n} + 1$):

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}+1} i^2 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} i^2 + (\bar{n}+1)^2;$$

al posto della somma da 1 a $\bar{n}$ scriviamo la sua espressione secondo l'ipotesi:

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}+1} i^2 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} i^2 + (\bar{n}+1)^2 = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1)}{6} + (\bar{n}+1)^2,$$

se nell'ultimo membro mettiamo tutto a denominatore comune, ricaviamo:

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}+1} i^2 = \frac{(\bar{n}+1)(2\bar{n}^2+7\bar{n}+6)}{6},$$

e basta effettuare i prodotti per verificare che

$$(\bar{n}+1)(2\bar{n}^2+7\bar{n}+6) = (\bar{n}+1)[(\bar{n}+1)+1][2(\bar{n}+1)+1]$$

e quindi la tesi.

② Iniziamo con il verificare la validità della formula per $n = 1$: otteniamo $2^1 \geq 2 \cdot 1$, che è in effetti vera. Dobbiamo ora dimostrare, per $\bar{n} \geq 1$, la seguente implicazione:

$$2^{\bar{n}} \geq 2\bar{n} \qquad \Rightarrow \qquad 2^{\bar{n}+1} \geq 2(\bar{n}+1);$$

partiamo allora dal primo membro della tesi e maneggiamolo in modo da poter usare l'ipotesi d'induzione (nel passaggio contrassegnato da $\star$):

$$2^{\bar{n}+1} = 2 \cdot 2^{\bar{n}} \overset{\star}{\geq} 2 \cdot 2\bar{n};$$

osservato che $2 \cdot 2\bar{n} = 2\bar{n} + 2\bar{n} \geq 2\bar{n} + 2$ (poiché la nostra formula deve valere per $n \geq 1$, allora in ogni caso $2\bar{n} \geq 2$) e quindi

$$2 \cdot 2\bar{n} \geq 2(\bar{n} + 1), \quad \Rightarrow \quad 2^{\bar{n}+1} \geq 2 \cdot 2\bar{n} \geq 2(\bar{n} + 1),$$

cioè quello che dovevamo dimostrare.

ESERCIZIO 1.9 **Dimostrazioni per induzione, II**

Dimostrare per induzione che il prodotto di tre interi positivi consecutivi è divisibile per 6.

Soluzione

Affermare che un intero m è divisibile per 6 equivale ad affermare che m è un multiplo di 6, e cioè che esiste un altro intero h per cui $m = 6h$. Scritta in formule, l'asserzione che dobbiamo dimostrare corrisponde a:

$$\exists h \in \mathbb{N} : n(n + 1)(n + 2) = 6h, \qquad \forall n \geq 1;$$

quest'affermazione è palesemente vera se $n = 1$, infatti $1(1 + 1)(1 + 2) = 6$; supponendola adesso valida per $\bar{n} \geq 1$, la dimostriamo per $\bar{n} + 1$, cioè mostriamo la validità della seguente implicazione:

$$\exists h \in \mathbb{N} : \bar{n}(\bar{n} + 1)(\bar{n} + 2) = 6h \quad \Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : (\bar{n} + 1)(\bar{n} + 2)(\bar{n} + 3) = 6k.$$

Partiamo come al solito dal primo membro della tesi, separando la parentesi $(\bar{n} + 3)$ isoliamo l'espressione che corrisponde all'ipotesi e (nel passaggio contrassegnato da $\star$) usiamo l'ipotesi di induzione:

$$(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)(\bar{n}+3) = \bar{n}(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)+3(\bar{n}+1)(\bar{n}+2) \overset{\star}{=} 6h+3(\bar{n}+1)(\bar{n}+2);$$

poiché $(n + 1)(n + 2)$, prodotto di due numeri interi consecutivi, è un numero pari[d], possiamo porre $(n + 1)(n + 2) = 2j$, e quindi

$$(\bar{n} + 1)(\bar{n} + 2)(\bar{n} + 3) = 6h + 3(\bar{n} + 1)(\bar{n} + 2) = 6h + 3(2j) = 6(h + j),$$

cioè la tesi.

[d] Anche questa affermazione può essere dimostrata per induzione ...

1.2 Esercizi proposti

10 Scrivere per disteso e – ove possibile – calcolare le seguenti sommatorie:

$$① \sum_{i=1}^{8}(0.1)^i\,; \qquad ② \sum_{i=0}^{10}(-1)^i\,; \qquad ③ \sum_{i=0}^{10}[1+(-1)^i]a_i\,.$$

$$[① \ 0.11111111, \quad ② \ 1, \quad ③ \ 2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})]$$

11 Scrivere le seguenti somme usando il simbolo di sommatoria:

① $1-3\cdot 2^2+5\cdot 2^4-7\cdot 2^6+9\cdot 2^8-11\cdot 2^{10}$;

② $a_1+a_2-a_3-a_4+a_5+a_6-a_7-a_8+a_9+a_{10}$;

③ $x^2y-x^4y^2+x^8y^3-x^{16}y^4+\ldots+x^{512}y^9$.

$$\left[① \ \textstyle\sum_{i=0}^{5}(-1)^i(2i+1)2^{2i}\right]$$

$$\left[② \ \textstyle\sum_{i=0}^{4}(-1)^i(a_{2i+1}+a_{2i+2})\right]$$

$$\left[③ \ \textstyle\sum_{i=1}^{9}(-1)^{i+1}x^{2^i}y^i\right]$$

12 Verificare le identità seguenti:

$$① \sum_{i=k}^{n}a_i-\sum_{j=k}^{m}a_j=\sum_{l=m+1}^{n}a_l \qquad (n>m)\,;$$

$$② \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=m+1}^{n+m}a_{i-m}\,; \qquad ③ \sum_{i=0}^{n}a_{2i}+\sum_{i=0}^{n}a_{2i+1}=\sum_{i=0}^{2n+1}a_i\,.$$

13 Determinare il coefficiente numerico di a^2b^8 nello sviluppo di $(3\sqrt{a}-2b)^{12}$.

$$[(3\sqrt{a}-2b)^{12}=\ldots+641520a^2b^8+\ldots]$$

14 Determinare il coefficiente di $\sqrt{x^3}$ e il termine noto nello sviluppo di

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}\right)^9.$$

$$\left[(\tfrac{2}{\sqrt{x}}+\tfrac{x}{2})^9=\ldots+252\sqrt{x^3}+672+\ldots\right]$$

15 Mostrare che, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

16 Determinare $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

① $\binom{n}{4} = \binom{n}{13}$; ② $\binom{m}{2} = 6$; ③ $\binom{\alpha}{3} - \binom{\alpha+1}{5} = 0$.

$\left[① \ n = 17, \ ② \ m = 4, \ ③ \ \alpha = 1 \pm 3\sqrt{2}\right]$

17 Determinare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, stabilire poi se l'estremo inferiore è minimo e se l'estremo superiore è massimo:

① $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$; ② $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

③ $\{x \in \mathbb{R} : x = \sin n, n \in \mathbb{N}\}$; ④ $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \sin^2 n, n \in \mathbb{N}\right\}$.

[① $\inf = \min = 0, \sup = 1, \nexists \max$]
[② $\inf = \min = 0, \sup = \max = 1$]
[③ $\inf = -1, \nexists \min, \sup = 1, \nexists \max$]
[④ $\inf = \min = 0, \sup = 1, \nexists \max$]

18 Dati gli insiemi

$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+2} > \sqrt{x-1}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{4-x} > -2\right\}$,

$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-5}\right\}$, $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{10x - x^2 - 25} > -1\right\}$;

determinare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, stabilire poi se l'estremo inferiore è minimo e se l'estremo superiore è massimo:

① $A \cup B$; ② $A \cap B$; ③ $B \cup C$; ④ $B \cap C$; ⑤ $A \cap D$; ⑥ $B \cup D$; ⑦ $C \cup D$.

[① $\sup = +\infty, \inf = -\infty, \nexists \min, \nexists \max$]
[② $\sup = \max = 4, \inf = \min = 1$]
[③ $\sup = 5, \inf = -\infty, \nexists \min, \nexists \max$]
[④ $\sup = \max = 4, \inf = 2, \nexists \min$]
[⑤ $\sup = \max = \inf = \min = 5$]
[⑥ $\sup = \max = 5, \inf = -\infty, \nexists \min$]
[⑦ $\sup = \max = 5, \inf = 2, \nexists \min$]

19 Determinare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi, stabilire poi se l'estremo inferiore è minimo e se l'estremo superiore è massimo.

① $\{x \in \mathbb{R} : x = \alpha\beta, 0 < \alpha < 2, -1 < \beta < 2\}$;
② $\{x \in \mathbb{R} : x = \alpha\beta, 0 < \alpha < 2, -1 < \beta < 2, \alpha + \beta \leq 3\}$.

[① $\sup = 4, \inf = -2, \nexists \min, \nexists \max$]
[② $\sup = \max = \frac{9}{4}, \inf = -2, \nexists \min$]

20 Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze

$$① \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad ② \sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2; \quad ③ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

21 Dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze

$$① \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}; \quad ② \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \leq \frac{3}{4}.$$

22 Dimostrare per induzione che, per ogni intero $n \geq 1$, il numero $6^n - 1$ è divisibile per 5.

23 Dimostrare per induzione che, per ogni intero $n \geq 1$, il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3.

1.2.1 Suggerimenti

Per l'esercizio 13: Usare il binomio di Newton

$$(3\sqrt{a}-2b)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (3\sqrt{a})^k (-2b)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \left[\binom{12}{k} 3^k (-2)^{12-k}\right] a^{\frac{k}{2}} b^{12-k}$$

con $k = 4$.

Per l'esercizio 14: Scrivere il binomio di Newton

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \left[\binom{9}{k} 2^{2k-9}\right] x^{9-\frac{3}{2}k}$$

e porre $k = 5$ e $k = 6$.

Per l'esercizio 15: Scrivere, con il binomio di Newton, $(1+1)^n$.

Per l'esercizio 16:

① Ricordare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

② Corrisponde all'equazione $\frac{x(x-1)}{2} = 6$, con $x \in \mathbb{N}$.

③ Verificare che

$$\binom{\alpha}{3} - \binom{\alpha+1}{5} = \binom{\alpha}{3}\left(1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha-3)}{20}\right).$$

Per l'esercizio 18: Risolvendo le disequazioni, si ottiene:

$$A = [1, +\infty), \qquad B = (-\infty, 4], \qquad C = (2, 5), \qquad D = \{5\}.$$

Per l'esercizio 21, ② : Dimostrare dapprima che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}.$$

CAPITOLO 2

Elementi di geometria analitica

2.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

2.1.1 Rappresentazione e operazioni con i vettori

ESERCIZIO 2.1 **Rappresentazione grafica dei vettori**

Dati $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, *darne una rappresentazione grafica.*

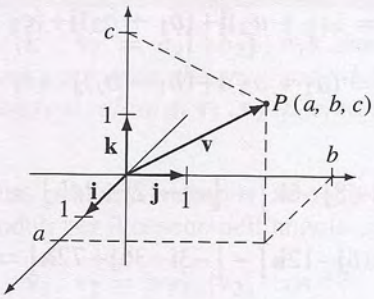
Soluzione

2–k

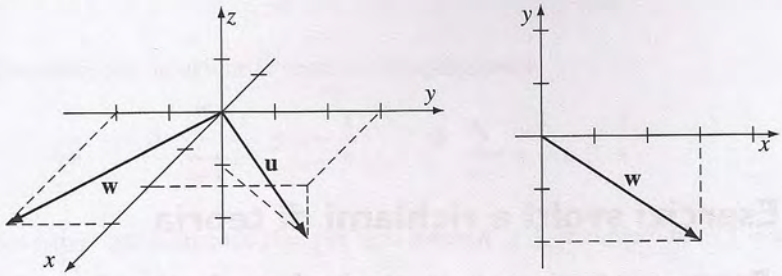
Consideriamo innanzitutto i vettori **i**, **j** e **k**, questi vettori hanno lunghezza unitaria (sono quindi *versori*) e dall'origine sono diretti in maniera concorde ai vari assi, cioè:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \text{ collega l'origine al punto } (1,0,0)\,,\\ &\mathbf{j} \text{ collega l'origine al punto } (0,1,0)\,,\\ &\mathbf{k} \text{ collega l'origine al punto } (0,0,1)\,; \end{aligned}$$

i, **j** e **k** prendono allora il nome di *versori degli assi*. Sappiamo inoltre che la somma di due vettori segue la "regola del parallelogramma", e alla luce di ciò possiamo interpretare il generico vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ come un segmento orientato che dall'origine raggiunge il punto $P(a,b,c)$; inoltre è sempre possibile considerare un vettore del piano (e cioè un vettore della forma $\alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{j}$) come un particolare vettore dello spazio con componente in **k** uguale a zero. La rappresentazione grafica del generico vettore **v** è allora la seguente:



Quindi, **u** e **w** avranno le seguenti rappresentazioni (e notiamo che **w**, poiché la sua componente in **k** è nulla, può essere anche rappresentato come vettore del piano, nella figura a destra):



Osserviamo poi che, qualora sia più comodo, scriveremo il vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ nella forma

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.2 **Operazioni con i vettori (prodotto per un numero, somma e sottrazione)**

Dati $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = -\mathbf{i}-12\mathbf{j}+24\mathbf{k}$, *calcolare* $3\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}+\mathbf{w}$ *e* $4\mathbf{v}-3\mathbf{w}$.

Soluzione

Il prodotto di un vettore **u** per un numero λ si effettua moltiplicando ciascuna componente del vettore per il numero in questione:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{u} = \lambda a\mathbf{i}+\lambda b\mathbf{j}+\lambda c\mathbf{k}\,;$$

quindi $3\mathbf{v} = 6\mathbf{i}+12\mathbf{j}-9\mathbf{k}$.

La somma (e la differenza) tra due vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ si calcolano sommando (o sottraendo) le componenti corrispondenti: se $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$, risulta

$$\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 = (a_1+a_2)\mathbf{i}+(b_1+b_2)\mathbf{j}+(c_1+c_2)\mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2 = (a_1-a_2)\mathbf{i}+(b_1-b_2)\mathbf{j}+(c_1-c_2)\mathbf{k}\,;$$

pertanto

$$2\mathbf{v}+\mathbf{w} = \left[4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k}\right]+\left[-\mathbf{i}-12\mathbf{j}+24\mathbf{k}\right] = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+18\mathbf{k}\,;$$

$$4\mathbf{v}-3\mathbf{w} = \left[8\mathbf{i}+16\mathbf{j}-12\mathbf{k}\right]-\left[-3\mathbf{i}-36\mathbf{j}+72\mathbf{k}\right] = 11\mathbf{i}+52\mathbf{j}-84\mathbf{k}\,.$$

ESERCIZIO 2.3 **Modulo di un vettore**

Calcolare il modulo di $\mathbf{v} = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}-10\mathbf{k}$.

Soluzione

Il modulo di un vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, equivalente alla distanza tra l'origine e il punto $P(a, b, c)$, è la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;$$

nel nostro caso

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-10)^2} = \sqrt{110}\,.$$

ESERCIZIO 2.4 **Vettore congiungente due punti. Distanza tra due punti**

Determinare il vettore $\overrightarrow{PQ}$, ove $P(1, 3, -2)$ e $Q(2, 1, 1)$; quanto vale la distanza δ tra P e Q?

Soluzione

Le componenti di un vettore che unisce due punti sono date dalle differenze tra le coordinate del punto finale (nel nostro caso Q) e quelle del punto iniziale (cioè P):

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-3 \\ 1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\,;$$

la distanza tra due punti P e Q è la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ che li unisce, e tale lunghezza è uguale al modulo del vettore che da uno qualsiasi dei due porta all'altro:

$$\delta = \text{lunghezza}(\overline{PQ}) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QP}\right|,$$

nel nostro caso $\delta = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{14}$.

2.1.2 Prodotti, angoli, proiezioni, aree e volumi

ESERCIZIO 2.5 **Formula del prodotto scalare**

Siano $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ due vettori, usando la definizione di prodotto scalare e sapendo che esso gode della proprietà distributiva rispetto alla somma, ricavare il valore di $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ in termini delle loro componenti.

Soluzione

Il prodotto scalare tra due qualsiasi vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è dato per definizione dal prodotto dei rispettivi moduli per il coseno dell'angolo compreso ϑ

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\vartheta\,;$$

notiamo quindi che se due vettori non nulli $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono perpendicolari, il loro prodotto scalare si annullerà, e viceversa:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2\,;$$

invece, il prodotto scalare di un vettore **v** per se stesso (visto che l'angolo compreso ϑ è nullo) è uguale al quadrato del modulo di **v**:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 .$$

Tornando all'esercizio, usando la proprietà distributiva, possiamo allora scrivere che

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}) \cdot (a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}) \\ &= a_1a_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + a_1c_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad +b_1a_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + b_1b_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + b_1c_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad +c_1a_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + c_1b_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + c_1c_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) ;\end{aligned}$$

ora, sappiamo che **i**, **j** e **k** sono tra di loro perpendicolari (cioè: il coseno dell'angolo compreso è zero) e che $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, pertanto

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 ,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= a_1a_2 \cdot 1 + a_1b_2 \cdot 0 + a_1c_2 \cdot 0 \\ &\quad +b_1a_2 \cdot 0 + b_1b_2 \cdot 1 + b_1c_2 \cdot 0 \\ &\quad +c_1a_2 \cdot 0 + c_1b_2 \cdot 0 + c_1c_2 \cdot 1 \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 .\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.6 **Prodotto scalare tra due vettori, misura dell'angolo compreso**

Dati $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, *calcolare* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$; *determinare il coseno dell'angolo* ϑ *compreso tra* **v** *e* **w**; *l'angolo* ϑ *è acuto o ottuso?*

Soluzione

Il prodotto scalare tra **v** e **w** si calcola (vedi esercizio precedente) sommando i prodotti tra le componenti corrispondenti, nel nostro caso quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 5 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -5 ;$$

inoltre, dalla definizione di prodotto scalare,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos\vartheta ,$$

segue che

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} ;$$

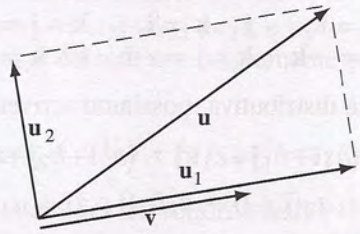
quindi, poiché $|\mathbf{v}| = \sqrt{50}$ e $|\mathbf{w}| = \sqrt{10}$, troviamo

$$\cos\vartheta = \frac{-5}{\sqrt{500}} = -\frac{1}{10}\sqrt{5} ;$$

infine, poiché $\cos\vartheta < 0$, ϑ è ottuso.

ESERCIZIO 2.7 **Proiezione ortogonale di un vettore nella direzione di un altro**

Dati $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{v} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, *decomporre* $\mathbf{u}$ *in due vettori* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$, *il primo parallelo e il secondo perpendicolare a* $\mathbf{v}$.



Soluzione

Dalla teoria, dati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, sappiamo che la formula per calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ nella direzione di $\mathbf{v}$ è

$$(\text{proiezione di } \mathbf{u} \text{ nella direzione di } \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}}\mathbf{v},$$

possiamo usare allora questa formula per determinare $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{-9}{14}(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = \frac{9}{14}\mathbf{i}-\frac{18}{14}\mathbf{j}-\frac{27}{14}\mathbf{k};$$

una volta ricavato $\mathbf{u}_1$, otteniamo $\mathbf{u}_2$ per differenza tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \frac{19}{14}\mathbf{i}+\frac{74}{14}\mathbf{j}-\frac{43}{14}\mathbf{k}.$$

ESERCIZIO 2.8 **Formula del prodotto vettore**

Siano $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ *due vettori, usando la definizione di prodotto vettore e sapendo che esso gode della proprietà distributiva rispetto alla somma, ricavare il valore di* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ *in termini delle loro componenti.*

Soluzione

Per definizione sappiamo che il prodotto vettore $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ è un vettore perpendicolare ai due fattori, orientato secondo la "regola della mano destra"[a], e avente modulo uguale al prodotto dei moduli per il seno dell'angolo compreso ϑ:

$$|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin\vartheta\,.$$

[a] Cioè: se $\mathbf{v}_1$ è diretto come il pollice della mano destra e $\mathbf{v}_2$ come l'indice, allora $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ sarà diretto come il medio; in altre parole: se si pensano i tre vettori applicati nello stesso punto, $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ vedrà $\mathbf{v}_1$ alla sua destra e $\mathbf{v}_2$ alla sua sinistra.

Immediatamente si ricava, allora, che per ogni vettore $\mathbf{v}$ il prodotto $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è uguale a zero, e quindi, per i tre versori degli assi,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0\,;$$

inoltre, seguendo la regola della mano destra, abbiamo che

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}\,, \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}\,. \end{array}$$

Usando quindi la proprietà distributiva, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 &= \big(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}\big) \wedge \big(a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}\big) \\ &= a_1a_2(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) + a_1c_2(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) \\ &\quad +b_1a_2(\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}) + b_1b_2(\mathbf{j} \wedge \mathbf{j}) + b_1c_2(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) \\ &\quad +c_1a_2(\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}) + c_1b_2(\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}) + c_1c_2(\mathbf{k} \wedge \mathbf{k}) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 &= \big(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}\big) \wedge \big(a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}\big) \\ &= (a_1a_2)\cdot 0 + (a_1b_2)\mathbf{k} + (a_1c_2)(-\mathbf{j}) \\ &\quad +(b_1a_2)(-\mathbf{k}) + (b_1b_2)\cdot 0 + (b_1c_2)(\mathbf{i}) \\ &\quad +(c_1a_2)(\mathbf{j}) + (c_1b_2)(-\mathbf{i}) + (c_1c_2)\cdot 0 \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i}+(c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j}+(a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.9 **Prodotto vettore, area del parallelogramma**

Dati $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = 4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-12\mathbf{k}$, *calcolare* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$; *calcolare l'area del parallelogramma* $\mathcal{P}$ *individuato da* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Soluzione

Il prodotto vettore $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ tra i vettori $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ si calcola (vedi esercizio precedente) mediante la formula

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i}+(c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j}+(a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}\,,$$

nel nostro caso

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot(-12) - 5\cdot 5 \\ 5\cdot 4 - 2\cdot(-12) \\ 2\cdot 5 - (-3)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 44 \\ 22 \end{bmatrix};$$

inoltre, osserviamo che, per definizione di prodotto vettore,

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \sin\vartheta\,,$$

e tale quantità corrisponde all'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, pertanto

$$\text{area}(\mathcal{P}) = |\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = \sqrt{11^2 + 44^2 + 22^2} = 11\sqrt{21}\,.$$

ESERCIZIO 2.10 **Prodotto misto, volume del parallelepipedo**

Calcolare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, *ove* $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = -\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; *calcolare poi il volume del parallelepipedo* $\mathfrak{V}$ *individuato dai tre vettori.*

Soluzione

Se $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_3 = a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, il prodotto misto $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$ (in cui si calcola necessariamente prima il prodotto vettore) è dato da

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)\,;$$

e osserviamo che, se nessuno dei tre vettori è nullo, il prodotto misto è uguale a zero se e solo se i tre vettori sono complanari; nel nostro caso, quindi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) = -20\,.$$

Inoltre, il modulo del prodotto misto corrisponde al volume del parallelepipedo individuato da da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e quindi

$$\text{volume}(\mathfrak{V}) = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = 20\,.$$

2.1.3 Rette nel piano

ESERCIZIO 2.11 **Retta passante per due punti. Equazione cartesiana e parametrica**

Determinare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, *passante per i punti* $P_0(1,2)$ *e* $P_1(3,-5)$.

Soluzione

Sappiamo che, dati due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) non allineati sulla stessa verticale, l'equazione della retta passante per entrambi si scrive nella forma

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)\,;$$

nel nostro caso allora, scegliendo $(x_0, y_0) = (1,2)$ e $(x_1, y_1) = (3,-5)$, ricaviamo

$$y - 2 = \frac{-5-2}{3-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{2}x + \frac{11}{2}\,.$$

Per scrivere l'equazione parametrica di una qualsiasi retta, è sufficiente disporre delle coordinate di un punto $P_0(x_0, y_0)$ appartenente ad essa e del suo vettore direzione $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$: se $Q(x, y)$ è il generico punto della retta, allora il vettore $\overrightarrow{P_0Q}$ dovrà essere proporzionale a $\mathbf{v}$

$$\overrightarrow{P_0Q} = t\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix};$$

esplicitando rispetto a x e a y si ottiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e pertanto, in ogni caso, l'equazione parametrica si scrive

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{\text{punto} \\ \text{generico}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{di } P_0}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{direzione}}}.$$

Questa equazione parametrica è equivalente anche a ciascuna delle due seguenti equazioni (vettoriale e scalare rispettivamente):

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j}, \qquad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

Scegliamo allora come punto su $\mathfrak{r}$ il punto P_0 e come vettore direzione il vettore $\mathbf{v}_\mathfrak{r} = \overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, ottenendo

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix},$$

o anche le due forme seguenti

$$\mathfrak{r} : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (1 + 2t)\mathbf{i} + (2 - 7t)\mathbf{j}, \qquad \mathfrak{r} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 7t \end{cases}.$$

ESERCIZIO 2.12 — Dall'equazione cartesiana all'equazione parametrica

Determinare un'equazione parametrica per ciascuna delle rette $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ e $\mathfrak{r}_4$, le cui equazioni cartesiane sono

① $\mathfrak{r}_1 : y = 3x - 4$; ② $\mathfrak{r}_2 : 3x - 2y = 6$,

③ $\mathfrak{r}_3 : 3y = 4$; ④ $\mathfrak{r}_4 : x = -2$.

Soluzione

Per scrivere l'equazione parametrica di una retta, abbiamo bisogno di ricavare due cose dalla sua equazione cartesiana: a) il vettore direzione e b) un punto della retta stessa.

① Se la retta è scritta nella forma usuale $y = mx + q$, per le coordinate di un suo punto possiamo nell'equazione sostituire $x = 0$, trovando $y = q$, e quindi la

retta passa per $(0, q)$; un vettore direzione è per esempio $\mathbf{v} = \mathbf{i} + m\mathbf{j}$, e quindi la corrispondente equazione è[b]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = q + mt \end{cases};$$

l'equazione parametrica di $\mathfrak{r}_1$ sarà allora

$$\mathfrak{r}_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

② Passiamo a $\mathfrak{r}_2$, che è data in forma generale $ax + by = c$: per ricavare un punto della retta possiamo per esempio – a nostra scelta – porre zero una delle due coordinate e risolvere rispetto all'altra, se poniamo $y = 0$ ricaviamo $x = \frac{c}{a}$, e quindi la retta passa per $(\frac{c}{a}, 0)$, mentre un vettore direzione è $\mathbf{v} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, scritta allora in forma vettoriale l'equazione diventa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix};$$

l'equazione parametrica di $\mathfrak{r}_2$ sarà per esempio

$$\mathfrak{r}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

③ ④ $\mathfrak{r}_3$ e $\mathfrak{r}_4$ sono più particolari: entrambe sono scritte in forma generale ($ax + by = c$), però $\mathfrak{r}_3$ è orizzontale (ovvero: parallela all'asse x) e $\mathfrak{r}_4$ verticale (ovvero: parallela all'asse y), un vettore direzione di $\mathfrak{r}_3$ sarà allora $\mathbf{i}$, il versore dell'asse x, e un vettore direzione di $\mathfrak{r}_4$ sarà $\mathbf{j}$, il versore dell'asse y; per quanto riguarda la scelta di un punto di $\mathfrak{r}_3$ e di un punto di $\mathfrak{r}_4$, siccome la caratteristica di tutti i punti di $\mathfrak{r}_3$ è avere $y = \frac{4}{3}$, un qualsiasi punto della forma $(\ldots, \frac{4}{3})$ andrà bene, per semplicità potremo allora scegliere $(0, \frac{4}{3})$; analogamente, per $\mathfrak{r}_4$, potremmo scegliere $(-2, 0)$, e le equazioni diventano

$$\mathfrak{r}_3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{r}_4 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[b] In effetti, si poteva giungere allo stesso risultato ponendo $x = t$, ricavando quindi y dall'equazione stessa della retta sottoforma di $y = mt + q$.

ESERCIZIO 2.13 **Dall'equazione parametrica all'equazione cartesiana**

Determinare le equazioni cartesiane delle rette $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ *e* $\mathfrak{s}_3$, *le cui equazioni parametriche sono*:

$$① \ \mathfrak{s}_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$② \ \mathfrak{s}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad ③ \ \mathfrak{s}_3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

In questo caso, dobbiamo passare dall'equazione parametrica all'equazione cartesiana. Cominciamo con il caso generale, la retta ha equazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases},$$

con $a \neq 0, b \neq 0$, possiamo allora "eliminare t", ricavandone il valore da ciascuna equazione ed eguagliando tra loro i due risultati ottenuti:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \quad t = \frac{y - y_0}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

in quest'ultima espressione vi è già tutto ciò che occorre, basta un po' di algebra e ci si riconduce – a scelta – a un'espressione del tipo $ax + by = c$ o $y = mx + q$.

① Nel caso di $\mathfrak{s}_1$, ricaviamo t:

$$t = \frac{x - 2}{-3} \quad t = \frac{y - 5}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 5}{4},$$

da cui, liberando dai denominatori, $4x - 8 = -3y + 15$ e quindi, in alternativa,

$$\mathfrak{s}_1 : 4x + 3y = 23, \qquad \mathfrak{s}_1 : y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}.$$

② ③ Diverso è il caso di $\mathfrak{s}_2$ e $\mathfrak{s}_3$: in entrambe, una delle due componenti del vettore direzione è zero. Per quanto riguarda $\mathfrak{s}_2$, il suo vettore direzione è un multiplo del vettore **i**, e pertanto $\mathfrak{s}_2$ è orizzontale, la sua equazione sarà allora della forma $y = k$, poiché dall'equazione leggiamo che $\mathfrak{s}_2$ passa per $(4, 3)$, questo significa che $\mathfrak{s}_2$ passerà per tutti i punti aventi ordinata 3, e quindi la sua equazione sarà

$$\mathfrak{s}_2 : y = 3;$$

ragionando in maniera del tutto analoga per $\mathfrak{s}_3$, verticale in quanto il suo vettore direzione è proporzionale a **j**, possiamo concludere che la sua equazione cartesiana sarà

$$\mathfrak{s}_3 : x = 1.$$

ESERCIZIO 2.14 **Retta per un punto, parallela a una retta data**

Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche delle seguenti rette:

① $\mathfrak{s}_1$, *passante per* $P_1(3, 10)$ *e parallela a* $\mathfrak{r}_1 : y = 5x + 1$;
② $\mathfrak{s}_2$, *passante per* $P_2(4, -2)$ *e parallela a*

$$\mathfrak{r}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix};$$

③ $\mathfrak{s}_3$, *passante per* $P_3(3, -2)$ *e parallela all'asse* y.

Soluzione

① Due rette date in forma cartesiana $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ sono parallele se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

pertanto ogni retta parallela a $\mathfrak{r}_1$ avrà equazione $y = 5x + k$, per trovare $\mathfrak{s}_1$ basterà determinare il corretto valore di k, imponendo il passaggio per P_1, ossia imponendo $y = 10$ e $x = 3$, si trova $k = -5$, quindi

$$\mathfrak{s}_1 : y = 5x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

② Due rette scritte in forma parametrica sono parallele se i vettori direzione sono proporzionali, e se non sono coincidenti, quindi per determinare l'equazione di $\mathfrak{s}_2$, visto che $P_2 \notin \mathfrak{r}_2$, sarà sufficiente sostituire le coordinate di P_2 a quelle del punto $(1, 7)$ nell'equazione di $\mathfrak{r}_2$:

$$\mathfrak{s}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + 5y = -6.$$

③ L'asse y ha equazione cartesiana $x = 0$, una retta parallela a questa deve avere equazione del tipo $x = k$, imponendo il passaggio per P_3 abbiamo

$$\mathfrak{s}_3 : x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.15 **Retta per un punto, perpendicolare a una retta data**

Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche delle seguenti rette:

① $\mathfrak{s}_1$, *passante per* $P_1(-4, 3)$ *e perpendicolare a*

$$\mathfrak{r}_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

② $\mathfrak{s}_2$, *passante per* $P_2(7,5)$ *e perpendicolare a* $\mathfrak{r}_2 : 3x + 4y = 12$;
③ $\mathfrak{s}_3$, *passante per* $P_3(17,19)$ *e perpendicolare all'asse* y.

Soluzione

① Due rette date in forma parametrica sono perpendicolari se e solo se lo sono i relativi vettori direzione. Osserviamo che, dato il vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, un vettore ad esso perpendicolare è[c] $\mathbf{u} = (-b)\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, pertanto un vettore direzione di $\mathfrak{s}_1$, dovendo essere perpendicolare a $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, vettore direzione di $\mathfrak{r}_1$, potrà per esempio essere

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

quindi imponendo il passaggio per P_1 l'equazione di $\mathfrak{s}_1$ sarà

$$\mathfrak{s}_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y = 1\,.$$

② Riprendendo lo stesso ragionamento sui vettori perpendicolari, possiamo con pochi conti concludere che due rette date in forma cartesiana $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ sono perpendicolari se $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$, pertanto le rette perpendicolari a $\mathfrak{r}_2$ avranno tutte la forma $4x - 3y = k$. Imponendo il passaggio per P_2 troviamo $k = 13$, e allora[d]

$$\mathfrak{s}_2 : 4x - 3y = 13 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

③ Infine $\mathfrak{s}_3$, se è perpendicolare all'asse y avrà equazione $y = k$, inoltre sarà parallela all'asse x, il che significa che un vettore direzione sarà $\mathbf{i}$. Imponendo il passaggio per P_3 le sue equazioni sono

$$\mathfrak{s}_3 : y = 19 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 19 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Distanze nel piano

ESERCIZIO 2.16 **Distanza punto-punto**

Determinare la distanza tra i punti $A(-2,5)$ *e* $B(1,1)$.

[c] Infatti, $[a\mathbf{i} + b\mathbf{j}] \cdot [(-b)\mathbf{i} + a\mathbf{j}] = -ba + ab = 0$, e quindi i due vettori sono perpendicolari.

[d] Con gli stessi conti che abbiamo seguito ora, ci si può rendere conto che il vettore $[a, b]$ e la retta $ax + by = c$ sono perpendicolari.

Soluzione

La distanza tra due punti $P_0(x_0, x_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ è il modulo del vettore che li unisce, cioè – a scelta – $\overrightarrow{P_0P_1}$ o $\overrightarrow{P_1P_0}$, in entrambi i casi

$$\text{distanza}(P_0, P_1) = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,;$$

nel nostro caso prendiamo allora il vettore $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, e

$$\text{distanza}(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5\,.$$

ESERCIZIO 2.17 **Distanza punto-retta**

Determinare la distanza tra il punto $P(11, 3)$ e ciascuna delle tre rette

① $\mathfrak{r}_1 : y = 2x+3$; ② $\mathfrak{r}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; ③ $\mathfrak{r}_3 : x = 6$.

Soluzione

Dato un punto $P_0(x_0, y_0)$ e una retta $\mathfrak{s} : ax + by = c$, la distanza tra P_0 e $\mathfrak{s}$ è data dalla formula

$$\text{distanza}(P_0, \mathfrak{s}) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

① Per applicare questa formula al primo caso, occorre innanzitutto riscrivere $\mathfrak{r}_1$ nella forma $-2x + y = 3$, usando la formula troviamo

$$\text{distanza}(P, \mathfrak{r}_1) = \frac{|(-2) \cdot 11 + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{22}{\sqrt{5}}\,.$$

② Allo stesso modo, per applicarla a $\mathfrak{r}_2$, conviene trasformare la sua equazione da parametrica a cartesiana, al solito eliminando t, otteniamo

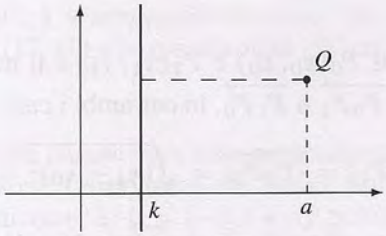
$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3}, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{r}_2 : 3x - 4y = 2\,,$$

e pertanto

$$\text{distanza}(P, \mathfrak{r}_2) = \frac{|3 \cdot 11 + (-4) \cdot 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{19}{5}\,.$$

③ Anche per il terzo caso potremmo ancora ovviamente usare la formula, però basta osservare che la distanza tra una retta verticale $x = k$ e un punto $Q(a, b)$ corrisponde al valore assoluto della differenza tra le ascisse: $|k - a|$, quindi

$$\text{distanza}(P, \mathfrak{r}_3) = |11 - 6| = 5\,.$$



ESERCIZIO 2.18 **Distanza retta-retta**

Determinare la distanza tra $\mathfrak{r} : 2x - 3y = 6$ *e* $\mathfrak{s} : 2x - 3y = 0$.

Soluzione

La distanza tra due rette nel piano è zero se sono incidenti, ed è diversa da zero se sono parallele; le due rette dell'esercizio sono parallele, per calcolarne allora la distanza è sufficiente calcolare la distanza di un punto qualsiasi di una delle due dall'altra; visto che il termine noto di $\mathfrak{s}$ è 0, $\mathfrak{s}$ passa per l'origine, calcoliamo allora la distanza di $\mathfrak{r}$ dall'origine:

$$\text{distanza}(O, \mathfrak{r}) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

2.1.5 Piani nello spazio

ESERCIZIO 2.19 **Piano passante per un punto, perpendicolare a un dato vettore**

Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ *perpendicolare al vettore* $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ *e passante per il punto* $A(1, 3, -2)$.

Soluzione

L'equazione del piano passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ si ricava imponendo $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, ossia

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ove x, y e z sono le coordinate del generico punto P del piano; notiamo quindi che, se il generico piano ha equazione $ax + by + cz = d$, un vettore ad esso perpendicolare è per esempio quello le cui componenti sono gli stessi coefficienti di x, y e z: $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. Nel nostro caso, allora, possiamo ricavare l'equazione di $\mathfrak{P}$ in due modi (quasi identici).

Primo modo: imponiamo, con i dati a nostra disposizione $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 3 \\ z + 2 \end{bmatrix} = 7x + 3y - 2z - 20 = 0.$$

Secondo modo: poiché conosciamo il vettore perpendicolare a $\mathfrak{P}$, ossia $\mathbf{u}$, l'equazione di $\mathfrak{P}$ avrà la forma $7x + 3y - 2z = d$; determiniamo allora d imponendo che questa equazione venga soddisfatta dalle coordinate di A (sostituendole ai generici x, y e z):

$$7 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{x} + 3 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{y} - 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ -2}}{z} = d \quad \Rightarrow \quad 20 = d\,;$$

si ottiene allora l'equazione cercata $\mathfrak{P} : 7x + 3y - 2z = 20$, ovviamente equivalente alla precedente.

ESERCIZIO 2.20 **Piano passante per un punto, parallelo a un piano dato**

Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ parallelo al piano $x - 2y + 3x = 20$, passante per il punto $P(1, 2, -5)$.

Soluzione

I piani $\mathfrak{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\mathfrak{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ sono coincidenti se le due equazioni in realtà sono la stessa equazione, cioè se tutti i coefficienti sono tra loro proporzionali:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

sono invece paralleli se coefficienti di x, y e z sono proporzionali (che è come dire che i due vettori perpendicolari sono proporzionali) e i termini noti no:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$

Il piano $\mathfrak{P}$ parallelo a $x - 2y + 3z = 20$ avrà perciò equazione $x - 2y + 3z = d$, allo scopo di ottenere il passaggio per il punto $P(1, 2, -5)$ imponiamo che le coordinate di P soddisfino tale equazione:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{x} - 2\underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{y} + 3\underset{\substack{\uparrow \\ -5}}{z} = d\,,$$

da cui $d = -18$, e pertanto $\mathfrak{P} : x - 2y + 3z = -18$.

ESERCIZIO 2.21 **Piani aventi inclinazioni particolari**

Dati i punti $P(5, 7, 11)$ e $Q(2, 1, 5)$, scrivere le equazioni dei seguenti piani:

① $\mathfrak{P}_1$: *verticale, passante per P e per Q;*
② $\mathfrak{P}_2$: *contenente l'asse z e passante per P;*
③ $\mathfrak{P}_3$: *contenente l'asse x e passante per P;*
④ $\mathfrak{P}_4$: *orizzontale e passante per P;*
⑤ $\mathfrak{P}_5$: *passante per P e per Q e parallelo all'asse y.*

Soluzione

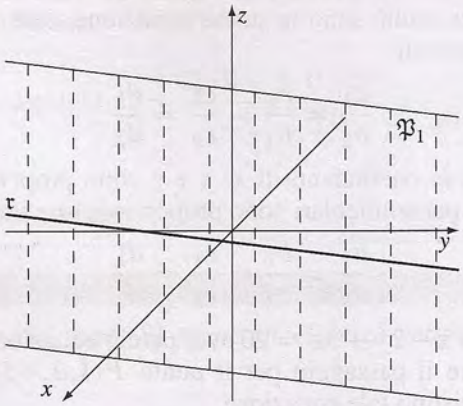
① Un piano verticale possiede per necessità un vettore perpendicolare orizzontale, ossia della forma $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+0\cdot\mathbf{k}$, pertanto il più generico piano verticale avrà come equazione $ax + by = d$, imponendo che le coordinate di P e Q soddisfino quest'equazione, ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 5a + 7b = d \\ 2a + b = d \end{cases},$$

risolto da tutte le terne (a, b, d) proporzionali a $(2, -1, 3)$, e quindi un'equazione di $\mathfrak{P}_1$ è

$$\mathfrak{P}_1 : 2x - y = 3;$$

notiamo che l'equazione di $\mathfrak{P}_1$ è equivalente all'equazione di una retta nel piano xy, questo perché un piano verticale è in ogni caso formato da tutti i punti la cui coordinata z è libera di variare, mentre x e y sono legati da una relazione che (limitatamente al piano xy) definisce la retta $\mathfrak{r}$ "supporto" del piano.



② Il piano $\mathfrak{P}_2$ contiene l'asse z, pertanto è verticale, e quindi anch'esso sarà della forma $ax + by = d$, occorre in più che $d = 0$ perché il piano $\mathfrak{P}_2$, contenendo l'asse z, dovrà passare per l'origine. L'equazione di $\mathfrak{P}_2$ sarà $ax + by = 0$, imponendo il passaggio per P si trova l'equazione $5a + 7b = 0$, soddisfatta da tutte le coppie (a, b) proporzionali a $(7, -5)$, e quindi un'equazione di $\mathfrak{P}_2$ è

$$\mathfrak{P}_2 : 7x - 5y = 0;$$

(possiamo allora ricavare una regola più generale: perché uno degli assi coordinati sia contenuto in un piano, occorre e basta che $d = 0$ e che il coefficiente corrispondente alla coordinata in questione si annulli[e]).

[e] Cioè: se il piano $ax + by + cz = 0$ contiene l'asse x allora $a = 0$, se contiene l'asse y allora $b = 0$ e, come abbiamo visto, se contiene l'asse z allora $c = 0$; per esempio, il piano $x + 3z = 0$ contiene l'asse y.

③ Il piano $\mathfrak{P}_3$ contiene l'asse x, e quindi la sua equazione sarà del tipo $by + cz = 0$, imponendo il passaggio per P abbiamo $7b + 11c = 0$, soddisfatta da tutte le coppie (b, c) proporzionali a $(11, -7)$, quindi

$$\mathfrak{P}_3 : 11y - 7z = 0\,.$$

④ Il piano $\mathfrak{P}_4$ è orizzontale, e composto da tutti e soli i punti dello spazio che hanno in comune con P la coordinata z, ossia i punti per cui $z = 11$; quest'uguaglianza *costituisce* da sola l'equazione del piano $\mathfrak{P}_4$; alternativamente, osservando che $\mathfrak{P}_4$ è orizzontale, sappiamo che il suo vettore perpendicolare dev'essere verticale, quindi della forma $0{\cdot}\mathbf{i}+0{\cdot}\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, l'equazione di $\mathfrak{P}_4$ è allora $cz = d$; imponendo al solito il passaggio per P si ricava $11c = d$, posto infine $c = 1$ si ricava $d = 11$, da cui

$$\mathfrak{P}_4 : z = 11\,.$$

⑤ Il piano $\mathfrak{P}_5$ è parallelo all'asse y e contiene il segmento $\overline{QP}$, quindi il suo vettore perpendicolare $\mathbf{v}$ dev'essere contemporaneamente perpendicolare all'asse y (e quindi perpendicolare a $\mathbf{j}$, che dell'asse y è il versore) e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{QP} = 3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, ricordando allora le proprietà del prodotto vettore:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{v} \perp \mathbf{j}\\ \mathbf{v} \perp \overrightarrow{QP}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{j} \wedge \overrightarrow{QP} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{k}\,;$$

ne segue che l'equazione di $\mathfrak{P}_5$ avrà la forma $6x - 3z = d$, per ricavare d imponiamo (al solito) il passaggio per P (o per Q, a nostra scelta): $6 \cdot 5 - 3 \cdot 11 = d$, ossia $d = -3$, possiamo allora scrivere l'equazione di $\mathfrak{P}_5$ nella forma $6x - 3z = -3$, o (dividendo tutto per 3)

$$\mathfrak{P}_5 : 2x - z = -1\,.$$

ESERCIZIO 2.22 **Fasci di piani non paralleli**

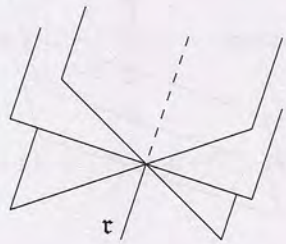
Determinare l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}$, contenente i due piani

$$\mathfrak{P}_1 : x + y - z = 2 \qquad e \qquad \mathfrak{P}_2 : 2x - y + 3z = 8;$$

inoltre, determinare il piano $\mathfrak{P}^*$ di $\mathcal{F}$ che contiene il punto $P^*(1, 2, 3)$.

Soluzione

Dati due piani non paralleli (che pertanto si intersecheranno in una retta $\mathfrak{r}$, detta *supporto*), l'insieme costituito da tutti i piani aventi in comune $\mathfrak{r}$ è detto "fascio di piani":



La generica equazione di un fascio $\mathcal{F}$ generato da due piani $\mathfrak{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\mathfrak{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ è

$$\mathcal{F} : \lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Al variare di λ e μ quest'equazione descrive tutti e soli i piani appartenenti a $\mathcal{F}$, in effetti ciascun piano corrisponde a infinite coppie (tra loro proporzionali) di valori λ, μ; a volte, per comodità, si usa eliminare uno dei due parametri: ad esempio, dividendo l'equazione di $\mathcal{F}$ per μ (e rinominando γ il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$) si ottiene

$$\mathcal{F} : \gamma(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + (a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ora a ciascun piano del fascio corrisponde uno e un solo valore di γ, con un'unica eccezione: il piano $\mathfrak{P}_1$, che si ottiene da $\mathcal{F}$ ponendo $\mu = 0$ e λ qualsiasi, non compare più nell'equazione "semplificata"; questa circostanza merita ovviamente attenzione.

Nel nostro caso, l'equazione del fascio è (sottintendendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\mathcal{F} : \lambda(x + y - z - 2) + \mu(2x - y + 3z - 8) = 0.$$

Per individuare il piano $\mathfrak{P}^*$ di $\mathcal{F}$ che contiene il punto P^*, è sufficiente sostituire le coordinate di quest'ultimo nell'equazione di $\mathcal{F}$:

$$\lambda(1 + 2 - 3 - 2) + \mu(2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 3 - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 2\lambda,$$

quindi il piano cercato si ottiene dall'equazione di $\mathcal{F}$ con una coppia (λ, μ) tale che $\mu = 2\lambda$, ad esempio $\lambda = 1, \mu = 2$, e dunque

$$\mathfrak{P}^* : (x + y - z - 2) + 2(2x - y + 3z - 8) = 0,$$

cioè $\mathfrak{P}^* : 5x - y + 5z = 18$.

ESERCIZIO 2.23 **Fasci di piani paralleli**

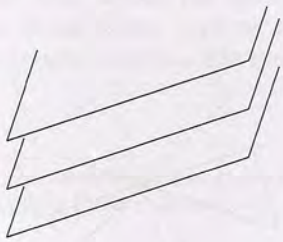
Determinare l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli al piano

$$\mathfrak{P} : 2x + 3y - z = 3;$$

inoltre, determinare il piano $\mathfrak{P}^*$ di $\mathcal{F}$ che contiene il punto $P^*(1, 1, 1)$.

Soluzione

L'insieme costituito da tutti i piani paralleli ad un piano $ax + by + cz = d$ assegnato è ancora un fascio di piani,



la cui equazione (assai intuitiva) è

$$\mathcal{F} : ax + by + cz = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nel nostro caso, il fascio $\mathcal{F}$ ha equazione (sottintendendo nuovamente $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\mathcal{F} : 2x + 3y - z = \lambda,$$

è immediato verificare che il piano $\mathfrak{P}^*$ ha equazione $\mathfrak{P}^* : 2x + 3y - z = 4$.

2.1.6 Rette nello spazio

ESERCIZIO 2.24 **Retta passante per due punti**

Determinare l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, *passante per i punti* $P(1, 2, 3)$ *e* $Q(2, 1, -5)$.

Soluzione

Per scrivere l'equazione parametrica di una qualsiasi retta nello spazio, esattamente come accade nel piano, è sufficiente disporre delle coordinate di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ appartenente ad essa e del suo vettore direzione $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$: l'equazione parametrica, come nel caso bidimensionale, ove x, y, z sono le coordinate del punto generico, si scrive allora

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\text{punto} \\ \text{generico}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{di } P_0}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{direzione}}}$$

che equivale anche a ciascuna delle due equazioni parametriche seguenti (vettoriale e scalare rispettivamente):

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (x_0 + at)\mathbf{i}+(y_0 + bt)\mathbf{j}+(z_0 + ct)\mathbf{k}, \qquad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}.$$

Nel nostro caso, quindi, possiamo scegliere come punto su $\mathfrak{r}$ il punto P e come vettore direzione il vettore $\mathbf{v}_\mathfrak{r} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-8\mathbf{k}$, ottenendo in alternativa

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad \text{oppure} \qquad \mathfrak{r} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 8t \end{cases},$$

o anche

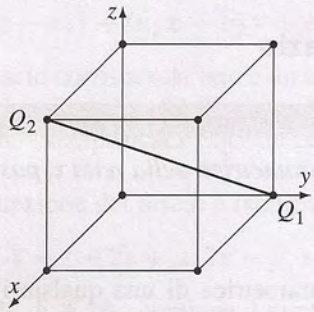
$$\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1 + t)\mathbf{i}+(2 - t)\mathbf{j}+(3 - 8t)\mathbf{k}.$$

ESERCIZIO 2.25 **Retta passante per un punto, parallela a una data direzione**

Dato il cubo $\mathfrak{C}$ avente i vertici in

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0,0) & - & (1,0,0) & - & (0,1,0) & - & (0,0,1) \\ (1,1,0) & - & (0,1,1) & - & (1,0,1) & - & (1,1,1) \end{array}$$

scrivere l'equazione della retta $\mathfrak{r}$, passante per $P(1,4,-9)$ e parallela alla diagonale di $\mathfrak{C}$ passante per $(0,1,0)$.



Soluzione

Sappiamo (vedi esercizi precedenti) che l'equazione della retta passante per P_0 (x_0, y_0, z_0) e parallela alla direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ è data (ad esempio) da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix};$$

nel nostro caso, poiché la diagonale citata congiunge $Q_1(0,1,0)$ e $Q_2(1,0,1)$, un vettore direzione è $\mathbf{v}_\mathfrak{r} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, e quindi l'equazione cercata è

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ovvero $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1+t)\mathbf{i}+(4-t)\mathbf{j}+(-9+t)\mathbf{k}$.

ESERCIZIO 2.26 **Rette aventi direzioni particolari**

Scrivere le equazioni parametriche delle seguenti rette:

① $\mathfrak{r}$, *passante per $P_1(2,4,-1)$ e parallela all'asse y;*
② $\mathfrak{s}$: *passante per $P_2(7,3,5)$, incidente e perpendicolare all'asse x.*

Soluzione

① Se la retta $\mathfrak{r}$ è parallela all'asse y, un suo vettore direzione è il versore dell'asse y, ossia $\mathbf{j}$, quindi l'equazione parametrica sarà a scelta

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = 2\mathbf{i}+(4+t)\mathbf{j}-\mathbf{k}\,.$$

② La retta $\mathfrak{s}$ è perpendicolare all'asse x, pertanto devono valere tre affermazioni:

- il suo vettore direzione $\mathbf{v}_{\mathfrak{s}} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ sarà perpendicolare al versore $\mathbf{i}$ dell'asse x, cioè $\mathbf{v}\,.\,\mathbf{i} = 0$, ciò comporta $a = 0$, e quindi $\mathbf{v} = 0\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$,
- $\mathfrak{s}$ è incidente all'asse x, il che significa che deve passare per un punto dell'asse x, avente cioè coordinate $(\bar{x}, 0, 0)$,
- poiché $\mathfrak{s}$ è perpendicolare all'asse x, l'ascissa sarà costante per tutti i suoi punti, e quindi dev'essere uguale all'ascissa del punto P_2, ciò significa che $\bar{x} = 7$,

$\mathfrak{s}$ deve quindi passare per i punti P_2 e $(7, 0, 0)$, l'equazione parametrica sarà allora $\mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = 7\mathbf{i}+(3+3t)\mathbf{j}+(5+5t)\mathbf{k}$, ossia

$$\mathfrak{s} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3+3t \\ z = 5+5t \end{cases}.$$

ESERCIZIO 2.27 **Un punto assegnato appartiene a una retta data?**

Stabilire se il punto $P(-1, 9, -2)$ appartenga o meno alla retta $\mathfrak{r}$ di equazione

$$\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (2+t)\mathbf{i}+(3-2t)\mathbf{j}+(4+t)\mathbf{k}\,.$$

Soluzione

Perché un certo punto $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ appartenga a una retta

$$\mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (x_0+at)\mathbf{i}+(y_0+bt)\mathbf{j}+(z_0+ct)\mathbf{k}$$

occorre che esista un particolare valore del parametro t (chiamiamolo $\bar{t}$) in corrispondenza del quale l'equazione parametrica di $\mathfrak{s}$ fornisca proprio le coordinate di P, devono quindi essere simultaneamente verificate le tre relazioni che forniscono l'ascissa x, l'ordinata y e la quota z dei punti di $\mathfrak{s}$, cioè deve esistere un unico valore $\bar{t}$ che verifichi le tre equazioni:

$$\begin{cases} \bar{x} = x_0 + a\bar{t} \\ \bar{y} = y_0 + b\bar{t} \\ \bar{z} = z_0 + c\bar{t} \end{cases};$$

nel nostro caso il sistema diventa

$$\begin{cases} -1 = 2+t \\ 9 = 3+t(-2) \\ -2 = 4+t \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -6 \end{matrix};$$

poiché le tre equazioni non sono verificate simultaneamente, P non appartiene a $\mathfrak{r}$.

ESERCIZIO 2.28 **Retta parallela a una retta data**

Scrivere l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{s}$*, parallela a*

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e passante per il punto $P(-10, 3, 2)$.

Soluzione

Due rette sono parallele se i vettori direzione sono proporzionali, poiché il vettore direzione di $\mathfrak{r}$ è $\mathbf{v}_{\mathfrak{r}} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, possiamo usare $\mathbf{v}_{\mathfrak{r}}$ anche come vettore direzione di $\mathfrak{s}$, imponendo poi che $\mathfrak{s}$ passi per P, l'equazione di $\mathfrak{s}$ diventa

$$\mathfrak{s}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.29 **Equazioni cartesiane o generali di una retta**

Scrivere le equazioni generali delle seguenti rette:

① $\mathfrak{r}_1$*: passante per il punto* $P_1(1, 0, -4)$ *e parallela al vettore* $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}-6\mathbf{j}+8\mathbf{k}$;
② $\mathfrak{r}_2$*: passante per il punto* $P_2(1, 2, 3)$*, incidente all'asse* z *e parallela al piano* xy;
③ $\mathfrak{r}_3$*: passante per il punto* $P_3(4, 1, -5)$ *e parallela all'asse* y.

Soluzione

Una retta può essere individuata tramite un punto e la direzione (come nell'equazione parametrica) oppure come intersezione di due piani non paralleli, quest'intersezione è data, nella sua forma più generale, da una coppia di equazioni, che prendono il nome di *equazioni cartesiane* della retta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

che, poi, possono essere raggruppate in un'unica riga, nel nostro caso per esempio:

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0.$$

Se poi le tre componenti del vettore direzione della retta $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ sono tutte diverse da zero, un modo immediato di scrivere le due equazioni (che sovente prendono il nome di *equazioni generali*) della retta che passa per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il seguente[f]

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

[f] Nel caso qui sopra, potremmo dire che i due piani di cui la nostra retta è l'intersezione sono per esempio

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \text{e} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Se invece le tre componenti del vettore direzione della retta non sono tutte diverse da zero, le due equazioni non saranno riconducibili a un'espressione come quest'ultima, ma sarà comunque possibile – come dicevamo prima – individuare la nostra retta con le equazioni di due piani cui essa appartiene.

① Partiamo da $\mathfrak{r}_1$: le componenti del vettore direzione sono tutte diverse da zero, basta usare le formule:

$$\mathfrak{r}_1 : \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-6} = \frac{z+4}{8}.$$

② Per $\mathfrak{r}_2$, bisogna osservare che, essendo parallela al piano xy, non è possibile scriverne le equazioni generali (il coefficiente c è uguale a zero), tuttavia possiamo sempre esprimere $\mathfrak{r}_2$ come intersezione di due piani, ovviamente le scelte sono infinite; osserviamo, per cominciare, che $\mathfrak{r}_2$ è orizzontale (parallela al piano xy), il valore di z dei suoi punti sarà costante (e quindi uguale alla quota di P_2, che è 3), e allora $\mathfrak{r}_2$ è contenuta nel piano $z = 3$. Essendo poi $\mathfrak{r}_2$ incidente all'asse z dovrà passare per un suo punto, di ascissa $x = 0$ e ordinata $y = 0$; poiché la quota dev'essere 3, $\mathfrak{r}_2$ passerà per il punto $(0, 0, 3)$; l'altro piano sarà allora un qualsiasi piano passante per $(0, 0, 3)$ e per $(1, 2, 3)$, il più semplice è $2x = y$; le equazioni cartesiane di $\mathfrak{r}_2$ saranno allora

$$\begin{cases} z = 3 \\ 2x = y \end{cases}$$

o, alternativamente, raggruppandole in una:

$$\begin{cases} z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = z - 3 = 0.$$

③ Per quanto riguarda $\mathfrak{r}_3$, essendo parallela a un asse (nel nostro caso l'asse y), i suoi punti avranno ascissa e quota costante, ne segue che $\mathfrak{r}_3$ è contenuta sia nel piano $x = 4$, sia nel piano $z = -5$, ecco quindi che le sue equazioni cartesiane saranno

$$\begin{cases} x = 4 \\ z = -5 \end{cases}, \quad \text{o anche} \quad x - 4 = z + 5 = 0.$$

ESERCIZIO 2.30 **Dall'equazione parametrica di una retta alle equazioni cartesiane (caso generico)**

Scrivere le equazioni cartesiane della retta

$$\mathfrak{r} : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (5 + 3t)\mathbf{i} + (-6 + 2t)\mathbf{j} + (7 - 4t)\mathbf{k}.$$

Soluzione

Data una retta generica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

in cui a, b e c sono diversi da zero, per passare alle equazioni cartesiane (in questo caso, anzi, alle equazioni generali) è sufficiente ricavare i tre valori di t dati dall'equazione parametrica:

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \qquad t = \frac{y - y_0}{b}, \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

e uguagliarli tra loro:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Nel nostro caso allora le equazioni cartesiane di $\mathfrak{r}$ saranno

$$\mathfrak{r} : \frac{x - 5}{3} = \frac{y + 6}{2} = \frac{z - 7}{-4},$$

o anche, liberando dai denominatori,

$$\mathfrak{r} : 4x - 20 = 6y + 36 = 21 - 3z.$$

ESERCIZIO 2.31 **Dall'equazione parametrica di una retta alle equazioni cartesiane (casi particolari)**

Scrivere le equazioni generali delle seguenti rette:

$$① \ \mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathfrak{s} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

① Nel vettore direzione $\mathbf{v}_{\mathfrak{r}}$ di $\mathfrak{r}$ una componente (la seconda, nella variabile y) è nulla, quindi non sarà possibile scrivere le equazioni generali come nel caso precedente, risolvendo comunque rispetto a t la prima e la terza equazione ricaviamo una relazione analoga a quella generale, cui bisognerà accostare un relazione *ad hoc* per y:

$$\mathfrak{r} : \frac{x - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}, \ y = 2,$$

a questo punto possiamo liberare dai denominatori la prima equazione, ottenendo $5x - 5 = 2z + 6$, e cioè $5x - 2z - 1 = 0$, ora possiamo accostare questa equazione alla seconda, nella forma $y - 2 = 0$, ottenendo infine l'equazione

$$\mathfrak{r} : 5x - 2z - 1 = y - 2 = 0.$$

② Nel vettore direzione $\mathbf{v}_{\mathfrak{s}}$ di $\mathfrak{s}$ una sola componente è diversa da zero, ciò significa che $\mathfrak{s}$ sarà composta da tutti quei punti aventi y e z uguali rispettivamente a 4 e 1, mentre l'ascissa x sarà libera di variare, le equazioni generali saranno allora le equazioni che vincolano y e z ai loro valori:

$$\mathfrak{s} : y = 4, \ z = 1, \qquad \text{ovvero} \qquad \mathfrak{s} : y - 4 = z - 1 = 0.$$

ESERCIZIO 2.32 **Dalle equazioni generali o cartesiane di una retta all'equazione parametrica**

Scrivere le equazioni parametriche delle seguenti rette:

① $\mathfrak{r}_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z}{7}$;

② $\mathfrak{r}_2 : x + 3y + 1 = z - y = 2$;

③ $\mathfrak{r}_3 : 3x - 2y = z - 3 = 6$.

Soluzione

① L'equazione della retta $\mathfrak{r}_1$ è scritta in forma generale, si legge quindi subito che la retta passa per il punto $(3, -4, 0)$ ed è parallela al vettore $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, e quindi

$$\mathfrak{r}_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

② Per quanto riguarda $\mathfrak{r}_2$, la cosa più semplice è scindere le due equazioni, prendere una delle variabili (per esempio y) e utilizzarla come parametro:

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 2 \\ z - y = 2 \end{cases} \xrightarrow{[y=t]} \begin{cases} x + 3t + 1 = 2 \\ y = t \\ z - t = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

e quindi un'equazione parametrica di $\mathfrak{r}_2$ è

$$\mathfrak{r}_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

③ Lo stesso procedimento può essere seguito anche per $\mathfrak{r}_3$ osservando che la coordinata z, essendo fissata, non è utilizzabile come parametro:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ z - 3 = 6 \end{cases} \xrightarrow{[x=t]} \begin{cases} x = t \\ 3t - 2y = 6 \\ z = 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3 + \dfrac{3}{2}t \\ z = 9 \end{cases}$$

e quindi

$$\mathfrak{r}_3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

in alternativa, moltiplicando per 2 il vettore direzione:

$$\mathfrak{r}_3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.33 **Punto in comune tra due rette**

Determinare se le rette

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathfrak{s}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

abbiano o meno un punto in comune.

Soluzione

Se $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$ hanno un punto in comune P, allora le coordinate di P (chiamiamole $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$) devono verificare le equazioni di entrambe le rette, e quindi devono esistere due valori[g] t_1 e t_2 per cui rispettivamente

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

eliminando $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ si ottengono tre equazioni in t_1 e t_2:

$$\begin{cases} 1 + t_1 = 2 + 2t_2 \\ 2 - 3t_1 = t_2 \\ 3 + 2t_1 = 1 - t_2 \end{cases}$$

le prime due equazioni sono verificate se $t_1 = \frac{5}{7}$ e $t_2 = -\frac{1}{7}$, ma questi valori non soddisfano la terza equazione, e quindi le due rette non hanno alcun punto in comune.

ESERCIZIO 2.34 **Rette e fasci di piani**

Determinare l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}$, avente come supporto la retta

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Per individuare $\mathcal{F}$, è sufficiente riscrivere la retta in forma cartesiana, ossia come intersezione di due piani, le cui equazioni serviranno a costruire l'equazione di $\mathcal{F}$.

Eliminando t dall'equazione parametrica, si trova

$$x - 2 = 3 - y = \frac{z - 1}{2},$$

[g] Attenzione: è *fondamentale* attribuire nomi diversi ai parametri delle due rette.

ossia, raggruppando alternativamente primo e secondo oppure primo e terzo membro:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y + z = 7 \end{cases},$$

pertanto l'equazione di $\mathcal{F}$ è

$$\mathcal{F} : \lambda(x + y - 5) + \mu(2y + z - 7) = 0.$$

ESERCIZIO 2.35 — Piano passante per una retta e un punto

Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ contenente il punto $P(6, 1, 1)$ e la retta

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} x + 2z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}.$$

Soluzione

Questo esercizio può essere svolto in due modi.

Primo modo: preso il vettore direzione $\mathbf{v}_\mathfrak{r}$ della retta $\mathfrak{r}$ e un punto Q appartenente a essa, il piano $\mathfrak{P}$ sarà perpendicolare ai vettori $\mathbf{v}_\mathfrak{r}$ e $\overrightarrow{QP}$ e passerà per P. Ponendo $z = t$ nelle equazioni cartesiane di $\mathfrak{r}$, si ricava $x = 2 - 2t$ e $y = x - z - 3 = -1 - 3t$, dunque l'equazione parametrica di $\mathfrak{r}$ è

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pertanto (cambiando il segno di $\mathbf{v}_\mathfrak{r}$ per comodità) $\mathbf{v}_\mathfrak{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $Q(2, -1, 0)$. Dati $\mathbf{v}_\mathfrak{r}$ e $\overrightarrow{QP} = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, il vettore $\mathbf{v}_\mathfrak{P}$ perpendicolare a $\mathfrak{P}$ è perpendicolare a entrambi, quindi

$$\mathbf{v}_\mathfrak{P} = \mathbf{v}_\mathfrak{r} \wedge \overrightarrow{QP} = 5\mathbf{i}-6\mathbf{j}-8\mathbf{k},$$

e quindi l'equazione di $\mathfrak{P}$ è

$$\mathfrak{P} : 5x - 6y - 8z = 16.$$

Secondo modo: il piano $\mathfrak{P}$ appartiene senz'altro al fascio $\mathcal{F}$ avente $\mathfrak{r}$ come supporto:

$$\mathcal{F} : \lambda(x + 2z - 2) + \mu(x - y - z - 3) = 0,$$

e sarà l'unico piano di $\mathcal{F}$ a passare per il punto P, inserendo le coordinate di P nell'equazione di $\mathcal{F}$ ricaviamo l'uguaglianza

$$\lambda(6 + 2 \cdot 1 - 2) + \mu(6 - 1 - 1 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -6\lambda,$$

ponendo allora nell'equazione di $\mathcal{F}$ $\lambda = 1, \mu = -6$ ricaviamo l'equazione di $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P} : (x + 2z - 2) - 6(x - y - z - 3) = 0,$$

ossia (cambiando il segno) $\mathfrak{P} : 5x - 6y - 8z - 16 = 0$.

2.1.7 Distanze nello spazio

ESERCIZIO 2.36 **Distanza punto-punto**

Determinare la distanza δ tra i punti $A(4, -2, 12)$ e $B(5, 5, 5)$.

Soluzione
Esattamente come nel caso bidimensionale, la distanza tra due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ è il modulo del vettore che li unisce, cioè $\overrightarrow{P_0P_1}$ o $\overrightarrow{P_1P_0}$:

$$\text{distanza}(P_0, P_1) = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,;$$

scegliamo il vettore $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i}+7\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, e

$$\delta = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-7)^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}\,.$$

ESERCIZIO 2.37 **Distanza punto-piano**

Determinare la distanza δ tra il punto $P(1, 2, 5)$ e il piano $\mathfrak{P} : 2x-3y+4z = 12$.

Soluzione
La distanza tra il piano $ax + by + cz + d = 0$ e il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ si può calcolare con la formula[h]

$$\text{distanza} = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;$$

nel nostro caso, l'unica cosa cui fare attenzione (vedi la nota) è riscrivere l'equazione di $\mathfrak{P}$ nella forma $ax + by + cz + d = 0$, ossia $\mathfrak{P} : 2x - 3y + 4z - 12 = 0$, a questo punto applichiamo la formula:

$$\delta = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}}\,.$$

ESERCIZIO 2.38 **Distanza piano-piano**

Calcolare la distanza δ tra i piani

$$\mathfrak{P}_1 : x + y - 3z = 10 \quad e \quad \mathfrak{P}_2 : 2x + 2y - 6z = 2\,.$$

[h] Attenzione: l'equazione di un piano si può scrivere in due modi molto simili, per esempio il piano di questo esercizio si può alternativamente scrivere

$$2x - 3y + 4z = 12 \quad \text{o} \quad 2x - 3y + 4z - 12 = 0\,,$$

la formula della distanza tra un punto e un piano è valida se il piano è scritto coerentemente con l'equazione generica indicata, all'occorrenza sarà necessario portare a primo membro il termine noto.

Soluzione

Sulla base delle osservazioni dell'Esercizio 2.20, poiché i coefficienti di x, y e z sono proporzionali e i termini noti no, i piani $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono paralleli; per calcolarne la distanza è sufficiente calcolare la distanza di un punto qualsiasi di uno dei due dall'altro. Prendiamo allora un punto $P \in \mathfrak{P}_2$, per esempio $P(1,0,0)$, e calcoliamo la distanza tra $\mathfrak{P}_1$ e P, seguendo il metodo dell'esercizio precedente:

$$\delta = \text{distanza}(P, \mathfrak{P}_1) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}}.$$

ESERCIZIO 2.39 **Distanza punto-retta**

Calcolare la distanza δ tra il punto $P(1,2,6)$ e la retta

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Dati il generico punto Q e la retta $\mathfrak{s}$ passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}_{\mathfrak{s}}$, la distanza tra Q e $\mathfrak{s}$ è data dalla formula

$$\text{distanza}(Q, \mathfrak{s}) = \frac{|\mathbf{v}_{\mathfrak{s}} \wedge \overrightarrow{P_0 Q}|}{|\mathbf{v}_{\mathfrak{s}}|};$$

nel nostro caso la retta $\mathfrak{r}$ passa per $P_0(2,-1,4)$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_{\mathfrak{r}} = \mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; notiamo che $\overrightarrow{P_0 P} = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ e che quindi

$$\mathbf{v}_{\mathfrak{r}} \wedge \overrightarrow{P_0 P} = -2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+8\mathbf{k},$$

allora

$$\delta = \frac{|\mathbf{v}_{\mathfrak{r}} \wedge \overrightarrow{P_0 P}|}{|\mathbf{v}_{\mathfrak{r}}|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 8^2}}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{52}{21}}.$$

ESERCIZIO 2.40 **Distanza retta-piano**

Calcolare la distanza δ tra il piano $\mathfrak{P} : 2x - y + z = 12$ e la retta

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

La distanza tra un piano e una retta è diversa da zero solo se piano e retta in questione sono paralleli (nel nostro caso $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{r}$ sono paralleli, perché $\mathbf{v}_{\mathfrak{r}} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, vettore direzione di $\mathfrak{r}$, è perpendicolare a $\mathbf{v}_{\mathfrak{P}} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, vettore perpendicolare a $\mathfrak{P}$), in questo caso, per calcolarne la distanza, basta calcolare la distanza dal

piano di uno qualsiasi dei punti di $\mathfrak{r}$; calcoliamo allora la distanza tra $\mathfrak{P}$ e il punto $P(3,4,2)$, ovviamente appartenente alla retta (infatti compare nell'equazione):

$$\delta = \text{distanza}(P, \mathfrak{P}) = \frac{|2\cdot 3 - 1\cdot 4 + 1\cdot 2 - 12|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}}.$$

ESERCIZIO 2.41 Distanza retta-retta. Rette sghembe

Calcolare la distanza δ tra le rette:

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathfrak{s}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Consideriamo due rette $\mathfrak{r}_1$ e $\mathfrak{r}_2$, la prima passante per P_1 e con vettore direzione $\mathbf{v}_1$ e la seconda passante per P_2 e con vettore direzione $\mathbf{v}_2$, allora la loro reciproca posizione nello spazio è una delle seguenti quattro:

- *coincidenti*: le due rette sono in realtà la stessa retta;
- *incidenti*: le due rette hanno in comune un punto;
- *parallele*: le due rette hanno vettori direzione proporzionali (e nemmeno un punto in comune);
- *sghembe*: le due rette non hanno nessun punto in comune, e i vettori direzione non sono proporzionali[i].

Se le rette sono coincidenti o incidenti, la loro distanza è – ovviamente – zero, se sono parallele per calcolarne la distanza basta calcolare la distanza di un punto di una delle due dall'altra, se sono sghembe la loro distanza è data dalla formula

$$\text{distanza}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|}.$$

Sappiamo (dall'Esercizio 2.33) che $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$ non sono incidenti, non sono parallele perché i due vettori direzione non sono proporzionali, quindi sono sghembe, applichiamo allora la formula appena scritta; nel nostro caso chiamiamo $P(1,2,3)$ il punto su $\mathfrak{r}$ e $Q(2,0,1)$ il punto su $\mathfrak{s}$, inoltre i vettori direzione sono rispettivamente $\mathbf{v}_\mathfrak{r} = \mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_\mathfrak{s} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$; ne segue

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_\mathfrak{r} \wedge \mathbf{v}_\mathfrak{s} = \mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k};$$

[i] Notiamo per inciso che nello spazio due rette sono dette *perpendicolari* se sono perpendicolari i loro vettori direzione, indipendentemente dal fatto che siano incidenti o meno, il che significa che due rette possono essere contemporaneamente sghembe e perpendicolari.

da cui $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s = -23$ e che $|\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2} = 5\sqrt{3}$, e quindi

$$\delta = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s|}{|\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s|} = \frac{23}{5\sqrt{3}}.$$

2.1.8 Coniche e quadriche

ESERCIZIO 2.42 **Coniche e loro classificazione**

Stabilire a quali curve notevoli corrispondono le seguenti equazioni:

① $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 8 = 0$; ② $4x^2 - 8y^2 - 16x - 48y - 40 = 0$;

③ $3xy - 3x + 6y + 2 = 0$; ④ $y^2 + x + 4y = 0$.

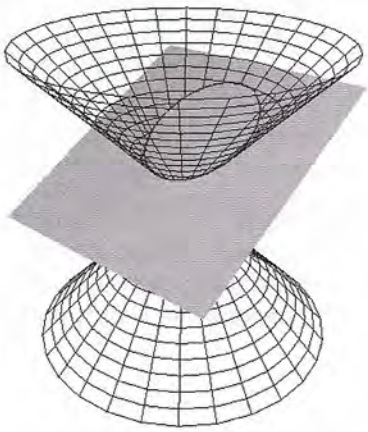
Soluzione

Data una generica equazione di secondo grado in x e y

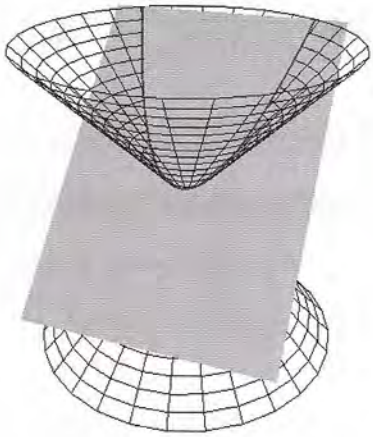
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + b_1x + b_2y + c = 0,$$

è possibile dimostrare che i punti le cui coordinate (x, y) del piano soddisfano tale equazione (ove ve ne siano) formano una curva detta *conica*, perché si ottiene intersecando un cono circolare con un piano. A seconda dell'inclinazione e della posizione del piano si può ottenere:

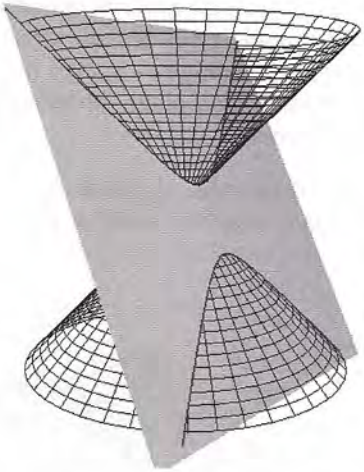
- un'ellisse (un cerchio se il piano è perpendicolare all'asse del cono), se l'inclinazione del piano con l'asse del cono è maggiore di quella della retta generatrice



- una parabola, se l'inclinazione del piano con l'asse del cono coincide con l'inclinazione della retta generatrice



- un'iperbole, se l'inclinazione del piano con l'asse del cono è minore di quella della retta generatrice



In tutti e tre i casi, il piano non passa per il vertice del cono; in tale circostanza si avrebbero delle coniche "degeneri", più precisamente[j]: un punto nel caso corrispondente all'ellisse, una retta nel caso corrispondente alla parabola e una coppia di rette incidenti, nel caso corrispondente all'iperbole.

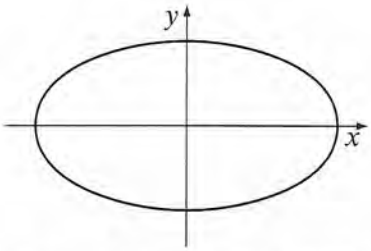
[j] Tralasciamo la trattazione del caso in cui non compaia una delle due variabili: è evidente che un'equazione nella sola x o nella sola y può portare (dal punto di vista della rappresentazione nel piano xy) a rette del tipo $x = h$ o $y = k$.

Per ciascuna curva, esiste una *forma canonica*, cui corrisponde la più semplice rappresentazione grafica della curva stessa:

Ellisse La forma canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a e b sono le lunghezze dei semiassi; se $a = b$ l'ellisse diventa un cerchio, di raggio a



Poiché l'ellisse è anche la curva formata dai punti del piano le cui distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*, hanno somma costante, F_1 e F_2 si trovano sull'asse maggiore dell'ellisse. Con pochi conti si vede che se $a > b$, allora i fuochi sono sull'asse orizzontale, nei punti di ascissa $\pm c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$; viceversa se $b > a$, i fuochi sono sull'asse verticale, nei punti di ordinata $\pm c = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$. Infine è detta *eccentricità* dell'ellisse il rapporto e (sempre minore di 1) tra la distanza focale (cioè la lunghezza del segmento $\overline{F_1 F_2}$) e la lunghezza dell'asse maggiore, se $a > b$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Infine, i casi degeneri: qualora l'equazione assuma la forma

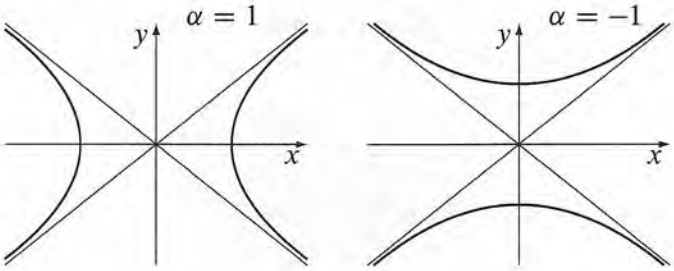
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

siamo in presenza di situazioni "limite": nel primo caso all'equazione corrisponde un solo punto (l'origine degli assi) nel secondo caso si parla talora di *ellisse immaginaria*, poiché nessuna coppia di numeri reali x, y può soddisfare un'equazione del genere.

Iperbole Posto alternativamente $\alpha = 1$, $\alpha - 1$ o ancora (caso degenere) $\alpha = 0$, la forma canonica dell'equazione di un'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \alpha.$$

L'iperbole ha come assi di simmetria gli assi coordinati, se $\alpha = 1$ interseca l'asse delle ascisse nei due vertici $(\pm a, 0)$, se $\alpha = -1$ interseca l'asse delle ordinate nei due vertici $(0, \pm b)$:



in ambo i casi, gli asintoti sono le due rette che si ottengono ponendo $\alpha = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\frac{b}{a}x,$$

se $a = b$ l'iperbole è detta iperbole *equilatera*, i cui asintoti sono le bisettrici dei quadranti. Poiché l'iperbole è anche la curva formata dai punti del piano le cui distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*, hanno differenza costante, F_1 e F_2 si trovano sull'asse che viene intersecato dall'iperbole (detto pertanto *asse focale*). Detto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, con pochi conti si vede che se $\alpha = 1$, allora i fuochi sono sull'asse orizzontale, nei punti di ascissa $\pm c$; viceversa se $\alpha = -1$ i fuochi sono sull'asse verticale, nei punti di ordinata $\pm c$. Infine è detta *eccentricità* dell'iperbole il rapporto e (sempre maggiore di 1) tra la distanza focale (cioè la lunghezza $2c$ del segmento $\overline{F_1F_2}$) e la distanza tra i vertici, se $\alpha = 1$ la distanza tra i vertici è $2a$, e dunque

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}};$$

viceversa, se $\alpha = -1$ la distanza tra i vertici è $2b$, e dunque

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}.$$

Infine, il caso degenere: qualora l'equazione assuma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

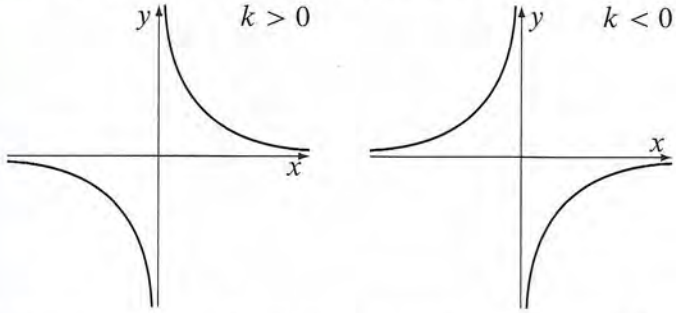
siamo in presenza di una situazione "limite": l'iperbole si è ridotta ad una coppia di rette.
Vi è poi, meritevole di citazione, un caso particolare: presa un'iperbole equilatera

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = \pm 1,$$

ruotandola di metà angolo retto, si giunge a un'iperbole che ha per asintoti gli assi coordinati, la cui equazione è

$$xy = k,$$

ove $k = \frac{a^2}{2} > 0$ se l'iperbole si trova nel primo e nel terzo quadrante, e invece $k = -\frac{a^2}{2} < 0$ se l'iperbole si trova nel secondo e nel quarto quadrante:

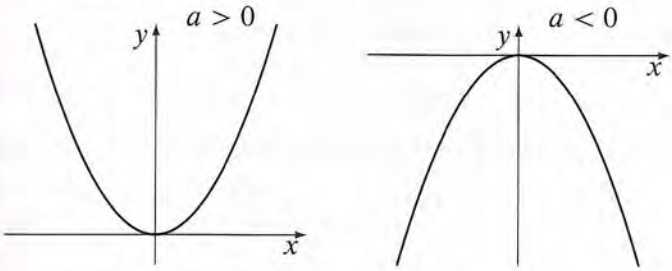


Se $k = 0$ ritroviamo il caso degenere: la curva è composta dai due assi coordinati. Poiché l'iperbole è equilatera l'eccentricità e è in tutti i casi $e = \sqrt{2}$, inoltre se $k > 0$ i fuochi si trovano lungo la retta $y = x$ nei punti $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ e $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$, mentre se $k < 0$ i fuochi sono lungo la retta $y = -x$, nei punti $(\sqrt{-2k}, -\sqrt{-2k})$ e $(-\sqrt{-2k}, \sqrt{-2k})$.

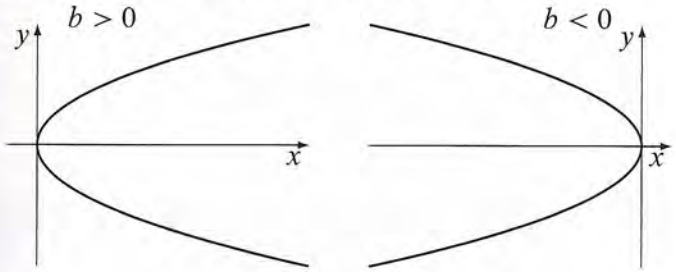
Parabola La forma canonica dell'equazione di una parabola è

$$1) : y = ax^2 \qquad \text{oppure} \qquad 2) : x = by^2.$$

Esaminiamo dapprima il caso 1): la parabola ha l'asse delle ordinate come asse di simmetria, il suo vertice nell'origine e la concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$:



Nel caso 2) le cose si ribaltano in orizzontale: la parabola ha l'asse delle ascisse come asse di simmetria, il vertice è sempre nell'origine, infine la concavità è rivolta verso destra se $b > 0$, verso sinistra se $b < 0$.



Poiché la parabola è anche la curva formata dai punti del piano equidistanti da un punto F (il *fuoco*) e da una retta $\mathfrak{r}$ (la *direttrice*), nel caso $y = ax^2$ è facile verificare che il fuoco si trova sull'asse y, nel punto $F(0, \frac{1}{4a})$, mentre la direttrice è la retta $\mathfrak{r} : y = -\frac{1}{4a}$.

Dall'elenco che abbiamo visto, si deduce che in generale per stabilire la natura della curva in esame è innanzitutto necessario osservare la porzione di secondo grado dell'equazione, ossia

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

ciò che può accadere è[k]

a	b	c	
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	ellisse (se a e c sono concordi) iperbole (se a e c sono discordi)
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	iperbole
$\neq 0$ $= 0$	$= 0$ $= 0$	$= 0$ $\neq 0$	parabola
$\neq 0$ 0 $\neq 0$	$\neq 0$ $\neq 0$ $\neq 0$	$\neq 0$ $\neq 0$ 0	rotazione

I termini di primo grado (escluso in parte il caso della parabola) tengono conto invece delle traslazioni degli assi, ed è sufficiente trattarli "completando i quadrati".

① Completando i quadrati, abbiamo

$$2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 8 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 - 6 = 0.$$

Portando a secondo membro il termine noto e dividendo tutto per 6, otteniamo

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1.$$

Questa è l'equazione di un'ellisse, centrata nel punto $(1, -2)$ di semiassi rispettivamente $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$, avente i fuochi nei punti $(0, -2)$ e $(2, -2)$, e di eccentricità $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

② Completando i quadrati, abbiamo

$$4x^2 - 8y^2 - 16x - 48y - 40 = 4(x-2)^2 - 8(y+3)^2 + 16 = 0,$$

[k] Dalla tabella, si vede che vi sono tre possibilità che non sono comparse nell'elenco precedente, si tratta di coniche ottenute ruotando gli assi, nella tabella sono indicate, ma le tratteremo in dettaglio nel nono capitolo.

ossia

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{2} = -1.$$

Questa è l'equazione di un'iperbole, centrata nel punto $(2, -3)$, il cui asse focale è la retta verticale $x = 2$, i fuochi sono sulla retta $x = 2$, a distanza $c = \sqrt{6}$ dal centro, ovvero nei punti $(2, -3 + \sqrt{6})$ e $(2, -3 - \sqrt{6})$ e l'eccentricità vale $e = \sqrt{3}$; le coordinate dei vertici si ottengono ponendo $x = 2$ nell'equazione, e si ricava $y = -3 \pm \sqrt{2}$; infine gli asintoti dell'iperbole si ottengono uguagliando a 0 il secondo membro:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2).$$

③ Raccogliendo dapprima $3x$ si arriva a scrivere che

$$3xy - 3x + 6y + 2 = 3(x+2)(y-1) + 8 = 0$$

e cioè, dividendo per 3

$$(x+2)(y-1) = -\frac{8}{3},$$

che è l'equazione di un'iperbole equilatera (dunque $e = \sqrt{2}$), centrata nel punto $C(-2, 1)$, avente come asintoti le rette $x = -2$ e $y = 1$, posizionata nei quadranti di nord-ovest e di sud-est rispetto a tali rette, e avente dunque come asse focale la retta $\tau : y = 1 - (x + 2)$; i fuochi si trovano sulla retta τ, a distanza $\frac{\sqrt{6}}{2}$ da C, ovvero nei punti $(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$, e i vertici sono sempre su τ, nei punti $(-2 + \sqrt{\frac{3}{8}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{8}})$ e $(-2 - \sqrt{\frac{3}{8}}, 1 + \sqrt{\frac{3}{8}})$.

④ Completando il quadrato della y e mettendo x in evidenza, abbiamo che

$$y^2 + x + 4y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4 - (y+2)^2.$$

Si tratta dell'equazione di una parabola con asse di simmetria orizzontale (la retta $y = -2$), che rivolge la concavità verso sinistra; il vertice è nel punto $(4, -2)$; il fuoco è nel punto $(\frac{15}{4}, -2)$ e la retta direttrice è la retta verticale $x = \frac{17}{4}$.

ESERCIZIO 2.43 **Quadriche**

Stabilire a quali superfici notevoli corrispondono le seguenti equazioni:

① $3x^2 - 6x + y^2 + 4y + 3z^2 - 6z - 2 = 0$;
② $2x^2 - 4x - 3y^2 - 2z^2 + 8z - 6 = 0$;
③ $x^2 - 2x - y^2 - 2y - 2z^2 + 4 = 0$;
④ $x^2 - 2y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 10 = 0$;
⑤ $x^2 + 4x + y + 3z^2 - 6z + 4 = 0$;
⑥ $x - 2y^2 - 4y + z^2 + 4z + 2 = 0$.

Per ciascuna di esse, stabilire cosa si ottiene quando si interseca la superficie con un piano come $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$ al variare di x_0, y_0 e z_0.

Soluzione

Data una generica equazione di secondo grado in x, y e z

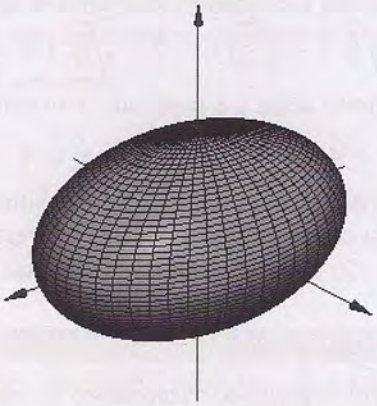
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0,$$

i punti dello spazio le cui coordinate (x, y, z) soddisfano tale equazione, fatti salvi i casi degeneri[1], formano una superficie detta *quadrica*. Prenderemo in esame i casi (non degeneri) in cui compaiono tutte e tre le variabili, senza termini misti (che provengono da rotazioni) e senza termini di primo grado (che tengono in conto le traslazioni). Per ciascun caso vediamo la forma canonica dell'equazione corrispondente e le principali proprietà di simmetria della superficie. Prescindendo dai coefficienti, le equazioni si dividono in tre categorie, a seconda dei segni:

Tre coefficienti di secondo grado, tutti positivi	$x^2 + y^2 + z^2 = \dots$	Ellissoidi e sfere
Tre coefficienti di secondo grado, due positivi e uno negativo	$x^2 + y^2 - z^2 = \dots$	Coni e iperboloidi
Due coefficienti di secondo grado, uno di primo grado	$x^2 + y^2 - z = \dots$ $x^2 - y^2 - z = \dots$	Paraboloidi

Ellissoide L'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

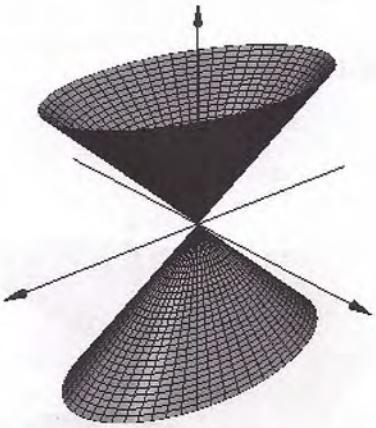


gli assi coordinati sono i tre assi dell'ellissoide; analogamente all'ellisse a, b e c rappresentano le lunghezze dei semiassi. Se intersechiamo l'ellissoide con un piano parallelo ai tre piani coordinati ($x = x_0$, oppure $y = y_0$ o anche $z = z_0$), la curva risultante sarà in tutti i casi un'ellisse.
Naturalmente, se $a = b = c$ l'ellissoide diventa una sfera, di raggio a.

[1] Casi che non affronteremo.

Cono L'equazione è

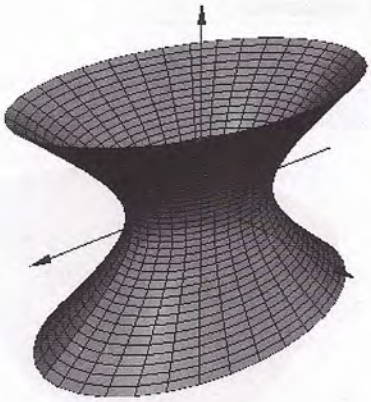
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$



(notiamo che a secondo membro compare 0). L'asse z, corrispondente al fatto che nell'equazione davanti al termine in z compare un segno meno, è l'asse del cono. Se intersechiamo il cono con un piano orizzontale $z = z_0$, troviamo un punto, se $z_0 = 0$; un'ellisse, se $z_0 \neq 0$ (o una circonferenza, se $a = b$). Se intersechiamo il cono con un piano verticale $x = x_0$, troviamo una coppia di rette, se $x_0 = 0$; un'iperbole, se $x_0 \neq 0$. Un discorso analogo vale per l'intersezione con un piano verticale del tipo $y = y_0$.

Iperboloide a una falda L'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

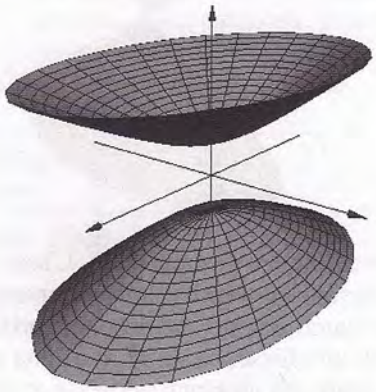


(notiamo che a secondo membro compare 1, un numero positivo). L'asse z è l'asse dell'iperboloide. Se intersechiamo la superficie con un piano

orizzontale $z = z_0$, troviamo un'ellisse (o una circonferenza se $a = b$); se la intersechiamo con un piano verticale $x = x_0$, troviamo un'iperbole con asse focale orizzontale. Un discorso analogo vale per l'intersezione con un piano verticale del tipo $y = y_0$.

Iperboloide a due falde L'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$



(notiamo che a secondo membro compare -1, un numero negativo). L'asse z è l'asse dell'iperboloide. Se intersechiamo la superficie con un piano orizzontale $z = z_0$ troviamo un'ellisse (o una circonferenza se $a = b$), a patto che $z_0^2 > c^2$; se la intersechiamo con un piano verticale $x = x_0$, troviamo un'iperbole con asse focale verticale. Un discorso analogo vale per l'intersezione con un piano verticale del tipo $y = y_0$.

Paraboloide ellittico L'equazione è

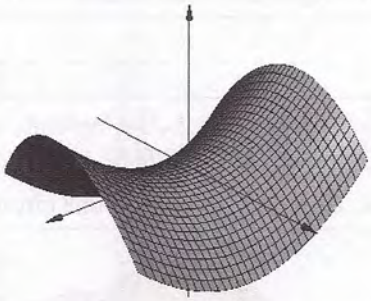
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

L'asse z è l'asse del paraboloide. Se intersechiamo la superficie con un piano orizzontale $z = z_0$, troviamo un'ellisse (o una circonferenza se $a = b$), a

patto che $z_0 > 0$; se la intersechiamo con un piano verticale $x = x_0$, troviamo una parabola con asse verticale. Un discorso analogo vale per l'intersezione con un piano verticale del tipo $y = y_0$.

Paraboloide iperbolico L'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$$



L'asse z è l'asse del paraboloide. Se intersechiamo la superficie con un piano orizzontale $z = z_0$, troviamo un'iperbole, se $z_0 \neq 0$; una coppia di rette, se $z_0 = 0$. Se la intersechiamo con un piano verticale $x = x_0$, troviamo una parabola con asse verticale. Un discorso analogo vale per l'intersezione con un piano verticale del tipo $y = y_0$.

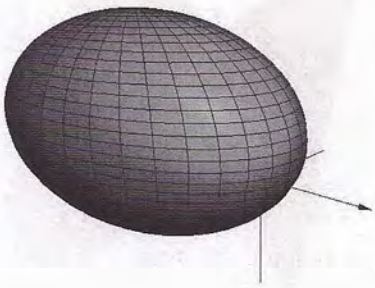
① Completando i quadrati, abbiamo

$$3x^2 - 6x + y^2 + 4y + 3z^2 - 6z - 2 = 3(x-1)^2 + (y+2)^2 + 3(z-1)^2 - 12 = 0,$$

ossia

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{12} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1,$$

che è l'equazione di un ellissoide centrato nel punto $(1, -2, 1)$, ad assi paralleli agli assi coordinati, i cui semiassi nelle direzioni dell'asse x, y e z sono lunghi rispettivamente 2, $2\sqrt{3}$, 2.



Studiando le intersezioni di un ellissoide con un piano parallelo a un piano coordinato, si possono presentare tre casi: il piano non interseca l'ellissoide, il piano è tangente all'ellissoide, il piano interseca effettivamente l'ellissoide e la curva ottenuta è un'ellisse. Le intersezioni avverranno secondo il seguente schema:

per un piano del tipo $x = x_0$

$x_0 < -1$ o $x_0 > 3$	nessuna intersezione
$x_0 = 1 \pm 2$	un punto: $(1 \pm 2, -2, 1)$
$-1 < x_0 < 3$	un'ellisse

per un piano $y = y_0$

$y_0 < -2 - 2\sqrt{3}$ o $y_0 < -2 + 2\sqrt{3}$	nessuna intersezione
$y_0 = -2 \pm 2\sqrt{3}$	un punto: $(1, -2 \pm 2\sqrt{3}, 1)$
$-1 < x_0 < 3$	una circonferenza

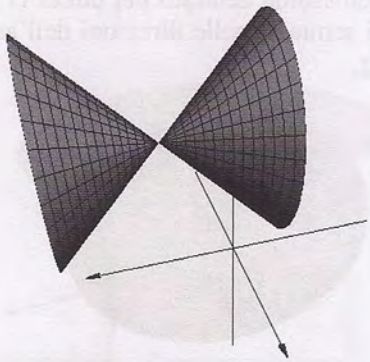
per un piano $z = z_0$

$z_0 < -1$ o $z_0 > 3$	nessuna intersezione
$z_0 = 1 \pm 2$	un punto: $(1, -2, 1 \pm 2)$
$-1 < z_0 < 3$	un'ellisse

② Completando i quadrati, ricaviamo

$$2x^2 - 4x - 3y^2 - 2z^2 + 8z - 6 = 2(x-1)^2 - 3y^2 - 2(z-2)^2 = 0.$$

Notiamo che i coefficienti di x^2, y^2, z^2 non hanno tutti lo stesso segno e che il termine noto è 0. Si tratta dunque dell'equazione di un cono, il cui vertice si trova nel punto $(1, 0, 2)$ e il cui asse è parallelo all'asse riferito alla coordinata con il segno diverso dalle altre, vale a dire l'asse x; in altre parole l'asse del cono è la retta $\mathfrak{r} : y = 0, z = 2$.



Le intersezioni con i piani $x = x_0$ sono ellissi se $x_0 \neq 1$. L'intersezione con il piano $x = 1$ si riduce al solo vertice. Le intersezioni con i piani $y = y_0$ e $z = z_0$ sono iperboli, eccezion fatta per i piani $y = 0$ e $z = 2$, la cui intersezione con il cono è in entrambi i casi una coppia di rette.

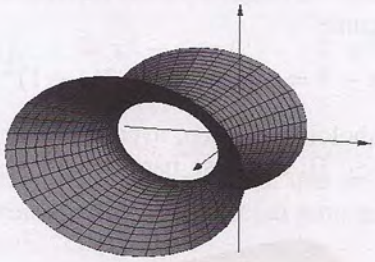
③ Completando i quadrati, ricaviamo

$$x^2 - 2x - y^2 - 2y - 2z^2 + 4 = (x-1)^2 - (y+1)^2 - 2z^2 + 4 = 0.$$

Portando il 4 a secondo membro, dividendo tutto per 4 e cambiando il segno a tutta l'equazione affinché vi sia un'unica coordinata con il segno meno, troviamo

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Si tratta di un iperboloide a una falda, centrato nel punto $(1, -1, 0)$, con asse parallelo all'asse x (la coordinata avente segno diverso dalle altre), ossia la retta $\tau : y = -1, z = 0$.



Le intersezioni con i piani $z = z_0$ e $y = y_0$ in tutti i casi producono delle iperboli, le intersezioni con i piani $x = x_0$ producono ellissi.

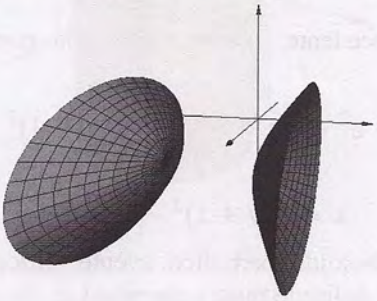
④ Completiamo i quadrati:

$$x^2 - 2y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 10 = x^2 - 2(y+1)^2 + 4(z+1)^2 + 8 = 0.$$

Portando 8 a secondo membro e dividendo per 8, troviamo

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{2} = -1,$$

che è l'equazione di un iperboloide a due falde, centrato nel punto $(0, -1, -1)$ e avente asse parallelo all'asse y, ovvero la retta $\tau : x = 0, z = -1$.



Le intersezioni con i piani $z = z_0$ e $x = x_0$ in tutti i casi producono delle iperboli. Per studiare le intersezioni con i piani $y = y_0$ è sufficiente porre y_0 nell'equazione, ottenendo

$$\frac{x^2}{8} + \frac{(z+1)^2}{2} = \frac{(y_0+1)^2 - 4}{4}.$$

Se il secondo membro è negativo (cioè per $-3 < y_0 < 1$), non vi sono intersezioni. Se il secondo membro si annulla (per $y_0 = 1$ o $y_0 = -3$), l'intersezione è costituita da un punto. Se il secondo membro è positivo ($y_0 < -3$ oppure $y_0 > 1$), l'intersezione è costituita da un'ellisse, il cui asse orizzontale è maggiore dell'asse verticale.

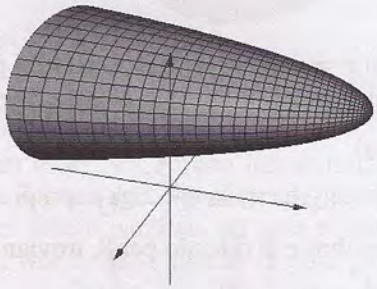
⑤ Notiamo che non compare il termine in y^2; si tratta dunque di un paraboloide. Completando i quadrati otteniamo

$$x^2 + 4x + y + 3z^2 - 6z + 4 = (x+2)^2 + y + 3(z-1)^2 - 3 = 0,$$

che possiamo riscrivere come

$$y - 3 = -(x+2)^2 - 3(z-1)^2.$$

È l'equazione di un paraboloide ellittico, avente vertice in $(-2, 3, 1)$, contenuto tutto nel semispazio $\{y \leq 3\}$, con asse parallelo all'asse y, vale a dire la retta $\mathfrak{r} : x = -2, z = 1$.



Le intersezioni con i piani $z = z_0$ e $x = x_0$ in tutti i casi producono delle parabole. Le intersezioni con i piani $y = y_0$ producono ellissi se $y_0 < 3$, un singolo punto (il vertice del paraboloide) se $y_0 = 3$; non vi è alcuna intersezione se $y_0 > 3$.

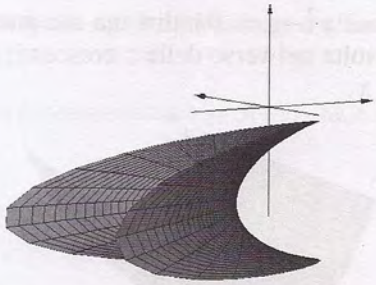
⑥ Come al punto precedente, notiamo che non compaiono termini in x^2, completiamo i quadrati:

$$x - 2y^2 - 4y + z^2 + 4z + 2 = x - 2(y+1)^2 + (z+2)^2 = 0$$

o equivalentemente

$$x = 2(y+1)^2 - (z+2)^2.$$

È l'equazione di un paraboloide iperbolico, avente vertice in $(0, -1, -2)$, con asse parallelo all'asse x, vale a dire la retta $\mathfrak{r} : y = -1, z = -2$.



Le intersezioni con i piani $z = z_0$ e $y = y_0$ in tutti i casi producono delle parabole. Le intersezioni con i piani $x = x_0$ producono iperboli se $x_0 \neq 0$, una coppia di rette se $x_0 = 0$.

ESERCIZIO 2.44 Cilindri

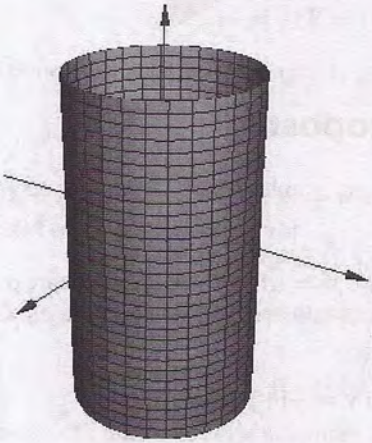
Stabilire a quali superfici notevoli corrispondono le seguenti equazioni:

$$① \; x^2 + y^2 = 1; \qquad ② \; y^2 - z = 0; \qquad ③ \; x^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Soluzione

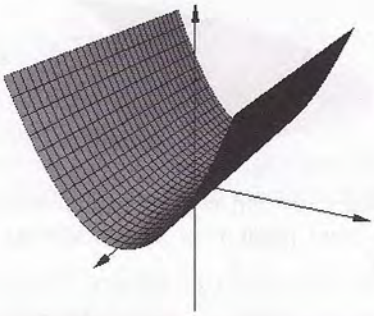
Analogamente al precedente esercizio, anche le superfici di questo esercizio sono quadriche; tuttavia l'assenza (nell'equazione) di una delle variabili indica che le corrispondenti superfici sono costituite da fasci di rette parallele tra loro, e vengono chiamate, per estensione, "cilindri".

① I punti che soddisfano l'equazione sono tutti (e soli) i punti aventi la quota z libera di variare, ma che si proiettano ortogonalmente nel piano xy sulla circonferenza[m] $x^2 + y^2 = 1$; si tratta di un cilindro, di raggio 1, il cui asse coincide con l'asse z.



[m] Attenzione: l'equazione della circonferenza e del cilindro sono identiche! È diverso il significato che attribuiamo a ciascuna, perché è diverso il "terreno di gioco": in un caso il piano xy, nell'altro tutto lo spazio a tre dimensioni.

② Nel piano yz l'equazione $y^2 - z = 0$ individua una parabola, con il vertice nell'origine e la concavità rivolta nel verso delle z crescenti; la superficie è costituita da rette parallele all'asse x.



③ Nel piano xz l'equazione $x^2 - z^2 + 1 = 0$ individua un'iperbole, con asse focale coincidente con l'asse z; poiché y è libero di variare, otteniamo un "cilindro a sezione iperbolica".

2.2 Esercizi proposti

45 Dati $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, calcolare $4\mathbf{v} + 10\mathbf{w}$ e $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

$[4\mathbf{v} + 10\mathbf{w} = 68\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k};\ 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 32\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 18\mathbf{k}]$

46 Dati $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$, determinare α in modo che $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ sia contenuto nel piano yz, quanto vale $\mathbf{u}$ in tal caso?

$[\alpha = -3;\ \mathbf{u} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}]$

47 Calcolare il modulo di $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$\left[|\mathbf{v}| = \sqrt{3}\right]$

48 Dato il vettore $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, determinare α affinché $|\mathbf{v}| = 6$.

$[\alpha = \pm 4]$

49 Dati $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$, determinare α affinché $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 23$.

$[\alpha = 9]$

50 Determinare l'angolo ϑ compreso tra $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

$[\vartheta = \frac{2}{3}\pi]$

51 Calcolare $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, ove $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}-5\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+10\mathbf{k}$.

$[\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -48\mathbf{i}-19\mathbf{j}-\mathbf{k}]$

52 Dati $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, determinare (se possibile) α in modo che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 13\mathbf{i}+5\mathbf{j}-11\mathbf{k}$.

$[\alpha = 3]$

53 Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}-9\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

$[V = 33]$

54 Dati i tre vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+1\mathbf{j}+\alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+1\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$, determinare α affinché siano complanari.

$[\alpha = 4]$

55 Determinare il vettore $\overrightarrow{AB}$ congiungente i punti $A(1, -2, 5)$ e $B(2, 2, 5)$.

$\left[\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}\right]$

56 Determinare il vettore che dal punto $C(1, 3, 6)$ torna all'origine degli assi O.

$\left[\overrightarrow{CO} = -\mathbf{i}-3\mathbf{j}-6\mathbf{k}\right]$

57 Determinare l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, passante per i punti $A(1, 4, -2)$ e $B(5, 4, 5)$.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1 + 4t)\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(-2 + 7t)\mathbf{k}]$

58 Determinare l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, passante per l'origine e per $C(1, -2, 0)$.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}]$

59 Determinare l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, passante per $A(1, 5, 10)$ e parallela al segmento $\overline{PQ}$, ove $P(2, 1, 5)$ e $Q(3, -1, 4)$.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1 + t)\mathbf{i}+(5 - 2t)\mathbf{j}+(10 - t)\mathbf{k}]$

60 Determinare l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{r}$, passante per $A(-1, -2, -4)$ e parallela all'asse y.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = -\mathbf{i}+(t - 2)\mathbf{j}-4\mathbf{k}]$

61 Determinare l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ e passante per il punto $P(1, 1, 1)$.

$[\mathfrak{P} : x - 2y + 8z = 7]$

62 Determinare l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ e passante per il punto $P(-1, 1, 1)$.

$[\mathfrak{P} : 3x - y + 4z = 0]$

63 Determinare l'equazione del piano $\mathfrak{P}$, passante per l'origine e parallelo al piano $2x - y - z = 10$.

$[\mathfrak{P} : 2x - y - z = 0]$

64 Determinare l'equazione del piano $\mathfrak{P}$, passante per $A(1, 2, 5)$ e parallelo al piano xz.

$[\mathfrak{P} : y = 2]$

65 Determinare la distanza δ tra il piano $2x - 3y - 2z = 34$ e l'origine.

$\left[\delta = 2\sqrt{17}\right]$

66 Determinare α in modo che la distanza tra il punto $P(1, -2, 1)$ e il piano $3x - 2y + 6z = \alpha$ sia uguale a 4.

$[\alpha = -15; \alpha = 41]$

67 Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ contenente l'asse y e passante per il punto $A(2,3,6)$.

$[\mathfrak{P} : 3x - z = 0]$

68 Scrivere l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ parallelo all'asse x e passante per i punti $A(8, 2, 0)$ e $B(15, 3, 2)$.

$[\mathfrak{P} : 2y - z = 4]$

69 Scrivere l'equazione della retta $\mathfrak{r}$, parallela all'asse x e passante per $P(3, -3, 0)$.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (3 + t)\mathbf{i} - 3\mathbf{j}]$

70 Scrivere l'equazione della retta $\mathfrak{r}$, passante per $P(3, -4, 5)$, incidente e perpendicolare all'asse z.

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (3 + 3t)\mathbf{i}-(4 + 4t)\mathbf{j}+5\mathbf{k}]$

71 Dati i punti $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(1, 2, 1)$ e $P_3(2, -4, 0)$, calcolare il quarto vertice P_4, opposto a P_1, e l'area del parallelogramma $\mathcal{P}$ avente gli altri tre vertici in P_1, P_2 e P_3; l'angolo ϑ che $\mathcal{P}$ ha in P_1 è acuto, retto o ottuso?

$\left[P_4(2, -1, -1), \text{area}(\mathcal{P}) = \sqrt{91}, \vartheta \text{ è ottuso}\right]$

72 Dati i punti $A(1, 2, -4)$ e $B(5, -6, -2)$, scrivere l'equazione del piano assiale $\mathfrak{P}$ del segmento $\overline{AB}$.

$[\mathfrak{P} : 2x - 4y + z = 11]$

73 Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta $\mathfrak{r}$, passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano $\mathfrak{P} : x - y - 2z = 5$. Quanto vale la distanza δ tra P e $\mathfrak{P}$?

$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1 + t)\mathbf{i}+(2 - t)\mathbf{j}+(3 - 2t)\mathbf{k}]$

$\left[\mathfrak{r} : 2x - 2 = 4 - 2y = 3 - z, \delta = 2\sqrt{6}\right]$

74 Determinare l'equazione del piano $\mathfrak{P}$ che passa per i punti $P_1(1,0,2)$, $P_2(2,-1,-1)$ e $P_3(0,2,6)$. Determinare poi l'area del triangolo $\mathcal{T}$ avente P_1, P_2 e P_3 come vertici.

$$\left[\mathfrak{P} : 2x - y + z - 4 = 0, \text{area}(\mathcal{T}) = \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

75 Sia $\mathcal{T}$ il triangolo avente $P_1(-1,3,0)$, $P_2(1,7,3)$ e $P_3(8,2,5)$ come vertici. Determinare se $\mathcal{T}$ è equilatero, isoscele, rettangolo... Determinare il punto Q, intersezione del piano $\mathfrak{P}$ contenente $\mathcal{T}$ con l'asse z.

$$[\mathcal{T} \text{ è rettangolo in } P_2, Q(0,0,-\tfrac{14}{19})]$$

76 Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta $\mathfrak{r}$ intersezione tra il piano $z = 0$ e il piano contenente i punti $P_1(2,1,3)$, $P_2(1,0,5)$ e $P_3(3,-1,4)$.

$$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (6-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \mathfrak{r} : x + y - 6 = z = 0]$$

77 Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta $\mathfrak{r}$, passante per il punto $P(1,0,2)$, incidente alla retta $\mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (2+3t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(6+2t)\mathbf{k}$ e parallela al piano $\mathfrak{P} : x + 2y - z - 5 = 0$.

$$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (1+4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2+6t)\mathbf{k}, \mathfrak{r} : 3x - 3 = 12y = 2z - 4]$$

78 Calcolare il volume del tetraedro $\mathfrak{T}$ avente come vertici i punti $P_1(2,2,2)$, $P_2(3,4,1)$, $P_3(5,6,3)$ e $P_4(1,4,7)$.

$$[\text{volume}(\mathfrak{T}) = 4]$$

79 Dato il punto $P(1,2,-1)$ e il piano $\mathfrak{P} : x - y - 2z + 11 = 0$, determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta $\mathfrak{r}$ che passa per l'origine e per il punto Q, proiezione ortogonale di P su $\mathfrak{P}$.

$$[\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = t\mathbf{i}-4t\mathbf{j}-3t\mathbf{k}, \mathfrak{r} : 12x = -3y = -4z]$$

80 Determinare la distanza δ tra $\mathfrak{P}_1 : x+2y-3z+4 = 0$ e $\mathfrak{P}_2 : x+2y-3z-24 = 0$.

$$\left[\delta = 2\sqrt{14}\right]$$

81 Verificare che il piano $\mathfrak{P} : x + 2y + 3z - 4 = 0$ e la retta $\mathfrak{r} : y - x = x + z = 1$ sono paralleli, determinare quindi la distanza δ tra $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{r}$.

$$\left[\delta = \frac{1}{\sqrt{14}}\right]$$

82 Determinare la distanza δ tra $\mathfrak{r} : y + 2z = x + z + 1 = 11$ e $P(1,2,3)$.

$$\left[\delta = \sqrt{21}\right]$$

83 Verificare che le rette $\mathfrak{r} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = t\mathbf{i}+(4t-2)\mathbf{j}+(2t-3)\mathbf{k}$ e $\mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (2t+7)\mathbf{i}+(3t+5)\mathbf{j}+(t+6)\mathbf{k}$ non sono incidenti, determinare quindi la distanza δ tra $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{s}$.

$$\left[\delta = \sqrt{38}\right]$$

84 Determinare la distanza δ tra la retta $\mathfrak{r} : x + y = y - 2z = 1$ e il punto $P(8,-1,2)$, scrivere poi l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{s}$, che passa per P ed è perpendicolare e incidente a $\mathfrak{r}$.

$$[\delta = 6, \mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (8+2t)\mathbf{i}+(t-1)\mathbf{j}+(2+2t)\mathbf{k}]$$

85 Dati la retta $\mathfrak{r} : x = 5 - 2y = z - 2$ e il punto $P(5, 9, 7)$, determinare la distanza δ tra $\mathfrak{r}$ e P, scrivere poi l'equazione parametrica della retta $\mathfrak{s}$, che passa per P ed è perpendicolare e incidente a $\mathfrak{r}$.

$$\left[\delta = 6\sqrt{2}; \mathfrak{s} : x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (t+5)\mathbf{i}+(4t+9)\mathbf{j}+(t+7)\mathbf{k}\right]$$

86 Verificare che le rette $\mathfrak{r} : x = y = z$ e $\mathfrak{s} : x + z = y - z = 6$ sono sghembe; determinarne la distanza δ.

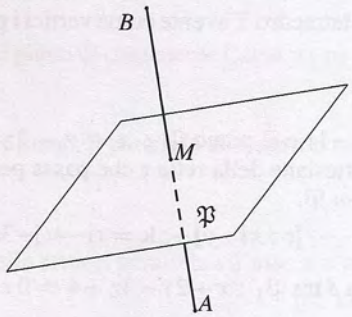
$$\left[\delta = 3\sqrt{2}\right]$$

2.2.1 Suggerimenti

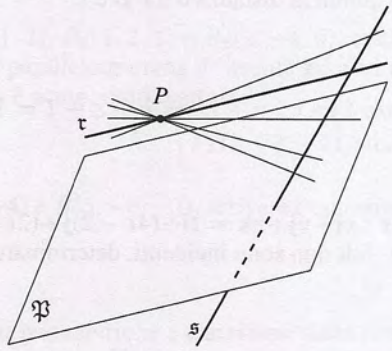
Per l'esercizio 46: Un vettore si trova nel piano yz se la prima componente è zero.

Per l'esercizio 54: Tre vettori sono complanari se il loro prodotto misto è zero.

Per l'esercizio 72: Il piano assiale di un segmento $\overline{AB}$ è il piano ad esso perpendicolare e passante per il punto medio M



Per l'esercizio 77: Trovare, tra tutte le rette che passano per P e per un generico punto di $\mathfrak{s}$, l'unica parallela a $\mathfrak{P}$.



Per l'esercizio 78: Il volume di un tetraedro individuato da tre vettori è un sesto del volume del corrispondente parallelepipedo.

CAPITOLO 3 Numeri complessi

3.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

3.1.1 Rappresentazione dei numeri complessi

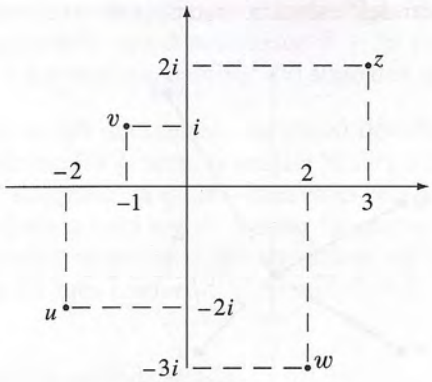
ESERCIZIO 3.1 **Rappresentazione in forma geometrica**

Rappresentare nel piano complesso i seguenti numeri:

$$z = 3 + 2i, \quad w = 2 - 3i, \quad v = -1 + i, \quad u = -2 - 2i.$$

Soluzione

Dato un numero complesso scritto in forma algebrica $\alpha + i\beta$ (ove α è la *parte reale* e β la *parte immaginaria*)[a], la sua immagine nel piano complesso è il punto di ascissa α e ordinata β, pertanto i quattro numeri dell'esercizio corrispondono ai punti seguenti



[a] Se $z = \alpha + i\beta$, allora in generale si usano i simboli:

$$\alpha = \mathrm{Re}z \quad \beta = \mathrm{Im}z.$$

ESERCIZIO 3.2 **Rappresentazione in forma trigonometrica**

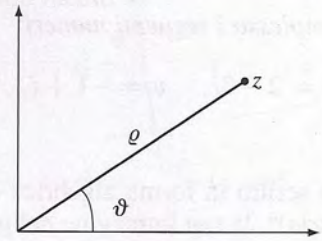
Rappresentare nel piano complesso i seguenti numeri:

$$z = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right], \qquad v = 1.4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right],$$

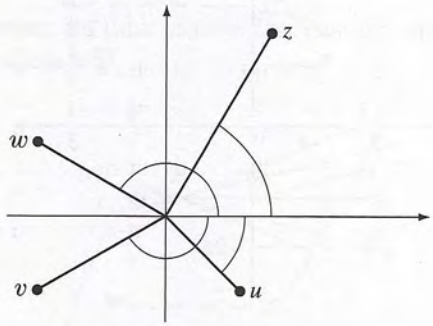
$$w = 1.4\left[\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right], \quad u = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Soluzione

Dato un numero complesso scritto in forma trigonometrica, ossia $\varrho[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$ (in cui ϱ è il *modulo* e ϑ l'*argomento*)[b], la sua immagine nel piano complesso è il punto distante ϱ dall'origine e per cui l'angolo tra il segmento che l'unisce all'origine e il semiasse positivo delle ascisse vale ϑ:



pertanto i quattro numeri dell'esercizio corrispondono ai seguenti punti:



[b] Se $z = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$, allora in generale si usano i simboli:

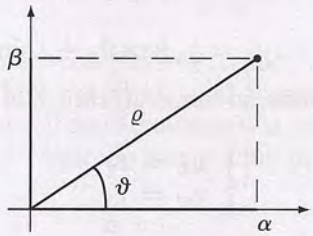
$$\varrho = |z|, \quad \vartheta = \arg z.$$

ESERCIZIO 3.3 **Legame tra forma algebrica e forma trigonometrica**

Stabilire il legame che intercorre tra la forma algebrica e quella trigonometrica di un numero complesso.

Soluzione

Sapendo che lo stesso numero complesso z può essere espresso dalle due forme, e che pertanto $\alpha + i\beta = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$, ricordando le usuali relazioni di trigonometria (come si vede anche dal disegno)



È evidente che

$$\alpha = \varrho\cos\vartheta \qquad \beta = \varrho\sin\vartheta;$$

o, in altri termini:

$$\mathrm{Re}z = |z|\cos(\arg z) \qquad \mathrm{Im}z = |z|\sin(\arg z)\,.$$

Osservazione importante: *L'argomento ϑ di un numero complesso*

È evidente che ogni numero complesso è dotato di un'unica parte reale, un'unica parte immaginaria e un unico modulo; per ciò che riguarda l'argomento, invece, vi sono infinite scelte possibili: se a ϑ sostituisco $\vartheta + 2\pi$ (o $\vartheta - 2\pi$, o in generale $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) il numero non cambia[c]. Vi sono due atteggiamenti possibili.

- Stabilire che gli argomenti dei numeri complessi devono variare all'interno di un intervallo prestabilito (in genere, si sceglie $[0,2\pi)$ o $(-\pi,\pi]$), e riaggiustare gli argomenti che "sfuggano" a questo intervallo con un'opportuna somma o sottrazione[d]. Chi adotta questa regola chiama in genere *argomento principale* del numero complesso il valore di ϑ che appartiene all'intervallo prestabilito.
- Usare con disinvoltura tutti i valori di ϑ, semplificando ove possibile le notazioni.

In questo libro, useremo la seconda strada.

[c] Fa ovviamente eccezione a questa regola il numero $z = 0$: *ogni* valore di ϑ è un suo possibile argomento.

[d] Per esempio, se $\vartheta \in [0, 2\pi)$ allora $-\frac{2}{3}\pi$, con l'aggiunta di 2π, diventa $\frac{4}{3}\pi$.

ESERCIZIO 3.4 **Uguaglianze in forma algebrica e in forma trigonometrica**

Siano w e z due numeri complessi. Stabilire il significato dell'uguaglianza

$$w = z$$

in forma algebrica e in forma trigonometrica.

Soluzione

Poniamo

$$w = x_w + iy_w = \varrho_w \left[\cos \vartheta_w + i \sin \vartheta_w\right]$$

$$z = x_z + iy_z = \varrho_z \left[\cos \vartheta_z + i \sin \vartheta_z\right],$$

l'equazione $w = z$ corrisponde, in forma algebrica, al sistema

$$\begin{cases} x_w = x_z \\ y_w = y_z \end{cases},$$

mentre in forma trigonometrica corrisponde al sistema

$$\begin{cases} \varrho_w = \varrho_z \\ \vartheta_w = \vartheta_z + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

In altri termini: due numeri complessi diversi da zero sono uguali se e solo se

in forma algebrica: sono uguali le rispettive parti reali e immaginarie,
in forma trigonometrica: sono uguali i moduli e gli argomenti differiscono di un multiplo di 2π.

Per esempio, nel caso qui sotto riportato (poiché $\frac{31}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi + 4\pi$):

$$3\left[\cos\frac{7}{6}\pi + i \sin\frac{7}{6}\pi\right] = 3\left[\cos\frac{31}{6}\pi + i \sin\frac{31}{6}\pi\right].$$

ESERCIZIO 3.5 **Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica**

Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri:

① $z = 2 + 2i$; ② $w = 2 - \sqrt{12}i$; ③ $v = -\sqrt{3} + i$;

④ $u = -6i$; ⑤ $t = -3 - 4i$.

Soluzione

Sappiamo già che

$$\alpha = \varrho \cos \vartheta \quad \beta = \varrho \sin \vartheta,$$

da ciò ricaviamo immediatamente $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Per quanto riguarda ϑ, la relazione corrispondente

$$\tan\vartheta = \frac{\beta}{\alpha}$$

si presta a equivoci: innanzitutto è valida solo se $\alpha \neq 0$, inoltre se la esplicitiamo rispetto a ϑ, otteniamo l'uguaglianza

$$\vartheta = \arctan\frac{\beta}{\alpha};$$

questa è vera solo se il numero complesso z ha parte reale positiva[e], cioè solamente se $\alpha > 0$, ossia se z si trova nel primo o nel quarto quadrante; in caso contrario (se z appartiene al secondo o al terzo quadrante) la funzione arcotangente fornisce al posto di ϑ il valore $\vartheta - \pi$. Volendo riunire tutto in un'unica formula, si ottiene:

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	
		$\beta > 0$	$\beta < 0$
$\vartheta = \arctan\frac{\beta}{\alpha}$	$\vartheta = \pi + \arctan\frac{\beta}{\alpha}$	$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\vartheta = -\frac{\pi}{2}$

① Il numero $z = 2 + 2i$ si trova nel primo quadrante, si vede subito (la parte reale e la parte immaginaria sono uguali) che si trova sulla bisettrice, e quindi l'argomento è $\frac{\pi}{4}$, inoltre $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ e quindi

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right].$$

② Il numero $w = 2 - \sqrt{12}i$ ha parte reale positiva e parte immaginaria negativa, si trova perciò nel quarto quadrante, usando le formule[f]:

$$|w| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = 4,$$
$$\arg w = \arctan\frac{-\sqrt{12}}{2} = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$$

e quindi

$$w = 2 - \sqrt{12}i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

[e] Questo perché, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$

[f] Ricordiamo che $\arctan(-x) = -\arctan x$.

③ $v = -\sqrt{3} + i$ è nel secondo quadrante (all'arcotangente dovremo aggiungere π), con le formule otteniamo

$$|v| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$
$$\arg v = \pi + \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi,$$

e quindi

$$v = -\sqrt{3} + i = 2\left[\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right].$$

④ $u = -6i$ è un numero immaginario puro (la parte reale è nulla), poiché si trova sul semiasse negativo dei numeri immaginari il suo argomento sarà $-\frac{\pi}{2}$ (o $\frac{3}{2}\pi$), inoltre il modulo altro non è che la sua distanza dall'origine, e quindi $|-6i| = 6$, in conclusione avremo

$$u = -6i = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

⑤ $t = -3 - 4i$ è un numero che si trova nel terzo quadrante (anche in questo caso, all'arcotangente aggiungeremo π); osserviamo anche che nel calcolo dell'argomento di t ci troviamo di fronte ad $\arctan \frac{4}{3}$, e $\frac{4}{3}$ non è la tangente di alcun angolo noto, con una calcolatrice ricaviamo che $\gamma = \arctan \frac{4}{3} \simeq 0.9273$, quindi $|t| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ e

$$\arg t = \pi + \arctan \frac{-4}{-3} = \pi + \arctan \frac{4}{3} = \pi + \gamma \simeq 4.0689,$$

e allora $t = -3 - 4i = 5\left[\cos(\pi + \gamma) + i \sin(\pi + \gamma)\right]$ (con $\gamma \simeq 0.9273$), oppure

$$t = -3 - 4i \simeq 5\left[\cos(4.0689) + i \sin(4.0689)\right].$$

ESERCIZIO 3.6 **Dalla forma trigonometrica alla forma algebrica**

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right], \quad w = 2.3\left[\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right],$$

$$v = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right], \quad u = 5\left[\cos \pi + i \sin \pi\right].$$

Soluzione

Il legame tra forma trigonometrica e forma algebrica, se svolto:

$$\varrho\left[\cos \vartheta + i \sin \vartheta\right] = (\varrho \cos \vartheta) + i(\varrho \sin \vartheta),$$

fornisce già parte reale e parte immaginaria di un numero, a partire da modulo e argomento, e quindi:

$$|z| = 2, \arg z = \frac{\pi}{3} \qquad z = \left[2 \cdot \cos\frac{\pi}{3}\right] + i\left[2 \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right] = 1 + \sqrt{3}i\,,$$

$$|w| = 2.3, \arg w = \frac{3}{2}\pi \qquad w = \left[2.3 \cdot \cos\frac{3}{2}\pi\right] + i\left[2.3 \cdot \sin\frac{3}{2}\pi\right] = -2.3i\,,$$

$$|v| = \frac{1}{2}, \arg v = \frac{5}{6}\pi \qquad v = \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{5}{6}\pi\right] + i\left[\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{5}{6}\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}\,,$$

$$|u| = 5, \arg u = \pi \qquad u = [5 \cdot \cos\pi] + i\,[5 \cdot \sin\pi] = -5$$

ESERCIZIO 3.7 **Numeri complessi coniugati**

Dati i numeri complessi

$$z = 3 + 2i, \qquad w = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right],$$

$$u = 2 - 3i, \qquad v = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

determinare i loro complessi coniugati[g] $\bar{z}$ *e* $\bar{w}$.

Soluzione

Il coniugato di un numero complesso è un altro numero complesso, avente uguale parte reale e opposta parte immaginaria: se il numero è scritto in forma algebrica, il coniugato di $\alpha + i\beta$ è ovviamente $\alpha + i(-\beta)$, se invece il numero è scritto in forma trigonometrica, è facile vedere che il coniugato di $\varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$ è $\varrho\,[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)]$; pertanto

$$\bar{z} = 3 - 2i, \qquad \bar{w} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$\bar{u} = 2 + 3i, \qquad \bar{v} = 3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right].$$

3.1.2 Le quattro operazioni con i numeri complessi

ESERCIZIO 3.8 **Somma e prodotto in forma algebrica**

Dati i numeri complessi

$$u = 3 + 2i, \quad w = 2 - 5i, \quad v = 3 - 2i\,;$$

calcolare le somme $u + w$, $u + v$, $v + w$, $u - v$ *e* $w - u$ *e i prodotti* uw, uv *e* vw.

[g] Il coniugato del numero complesso z si indica con $\bar{z}$.

Soluzione

Dati due numeri complessi $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, la loro somma si effettua sommando separatamente le parti reali e le parti immaginarie:

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)\,;$$

il loro prodotto si calcola come un normale prodotto tra binomi, ricordando però che $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 + i^2\beta_1\beta_2 \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} u + w &= (3 + 2i) + (2 - 5i) = 5 - 3i\,, \\ u + v &= (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6\,, \\ v + w &= (3 - 2i) + (2 - 5i) = 5 - 7i\,, \\ u - v &= (3 + 2i) - (3 - 2i) = 4i\,, \\ w - u &= (2 - 5i) - (3 + 2i) = -1 - 7i\,; \end{aligned}$$

e, per quanto riguarda i prodotti:

$$\begin{aligned} uw &= (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-5)) + i(3 \cdot (-5) + 2 \cdot 2) = 16 - 11i\,, \\ uv &= (3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) + i(3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3) = 13\,, \\ vw &= (3 \cdot 2 - (-2) \cdot (-5)) + i(3 \cdot (-5) + (-2) \cdot 2) = -4 - 19i\,. \end{aligned}$$

Osservazione importante: *Numeri complessi coniugati*
Nel precedente esercizio due numeri, nella fattispecie u e v, erano uno il coniugato dell'altro, questo ha avuto alcuni effetti sui risultati ottenuti, rivediamoli in generale: sia $z = \alpha + i\beta$, allora

$$z + \bar{z} = 2\alpha = 2\mathrm{Re}z \qquad z - \bar{z} = 2i\beta = 2i\mathrm{Im}z \qquad z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2\,.$$

ESERCIZIO 3.9 **Quoziente in forma algebrica**

Calcolare e scrivere in forma algebrica i seguenti numeri:

$$z = \frac{3 + i}{2 - 3i}, \quad v = \frac{i}{4 + 4i}, \quad w = \frac{2}{i - 3}\,.$$

Soluzione

Se abbiamo due numeri complessi scritti in forma algebrica e, calcolato il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$, vogliamo nuovamente riportarlo in forma algebrica, è necessario "eliminare la i" dal denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, cioè $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$$

e quindi, svolgendo il prodotto $(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2)$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + i(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i\,\frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Vediamo i nostri casi:

$$z = \frac{3+i}{2-3i} = \frac{3+i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(3+i)(2+3i)}{2^2+3^2} = \frac{3+11i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i\,;$$

$$v = \frac{i}{4+4i} = \frac{i}{4+4i}\cdot\frac{4-4i}{4-4i} = \frac{i(4-4i)}{4^2+4^2} = \frac{4+4i}{32} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}i\,;$$

$$w = \frac{2}{i-3} = \frac{2}{i-3}\cdot\frac{-i-3}{-i-3} = \frac{2(-i-3)}{1^2+3^2} = \frac{-6-2i}{10} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\,.$$

ESERCIZIO 3.10 **Prodotto e quoziente in forma trigonometrica (Formule di *De Moivre*)**

Dati i seguenti numeri:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right], \qquad w = \sqrt{18}\left[\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right],$$

$$v = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right], \qquad u = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right].$$

Calcolare

① zw; ② zv; ③ zu; ④ $\dfrac{z}{v}$; ⑤ $\dfrac{w}{z}$; ⑥ $\dfrac{v}{u}$.

Soluzione

Dati due numeri complessi, il loro prodotto è un altro numero complesso, avente modulo uguale al prodotto dei moduli e argomento uguale alla somma degli argomenti, in simboli, posto $z_1 = \varrho_1\,[\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1]$ e $z_2 = \varrho_2\,[\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2]$, abbiamo:

$$z_1 z_2 = (\varrho_1\varrho_2)\,[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]\,.$$

Analogamente, il quoziente ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti[h]:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]\,.$$

[h] Queste regole possono anche essere condensate in simboli:

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \qquad \arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

① Per quanto riguarda zw:

$$\left.\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{2} & |w| = \sqrt{18} \\ \arg z = \dfrac{\pi}{3} & \arg w = \dfrac{4}{5}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |zw| = \sqrt{2}\sqrt{18} = 6 \\ \arg(zw) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{5}\pi = \dfrac{17}{15}\pi \end{array}$$

e quindi

$$zw = 6\left[\cos\frac{17}{15}\pi + i\sin\frac{17}{15}\pi\right].$$

② Continuiamo con zv:

$$\left.\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{2} & |v| = \dfrac{1}{2} \\ \arg z = \dfrac{\pi}{3} & \arg v = -\dfrac{5}{6}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |zv| = \sqrt{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg(zv) = \dfrac{\pi}{3} + \left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

e quindi

$$zv = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

③ Terminiamo i prodotti con zu:

$$\left.\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{2} & |u| = 3 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{3} & \arg u = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |zu| = 3\sqrt{2} \\ \arg(zu) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5}{6}\pi \end{array}$$

e quindi

$$zu = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right].$$

④ Passiamo ai quozienti, cominciando con $\frac{z}{v}$:

$$\left.\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{2} & |v| = \dfrac{1}{2} \\ \arg z = \dfrac{\pi}{3} & \arg v = -\dfrac{5}{6}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left|\dfrac{z}{v}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{1/2} = 2\sqrt{2} \\ \arg\dfrac{z}{v} = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = \dfrac{7}{6}\pi \end{array}$$

e quindi

$$\frac{z}{v} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right].$$

⑤ Continuiamo con $\frac{w}{z}$:

$$\left.\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{2} & |w| = \sqrt{18} \\ \arg z = \dfrac{\pi}{3} & \arg w = \dfrac{4}{5}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left|\dfrac{w}{z}\right| = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3 \\ \arg \dfrac{w}{z} = \dfrac{4}{5}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7}{15}\pi \end{array}$$

e quindi

$$\frac{w}{z} = 3\left[\cos\frac{7}{15}\pi + i\sin\frac{7}{15}\pi\right].$$

⑥ Infine, $\frac{v}{u}$:

$$\left.\begin{array}{ll} |v| = \dfrac{1}{2} & |u| = 3 \\ \arg v = -\dfrac{5}{6}\pi & \arg u = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left|\dfrac{v}{u}\right| = \dfrac{1/2}{3} = \dfrac{1}{6} \\ \arg \dfrac{v}{u} = -\dfrac{5}{6}\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{4}{3}\pi \end{array}$$

e quindi[i]

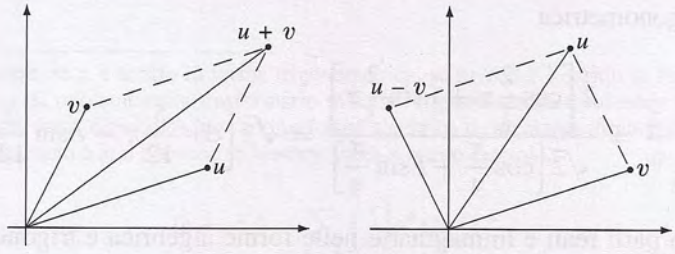
$$\frac{v}{u} = \frac{1}{6}\left[\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right].$$

ESERCIZIO 3.11 **Interpretazione geometrica delle operazioni**

Sulla base delle operazioni scritte in forma algebrica o trigonometrica, dare un'interpretazione geometrica di somma, sottrazione, prodotto e quoziente di due numeri complessi.

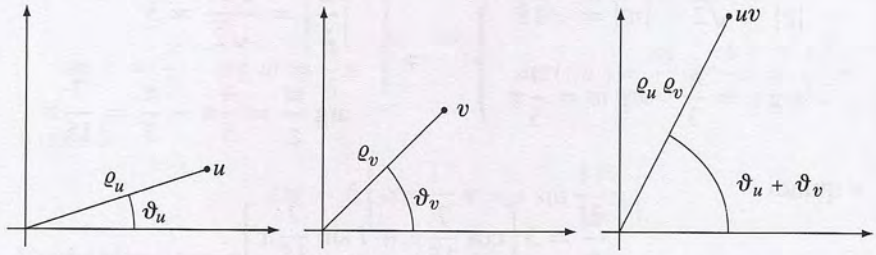
Soluzione

La somma di due numeri complessi (figura a sinistra) si comporta in accordo con la *regola del parallelogramma*: se u e v sono due numeri complessi, allora $u + v$ è (graficamente) la diagonale del parallelogramma individuato da u e v; la differenza tra due numeri complessi $u - v$ (figura a destra) è quel numero che, combinato con v, produrrebbe u in accordo con la regola del parallelogramma:

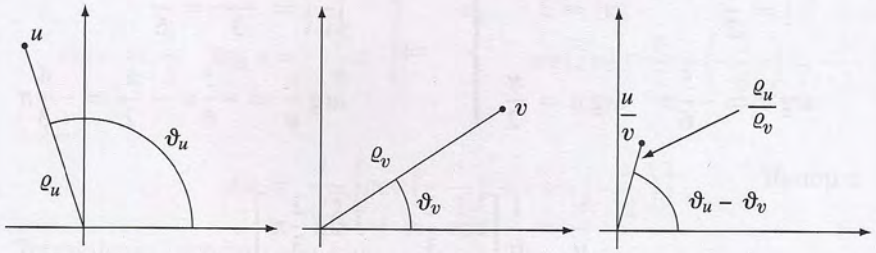


[i] Per ciò che riguarda l'argomento, sostituiamo $-\frac{4}{3}\pi$ con il più ragionevole $\frac{2}{3}\pi$.

Il prodotto di due numeri u e v è quel numero che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti:



Infine, il quoziente u/v è un numero avente per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.



ESERCIZIO 3.12 **Un uso in "parallelo" di forma algebrica e forma trigonometrica**

Dati $z = \sqrt{3}i - 1$ *e* $w = 1 + i$, *calcolare in forma algebrica e trigonometrica* $\frac{z}{w}$, *dedurre dal risultato ottenuto il valore di* $\sin\frac{\pi}{12}$ *e* $\cos\frac{\pi}{12}$.

Soluzione

Detto $v = \frac{z}{w}$, in forma algebrica ricaviamo

$$v = \frac{z}{w} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

in forma trigonometrica

$$v = \frac{z}{w} = \frac{2\left[\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right]$$

uguagliando parti reali e immaginarie nelle forme algebrica e trigonometrica, si trova

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{5}{12}\pi, \qquad \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{5}{12}\pi$$

quindi

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

e poiché $\frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ e $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

3.1.3 Potenze e radici *n*-esime dei numeri complessi

ESERCIZIO 3.13 **Potenza *n*-esima di un numero complesso**

Calcolare

① $(1-i)^7$; ② $(-\sqrt{3}+i)^{15}$;

③ $\left(2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]\right)^8$; ④ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2007}$.

Soluzione

Dato un numero complesso $z = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$, la sua potenza n-esima[j] è

$$z^n = \varrho^n\,[\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta]\,.$$

Nei nostri casi, convertiamo ciascun numero in forma trigonometrica e applichiamo la formula.

① $1-i$ si trova nel quarto quadrante, lungo la bisettrice, per cui

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

[j] Ovviamente, se z è scritto in forma trigonometrica, se invece z è scritto in forma algebrica, a seconda dei casi può convenire trasformarlo in forma trigonometrica e calcolare poi la potenza n-esima, oppure (se n è piccolo) lasciarlo in forma algebrica e calcolarne direttamente la potenza n-esima, per esempio con il binomio di Newton (vedi il primo capitolo):

$$(a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k(ib)^{n-k}.$$

e quindi (visto che $-\frac{7}{4}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{4}$)

$$(1-i)^7 = (\sqrt{2})^7\left[\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$
$$= 8\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 8i\,.$$

② $-\sqrt{3} + i$ si trova nel secondo quadrante, per cui $\arg(-\sqrt{3}+i) = \pi - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\pi$, e cioè

$$-\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right],$$

elevando tutto alla 15^a (e osservando che $\frac{5}{6}\pi\cdot 15 = \frac{75}{6}\pi$, e che $\frac{75}{6}\pi - 12\pi = \frac{\pi}{2}$):

$$(-\sqrt{3}+i)^{15} = 2^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$
$$= 32768\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 32768(0 + 1\cdot i) = 32768i.$$

③ Il numero $2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]$, contrariamente alle apparenze, *non è* scritto in forma trigonometrica, infatti nella forma trigonometrica compare *necessariamente* un segno + tra coseno e seno; possiamo allora trasformarlo in forma trigonometrica seguendo la solita strada, o – più velocemente – osservando che[k]

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

e quindi

$$2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

a questo punto (considerato che $-\frac{8}{3}\pi + 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$)

$$\left(2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]\right)^8 = 2^8\left[\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right)\right]$$
$$= 256\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 256\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -128 - 128\sqrt{3}i\,.$$

[k] Dalla trigonometria sappiamo che $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ e $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$.

④ Osserviamo che $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ è già posto in sostanza in forma trigonometrica, infatti

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right],$$

e poiché

$$2007 \cdot \frac{\pi}{4} = 2000 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}\pi = 250 \cdot 2\pi + \frac{7}{4}\pi = 251 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4},$$

allora

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2007} = 1^{2007}\left[\cos\left(\frac{2007}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2007}{4}\pi\right)\right]$$

$$= 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ESERCIZIO 3.14 **Radici n-esime di un numero complesso**

Calcolare

① $u = \sqrt[3]{i-1}$; ② $w = \sqrt{-1}$; ③ $v = \sqrt[4]{-4+3i}$; ④ $t = \sqrt[6]{2-2i}$;

e rappresentare i risultati nel piano complesso.

Soluzione

Dalla teoria, sappiamo che ogni numero complesso z è dotato di n radici n-esime, e che l'insieme delle n radici n-esime è indicato con il simbolo[1] $\sqrt[n]{z}$. Dato un numero complesso $z = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$, le sue n radici n-esime $w_0, \ldots, w_{n-1}$ sono altrettanti numeri complessi, aventi come modulo la radice n-esima *reale* del modulo di z (i moduli dei numeri complessi sono numeri reali non negativi, quindi ciascuno di essi ha un'unica radice n-esima, naturalmente positiva):

$$|w_i| = \sqrt[n]{|z|}, \qquad i = 0, \ldots, n-1;$$

e come argomenti i valori ($\arg w_i = \alpha_i$)

$$\alpha_i = \frac{\vartheta + i \cdot 2\pi}{n}$$

[1] Osservazione: nel campo dei numeri reali, con $\sqrt{a}$ si intende *l'unico numero positivo* che elevato al quadrato vale a, invece nel campo dei numeri complessi, con $\sqrt{a}$ si intendono *entrambi i numeri complessi* che elevati al quadrato valgono a, per esempio: se stiamo considerando solo i numeri reali, allora $\sqrt{4} = 2$, se invece ci stiamo muovendo nell'ambito dei numeri complessi, allora $\sqrt{4} = \pm 2$.

ossia

$$\alpha_0 = \frac{\vartheta}{n}, \quad \alpha_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{\vartheta + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ldots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{\vartheta + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

Pertanto, le n radici n-esime di z sono altrettanti vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza avente raggio uguale al modulo di z.

① Cominciamo da $u = \sqrt[3]{i-1}$, innanzitutto

$$i - 1 = -1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right],$$

quindi $|i-1| = \sqrt{2}$ e $\arg(i-1) = \frac{3}{4}\pi$, posto $u_i = \sqrt[3]{i-1}$,

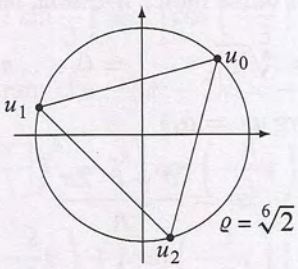
$$|u_i| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{2}, \qquad \alpha_0 = \frac{\frac{3}{4}\pi}{3} = \frac{\pi}{4},$$

ricaviamo gli altri α_i:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1 \cdot 2\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot 2\pi}{3} = \frac{19}{12}\pi\,;$$

e infine

$$\sqrt[3]{i-1} = \begin{cases} u_0 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] \\ u_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right] \\ u_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right] \end{cases}$$

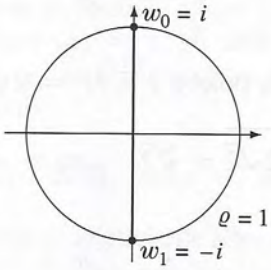


② Dato che $-1 = 1\,[\cos\pi + i\sin\pi]$, posto $w = \sqrt{-1}$, abbiamo

$$|w_i| = \sqrt{|-1|} = 1 \qquad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1 \cdot 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi\,;$$

e pertanto

$$\sqrt{-1} = \begin{cases} w_0 = 1\left[\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right] = i \\[2ex] w_1 = 1\left[\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right] = -i \end{cases}$$



③ Osserviamo che $-4 + 3i = 5\,[\cos\gamma + i\sin\gamma]$ ove ($-4 + 3i$ si trova nel secondo quadrante)

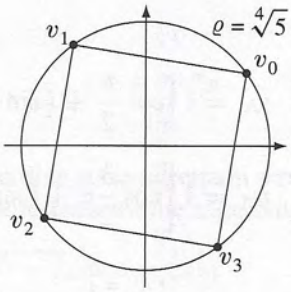
$$\gamma = \pi - \arctan\frac{3}{4} \simeq 2.4981,$$

e allora

$$\sqrt[4]{-4+3i} = \begin{cases} v_0 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\dfrac{\gamma}{4} + i\sin\dfrac{\gamma}{4}\right] \\[2ex] v_1 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] \\[2ex] v_2 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\dfrac{\gamma}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\gamma}{4} + \pi\right)\right] \\[2ex] v_3 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{3}{2}\pi\right)\right] \end{cases}$$

ossia

$$\sqrt[4]{-4+3i} = \begin{cases} v_0 \simeq 1.4953\,[\cos 0.6245 + i\sin 0.6245] \simeq 1.2131 + 0.8743i \\[2ex] v_1 \simeq 1.4953\,[\cos 2.3629 + i\sin 2.3629] \simeq -0.8743 + 1.2131i \\[2ex] v_2 \simeq 1.4953\,[\cos 3.5736 + i\sin 3.5736] \simeq -1.2131 - 0.8743i \\[2ex] v_3 \simeq 1.4953\,[\cos 5.1084 + i\sin 5.1084] \simeq 0.8743 - 1.2131i \end{cases}$$



④ Per finire, $t = \sqrt[6]{2-2i}$, poiché $2-2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ricaviamo

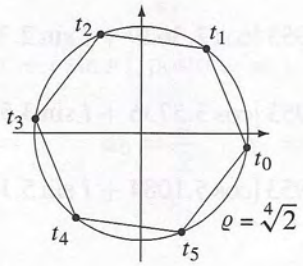
$$|t_i| = \sqrt[6]{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \qquad \alpha_0 = \frac{-\frac{\pi}{4}}{6} = -\frac{\pi}{24};$$

e

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{24} + 2\frac{\pi}{3}, \quad \ldots, \quad \alpha_5 = -\frac{\pi}{24} + 5\frac{\pi}{3};$$

allora

$$\sqrt[6]{2-2i} = \begin{cases} t_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{24}\right)\right] \\ t_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{7}{24}\pi + i\sin\dfrac{7}{24}\pi\right] \\ t_2 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{15}{24}\pi + i\sin\dfrac{15}{24}\pi\right] \\ t_3 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{23}{24}\pi + i\sin\dfrac{23}{24}\pi\right] \\ t_4 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{31}{24}\pi + i\sin\dfrac{31}{24}\pi\right] \\ t_5 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{39}{24}\pi + i\sin\dfrac{39}{24}\pi\right] \end{cases}$$



ESERCIZIO 3.15 **Radici n-esime dell'unità**

Determinare, per n generico, $w = \sqrt[n]{1}$.

Soluzione

Poiché sappiamo che ogni numero complesso z ha n radici n-esime, che si dispongono come i vertici di un poligono regolare a n lati (inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$), anche le n radici n-esime di $z = 1$ seguiranno questa regola, inoltre, poiché per ogni n vale la formula $1^n = 1$, uno dei vertici del poligono (chiamiamolo w_0) sarà sempre $w_0 = 1$, gli altri (cioè i valori $w_1, \ldots, w_{n-1}$) avranno ciascuno argomento $\alpha_j = \frac{j \cdot 2\pi}{n}$; esaminiamo allora i casi più "celebri": le due radici quadrate di 1 sono

$$\sqrt{1} = \{[\cos 0 + i \sin 0], [\cos \pi + i \sin \pi]\} = \{1, -1\}$$

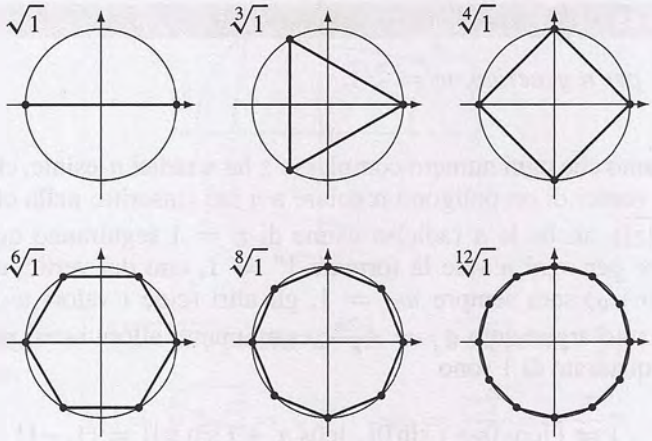
qui sotto riportiamo gli argomenti relativi alle altre radici notevoli:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{1}\colon 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi;\\
&\sqrt[4]{1}\colon 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi;\\
&\sqrt[6]{1}\colon 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi;\\
&\sqrt[8]{1}\colon 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\ \frac{7}{4}\pi;\\
&\sqrt[12]{1}\colon 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi;
\end{aligned}$$

radici che sono, nell'ordine

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{1} = \left\{1, \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\};\\
&\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\};\\
&\sqrt[6]{1} = \left\{1, \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), -1, \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\};\\
&\sqrt[8]{1} = \left\{1, \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right), i, \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right.\\
&\qquad \left. -1, \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right), -i, \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right\};\\
&\sqrt[12]{1} = \left\{1, \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i\right), \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), i, \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i\right), \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right),\right.\\
&\qquad \left. -1, \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i\right), \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), -i, \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Di seguito, sono riportati i punti corrispondenti alle radici sopra elencate.

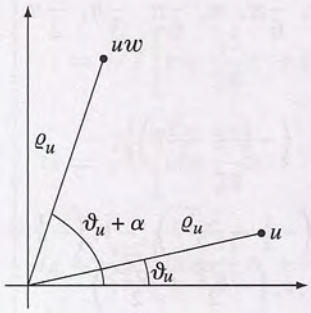


ESERCIZIO 3.16 **Relazione tra le radici n-esime di un numero $z \subset \mathbb{C}$ e le radici n-esime dell'unità**

Sapendo che una delle sei radici seste di z è $1 + i$, determinare tutte le altre.

Soluzione

Notiamo in via preliminare che un enunciato alternativo dell'esercizio è: "Calcolare $z = \sqrt[6]{(1+i)^6}$". Sappiamo che, dato un numero $u = \varrho_u\,[\cos\vartheta_u + i\sin\vartheta_u]$, moltiplicarlo per un numero avente modulo unitario $w = [\cos\alpha + i\sin\alpha]$ equivale a ruotarlo in senso antiorario attorno all'origine di un angolo α:



inoltre sappiamo che le sei radici seste di un qualsiasi numero sono disposte lungo una circonferenza, e formano i vertici di un esagono regolare; questo significa che l'angolo al centro tra due radici "vicine" è $\frac{\pi}{3}$, quindi, nota che sia una di esse, chiamiamola z_0, posso ricostruire le altre semplicemente moltiplicando z_0 per i numeri complessi w_i che provocano rotazioni di $\frac{\pi}{3}$, di $\frac{2}{3}\pi$ e così via; questi numeri w_i altro non sono che le sei radici seste di 1:

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3 = -1, \qquad w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Allora, visto che per esempio $(1+i)$ è ua delle $\sqrt[6]{(1+i)^6}$, poniamo $z_0 = 1+i$ e quindi

$$z_0 = (1+i)w_0 = 1+i\,,$$

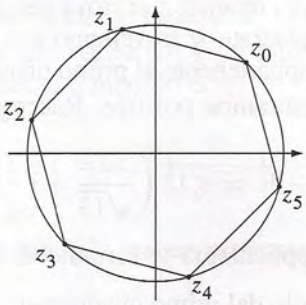
$$z_1 = (1+i)w_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i\,,$$

$$z_2 = (1+i)w_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i\,,$$

$$z_3 = (1+i)w_3 = -1-i\,,$$

$$z_4 = (1+i)w_4 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\,,$$

$$z_5 = (1+i)w_5 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\,.$$



Possiamo ricondurci a uno svolgimento di questo tipo, ogniqualvolta ci imbattiamo in una richiesta del tipo "Calcolare $z = \sqrt[n]{v^n}$" (con v assegnato).

ESERCIZIO 3.17 **Radici quadrate**

Calcolare

① $w = \sqrt{2+3i}$; ② $v = \sqrt{5-i}$; ③ $u = \sqrt{-3+4i}$.

Soluzione

Abbiamo già visto che con il simbolo $\sqrt{z}$ si intendono due numeri complessi w_1 e w_2, opposti (cioè $w_2 = -w_1$), tali che

$$|w| = \sqrt{|z|}, \qquad \begin{aligned} \arg w_1 &= \tfrac{1}{2}\arg z, \\ \arg w_2 &= \pi + \tfrac{1}{2}\arg z. \end{aligned}$$

Nell'Esercizio 3.14 (caso ③) abbiamo visto che, se l'argomento del radicando non è un angolo "celebre", occorre fare ricorso all'arcotangente. Tale difficoltà può essere aggirata nel caso delle radici quadrate: se $z = a + ib = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta]$, si può arrivare all'espressione algebrica dei due valori di

$$\sqrt{z} = \begin{cases} w_1 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right] \\ w_2 = -w_1 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right)\right] \end{cases}$$

ricorrendo alla trigonometria[m], in accordo alla seguente tabella:

$\mathrm{Re}\,z$	$\mathrm{Im}\,z$	$\vartheta \in$	$\cos\frac{\vartheta}{2}$	$\sin\frac{\vartheta}{2}$
>0	>0	$(0, \frac{\pi}{2})$	>0	>0
<0	>0	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$		
>0	<0	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	>0	<0
<0	<0	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$		

① In questo caso $z = 2 + 3i$, dunque z si trova nel primo quadrante ($0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$), e quindi le due radici quadrate si troveranno una nel primo e una nel terzo quadrante. Sia w_1 la radice appartenente al primo quadrante, avente dunque parte reale e parte immaginaria entrambe positive. Raccogliendo $|z| = \varrho = \sqrt{13}$, abbiamo che

$$z = 2 + 3i = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + i\frac{3}{\sqrt{13}}\right),$$

e dunque $\cos\vartheta = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Applichiamo le formule di bisezione (entrambe con il segno $+$, perché $\frac{\vartheta}{2}$ è un angolo del primo quadrante):

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}},$$

dunque abbiamo un'espressione per w_1:

$$w_1 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right] = \sqrt{\sqrt{13}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}\right).$$

---

[m] Formule di bisezione:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}};$$

ove i segni $\pm$ vanno scelti in base al quadrante ove si colloca $\frac{\vartheta}{2}$.

A questo punto possiamo anche semplificare $\sqrt[4]{13}$:

$$w_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}},$$

e determinare $w_2 = -w_1$:

$$w_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}};$$

in definitiva

$$w = \sqrt{2+3i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right).$$

② Ora $z = 5-i$, dunque z si trova nel quarto quadrante ($-\frac{\pi}{2} < \vartheta < 0$); pertanto una delle due radici (sia essa v_1) si trova anch'essa nel quarto quadrante, mentre la sua opposta v_2 si trova nel secondo quadrante. Usiamo le formule di bisezione per trovare v_1: ciò significa attribuire a $\cos\frac{\vartheta}{2}$ un valore positivo e a $\sin\frac{\vartheta}{2}$ un valore negativo. Mettiamo in evidenza il modulo di z:

$$z = 5-i = \sqrt{26}\left(\frac{5}{\sqrt{26}} + i\frac{1}{\sqrt{26}}\right),$$

dunque $\cos\vartheta = \frac{5}{\sqrt{26}}$; ricordando la precedente osservazione sui segni, applichiamo le formule di bisezione:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{\sqrt{26}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2\sqrt{26}}}, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{\sqrt{26}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2\sqrt{26}}},$$

procedendo in maniera analoga a prima (e semplificando $\sqrt[4]{26}$) otteniamo v_1, e da esso v_2:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2}}, \qquad v_2 = -v_1;$$

in definitiva

$$\sqrt{5-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2}}\right).$$

③ Infine, $z = -3+4i$: z si trova nel secondo quadrante ($\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$); pertanto una delle due radici (u_1) appartiene al primo quadrante e l'altra al terzo quadrante.

Visto che u_1 si trova nel primo quadrante, nelle formule di bisezione useremo il segno $+$. Raccogliamo $|z| = 5$:

$$z = 5\left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right),$$

dunque $\cos\vartheta = -\frac{3}{5}$. Ricordando la precedente osservazione sui segni, applichiamo le formule di bisezione:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}},$$

quindi

$$u_1 = \sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{1}{5}} + i\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = 1 + 2i,$$

e pertanto $\sqrt{-3+4i} = \pm(1+2i)$.

Osservazione importante: *Il simbolo di radice quadrata in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$*
Attenzione ai simboli! Con il simbolo di radice $\sqrt{\ }$ si intendono due cose diverse, a seconda del contesto in cui viene usato, per quanto riguarda le radici "pari":

- in $\mathbb{R}$, con $\sqrt{4}$ si intende *quell'unico numero positivo che elevato al quadrato dà* 4, e cioè $\sqrt{4} = 2$; con $\sqrt[4]{4}$ si intende *quell'unico numero positivo che elevato alla quarta potenza dà* 4, e cioè $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$;
- in $\mathbb{C}$, con $\sqrt{4}$ si intende *l'insieme di tutti i numeri complessi che elevati al quadrato danno* 4, e cioè $\sqrt{4} = \{2, -2\}$, e questo insieme viene a volte abbreviato con la scritta ± 2; con $\sqrt[4]{4}$ si intende *l'insieme di tutti i numeri complessi che elevati alla quarta potenza danno* 4, e cioè $\sqrt[4]{4} = \{\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.

3.1.4 Equazioni algebriche e non algebriche Disequazioni che coinvolgono numeri complessi

ESERCIZIO 3.18 **Equazioni di secondo grado**

Risolvere l'equazione

$$(1-i)z^2 + 2z + i = 0.$$

Soluzione

Si tratta di risolvere un'equazione di secondo grado. Data la generica equazione $az^2 + bz + c = 0$, le due soluzioni sono date dalla formula[n]

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

[n] Notare che al numeratore è scritto $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, e non $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, perché, essendo ambientata in $\mathbb{C}$, il simbolo $\sqrt{\ }$ già contiene i due valori.

nel nostro caso, allora, usiamo la formula ridotta[o]:

$$z_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{1-(1-i)i}}{1-i};$$

esaminiamo la radice al numeratore: $\sqrt{1-(1-i)i} = \sqrt{-i}$ e poiché

$$\sqrt{-i} = \begin{cases} 1\left[\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1\left[\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases},$$

si ottiene

$$\sqrt{1-(1-i)i} = \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$$

ricaviamo quindi i due valori di z (moltiplicando numeratore e denominatore per $1+i$):

$$z = \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{1-i} = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}i, \\ z_2 = \dfrac{-1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} - \dfrac{1}{2}i; \end{cases}$$

osserviamo che, in accordo con il *Teorema fondamentale dell'Algebra*[p], ogni equazione di secondo grado ha *sempre* due radici.

ESERCIZIO 3.19 **Equazioni riconducibili al secondo grado**

Risolvere l'equazione

$$z^4 - z^2 - 1 - 3i = 0.$$

[o] Se l'equazione ha la forma $az^2 + 2\beta z + c = 0$, le soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}.$$

[p] **Teorema fondamentale dell'Algebra**: qualsiasi equazione algebrica di grado n nell'incognita $z \in \mathbb{C}$

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

ha sempre n radici (contate con la dovuta molteplicità).

Soluzione

Poniamo $z^2 = w$, l'equazione diventa $w^2 - w - 1 - 3i = 0$, le cui radici sono

$$w_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5 + 12i}}{2}.$$

Calcoliamo $\sqrt{5 + 12i}$: poiché $5^2 + 12^2 = 13^3$, raccogliamo $|5 + 12i| = 13$:

$$5 + 12i = 13\left(\frac{5}{13} + i\frac{12}{13}\right);$$

una delle due radici di $5 + 12i$ (chiamiamola r_1) appartiene al primo quadrante; dunque come nell'Esercizio 3.17 usiamo le formule di bisezione con il segno $+$. Detto $\vartheta = \arg(5 + 12i)$, abbiamo

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}}, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}},$$

quindi

$$r_1 = \sqrt{13}\left(\sqrt{\frac{9}{13}} + i\sqrt{\frac{4}{13}}\right) = 3 + 2i,$$

e dunque $\sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i)$; possiamo determinare le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$w_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5 + 12i}}{2} = \frac{1 \pm (3 + 2i)}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} w_1 = 2 + i, \\ w_2 = -1 - i. \end{array}$$

Ritornando all'equazione in z, abbiamo

$$z_{1,2} = \sqrt{2 + i}, \qquad z_{3,4} = \sqrt{-1 - i}.$$

Procediamo nuovamente come nell'Esercizio 3.17; $|2 + i| = \sqrt{5}$ e $2 + i$ si trova nel primo quadrante, dunque

$$\begin{aligned} z_{1,2} = \sqrt{2 + i} &= \pm\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2\sqrt{5}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5}}}\right) \\ &= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right). \end{aligned}$$

Analogamente, $|-1-i| = \sqrt{2}$ e $-1-i$ si trova nel terzo quadrante, e dunque

$$z_{3,4} = \sqrt{-1-i} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right).$$

ESERCIZIO 3.20 Equazioni non algebriche

Risolvere le seguenti equazioni:

① $2z + 3i\bar{z} = 8 + 7i$; ② $w^2 + |w|^2 = i(w - \bar{w} - 8i)$; ③ $u^4 + 4|u|^2 = 0$.

Soluzione

In generale, se un'equazione contiene termini quali

$$|z|, \quad \bar{z}, \quad \mathrm{Re}z, \quad \mathrm{Im}z,$$

la principale strada per risolverla è esprimere l'incognita in forma algebrica (più raramente, in forma trigonometrica) e, poiché non esiste un metodo generale, vedere, magari separando parte reale e immaginaria (oppure modulo e argomento), se si ottengono relazioni risolubili.

① Nel primo caso, ponendo $z = x + iy$, otteniamo:

$$2(x + iy) + 3i(x - iy) = 8 + 7i;$$

distinguiamo allora al primo e al secondo membro la parte reale dalla parte immaginaria:

$$(2x + 3y) + i(2y + 3x) = 8 + 7i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

poiché l'unica soluzione del sistema è $x = 1, y = 2$, l'unica soluzione dell'equazione è $z = 1 + 2i$.

② Anche per la seconda equazione, ponendo $w = x + iy$, quindi $w^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e $|w|^2 = x^2 + y^2$, l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 + y^2 = i[x + iy - (x - iy) - 8i];$$

portiamo tutto a primo membro, separando parti reali e parti immaginarie:

$$(2x^2 + 2y - 8) + 2ixy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y - 4 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione, alternativamente, ricaviamo $x = 0$ o $y = 0$, se poniamo $x = 0$ nella prima ricaviamo $y = 4$, se invece nella prima poniamo $y = 0$, ricaviamo $x = \pm 2$, in definitiva le tre^q soluzioni sono

$$w_1 = 4i, \quad w_2 = 2, \quad w_3 = -2.$$

③ Per la terza equazione, la presenza di una quarta potenza rende molto scomodo il ricorso alla forma algebrica, poniamo allora

$$u = \varrho\,[\cos\vartheta + i\sin\vartheta],$$

otteniamo

$$\varrho^4\,[\cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta] + 4\varrho^2 = 0 \Rightarrow \varrho^2\left(\varrho^2\,[\cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta] + 4\right) = 0,$$

l'equazione è adesso scritta nella forma $a \cdot b = 0$, che è verificata se $a = 0$ o $b = 0$; la spezziamo nelle due equazioni

$$1)\ \varrho^2 = 0 \qquad 2)\ \varrho^2\,[\cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta] = -4\,;$$

la 1 è verificata per $\varrho = 0$; la 2, osservato che $-4 = 4\,[\cos\pi + i\sin\pi]$, diventa un'uguaglianza tra due numeri complessi in forma trigonometrica:

$$\varrho^2\,[\cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta] = 4\,[\cos\pi + i\sin\pi] \Rightarrow \begin{cases} \varrho^2 = 4 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases};$$

da cui $\varrho = 2$ e $\vartheta = \frac{1+2k}{4}\pi$, quest'ultima relazione individua (per $k \in \mathbb{Z}$) solo quattro valori diversi di ϑ, che scelti in $[0, 2\pi)$ sono:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \vartheta_2 = \frac{3}{4}\pi, \qquad \vartheta_3 = \frac{5}{4}\pi, \qquad \vartheta_4 = \frac{7}{4}\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione di partenza sono tutti i numeri complessi soluzione o della 1 o della 2: per la 1 abbiamo $\varrho = 0$, mentre per la 2 abbiamo $\varrho = 2$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, e quindi complessivamente le soluzioni cercate sono i cinque numeri

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$u_3 = 2\left[\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$u_4 = 2\left[\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$u_5 = 2\left[\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

ESERCIZIO 3.21 **Un'equazione e una disequazione non algebriche particolari**

Siano $\alpha \geq 0$ e $z_0 = a + ib$ un assegnato numero complesso. Determinare e disegnare sul piano complesso gli insiemi

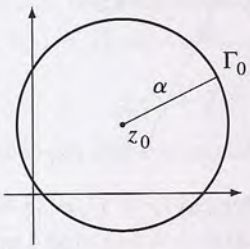
$$\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \alpha\}, \qquad \Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \alpha\}.$$

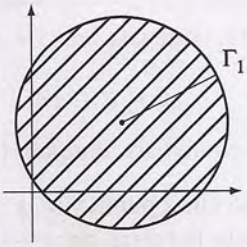
Soluzione

Osserviamo innanzitutto che l'equazione che compare nell'espressione che definisce Γ_0, ha entrambi i membri non negativi ed è perciò equivalente a $|z - z_0|^2 = \alpha^2$; inoltre, ponendo $z = x + iy$, l'equazione si trasforma nella seguente:

$$|(x - a) + i(y - b)|^2 = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = \alpha^2 .$$

Se $\alpha > 0$, si tratta dell'equazione di un circonferenza centrata nel punto (a, b) e di raggio α; in termini di numeri complessi, Γ_0 è la circonferenza formata dai numeri z la cui distanza da z_0 vale α; in modo del tutto analogo, si stabilisce che Γ_1 è il cerchio di cui Γ_0 è la circonferenza:





Se invece $\alpha = 0$, allora $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \{z_0\}$.

ESERCIZIO 3.22 **Equazioni e disequazioni con i moduli – distanze**

Individuare e disegnare in $\mathbb{C}$ gli insiemi

① $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 2|\}$; ② $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| \geq |z - 2|\}$.

Soluzione

① Per risolvere quest'equazione vi sono due strade, una puramente algebrica e l'altra di carattere geometrico. Per quanto riguarda la strada algebrica, ponendo $z = x + iy$, l'equazione diventa $|x + i(y + 1)| = |(x - 2) + iy|$, ossia (elevando al quadrato non aggiungiamo soluzioni: entrambi i membri sono positivi):

$$|(x + iy) + i|^2 = |(x + iy) - 2|^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (1 + y)^2 = (x - 2)^2 + y^2 ;$$

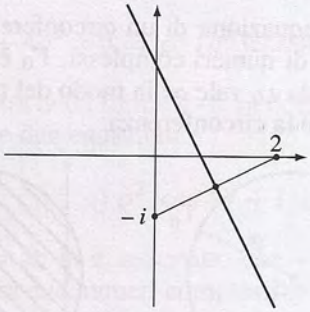
da qui, semplificando, si ottiene $4x + 2y = 3$; pertanto sono soluzioni dell'equazione di partenza tutti i numeri complessi corrispondenti ai punti di tale retta.

[9] Ciò non è in disaccordo con il Teorema fondamentale dell'Algebra, in quanto l'equazione di partenza *non è* algebrica.

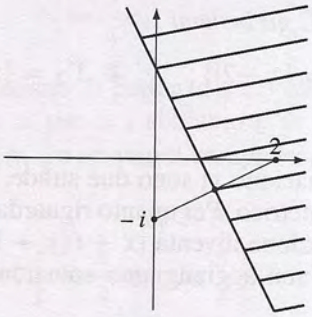
In alternativa, potevamo sfruttare un'osservazione di carattere geometrico: alla luce dell'Esercizio 3.21, l'equazione

$$|z - z_0| = |z - z_1|,$$

descrive il luogo dei punti z del piano complesso aventi uguale distanza da z_0 e da z_1; pertanto le soluzioni della nostra equazione sono costituite dai numeri complessi equidistanti da 2 e da $-i$, ossia nel piano cartesiano dai punti della retta che costituisce l'asse del segmento $(0,-1)$–$(2,0)$; questa è la retta passante per il suo punto medio $(1, \frac{1}{2})$, e perpendicolare ad esso, ovvero la retta di equazione $y - \frac{1}{2} = -2(x-1)$:



② Già sappiamo che i punti $z = x + iy$ per cui $|z + i| = |z - 2|$ sono i punti per i quali vale la relazione $y - \frac{1}{2} = -2(x-1)$ (e cioè i punti equidistanti da $-i$ e da 2); poiché la disequazione, sempre interpretata geometricamente, descrive i punti che distano da $-i$ più di quanto distino da 2 (e cioè i punti al di sopra della retta), avremo che l'insieme Γ_2 è costituito da tutti i punti a "nord–est" della retta stessa:



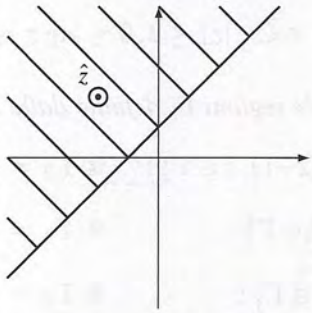
ESERCIZIO 3.23 **Disequazioni e rappresentazione di insiemi in $\mathbb{C}$**

Individuare e disegnare in $\mathbb{C}$ gli insiemi

① $\Gamma_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \dfrac{z}{z+1-i} \right| \geq 1 \right\}$; ② $\Gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \dfrac{z}{z+1-i} \right| \leq \sqrt{3} \right\}$.

Soluzione

① Poiché $\left|\frac{z}{z+1-i}\right| = \frac{|z|}{|z+1-i|}$, la disequazione (posto $z \neq \hat{z} = -1+i$) può essere riscritta come $|z| \geq |z+1-i|$; questa individua i punti del piano complesso più vicini a $-1+i$ che non a 0, si tratta allora dei punti che stanno al di sopra della retta $y = x + \frac{1}{2}$, escluso il punto $\hat{z}$:



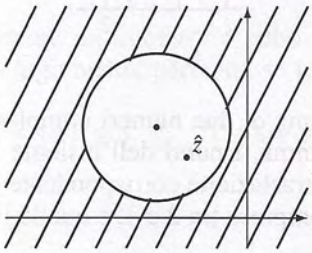
② La disequazione, (posto sempre $z \neq \hat{z} = -1+i$), può essere riscritta come $|z| \leq \sqrt{3}|z+1-i|$, scrivendo $z = x+iy$ ed elevando tutto al quadrato si ottiene

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 6y + 6 \geq 0\,,$$

dividendo tutto per due e completando i quadrati[r] ricaviamo

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\,;$$

questa equazione individua i punti esterni alla circonferenza centrata in $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e di raggio $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (dai quali non c'è necessità di escludere esplicitamente $\hat{z}$, in quanto interno alla circonferenza):



[r] E cioè:

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \qquad y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\,.$$

3.1.5 Trasformazioni e rappresentazioni nel piano complesso

ESERCIZIO 3.24 **Principali trasformazioni del piano**

Sia Γ la regione del piano complesso definita da

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

descrivere e disegnare in $\mathbb{C}$ le regioni Γ_i definite dalle seguenti relazioni:

① $\Gamma_1 = \{w \in \mathbb{C} : w = z + (2-i), z \in \Gamma\}$; ② $\Gamma_2 = \{w \in \mathbb{C} : w = 3iz, z \in \Gamma\}$;

③ $\Gamma_3 = \{w \in \mathbb{C} : w = z^2, z \in \Gamma\}$; ④ $\Gamma_4 = \{w \in \mathbb{C} : w = z^3, z \in \Gamma\}$;

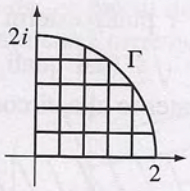
⑤ $\Gamma_5 = \{w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{z}, z \in \Gamma\}$; ⑥ $\Gamma_6 = \{w \in \mathbb{C} : w = \sqrt[3]{z}, z \in \Gamma\}$.

Soluzione

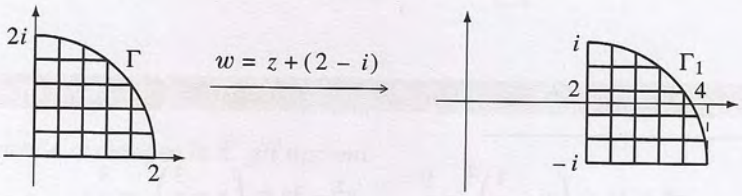
L'insieme Γ è costituito dai numeri $z = \varrho_z [\cos \vartheta_z + i \sin \vartheta_z]$ per cui

$$0 \leq \varrho_z \leq 2, \qquad 0 \leq \vartheta_z \leq \frac{\pi}{2};$$

e pertanto è costituito dal quarto di cerchio di raggio 2 contenuto nel primo quadrante:



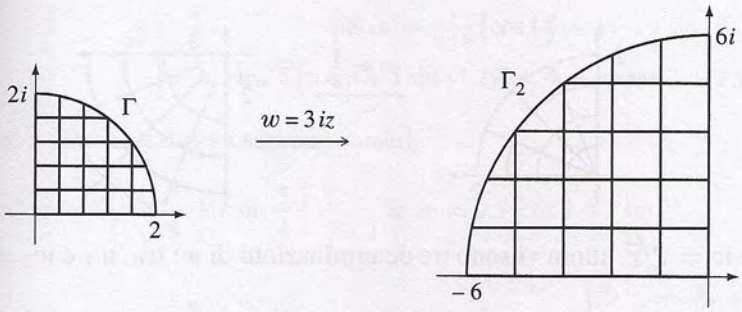
① Ricordando che la somma di due numeri complessi si comporta secondo la regola del parallelogramma, i punti dell'insieme Γ_1 sono ottenuti da quelli dell'insieme Γ dopo la traslazione corrispondente a $2 - i$, il che significa che le parti reali saranno comprese tra 2 e 4, e quelle immaginarie tra -1 e 1:



② Dato un numero complesso z, il numero $3iz$ ha modulo triplicato rispetto a quello di z, e argomento aumentato di $\frac{\pi}{2}$; questo equivale a una rotazione di un angolo retto in senso antiorario, cioè $|w| = 3|z|$ e $\arg w = \frac{\pi}{2} + \arg z$, ossia

$$0 \le |w| \le 6, \qquad \frac{\pi}{2} \le \arg w \le \pi\,;$$

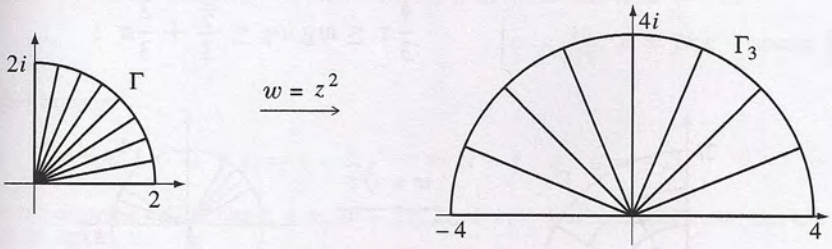
e quindi



③ Elevare un numero al quadrato significa elevarne al quadrato il modulo e raddoppiarne l'argomento, pertanto, se $w = z^2$

$$0 \le |w| \le 4, \qquad 0 \le \arg w \le \pi\,;$$

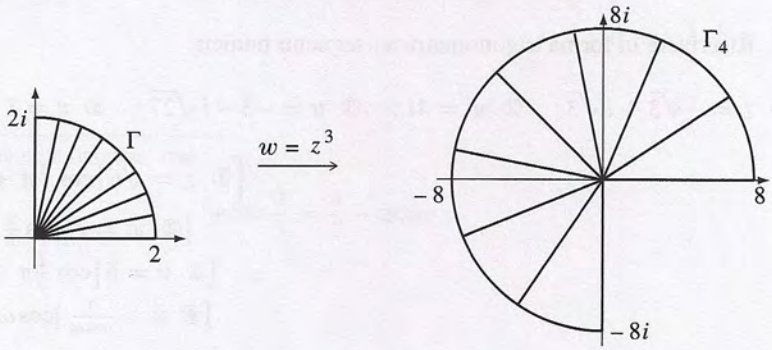
e quindi



④ Allo stesso modo, elevare un numero al cubo significa elevarne al cubo il modulo e triplicarne l'argomento, pertanto, se $w = z^3$

$$0 \le |w| \le 8, \qquad 0 \le \arg w \le \frac{3}{2}\pi\,;$$

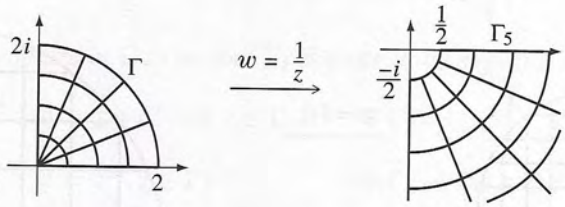
e quindi



⑤ Se $w = \frac{1}{z}$, allora il modulo di w è il reciproco del modulo di z, mentre l'argomento di w è l'argomento di z cambiato di segno:

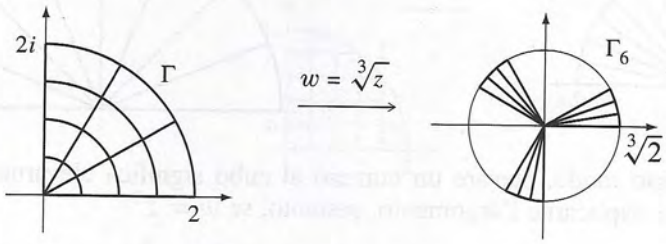
$$|w| \geq \frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0\,;$$

e quindi



⑥ Se $w = \sqrt[3]{z}$, allora vi sono tre determinazioni di w: w_0, w_1 e w_2, per le quali

$$|w_i| = \sqrt[3]{|z|}, \qquad \begin{aligned} 0 &\leq \arg w_0 \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{3}\,, \\ \frac{2}{3}\pi &\leq \arg w_1 \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2}{3}\pi\,, \\ \frac{4}{3}\pi &\leq \arg w_2 \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2}{3}\pi\,: \end{aligned}$$



3.2 Esercizi proposti

25 Riscrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri:

① $z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$; ② $w = 4i$; ③ $u = -3 - i\sqrt{27}$; ④ $v = 1 + i\tan\omega$.

$\left[\text{① } z = \sqrt{6}\left[\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right]\right]$

$\left[\text{② } w = 4\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]\right]$

$\left[\text{③ } u = 6\left[\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right]\right]$

$\left[\text{④ } v = \frac{1}{\cos\omega}\left[\cos\omega + i\sin\omega\right]\right]$

26 Riscrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri[s]:

① $z = 2 + 3i$; ② $w = -1 - 3i$; ③ $u = (\tan 1) - i$; ④ $v = i - 2$.

$$\left[① \ z = \sqrt{13}\,[\cos\alpha + i\sin\alpha] \ \ (\alpha = \arctan\tfrac{3}{2} \simeq 0.9828)\right]$$
$$\left[② \ w = \sqrt{10}\,[\cos\beta + i\sin\beta] \ \ (\beta = \pi + \arctan 3 \simeq 4.3906)\right]$$
$$\left[③ \ u = \tfrac{1}{\cos 1}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + 1\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 1\right)\right]\right]$$
$$\left[④ \ v = \sqrt{5}\,[\cos\gamma + i\sin\gamma] \ \ (\gamma = \tfrac{\pi}{2} + \arctan 2 \simeq 2.6779)\right]$$

27 Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri:

① $z = 5\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$; ② $w = 0.5\,[\cos 2 + i\sin 2]$.

$$\left[① \ z = \tfrac{5}{\sqrt{2}} + i\tfrac{5}{\sqrt{2}}\right]$$
$$[② \ w \simeq -0.2081 + 0.4546i]$$

28 Dati

$$z = \alpha\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] \quad \text{e} \quad w = 3\,[\cos\beta + i\sin\beta]\,,$$

determinare α in modo che $\mathrm{Re}\,z = 5$, determinare β in modo che $\mathrm{Im}\,w = -2$.

$$\left[\alpha = \tfrac{10}{\sqrt{3}},\ \beta = 2k\pi - \arcsin\tfrac{2}{3}\right]$$

29 Dati i numeri

$$z = 1 + 2i, \quad w = 1 - 3i, \quad v = 2i - 1 \quad \text{e} \quad u = -2i\,,$$

calcolare le somme e differenze $z + w$, $w - 2z$, $2z + v$, $v + u$, i prodotti zw, zv, wu e i quozienti $\frac{w}{v}$, $\frac{v}{u}$, $\frac{w}{z}$, $\frac{v}{z}$.

$$[z + w = 2 - i, w - 2z = -1 - 7i, 2z + v = 1 + 6i, v + u = -1]$$
$$[zw = 7 - i, zv = -5, wu = -6 - 21]$$
$$\left[\tfrac{w}{v} = -\tfrac{7}{5} + \tfrac{1}{5}i, \tfrac{v}{u} = -1 - \tfrac{1}{2}i, \tfrac{w}{z} = -1 - i, \tfrac{v}{z} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}i\right]$$

30 Dati i numeri $u = 1 + i\alpha$ e $v = \beta + 2i$, e dati $z = 3 - 2i$ e $w = 2 + i$. Determinare α in modo che $\mathrm{Re}\,uz = 0$, determinare β in modo che $\mathrm{Re}\frac{v}{w} = \mathrm{Im}\frac{v}{w}$.

$$\left[\alpha = -\tfrac{3}{2}, \beta = \tfrac{2}{3}\right]$$

---

[s] Può essere utile ricordare che

$$\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

31 Dati i seguenti numeri:

$$z = \sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right], \qquad w = \sqrt{5}\left[\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right],$$

$$v = \frac{1}{3}\left[\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right], \qquad u = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

calcolare

$$zw, \quad wv, \quad zu, \quad \frac{z}{w}, \quad \frac{v}{2z}, \quad \frac{u}{v}.$$

$$\left[zw = \sqrt{15}\left[\cos\tfrac{29}{30}\pi + i\sin\tfrac{29}{30}\pi\right], wv = \tfrac{\sqrt{5}}{3}\left[\cos\tfrac{73}{60}\pi + i\sin\tfrac{73}{60}\pi\right]\right]$$

$$\left[zu = 4\sqrt{3}\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right], \tfrac{z}{w} = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\left[\cos\left(-\tfrac{19}{30}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{19}{30}\pi\right)\right]\right]$$

$$\left[\tfrac{v}{2z} = \tfrac{1}{6\sqrt{3}}\left[\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right], \tfrac{u}{v} = 12\left[\cos\left(-\tfrac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{7}{12}\pi\right)\right]\right]$$

32 Dati $z = 3[\cos\alpha + i\sin\alpha]$ e $w = 2[\cos\beta + i\sin\beta]$, determinare α e β in modo che

$$\mathrm{Re}\Big(z(1+2i)\Big) = 0, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{w}\right) = 0.$$

$$\left[\alpha = \tfrac{\pi}{2} - \arctan 2 + k\pi, \beta = \tfrac{\pi}{3} + k\pi\right]$$

33 Scrivere in forma algebrica i numeri

① $z = (1-\sqrt{3}i)^{16}$; ② $w = (1 + i\tan 2)^{11}$; ③ $u = (2+3i)^8$.

$$\left[① \ z = 2^{16}\left[\cos\tfrac{2}{3}\pi + i\sin\tfrac{2}{3}\pi\right], ② \ w = \tfrac{1}{(\cos 2)^{11}}\left[\cos 22 + i\sin 22\right]\right]$$

$$\left[③ \ u = 13^4\left[\cos 8\gamma + i\sin 8\gamma\right] \ (\gamma = \arctan\tfrac{3}{2} \simeq 0.9828)\right]$$

34 Calcolare $z = \sqrt[4]{4i-4}$ e $w = \sqrt[5]{3-2i}$.

$$\left[|z_i| = \sqrt[8]{32}, \ \alpha_0 = \tfrac{3}{16}\pi, \alpha_1 = \tfrac{11}{16}\pi, \alpha_2 = \tfrac{19}{16}\pi, \alpha_3 = \tfrac{27}{16}\pi\right]$$

$$\left[|w_i| = \sqrt[10]{13}, \ \alpha_j = \tfrac{\gamma+2j\pi}{5}, \ (j = 0, 1, \ldots, 4; \gamma = -\arctan\tfrac{2}{3})\right]$$

35 Calcolare $z = \sqrt[3]{(2+4i)^3}$ e $v = \sqrt[4]{(2-i)^8}$.

$$\left[z_0 = 2+4i, z_1 = (1-2\sqrt{3}) + i(2-\sqrt{3}), z_2 = (1+2\sqrt{3}) + i(2-\sqrt{3})\right]$$

$$[v_0 = 3-4i, v_1 = 4+3i, v_2 = -3+4i = -v_0, v_3 = -4-3i = -v_1]$$

36 Risolvere ① $z^2 + 2iz - 3 + 2\sqrt{3}i = 0$ e ② $w^2 - 2iw - 1 + 8i = 0$.

$$\left[① \ z_1 = \sqrt{3} - 2i, \ z_2 = -\sqrt{3}, \ ② \ w_1 = 2-i, w_2 = -2+3i\right]$$

37 Risolvere l'equazione $z^3 = (2+3i)^3$.

$$\left[z_0 = (2+3i), z_1 = -\tfrac{3\sqrt{3}+2}{2} + \tfrac{2\sqrt{3}-3}{2}i, z_2 = \tfrac{3\sqrt{3}-2}{2} - \tfrac{2\sqrt{3}-3}{2}i\right]$$

38 Risolvere l'equazione $(3-4i)^3 z^3 = 1$.

$$\left[z_0 = \tfrac{3}{25} + \tfrac{4}{25}i, z_1 = \tfrac{4\sqrt{3}-3}{25} - \tfrac{3\sqrt{3}+4}{25}i, z_2 = -\tfrac{4\sqrt{3}+3}{25} - \tfrac{4-3\sqrt{3}}{25}i\right]$$

39 Risolvere l'equazione $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

$$\left[z_1 = \sqrt{2}, z_2 = -\sqrt{2}, z_3 = \sqrt{3}i, z_4 = -\sqrt{3}i\right]$$

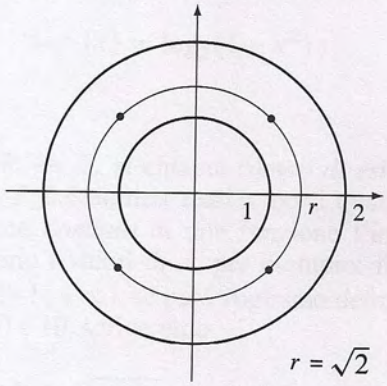
40 Risolvere l'equazione $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

$$\left[|z_i| = \sqrt{2},\ \alpha_1 = \tfrac{\pi}{4}, \alpha_2 = \tfrac{5}{12}\pi, \alpha_3 = \tfrac{11}{12}\pi, \alpha_4 = \tfrac{13}{12}\pi, \alpha_5 = \tfrac{19}{12}\pi, \alpha_6 = \tfrac{7}{4}\pi\right]$$

41 Disegnare nel piano complesso l'insieme

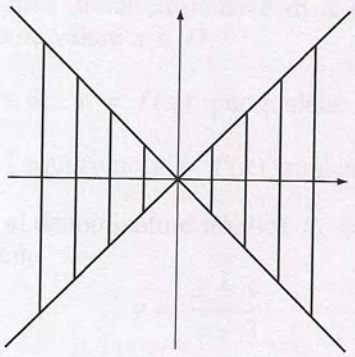
$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : (|z^2| - 3|z| + 2)(z^4 + 4) = 0\}.$$

$$[\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, |z| = 2\} \cup \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}]$$



42 Descrivere e disegnare l'insieme $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$.

$$[\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : -|x| \leq y \leq |x|\}]$$



CAPITOLO 4

Funzioni – Proprietà generali

4.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

4.1.1 Definizioni preliminari

ESERCIZIO 4.1 **Campo di esistenza e dominio di f**
Immagine di f

Determinare campo di esistenza e immagine delle seguenti funzioni:

① $f_1(x) = \dfrac{2+x}{x-3}$; ② $f_2(x) = \log_2(1-x^2)$; ③ $f_3(x) = \sqrt[4]{x-x^2}$.

Soluzione

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama *campo di esistenza* o *insieme di definizione* di f l'insieme T dei numeri reali x per i quali l'espressione di f ha senso, chiameremo invece *dominio* di una funzione l'insieme $D \subseteq T$ in cui (all'occorrenza) limiteremo i valori di x, per esempio: il campo di esistenza di $f(x) = \sqrt{x+1}$ è $T = [-1, +\infty)$, se però vogliamo definire la funzione $\sqrt{x+1}$ solo per i valori di x tra 0 e 10, scriveremo

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \in D = [0, 10];$$

salvo esplicita indicazione contraria, D coinciderà con T.

Si chiama *immagine* di f il sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ costituito dai numeri che sono immagine di un qualche valore $x \in D$:

$$I_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ per qualche } x \in D\},$$

ossia i valori y per i quali l'equazione $y = f(x)$ ammette radici.

① La presenza di $x - 3$ al denominatore implica $T_1 = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, si vede poi che l'equazione

$$y = \frac{2+x}{x-3}$$

ha soluzione solo se $y \neq 1$, pertanto $I_{f_1} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

② La funzione logaritmo richiede che l'argomento sia strettamente positivo, nel nostro caso quindi $1 - x^2 > 0$ e pertanto $T_2 = (-1, 1)$, inoltre poiché il logaritmo di un numero minore o uguale a 1 è minore o uguale a 0, $I_{f_2} = (-\infty, 0]$.

③ Occorre che $x - x^2 \geq 0$, il che corrisponde a chiedere $0 \leq x \leq 1$ (e quindi $T_3 = [0, 1]$), inoltre osserviamo che la funzione $x - x^2$ è una parabola che rivolge la concavità verso il basso, e che ha il vertice in $x = \frac{1}{2}$, poichè allora, se $x \in [0, 1]$, $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, possiamo affermare che $T_{f_3} = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

ESERCIZIO 4.2 Funzione composta

Date le funzioni

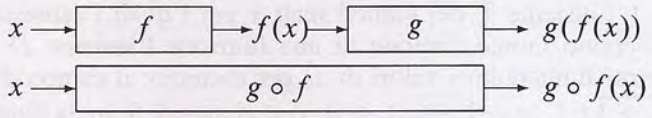
$$f(x) = x^2 - 1, \qquad g(x) = \log_2(x - 1) \quad e \quad h(x) = \sqrt{x},$$

determinare le seguenti funzioni composte, specificando per ciascuna il relativo campo di esistenza:

① $g \circ f(x)$; ② $f \circ g(x)$; ③ $h \circ g(x)$; ④ $h \circ g \circ f(x)$.

Soluzione

Date due funzioni f e g, si chiama *funzione composta* di f e g, e si indica con $g \circ f$ la funzione[a] ottenuta calcolando il valore di g in corrispondenza del valore ottenuto da $f(x)$:



① Poiché $g \circ f(x) = \log_2((x^2 - 1) - 1) = \log(x^2 - 2)$, bisogna imporre che $|x| > \sqrt{2}$, ossia $T_{g \circ f} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; in termini delle singole funzioni notiamo che $T_f = \mathbb{R}$ e $I_f = [-1, +\infty)$, mentre $T_g = (1, +\infty)$ e $I_g = \mathbb{R}$; affinché $I_f \subseteq T_g$ si deve restringere f al dominio $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, in tal modo $I_f = (1, +\infty) = T_g$ e $g \circ f$ è definita.

② Poiché $f \circ g(x) = (\log_2(x - 1))^2 - 1$, immediatamente si vede che $T_{f \circ g} = (1, +\infty)$; in questo caso, poiché $T_g = (1, +\infty)$ e $T_f = \mathbb{R}$, non è necessaria alcuna ulteriore limitazione.

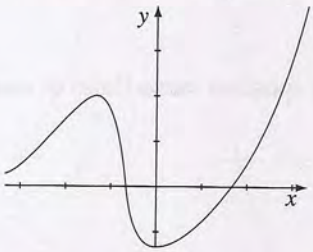
③ Veniamo a $h \circ g(x) = \sqrt{\log_2(x - 1)}$: $T_h = [0, +\infty)$, mentre $I_g = \mathbb{R}$, dovremo perciò restringere g ai soli valori di x per cui è positiva: $x \geq 2$, e quindi $T_{h \circ g} = [2, +\infty)$.

[a] Attenzione! In generale, la funzione composta $g(f(x))$ si indica con $g \circ f(x)$, raramente si può trovare anche la scrittura $f \circ g(x)$.

④ Per quanto riguarda $h \circ g \circ f$, sappiamo già (punto ①) che $T_{g \circ f} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, in questo caso però $I_{g \circ f} = \mathbb{R}$ e non è garantita l'esistenza di $h \circ g \circ f$; occorre perciò restringere il dominio di g, questo comporta restringere ulteriormente il dominio di f (percorriamo il cammino a ritroso, come quando si sceglie l'orario di partenza del treno dovendo rispettare un orario di arrivo). Allora, affinchè $T_h = [0, +\infty) \subseteq I_g$, occorre che $D_g = [2, +\infty)$, affinché poi $I_f \subseteq D_g$, occorre che $|x| \geq \sqrt{3}$, pertanto $D_f = T_{h \circ g \circ f} = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$.

ESERCIZIO 4.3 **Grafico di una funzione, trasformazioni elementari**

Data la funzione $f(x)$ il cui grafico è



disegnare qualitativamente i grafici delle funzioni seguenti:

① $f(x)+1$; ② $f(x+2)$; ③ $\frac{1}{2}f(x)$; ④ $f(-2x)$; ⑤ $f(|x|)$; ⑥ $|f(x)|$.

Soluzione

Esaminiamo dapprima gli effetti di tutte le trasformazioni sui grafici, e poi disegnamo tutti i grafici corrispondenti.

- $f(x) + k$ – corrisponde a una traslazione in verticale di k unità del grafico di f: verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$.
- $f(x + k)$ – corrisponde a una traslazione in orizzontale di k unità del grafico di f: verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.
- $\alpha f(x)$ – corrisponde a una contrazione o dilatazione in verticale del grafico di f, combinata se $\alpha < 0$ con un completo ribaltamento del grafico di f rispetto all'asse delle ascisse, secondo il seguente schema:

$\alpha > 1$	$0 < \alpha < 1$	$-1 < \alpha < 0$	$\alpha < -1$
dilatazione,	contrazione,	contrazione e ribaltamento,	dilatazione e ribaltamento;

nel caso in cui $\alpha = -1$ sia ha unicamente il ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, senza dilatazione o contrazione.

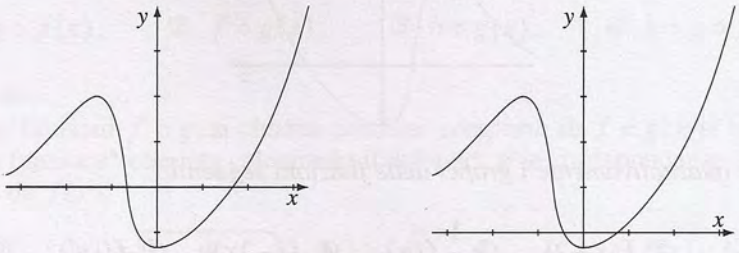
- $f(\alpha x)$ – corrisponde a una contrazione o dilatazione in orizzontale del grafico di f, combinata se $\alpha < 0$ con un completo ribaltamento del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, secondo il seguente schema:

$\alpha > 1$	$0 < \alpha < 1$	$-1 < \alpha < 0$	$\alpha < -1$
contrazione,	dilatazione,	dilatazione e ribaltamento,	contrazione e ribaltamento;

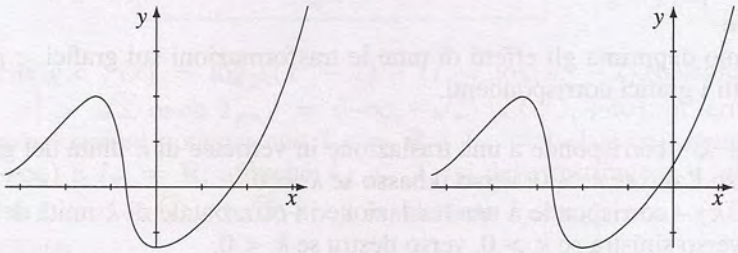
  nel caso in cui $\alpha = -1$ sia ha unicamente il ribaltamento rispetto all'asse delle ordinate, senza dilatazione o contrazione.
- $f(|x|)$ – il grafico coincide con il grafico di f a destra dell'asse delle ordinate, a sinistra dell'asse delle ordinate diventa simmetrico di quello di destra.
- $|f(x)|$ – il grafico coincide con il grafico di f ove $f(x) > 0$, mentre la parte al di sotto dell'asse delle ascisse viene ribaltata al di sopra di esso.

Pertanto:

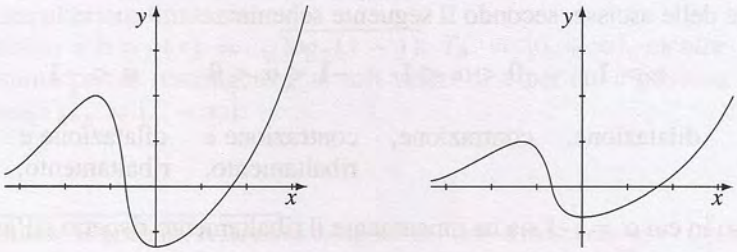
① il grafico di $f(x) + 1$ è spostato verso l'alto di una unità:



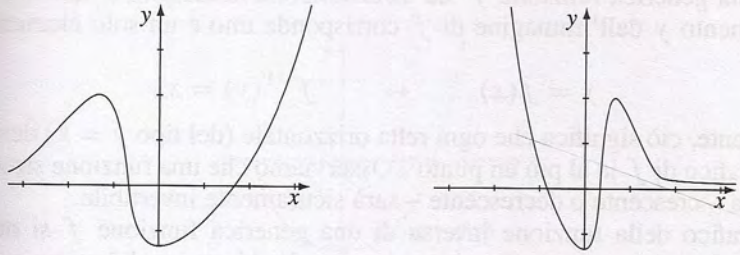
② il grafico di $f(x + 2)$ è spostato verso sinistra di due unità:



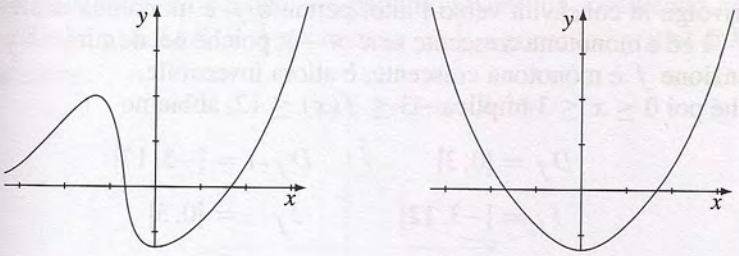
③ il grafico di $\frac{1}{2} f(x)$ è compresso in verticale:



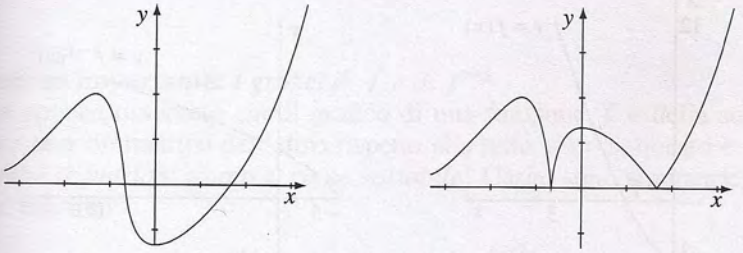
④ il grafico di $f(-2x)$ è compresso in orizzontale, e ribaltato:



⑤ il grafico di $f(|x|)$ è quello di una funzione simmetrica rispetto all'asse x, che per $x > 0$ coincide con $f(x)$:



⑥ il grafico di $|f(x)|$ è il grafico di f ove essa è positiva, è ribaltato al di sopra dell'asse delle ascisse dove è negativa:



ESERCIZIO 4.4 **Corrispondenza biunivoca e funzione inversa**

Stabilire se ciascuna delle seguenti funzioni è invertibile nel dominio a fianco specificato, e nel caso calcolare l'espressione della funzione inversa, specificandone dominio e immagine, disegnare infine un grafico di ciascuna funzione e di ciascuna inversa:

① $f(x) = x^2 + 2x - 3, \qquad D_f = [0, 3]\,;$

② $g(x) = x^2 - 2, \qquad D_g = [-\sqrt{2}, 2]\,;$

③ $h(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,.$

Soluzione

Perché una generica funzione f sia *invertibile*[b], è necessario e sufficiente che a ogni elemento y dell'immagine di f corrisponda uno e un solo elemento x del dominio:

$$y = f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad f^{-1}(y) = x\,;$$

graficamente, ciò significa che ogni retta orizzontale (del tipo $y = k$) deve incontrare il grafico di f in al più un punto[c]. Osserviamo che una funzione strettamente monotona – crescente o decrescente – sarà sicuramente invertibile.

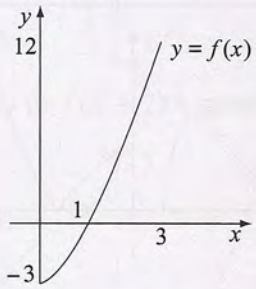
Il grafico della funzione inversa di una generica funzione f si ottiene da quello di f attraverso una riflessione rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

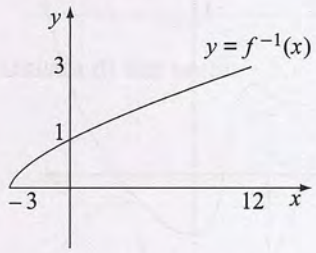
① Il grafico di $y = f(x)$ è una parabola, il cui vertice si trova in $(-1, -4)$ e che rivolge la concavità verso l'alto, pertanto f è monotona decrescente se $x < -1$ ed è monotona crescente se $x > -1$; poiché nel dominio $D_f = [0, 3]$ la funzione f è monotona crescente, è allora invertibile.
Poiché poi $0 \le x \le 3$ implica $-3 \le f(x) \le 12$, abbiamo

$$D_f = [0, 3] \qquad D_{f^{-1}} = [-3, 12]$$

$$I_f = [-3, 12] \qquad I_{f^{-1}} = [0, 3]$$

e i grafici di f e f^{-1} sono (attenzione: non sono in scala):





l'espressione analitica di f^{-1} si ricava da quella di f:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

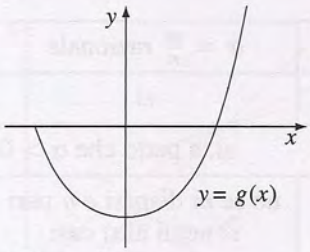
risolvendola rispetto a x (ricordando che $x > -1$):

$$x^2 + 2x - 3 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{4 + y} \quad \Rightarrow \quad x = -1 + \sqrt{4 + y}$$

pertanto $f^{-1}(y) = \sqrt{4 + y} - 1$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{4 + x} - 1$.

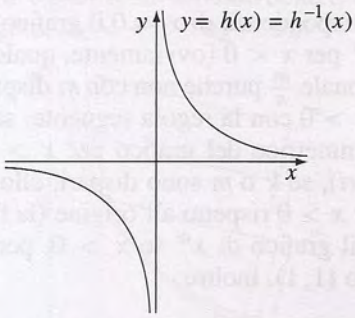
[b] Denotiamo con f^{-1} la funzione inversa della funzione f.
[c] Lo incontra in un solo punto se $k \in I_f$, non lo incontra se $k \notin I_f$.

② Il grafico della funzione $y = g(x)$ è una parabola avente vertice in $(0, -2)$, e in $D_g = [-\sqrt{2}, 2]$ non è monotona:



pertanto g non è invertibile.

③ La funzione $h(x) = \frac{1}{x}$ non è monotona nel suo dominio, tuttavia verifica la regola delle rette orizzontali, è pertanto invertibile; risolvendo rispetto a x l'equazione $y = h(x) = \frac{1}{x}$ si ottiene $x = \frac{1}{y}$, e pertanto i grafici di h e di h^{-1} coincidono:



Osservazione importante: *I grafici di f e di f^{-1}*
Abbiamo appena osservato che il grafico di una funzione f e della sua inversa f^{-1} sono uno simmetrico dell'altro rispetto alla retta $y = x$, questo è vero *solo se entrambe le funzioni usano x come variabile*! Ossia: sono simmetrici i grafici delle due funzioni

$$y = f(x) \qquad \text{e} \qquad y = f^{-1}(x).$$

Le due scritture $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ legano le stesse coppie di valori x e y, pertanto i punti che le soddisfano sono i medesimi. Passando da $x = f^{-1}(y)$ a $y = f^{-1}(x)$ si scambiano x e y, ed è per questo che i grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice.

4.1.2 Le principali funzioni elementari

ESERCIZIO 4.5 **Funzioni del tipo x^α**

Disegnare il grafico qualitativo di

① $f(x) = x^\pi$; ② $g(x) = x^{2/3}$; ③ $h(x) = x^{1/3}$; ④ $k(x) = x^{6/4}$.

Soluzione

Partiamo dall'insieme di definizione della generica x^α, poiché dipende da α:

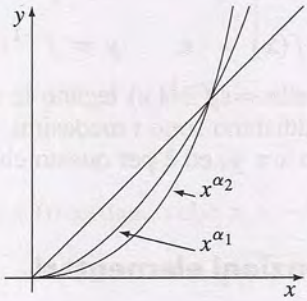
	α intero	$\alpha = \frac{m}{n}$ razionale	α irrazionale
$x > 0$	sì	sì	sì
$x = 0$	sì, a patto che $\alpha > 0$		
$x < 0$	sì	no se m dispari e n pari sì negli altri casi	no

Attenzione: con $x^{\frac{m}{n}}$ si intende $\sqrt[n]{x^m}$, e non il contrario. Dunque $x^{\frac{6}{4}}$ ha significato per x negativo, mentre $x^{\frac{3}{2}}$ no.

Il grafico di x^α per $x > 0$ è contenuto nel primo quadrante per ogni valore reale di α; se $\alpha > 0$ in corrispondenza di $x = 0$ il grafico passa per l'origine degli assi. Infine il grafico di x^α per $x < 0$ (ovviamente, qualora esista, cioè se α è un intero k, o un numero razionale $\frac{m}{n}$ purché non con m dispari e n pari) si ottiene per riflessione da quello per $x > 0$ con la regola seguente: se k o m sono pari, allora il grafico per $x < 0$ è simmetrico del grafico per $x > 0$ rispetto all'asse delle ordinate (la funzione è *pari*), se k o m sono dispari, allora il grafico per $x < 0$ è simmetrico del grafico per $x > 0$ rispetto all'origine (la funzione è *dispari*[d]).

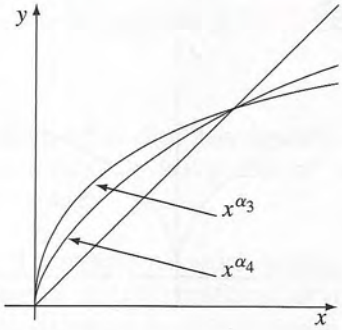
Consideriamo allora il grafico di x^α se $x > 0$, per qualsiasi valore di α il grafico passerà per il punto $(1, 1)$, inoltre:

- se $\alpha = 1$, il grafico è semplicemente la bisettrice di primo e terzo quadrante;
- se $\alpha > 1$ il grafico assomiglierà a quello della parabola $y = x^2$, sempre più piatto vicino a zero, e sempre più ripido per $x > 1$ al crescere di α (in figura, $1 < \alpha_1 < \alpha_2$);

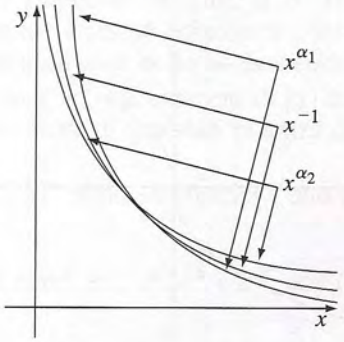


[d] Per il significato di funzione pari e dispari, vedere più avanti Esercizio 4.11.

- se $0 < \alpha < 1$ il grafico assomiglierà a quello di $y = \sqrt{x}$, sempre più ripido vicino a zero, e sempre più piatto per $x > 1$ all'avvicinarsi di α a zero (in figura, $0 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1$);

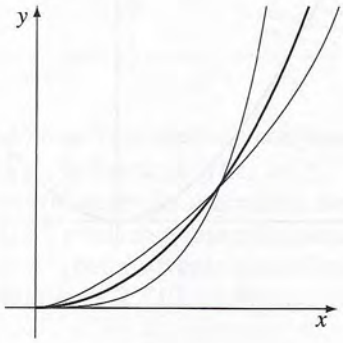


- se $\alpha < 0$ il grafico assomiglierà a quello dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$, più lontano dall'asse delle ordinate e più vicino all'asse delle ascisse se $\alpha < -1$, viceversa se $-1 < \alpha < 0$ (in figura, $\alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0$);

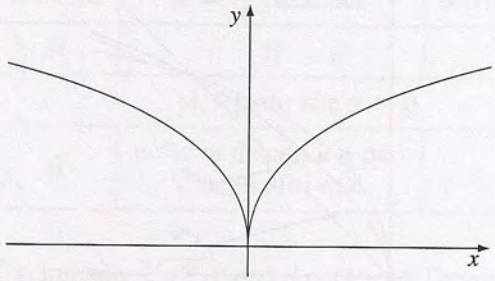


Infine, i grafici di x^{α} e $x^{\frac{1}{\alpha}}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

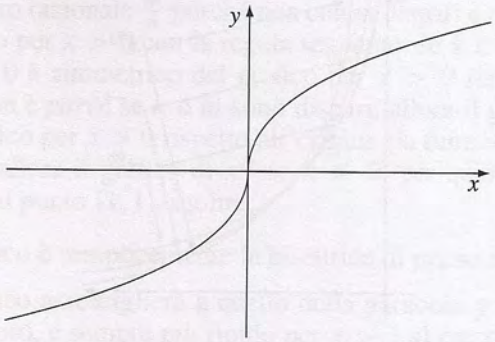
① Sia $f(x) = x^{\pi}$, poiché $\pi > 1$ il grafico di f è "tipo parabola", compreso tra quelli di x^3 e di x^4, poiché inoltre π è irrazionale f non esiste per $x < 0$, in figura i grafici in linea sottile sono quelli di x^3 e di x^4, quello in linea più marcata è x^{π}:



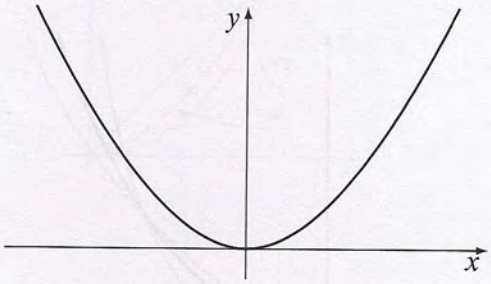
② Sia $g(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, poiché il denominatore è dispari la funzione esiste anche per $x < 0$, poiché il numeratore è pari la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, poiché l'esponente è compreso tra 0 e 1 il grafico per le $x > 0$ è "tipo radice":



③ Sia $h(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, poiché il denominatore è dispari la funzione esiste anche per $x < 0$, poiché il numeratore è dispari la funzione è simmetrica rispetto all'origine, poiché l'esponente è compreso tra 0 e 1 il grafico per le $x > 0$ è "tipo radice":



④ Sia $k(x) = x^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{x^6}$; poiché numeratore e denominatore sono entrambi pari, la funzione esiste anche per $x < 0$; poiché il numeratore è pari, la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate; poiché l'esponente è maggiore di 1, il grafico per le $x > 0$ è "tipo parabola":



ESERCIZIO 4.6 **Funzioni esponenziali**

Disegnare un grafico qualitativo di

$$① \ f(x) = 2^x; \qquad ② \ g(x) = 3^{-x}; \qquad ③ \ h(x) = e^x.$$

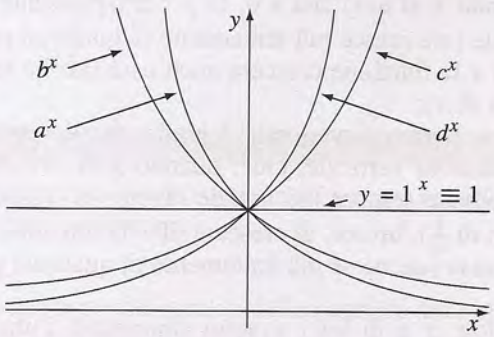
Soluzione

Sia $\alpha \in (0, +\infty)$, la funzione α^x si dice *esponenziale*; l'insieme di definizione è $\mathbb{R}$ e l'immagine è costituita da $(0, +\infty)$; poiché $\alpha^0 = 1$ tutti gli esponenziali passano per il punto $(0, 1)$; inoltre:

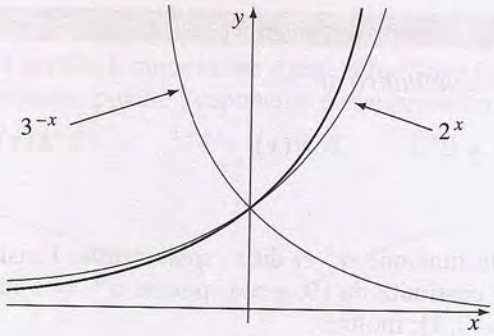
- se $\alpha > 1$, il grafico ha il semiasse negativo delle ascisse come asintoto orizzontale: se $x < 0$ al crescere di $|x|$ il grafico si avvicina all'asse delle ascisse (più velocemente di qualsiasi potenza di $\frac{1}{|x|}$); invece, se $x > 0$ al crescere di x la funzione crescerà molto velocemente (più velocemente di qualsiasi potenza di x);
- se $\alpha = 1$, il grafico è la retta $y = 1$;
- se $0 < \alpha < 1$, accade l'opposto del caso $\alpha > 1$: il grafico ha il semiasse positivo delle ascisse come asintoto orizzontale, infatti se $x > 0$ al crescere di x il grafico si avvicina all'asse delle ascisse (più velocemente di qualsiasi potenza di $\frac{1}{x}$); invece, se $x < 0$ al crescere di $|x|$ la funzione crescerà molto velocemente (più velocemente di qualsiasi potenza di $|x|$).

Infine, i grafici di α^x e di $(\frac{1}{\alpha})^x$ sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse delle ordinate.

In figura, abbiamo i grafici di a^x, b^x, 1^x, c^x e d^x, con $0<a<b<1<c<d$:



① ② ③ La funzione $f(x) = 2^x$ è un'esponenziale con base maggiore di 1, quindi è crescente. Poiché $3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$, la funzione $g(x) = 3^{-x}$, essendo un'esponenziale con base minore di 1, è decrescente (in alternativa, avremmo potuto ottenere il grafico di 3^{-x} dal grafico di 3^x attraverso una riflessione rispetto all'asse delle ordinate). La funzione $h(x) = e^x$, detta sovente semplicemente *esponenziale*, ha come base il numero irrazionale $e \simeq 2.718$, in figura è disegnata con tratto più marcato:



ESERCIZIO 4.7 **Funzioni logaritmiche**

Disegnare un grafico qualitativo di[e]

① $f(x) = \log_2 x$; ② $g(x) = \log_{0.3} x$; ③ $h(x) = \ln x$.

Soluzione

Poiché

$$y = \alpha^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_\alpha y$$

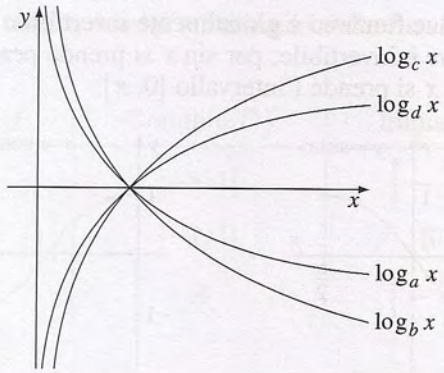
la funzione $y = \log_\alpha x$ è l'inversa di $y = \alpha^x$, quindi il suo grafico è simmetrico (rispetto a $y = x$) di $y = \alpha^x$, pertanto: è definita per $0 < \alpha < 1$ e per $\alpha > 1$; la sua immagine è $\mathbb{R}$; tutte le funzioni $\log_\alpha x$ passano per $(1, 0)$; inoltre:

- se $\alpha > 1$, il grafico ha il semiasse negativo delle ordinate come asintoto verticale, cioè: quando x si avvicina a 0, la y corrispondente è negativa e $|y|$ è sempre più grande (ma cresce più lentamente di qualsiasi potenza di $\frac{1}{x}$), invece, al crescere di x la funzione crescerà anch'essa (anche se più lentamente di qualsiasi potenza di x);
- se $0 < \alpha < 1$ le parti si invertono: il grafico ha il semiasse positivo delle ordinate come asintoto verticale, cioè: quando x si avvicina a 0, la y corrispondente è positiva e sempre più grande (anche se cresce più lentamente di qualsiasi potenza di $\frac{1}{x}$), invece, al crescere di x la funzione, negativa, crescerà in modulo anch'essa (anche se più lentamente di qualsiasi potenza di x).

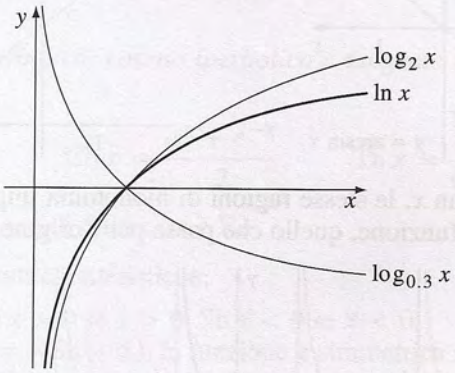
Infine, i grafici di $\log_\alpha x$ e di $\log_{\frac{1}{\alpha}} x$ sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse delle ascisse.

Nella successiva figura sono riportati i grafici di $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ e $\log_d x$, con $0 < a < b < 1 < c < d$.

[e] In tutto il libro, con $\ln a$ intendiamo il logaritmo *naturale* di a, avente per base il numero e; qualsiasi altro logaritmo verrà sempre indicato esplicitandone la base b: $\log_b a$.



① ② ③ La funzione $f(x) = \log_2 x$ è un logaritmo con base maggiore di 1, quindi è crescente. La funzione $g(x) = \log_{0.3} x$, essendo un logaritmo con base minore di 1, è decrescente (poiché poi $0.3 < \frac{1}{2}$, vicino a $x = 0$ è più schiacciato sull'asse delle ordinate e al crescere di x si allontana più lentamente dall'asse delle ascisse). La funzione $h(x) = \ln x$, poiché $2 < e < 3$, è un logaritmo anch'esso crescente, in figura è disegnata con tratto più marcato:

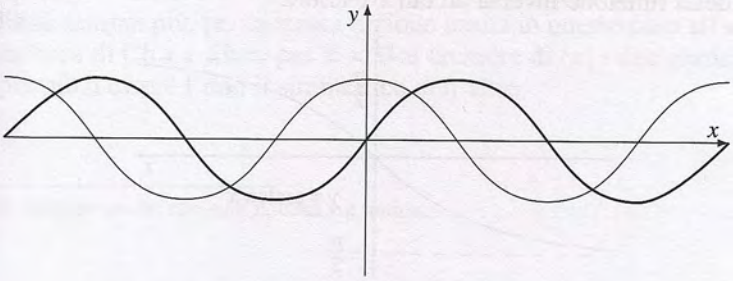


ESERCIZIO 4.8 **Funzioni trigonometriche e loro inverse**

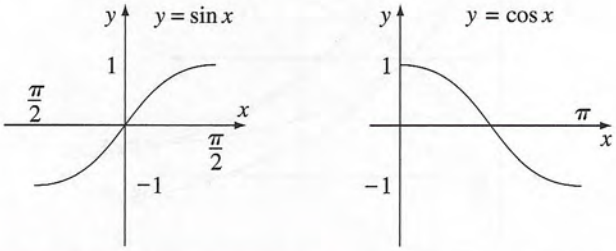
Noti che siano i grafici di $\sin x$, $\cos x$ *e* $\tan x$, *disegnare i grafici delle loro funzioni inverse* $\arcsin x$, $\arccos x$ *e* $\arctan x$.

Soluzione

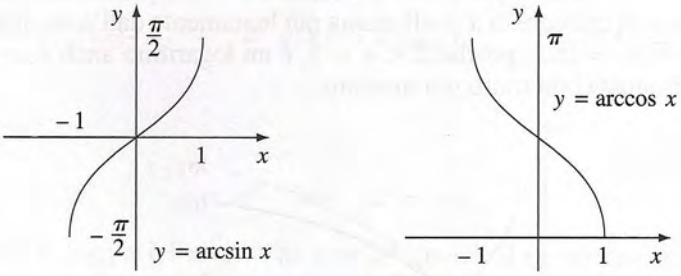
Conosciamo dalla trigonometria i grafici delle funzioni $\sin x$ (in grassetto) e $\cos x$, qui rappresentati nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$:



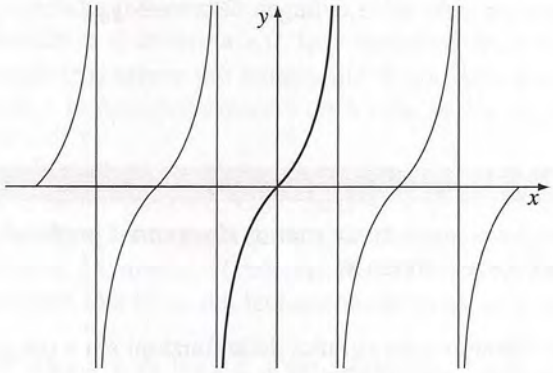
Poiché nessuna delle due funzioni è globalmente invertibile, occorre limitare ciascuna a un dominio ove è invertibile; per $\sin x$ si prende per convenzione l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, per $\cos x$ si prende l'intervallo $[0, \pi]$:



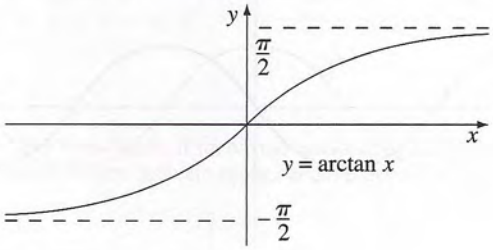
Le due funzioni inverse così ottenute si chiamano rispettivamente $\arcsin x$ e $\arccos x$, il loro grafico è (rispettivamente)



Per quanto riguarda $\tan x$, le stesse ragioni di monotonia impongono di scegliere un solo "ramo" della funzione, quello che passa per l'origine (in grassetto):



Il grafico della funzione inversa $\arctan x$ è allora



Raccogliamo in una tabella domini e immagini delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche:

Funzione f	Dominio D_f	Immagine I_f
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ESERCIZIO 4.9 **Funzioni iperboliche**

Disegnare un grafico qualitativo di

① $f(x) = \operatorname{Sh} x$; ② $g(x) = \operatorname{Ch} x$; ③ $h(x) = \operatorname{Th} x$.

e ricavare l'espressione analitica delle loro inverse.

Soluzione

Le funzioni *seno iperbolico*, *coseno iperbolico* e *tangente iperbolica*[f] sono definite come

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

L'insieme di definizione di tutte e tre è $\mathbb{R}$.

① $\operatorname{Sh} x$ ha le seguenti caratteristiche:

- $\operatorname{Sh} 0 = 0$, $\operatorname{Sh} x > 0$ se $x > 0$, $\operatorname{Sh} x < 0$ se $x < 0$;
- poiché $\operatorname{Sh} x = -\operatorname{Sh}(-x)$, la funzione è simmetrica rispetto all'origine;
- al crescere di x, cresce anche $\operatorname{Sh} x$, come un'esponenziale, quindi più velocemente di ogni potenza di x.

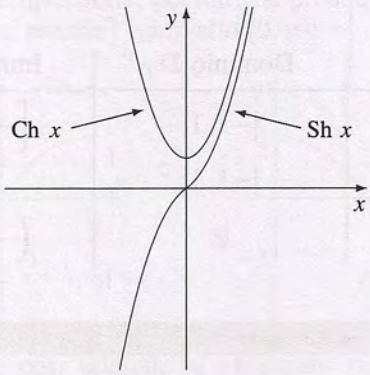
② $\operatorname{Ch} x$ ha le seguenti caratteristiche:

- $\operatorname{Ch} 0 = 1$, $\operatorname{Ch} x > 1$ se $x \neq 0$;
- poiché $\operatorname{Ch} x = \operatorname{Ch}(-x)$, la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate;
- al crescere di $|x|$, cresce anche $\operatorname{Ch} x$, come un'esponenziale, quindi più velocemente di ogni potenza di x.

Poiché $\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x = e^{-x}$, al crescere di x i due grafici tenderanno ad assomigliarsi sempre più, per la stessa ragione (unita in questo caso all'espressione analitica di $\operatorname{Ch} x$ e $\operatorname{Sh} x$) per $x < 0$ al crescere di $|x|$ i due grafici tendono sempre più a essere l'uno il simmetrico dell'altro.

[f] A volte indicate anche con $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.

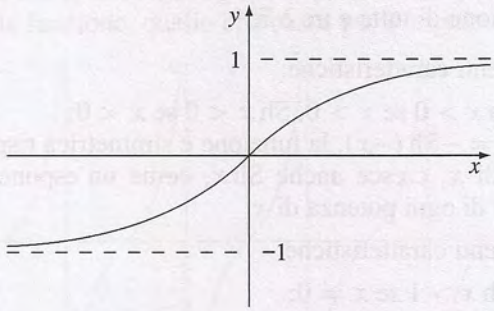
Un grafico qualitativo di $\operatorname{Sh} x$ e $\operatorname{Ch} x$ è il seguente:



③ Per quanto riguarda $\operatorname{Th} x$, osserviamo innanzitutto che, come $\operatorname{Sh} x$, anche $\operatorname{Th} x$ è simmetrica rispetto all'origine, dedurremo allora il suo grafico per $x > 0$, e sfrutteremo poi la simmetria per il grafico con $x < 0$. Per studiare il comportamento di $\operatorname{Th} x$ per $x > 0$, vediamo subito che, raccogliendo e^x a numeratore e denominatore $\operatorname{Th} x$ può essere riscritta come

$$\operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

per cui, $0 \leq \operatorname{Th} x < 1$, e anzi al crescere di x la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $\operatorname{Th} x$. Un grafico qualitativo di $\operatorname{Th} x$ è allora il seguente:



Per scrivere le formule delle funzioni inverse di $\operatorname{Sh} x$ e $\operatorname{Th} x$, osserviamo innanzitutto che, essendo monotone, sono invertibili su tutto $\mathbb{R}$, invece $\operatorname{Ch} x$ è invertibile alternativamente per $x \geq 0$ o per $x \leq 0$; per quanto riguarda la funzione inversa di $\operatorname{Sh} x$, poniamo $y = \operatorname{Sh} x$ e risolviamo quest'equazione rispetto a x:

$$y = \operatorname{Sh} x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2y - e^{-x} = 0$$

se moltiplichiamo tutto per e^x otteniamo l'equazione di secondo grado in e^x

$$(e^x)^2 - 2y\, e^x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} = \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0 \Rightarrow & x = \log(y + \sqrt{y^2+1}) \\ e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0 & \text{non accettabile,} \end{cases}$$

pertanto

$$y = \operatorname{Sh} x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Con conti analoghi, è possibile ricavare che, se $x \geq 0$ e $y \geq 1$:

$$y = \operatorname{Ch} x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log(y + \sqrt{y^2-1}),$$

e, se $-1 \leq y \leq 1$:

$$y = \operatorname{Th} x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

ESERCIZIO 4.10 Altre funzioni importanti

Descrivere le seguenti funzioni, disegnandone un grafico:

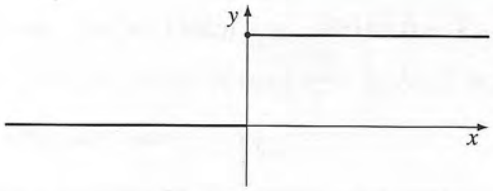
① $H(x)$; ② $\operatorname{sgn} x$; ③ $\lfloor x \rfloor$; ④ $\operatorname{mant} x$.

Soluzione

① La funzione $H(x)$, detta *funzione di Heaviside*, è la funzione che vale 0 se $x < 0$ e 1 se $x \geq 0$:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

il grafico è[g]:

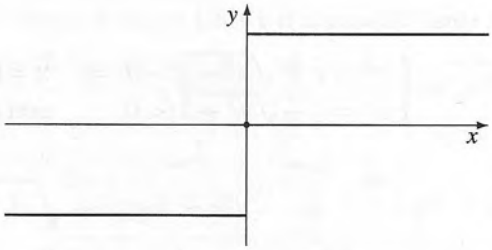


② La funzione $\operatorname{sgn} x$ (*segno di* x) vale:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$

il suo grafico è:

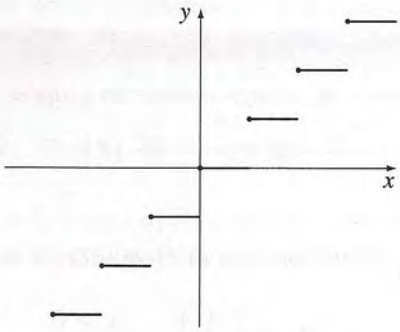
[g] D'ora in avanti, un punto in corrispondenza di un "salto" significa che in corrispondenza di quell'ascissa la funzione assume il valore da esso contrassegnato



③ La funzione $\lfloor x \rfloor$ (*parte intera di* x) corrisponde al massimo intero minore o uguale a x, per esempio:

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4\,;$$

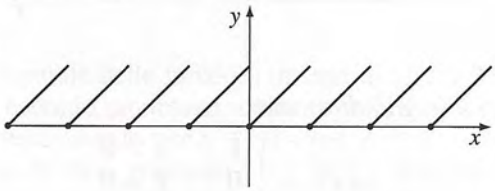
il suo grafico è:



④ La funzione mant x (*mantissa di* x) è definita come $\operatorname{mant} x = x - \lfloor x \rfloor$, per esempio:

$$\operatorname{mant} \pi = \pi - 3 = 0.14159\ldots, \quad \operatorname{mant}(-\pi) = -\pi - (-4) = 0.85841\,;$$

il suo grafico è:



4.1.3 Alcune proprietà delle funzioni

ESERCIZIO 4.11 **Funzioni pari, funzioni dispari**

Mostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere decomposta nella somma di due funzioni, una pari e l'altra dispari.

Soluzione

Una funzione $f(x)$ si dice pari se per ogni valore di x abbiamo $f(x) = f(-x)$ (cioè: il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y); si dice dispari se per ogni valore di x abbiamo $f(x) = -f(-x)$ (cioè: il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine). Detta $f(x)$ la generica funzione, dobbiamo dimostrare che esiste una coppia di funzioni $f_p(x)$ e $f_d(x)$ tali che

$$f(x) = f_p(x) + f_d(x), \qquad \begin{cases} f_p \text{ pari} \\ f_d \text{ dispari} \end{cases}.$$

Ammettiamo che la coppia f_p e f_d esista, per ottenerne l'espressione, scriviamole entrambe in corrispondenza di x e $-x$, poiché $f(-x) = f_p(-x) + f_d(-x) = f_p(x) - f_d(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = f_p(x) + f_d(x) \\ f(-x) = f_p(x) - f_d(x) \end{cases}$$

da cui, sommando e sottraendo membro a membro:

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2};$$

per esempio, se $f(x) = e^x$, troviamo che

$$f_p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x, \quad f_d(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x.$$

ESERCIZIO 4.12 **Funzioni periodiche**

Date le funzioni

$$f(x) = \sin(\alpha x + 3), \; g(x) = \sin(8x) + \cos\left(\frac{20}{3}x\right), \; h(x) = \cos(3x) - 2\sin(\pi x),$$

rispondere alle seguenti domande:

① *quale valore positivo bisogna assegnare ad α perché f sia periodica di periodo $T = 10$?*
② *Qual è il periodo della funzione g?*
③ *La funzione h è periodica? Se sì, quanto vale il suo periodo?*

Soluzione

Una funzione f è periodica di periodo T (cioè T-periodica) se per ogni valore di $x \in D_f$ anche $x + T \in D_f$, inoltre deve accadere che $f(x) = f(x + T)$.

① Imponiamo allora che f sia periodica di periodo 10:

$$\sin(\alpha x + 3) = \sin(\alpha(x + 10) + 3);$$

Sapendo poi che le funzioni circolari (seno e coseno) sono 2π-periodiche, cioè $\forall\vartheta\ \sin(\vartheta) = \sin(\vartheta + 2\pi)$, chiediamo allora che i due argomenti scritti sopra differiscano di 2π:

$$[\alpha(x+10)+3] - [\alpha x + 3] = 2\pi \quad \Rightarrow \quad 10\alpha = 2\pi\,,$$

pertanto $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

② Se una funzione g è la somma di due funzioni periodiche, di periodi T_1 e T_2 rispettivamente, essa avrà come periodo il minimo comune multiplo dei due periodi (qualora questo esista), poiché abbiamo appena visto che $\sin(\beta x)$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\beta}$, concludiamo subito che:

$$\sin(8x) \text{ è periodica di periodo } T_1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$\cos\left(\frac{20}{3}x\right) \text{ è periodica di periodo } T_2 = \frac{3\pi}{10}\,;$$

il nostro scopo è allora trovare il minimo comune multiplo tra T_1 e T_2, cioè determinare due interi $h, k \in \mathbb{N}$ tali per cui

$$hT_1 = kT_2 = T \quad \Rightarrow \quad h\frac{\pi}{4} = k\frac{3\pi}{10}\,,$$

semplificando per π l'ultima relazione e liberando dai denominatori arriviamo infine all'uguaglianza

$$5h = 6k\,;$$

poiché abbiamo raggiunto come coefficienti di h e k due numeri interi primi tra loro, concludiamo che $h = 6$ e $k = 5$, e che pertanto minimo comune multiplo dei periodi è

$$\text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 6\frac{\pi}{4} = 5\frac{3\pi}{10} = \frac{3}{2}\pi\,.$$

③ La funzione $h(x)$ non è periodica, se lo fosse, dovrebbero esistere due interi $h, k \in \mathbb{N}$ per i quali (detti $T_1 = \frac{2}{3}\pi$ e $T_2 = 2$ i periodi di $\cos(3x)$ e $\sin(\pi x)$ rispettivamente)

$$hT_1 = kT_2 = T \quad \Rightarrow \quad h\frac{2}{3}\pi = 2k\,,$$

ma poiché π è irrazionale, non esiste alcuna coppia di interi che verifichi questa relazione; pertanto, come dicevamo, h non è periodica.

4.1.4 Grafici di funzioni

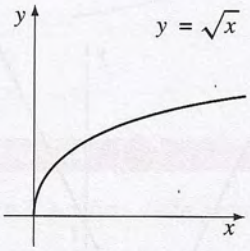
ESERCIZIO 4.13

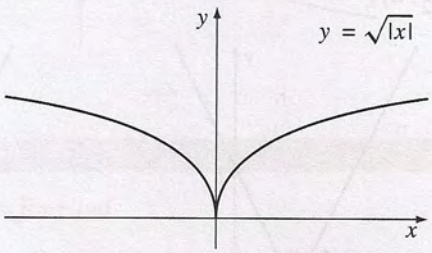
Facendo uso delle trasformazioni elementari dei grafici elencate nell'Esercizio 4.3, disegnare il grafico qualitativo di ciascuna delle seguenti funzioni

① $f(x) = \sqrt{|x-1|}-1$; ② $g(x) = \big|2|x+1|-2\big|$; ③ $h(x) = 1-\sqrt{\big|1-|x|\big|}$.

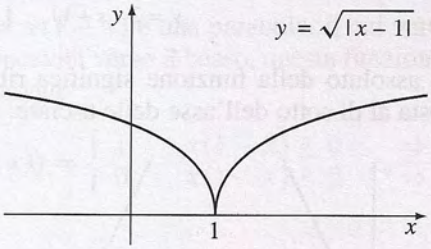
Soluzione

① Partiamo dal grafico di $\sqrt{x}$ (potenza compresa tra 0 e 1) e con una riflessione trasformiamolo nel grafico di $\sqrt{|x|}$:

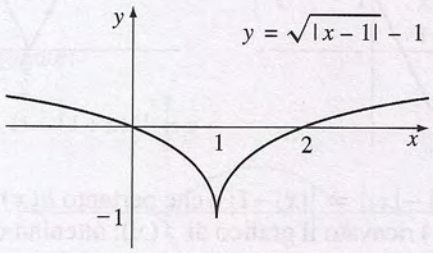




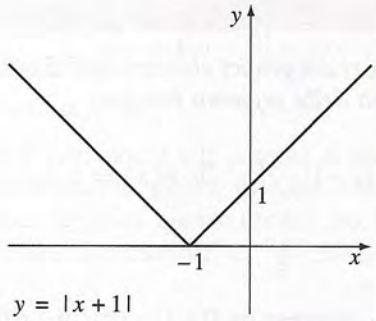
poiché nell'espressione della funzione al posto di $|x|$ compare $|x-1|$, il grafico non sarà "centrato" nell'origine, bensì in $x = 1$:



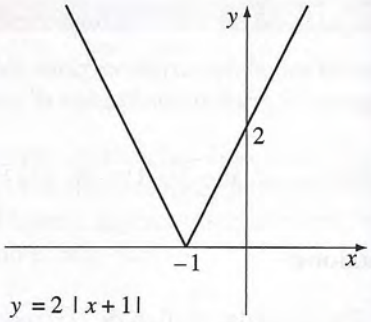
infine, il grafico va "abbassato" di un'unità, pertanto il punto $(1,0)$ finirà in $(1,-1)$ e la funzione attraverserà l'asse delle ascisse in $(0,0)$ e in $(2,0)$:



② Cominciamo con il grafico di $|x+1|$, moltiplicarlo per 2 significa raddoppiare la pendenza delle rette:

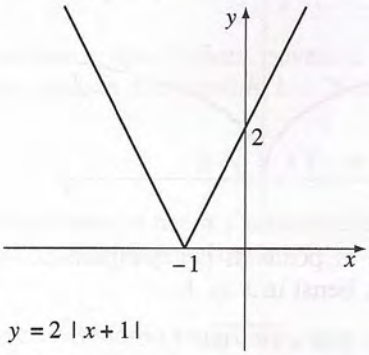


$y = |x+1|$

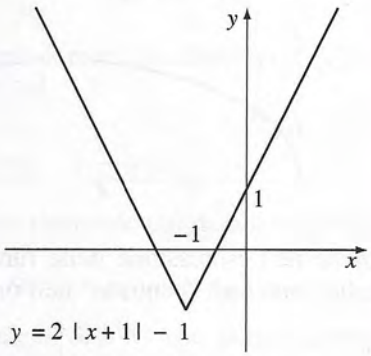


$y = 2\,|x+1|$

abbassiamo il grafico di 1 unità: attraverserà l'asse delle ascisse in $(-\frac{3}{2}, 0)$ e in $(-\frac{1}{2}, 0)$:

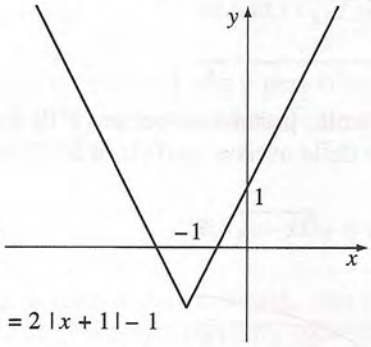


$y = 2\,|x+1|$

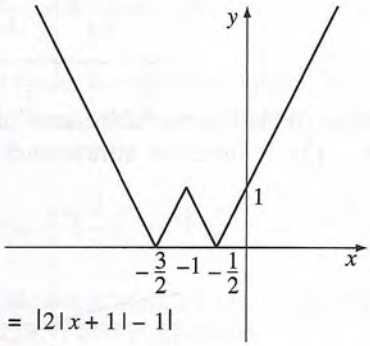


$y = 2\,|x+1| - 1$

prendere il valore assoluto della funzione significa ribaltare verso l'alto la parte di grafico posta al di sotto dell'asse delle ascisse:

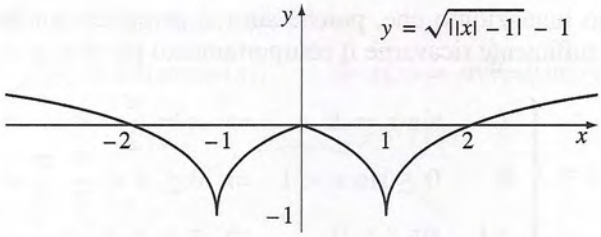


$y = 2\,|x+1| - 1$

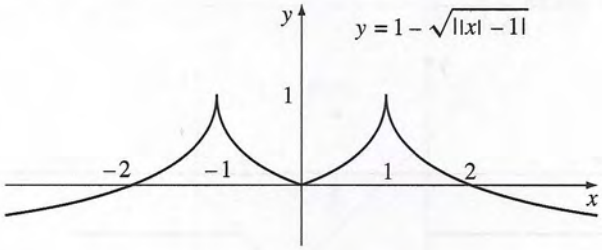


$y = |2\,|x+1| - 1|$

③ Osserviamo che $\big|1-|x|\big| = \big||x|-1\big|$ e che pertanto $h(x) = -f(|x|)$; abbiamo già (vedi punto ①) ricavato il grafico di $f(x)$: otteniamo immediatamente per riflessione rispetto all'asse y del ramo per $x > 0$ il grafico di $f(|x|)$:



per ottenere il grafico di h è ora sufficiente ribaltare rispetto all'asse x:



ESERCIZIO 4.14

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

① $f(x) = x(1-x)H(x(1-x))$; ② $g(x) = \lfloor \sin x \rfloor$; ③ $h(x) = \text{mant}(\sqrt{x})$.

Soluzione

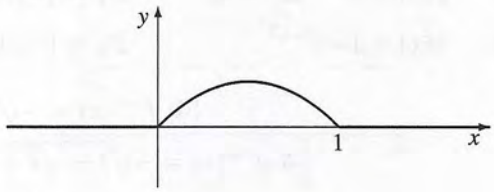
① La funzione $y = x(1-x)$ è una parabola, il cui vertice si trova in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, e che rivolge la concavità verso il basso, questa funzione viene moltiplicata per $H(x(1-x))$ che vale

$$H(x(1-x)) = \begin{cases} 1 & x(1-x) \geq 0 & \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x(1-x) < 0 & \Rightarrow x < 0, x > 1 \end{cases},$$

pertanto

$$x(1-x)H(x(1-x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases},$$

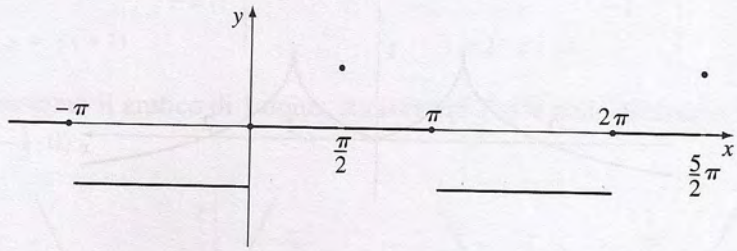
il grafico è il seguente:



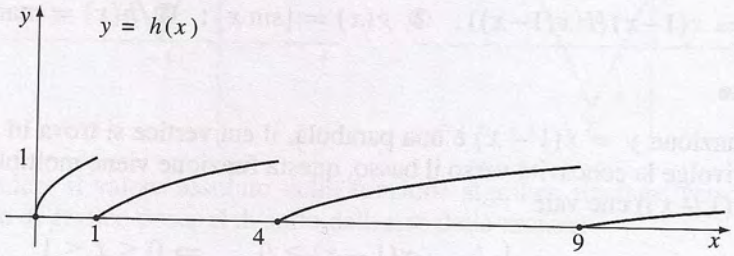
② Osserviamo innanzitutto che, poiché $\sin x$ è periodica, anche $g(x)$ lo sarà, pertanto è sufficiente ricavarne il comportamento per $0 \le x < 2\pi$, inoltre

$$\lfloor \sin x \rfloor = \begin{cases} 1 & \sin x = 1 & \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \le \sin x < 1 & \Rightarrow 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \\ -1 & \sin x < 0 & \Rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases},$$

il grafico è allora:



③ $h(x)$ è definita in $[0, +\infty)$, poiché inoltre h è crescente e $I_h = [0, +\infty)$, allora l'immagine di ogni intervallo della forma $[k^2, (k+1)^2)$ sarà l'intervallo $[0, 1)$, in altre parole se $x \in [k^2, (k+1)^2)$, allora $h(x) = (\sqrt{x} - k) \in [0, 1)$:



4.2 Esercizi proposti

15 Scrivere l'espressione analitica delle funzioni inverse delle funzioni seguenti, nel dominio indicato, specificandone il dominio:

① $f(x) = x^2$, $\quad D_f = (-\infty, -1)$;

② $g(x) = x^4 - 2x^2 - 4$, $\quad D_g = [-1, 0]$;

③ $h(x) = 1 - e^{-x^2}$, $\quad D_h = [-2, 0]$.

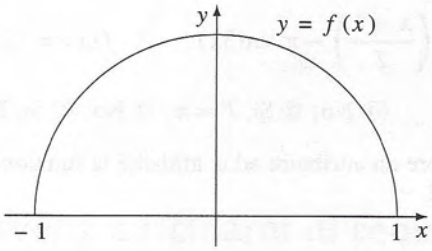
$$\left[① \ f^{-1}(x) = -\sqrt{x},\ D_{f^{-1}} = (1, +\infty)\right]$$

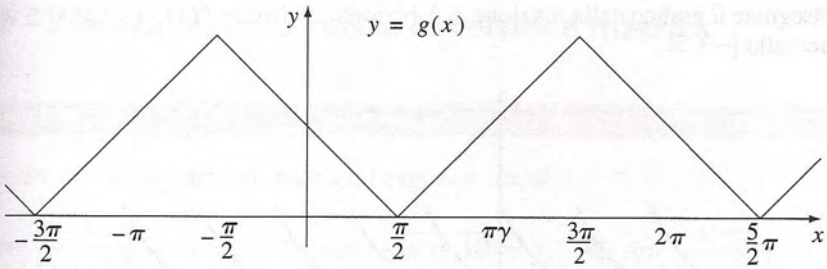
$$\left[② \ g^{-1}(x) = -\sqrt{1 - \sqrt{x+5}},\ D_{g^{-1}} = [-5, -4]\right]$$

$$\left[③ \ h^{-1}(x) = -\sqrt{-\log(1-x)},\ D_{h^{-1}} = [0, 1 - e^{-4}]\right]$$

16 Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

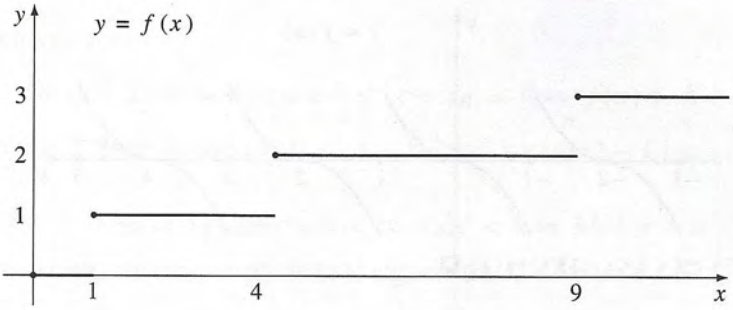
① $f(x) = \sin(\arccos(x))$; ② $g(x) = \arccos(\sin(x))$.

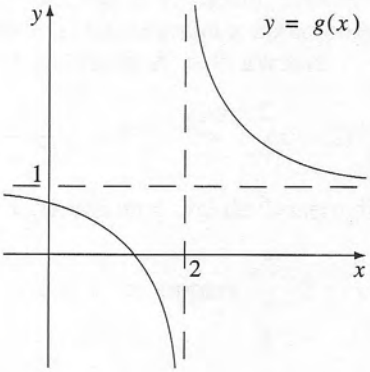




17 Disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni

① $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$; ② $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.





18 Dire se le seguenti funzioni sono periodiche o no, e nel caso specificarne il periodo T:

① $f(x) = \cos(x^2)$; ② $f(x) = (\cos x)^2$; ③ $f(x) = \sin\lfloor x \rfloor$;

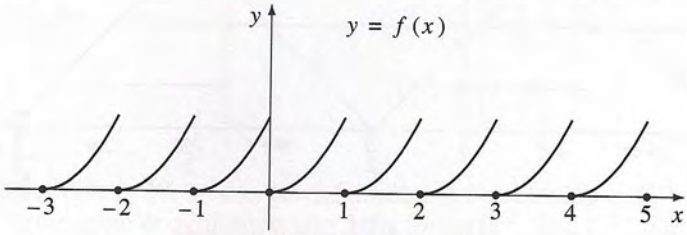
④ $f(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2}\right) - \pi \sin(3x)$; ⑤ $f(x) = (2 + \cos x)^{\sin x}$.

[① No; ② Sì, $T = \pi$; ③ No; ④ Sì, $T = 4\pi$; ⑤ Sì, $T = 2\pi$]

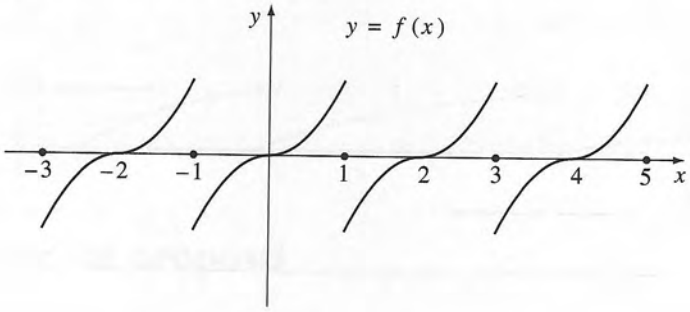
19 Determinare il valore da attribuire ad α affinché la funzione $f(x) = \tan(\sin \alpha x))$ sia periodica di periodo 2.

$[\alpha = \frac{1}{\pi}]$

20 Disegnare il grafico della funzione f 1-periodica, tale che $f(x) = x^2$ se $0 \le x < 1$ nell'intervallo $[-3, 5]$.



21 Disegnare nell'intervallo $[-3, 5]$ il grafico della funzione f 2-periodica, dispari tale che $f(x) = x^2$ se $0 \le x < 1$ e $f(1) = 0$.



CAPITOLO 5 Limiti e continuità

5.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

5.1.1 Verifica di limiti con la definizione metrica

ESERCIZIO 5.1 **Limiti per $x \to x_0$**

Verificare con la definizione metrica i seguenti limiti

$$① \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty; \quad ② \lim_{x\to -1} \sqrt{x+10} = 3; \quad ③ \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{(x-3)^2} = -\infty.$$

Soluzione
Gli enunciati equivalenti alle tre scritture

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty$$

sono rispettivamente

$$\forall K > 0, \exists \delta = \delta_K \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K\,,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon\,,$$

e

$$\forall K > 0, \exists \delta = \delta_K \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow h(x) < -K\,.$$

Nei casi in esame, dovremo esplicitare il legame tra K e δ o tra ε e δ.

① Imponendo $f(x) > K$, vogliamo ricavare il valore di δ per cui se $0 < |x - 2| < \delta$ allora la disequazione è verificata, e osserviamo che chiedere $0 < |x-2| < \delta$ corrisponde a chiedere che x appartenga a uno dei due intervalli $(2-\delta, 2)$ o $(2, 2+\delta)$; sia allora $K > 0$, avremo

$$\frac{1}{(x-2)^2} > K, \quad \overset{x\neq 2}{\Rightarrow} \quad (x-2)^2 < \frac{1}{K}\,,$$

che risolta rispetto a x (ricordiamo che dev'essere diverso da 2), dà

$$2 - \sqrt{\frac{1}{K}} < x < 2 \qquad \text{oppure} \qquad 2 < x < 2 + \sqrt{\frac{1}{K}}\,;$$

queste relazioni possono quindi essere condensate in

$$0 < |x-2| < \sqrt{\frac{1}{K}},$$

posto $\delta = \sqrt{\frac{1}{K}}$, abbiamo il legame cercato.

② Chiediamo che $|g(x) - 3| < \varepsilon$, l'obiettivo è ricavare anche in questo caso il valore di δ per cui se $0 < |x+1| < \delta$ allora la disequazione è verificata; $|\sqrt{x+10} - 3| < \varepsilon$ diventa

$$3 - \varepsilon \overset{1}{<} \sqrt{x+10} \overset{2}{<} 3 + \varepsilon,$$

osserviamo che

- se $\varepsilon > 3$ la 1 è sempre verificata, e in tal caso la 2 è verificata da tutti gli x dell'intervallo $[-10, -1 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)$,
- se $\varepsilon < 3$, la coppia di disequazioni è verificata da tutti gli x dell'intervallo $(-1 - 6\varepsilon + \varepsilon^2, -1 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)$.

Questi due intervalli diventano:

$$-9 < x + 1 < 6\varepsilon + \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad -(6\varepsilon - \varepsilon^2) < x + 1 < 6\varepsilon + \varepsilon^2,$$

nel primo caso (osservato che $\varepsilon > 3$ implica $6\varepsilon + \varepsilon^2 > 27$) possiamo scegliere $\delta = 9$, nel secondo caso (osservato che $\varepsilon < 3$ implica $6\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$) scegliamo come δ il minimo dei due valori, ossia proprio $6\varepsilon - \varepsilon^2$, riassumendo

$$\delta = \begin{cases} 6\varepsilon - \varepsilon^2 & \varepsilon < 3 \\ 9 & \varepsilon \geq 3 \end{cases}.$$

③ Posto $K > 0$, imponiamo che $h(x) < -K$, l'obiettivo è ricavare anche in questo caso il valore di δ per cui se $0 < |x-3| < \delta$ allora la disequazione è verificata; si ha

$$\frac{x-4}{(x-3)^2} < -K \quad \Rightarrow \quad K(x-3)^2 + (x-4) < 0,$$

poiché abbiamo posto $K > 0$, questa disequazione è verificata se

$$\frac{6K - 1 - \sqrt{1+4K}}{2K} < x < \frac{6K - 1 + \sqrt{1+4K}}{2K},$$

che può essere riscritta come

$$-\frac{\sqrt{1+4K}+1}{2K} < x - 3 < \frac{\sqrt{1+4K}-1}{2K};$$

basta scegliere allora come δ il minimo tra questi due estremi:

$$\delta = \min\left\{\frac{\sqrt{1+4K}+1}{2K}, \frac{\sqrt{1+4K}-1}{2K}\right\} = \frac{\sqrt{1+4K}-1}{2K}.$$

ESERCIZIO 5.2 **Limiti per $x \to +\infty$**

Verificare con la definizione metrica i seguenti limiti

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{2x+1} = +\infty$; ② $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x+2} = 2$; ③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{x} = -\infty$.

Soluzione

Gli enunciati equivalenti alle tre scritture

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = L, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$$

sono rispettivamente

$$\forall K > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_K \text{ tale che } x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > K\,,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_\varepsilon \text{ tale che } x > \bar{x} \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon\,,$$

e

$$\forall K > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_K \text{ tale che } x > \bar{x} \Rightarrow h(x) < -K\,.$$

Nei casi in esame, dovremo esplicitare il legame tra K e $\bar{x}$ o tra ε e $\bar{x}$.

① Imponendo che $f(x) > K$ dobbiamo trovare un intervallo $(\bar{x}, +\infty)$ ove questa relazione è verificata; sia allora $K > 0$, la disequazione

$$\frac{x^2-2}{2x+1} > K$$

è verificata se

$$K - \sqrt{K^2+K+2} < x < -\frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad x > K + \sqrt{K^2+K+2}\,,$$

pertanto, ponendo $\bar{x} = K + \sqrt{K^2+K+2}$ abbiamo il legame richiesto.

② In questo caso dobbiamo imporre $|g(x)-2| < \varepsilon$, e trovare, come al punto precedente, un intervallo $(\bar{x}, +\infty)$ ove la disequazione è verificata, innanzitutto osserviamo che la disequazione

$$\left|\frac{2x+5}{x+2} - 2\right| < \varepsilon$$

si trasforma nella coppia di disequazioni

$$2 - \varepsilon < \frac{2x+5}{x+2} < 2 + \varepsilon$$

entrambe verificate se

$$x < -2 - \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{oppure} \qquad x > -2 + \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

ponendo allora $\bar{x} = -2 + \frac{1}{\varepsilon}$ abbiamo il legame tra $\bar{x}$ e ε.

③ Imponendo $h(x) < -K$ dobbiamo, al solito, trovare un intervallo $(\bar{x}, +\infty)$ ove questa relazione è verificata; sia allora $K > 0$, la disequazione

$$\frac{2-x^2}{x} < -K$$

è verificata se

$$\frac{K-\sqrt{K^2+8}}{2} < x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad x > \frac{K+\sqrt{K^2+8}}{2},$$

pertanto, ponendo $\bar{x} = \frac{K+\sqrt{K^2+8}}{2}$ abbiamo il legame tra $\bar{x}$ e K.

ESERCIZIO 5.3 **Limiti per $x \to -\infty$**

Verificare con la definizione metrica i seguenti limiti:

① $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} - x = +\infty$; ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = -1$;

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{4+\sin x} = -\infty$.

Soluzione

Gli enunciati equivalenti alle tre scritture

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = L, \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

sono rispettivamente

$$\forall K > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_K \text{ tale che } x < \bar{x} \Rightarrow f(x) > K,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_\varepsilon \text{ tale che } x < \bar{x} \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon,$$

e

$$\forall K > 0, \exists \bar{x} = \bar{x}_K \text{ tale che } x < \bar{x} \Rightarrow h(x) < -K.$$

Nei tre casi, dovremo esplicitare il legame tra K e $\bar{x}$ o tra ε e $\bar{x}$.

① Assegnato $K > 0$, è necessario trovare un valore $\bar{x}$ per cui, se $x < \bar{x}$ allora $e^{-x} - x > K$; osserviamo innanzitutto che, se $x < 0$, allora $e^{-x} - x > e^{-x}$, pertanto ogni valore di x per cui $e^{-x} > K$ verificherà a maggior ragione anche $e^{-x} - x > K$, poiché

$$e^{-x} > K \quad \Rightarrow \quad x < -\ln K$$

allora poniamo $\bar{x} = -\ln K$ e la disequazione $e^{-x} - x > K$ è sicuramente verificata da tutti i valori $x < \bar{x}$.

② Assegnato $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $\bar{x}$ tale che, se $x < \bar{x}$, allora

$$-1-\varepsilon \overset{1}{<} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \overset{2}{<} -1+\varepsilon\,;$$

osserviamo innanzitutto che $\forall x \neq 0$ si ha $\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right| > 1$, e pertanto la disequazione 2 è sempre soddisfatta, mentre la disequazione 1 è soddisfatta se $x < -\sqrt{\frac{4}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}$, pertanto

$$\bar{x} = -\sqrt{\frac{4}{2\varepsilon+\varepsilon^2}}\,.$$

③ Assegnato $K > 0$, è necessario trovare un valore $\bar{x}$ per cui, se $x < \bar{x}$ allora $\frac{x}{4+\sin x} < -K$; osserviamo innanzitutto che $\frac{x}{4+\sin x} < \frac{x}{5}$, pertanto ogni valore di x per cui $\frac{x}{5} < -K$ verificherà a maggior ragione anche la disequazione di partenza, infatti $\frac{x}{5} < -K$ implica $x < -5K$, pertanto scegliendo $\bar{x} = -5K$, possiamo garantire che $\frac{x}{5} < -K$ per ogni $x < \bar{x}$.

ESERCIZIO 5.4 **Limite sinistro – Limite destro**
Limiti per eccesso e per difetto

Verificare con la definizione metrica i seguenti limiti

$$① \lim_{x\to 3^-} \sqrt{7-x} = 2^+\,; \qquad ② \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty\,.$$

Soluzione

Sono detti *limite sinistro* e *limite destro* per $x \to x_0$, e sono indicati rispettivamente dalle scritte $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$, i limiti come quelli dell'Esercizio 5.2, in cui però al posto di $0 < |x - x_0| < \delta$ si sostituiscono le espressioni

$$x \to x_0^- \quad \leftrightarrow \quad 0 < x_0 - x < \delta\,,$$

$$x \to x_0^+ \quad \leftrightarrow \quad 0 < x - x_0 < \delta\,.$$

Se, nel caso di un limite finito L, si ha $\lim f(x) = L^+$ o $\lim f(x) = L^-$, allora tali limiti sono detti rispettivamente *limite per eccesso* e *limite per difetto*, e nella loro definizione metrica al posto della disequazione $|f(x) - L| < \varepsilon$ sostituiscono le espressioni

$$\lim f(x) = L^+ \quad \leftrightarrow \quad 0 \le f(x) - L < \varepsilon,$$

$$\lim f(x) = L^- \quad \leftrightarrow \quad 0 \le L - f(x) < \varepsilon\,.$$

① La definizione metrica, scritta in questo caso, è

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta_\varepsilon \text{ tale che } 0 < 3 - x < \delta \Rightarrow 0 \le \sqrt{7-x} - 2 < \varepsilon\,;$$

partendo dall'ultima disequazione, cerchiamo il legame tra δ e ε: se $x < 3$ allora $\sqrt{7-x}-2 \geq 0$ è sempre verificata, mentre risolvendo $\sqrt{7-x}-2 < \varepsilon$ rispetto a x ricaviamo $x > 3 - 4\varepsilon - \varepsilon^2$, quindi

$$0 < 3 - x < 4\varepsilon + \varepsilon^2 ,$$

e quindi $\delta = 4\varepsilon + \varepsilon^2$.

② In questo caso, la definizione metrica diventa

$$\forall K > 0, \exists \delta = \delta_K \text{ tale che } 0 < x < \delta \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > K ;$$

dall'ultima relazione ricaviamo (ricordando che $x > 0$)

$$\frac{1}{x} > \ln K \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{\ln K} ,$$

e pertanto $\delta = \frac{1}{\ln K}$.

5.1.2 Funzioni continue

ESERCIZIO 5.5 **Limiti di funzioni continue**

Calcolare

① $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+2}$; ② $\lim\limits_{x\to 7} \cos x$; ③ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+3}{x-5}$; ④ $\lim\limits_{x\to -4} e^x$.

Soluzione

Una funzione f è detta *continua* nel punto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) ;$$

sappiamo dalla teoria che

- polinomi,
- funzioni razionali (cioè: rapporti tra polinomi) con il denominatore diverso da zero,
- funzioni irrazionali (ossia: radici di qualsiasi ordine),
- funzioni trigonometriche,
- funzioni logaritmiche ed esponenziali,
- la funzione "valore assoluto",

sono tutte funzioni continue ove sono definite; pertanto, se il valore x_0 verso cui si calcola il limite appartiene al campo di esistenza della funzione continua f, questo limite assumerà semplicemente il valore che la funzione f assume in x_0.

① ② ③ ④ In tutti i casi si tratta di funzioni continue, quindi

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+2} = \sqrt{5}, \qquad \lim_{x\to 7} \cos x = \cos 7 ,$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3}{x-5} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to -4} e^x = \frac{1}{e^4} .$$

ESERCIZIO 5.6 **Limiti di funzioni composte di funzioni continue**

Calcolare

① $\lim_{x\to -1} |e^{\sin x} - 6|$; ② $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt[3]{x+2} - \ln x}{e^{2x} - \cos x}$; ③ $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che, se f e g sono funzioni continue, anche la funzione composta $g \circ f$ è continua (ovviamente, a patto che $I_f \subseteq D_g$), poiché le funzioni dell'esercizio sono composte da funzioni continue possiamo calcolare questi limiti direttamente.

① Ponendo $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} |e^{\sin x} - 6| = |e^{\sin(-1)} - 6| = |e^{-\sin 1} - 6| = 6 - \frac{1}{e^{\sin 1}}.$$

② Ponendo $x = \pi$,

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \ln x}{e^{2x} - \cos x} = \frac{\sqrt[3]{2+\pi} - \ln \pi}{e^{2\pi} + 1}.$$

③ Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

possiamo in questo caso esprimere il limite che cerchiamo come limite di una funzione composta:

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \left[\begin{array}{c} t = \frac{1}{x^2} \\ x \to 0 \Rightarrow t \to +\infty \end{array}\right] = \lim_{t\to +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO 5.7 **Zeri di funzioni**

Data la funzione $f(x) = e^{2\sin x} + \ln(x+1) - 2$, *mostrare che esiste un valore* $x^* \in [0, 1]$ *tale che* $f(x^*) = 0$.

Soluzione

La funzione f è composta da funzioni continue; qualora $f(x)$ cambi di segno nell'intervallo $[0, 1]$, sarebbe possibile applicare il teorema degli zeri[a]: un calcolo immediato ci dà $f(0) = -1$; possiamo valutare f in $x = 1$ anche senza ricorrere

[a] **Teorema degli zeri**: Sia $f(x)$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$, se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

alla calcolatrice: poiché $1 > \frac{\pi}{6}$ abbiamo che $\sin 1 > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dunque $e^{2\sin 1} > e > 2.7$; inoltre senz'altro $\ln 2 > 0$, pertanto

$$f(1) = \underbrace{e^{2\sin 1}}_{>2.7} + \underbrace{\ln 2}_{>0} - 2 > 0.7,$$

(usando la calcolatrice, $f(1) \simeq 4.075$); in definitiva, $f(x)$ assume segno diverso nei due estremi dell'intervallo $[0, 1]$, e quindi vi è (almeno) un valore $x^* \in [0, 1]$ tale che $f(x^*) = 0$.

Osserviamo che il teorema degli zeri si ferma a quest'affermazione: se una funzione continua ha segno diverso nei due estremi di un intervallo, allora vi sarà *almeno* un valore c ove f si annulla, ma tali valori potrebbero anche essere più di uno. Nel nostro caso siamo in grado di garantire che il valore x^* è unico, osservando che f è monotona crescente su $[0, 1]$.

5.1.3 Algebra dei limiti, forme d'indecisione

ESERCIZIO 5.8 **Algebra dei limiti**

Ricordare le regole chiamate algebra dei limiti, e applicarle al calcolo dei limiti seguenti:

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4}\arctan(\pi - x)$; ② $\lim_{x\to 3}\left(\frac{4+2x}{(x-3)^2}\right)^{\cos x}$; ③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{5+8\cos x^2}{x}$.

Soluzione

Sono note sotto il nome generico di *algebra dei limiti* alcune regole (in realtà equivalenti ad altrettanti teoremi) di uso sovente negli esercizi, che costituiscono una "generalizzazione" dei limiti di funzioni composte da funzioni continue. Elenchiamo queste regole per esteso:

- *Limite della somma e della differenza*: se $f(x) \to L_f$ e $g(x) \to L_g$, allora
$$f(x) + g(x) \to L_f + L_g, \qquad f(x) - g(x) \to L_f - L_g;$$
fa eccezione il caso in cui si giunga all'espressione $[\infty - \infty]$, in quanto *forma di indecisione*.
- *Limite del prodotto*: se $f(x) \to L_f$ e $g(x) \to L_g$, allora
$$f(x)\cdot g(x) \to L_f \cdot L_g;$$
fa eccezione il caso in cui si giunga all'espressione $[0\cdot\infty]$, in quanto *forma di indecisione*.
- *Limite del quoziente*: se $f(x) \to L_f$ e $g(x) \to L_g$, con $g(x) \neq 0$, allora
$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L_f}{L_g};$$
fa eccezione il caso in cui si giunga a una delle due espressioni $[\frac{\infty}{\infty}]$ o $[\frac{0}{0}]$, entrambe *forme di indecisione*.

- *Limite della potenza*: se $f(x) \to L_f$ e $g(x) \to L_g$, con $f(x) > 0$ e $L_f > 0$, allora
$$f(x)^{g(x)} \to L_f{}^{L_g}\,;$$
fa eccezione il caso in cui si giunga a una delle espressioni $[\infty^0]$, $[0^0]$ o $[1^{\pm\infty}]$, tutte *forme di indecisione*.

Nelle regole suddette, abbiamo tacitamente trattato il simbolo ∞ come fosse un numero, ribadiamo ora i calcoli che sono *leciti*:

- *somma e differenza*:
$$L + \infty = +\infty, \quad L - \infty = -\infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty\,;$$
- *prodotto e quoziente*: per qualsiasi valore (finito) di L
$$\frac{L}{\infty} = 0\,,$$
se $L \neq 0$
$$L \cdot \infty = \infty, \qquad \frac{L}{0} = \infty\,,$$
(il segno del limite dipenderà dai segni dei fattori);
- *elevamento a potenza infinita*: se $0 < L < 1$
$$L^{+\infty} = 0, \qquad L^{-\infty} = +\infty\,,$$
se $L > 1$
$$L^{+\infty} = +\infty, \qquad L^{-\infty} = 0\,;$$
- *infinito elevato a potenza*: se $L > 0$
$$(+\infty)^L = +\infty, \qquad (+\infty)^{-L} = 0, \qquad (+\infty)^{+\infty} = +\infty, \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0\,.$$

① Per $x \to +\infty$ abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(\pi - x) = -\frac{\pi}{2}\,;$$
pertanto (limite del prodotto):
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} \cdot \arctan(\pi - x) = (+\infty) \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty\,.$$

② Per $x \to 3$ vediamo che
$$\lim_{x\to3} \frac{4+2x}{(x-3)^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to3} \cos x = \cos 3\,,$$
e (dato che $\cos 3 < 0$):
$$\lim_{x\to3} \left(\frac{4+2x}{(x-3)^2}\right)^{\cos x} = (+\infty)^{\cos 3} = 0\,.$$

③ Poiché il limite del numeratore non esiste, questo limite non si riporta ad alcuna formula dell'algebra dei limiti, ma piuttosto può essere calcolato avvalendosi del teorema del confronto[b]: la funzione della quale stiamo calcolando il limite è il prodotto della funzione limitata $5 + 8\cos x^2$ per la funzione $\frac{1}{x}$, poiché $-3 \leq 5 + 8\cos x^2 \leq 13$, allora

$$\frac{-3}{x} \leq \frac{5 + 8\cos x^2}{x} \leq \frac{13}{x},$$

il primo e il terzo membro della catena di disuguaglianze tendono a zero, per il teorema del confronto allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 + 8\cos x^2}{x} = 0.$$

ESERCIZIO 5.9 **Forme d'indecisione I – Limiti notevoli**

Calcolare i seguenti limiti:

① $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$; ② $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + \alpha}{x}\right)^x$; ③ $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x - 2}{x^3 + 3x^2 + 12}$;

④ $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$; ⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x^3)}{4x^3}$; ⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^4}{6x^2}$;

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$; ⑧ $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{\pi - x}$; ⑨ $\lim_{x \to 2} \frac{|4x - 3| - |1 - 3x|}{|2x - 3| - |x - 3|}$.

Soluzione

I limiti presenti nel testo dell'esercizio sono tutte *forme d'indecisione*; vediamone l'elenco completo:

somme e sottrazioni: $[\infty - \infty]$,

prodotti e divisioni: $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,

esponenti: $[0^0]$, $[1^{\pm\infty}]$, $[\infty^0]$.

[b] **Teorema del confronto** (o "dei due carabinieri"): Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e per $x \to x_0$ i limiti di f e h coincidono, allora anche il limite di g assume lo stesso valore:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

Per quanto riguarda il trattamento di queste tipologie, vi sono alcune strategie standard:

- la forma d'indecisione $[\infty - \infty]$ viene trattata caso per caso, oppure "raccogliendo ∞" può assumere la forma $[\infty \cdot 0]$;
- la forma d'indecisione 1^∞ si presenta in

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,,$$

  in generale, se possibile, ci si riconduce a questo;
- le forme d'indecisione $[0^0]$ e $[+\infty^0]$ si riconducono con un cambio di variabile alla forma d'indecisione $[\infty \cdot 0]$:

$$0^0 = e^{0\cdot\log 0} = e^{0\cdot(-\infty)}, \qquad +\infty^0 = e^{0\cdot\log(+\infty)} = e^{0\cdot(+\infty)}\,;$$

- le tre forme $[\infty \cdot 0]$, $[\frac{0}{0}]$ e $[\frac{\infty}{\infty}]$ sono sovente interscambiabili, per esempio:

$$0\cdot\infty = \frac{1}{\infty}\cdot\infty = \frac{\infty}{\infty}\,.$$

Accanto al limite notevole che abbiamo già ricordato, ve ne sono altri, della forma $[\frac{0}{0}]$:

1) funzioni trigonometriche:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = 1\,;$$

2) funzioni logaritmiche ed esponenziali:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,;$$

3) funzioni iperboliche:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Sh} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Ch}(x)-1}{\frac{x^2}{2}} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Th} x}{x} = 1\,;$$

4) potenze:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha\,.$$

① Cominciamo dal primo limite, è della forma $[\infty - \infty]$, una tattica può essere moltiplicare e dividere per qualcosa che elimini la radice. Sfruttando il prodotto notevole $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, otteniamo allora

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)\frac{\sqrt{x^2+5x}+x}{\sqrt{x^2+5x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1\right)}_{\text{tende a } 2}} = \frac{5}{2}.$$

In alternativa, si poteva raccogliere subito x:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right) = \dots$$

porre $\frac{5}{x} = t$ e trasformare il limite nel limite notevole per $t \to 0^+$:

$$\dots = \lim_{x\to+\infty} 5\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1}{\frac{5}{x}} = \lim_{t\to0^+}\frac{5}{t}(\sqrt{1+t}-1)$$

$$= 5\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

② Osserviamo subito che $\frac{x+\alpha}{x} = 1 + \frac{\alpha}{x}$, pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)^x \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \dots$$

per ricondurci alla forma del limite notevole di e, poniamo $\frac{x}{\alpha} = t$, per cui $x = \alpha t$ e se $x \to +\infty$ anche $t \to +\infty$:

$$\dots = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha t} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha;$$

infine, poiché l'elevamento a potenza è un'operazione continua, possiamo scrivere

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha = \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha = e^\alpha.$$

③ Il limite presentato in questo caso è un rapporto di polinomi, della forma $[\frac{\infty}{\infty}]$; osserviamo subito che per $x \to \pm\infty$ il comportamento di un polinomio è determinato dal monomio di ordine massimo (così come per $x \to 0$ il comportamento di un polinomio è determinato dal monomio di ordine minimo), in simboli

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}_{\text{tende a } 1} \end{aligned}$$

quindi, visto che il limite è fatto per $x \to +\infty$, raccogliamo x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + x - 2}{x^3 + 3x^2 + 12} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3\left(1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^3}\right)},$$

le x^3 si semplificano, le parentesi tendono a 1, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3\left(1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\left(1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^3}\right)} = 4\,.$$

④ Questo limite è della forma $[\frac{0}{0}]$, ma non si può riportare a nessun limite notevole di quelli scritti sopra; notiamo che, grazie al solito prodotto notevole, possiamo scrivere

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = (x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\,,$$

e quindi semplificare $\sqrt{x} - 1$ a numeratore e denominatore, stando attenti al segno:

$$\lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{-(x+1)(\sqrt{x}+1)};$$

il limite cui siamo giunti non è più una forma di indecisione, sostituendo $x = 1$ vale $-\frac{1}{4}$.

⑤ Siamo in uno dei casi immediatamente riconducibili a un limite notevole (sostituendo $2x^3$ con t):

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x^3)}{4x^3} = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\,.$$

⑥ Anche in questo caso, siamo portati a sostituire x^4 con t, per riportarci al limite notevole con la funzione seno, osservando che

$$\frac{\sin x^4}{6x^2} = \frac{x^2}{6}\frac{\sin x^4}{x^4},$$

procediamo alla sostituzione (se $x^4 = t$, allora $x^2 = \sqrt{t}$, inoltre $x \to 0 \Rightarrow t \to 0^+$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4}{6x^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{6}\frac{\sin t}{t} = \left[\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{6}\right]\left[\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t}\right] = 0 \cdot 1 = 0.$$

Osserviamo che in questo limite è stato cruciale il fatto che le potenze di x nella funzione sin e al denominatore non fossero uguali.

⑦ Per riportarci al limite notevole, poniamo $2x = t$ (osservando che $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$, e che $x^2 = \frac{1}{4}t^2$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to 0} 2 \cdot \frac{1-\cos t}{\frac{t^2}{2}} = 2.$$

⑧ Un'altra semplice sostituzione: se $x \to \pi$ e poniamo $(x - \pi) = t$, allora $t \to 0$ e (portando fuori il segno meno):

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{-t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = -1.$$

⑨ Anche in questo caso il limite è della forma $[\frac{0}{0}]$, osserviamo però che possiamo liberarci dei valori assoluti perché, per $2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$, ciascuna delle funzioni contenute non cambia di segno in $x = 2$:

$$|4x-3| = 4x-3, \quad |1-3x| = 3x-1, \quad |2x-3| = 2x-3, \quad |x-3| = 3-x,$$

e, per $x \to 2$

$$\frac{|4x-3| - |1-3x|}{|2x-3| - |x-3|} = \frac{(4x-3)-(3x-1)}{(2x-3)-(3-x)} = \frac{x-2}{3x-6} = \frac{x-2}{3(x-2)} \equiv \frac{1}{3},$$

pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{|4x-3| - |1-3x|}{|2x-3| - |x-3|} = \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO 5.10 **Forme d'indecisione II – Gerarchia degli infiniti**

Tenendo a mente la gerarchia degli infiniti[c], *calcolare i seguenti limiti*:

$$① \lim_{x\to 0^+} x\ln x\,; \quad ② \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x}\,; \quad ③ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,;$$

$$④ \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}\,; \quad ⑤ \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln x\,; \quad ⑥ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\ln x^2+4}}{3+2x^4}\,.$$

Soluzione

① Il limite si presenta nella forma d'indecisione $[0\cdot\infty]$, per riportarci alla formulazione della nota, sostituiamo $x=\frac{1}{t}$, quindi $x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to +\infty$ (e ricordiamo che $\ln\frac{1}{t}=-\ln t$):

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = -\lim_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t} = 0\,.$$

② In questo limite non è presente alcuna forma d'indecisione: il numeratore (essendo l'esponenziale una funzione continua) tende a 1, il denominatore tende a 0^+, pertanto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

③ Si tratta di una forma d'indecisione $[\frac{0}{0}]$; come abbiamo già fatto al punto ①, sostituiamo $x=\frac{1}{t}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\to +\infty} te^{-t} = \lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^t} = 0\,.$$

④ Ci troviamo nella forma d'indecisione $[0\cdot\infty]$, sostituiamo anche in questo caso $x=\frac{1}{t}$:

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty\,.$$

⑤ Anche in questo caso ci troviamo nella forma d'indecisione $[0\cdot\infty]$, non è tuttavia necessario sostituire x perché il limite proposto è già all'infinito, limitiamoci a osservare che

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0\,,$$

e che l'ultimo limite vale zero perché dato dai due limiti della nota applicati "in cascata".

---

[c] **Gerarchia degli infiniti**: Per ogni valore di $\alpha\in\mathbb{R}$ e per ogni valore di $\beta>0$, valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0\,.$$

⑥ Il limite è nella forma $[\frac{\infty}{\infty}]$, prima di effettuare calcoli è bene notare che

$$e^{\ln(x^2+4)} = e^{\ln[x^2(1+\frac{4}{x^2})]} = x^2 \cdot e^{\ln(1+\frac{4}{x^2})},$$

e che per $x \to +\infty$ si ha $e^{\ln(1+\frac{4}{x^2})} \to 1$, quindi (limite del prodotto):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x^2+4}}{3+2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cdot e^{\ln(1+\frac{4}{x^2})}}{3+2x^4} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2x^4}\right] \cdot \left[\lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+\frac{4}{x^2})}\right] = 0 \cdot 1 = 0.$$

ESERCIZIO 5.11 **Limiti di funzioni definite a tratti**

Calcolare i seguenti limiti:

① $\lim_{x\to0^+} \operatorname{mant} x$; ② $\lim_{x\to0^-} \operatorname{mant} x$; ③ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor$.

Soluzione

Le funzioni degli esempi del testo sono definite a tratti.

① ② Per valori di x prossimi a 0 sappiamo che

$$\operatorname{mant} x = \begin{cases} x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \end{cases},$$

si verifica immediatamente, allora che

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{mant} x = \lim_{x\to0} x = 0,$$

e

$$\lim_{x\to0^-} \operatorname{mant} x = \lim_{x\to0} x+1 = 1;$$

osserviamo inoltre che, poiché il limite sinistro e il limite destro sono diversi, allora

$$\nexists \lim_{x\to0} \operatorname{mant} x.$$

③ Per valori di x prossimi a $\frac{\pi}{2}$, si ha (confronta Esercizio 4.14)

$$\lfloor \sin x \rfloor = \begin{cases} 1 & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases},$$

pertanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = 0;$$

notiamo che il fatto che $\lfloor \sin \frac{\pi}{2} \rfloor = 1$ non ha alcuna importanza nel calcolo del limite.

ESERCIZIO 5.12 **Non esistenza del limite – Classe limite, liminf e limsup**

Dimostrare che i limiti seguenti non esistono, individuare per ciascuno di essi lim inf, lim sup *e classe limite*;

$$① \lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x}; \qquad ② \lim_{x\to+\infty} x + x\cos x; \qquad ③ \lim_{x\to+\infty} \lfloor 1+\sin x\rfloor.$$

Soluzione

Si dice che α è *valore limite* di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ se esistono infiniti valori di x, anch'essi tendenti a x_0, tali per cui in corrispondenza di questi valori $f(x) \to \alpha$.

Si dice *classe limite* di una funzione l'insieme Λ dei valori limite, osserviamo che $+\infty$ e $-\infty$ possono fare parte di Λ.

Si chiamano *massimo limite* e *minimo limite* di $f(x)$ per $x \to x_0$, e si indicano con lim sup e lim inf, rispettivamente il massimo e il minimo di Λ (con la convenzione che se $+\infty$ o $-\infty$ fanno parte di Λ, allora saranno il massimo o il minimo limite).

① Con un cambio di variabile,

$$\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty} \cos t\,,$$

e questo limite non esiste, proviamolo con la definizione: osserviamo che $-1 \le \cos t \le 1$, quindi, se il limite cercato esistesse – chiamiamolo L –, dovrebbe essere $L \in [-1, 1]$; la definizione metrica allora recita:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K = K_\varepsilon : \quad t > K \Rightarrow |L - \cos t| < \varepsilon\,;$$

un tale valore K non può esistere, infatti nell'intervallo $[K, K + 2\pi]$ la funzione $\cos t$ assume tutti i valori dell'intervallo $[-1, 1]$, e quindi non può soddisfare la relazione $|L - \cos t| < \varepsilon$ per alcun valore di L. Seguendo lo stesso schema di ragionamento, possiamo concludere che esistono infiniti valori di t (tutti del tipo $\bar{t} + 2k\pi$) per i quali $\cos t = \alpha$, per ogni $\alpha \in [-1, 1]$, e pertanto $\Lambda = [-1, 1]$, mentre ovviamente

$$\liminf_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = -1, \qquad \limsup_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = 1\,.$$

② Osserviamo innanzitutto che $f(x) = x + x\cos x$ è una funzione continua, e che da $-1 \le \cos x \le 1$ segue (per $x > 0$) che

$$-x \le x\cos x \le x\,,$$

pertanto $0 \le f(x) \le 2x$; in particolare: ponendo $x = (2k+1)\pi$ abbiamo $f(x) = 0$, mentre ponendo $x = 2k\pi$ abbiamo $f(x) = 2x = 4k\pi$, pertanto

per il teorema dei valori intermedi[d] in ogni intervallo della forma $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ la funzione f assume tutti i valori tra 0 e $4k\pi$, quindi[e]

$$\liminf_{x\to+\infty} x + x\sin x = 0, \qquad \limsup_{x\to+\infty} x + x\sin x = +\infty, \qquad \Lambda = [0, +\infty].$$

③ Osserviamo che $f(x) = \lfloor 1 + \sin x \rfloor$ è una funzione periodica e che la sua immagine è $I_f = \{0, 1, 2\}$; vediamo che anche la classe limite Λ è composta dagli stessi tre valori. Ponendo $x = k\pi$ abbiamo $f(x) = 1$, dunque $1 \in \Lambda$; ponendo $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ abbiamo $f(x) = 0$, dunque $0 \in \Lambda$; infine ponendo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ abbiamo $f(x) = 2$, dunque $2 \in \Lambda$. Pertanto $\Lambda = \{0, 1, 2\}$ e ovviamente

$$\liminf_{x\to+\infty} \lfloor 1 + \sin x \rfloor = 0, \qquad \limsup_{x\to+\infty} \lfloor 1 + \sin x \rfloor = 2.$$

5.1.4 Equivalenza asintotica, o-piccolo. Infiniti e infinitesimi

ESERCIZIO 5.13 **Definizione di equivalenza asintotica e di o-piccolo**

Facendo uso del concetto di limite, scrivere la definizione di $f(x) \sim g(x)$ e $f(x) = o(g(x))$.

Soluzione

I simboli "$\sim$" (*asintotico*) e "o" (*o piccolo*) vengono interposti tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nel caso in cui entrambe (per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$) tendano a zero o all'infinito.

Per quanto riguarda il simbolo di asintotico,

$$f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,;$$

mentre, per quanto riguarda il simbolo di o-piccolo,

$$f(x) = o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

ESERCIZIO 5.14 **Definizione di infinito e infinitesimo campione**

Dare la definizione di infinito/infinitesimo campione per $x \to x_0$ e per $x \to +\infty$.

---

[d] **Teorema dei valori intermedi**: Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

[e] La scrittura $\Lambda = [0, +\infty]$ intende che la classe limite Λ, oltre a comprendere tutti i numeri reali positivi, comprende anche $+\infty$.

Soluzione

Viene detta *infinito* una funzione che (per $x \to x_0$ oppure per $x \to \infty$) tende all'infinito, viene detta *infinitesimo* una funzione che (per $x \to x_0$ oppure per $x \to \infty$) tende a zero.

Se $x \to x_0$, la più semplice funzione che tende a zero (l'*infinitesimo campione*) è $(x - x_0)$, mentre la più semplice funzione che tende all'infinito (l'*infinito campione*) è $\frac{1}{x-x_0}$.

Analogamente, se $x \to +\infty$, la più semplice funzione che tende all'infinito (l'*infinito campione*) è x, mentre la più semplice funzione che tende a zero (l'*infinitesimo campione*) è $\frac{1}{x}$.

ESERCIZIO 5.15 — Comportamenti asintotici delle principali funzioni elementari

Alla luce della definizione di equivalenza asintotica, reinterpretare i limiti notevoli dell'Esercizio 5.9.

Soluzione

Molti limiti della forma $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, in forma cioè di rapporto tra infiniti o infinitesimi, possono essere riscritti con il simbolo $\sim$ oppure con il simbolo o. Vediamo gli esempi più frequenti, divisi per tipologie:

- *polinomi*, per $x \to +\infty$: poiché (raccogliendo $a_n x^n$ al numeratore, come nell'Esercizio 5.9)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = 1\,,$$

allora ogni polinomio è asintotico, per $x \to +\infty$, al suo monomio di grado massimo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \overset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n\,.$$

- *polinomi*, per $x \to 0$: poiché (raccogliendo, se $m > 0$, il termine di grado più basso)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_{m+k}x^{m+k} + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + a_m x^m}{a_m x^m} = 1\,,$$

allora ogni polinomio è asintotico, per $x \to 0$, al suo monomio di grado minimo:

$$a_{m+k}x^{m+k} + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + a_m x^m \overset{x\to 0}{\sim} a_m x^m\,.$$

- *funzioni trigonometriche*, per $x \to 0$, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,;$$

allora, usando il simbolo di asintotico

$$\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x, \quad (1-\cos x) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \tan x \overset{x\to 0}{\sim} x\,;$$

e usando il simbolo di o-piccolo

$$\sin x = x + o(x), \quad (1-\cos x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \tan x = x + o(x)\,.$$

- *funzioni logaritmiche ed esponenziali*, per $x \to 0$, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,;$$

allora, usando il simbolo di asintotico

$$e^x - 1 \overset{x\to 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \overset{x\to 0}{\sim} x\,;$$

e usando il simbolo di o-piccolo

$$e^x - 1 = x + o(x), \quad \ln(1+x) = x + o(x)\,.$$

- *funzioni iperboliche*, per $x \to 0$, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sh} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Ch}(x) - 1}{\frac{x^2}{2}} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Th} x}{x} = 1\,;$$

allora, usando il simbolo di asintotico

$$\operatorname{Sh} x \overset{x\to 0}{\sim} x, \quad (\operatorname{Ch}(x) - 1) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{Th} x \overset{x\to 0}{\sim} x\,;$$

e usando il simbolo di o-piccolo

$$\operatorname{Sh} x = x + o(x), \quad \operatorname{Ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \operatorname{Th} x = x + o(x)\,.$$

- *potenze*, per $x \to 0$, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\,,$$

allora, usando i simboli di asintotico e o-piccolo

$$(1+x)^\alpha - 1 \overset{x\to 0}{\sim} \alpha x, \qquad (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)\,.$$

Tutte le stime asintotiche che abbiamo scritto possono essere rilette con qualsiasi "oggetto" tenda a zero: se $\square \to 0$,

$$\sin\square \sim \square \qquad 1-\cos\square \sim \frac{\square^2}{2} \qquad \tan\square \sim \square$$

$$\mathrm{Sh}\,\square \sim \square \qquad \mathrm{Ch}\,\square - 1 \sim \frac{\square^2}{2} \qquad \mathrm{Th}\,\square \sim \square$$

$$e^{\square} - 1 \sim \square \qquad \ln(1+\square) \sim \square \qquad (1+\square)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\square$$

ESERCIZIO 5.16 **Uso ammesso dei simboli ~ e o nel calcolo dei limiti**

Calcolare i seguenti limiti:

① $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{e^{-x}-1}$; ② $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\tan 3x)^2}{\mathrm{Ch}\,(2x)-1}$;

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sh}\,(3x^2)\ln(1-2x)}{x(1-\cos x)}$; ④ $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$.

Soluzione

Nel calcolo dei limiti di questo esercizio, usiamo le relazioni di asintotico come appena elencate più sopra, tenendo presente che la relazione di asintotico è compatibile con prodotti e divisioni, cioè

$$\begin{matrix} f_1 \sim f_2 \\ g_1 \sim g_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f_1 g_1 \sim f_2 g_2, \qquad \frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}.$$

① Per $x \to 0$, $\sin 2x \sim 2x$ e anche $e^{-x} - 1 \sim -x$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{e^{-x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-x} = -2.$$

② Per $x \to 0$, $\tan 3x \sim 3x$, quindi $(\tan 3x)^2 \sim 9x^2$, e $\mathrm{Ch}\,(2x) - 1 \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$, pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan 3x)^2}{\mathrm{Ch}\,(2x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}.$$

③ Per $x \to 0$, $\mathrm{Sh}\,(3x^2) \sim 3x^2$, $\ln(1-2x) \sim -2x$ e $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sh}\,(3x^2)\ln(1-2x)}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cdot(-2x)}{x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x^3}{\frac{x^3}{2}} = -12.$$

④ Osserviamo che per $x \to \frac{\pi}{2}$ il limite è della forma $[\frac{0}{0}]$, e che $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, quindi possiamo riscrivere questo limite come

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

adesso notiamo che se $x \to \frac{\pi}{2}$, allora $(x - \frac{\pi}{2}) \to 0$ pertanto, grazie allo sviluppo asintotico $\sin \square \sim \square$ (se $\square \to 0$), possiamo scrivere

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \overset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2}-x\,,$$

e quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\,.$$

ESERCIZIO 5.17 **Uso "pericoloso" o vietato dei simboli ~ e o**

Dati i seguenti limiti:

① $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+\tan x}{\sqrt[3]{1+4x}-1}$; ② $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Sh} x + \ln(1+2x^2)}{1-\cos x}$;

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)-3\sin(x+x^2)}{x}$; ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)-3\sin(x+x^2)}{x^2}$;

calcolarli (se possibile) facendo uso dei simboli di asintotico, oppure spiegare perché non è possibile questo utilizzo.

Soluzione

La relazione di equivalenza asintotica è (lo abbiamo visto nello scorso esercizio) compatibile con il prodotto, mentre *non è in generale compatibile con somme e differenze*. Questo significa che, se da un lato usare gli sviluppi asintotici è di grande aiuto nello snellire i calcoli, dall'altro **per usare gli asintotici in presenza di somme o differenze è necessaria la massima cautela**, e non è detto che si possa davvero completare il conto. Per ovviare, almeno in parte, ai rischi connessi con questo tipo di operazioni, è raccomandabile l'uso del simbolo di o-piccolo al posto del simbolo di asintotico.

① Per $x \to 0$, gli sviluppi dei tre termini presenti sono:

$$\sin 2x \sim 2x, \qquad \tan x \sim x, \qquad \sqrt[3]{1+4x}-1 \sim \frac{4}{3}x\,,$$

e, in termini di o-piccolo:

$$\sin 2x = 2x + o(x), \qquad \tan x = x + o(x), \qquad \sqrt[3]{1+4x} - 1 = \frac{4}{3}x + o(x);$$

al numeratore è presente una somma tra asintotici dello stesso ordine, si può effettuare questo tipo di operazione *a patto che gli addendi non si elidano*, a patto cioè che dopo avere eseguito la somma/differenza in questione sia rimasto qualcosa di "significativo" rispetto all'o-piccolo indicato; poiché $2x + x = 3x$, possiamo affermare che (per $x \to 0$), a seconda se usiamo il simbolo di asintotico o di o-piccolo

$$\sin(2x) + \tan x \sim 3x, \qquad \sin(2x) + \tan x = 2x + x + o(x) = 3x + o(x),$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + \tan x}{\sqrt[3]{1+4x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\frac{4}{3}x} = \frac{9}{4}.$$

② Per $x \to 0$, gli sviluppi dei termini presenti sono, in termini di o-piccolo:

$$\operatorname{Sh} x = x + o(x), \quad \ln(1+2x^2) = 2x^2 + o(x^2), \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

per esprimere la somma al numeratore, dobbiamo ricordare che x^2 è $o(x)$, e quindi

$$[\operatorname{Sh} x] + [\ln(1+2x^2)] = [x + o(x)] + [2x^2 + o(x^2)] = x + o(x);$$

e allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Sh} x + \ln(1+2x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = +\infty.$$

③ Al numeratore è ancora presente una differenza, esaminiamo ciascun termine:

$$\ln(1+3x) = 3x + o(x), \qquad \sin(x + x^2) = x + x^2 + o(x) = x + o(x)$$

pertanto

$$[\ln(1+3x)] - 3[\sin x] = [3x + o(x)] - 3[x + o(x)] = o(x)$$

tutto ciò che riusciamo a dire, con asintotici e o-piccoli, è che il numeratore è un infinitesimo, e che è $o(x)$, ciò è, in questo caso, sufficiente a risolvere il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) - 3\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

④ Il numeratore è lo stesso del precedente limite, sappiamo che

$$\ln(1+3x) - 3\sin x = o(x)\,,$$

e pertanto il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) - 3\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}\,,$$

e non siamo in grado di proseguire il conto.

Osservazione importante: *Asintotici e differenze*
L'uso del simbolo di asintotico, in un caso come questo, avrebbe sicuramente portato a qualche errore: poiché $\ln(1+3x) \sim 3x$ e $\sin x \sim x$, avremmo scritto

$$\ln(1+3x) - 3\sin x \sim 3x - 3x = 0\,,$$

che è **sbagliato**!

ESERCIZIO 5.18 **Ordine di infinito e di infinitesimo**

Per ciascuna delle funzioni seguenti, determinare l'ordine di infinito o infinitesimo, in corrispondenza del punto indicato, precisando la più semplice funzione cui esse sono asintotiche,

① $\sin\sqrt[3]{x}, x \to 0$; ② $\sqrt{1-x^2}, x \to 1^-$; ③ $\dfrac{\ln(xe^x)}{x^2+1}, x \to +\infty$;

④ $\dfrac{e^{x+1}}{x\sqrt{x+3}}, x \to 0$; ⑤ $\tan x, x \to \dfrac{\pi}{2}^-$; ⑥ $\dfrac{x^2 e^{1+2\ln x}}{(x+1)\sqrt{x+3}}, x \to +\infty$;

⑦ $x^x - e^x, x \to 0^+$; ⑧ $e^{-\frac{1}{x}}, x \to 0^+$.

Soluzione

Sia $\alpha > 0$. Si dice che $f(x)$ è *infinitesima di ordine* α per $x \to x_0^+$ se esiste una costante C per cui

$$f(x) \sim C(x-x_0)^\alpha\,;$$

si dice che $f(x)$ è *infinita di ordine* α per $x \to x_0^+$ se esiste una costante C per cui

$$f(x) \sim \frac{C}{(x-x_0)^\alpha}\,.$$

Si dice che $f(x)$ è *infinitesima di ordine* α per $x \to +\infty$ se esiste una costante C per cui

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha}\,;$$

si dice che $f(x)$ è *infinita di ordine* α per $x \to +\infty$ se esiste una costante C per cui[f]

$$f(x) \sim Cx^{\alpha}.$$

① Se $x \to 0$, $\sin \sqrt[3]{x} \to 0$, pertanto la funzione è infinitesima; inoltre $\sin \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$, pertanto è infinitesima di ordine $\frac{1}{3}$.

② Per $x \to 1^-$, $\sqrt{1-x^2} \to 0$, pertanto la funzione è infinitesima; inoltre possiamo scrivere

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x},$$

per $x \to 1^-$, $\sqrt{1+x} \to 2$, mentre $\sqrt{1-x} \to 0$ ed è l'infinitesimo, pertanto

$$\sqrt{1-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

e la funzione è infinitesima di ordine $\frac{1}{2}$.

③ Per $x \to +\infty$, abbiamo

$$\ln(xe^x) = \ln(x) + \ln(e^x) = x + \ln x \sim x, \qquad x^2 + 1 \sim x^2$$

pertanto

$$\frac{\ln(xe^x)}{x^2+1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

e la funzione è infinitesima del primo ordine.

④ Per $x \to 0$ abbiamo

$$e^{x+1} \to e, \qquad x \to 0, \qquad \sqrt{x+3} \to \sqrt{3},$$

pertanto

$$\frac{e^{x+1}}{x\sqrt{x+3}} \sim \frac{e}{x\sqrt{3}},$$

e quindi la funzione è infinita del primo ordine.

⑤ Per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ si ha $\tan x \to +\infty$, quindi la funzione è infinita, inoltre, poiché (se $\square \to 0$) $\sin \square \sim \square$, abbiamo

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x},$$

e quindi $\tan x$ è infinita del prim'ordine per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

[f] Ovviamente, con un uso accorto dei segni e dei moduli, è possibile definire l'ordine di infinito e infinitesimo per $x \to x_0^-$, per $x \to x_0$ e per $x \to -\infty$.

⑥ Osserviamo che $e^{1+2\ln x} = e \cdot x^2$, inoltre per $x \to +\infty$ si ha che $(x+1)\sqrt{x+3} \sim x^{\frac{3}{2}}$, quindi

$$\frac{x^2 e^{1+2\ln x}}{(x+1)\sqrt{x+3}} \sim \frac{e\, x^4}{x^{\frac{3}{2}}} = e\, x^{\frac{5}{2}},$$

e pertanto la funzione è infinita di ordine $\frac{5}{2}$.

⑦ Poiché $x^x = e^{x\ln x} \xrightarrow{x\to 0^+} 1$, la funzione è infinitesima per $x \to 0^+$. Posto $x^x = e^{x\ln x}$, si ha

$$x^x - e^x = e^{x\ln x} - e^x = e^x(e^{x\ln x - x} - 1),$$

poiché per $x \to 0^+$ anche $x\ln x - x$ tende a zero allora

$$x^x - e^x \sim x(\ln x - 1) \sim x\ln x;$$

per decidere l'ordine di infinitesimo, occorre determinare (se esiste) il valore di α per cui $x^x - e^x \sim Cx^\alpha$, in altre parole dobbiamo studiare il comportamento di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - e^x}{x^\alpha}$$

al variare di α, ma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ -\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

e non esiste un valore di α per il quale il limite esista finito, possiamo – un po' impropriamente – concludere che $x^x - e^x$ è un infinitesimo di ordine "appena un poco maggiore" di uno.

⑧ La funzione è infinitesima per $x \to 0^+$. Notiamo (grazie alla "gerarchia degli infiniti") che per qualsiasi valore di α

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha} = \lim_{t\to +\infty} t^\alpha e^{-t} = 0;$$

anche in questo caso non esiste l'ordine di infinitesimo, possiamo solo dire che la funzione tende a zero "più velocemente di ogni potenza di x".

5.2 Esercizi proposti

19 Calcolare, e verificare con la definizione metrica, i seguenti limiti:

$$① \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x}; \quad ② \lim_{x\to1^-} \frac{2x+1}{x-1}; \quad ③ \lim_{x\to0} \sqrt[3]{x+1}.$$

$$\left[① \, 0, x > \bar{x} = \tfrac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}; ② \, -\infty, 0 < 1-x < \delta = \tfrac{3}{2+K}\right]$$

$$\left[③ \, 1, 0 < |x| < \delta = \varepsilon(3-3\varepsilon+\varepsilon^2)\right]$$

20 Calcolare i seguenti limiti

$$① \lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^2-4}; \quad ② \lim_{x\to0} x\cos\frac{x}{x^2+1}; \quad ③ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}};$$

$$④ \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\ln x}; \quad ⑤ \lim_{x\to0} \left(\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}\right)^{3-x}; \quad ⑥ \lim_{x\to0} [\ln(\tan x) - \ln(e^{\pi x}-1)].$$

$$[① \, 3; ② \, 0; ③ \, 1; ④ \, 2; ⑤ \, 8; ⑥ \, -\ln\pi]$$

21 Calcolare i seguenti limiti

$$① \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+5x}}{\operatorname{Sh} x}; \quad ② \lim_{x\to e} \frac{x-e}{1-\ln x}; \quad ③ \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^x;$$

$$④ \lim_{x\to1} x^{\frac{1}{x^2-1}}; \quad ⑤ \lim_{x\to0} \frac{\sin^3(3x)}{3\sin(x^3)}; \quad ⑥ \lim_{x\to0} \frac{x\operatorname{Sh}(x^2)}{\sin x - \tan x}.$$

$$[① \, -\tfrac{7}{6}; ② \, -e; ③ \, e^2; ④ \, \sqrt{e}; ⑤ \, 9; ⑥ \, -2]$$

22 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^x - 1 & 0 \le x \le 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

calcolare

$$① \lim_{x\to0^+} f(x); \quad ② \lim_{x\to0^-} f(x); \quad ③ \lim_{x\to1^+} f(x);$$

$$④ \lim_{x\to1^-} f(x); \quad ⑤ \lim_{x\to2^+} f(x); \quad ⑥ \lim_{x\to2^-} f(x).$$

$$[① \, 0; ② \, 1; ③ \, e-1; ④ \, e-1; ⑤ \, 4; ⑥ \, e^2-1]$$

23 Calcolare i seguenti limiti

$$① \lim_{x\to2^+} \lfloor x \rfloor; \quad ② \lim_{x\to2^-} \lfloor x \rfloor; \quad ③ \lim_{x\to-2^+} \lfloor x \rfloor; \quad ④ \lim_{x\to-2^-} \lfloor x \rfloor;$$

$$⑤ \lim_{x\to2^+} \lfloor 1-x \rfloor; \quad ⑥ \lim_{x\to2^-} \lfloor 1-x \rfloor; \quad ⑦ \lim_{x\to2^+} \lfloor \pi-x \rfloor; \quad ⑧ \lim_{x\to2^-} \lfloor \pi-x \rfloor.$$

$$[① \, 2; ② \, 1; ③ \, -2; ④ \, -3; ⑤ \, -2; ⑥ \, -1; ⑦ \, 1; ⑧ \, 1]$$

24 Mostrare che la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ è monotona e continua su tutto $\mathbb{R}$.

25 Determinare le classi limite delle seguenti funzioni, per $x \to +\infty$:

$$① \ 2\operatorname{mant} x\,; \quad ② \ x \sin^2 x\,; \quad ③ \ x \sin x\,; \quad ④ \ \frac{x+1}{x}(1 + |\sin x|)\,.$$

$$[① \ \Lambda = [0, 2]; ② \ \Lambda = [0, +\infty]; ③ \ \Lambda = [-\infty, \infty]; ④ \ \Lambda = [1, 2]]$$

26 Dimostrare che, per $x \to 0$,

$$f(x) \sim x^\alpha \quad \Rightarrow \quad x^\beta f(x) \sim x^{\alpha+\beta}\,.$$

27 Dimostrare che, per $x \to 0$,

$$f(x) = o(x^\alpha) \quad \Rightarrow \quad x^\beta f(x) = o(x^{\alpha+\beta})\,.$$

28 Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \to +\infty$ le funzioni seguenti:

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x \sin x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{x^3}{\operatorname{Ch} x}, \quad f_3(x) = e^{-x}, \quad f_4(x) = \frac{x+1}{x^2 \ln x},$$
$$f_5(x) = \pi - 2 \arctan x, \quad f_6(x) = \left(\frac{1}{\ln(x + e^x)}\right)^2, \quad f_7(x) = x^{-x}\,.$$

$$[f_5, f_4, f_1, f_6, f_2, f_3, f_7]$$

29 Disporre in ordine crescente di infinito per $x \to +\infty$ le funzioni seguenti:

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{x}{\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x}\right), \quad f_2(x) = \sqrt{x}(2 + \sin x)\,,$$
$$f_3(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}, \quad f_4(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}\,.$$

$$[f_2, f_1, f_3, f_4]$$

30 Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \to 0$ le funzioni seguenti:

$$f_1(x) = 1 - e^{-x^2}, \quad f_2(x) = x^3 + x \sin \sqrt{x}\,,$$
$$f_3(x) = \sqrt[4]{1 + x^3} - \sqrt[3]{1 - x^4}, \quad f_4(x) = (1 - \cos x) \ln x\,,$$
$$f_5(x) = x^{23}, \quad f_6(x) = \ln(1 + x)(1 + \ln x)\,,$$
$$f_7(x) = 2 \arctan x\,,$$

$$[f_6, f_7, f_2, f_4, f_1, f_3, f_5]$$

31 Disporre in ordine crescente di infinito per $x \to 0^+$ le funzioni seguenti:

$$f_1(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}}, \quad f_2(x) = \ln(x^3 + x^4) + x \sin \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{2^x - 1}\,,$$
$$f_4(x) = \frac{1}{\operatorname{Ch} x - \cos x}, \quad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^4 - x^6}}, \quad f_6(x) = (\ln(e^x - 1))^2.$$

$$[f_2, f_6, f_3, f_4, f_5, f_1]$$

32 Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \to 1^+$ le funzioni seguenti:

$$f_1(x) = (\sin(\pi x))^3, \quad f_2(x) = 1 - 2x^2 + x^4, \quad f_3(x) = \sqrt[3]{x-1},$$
$$f_4(x) = \sqrt[3]{x} - 1, \qquad f_5(x) = \sqrt{e^x - e}\,.$$

$[f_3, f_5, f_4, f_2, f_1]$

5.2.1 Suggerimenti

Per l'esercizio 21, ⑥ : Osservare che $\sin x = \tan x \cos x$.

CAPITOLO 6 Successioni e serie

6.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

6.1.1 Successioni

ESERCIZIO 6.1 **Verifica di limiti**

Verificare i seguenti limiti, usando la definizione:

$$① \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n+4} = 2; \qquad ② \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3}{n+4} = +\infty.$$

Soluzione

Sia a_n una successione, gli enunciati equivalenti alle scritture

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

sono, rispettivamente,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ tale che } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon,$$

e

$$\forall K > 0, \exists n_K \text{ tale che } n \geq n_K \Rightarrow a_n > K.$$

Verificare i due limiti significa trovare i legami tra ε e n_ε nel primo caso e tra K e n_K nel secondo.

① L'espressione $|a_n - l| < \varepsilon$ nel nostro caso diventa $2-\varepsilon < \frac{2n+3}{n+4} < 2+\varepsilon$, che a sua volta si scinde nelle due disequazioni

$$(2-\varepsilon)(n+4) < (2n+3) \qquad \text{e} \qquad (2n+3) < (2+\varepsilon)(n+4);$$

la seconda è sempre verificata (visto che n è un intero non negativo), la prima equivale a

$$\varepsilon n + 4\varepsilon - 5 > 0 \qquad \text{ossia} \qquad n > \frac{5}{\varepsilon} - 4;$$

quindi:

- se $\varepsilon < 1$, perché il limite sia verificato, è sufficiente prendere n_ε come[a]

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} - 4 \right\rfloor + 1\,;$$

- se invece $\varepsilon \geq 1$, allora $\frac{5}{\varepsilon} - 4 \leq 1$ e allora è sufficiente scegliere $n_\varepsilon = 1$.

Volendo raggruppare le due alternative, per ogni valore di $\varepsilon > 0$, possiamo assumere

$$n_\varepsilon = \max\left\{1, \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} - 4 \right\rfloor + 1\right\}.$$

② $a_n > K$ diventa $\frac{2n^2-3}{n+4} > K$, e cioè

$$2n^2 - Kn - 3 - 4K > 0\,,$$

disequazione che è verificata (ricordando che n è positivo) se

$$n > \frac{K + \sqrt{K^2 + 16K + 12}}{4}\,,$$

per cui

$$n_K = \left\lfloor \frac{K + \sqrt{K^2 + 16K + 12}}{4} \right\rfloor + 1\,.$$

ESERCIZIO 6.2 **Parallelo tra successioni e funzioni**

Calcolare il limite delle seguenti successioni:

① $a_n = n^3 + 3n - \ln n$; ② $b_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$;

③ $c_n = \sin(n\pi)$; ④ $d_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Soluzione

Un primo tentativo, per determinare il limite per $n \to +\infty$ di una successione, può essere il seguente: data $a_n = f(n)$, si studia il limite per $x \to +\infty$ di $f(x)$, si hanno due possibilità:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ esiste, allora coincide con il limite di a_n,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste, allora *nulla si può dire* riguardo limite di a_n.

[a] Con $\lfloor x \rfloor$ si indica la "parte intera" di x, vedi l'Esercizio 4.10.

Da questo punto di vista, inoltre, valgono tutti i risultati già visti per i limiti di funzioni, come a esempio l'*algebra dei limiti* e il teorema del confronto.

① Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 3x - \ln x = +\infty\,,$$
allora anche $\lim a_n = +\infty$, e notiamo, già che ci siamo, che anche per le successioni vale la stessa *gerarchia degli infiniti* valida per le funzioni:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$$
per ogni α reale, e ogni $\beta > 0$.

② Per calcolare $\lim \sqrt{n^2+6n} - n$, calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x} - x$:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x} - x &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+6x} - x)\frac{\sqrt{x^2+6x}+x}{\sqrt{x^2+6x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = 3\,,\end{aligned}$$
e quindi $\lim b_n = 3$.

③ Se a n sostituiamo x, otteniamo $\sin(\pi x)$, e sappiamo che $\lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ non esiste, tuttavia – senza sostituire x – possiamo osservare che $\sin(\pi n) = 0$ per ogni n, e perciò la successione c_n è una successione di zeri, e $\lim c_n = 0$.

④ Non è possibile calcolare $\lim d_n$ usando questo sistema: sostituendo la n con x otterremmo
$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^x,$$
e l'espressione è priva di significato, perché non si può elevare un numero negativo a un esponente reale, tuttavia è facile rendersi conto che $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ è una successione che tende a zero, e pertanto $\lim d_n = 1$.

ESERCIZIO 6.3 — Una successione celebre – 1

Mostrare che la successione
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
è monotona.

Soluzione

Osserviamo in via preliminare che per ogni coppia k, n di interi naturali risulta
$$\frac{n-k}{n} < \frac{n+1-k}{n+1}, \tag{6.1}$$

infatti eliminando i denominatori si ottiene la relazione $n^2 + n - kn - k < n^2 + n - kn$ (evidentemente vera).

Dimostriamo ora che $a_{n+1} > a_n$. Utilizzando lo sviluppo del binomio, scrivendo i primi quattro addendi e l'ultimo di a_n, ricaviamo:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}};$$

Notiamo che gli addendi al secondo membro sono $n + 1$.

Analogamente, possiamo scrivere gli $n + 2$ addendi di a_{n+1}, e confrontare i primi quattro e il penultimo con i primi quattro e l'ultimo di a_n, mentre l'ultimo di a_{n+1} è in più:

$$a_{n+1} = 1 + (n+1)\frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2!}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$
$$\ldots \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{(n+1)n!}{n!}\frac{n+1}{(n+1)^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

I primi due addendi sono uguali; per il terzo e il quarto, ricordando la maggiorazione (6.1), si ha rispettivamente

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1},$$

e, analogamente,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n\,n} = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} < \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}.$$

Decomponendo allo stesso modo l'ultimo addendo di a_n e il penultimo di a_{n+1} si vede che $a_{n+1} > a_n$, perché ottenuto sommando addendi maggiori.

ESERCIZIO 6.4 **Una successione celebre – 2**

Mostrare che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è limitata.

Soluzione

Consideriamo n fisso e riscriviamo:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

Procediamo a fare una maggiorazione grossolana, ma molto semplice: osserviamo che ciascun addendo si ottiene moltiplicando il reciproco di un fattoriale per una frazione < 1. Risulta perciò:

$$
\begin{aligned}
a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \\
&\left(\text{raccogliamo } \frac{1}{2!} \text{ dai fattoriali successivi}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - (1/3)^{n-1}}{1 - 1/3}\right) < 2 + \frac{3}{4} = 2.75;
\end{aligned}
$$

pertanto $a_n < 2.75$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 6.5 **Limiti riconducibili al numero di Nepero**

Sapendo che (confronta l'Esercizio 5.9)

$$e = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

dimostrare che, date due successioni a_n e b_n per cui

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n} = e^a.$$

Soluzione

Osserviamo innanzitutto che, poiché $b_n \to +\infty$ allora *definitivamente*[b] abbiamo $b_n \neq 0$, e quindi l'espressione qui sopra ha senso. Esaminiamo allora due casi: $a \neq 0$ e $a = 0$.

[b] Poiché il nostro interesse per le successioni è in generale concentrato sul limite, il più delle volte non occorre che tutti i termini di una successione godano di una certa proprietà, basta che tale proprietà sia soddisfatta a partire da un certo indice $\bar{n}$, tale condizione è riassunta nell'avverbio "definitivamente".

- $a \neq 0$, in questo caso gli a_n sono definitivamente diversi da zero, moltiplicando e dividendo l'esponente per a_n si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{a_n}}\right]^{a_n} = \lim_{n\to+\infty}[e]^{a_n} = e^a .$$

La relazione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{a_n}} = e$$

discende dal fatto che, nel caso $a \neq 0$ posto $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, abbiamo che $c_n \to +\infty$ o $c_n \to -\infty$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{a_n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e .$$

- $a = 0$, possono esistere nella successione infiniti elementi $a_n = 0$, per questi

$$\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n} = \left(1+\frac{0}{b_n}\right)^{b_n} = 1 ,$$

mentre per gli altri dividiamo e moltiplichiamo l'esponente per a_n come abbiamo fatto prima, e otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n} = e^0 = 1 .$$

ESERCIZIO 6.6 **I simboli "asintotico" e "o piccolo"**

In analogia a quanto fatto con le funzioni, stabilire il significato dei simboli di asintotico e o piccolo per le successioni e reinterpretare poi gli sviluppi asintotici provenienti dai limiti notevoli alla luce delle successioni; date poi le quattro successioni

$$a_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2, \quad b_n = \frac{1}{n+\cos n}, \quad c_n = \sqrt{n^2+1}-n, \quad d_n = e^{-2\ln(n+1)} .$$

stabilire se tra ciascuna coppia è possibile inserire l'uno o l'altro simbolo.

Soluzione

Se per $n \to +\infty$ due generiche successioni a_n e b_n sono *infinite* (cioè tendono entrambe all'infinito) e inoltre

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 ,$$

allora a_n è *asintotica* a b_n, e si scrive $a_n \sim b_n$; se per $n \to +\infty$ le due successioni a_n e b_n sono *infinitesime* (cioè tendono entrambe a zero) e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\,,$$

allora a_n è *asintotica* a b_n, e si scrive $a_n \sim b_n$, se invece

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,,$$

allora a_n è *o piccolo* di b_n, e si scrive $a_n = o(b_n)$; ricordiamo infine (come per le funzioni) che le due seguenti scritture (ove $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$) sono equivalenti:

$$a_n \sim b_n \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = b_n + o(b_n)\,.$$

Sia allora a_n una successione infinitesima, cioè $a_n \to 0$, valgono i seguenti sviluppi:

$$\sin a_n \sim a_n \qquad 1 - \cos a_n \sim \frac{(a_n)^2}{2} \qquad \tan a_n \sim a_n$$

$$\operatorname{Sh} a_n \sim a_n \qquad \operatorname{Ch} a_n - 1 \sim \frac{(a_n)^2}{2} \qquad \operatorname{Th} a_n \sim a_n$$

$$e^{a_n} - 1 \sim a_n \qquad \ln(1 + a_n) \sim a_n \qquad (1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha a_n\,.$$

Cerchiamo allora di determinare, per ciascuna delle successioni assegnate, la più semplice successione ad essa asintotica:

$$a_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n + \cos n} \sim \frac{1}{n}$$

$$c_n = \sqrt{n^2+1} - n = (\sqrt{n^2+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$d_n = e^{-2\ln(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}\,.$$

Quindi tra queste successioni c'è una sola relazione di asintotico: $a_n \sim d_n$ e inoltre

$$a_n = o(b_n), \quad a_n = o(c_n), \quad d_n = o(b_n), \quad d_n = o(c_n)\,;$$

infine, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{2}$$

e $\frac{1}{2} \neq 1$, non è possibile scrivere che le due successioni siano asintotiche, né che una sia "o piccolo" dell'altra.

ESERCIZIO 6.7 **Successioni non riconducibili a funzioni**

Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$① \ a_n = (n + (-1)^n \sqrt{n}) ; \qquad ② \ b_n = \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+2)!} ;$$

$$③ \ c_n = \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{n}{3}} ; \qquad ④ \ d_n = \frac{n!}{n^n} ; \qquad ⑤ \ f_n = \frac{n!}{n^{n/2}} .$$

Soluzione

Contrariamente alle successioni degli esercizi precedenti, le successioni di questo esercizio, a causa della presenza nelle loro espressioni analitiche di elementi come $(-1)^n$, come il coefficiente binomiale o come il fattoriale[c], non possono essere trattate come altrettante "tracce" di funzioni della variabile x; occorre allora l'uso di altri accorgimenti.

① La successione è composta da un valore (nel nostro caso n) cui viene aggiunto o tolto un altro valore in ogni caso più piccolo, per dimostrare il fatto che a "comandare" è n, la successione si può riscrivere per esempio raccogliendo n:

$$a_n = n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) ,$$

la parentesi rotonda tende a 1, quindi $a_n \sim n$ e $\lim a_n = +\infty$.

② In questo caso conviene semplificare il più possibile i fattoriali:

$$b_n = \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+2)!} = \frac{n!(1 + (n+1))}{n!(1 - (n+1)(n+2))} = \frac{n+2}{-n^2 - 3n - 1}$$

e quindi $\lim b_n = 0$.

③ Anche con i coefficienti binomiali, un buon approccio può essere semplificare il più possibile:

$$c_n = \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{8n^2 - 12n + 4}{n^2 - 3n + 2}$$

e quindi $\lim c_n = 8$.

[c] Per il fattoriale, è possibile anche tener conto di uno sviluppo asintotico, noto come **formula di Stirling**: per n grande

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} .$$

④ Osserviamo innanzitutto che per ogni valore di n il corrispondente d_n è maggiore di 0, dopodiché calcoliamo il rapporto tra due termini successivi:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

e determiniamone il limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)^{-1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

poiché questo limite è minore di 1, la successione d_n tende a 0[d].

⑤ Usando la formula di Stirling, per $n \to +\infty$:

$$f_n \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^{n/2}} = \frac{n^{n/2}\sqrt{2\pi n}}{e^n} \to +\infty\,.$$

ESERCIZIO 6.8 **Successioni monotòne**

Mostrare che, se a_n è una successione monotona crescente e superiormente limitata (cioè $\sup a_n = A$), allora $a_n \to A$.

Soluzione

Si dice *monotòna* una successione a_n per la quale tra due termini successivi è sempre intercalabile uno dei segni $<, \leq$ o in alternativa uno dei segni $\geq, >$, più precisamente a_n è detta

- *strettamente crescente* se $a_{n+1} > a_n$ per ogni valore di n,
- *crescente* se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni valore di n,
- *decrescente* se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni valore di n,
- *strettamente decrescente* se $a_{n+1} < a_n$ per ogni valore di n;

il fatto che $A = \sup a_n$ significa che $\forall\varepsilon > 0$ esiste un qualche elemento della successione, diciamo $a_{\bar{n}}$, che dista da A meno di ε, cioè $A - a_{\bar{n}} < \varepsilon$, poiché poi a_n è crescente, la stessa disequazione vale anche per ogni $n > \bar{n}$, e pertanto $\lim a_n = A$.

[d] Lo stesso risultato si poteva ottenere anche facendo uso della formula di Stirling:

$$d_n \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \to 0\,.$$

ESERCIZIO 6.9 **Successioni irregolari e sottosuccessioni. Classe limite, liminf e limsup**

Mostrare che le successioni

$$① \ a_n = (-1)^n \,; \qquad ② \ b_n = \frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \,; \qquad ③ \ c_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

sono irregolari, determinarne lim inf, lim sup *e classe limite.*

Soluzione

È detta *irregolare* una successione che non ammette limite[e] (finito o infinito che sia); si può dimostrare che, se da una successione è possibile estrarre due sottosuccessioni che convergono a valori diversi, allora la successione di partenza sarà irregolare. L'insieme dei limiti delle sottosuccessioni di a_n (comprensivo degli estremi inferiore e superiore) è detto *classe limite*[f]; i suddetti estremi inferiore e superiore della classe limite sono detti rispettivamente lim inf e lim sup della successione.

① La successione a_n è formata alternativamente dai valori 1 (se n è pari) e -1 (se n è dispari), suddividiamola in due sottosuccessioni: se indichiamo con $n = 2k$ gli indici pari e con $n = 2k + 1$ gli indici dispari, possiamo scrivere

$$a_{2k} = 1 \quad \forall k, \qquad\qquad a_{2k+1} = -1 \quad \forall k$$

e poiché una successione costante ha come limite la costante stessa, evidentemente $a_{2k} \to 1$ e $a_{2k+1} \to -1$; quindi, detta Λ la classe limite, abbiamo $\Lambda = \{-1, 1\}$, e

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1, \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1\,.$$

② Osserviamo che b_n è la successione delle parti decimali della divisione del numero intero n per 4, tali parti decimali possono essere

- 0, se n è un multiplo di 4 ($n = 4k$),
- 0.25, se n è maggiore di un'unità rispetto a un multiplo di 4 ($n = 4k + 1$),
- 0.5, se n è maggiore di due unità rispetto a un multiplo di 4 ($n = 4k + 2$), ovvero se n è pari, ma non divisibile per 4,
- 0.75, se n è maggiore di tre unità rispetto a un multiplo di 4 ($n = 4k + 3$);

come nel caso precedente, è possibile suddividere la successione b_n in quattro sottosuccessioni costanti: per ogni valore di k infatti

$$b_{4k} = 0 \qquad b_{4k+1} = 0.25 \qquad b_{4k+2} = 0.5 \qquad b_{4k+1} = 0.75\,;$$

[e] Una successione monotona non può mai essere irregolare, e una successione irregolare non può mai essere monotona; se una successione è crescente (o strettamente crescente), i casi sono due: o $\lim a_n = A$ (il limite è finito), o $\lim a_n = +\infty$.

[f] Osserviamo che se la successione tende al limite L, allora la sua classe limite è l'insieme $\{L\}$ formato dal solo numero L.

e quindi, con lo stesso ragionamento del punto precedente, possiamo concludere che

$$\Lambda = \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}, \qquad \liminf_{n\to+\infty} b_n = 0, \qquad \limsup_{n\to+\infty} b_n = 0.75\,.$$

③ Osserviamo preliminarmente che $0 \le c_n < 1$; vogliamo dimostrare che $\Lambda = [0, 1]$, cioè che per ogni numero $\alpha \in [0, 1]$ e per ogni $\varepsilon > 0$ vi sono infiniti elementi di $\{c_n\}$ per i quali $\alpha - \varepsilon \le c_n \le \alpha + \varepsilon$, e pertanto vi è una sottosuccessione convergente a α. Sappiamo che ogni intero n è compreso tra due quadrati perfetti, cioè

$$\forall n, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } m^2 \le n < (m+1)^2\,;$$

e quindi per tutti gli interi n contenuti tra m^2 incluso e $(m+1)^2$ escluso abbiamo

$$m \le \sqrt{n} < m+1 \qquad \Rightarrow \qquad \lfloor \sqrt{n} \rfloor = m\,.$$

Sappiamo anche che[g] $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \to 0$, ciò significa che $\forall \varepsilon > 0$ esiste K_ε per cui se $n > K_\varepsilon$ allora $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \varepsilon$, i casi sono due:

- le radici quadrate di entrambi i numeri hanno la stessa parte intera:

$$\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor\,;$$

  in tal caso (proprio perché le parti intere sono uguali) vediamo che

$$c_{n+1} - c_n = \left(\sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor\right) - \left(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon\,;$$

- le radici quadrate di entrambi i numeri non hanno la stessa parte intera: ciò può accadere solo se $n+1$ è un quadrato perfetto: se come prima scriviamo $m^2 \le n < (m+1)^2$, allora

$$n = (m+1)^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad n + 1 = (m+1)^2$$

  e in questo caso $\sqrt{n+1} = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$; vediamo allora che la distanza tra c_n e 1 è minore di ε, infatti

$$1 - c_n = \left(1 - \left(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right)\right) = 1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon\,.$$

Prendiamo allora un qualsiasi quadrato perfetto m^2, che sia maggiore di K_ε: per quanto visto finora possiamo affermare che i termini della successione da c_{m^2} a $c_{(m+1)^2-1}$ sono disposti in ordine crescente nell'intervallo $[0, 1)$ e la

[g] Basta moltiplicare e dividere per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, come nell'Esercizio 6.2,② .

distanza tra ciascuna coppia di elementi contigui è inferiore a ε (così come la distanza tra $c_{(m+1)^2-1}$ e 1):

$$0 = c_{m^2} \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} c_{m^2+1} \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} c_{m^2+2} \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} \dots$$
$$\dots \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} c_{(m+1)^2-2} \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} c_{(m+1)^2-1} \overset{<\varepsilon}{\longleftrightarrow} 1\,;$$

possiamo allora concludere che $\forall \alpha \in [0,1]$ almeno uno di questi valori cade nell'intervallo $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$.
Poiché si può replicare questa costruzione per tutti i quadrati perfetti m^2 maggiori di K_ε, ci sono infiniti valori c_n nell'intervallo $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, per l'arbitrarietà di α possiamo concludere che $\Lambda = [0,1]$ è la classe limite cercata[h], e quindi

$$\liminf_{n\to+\infty} c_n = 0, \qquad \limsup_{n\to+\infty} c_n = 1\,.$$

6.1.2 Serie numeriche

ESERCIZIO 6.10 — Definizione di convergenza e serie telescopiche

Sia a_n una qualsiasi successione di numeri reali, dire cosa significa che la serie $\sum a_n$ converge. Applicare poi la definizione di convergenza di una serie per verificare che

$$① \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1\,; \qquad ② \sum_{n=0}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_0\,;$$

ove b_n è una successione tale che $b_n \to b \in \mathbb{R}$.

Soluzione
Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

si chiamano *somme parziali k-esime* le quantità

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$$

[h] Con argomenti simili e un po' più di difficoltà è possibile provare che le successioni

$$\sin n \qquad \text{e} \qquad \cos n$$

ammettono entrambe come classe limite l'intervallo $[-1,1]$.

per definizione il comportamento della serie corrisponde a quello della successione $\{A_k\}$, vale cioè il seguente schema:

$$A_k \to A \qquad \sum a_n = A,$$

$$A_k \text{ diverge a } \pm\infty \qquad \sum a_n \text{ diverge a } \pm\infty,$$

$$A_k \text{ è irregolare} \qquad \sum a_n \text{ è irregolare}.$$

① Osserviamo che $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

si vede allora che gli addendi, una volta tolte le parentesi, si semplificano a coppie ($\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{3}$ e così via); calcolando la somma parziale k-esima

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$$

vediamo che

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1,$$

e quindi la serie converge a 1.

② La serie al punto precedente è un caso particolare delle serie "telescopiche" o "serie a cannocchiale": sono serie in cui, calcolando le somme k-esime, tutti i termini intermedi si semplificano a coppie (come quando un cannocchiale si richiude su di sé); il caso più generico è quello che stiamo esaminando ora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n) = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots$$

Se calcoliamo le somme parziali, otteniamo

$$B_k = \sum_{n=0}^{k} (b_{n+1} - b_n) = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \dots + (b_{k+1} - b_k) = b_{k+1} - b_0$$

e quindi (visto che $b_n \to b$):

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} (b_{k+1} - b_0) = b - b_0$$

e la serie converge a $b - b_0$.

ESERCIZIO 6.11 **Una condizione necessaria**

Mostrare che la serie[i]

$$\sum_n \cos(n)$$

non converge.

Soluzione

Il primo teorema sulle serie afferma:

$$\sum_n a_n \quad \text{converge} \qquad \Rightarrow \qquad a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$$

questo enunciato è una *condizione solo necessaria* per la convergenza di una serie, che però può essere riletta così:

$$a_n \nrightarrow 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \text{ non converge}\,.$$

Nel nostro caso, è sufficiente osservare che (quando $n \to +\infty$) $\cos n \nrightarrow 0$, per concludere che $\sum \cos n$ non converge (osserviamo che non sappiamo dire se la serie diverga o se abbia un comportamento irregolare, sappiamo solo con certezza che non converge).

Osservazione importante: *Un equivoco frequente*

La condizione che abbiamo appena usato è, ripetiamolo, una condizione *solo necessaria*: è quindi un *errore* scrivere una frase del genere:

$$\text{“poiché } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,, \text{ allora la } \sum a_n \text{ converge”}.$$

ESERCIZIO 6.12 **Alcune serie importanti**

Ricordare per quali valori dei parametri α, β e γ le serie

$$① \sum_n \frac{1}{n^\alpha}, \qquad ② \sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \qquad ③ \sum_n \gamma^n,$$

convergono.

---

[i] Poiché, salvo poche eccezioni, l'unica tipologia di esercizi che affronteremo riguardo le serie saranno quelli riguardanti il carattere (“dire se la serie ... converge, diverge o è indeterminata”), osserviamo che, data la stessa successione a_n, le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

hanno lo stesso comportamento (cambia unicamente il valore della somma effettiva), quindi d'ora in avanti potremmo semplificare la notazione, scrivendo sempre

$$\sum_n a_n\,.$$

Soluzione

① La serie, detta *serie armonica generalizzata*, converge se $\alpha > 1$, diverge a $+\infty$ negli altri casi;
② la serie converge in due casi: se $\alpha > 1$ per ogni valore di β, e se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$, diverge a $+\infty$ negli altri casi;
③ la serie, detta *serie geometrica di ragione* γ, converge se $|\gamma| < 1$, diverge se $\gamma \geq 1$ o $\gamma < -1$, è irregolare se $\gamma = -1$.

6.1.3 Serie a termini positivi

ESERCIZIO 6.13 **Regolarità delle serie a termini positivi**

Mostrare che la serie

$$\sum_n (\sin n)^2$$

diverge a $+\infty$.

Soluzione

Se $a_n > 0$ per ogni n, la serie $\sum a_n$ è detta serie *a termini positivi*; per le serie a termini positivi si può dimostrare che: poiché la successione $\{A_k\}$ delle somme parziali è monotona crescente (ogni addendo è positivo) allora $\lim A_k$ esiste, e quindi:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{k\to\infty} A_k = +\infty\,;$$

quindi una serie a termini positivi converge ad A o diverge a $+\infty$. Nel nostro caso, poiché la successione $\sin n$ non tende a 0, allora per la condizione necessaria (vedi Esercizio 6.11) la serie non converge, essendo però una serie a termini positivi dovrà necessariamente divergere a $+\infty$.

ESERCIZIO 6.14 **Criterio del confronto**

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$① \sum_n \frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\,; \qquad ② \sum_n \frac{5+\cos n}{\sqrt[4]{n^5}}\,.$$

Soluzione

Applichiamo il criterio del confronto (valido unicamente per le serie a termini positivi)[j], noi sappiamo che la serie il cui termine generale è del tipo $\frac{1}{n^{2/3}}$ diverge,

[j] **Criterio del confronto**: Date le serie a termini positivi $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, se per ogni intero n si ha che $a_n \leq b_n$, allora scriveremo $\sum a_n < \sum b_n$ e valgono le seguenti implicazioni:

$$\sum_n a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ diverge} \qquad \sum_n b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

e la serie degli a_n si chiama *minorante*, quella dei b_n si chiama *maggiorante*.

e che la serie il cui termine generale è del tipo $\frac{1}{n^{5/4}}$ converge, allora sarà nostro scopo cercare una serie minorante e divergente per la prima serie e una serie maggiorante e convergente per la seconda serie.

① Osserviamo che

$$\frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{2}{\sqrt[3]{n^2}}$$

quindi

$$\sum_n \frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} > \sum_n \frac{2}{\sqrt[3]{n^2}} = 2\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

l'ultima serie diverge perché è una serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{2}{3} < 1$, quindi la serie assegnata diverge.

② Osserviamo che

$$\frac{5+\cos n}{\sqrt[4]{n^5}} < \frac{6}{\sqrt[4]{n^5}}$$

quindi

$$\sum_n \frac{5+\cos n}{\sqrt[4]{n^5}} < \sum_n \frac{6}{\sqrt[4]{n^5}} = 6\sum_n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$$

l'ultima serie converge perché è una serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{5}{4} > 1$, e quindi la serie assegnata converge.

ESERCIZIO 6.15 **Criterio del confronto asintotico**

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$① \sum_n \frac{n+e^{-n}}{n^2-\ln n}; \qquad ② \sum_n \frac{2^n}{3^n-n}.$$

Soluzione

Usiamo il criterio del confronto asintotico (valido unicamente per le serie a termini positivi)[k].

① Per la prima serie

$$\frac{n+e^{-n}}{n^2-\ln n} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

$\frac{1}{n}$ è il termine generale di una serie divergente e pertanto la serie diverge.

[k] **Criterio del confronto asintotico**: Date le serie a termini positivi $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, se si ha che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora scriveremo $\sum a_n \sim \sum b_n$ e le due serie hanno lo stesso carattere: o convergono entrambe o divergono entrambe.

② Per la seconda serie

$$\frac{2^n}{3^n - n} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è il termine generale di una serie geometrica di ragione $\frac{2}{3} < 1$, quindi convergente, e pertanto la serie converge.

ESERCIZIO 6.16 **Criterio del rapporto**

Stabilire il carattere delle seguenti serie (l'ultima al variare del parametro $\alpha > 0$):

① $\sum_n \frac{n!}{n^n}$; ② $\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; ③ $\sum_n \frac{1 + \cos n}{n^2}$; ④ $\sum_n \frac{\alpha^n}{n^2}$.

Soluzione

La presenza di fattoriali nei termini generali sconsiglia di usare i criteri del confronto, useremo invece il criterio del rapporto (valido – al solito – unicamente per le serie a termini positivi)[1].

① Applichiamo il criterio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1;$$

e quindi la serie converge.

② Applichiamo il criterio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1;$$

e quindi la serie diverge;

[1] **Criterio del rapporto**: Data la serie a termini positivi $\sum_n a_n$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

se il limite non esiste il criterio non si può applicare, se il limite esiste e vale L, allora:

$L < 1$	$L = 1^-$	$L = 1^+$	$L > 1$
$\sum$ converge	caso dubbio	$\sum$ diverge	$\sum$ diverge

③ Applicando il criterio, troviamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1+\cos(n+1)}{(n+1)^2}}{\dfrac{1+\cos n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\cos(n+1)}{1+\cos n}\,\frac{n^2}{(n+1)^2},$$

questo limite non esiste, e pertanto nulla si può concludere con il criterio del rapporto; tuttavia, utilizzando il criterio del confronto, possiamo osservare che

$$\frac{1+\cos n}{n^2}<\frac{2}{n^2}$$

e pertanto la serie converge, perché maggiorata da $\sum \frac{2}{n^2}$.

④ Applichiamo il criterio:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{\alpha^n}{n^2}}=\alpha\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\alpha$$

e pertanto se $\alpha<1$ la serie converge, se $\alpha>1$ la serie diverge, se $\alpha=1$ il limite vale 1^-, ossia il caso dubbio, possiamo allora valutare direttamente la serie:

$$\sum_n\frac{\alpha^n}{n^2}\overset{\alpha=1}{=}\sum_n\frac{1}{n^2}$$

e la serie converge, quindi complessivamente la serie converge se $\alpha\le 1$, diverge se $\alpha>1$.

ESERCIZIO 6.17 Criterio della radice

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

① $\displaystyle\sum_n\left(\ln\frac{3n+4}{2n-1}\right)^n$; ② $\displaystyle\sum_n\left(\frac{2n+\cos n}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+8}}\right)^{\frac{n^2+2n}{3n+\arctan n}}$.

Soluzione

La presenza di potenze n-esime nei termini generali consiglia di servirsi del criterio della radice (valido – al solito – unicamente per le serie a termini positivi)[m].

[m] **Criterio della radice**: Data la serie a termini positivi $\sum_n a_n$, calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n},$$

se il limite non esiste il criterio non si può applicare, se il limite esiste e vale L, allora:

$L<1$	$L=1^-$	$L=1^+$	$L>1$
$\sum$ converge	caso dubbio	$\sum$ diverge	$\sum$ diverge

① Applichiamo il criterio:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{3n+4}{2n-1} = \ln\frac{3}{2} < 1\,;$$

e la serie converge.

② Applichiamo il criterio:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+\cos n}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+8}}\right)^{\frac{n+2}{3n+\arctan n}}\,;$$

la base tende a 2 l'esponente tende a $\frac{1}{3}$, quindi $\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[3]{2} > 1$ e la serie diverge.

6.1.4 Serie a termini di segno qualsiasi

ESERCIZIO 6.18 **Convergenza semplice e assoluta**

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$① \sum_n \frac{\cos n}{n^2+3n+2}\,; \qquad ② \sum_n \frac{\sin n}{n}\,.$$

Soluzione

Ciascuna delle due serie del testo non è interamente composta da addendi positivi, non si possono quindi applicare i criteri precedentemente visti; inoltre, per le serie a termini qualsiasi, esistono due diversi tipi di convergenza, la convergenza *semplice* e la convergenza *assoluta*: se la serie a termini qualsiasi $\sum a_n$ converge, si dice che converge semplicemente, se converge la serie dei valori assoluti $\sum |a_n|$ allora $\sum a_n$ converge assolutamente. Osserviamo che

$$\sum a_n \text{ converge assolutamente } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ converge semplicemente}$$

in generale il primo tentativo, di fronte a una serie a termini qualsiasi, è quello di provare la convergenza assoluta, infatti, poiché $\sum |a_n|$ è una serie a termini positivi, si possono applicare i criteri validi per questo tipo di serie. Se la serie a termini qualsiasi non è assolutamente convergente, può essere difficile provare anche la convergenza semplice (fatto salvo un caso particolare, che esamineremo nel prossimo esercizio).

① Consideriamo la serie dei moduli:

$$\sum_n \left|\frac{\cos n}{n^2+3n+2}\right| = \sum_n \frac{|\cos n|}{n^2+3n+2}\,,$$

poiché $|\cos n| < 1$ la serie dei moduli è maggiorata dalla serie

$$\sum_n \frac{1}{n^2+3n+2} \sim \sum_n \frac{1}{n^2},$$

che è una serie armonica convergente, si deduce che:

$$\sum |a_n| \text{ converge}, \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge assolutamente}, \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge semplicemente}.$$

② Studiando la serie dei moduli

$$\sum_n \frac{|\sin n|}{n}$$

possiamo scrivere unicamente (poiché $|\sin n| < 1$) che

$$\sum_n \frac{|\sin n|}{n} < \sum_n \frac{1}{n}$$

ma questa affermazione non è di alcuna utilità: maggiorare una serie con una serie divergente non dà alcuna informazione sul comportamento della serie maggiorata, quindi con le nozioni in nostro possesso nulla si può concludere circa il comportamento della serie[n].

ESERCIZIO 6.19 **Serie a segni alterni e Criterio di Leibniz**

Stabilire se ciascuna delle serie seguenti:

$$① \sum_n (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad ② \sum_n \frac{\cos(n\pi)}{e^n - n^5},$$

converge semplicemente o assolutamente.

Soluzione

Le due serie del testo sono entrambe della forma

$$\sum_n (-1)^n a_n$$

[n] In realtà, con altre tecniche di Analisi, è possibile provare che la serie converge e che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

ove $a_n > 0$ per ogni n; sono cioè *serie a segni alterni*, per le quali vale il criterio (teorema) di Leibniz°.

① In questo caso la successione a_n è della forma $a_n = \frac{1}{n}$, che tende a zero in modo monotono e quindi verifica le ipotesi del teorema di Leibniz; per verificare se la serie converge assolutamente esaminiamo la serie dei moduli:

$$\sum_n \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_n \frac{1}{n}$$

e sappiamo che questa serie diverge.

② Osserviamo innanzitutto che l'espressione $\cos(n\pi)$ assume il valore 1 se n è pari e -1 se n è dispari, cioè $\cos(n\pi) = (-1)^n$; se volessimo applicare il teorema di Leibniz dovremmo dimostrare che (definitivamente) la successione

$$b_n = \frac{1}{e^n - n^5}$$

oltre che tendere a zero è anche positiva e monotona decrescente, in effetti non ve n'è bisogno; osserviamo invece che la serie dei moduli può essere trattata con il criterio del confronto asintotico: se $n \geq \bar{n}$, allora $e^n - n^5$ è *definitivamente* maggiore di zero e

$$\sum_n \left|\frac{\cos(n\pi)}{e^n - n^5}\right| = \sum_n \frac{1}{e^n - n^5} \sim \sum_n \frac{1}{e^n};$$

l'ultima è una serie convergente, quindi la serie di partenza converge assolutamente, e a maggior ragione semplicemente.

ESERCIZIO 6.20 — Maggiorazione del resto

Determinare quanti termini delle seguenti serie è necessario sommare affinché la differenza tra la somma (parziale) ottenuta e la somma della serie sia inferiore a $E = 10^{-3}$:

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4 + n}$; ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{n^4}$; ③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n) \frac{2^n - \sqrt{n}}{3^n + n}$.

° **Teorema di Leibniz**: Data la serie a segni alterni $\sum_n (-1)^n a_n$, se

$$a_n \to 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} < a_n,$$

allora la serie converge (semplicemente), inoltre l'errore che si commette arrestando le somme al posto k-esimo è, in modulo, minore del primo termine trascurato.

Soluzione

Lo scopo di questo esercizio è illustrare alcune tecniche per stabilire a quale valore N dell'indice n della serie numerica (ovviamente, convergente)

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

sia necessario arrestare la somma, al fine di conoscere il valore della somma della serie con un errore inferiore ad E; in altre parole: intendiamo trovare un plausibile valore N tale che

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{N} a_n\right| < E, \quad \text{ossia} \quad \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\right| < E,$$

ove E è un valore prefissato (nel nostro caso, $E = 10^{-3}$).

① Si tratta di una serie a segni alterni, e come si vede immediatamente essa converge assolutamente, e dunque semplicemente. Per una serie a segni alterni come questa vale il già ricordato teorema di Leibniz: l'errore che si commette arrestando le somme al posto N è minore (in valore assoluto) del primo termine trascurato, in simboli

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=n_0}^{N} (-1)^{n+1} a_n\right| < a_{N+1};$$

è dunque sufficiente determinare il più piccolo valore n tale che

$$\frac{1}{n^4+n} < 10^{-3} = \frac{1}{1000} \qquad \Leftrightarrow \qquad n^4 + n > 1000.$$

Osservato che $\sqrt[4]{1000} \simeq 5.62$, puntiamo la nostra attenzione sui termini con n prossimo a 5; con pochi conti otteniamo che $a_5 = \frac{1}{630}$ mentre $a_6 = \frac{1}{1302}$, dunque nella somma parziale ci arrestiamo a $n = 5$, tralasciando i termini da $n = 6$ in poi:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4+n} - \sum_{n=1}^{5} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4+n}\right| < a_6 = \frac{1}{1302}.$$

Possiamo allora approssimare la somma della serie con la somma parziale, sicuri che l'errore da noi commesso non supera un millesimo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4+n} \simeq \sum_{n=1}^{5} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4+n} = \frac{3719}{8190} \simeq 0.45409,$$

di più: poiché il primo termine trascurato è negativo, sappiamo che l'errore da noi commesso è per eccesso, ovvero possiamo affermare che

$$0.45332 \simeq 0.45409 - \frac{1}{1320} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4+n} \leq 0.45409.$$

② Contrariamente al punto precedente, la serie che ora prendiamo in esame è a termini positivi, e osserviamo che si tratta di una serie convergente. Per le serie a termini positivi non esistono regole *ad hoc* come il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni: occorre, in generale, maggiorare la serie "resto"

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$$

con una serie della quale sia calcolabile la somma[p], e ricordiamo che le serie (a termini positivi) di cui conosciamo la somma sono la serie geometrica e le serie telescopiche. Nel nostro caso, visto che il termine generale non contiene potenze che possano ricondurlo ad una serie geometrica, occorrerà maggiorarlo con una espressione che "porti" ad una serie telescopica: osservato che $n + \sin n < 2n - 1$ e che $n^4 > n^4 - 2n^3 + n^2$ possiamo scrivere che

$$a_n = \frac{n + \sin n}{n^4} < \frac{2n - 1}{n^4 - 2n + n^2} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2},$$

dunque

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n < \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Della serie che compare a secondo membro noi sappiamo calcolare la somma (cfr. Esercizio 6.10):

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(N-1)^2} - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots = \frac{1}{(N-1)^2};$$

dunque[q]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{n^4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n + \sin n}{n^4} \leq \frac{1}{(N-1)^2}.$$

Imponendo che $\frac{1}{(N-1)^2} < 10^{-3}$, ossia $N > 1 + \sqrt{1000} \simeq 32.62$, avremo che la maggiorazione è quella cercata, il primo valore di N che soddisfa tale relazione è $N = 33$, e pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{n^4} - \sum_{n=1}^{33} \frac{n + \sin n}{n^4} \leq \frac{1}{1024},$$

[p] Vi è anche un'altra possibilità, che si basa sul concetto di integrale, che in queste pagine non affrontiamo.

[q] Notare, in contrasto con il caso precedente, l'assenza del valore assoluto: approssimando una serie a termini positivi con una delle sue somme parziali l'errore commesso è per forza di cose per difetto.

e come al punto precedente possiamo approssimare la somma della serie con la somma parziale, sicuri che l'errore commesso sarà inferiore a un millesimo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sin n}{n^4} \simeq \sum_{n=1}^{32} \frac{n+\sin n}{n^4} \simeq 2.09739,$$

ricordando quanto osservato nella nota più sopra

$$2.09739 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sin n}{n^4} \leq 2.09739 + \frac{1}{1024} \simeq 2.09837.$$

③ La serie è a segni qualsiasi; non possiamo agire direttamente su di essa, ma (una volta osservato ch'essa converge assolutamente) sulla serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - \sqrt{n}}{3^n + n};$$

infatti, se la serie degli a_n è a segno qualsiasi, vale la seguente maggiorazione (il modulo della somma è minore della somma dei moduli):

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{N} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \right| < \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|.$$

Procedendo come nel precedente punto ②, questa volta ci appoggiamo su una serie geometrica:

$$\frac{2^n - \sqrt{n}}{3^n + n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

dunque

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n) \frac{2^n - \sqrt{n}}{3^n + n} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2^n - \sqrt{n}}{3^n + n} < \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{N+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{N+3} + \dots \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

Possiamo pertanto maggiorare il valore assoluto della differenza tra la somma della serie e la somma parziale come segue:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n} - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n}\right| \\
&= \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n}\right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n} < \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

Imponendo che

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} < 10^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad N > 1 + \frac{\ln 3000}{\ln \frac{3}{2}} \simeq 20.75$$

si trova che

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n} - \sum_{n=1}^{21} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n}\right| < \frac{1}{1000}.$$

Poiché con un computer si calcola

$$\sum_{n=1}^{21} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n} \simeq 0.41912,$$

non possiamo stabilire se l'errore è per eccesso o per difetto, dunque

$$0.41812 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin n)\frac{2^n-\sqrt{n}}{3^n+n} \le 0.42012.$$

6.2 Esercizi proposti

21 Determinare e verificare, con la definizione metrica di limite, i limiti delle seguenti successioni

① $a_n = \dfrac{1}{\operatorname{Ch} n}$; ② $b_n = \dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}$; ③ $c_n = n^2 - 2n\cos n$.

$$\left[① \; a_n \to 0, n \ge 1 + \left\lfloor \ln \tfrac{2}{\varepsilon} \right\rfloor; ② \; b_n \to \left(\tfrac{3}{2}\right)^+, n \ge 1 + \left\lfloor \tfrac{1+\sqrt{1+12\varepsilon+8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right\rfloor\right]$$

$$\left[③ \; c_n \to +\infty, n \ge 1 + \left\lfloor 1 + \sqrt{1+K} \right\rfloor\right]$$

22 Calcolare il limite delle seguenti successioni:

① $a_n = \dfrac{e^{2n+1} + e^n - \cos n}{(\operatorname{Ch} n)^2}$; ② $b_n = \dfrac{n \sin n^2}{n^2 + \sin n}$; ③ $c_n = \dfrac{n^2 \sin(n\pi)}{n + \sin n}$;

④ $d_n = \dfrac{\binom{2n}{4}}{\binom{n^2+n}{2}}$; ⑤ $e_n = \left[\sin \dfrac{n\pi}{3}\right]^n$; ⑥ $f_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

[① $a_n \to 4e$; ② $b_n \to 0$; ③ $c_n \to 0$; ④ $d_n \to \frac{4}{3}$; ⑤ $e_n \to 0$; ⑥ $f_n \to +\infty$]

23 Calcolare il limite delle seguenti successioni:

① $a_n = \left(\dfrac{n^3 + 3n - 5}{n^3 + 1}\right)^{2n}$; ② $b_n = \left(\dfrac{n^3 + 3n - 5}{n^3 + 1}\right)^{n^2}$;

③ $c_n = \left(1 - \sin \dfrac{\pi}{n}\right)^n$; ④ $d_n = n - \sqrt{n^2 + \sqrt{n}}$;

⑤ $e_n = n - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}}$; ⑥ $f_n = n(n^2 - \sqrt{n^4 - 10n + 1})$.

[① $a_n \to 0$; ② $b_n \to e^3$; ③ $c_n \to e^{-\pi}$; ④ $d_n \to 0$; ⑤ $e_n \to -\infty$; ⑥ $f_n \to 5$]

24 Disporre le seguenti successioni, infinitesime per $n \to +\infty$, in ordine crescente di infinitesimo:

$a_n = \ln(1+n) \sin \dfrac{1}{n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$, $c_n = \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)^2$,

$d_n = \ln(1 + e^{-n})$, $e_n = \dfrac{\ln(1+e^n)}{n^2 \ln n}$, $f_n = e^{-\ln(\pi + \sqrt{n})}$,

$g_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $h_n = \sqrt{\dfrac{n^3+3}{n^3+1}} - 1$.

$\left[a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}, b_n \sim \frac{1}{2\ln n}, c_n \sim \frac{1}{n^2}, d_n \sim e^{-n}\right]$

$\left[e_n \sim \frac{1}{n \ln n}, f_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, g_n \sim \frac{1}{n}, h_n \sim \frac{1}{n^3}\right]$

[quindi: $b_n, f_n, g_n, e_n, a_n, c_n, h_n, d_n$]

25 Disporre le seguenti successioni, infinite per $n \to +\infty$, in ordine crescente di infinito:

$a_n = \operatorname{Sh}(\ln(n^2+1))$, $b_n = \ln(n^e e^n)$, $c_n = n^2 e^{-\ln(\ln n)}$, $d_n = \sqrt[2n]{n!}$,

$e_n = \dfrac{1}{1 - \cos \frac{1}{n^2}}$, $f_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n^3}\right)$, $g_n = \dfrac{\ln(\operatorname{Ch} n)}{\ln n^3}$.

$\left[a_n \sim \frac{n^2}{2}, b_n \sim n, c_n \sim \frac{n^2}{\ln n}, d_n \sim \sqrt{\frac{n}{e}}, e_n \sim 2n^4, f_n \sim n^3, g_n \sim \frac{n}{3\ln n}\right]$

[quindi: $d_n, g_n, b_n, c_n, a_n, f_n, e_n$]

26 Determinare la classe limite delle seguenti successioni irregolari:

① $\{a_n\} = \{0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;

② $b_n = \lfloor \cos n \rfloor$; ③ $c_n = 2^{(-1)^n \frac{n}{n+1}}$; ④ $d_n = \operatorname{mant}(n\pi)$.

[① $\Lambda = \mathbb{N}$; ② $\Lambda = \{-1, 0\}$; ③ $\{\frac{1}{2}, 2\}$; ④ $\Lambda = [0, 1]$]

27 Stabilire se le seguenti serie convergono o meno:

① $\sum_n \frac{2 + \ln^3 n}{n^2 - 2}$; ② $\sum_n \frac{3}{n + \ln n}$; ③ $\sum_n \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n + 2}$;

④ $\sum_n \frac{\sqrt{n} + \cos n}{n^2 - n + 1}$; ⑤ $\sum_n \frac{n + \ln^3 n}{\sqrt[3]{n^5}}$; ⑥ $\sum_n \frac{n + \ln^3 n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

[① Sì; ② No; ③ No; ④ Sì; ⑤ No; ⑥ Sì]

28 Stabilire se le seguenti serie convergono o meno:

① $\sum_n \frac{3 + \sin n}{\sqrt{n} + 2^n}$; ② $\sum_n \frac{e^n}{2^n + 3^n}$; ③ $\sum_n \frac{n + e^{-n}}{n^2}$;

④ $\sum_n \frac{n e^{-n}}{n^2 + 1}$; ⑤ $\sum_n \frac{e^n}{\operatorname{Sh} n}$; ⑥ $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

[① Sì; ② Sì; ③ No; ④ Sì; ⑤ No; ⑥ Sì]

29 Stabilire se le seguenti serie convergono o meno:

① $\sum_n (-1)^n \frac{\operatorname{Sh} n}{e^n}$; ② $\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2 + \sin n}$; ③ $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^3 - n + 1}$.

[① No; ② Semplicemente, non assolutamente]
[③ Assolutamente, quindi anche semplicemente]

30 Sia a_n la successione così formata:

$$a_n = \begin{cases} \operatorname{Sh} n & n \text{ pari} \\ \operatorname{Ch} n & n \text{ dispari} \end{cases},$$

la serie $\sum (-1)^n \frac{1}{a_n}$ converge?

[Assolutamente, e quindi semplicemente]

31 Calcolare la somma delle serie seguenti:

① $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$; ② $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$; ③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \cos^2 n \rfloor$.

[① $\frac{1}{3}$; ② $\frac{1}{2}$; ③ 1]

32 Stabilire per quali valori dei parametri a, b, c, d, x le serie indicate convergono:

$$① \sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^a ; \quad ② \sum_n \left(\frac{2b}{b-1}\right)^n ; \quad ③ \sum_n \frac{c^n}{n} ;$$

$$④ \sum_n \frac{d^n}{n^2} ; \qquad ⑤ \sum_n \frac{x^n}{n!} .$$

$$\left[① \, a > 2; ② \, -1 < b < \tfrac{1}{3}; ③ \, -1 \leq c < 1; ④ \, -1 \leq d \leq 1; ⑤ \, \forall x\right]$$

6.2.1 Suggerimenti

Per l'esercizio 31:

② Scrivere la serie come serie telescopica.

③ $n\pi$ è irrazionale per ogni intero $n \geq 1$.

Per l'esercizio 32, ② : Serie geometrica ...

CAPITOLO 7

Calcolo differenziale e applicazioni

7.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

ESERCIZIO 7.1 **Definizione di derivata**

Calcolare, usando la definizione, la derivata prima e seconda di $f(x) = \ln x$.

Soluzione

Data la generica funzione $f(x)$, la derivata di f nel punto x_0 (se esiste) è data dal limite, al tendere a zero dell'incremento h, del *rapporto incrementale*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

se questo limite non esiste finito, allora la funzione non è derivabile nel punto x_0. La funzione che, preso ogni x del campo di esistenza T_f di f ove f è derivabile, fa corrispondere ad x il valore della derivata di f in x si chiama *funzione derivata* (più brevemente *derivata*) di f e si indica generalmente in uno dei seguenti modi[a]:

$$f'(x), \quad Df(x), \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x};$$

per quanto detto, ovviamente $T_{f'} \subseteq T_f$. Si chiama *derivata seconda* di f la derivata della sua derivata, in simboli

$$f''(x) = (f'(x))', \quad D^2 f(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2};$$

(è ovviamente possibile procedere, con la derivata terza, quarta e così via...).
Veniamo all'esercizio: nel generico punto x_0 abbiamo

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \dots$$

[a] In corrispondenza di ciascuno di essi, il valore della derivata nel punto x_0 si indica con

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \text{ o } \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

ricordiamo che per $\square \to 0$ si ha $\ln(1+\square) \sim \square$, e quindi

$$\ldots = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x_0}}{h} = \frac{1}{x_0};$$

passando dal punto x_0 al generico punto x, possiamo scrivere

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Osserviamo che $T_f = (0, +\infty)$, e così pure $T_{f'}$; sebbene (in generale) la funzione $\frac{1}{x}$ sia definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nel momento in cui essa costituisce la derivata di $\ln x$, perde significato[b] in $x < 0$.

Calcoliamo ora la derivata seconda di $\ln(x)$, ovvero la derivata (prima) di $\frac{1}{x}$ (se $x > 0$): nel generico punto x_0, abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x_0(x_0+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2},$$

pertanto

$$f''(x) = \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}.$$

ESERCIZIO 7.2 **Derivata destra e derivata sinistra**
Non esistenza della derivata

Calcolare (nel caso esistano) la derivata destra e la derivata sinistra nel punto $x_0 = 0$ di

① $f(x) = |x|$; ② $g(x) = \operatorname{mant} x$; ③ $k(x) = x|x|$.

Soluzione

Poiché il calcolo della derivata di una funzione in un punto x_0 comporta un limite per $h \to 0$, l'esistenza della derivata è legata a quella del limite che la definisce. Un limite può non esistere per due ragioni:

- esistono sia il limite destro sia il limite sinistro, ma sono diversi tra loro,
- almeno uno dei due limiti non esiste.

[b] In effetti poiché $\frac{1}{x}$ è la derivata (per $x < 0$) di $\ln(-x)$, è possibile unire le due derivate in un'unica formula, e dire che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\ln|x|$.

In tutti i casi la funzione non è derivabile nel punto x_0. Se esistono sia il limite destro sia il limite sinistro, parleremo in questo caso di *derivata destra* e *derivata sinistra*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

se esiste uno solo dei due, allora esisterà solo la derivata corrispondente.

① Partiamo dalla derivata destra, osservando che se $h > 0$ allora $|h| = h$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1,$$

continuiamo con la derivata sinistra, osservando che se $h < 0$ allora $|h| = -h$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1;$$

pertanto le derivate destra e sinistra di f in $x = 0$ esistono entrambe, e $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

② Osserviamo che, per valori di x vicini a 0 (precisamente: per $-1 \le x < 1$) abbiamo

$$\operatorname{mant} x = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & -1 \le x < 0 \end{cases};$$

quindi la funzione g è continua da destra, ma non da sinistra, in $x = 0$, pertanto non ha senso parlare di derivata sinistra; per quanto riguarda la derivata destra:

$$g'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{mant}(0+h) - \operatorname{mant}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1.$$

③ La funzione k è continua su tutto $\mathbb{R}$, possiamo anche scriverla così:

$$k(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases};$$

pertanto, le derivate destra e sinistra in zero valgono

$$k'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0,$$

$$k'_-(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2}{h} = 0,$$

e, poiché sono uguali, la funzione è derivabile in 0.

Osservazione importante: *Derivate delle funzioni elementari*
Da ora in avanti, diamo per scontato di conoscere le derivate delle seguenti funzioni:

f:	K (costante)	x^α	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
f':	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$\cos x$	$-\sin x$

f:	$\tan x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Th} x$
f':	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$

Si tratta di una lista da mandare a memoria, come è accaduto alla scuola elementare con le tabelline.

ESERCIZIO 7.3 **Regole di derivazione**

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, specificando gli insiemi di definizione di ciascuna.

① $f(x)=x^3+\cos x$; ② $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; ③ $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\cos x}$;
④ $f(x)=e^{\sin 4x}$; ⑤ $f(x)=\operatorname{Sh}\left(\dfrac{1}{(x^4-1)^2}\right)$; ⑥ $f(x)=\arctan(x^2-x\ln x)$;
⑦ $f(x)=e^{x^2\cos x}\sin(x^3)$; ⑧ $f(x)=x^x$.

Soluzione

Accanto alle derivate delle funzioni elementari, elencate prima, vi sono le regole che permettono di calcolare derivate di funzioni costruite "a partire" da altre, più semplici:

- la derivata della somma/differenza è la somma/differenza delle derivate:
$$[f\pm g]'=f'\pm g';$$
- la derivata del prodotto *non è* il prodotto delle derivate, ma la somma di due prodotti: la derivata del primo fattore per il secondo, più la derivata del secondo fattore per il primo:
$$[f\,g]'=f'\,g+f\,g';$$
- la derivata del quoziente è un nuovo quoziente, al denominatore figura il quadrato del denominatore, al numeratore la differenza tra il prodotto della derivata del numeratore per il denominatore ed il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore:
$$\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'\,g-f\,g'}{g^2};$$

- la derivata di una funzione composta $g(f(x))$ è data dal prodotto della derivata della funzione più esterna, valutata in corrispondenza della funzione più interna, per la derivata della funzione più interna:

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))\,f'(x).$$

Queste regole in genere si combinano tra loro, ad esempio: se la funzione da derivare è il prodotto di tre diverse funzioni, allora

$$[f\,g\,h]' = f'\,(g\,h) + f\,(g\,h)' = f'\,g\,h + f\,(g'\,h + g\,h') = f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'.$$

① La funzione è una somma, la derivata è immediata:

$$f'(x) = 3x^2 - \sin x,$$

notiamo che $T_f = T_{f'} = \mathbb{R}$.

② La funzione è un prodotto; poiché

$$[\sqrt{\square}]' = \frac{1}{2\sqrt{\square}}, \qquad [\ln \square]' = \frac{1}{\square},$$

abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}},$$

e notiamo che $T_f = T_{f'} = (0, +\infty)$.

③ La funzione appare sotto forma di quoziente; poiché

$$[\arcsin \square]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \square^2}}, \qquad [\cos \square]' = -\sin \square,$$

abbiamo

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(\cos x) - (\arcsin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2},$$

e $T_f = [-1, 1]$, mentre $T_{f'} = (-1, 1)$.

④ La funzione è composta da tre funzioni; poiché:

$$[e^{\square}]' = e^{\square}, \qquad [\sin \square]' = \cos \square, \qquad [4\square]' = 4,$$

allora

$$f'(x) = e^{\sin 4x}\,[\sin 4x]' = e^{\sin 4x}\,(\cos 4x)\,4,$$

entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

⑤ Le derivate che ci occorrono sono

$$[\mathrm{Sh}\,\square]' = \mathrm{Ch}\,\square, \qquad \left[\frac{1}{\square^2}\right]' = -\frac{2}{\square^3}, \qquad [\square^4]' = 4\square^3,$$

pertanto, (derivata di funzione composta):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{Ch}\,\frac{1}{(x^4-1)^2}\right)\left[\frac{1}{(x^4-1)^2}\right]' \\ &= \left(\mathrm{Ch}\,\frac{1}{(x^4-1)^2}\right)\left(-\frac{2}{(x^4-1)^3}\right)4x^3 \\ &= -\left(\frac{2x}{x^4-1}\right)^3 \mathrm{Ch}\,\frac{1}{(x^4-1)^2}, \end{aligned}$$

e $T_f = T_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

⑥ Partiamo dalle derivate delle funzioni elementari che compaiono nell'espressione di f:

$$[\arctan\square]' = \frac{1}{1+\square^2}, \qquad [\ln\square]' = \frac{1}{\square}, \qquad [\square^2]' = 2\square;$$

allora la derivata dell'argomento dell'arcotangente è

$$[x^2 - x\ln x]' = 2x - \left(1\ \ln x + x\,\frac{1}{x}\right) = 2x - 1 - \ln x,$$

e quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x^2-x\ln x)^2}\,[x^2 - x\ln x]' \\ &= \frac{1}{1+(x^2-x\ln x)^2}\,(2x-1-\ln x), \end{aligned}$$

inoltre $T_f = T_{f'} = (0, +\infty)$.

⑦ Le derivate che ci occorrono sono

$$[e^{\square}]' = e^{\square}, \quad [\cos\square]' = -\sin\square, \quad [\sin\square]' = \cos\square, \quad [\square^n]' = n\square^{n-1},$$

allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= [e^{x^2\cos x}]'\sin(x^3) + e^{x^2\cos x}[\sin(x^3)]' = \\ &= \left(e^{x^2\cos x}[x^2\cos x]'\right)\sin(x^3) + e^{x^2\cos x}\left(\cos(x^3)\,3x^2\right) \\ &= \left(e^{x^2\cos x}(2x\cos x + x^2(-\sin x))\right)\sin(x^3) + e^{x^2\cos x}\left(\cos(x^3)\,3x^2\right) \\ &= e^{x^2\cos x}\Big[\left(2x\cos x - x^2\sin x\right)\sin(x^3) + 3x^2\cos(x^3)\Big], \end{aligned}$$

entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

⑧ La funzione x^x, scritta così come appare, è inattaccabile, conviene sfruttare le proprietà dei logaritmi e riscriverla come $x^x = e^{x \ln x}$, sappiamo che

$$[e^{\square}]' = e^{\square}, \qquad [\ln \square]' = \frac{1}{\square};$$

allora

$$f'(x) = e^{x \ln x}[x \ln x]' = e^{x \ln x}\left(1 \ \ln x + x \ \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x),$$

e notiamo che $T_f = T_{f'} = (0, +\infty)$.

ESERCIZIO 7.4 **Eccezioni alle regole di derivazione**

Calcolare la derivata prima di $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$; questa funzione è derivabile in $x = 0$?

Soluzione

Cominciamo con il notare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; per calcolarne la derivata usiamo le regole di derivazione: la funzione f è il prodotto di due funzioni, per le quali sappiamo che

$$[\sqrt[3]{\square}]' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\square^2}}, \qquad [\sin \square]' = \cos \square;$$

notiamo fin d'ora che $\sqrt[3]{x}$ è derivabile solo se $x \neq 0$, in tal caso avremo

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x.$$

In realtà le regole di derivazione sono gli enunciati di altrettanti teoremi ("*Se* le funzioni f e g sono derivabili, *allora* anche il loro prodotto lo è, inoltre $(fg)' = f'g + fg'$."), in cui la condizione enunciata è *solo sufficiente*. Questo significa che in base ai calcoli che abbiamo fatto non siamo in grado di decidere se la funzione f è derivabile in $x = 0$, semplicemente perché la formula della derivata del prodotto *non si applica* in $x = 0$; per decidere se la funzione è derivabile anche in $x = 0$ ricorriamo alla definizione, dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} \sin h}{h} \overset{\sin h \sim h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{h\sqrt[3]{h}}{h} = 0,$$

e pertanto $f'(0) = 0$. Notiamo[c] che a questo risultato saremmo giunti anche calcolando

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x = 0.$$

[c] Vale infatti il teorema: sia $f(x)$ continua in $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e derivabile in I, salvo al più il punto x_0. Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$$

allora esiste $f'(x_0)$ e $f'(x_0) = L$.

ESERCIZIO 7.5 **Derivate e funzioni definite a tratti**

Determinare il valore da attribuire a α e a β affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x & x \geq 1 \\ x^2 + \beta & x < 1 \end{cases}$$

sia derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione del testo è definita a tratti; osserviamo che, poiché essa è composta da funzioni continue e derivabili, essa è con certezza continua e derivabile in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$; occorre e basta, allora, imporre che sia continua e derivabile in $x = 1$. In $x = 1$ la funzione è continua da destra, occorre allora imporre

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1), \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^-} x^2 + \beta = e + \alpha,$$

cioè $\beta + 1 = e + \alpha$; per quanto riguarda la derivata, l'espressione di f' è[d]

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \alpha & x > 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases},$$

inoltre, poiché $f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$ e $f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x)$, abbiamo

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} e^x + \alpha = e + \alpha, \qquad f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2;$$

perché f sia derivabile in $x = 1$, dev'essere $f'_-(1) = f'_+(1)$, cioè $2 = e + \alpha$; riunendo le condizioni trovate abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \beta + 1 = e + \alpha \\ 2 = e + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - e \\ \beta = 1 \end{cases},$$

e pertanto f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 2 - e$ e $\beta = 1$; in tal caso

$$f(x) = \begin{cases} e^x + (2 - e)x & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 7.6 **Significato geometrico della derivata prima**

Data $f(x) = \ln(2 + \sin x)$, determinare la retta tangente alla funzione $y = f(x)$ nel punto $(\pi, f(\pi))$.

[d] Notiamo che, anche se nella definizione "a tratti" di una funzione $f(x)$ compaiono dei segni $\leq$ o $\geq$, per quanto riguarda la corrispondente definizione "a tratti" di $f'(x)$ questi segni devono essere sostituiti da $<$ e $>$.

Soluzione

Se la funzione f è derivabile nel punto x_0, la retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nel nostro caso, la funzione f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x};$$

abbiamo allora $f(\pi) = \ln 2$ e $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$, pertanto l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{1}{2}(x - \pi) + \ln 2.$$

ESERCIZIO 7.7 **Punti di non derivabilità**
Cuspidi, punti angolosi e flessi a tangente verticale

Descrivere (ove possibile) il comportamento del grafico delle funzioni elencate, in corrispondenza dei punti ove non sono derivabili;

① $f(x) = 3x + |x - 1|$; ② $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$;

③ $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$; ④ $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

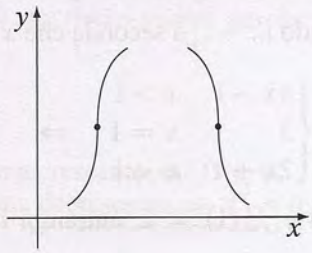
Soluzione

Se la funzione f è derivabile in $x = x_0$, allora esiste la retta tangente il grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. Se f non è derivabile, significa che non esiste finito il limite del rapporto incrementale; abbiamo già visto (Esercizio 7.2) che, per poter parlare di derivata, è perlomeno necessario che la funzione f sia continua in x_0, d'ora in avanti assumiamo questa ipotesi. In questo caso, se il limite non esiste finito, si verifica una delle situazioni seguenti:

- il limite esiste ed è infinito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty;$$

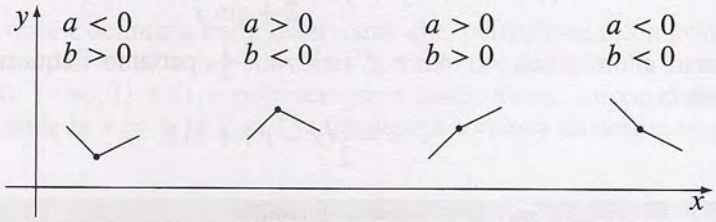
  in questa situazione, il grafico di f presenta un *flesso a tangente verticale*, discendente nel primo caso, ascendente nel secondo;



- il limite non esiste, perché i limiti sinistro e destro esistono, ma sono diversi tra loro, abbiamo diverse situazioni possibili:
  - entrambi i limiti sono finiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = b,$$

in questo caso il grafico di f presenta un *punto angoloso*;



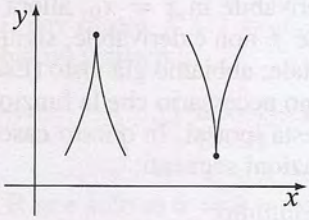
  - entrambi i limiti sono infiniti, di segno opposto:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty;$$

oppure

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty;$$

in questo caso il grafico di f presenta una *cuspide*, con la punta verso l'alto nel primo caso, verso il basso nel secondo;



  - uno dei due limiti è finito, l'altro è infinito, in questo caso il grafico di f presenta una semicuspide;

- almeno uno dei due limiti non esiste.

Analizziamo allora cosa accade alle funzioni dell'esercizio.

① Abbiamo, riscrivendo $|x-1|$ a seconda che x sia maggiore, uguale o minore di 1:

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1 & x>1 \\ 3 & x=1 \\ 2x+1 & x<1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x>1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$$

poiché $f'_+(1) = 4$ e $f'_-(1) = 2$, entrambi i limiti sono finiti, abbiamo un punto angoloso.

② La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}},$$

non è definita in $x = 1$, ma poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty,$$

possiamo concludere che in $x = 1$ la funzione presenta un flesso (ascendente) a tangente verticale.

③ La derivata è

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}},$$

non è definita in $x = 1$, poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

possiamo concludere che in $x = 1$ la funzione presenta una cuspide, con la punta verso il basso.

④ Notiamo che f è continua in $x = 0$, per tutti gli $x \neq 0$ la derivata è

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

e poiché non esistono né il limite sinistro né il limite destro, non possiamo dire niente di più sul comportamento del grafico.

ESERCIZIO 7.8 **Massimi e minimi relativi e assoluti**

Per ciascuna delle funzioni elencate, determinare i punti di massimo e i punti di minimo relativo;

① $f(x) = xe^{-x^2}$; ② $f(x) = e^{-\sqrt[3]{x^2}}$;

③ $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$; ④ $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

specificando se si tratta anche di massimi o minimi assoluti.

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che

$$f \text{ monotona crescente} \Leftrightarrow f' \geq 0,$$
$$f \text{ monotona decrescente} \Leftrightarrow f' \leq 0.$$

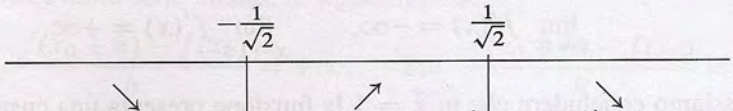
Pertanto, se f è continua nel punto x_0 e f' cambia di segno tra $x < x_0$ e $x > x_0$, allora in x_0 vi sarà un punto di massimo o minimo, a seconda del segno di f', se

inoltre f' è definita in x_0 allora per il Teorema di Fermat[e] $f'(x_0) = 0$. Se f non è continua in x_0, conviene studiare caso per caso la situazione.

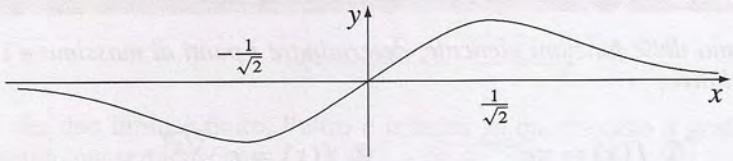
① f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ è anch'essa definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Il segno della derivata prima è

$$\begin{cases} f' > 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ f' = 0 & x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ f' < 0 & x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

cui corrisponde il seguente schema:



possiamo allora concludere che f ha un minimo relativo in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed un massimo relativo in $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Prima di chiederci se i massimi o minimi relativi sono anche assoluti, osserviamo che f è dispari, pertanto il comportamento di f in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sarà speculare rispetto all'origine. In $(0, +\infty)$ la funzione f è positiva, mentre in $(-\infty, 0)$ la funzione è negativa, pertanto il punto di ascissa $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è massimo assoluto, e il punto di ascissa $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ è minimo assoluto.



② f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, per quanto riguarda f':

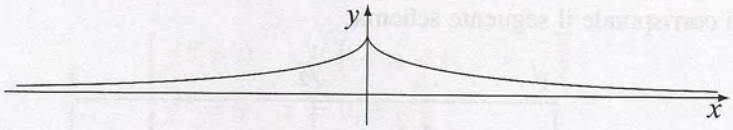
$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}e^{-\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f' > 0 & x < 0 \\ f' < 0 & x > 0 \\ \nexists f'(x) & x = 0 \end{cases}$$

[e] **Teorema di Fermat**: Se la funzione f ha massimo (o minimo) in $x = x_0$ e f' è definita in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

cui corrisponde il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline \nearrow & | & \searrow \\ f' > 0 & \nexists f' & f' < 0 \end{array}$$

Poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}$, concludiamo immediatamente che in $x = 0$ la funzione presenta una cuspide con la punta verso l'alto, inoltre vi è l'unico massimo relativo (ed assoluto).



③ La funzione f è definita per $x \neq -1$, inoltre

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty;$$

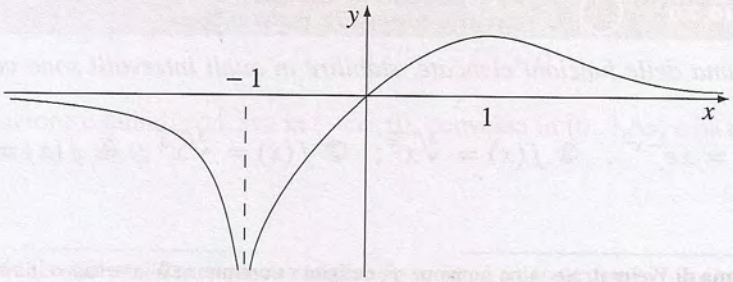
la derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f' > 0 & -1 < x < 1 \\ f' = 0 & x = 1 \\ f' < 0 & x < -1, x > 1 \\ \nexists f'(x) & x = -1 \end{cases},$$

cui corrisponde il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ \hline \searrow & | & \nearrow & | & \searrow \\ f' < 0 & \nexists f' & f' > 0 & f' = 0 & f' < 0 \end{array}$$

poiché $f > 0$ se $x < 1$ e $f < 0$ se $x > 1$, concludiamo che f ha un massimo (relativo ed assoluto) in $x = 1$, mentre non ha minimi relativi (né assoluti).



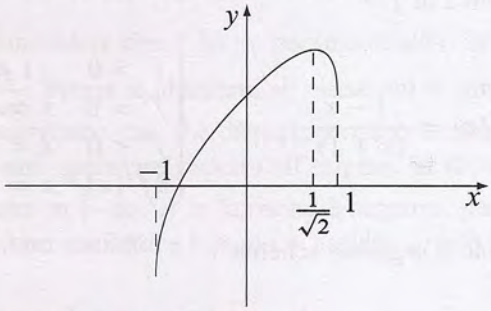
④ La funzione f è definita e continua in $[-1, 1]$, un intervallo chiuso e limitato, pertanto a f si può applicare il teorema di Weierstrass[f]. In un caso come questo è necessario studiare il comportamento di f anche agli estremi dell'intervallo su cui è definita. Calcoliamo e studiamo f':

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} f' > 0 & -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f' = 0 & x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f' < 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \\ \nexists f'(x) & x = -1, x = 1 \end{cases}$$

cui corrisponde il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & 1 \\ \hline \nexists f' & \nearrow f' > 0 & f' = 0 & \searrow f' < 0 & \nexists f' \end{array}$$

Pertanto: in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si trova l'unico massimo relativo (e quindi assoluto), nei due estremi dell'intervallo $x = 1$ e $x = -1$ vi sono due minimi relativi, poiché $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, in $x = -1$ si trova il minimo assoluto.



Osservazione importante: *Massimi e minimi*
Non tutti i punti ove $f' = 0$ sono punti di massimo o minimo: infatti, presa $f(x) = x^3$, abbiamo $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$ ma poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ la funzione è crescente in tutto $\mathbb{R}$, in $x = 0$ si trova un *flesso a tangente orizzontale*.

ESERCIZIO 7.9 **Segno della derivata seconda**
Concavità e convessità: punti di flesso

Per ciascuna delle funzioni elencate, stabilire in quali intervalli sono concave o convesse;

① $f(x) = xe^{-x^2}$; ② $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$; ③ $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$; ④ $f(x) = e^{-|x|}$.

[f] **Teorema di Weierstrass**: Una funzione f, definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, ammette senz'altro massimo e minimo assoluto.

Soluzione

Dalla teoria, sappiamo che[g], se la derivata seconda $f''(x)$ esiste in tutto un intervallo I, allora

$$\begin{aligned} f \text{ è convessa in } I &\Leftrightarrow f'' > 0, \\ f \text{ è concava in } I &\Leftrightarrow f'' < 0. \end{aligned}$$

I punti ove f è continua e f'' cambia segno sono detti *punti di flesso*.

① Poiché $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$, studiandone il segno si trova

$$\begin{cases} f'' > 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0, x > \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f' = 0 & x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ f' < 0 & x < -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

cui corrisponde il seguente schema:

	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$\frown$ $f'' < 0$	$f'' = 0$	$\smile$ $f'' > 0$	$f'' = 0$	$\frown$ $f'' < 0$	$f'' = 0$	$\smile$ $f'' > 0$

f è quindi convessa in $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ e in $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$; è concava in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e in $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; ha tre punti di flesso in $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

② Abbiamo

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' > 0 & x > 0 \\ f' < 0 & x < 0 \\ \nexists f''(x) & x = 0 \end{cases}$$

cui corrisponde il seguente schema:

	0	
$\frown$ $f'' < 0$	$\nexists f''$	$\smile$ $f'' > 0$

La funzione è quindi concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, +\infty)$ e ha un punto di flesso in $x = 0$.

[g] Un modo alternativo di descrivere concavità e convessità: f è convessa se "rivolge la concavità verso l'alto", è concava se "rivolge la concavità verso il basso".

③ Si trova

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{9\sqrt{x^2}} & x \neq 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' > 0 & x < 0, x > 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases},$$

immediatamente concludiamo che f è convessa su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Se raduniamo in uno schema le derivate prima e seconda, troviamo

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline \smile & | & \smile \\ f'' > 0 & \nexists f'' & f'' > 0 \\ \searrow & | & \nearrow \\ f' < 0 & f' = 0 & f' > 0 \end{array}$$

e la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

④ Calcolando separatamente $f''(x)$ per $x > 0$ e $x < 0$, troviamo

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \\ \nexists f'' & x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' > 0 & x < 0, x > 0 \\ \nexists f'' & x = 0 \end{cases},$$

possiamo concludere immediatamente che f è convessa su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Studiamo l'andamento della derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \\ \nexists f' & x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f' > 0 & x < 0 \\ f' < 0 & x > 0 \\ \nexists f' & x = 0 \end{cases}$$

e raduniamo in uno schema le derivate prima e seconda, troviamo

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline \smile & | & \smile \\ f'' > 0 & \nexists f'' & f'' > 0 \\ \nearrow & | & \searrow \\ f' > 0 & \nexists f' & f' < 0 \end{array}$$

e la funzione non è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione importante: *Flessi*
Non tutti i punti ove $f'' = 0$ sono punti di flesso: infatti, presa $f(x) = x^4$, abbiamo $f''(x) = 12x^2$ e $f''(0) = 0$ ma poiché $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ la funzione è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Analogamente non tutti i punti di flesso richiedono che $f'' = 0$, confronta qui sopra, l'Esercizio 7.9, ②.

ESERCIZIO 7.10 **Derivata della funzione inversa**

Sia $f(x) = e^{2x} + x^3$; poniamo $g(x) = f^{-1}(x)$, osservato che $f(1) = 1 + e^2$, calcolare $g'(1+e^2)$ e $g''(1+e^2)$. Disegnare un grafico qualitativo della funzione g in un intorno del punto $(1 + e^2, 1)$.

Soluzione

Sappiamo che, se $y = f(x)$ e $x = g(y)$, cioè se la funzione g è l'inversa della funzione f (in simboli $g = f^{-1}$), ed $y_0 = f(x_0)$ allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(y)\right|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Il valore della derivata prima è immediato, poiché $f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2$ e $f'(1) = 2e^2 + 3$, allora:

$$g'(1 + e^2) = \frac{1}{2e^2 + 3}.$$

Per quanto riguarda la derivata seconda, cominciamo con l'osservare che, se $F(x)$ è una generica funzione, allora dalla derivata del quoziente segue che

$$\left[\frac{1}{F(x)}\right]' = -\frac{F'(x)}{(F(x))^2};$$

trattiamo $f'(g(y))$ come una qualsiasi funzione (composta), e otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}g(y) = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f'(g(y))]}{\left(f'(g(y))\right)^2} = -\frac{f''(g(y))\, g'(y)}{\left(f'(g(y))\right)^2}.$$

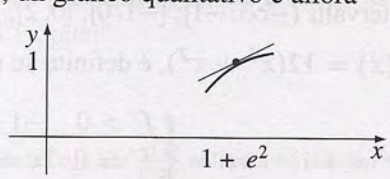
Nel nostro caso otteniamo allora (osservato che $f''(x) = 4e^{2x} + 6x$ e $f''(1) = 4e^2 + 6$)

$$g''(1 + e^2) = -\frac{f''(g(1 + e^2))\, g'(1 + e^2)}{\left(f'(g(1 + e^2))\right)^2} = -\frac{(4e^2 + 6)(2e^2 + 3)}{(2e^2 + 3)^2} = -2.$$

Concludendo, in corrispondenza del punto $x = 1 + e^2$ abbiamo

$$g(1 + e^2) = 1, \qquad g'(1 + e^2) = \frac{1}{2e^2 + 3} > 0, \qquad g''(1 + e^2) = -2 < 0;$$

pertanto la funzione, in un intorno del punto $(1 + e^2, 1)$, è crescente, e rivolge la concavità verso il basso, un grafico qualitativo è allora



7.1.1 Applicazioni delle derivate

ESERCIZIO 7.11 **Segno della derivata prima**
Funzioni crescenti e decrescenti: punti critici

Per ciascuna delle funzioni seguenti, elencare gli intervalli ove sono invertibili;

$$① \ f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2\,; \quad ② \ f(x) = 3x^4 + 4x^3\,.$$

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ strettamente monotona crescente,}$$

$$f' < 0 \Rightarrow f \text{ strettamente monotona decrescente.}$$

Abbiamo visto (Esercizio 5.4) che una funzione strettamente monotona è sicuramente invertibile, possiamo "raffinare" questo risultato, osservando che se $f' > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ e $f'(x_0) = 0$, anche in questo caso la funzione f risulta strettamente monotona, e quindi invertibile. Ad esempio, prendiamo $f(x) = x^3$: la sua derivata prima ($f'(x) = 3x^2$) è positiva per ogni x diverso da zero, la funzione è strettamente monotona e pertanto invertibile in tutto $\mathbb{R}$.

Per determinare gli intervalli ove f è invertibile, è sufficiente studiare la derivata prima di f, e stabilire la natura dei punti ove $f' = 0$, tali punti sono detti *punti critici*.

① Abbiamo che $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 8x$, osserviamo che f e f' sono definite su tutto $\mathbb{R}$, osserviamo anche che, raccogliendo $4x$,

$$f'(x) = 4x(x^2 - x - 2) \Rightarrow \begin{cases} f' > 0 & -1 < x < 0, x > 2 \\ f' = 0 & x = 0, -1, 2 \\ f' < 0 & x < -1, 0 < x < 2 \end{cases},$$

pertanto vale il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & -1 & & 0 & & 2 & & \\ \hline \searrow & & | & \nearrow & | & \searrow & | & \nearrow & \\ f' < 0 & f' = 0 & & f' > 0 & f' = 0 & f' < 0 & & f' = 0 & f' > 0 \end{array}$$

Possiamo allora concludere che f è invertibile (in quanto monotona) in ciascuno dei quattro intervalli $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 2]$, $[2, +\infty)$.

② La derivata vale $f'(x) = 12(x^3 + x^2)$, è definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 12x^2(x + 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f' > 0 & -1 < x < 0, x > 0 \\ f' = 0 & x = 0, -1 \\ f' < 0 & x < -1 \end{cases},$$

lo schema è il seguente

	-1		0	
$f' < 0$	$f' = 0$	$f' > 0$	$f' = 0$	$f' > 0$

la funzione f risulta pertanto invertibile in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$.

ESERCIZIO 7.12 Derivata e differenziale

Data la funzione $f(x) = x^3 - 4\ln x$, scrivere il differenziale primo $\mathrm{d}f$ in $x = 1$ e in $x = 2$; valutare poi il comportamento asintotico di $f(x) - f(2)$ per $x \to 2$.

Soluzione

Data la funzione f, derivabile in x_0, si chiama *differenziale primo*, o più semplicemente *differenziale*, di f in x_0 la quantità $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Inoltre, il differenziale di f in x_0 rappresenta, se diverso da zero, il coefficiente di $(x - x_0)$ nello sviluppo asintotico di f:

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0) = \mathrm{d}f\big|_{x=x_0} + o(\mathrm{d}x) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x).$$

Poiché $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{x}$, abbiamo $f'(1) = -1$ e $f'(2) = 10$, pertanto:

$$\mathrm{d}f\big|_{x=1} = -\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}f\big|_{x=2} = 10\,\mathrm{d}x;$$

inoltre

$$f(x) - f(2) \sim 10(x-2), \quad \text{oppure} \quad f(2 + \mathrm{d}x) - f(2) = \mathrm{d}f\big|_{x=2} + o(\mathrm{d}x).$$

ESERCIZIO 7.13 Teorema di de l'Hôpital

Calcolare i seguenti limiti

① $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$; ② $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sh} x - \sin x}{x^3}$;

③ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x)$; ④ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sin x}{x+2}$.

Soluzione

Di fronte a un limite che presenta la forma d'indecisone $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, è possibile usare il teorema di de l'Hôpital[h].

[h] **Teorema di de l'Hôpital**: Dato $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nella forma d'indecisione $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, se f e g sono derivabili, con $g(x) \neq 0$, ed esiste il limite $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, allora $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

① Osserviamo che (detti f il numeratore e g il denominatore), $g \to +\infty$, mentre $f \to 0$ se $\alpha < 0$, $f \equiv 1$ se $\alpha = 0$ e $f \to \infty$ se $\alpha > 0$, nei primi due casi non è necessario alcun calcolo, perché il limite si presenta nella forma $[\frac{0}{\infty}] \to 0$, se invece $\alpha > 0$, per la continuità dell'elevamento a potenza, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/\alpha}}\right)^\alpha;$$

il limite tra parentesi tonde è della forma $[\frac{\infty}{\infty}]$, applichiamo il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha}e^{x/\alpha}} = 0,$$

pertanto anche il limite del testo è 0.

② Il limite è della forma $[\frac{0}{0}]$; applicando il teorema di de l'Hôpital, ci imbattiamo ancora nella stessa forma di indecisione, nessuno ci vieta di riapplicare il teorema più volte, in cascata:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Sh} x - \sin x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Ch} x - \cos x}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Sh} x + \sin x}{6x}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{Ch} x + \cos x}{6} = \frac{1}{3},$$

pertanto il limite proposto vale anch'esso $\frac{1}{3}$.

③ Il limite è della forma $[\infty \cdot 0]$, può però essere riscritto in modo da presentarsi in una delle due forme ammesse:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}};$$

usiamo ora il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2,$$

pertanto il limite proposto vale 2.

④ Non è detto che fare ricorso al teorema di de l'Hôpital sia la strategia migliore: è sufficiente raccogliere x a numeratore e denominatore per vedere che il limite vale 3; applicando il teorema di de l'Hôpital si trova invece:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sin x}{x + 2} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \cos x}{1},$$

e il limite cui siamo giunti non esiste. Ricordiamo che il teorema di de l'Hôpital è una condizione solo sufficiente: *se* il limite del rapporto delle derivate esiste, *allora* esso è uguale al limite di partenza, se il limite del rapporto delle derivate non esiste, nulla si può dire riguardo al limite di partenza.

ESERCIZIO 7.14 Formula di Taylor e di MacLaurin

Scrivere la formula di Taylor arrestata al IV ordine della funzione $f(x) = \ln x$, centrata in $x = 1$, con il resto secondo Peano e secondo Lagrange; utilizzare la formula scritta per calcolare $\ln(\frac{13}{10})$, quale precisione è possibile garantire?

Soluzione

Data la funzione $f(x)$, la formula di Taylor centrata in x_0, di ordine n è

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

ove il resto R_n può essere scritto "secondo Peano" o "secondo Lagrange", rispettivamente

$$R_n = o\big((x - x_0)^n\big), \qquad R_n = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ove ξ è un punto opportuno tra x_0 e x.
Nel nostro caso $f(x) = \ln x$ e

$$f'(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{x^2}, \qquad f^{(3)}(x) = \tfrac{2}{x^3},$$
$$f^{(4)}(x) = -\tfrac{6}{x^4}, \qquad f^{(5)}(x) = \tfrac{24}{x^5};$$

pertanto

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f^{(3)}(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6,$$

e la formula cercata è, con il resto secondo Peano:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!} + o\big((x-1)^4\big)$$

mentre, con il resto secondo Lagrange (ξ è compreso tra 1 e x)

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{24}{\xi^5}\frac{(x-1)^5}{5!}.$$

Se poniamo $x = \frac{13}{10} = 1.3$, allora $x - 1 = 0.3$, semplificando numeratori e denominatori troviamo ($1 \le \xi \le 1.3$)

$$\ln(1.3) = (0.3) - \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^3}{3} - \frac{(0.3)^4}{4} + \frac{(0.3)^5}{5\xi^5}.$$

L'errore che commettiamo arrestando la nostra somma al IV ordine è allora (ricordando che $1 \le \xi \le 1.3$)

$$\frac{(0.3)^5}{5\xi^5} < \frac{(0.3)^5}{5} = 0.000486;$$

possiamo pertanto affermare che, con un errore inferiore a 0.000486,

$$\ln(1.3) = (0.3) - \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^3}{3} - \frac{(0.3)^4}{4} = 0.261975;$$

(osserviamo che il valore con sei cifre decimali è 0.262364, e l'errore commesso, in valore assoluto, è minore di 0.00039).

Osservazione importante: *Gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari*
Accanto alle derivate delle funzioni elementari, è bene tenere a mente anche i loro sviluppi di MacLaurin:

- $f(x) = e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

- $f(x) = \operatorname{Ch} x$ — (i termini pari dello sviluppo di e^x):

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

- $f(x) = \operatorname{Sh} x$ — (i termini dispari dello sviluppo di e^x):

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

- $f(x) = \cos x$ — (come $\operatorname{Ch} x$, ma a segni alterni):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

- $f(x) = \sin x$ — (come $\operatorname{Sh} x$, ma a segni alterni):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ — (i primi termini della serie geometrica):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + o(x^n);$$

- $f(x) = \ln(1+x)$ — (senza i fattoriali, a segni alterni):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

- $f(x) = \arctan x$ — (senza i fattoriali, termini dispari a segni alterni):

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1});$$

ESERCIZIO 7.15 **Sviluppi "composti"**

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin delle seguenti funzioni, arrestato all'ordine indicato a fianco, con il resto secondo Peano:

① $f(x) = \ln(1 - x^2)$, VII ordine; ② $f(x) = \dfrac{2x}{3 - x}$, V ordine;

③ $f(x) = e^{\sin x}$, VI ordine;

scrivere lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni, centrato nel punto x_0 indicato ed arrestato all'ordine indicato a fianco, con il resto secondo Peano:

④ $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$, $x_0 = 1$, IV ordine; ⑤ $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, VI ordine.

Soluzione

Per l'unicità della formula di Taylor, se noi otteniamo (sulla base di operazioni lecite) un polinomio che ha le caratteristiche del polinomio di Taylor della funzione studiata, questo polinomio *è* il polinomio di Taylor cercato.

① Sappiamo che

$$\ln(1 + \square) = \square - \frac{\square^2}{2} + \frac{\square^3}{3} - \frac{\square^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\square^n}{n} + o(\square^n);$$

allora $\ln(1 - x^2) = \ln(1 + \square)$ con $\square = -x^2$, e pertanto, ricordando che dobbiamo arrestarci al VII ordine, osserviamo che $(-x^2)^4 = x^8 = o(x^7)$ e allora

$$\begin{aligned}\ln(1 - x^2) &= -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \frac{(-x^2)^4}{4} + o\big((-x^2)^4\big)\\ &= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + 0 \cdot x^7 + o(x^7).\end{aligned}$$

② Osserviamo che

$$\frac{2x}{3 - x} = \frac{2x}{3} \frac{1}{1 - (\frac{x}{3})},$$

ricordando che $\frac{1}{1-\square} = 1 + \square + \square^2 + \square^3 + \ldots$, possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{2x}{3} \left\{1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \left(\frac{x}{3}\right)^5 + o(x^5)\right\},$$

e tralasciando l'ultimo termine, che non è richiesto:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{27}x^3 + \frac{2}{81}x^4 + \frac{2}{243}x^5 + o(x^5)$$

③ Sono noti gli sviluppi dell'esponenziale e del seno:

$$e^{\square} = 1 + \square + \frac{\square^2}{2!} + \frac{\square^3}{3!} + \frac{\square^4}{4!} + \frac{\square^5}{5!} + \frac{\square^6}{6!} + o(\square^6),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0 \cdot x^6 + o(x^6)$$

poniamo $\square = \sin x$, osservando che

$$\sin x \sim x \quad \Rightarrow o(\sin^6 x) = o(x^6),$$

e mettendo in evidenza con l'o-piccolo che intendiamo arrestarci al VI ordine:

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} + \frac{(\sin x)^5}{5!} + \frac{(\sin x)^6}{6!} + o(x^6).$$

Ora, sviluppiamo le potenze di $\sin x$ come normali polinomi, "inglobando" in $o(x^6)$ tutte le potenze maggiori di 6:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6);$$

nel quadrato di $\sin x$, contano il quadrato di x, il quadrato di x^3, il doppio prodotto di x con x^3 e il doppio prodotto di x con x^5, il resto finisce nell'o-piccolo:

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x^3}{3!}\right)^2 - 2x\frac{x^3}{3!} + 2x\frac{x^5}{5!} + o(x^6);$$

nel cubo di $\sin x$, contano il cubo di x e il triplo prodotto del quadrato di x con x^3, il resto finisce nell'o-piccolo:

$$(\sin x)^3 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^3 = x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!} + o(x^6);$$

nella quarta potenza di $\sin x$, contano la quarta potenza di x e il quadruplo prodotto del cubo di x con x^3, il resto finisce nell'o-piccolo:

$$(\sin x)^4 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 = x^4 - 4x^3\frac{x^3}{3!} + o(x^6);$$

nella quinta e nella sesta potenza di $\sin x$, contano unicamente la quinta e la sesta potenza di x:

$$(\sin x)^5 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 = x^5 + o(x^6),$$

$$(\sin x)^6 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 = x^6 + o(x^6).$$

Riassumendo, abbiamo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \qquad (\sin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$$

$$(\sin x)^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6) \qquad (\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)$$

$$(\sin x)^5 = x^5 + o(x^6) \qquad (\sin x)^6 = x^6 + o(x^6)$$

e pertanto

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5\right) + \frac{1}{4!}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^6\right) + \frac{1}{5!}\left(x^5\right) + \frac{1}{6!}\left(x^6\right) + o\left(x^6\right),$$

riordinando le potenze troviamo

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + o(x^6).$$

④ Osserviamo che

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = \frac{x}{1-(x-1)} = \frac{x-1+1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{1-(x-1)} + \frac{1}{1-(x-1)},$$

dagli sviluppi di MacLaurin, sappiamo che $\frac{1}{1-\square} = 1 + \square + \square^2 + \square^3 + \ldots$, e pertanto

$$\frac{\square}{1-\square} = \square\left(1 + \square + \square^2 + \square^3 + \ldots\right) = \square + \square^2 + \square^3 + \square^4 + \ldots;$$

sostituiamo allora $x-1$ a $\square$, e arrestadoci al IV ordine otteniamo (le parentesi quadre sono aggiunte unicamente per motivi di leggibilità):

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{x-1}{1-(x-1)}\right] + \left[\frac{1}{1-(x-1)}\right] \\ &= \left[1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right)\right] \\ &\quad + \left[(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right)\right] \\ &= 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3 + 2(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right). \end{aligned}$$

⑤ Dalla trigonometria sappiamo che $\cos\alpha = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, pertanto $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ poiché il nostro scopo è scrivere un polinomio composto da potenze di $(x - \frac{\pi}{2})$, utilizziamo lo sviluppo di MacLaurin della funzione seno, arrestato al VI ordine,

$$\sin\square = \square - \frac{\square^3}{3!} + \frac{\square^5}{5!} + o(\square^6)$$

e quindi, ponendo $\square = (x - \frac{\pi}{2})$,

$$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{3!} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^5}{5!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6\right).$$

ESERCIZIO 7.16 Sviluppi di MacLaurin e derivate

Dopo aver scritto lo sviluppo di MacLaurin all'ottavo ordine di $f(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, *determinare* $f^{(7)}(0)$ *e* $f^{(8)}(0)$.

Soluzione

Scrivendo lo sviluppo di MacLaurin di $e^{\square}$ con $\square = -x^2$, troviamo

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + o(x^8) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^8) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right),$$

ossia, riordinando le potenze e trascurando quelle con esponente maggiore di 8,

$$f(x) = 1 - 3x^2 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{7}{6}x^6 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8).$$

Dal polinomio di MacLaurin è possibile "leggere" i valori delle derivate di f valutate in $x = 0$, infatti il generico termine di grado n è formato da

$$\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!};$$

osserviamo allora che:

- poiché nel polinomio di $f(x)$ non compare x^7, possiamo immediatamente concludere che $f^{(7)}(0) = 0$;

- uguagliando il generico termine dell'ottavo grado di MacLaurin con il termine del polinomio che abbiamo trovato, otteniamo[i]

$$\frac{f^{(8)}(0)x^8}{8!} = \frac{3}{8}x^8 \quad \Rightarrow \quad f^{(8)}(0) = \frac{3}{8}8! = 3 \cdot 7!.$$

ESERCIZIO 7.17 — Sviluppi di MacLaurin e calcolo di limiti

Calcolare i seguenti limiti:

$$① \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{Sh} x}{x \ln(1-3x^2)}; \qquad ② \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x \sin x - (\sin x)^2};$$

calcolare i seguenti limiti, al variare dei parametri α, β e γ:

$$③ \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{1+x} + \ln(1-x) - 2}{x^\alpha}; \qquad ④ \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-2x^2} - \sin x + \beta x^3}{x^\gamma \cos x^2}.$$

Soluzione

Tutti i limiti di questo esercizio sono della forma $[\frac{0}{0}]$, e per calcolarli è possibile servirsi (magari con molta cautela) del teorema di de l'Hôpital. Noi vogliamo invece sfruttare gli sviluppi di MacLaurin, ove vi sia necessità.

① Il denominatore non contiene somme, possiamo allora usare gli sviluppi asintotici e concludere che per $x \to 0$ abbiamo $x \ln(1-3x^2) \sim -3x^3$; nel numeratore compare una sottrazione, e poiché sia $\sin x \sim x$ sia $\operatorname{Sh} x \sim x$, l'uso degli sviluppi asintotici non ci porta a nulla, possiamo però usare gli sviluppi di MacLaurin (che sono un "arricchimento" degli sviluppi asintotici), poiché

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{e} \quad \operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

possiamo dire che

$$\sin x - \operatorname{Sh} x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = -2\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{Sh} x}{x \ln(1-3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{-3x^3} = \frac{1}{9}.$$

[i] Un lungo calcolo diretto porta a dire che

$$f^{(8)}(x) = -16e^{-x^2}(32x^{10} - 720x^8 + 5040x^6 - 12600x^4 + 9450x^2 - 945).$$

② Esaminiamo separatamente numeratore e denominatore, abbiamo

$$e^{\square} = 1 + \square + \frac{\square^2}{2} + o(\square^2) \Rightarrow e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\cos\square = 1 - \frac{\square^2}{2} + \frac{\square^4}{4!} + o(\square^4) \Rightarrow \cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{4!} + o(x^4),$$

quindi, semplificando:

$$e^{-2x^2} - \cos 2x = 2x^4 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4);$$

per il denominatore, arrestandoci al IV ordine troviamo

$$x\sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4),$$

e (vedi Esercizio 7.15, ③)

$$(\sin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4);$$

infine

$$x\sin x - (\sin x)^2 = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4);$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x\sin x - (\sin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = 8.$$

③ Consideriamo il numeratore, da $(1+\square)^\alpha = 1 + \alpha\square + \binom{\alpha}{2}\square^2 + o(\square^2)$ ricaviamo:

$$2\sqrt{1+x} = 2\left(1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2),$$

mentre da $\ln(1+\square) = \square - \frac{1}{2}\square^2 + o(\square^2)$ otteniamo

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$

allora, semplificando:

$$2\sqrt{1+x} + \ln(1-x) - 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -\frac{3}{4}x^2 + o(x^2).$$

Il nostro limite diventa quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{1+x} + \ln(1-x) - 2}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^\alpha},$$

e il risultato dipende da α:

- se $\alpha < 2$, l'infinitesimo al numeratore è di ordine maggiore, e il limite vale 0;
- se $\alpha = 2$, i due infinitesimi hanno lo stesso ordine, il limite vale quindi il rapporto dei coefficienti: $-\frac{3}{4}$;
- se $\alpha > 2$, l'infinitesimo al numeratore è di ordine minore, la frazione tende all'infinito, e poiché al numeratore troviamo un coefficiente negativo il limite è $-\infty$.

④ Dal precedente punto ② di questo esercizio sappiamo che $e^{-2x^2} = 1-2x^2+2x^4+o(x^4)$, pertanto, arrestandoci al V ordine, troviamo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \text{e} \quad xe^{-2x^2} = x - 2x^3 + 2x^5 + o(x^5);$$

sommando e raccogliendo i termini simili nel numeratore, troviamo

$$xe^{-2x^2} - \sin x + \beta x^3 = \left(\beta - \frac{11}{6}\right)x^3 + \left(2 - \frac{1}{5!}\right)x^5 + o(x^5);$$

mentre, poiché $\cos x \to 1$ se $x \to 0$, il denominatore $x^\gamma \cos x^2 \sim x^\gamma$, e il limite è diventato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\beta - \frac{11}{6}\right)x^3 + \frac{239}{120}x^5 + o(x^5)}{x^\gamma}.$$

Osserviamo che il numeratore è un infinitesimo del V ordine se $\beta = \frac{11}{6}$, mentre è un infinitesimo del III ordine se $\beta \neq \frac{11}{6}$; una volta stabilito il valore di β, il comportamento del limite dipende dall'ordine di infinito del denominatore, esattamente come nel punto precedente, e quindi abbiamo la seguente tabella:

$$\beta = \frac{11}{6} \Rightarrow \begin{cases} \gamma < 5 & \lim = 0 \\ \gamma = 5 & \lim = \frac{239}{120} \\ \gamma > 5 & \lim = +\infty \end{cases}$$

$$\beta \neq \frac{11}{6} \Rightarrow \begin{cases} \gamma < 3 & \lim = 0 \\ \gamma = 3 & \lim = \beta - \frac{11}{6} \\ \gamma > 3 & \begin{cases} \beta > \frac{11}{6} & \lim = +\infty \\ \beta < \frac{11}{6} & \lim = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

7.1.2 Studio del grafico di una funzione

ESERCIZIO 7.18 **Asintoti obliqui**

Stabilire quali delle seguenti funzioni ammettono asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e determinarli, nel caso esistano:

① $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + x}$; ② $f(x) = \dfrac{2x^2 + x\sqrt{x}}{x+3}$;

③ $f(x) = \left[\ln(1 + \sqrt{e^x - x})\right]^2$; ④ $f(x) = (x+1)\sqrt{1 + \dfrac{6}{x}}$.

Soluzione

Per verificare se la funzione f abbia un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, per prima cosa si calcola

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \left.\begin{array}{c} \nexists \\ \pm\infty \\ 0 \end{array}\right\} & \text{non c'è asintoto obliquo,} \\ m \neq 0 & \text{possibile asintoto obliquo;} \end{cases}$$

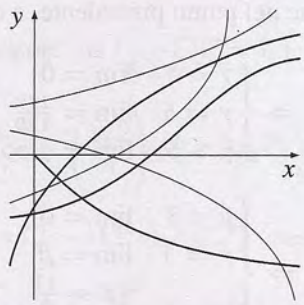
nel caso che il limite valga m (ossia: se è possibile la presenza di un asintoto obliquo), si calcola

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \begin{cases} \left.\begin{array}{c} \nexists \\ \pm\infty \end{array}\right\} & \text{non c'è asintoto obliquo,} \\ q & y = mx + q \text{ è l'asintoto obliquo.} \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \ (\neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} mx,$$

allora stabilire il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è utile per verificare la presenza di un asintoto obliquo. Inoltre, se $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$ si dice che la crescita di f è *sublineare*, mentre se $\lim \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ si dice che la crescita di f è *superlineare*. Il grafico di una funzione sublineare rivolge la concavità verso l'asse x, come ad esempio $y = \ln x$ o $y = \sqrt{x}$, il grafico di una funzione superlineare rivolge la concavità verso l'asse y, come ad esempio $y = e^x$ o $y = x^2$. Nella figura, le funzioni in tratto più marcato sono sublineari, quelle in tratto più sottile sono superineari (sempre per $x \to +\infty$).



① Poiché per $x \to +\infty$ abbiamo che $x + \sqrt{4x^2 + x} \sim 3x$, è possibile che vi sia un asintoto obliquo, calcoliamo allora $\lim(f(x) - 3x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (x + \sqrt{4x^2 + x} - 3x) &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) \\ &= \left[\text{moltiplicando per } \frac{\sqrt{4x^2 + x} + 2x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} \right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

e pertanto la retta $y = 3x + \frac{1}{4}$ è l'asintoto cercato.

② Per $x \to +\infty$ abbiamo che $f(x) \sim 2x$, è nuovamente possibile che vi sia un asintoto obliquo, calcoliamo allora $\lim(f(x) - 2x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2 + x\sqrt{x}}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 + x\sqrt{x} - 2x(x+3)}{x+3}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x} - 6x}{x+3} = +\infty,$$

e quindi non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

③ Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln(1+\sqrt{e^x - x})\right]^2}{x} = +\infty$$

(infatti $\left[\ln(1+\sqrt{e^x - x})\right]^2 \sim \frac{x^2}{4}$), non vi è asintoto obliquo.

④ Si vede immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{1+\frac{6}{x}}}{x} = 1,$$

è quindi possibile la presenza di un asintoto obliquo, abbiamo poi

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\sqrt{1+\frac{6}{x}} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}} - 1\right) + \sqrt{1+\frac{6}{x}}\right]$$
$$= \left[\text{poiché } [(1+\square)^\alpha - 1] \overset{\square\to 0}{\sim} \alpha\square\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\frac{3}{x} + \sqrt{1+\frac{6}{x}}\right] = 4,$$

e la retta $y = x + 4$ è l'asintoto cercato.

ESERCIZIO 7.19 **Studio asintotico e grafico probabile**

Sulla base del comportamento asintotico della funzione in corrispondenza dei punti ove è infinitesima o infinita, disegnare un grafico probabile per ciascuna delle seguenti funzioni:

① $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$; ② $f(x) = \sqrt{x^4 - x^6}$; ③ $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^2}$;

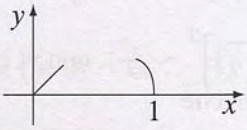
④ $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^5 - x^3}}{\sqrt{x+1}}$; ⑤ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; ⑥ $f(x) = x\ln x$.

Soluzione

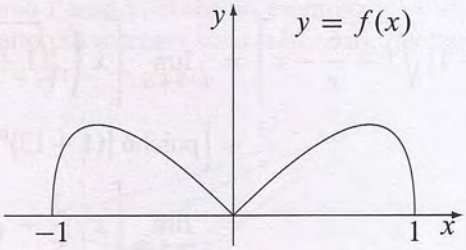
① Osserviamo prima di tutto che f è pari: il su grafico sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Per quanto riguarda il dominio di f, la positività del radicando ($x^2 - x^4 \geq 0$) implica $T_f = [-1, 1]$, inoltre f è continua su tutto T_f. Notiamo che f si annulla se $x = 0, \pm 1$; grazie alla simmetria della funzione pari, possiamo studiare il comportamento asintotico di f solo per le x positive, ossia solo per $x \to 1^-$ e $x \to 0^+$, abbiamo

$$f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} x, \qquad f(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} 2\sqrt{1-x},$$

concludiamo allora che in 1 la funzione si annulla con tangente verticale, mentre la funzione vicino all'origine si comporta come $y = x$.



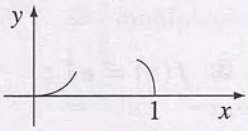
Ricorrendo alla simmetria, possiamo allora dire che in $x = \pm 1$ la funzione si annulla con tangente verticale, mentre in $x = 0$ f presenta un punto angoloso, in analogia con $|x|$. Compatibilmente con queste informazioni, il grafico di f sarà allora il seguente:



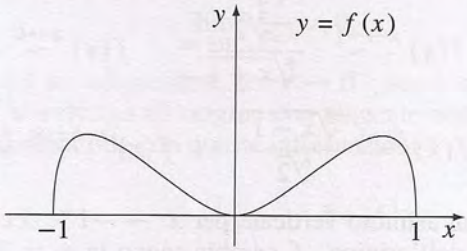
② Anche in questo caso f è pari. Raccogliendo x^4, si ha $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$. Come nel caso precedente, $T_f = [-1, 1]$, f è continua su tutto $[-1, 1]$ e sempre positiva, tranne in $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ ove si annulla. Il comportamento asintotico in $x = -1, 0, 1$ è

$$f(x) \overset{x\to -1}{\sim} 2\sqrt{1+x}, \qquad f(x) \overset{x\to 0}{\sim} x^2, \qquad f(x) \overset{x\to 1}{\sim} 2\sqrt{1-x},$$

come al punto ① , in $x = \pm 1$ la funzione si annulla con tangente verticale, mentre nell'origine il suo grafico ricalca quello di $y = x^2$:



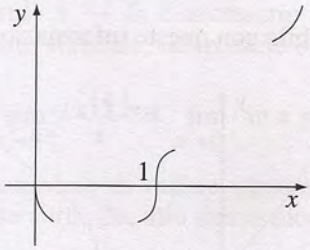
Compatibilmente con queste informazioni il grafico di f sarà allora



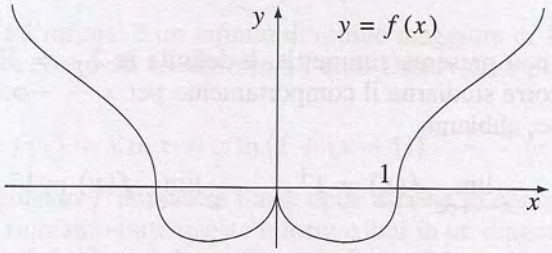
③ Osservato che f è pari, notiamo che $T_f = \mathbb{R}$. Nuovamente, limiteremo i nostri studi a $x \geq 0$. La funzione è positiva se $|x| > 1$, negativa se $0 < |x| < 1$ e si annulla in $x = 0, \pm 1$. Occorre allora studiare il comportamento asintotico di f per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$:

$$f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} -\sqrt[3]{x^2}, \qquad f(x) \overset{x\to 1}{\sim} \sqrt[3]{2(x-1)}, \qquad f(x) \overset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^4},$$

in $x = 0$ la funzione arriva "dal basso", con tangente verticale, in $x = 1$ la funzione cambia segno, presentando un flesso a tangente verticale, per $x \to +\infty$ la funzione tende a $+\infty$ più rapidamente di $y = x$, e quindi con la concavità rivolta verso l'alto, ossia



il grafico di f, compatibile con queste informazioni, è allora



④ La funzione non è né pari né dispari, occorre pertanto studiarne il comportamento su tutto $T_f = (-1, +\infty)$: f è continua su T_f e si annulla in $x = 0$ e $x = 1$, inoltre è negativa in $(0, 1)$ e positiva in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, infine f tende a $+\infty$ se $x \to -1^+$ e $x \to +\infty$. Dallo studio asintotico di f in $x = 0, \pm 1$ e per $x \to +\infty$, osservato che

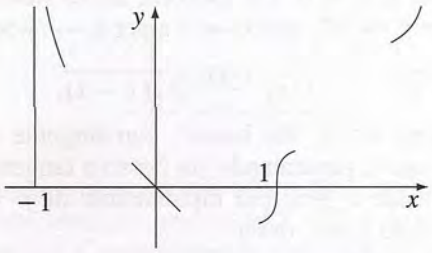
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5 - x^3}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{x+1}},$$

si ricava:

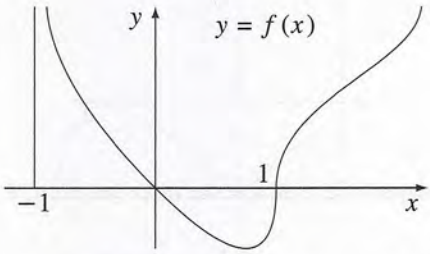
$$f(x) \overset{x\to -1^+}{\sim} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{x+1}}, \qquad f(x) \overset{x\to 0}{\sim} -x,$$

$$f(x) \overset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{2}}, \qquad f(x) \overset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt[6]{x^7};$$

pertanto: f ha un asintoto verticale per $x \to -1^+$, si comporta come $y = -x$ nell'intorno dell'origine, f cambia segno in $x = 1$, in corrispondenza di un flesso a tangente verticale, infine f tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, più rapidamente di $y = x$, e quindi con la concavità rivolta verso l'alto:



il grafico di f, compatibile con queste informazioni, è allora



⑤ La funzione non presenta simmetrie, è definita in $T_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sempre positiva. Occorre studiarne il comportamento per $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-,$$

pertanto la retta $y = 1$ è un asintoto orizzonale per $f(x)$; inoltre notiamo che per $x \to +\infty$ la funzione si avvicina a $y = 1$ da sopra, mentre per $x \to -\infty$ si avvicina da sotto. Vicino a $x = 0$ abbiamo

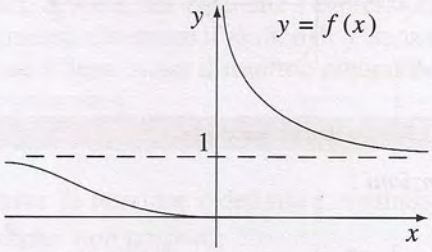
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+,$$

e quindi l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per f quando $x \to 0^+$, mentre per $x \to 0^-$ la funzione si dirige verso l'origine: poiché per ogni

valore di α abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha} = 0,$$

la funzione $f(x)$ è un infinitesimo, per $x \to 0^-$, superiore ad ogni potenza di x, e pertanto f si avvicina all'origine con tangente orizzontale; in definitiva il grafico di f compatibile con queste informazioni è



⑥ La funzione è definita e continua in $T_f = (0, +\infty)$, è positiva se $x > 1$ e negativa se $0 < x < 1$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;$$

dato che $f \to 0$ quando $x \to 0$, è necessario sapere se la funzione arriva nell'origine con tangente verticale, orizzontale o obliqua, e poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty,$$

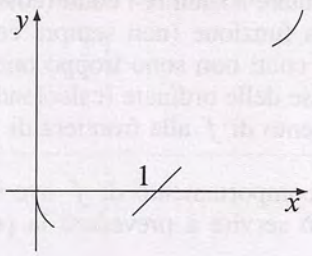
la funzione è un infinitesimo di ordine minore di 1, e quindi si avvicina all'origine con tangente verticale; allo stesso modo, poiché

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty,$$

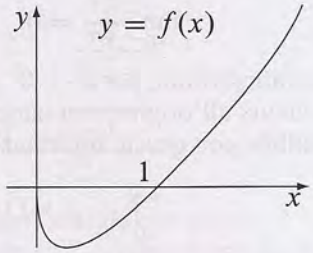
la funzione all'infinito è un infinito di ordine maggiore di 1, e pertanto tende a $+\infty$ con la concavità rivolta verso l'alto. Osserviamo poi che $f(1) = 0$ e per $x \to 1$

$$f(x) = x \ln x = x \ln\big(1 + (x-1)\big) \overset{x-1\to 0}{\sim} (x-1),$$

e pertanto, quando f attraversa l'asse delle ascisse, si comporta come la retta $y = x - 1$; riuniamo tutte queste informazioni in un diagramma:



Il grafico di f, compatibile con queste informazioni, è allora



ESERCIZIO 7.20 Studio di una funzione

Studiare le seguenti funzioni :

① $f(x) = x^3 e^{-x}$; ② $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$;

③ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - x$; ④ $f(x) = x^3 \ln|x|$;

(*per la funzione del punto ② , evitare lo studio della derivata seconda, disegnandone il grafico nell'ipotesi che i flessi siano il numero minimo compatibile con le informazioni ricavate*).

Soluzione

Con la locuzione "studiare una funzione", si intende abitualmente eseguire tutti i conti che possono essere necessari per disegnare con sufficiente precisione il grafico di una funzione, tenendo presente che alcuni aspetti di tale studio sono obbligatori, altri solamente consigliati, e che a volte è possibile ricavare la stessa informazione in diversi modi, pertanto può essere conveniente scegliere la strada più facile, oppure può essere conveniente usare questa diversità di modi per effettuare controlli incrociati sulle informazioni ricavate. Osserviamo anche che, in generale, il grafico di uno studio di funzione è più una "caricatura" che non una "fotografia" del reale grafico di f, fatta allo scopo di mettere in evidenza caratteristiche che, qualora — magari — il disegno fosse in scala, non potrebbero essere colte. Gli ingredienti tipici di uno studio di funzione sono:

- individuare il campo di esistenza T_f della funzione f oggetto dello studio (obbligatorio),
- verificare la presenza di eventuali simmetrie (funzione pari, dispari, periodica...), che possono aiutare a snellire i conti (cosigliato, ove possibile),
- stabilire il segno della funzione (non sempre con carta e penna è possibile: è opportuno solo se i conti non sono troppo onerosi), determinare, se esiste, l'intersezione con l'asse delle ordinate (calcolando $f(0)$),
- studio del comportamento di f alla frontiera di T_f (calcolo dei limiti, obbligatorio),
- studio asintotico del comportamento di f ove è infinitesima o infinita (non obbligatorio, può però servire a prevedere la presenza di massimi, minimi, flessi...),
- calcolo di f', confronto di $T_{f'}$ con T_f (obbligatorio),

- studio dei punti di non derivabilità (obbligatorio, se sono presenti),
- studio del segno e degli zeri di f', individuazione di eventuali massimi, minimi, o flessi a tangente orizzontale (obbligatorio),
- calcolo di f'', confronto di $T_{f''}$ con T_f e $T_{f'}$ (non sempre obbligatorio),
- individuazione dei punti di T_f ove f'' non è definita (obbligatorio, se sono presenti),
- studio del segno e degli zeri di f'', studio di concavità e convessità di f (non sempre obbligatorio, a volte, nel caso che l'espressione di f'' sia particolarmente ostica, è ammesso disegnare il grafico di f senza lo studio di f'', nell'ipotesi che concavità e flessi siano il minimo compatibile con le informazioni di cui siamo già in possesso).

① Sia $f(x) = x^3 e^{-x}$:

campo di esistenza: la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$;

eventuali simmetrie: non presenti;

segno di f: poiché f è il prodotto di e^{-x}, che è sempre positivo, per x^3, possiamo dire che

$$\begin{cases} f(x) > 0 & x > 0 \\ f(x) = 0 & x = 0 \\ f(x) < 0 & x < 0 \end{cases}$$

comportamento alla frontiera: occorre calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

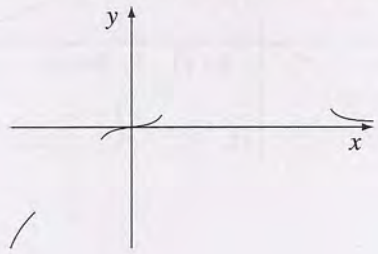
pertanto: per $x \to +\infty$ l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale (poiché $f > 0$, la funzione si accosterà all'asintoto "dal di sopra", sappiamo già quindi che per valori grandi di x la funzione avrà la concavità rivolta verso l'alto);

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

pertanto: per $x \to -\infty$ la funzione tende a $-\infty$, il fatto che f vada all'infinito "come un'esponenziale" implica che non può esistere asintoto obliquo, anzi f avrà la concavità rivolta verso il basso);

comportamento asintotico: del comportamento alla frontiera abbiamo già detto, osserviamo poi che f si annulla in $x = 0$, e che per $x \to 0$ abbiamo che $f(x) \sim x^3$, pertanto nell'origine dev'essere presente un flesso a tangente orizzontale.

Raduniamo le informazioni fin qui ottenute in un grafico:



Prima del calcolo delle derivate, poiché la funzione è derivabile quante volte si voglia su tutto $\mathbb{R}$, possiamo prevedere che

- in $x = 0$ è presente un flesso a tangente orizzontale (un punto ove $f' = 0$, senza che f' cambi segno a sinistra e a destra di $x = 0$);
- in $(0, +\infty)$ deve trovarsi un massimo (la funzione è crescente per x appena maggiore di zero, decrescente all'infinito, pertanto...);
- tra 0 e il massimo e tra il massimo e $+\infty$ devono trovarsi due punti di flesso (la funzione ha la concavità verso l'alto sia per x appena maggiore di zero sia all'infinito, però in corrispondenza del sopracitato massimo f ha la concavità rivolta verso il basso, si impongono allora due cambi di concavità).

Continuiamo allora lo studio di f:

derivata prima: abbiamo $f'(x) = (3 - x)x^2e^{-x}$, definita su tutto $\mathbb{R}$;

segno e zeri della derivata prima: poiché $e^{-x} > 0$ basta studiare $(3-x)x^2$, ottenendo

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & x < 0, 0 < x < 3 \\ f'(x) = 0 & x = 0, x = 3 \\ f'(x) < 0 & x > 3 \end{cases},$$

come previsto, in $x = 0$ troviamo il flesso a tangente orizzontale, abbiamo poi individuato l'unico massimo relativo di f in $x = 3$;

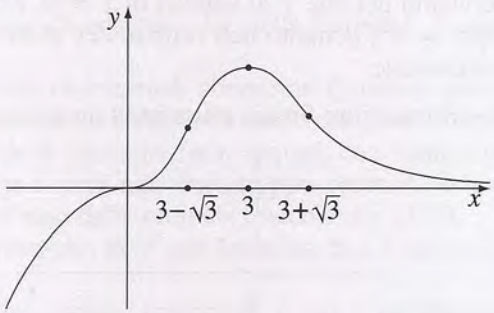
derivata seconda: abbiamo $f''(x) = (x^2-6x+6)xe^{-x}$, definita su tutto $\mathbb{R}$;

segno e zeri della derivata seconda: poiché $e^{-x} > 0$ basta studiare il segno di $x(x^2 - 6x + 6)$, ottenendo

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & 0 < x < 3 - \sqrt{3}, x > 3 + \sqrt{3} \\ f''(x) = 0 & x = 0, x = 3 \pm \sqrt{3} \\ f''(x) < 0 & x < 0, 3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3} \end{cases},$$

pertanto, abbiamo tre flessi in $x = 0$ e $x = 3 \pm \sqrt{3}$, f è convessa in $(0, 3-\sqrt{3})$ e in $(3 + \sqrt{3}, +\infty)$, f è concava in $(-\infty, 0)$ e in $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

Il grafico di f è allora



② Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$:

campo di esistenza: poiché $x^2 + x - 2 = 0$ implica $x = 1, -2$, la funzione è definita e continua su $T_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$, in T_f è anche indefinitamente derivabile;

eventuali simmetrie: non presenti;

segno di f: risolvendo la disequazione fratta $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} > 0$ otteniamo

$$\begin{cases} f(x) > 0 & x < -2, -1 < x < 1, x > 2 \\ f(x) = 0 & x = -1, x = 2 \\ f(x) < 0 & -2 < x < -1, 1 < x < 2 \end{cases},$$

inoltre $f(0) = 1$;

comportamento alla frontiera: occorre calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to -2^{\pm}$ e per $x \to 1^{\pm}$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

pertanto: per $x \to \pm\infty$ la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale;

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty,$$

pertanto la retta $x = -2$ è asintoto verticale: a sinistra di -2 la funzione tende a $+\infty$, a destra di -2 la funzione tende a $-\infty$;

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

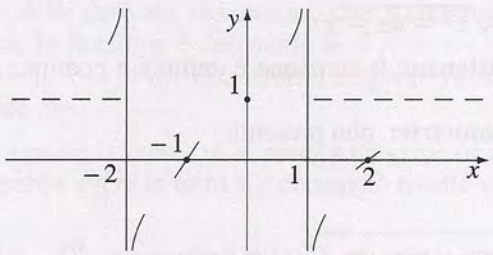
pertanto la retta $x = 1$ è asintoto verticale: come sopra, a sinistra di 1 la funzione tende a $+\infty$, a destra di 1 la funzione tende a $-\infty$;

comportamento asintotico: rimane da considerare il comportamento di f nei punti ove è infinitesima, ossia per $x \to -1$ e $x \to 2$, abbiamo

$$f(x) \overset{x \to -1}{\sim} \frac{3}{2}(x+1), \qquad f(x) \overset{x \to 2}{\sim} \frac{3}{4}(x-2),$$

e quindi f attraversa in entrambi i casi l'asse delle ascisse con tangente obliqua.

Raduniamo le informazioni fin qui ottenute in un grafico:



Prima del calcolo delle derivate, poiché la funzione è derivabile su T_f, ecco cosa possiamo prevedere:

- nulla impone a priori la presenza di massimi o minimi;
- vi è con sicurezza almeno un flesso, poiché tra -2 e 1 vi è un cambio di concavità.

Continuiamo allora lo studio di f:

derivata prima: abbiamo

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x-2)-(x^2-x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{2x^2+4}{(x^2+x-2)^2},$$

che è definita e continua su T_f;

segno e zeri della derivata prima: si vede che $f'(x) > 0$ per ogni x, pertanto f è crescente in ciascun intervallo che forma T_f;

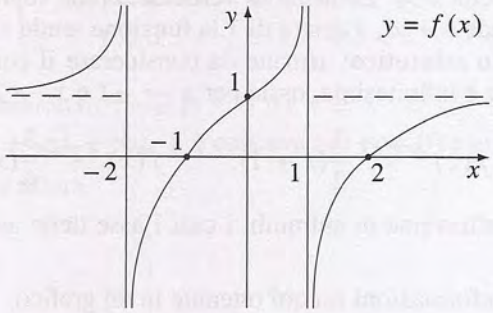
derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{4x^3+24x+8}{(x^2+x-2)^3},$$

definita e continua su T_f;

segno e zeri della derivata seconda: l'esercizio non imponeva di risolvere l'equazione di terzo grado al numeratore di $f''(x)$, pertanto nell'ipotesi che i flessi siano in numero minimo compatibile con le nostre assunzioni, dichiariamo la presenza di un flesso in $\bar{x} \in (-2, 1)$; la funzione avrà la concavità rivolta verso l'alto in $(-\infty, -2)$ e in $(\bar{x}, 1)$, avrà invece la concavità rivolta verso il basso in $(-2, \bar{x})$ e in $(1, +\infty)$[j].

Il grafico di f è allora



③ Sia $f(x) = \sqrt{x^2-4x} - x$:

campo di esistenza: la funzione è definita e continua su $T_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$;

eventuali simmetrie: non presenti;

[j] Con qualche conto, si trova che $f''(x) = 0$ solo se $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; in altrernativa possiamo osservare che il numeratore ha un solo zero, poiché strettamente crescente.

segno di f: risolvendo la disequazione irrazionale $\sqrt{x^2-4x}-x>0$, otteniamo

$$\begin{cases} f(x)>0 & x<0 \\ f(x)=0 & x=0 \\ f(x)<0 & x>4 \end{cases},$$

comportamento alla frontiera: occorre calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, e valutare $f(0)$ e $f(4)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

pertanto: per $x \to +\infty$ l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale (poiché $f<0$, la funzione si accosterà all'asintoto "dal di sotto", sappiamo già quindi che per valori grandi di x la funzione avrà la concavità rivolta verso il basso);

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$

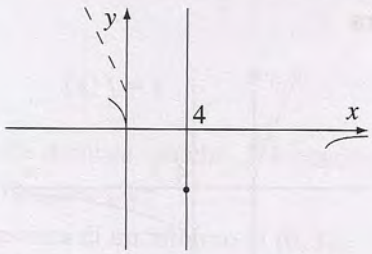
pertanto: per $x \to -\infty$ la funzione tende a $+\infty$, poiché per $x \to -\infty$ è $f(x) \sim -2x$, potrebbe essere presente un asintoto obliquo; infine $f(0)=0$, $f(4)=-4$;

comportamento asintotico: per quanto riguarda la presenza di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$, osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=-2, \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=2,$$

pertanto $y=-2x+2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$; inoltre f è infinitesima per $x \to 0^-$ e $f(x) \sim 2\sqrt{-x}$, e quindi f arriva nell'origine con tangente verticale.

Raduniamo le informazioni fin qui ottenute in un grafico:



Prima del calcolo delle derivate, osserviamo che, a causa della presenza della radice quadrata, la funzione è derivabile in $T_{f'}=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$, mentre in $x=0$ e in $x=4$ avremo punti a tangente verticale; è comunque possibile affermare che:

- nulla impone a priori la presenza di punti a tangente orizzontale;
- a priori f potrebbe avere in tutto T_f concavità rivolta verso il basso.

Continuiamo allora lo studio di f:

derivata prima: abbiamo

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = \frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}},$$

che è definita e continua su $T_{f'}$;

segno e zeri della derivata prima: risolvendo la disequazione irrazionale relativa al numeratore si vede che

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & x > 4 \\ f'(x) = 0 & \text{mai} \\ f'(x) < 0 & x < 0 \end{cases},$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 4^+} f'(x) = +\infty;$$

pertanto f è decrescente in $(-\infty, 0]$, in $x = 0$ abbiamo un punto a tangente verticale, mentre f è crescente in $[4, +\infty)$, e in $x = 4$ abbiamo ancora un punto a tangente verticale;

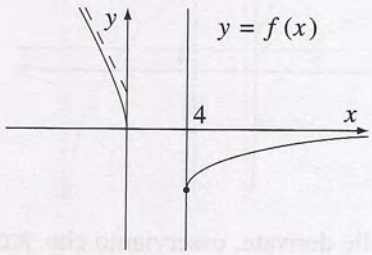
derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{4}{\sqrt{(x^2-4x)^3}},$$

definita e continua su $T_{f''} = T_{f'}$;

segno e zeri della derivata seconda: si vede immediatmente che $f''(x) < 0$ per ogni x, quindi su tutto T_f la funzione rivolge la concavità verso il basso.

Il grafico di f è allora



④ Sia $f(x) = x^3 \ln|x|$:

campo di esistenza: la funzione è definita e continua su $T_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ivi è anche derivabile infinite volte;

eventuali simmetrie: la funzione è dispari, quindi

studieremo la sua restrizione $\tilde{f}$ solo per $x > 0$;

segno di $\tilde{f}$: il segno di $x^3 \ln x$ è il segno di $\ln x$:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) > 0 & x > 1 \\ \tilde{f}(x) = 0 & x = 1 \\ \tilde{f}(x) < 0 & 0 < x < 1 \end{cases},$$

comportamento alla frontiera: occorre calcolare i limiti per $x \to +\infty$, e per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \tilde{f}(x) = +\infty,$$

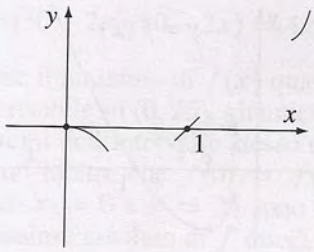
pertanto: per $x \to +\infty$ la funzione tende a $+\infty$, più rapidamente di x^3 e quindi possiamo escludere la presenza di un asintoto obliquo;

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = 0,$$

pertanto: per $x \to 0$ la funzione può essere prolungata con continuità ponendo $\tilde{f}(0) = 0$;

comportamento asintotico: in $x = 1$ abbiamo $\tilde{f}(x) \sim (x - 1)$, mentre per $x \to 0^+$ la funzione è infinitesima di ordine maggiore di 1, quindi $\tilde{f}$ arriva nell'origine con tangente orizzontale.

Raduniamo le informazioni fin qui ottenute in un grafico:



Prima del calcolo delle derivate, poiché $\tilde{f}$ è continua e derivabile in $T_{\tilde{f}} = (0, +\infty)$ possiamo affermare che:

- è necessaria la presenza di un minimo in $(0, 1)$;
- tra $x = 0$ e il minimo deve comparire un flesso, poiché per valori di x prossimi a 0 la funzione ha la concavità rivolta verso il basso.

Continuiamo allora lo studio di $\tilde{f}$:

derivata prima: abbiamo

$$\tilde{f}'(x) = x^2(1 + 3 \ln x),$$

che è definita e continua su $(0, +\infty)$;

segno e zeri della derivata prima: risolvendo la disequazione si vede che

$$\begin{cases} \tilde{f}'(x) > 0 & x > e^{-1/3} \\ \tilde{f}'(x) = 0 & x = e^{-1/3} \\ \tilde{f}'(x) < 0 & 0 < x < e^{-1/3} \end{cases},$$

quindi $\tilde{f}$ è decrescente in $(0, e^{-1/3})$, in $x = e^{-1/3}$ abbiamo il minimo, mentre $\tilde{f}$ è crescente in $(e^{-1/3}, +\infty)$;

derivata seconda: abbiamo

$$\tilde{f}''(x) = x(5 + 6\ln x),$$

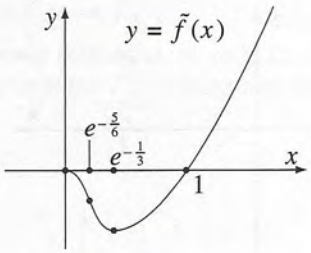
definita e continua su $(0, +\infty)$;

segno e zeri della derivata seconda: si vede immediatamente che

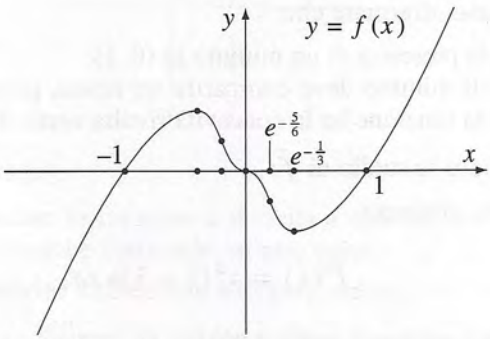
$$\begin{cases} \tilde{f}''(x) > 0 & x > e^{-5/6} \\ \tilde{f}''(x) = 0 & x = e^{-5/6} \\ \tilde{f}''(x) < 0 & 0 < x < e^{-5/6} \end{cases},$$

pertanto: $\tilde{f}$ rivolge la concavità verso il basso in $(0, e^{-5/6})$, in $x = e^{-5/6}$ si trova il punto di flesso, $\tilde{f}$ rivolge la concavità verso l'alto in $(e^{-5/6}, +\infty)$.

Il grafico di $\tilde{f}$ è allora



e quello di f, ottenuto per riflessione rispetto all'origine:



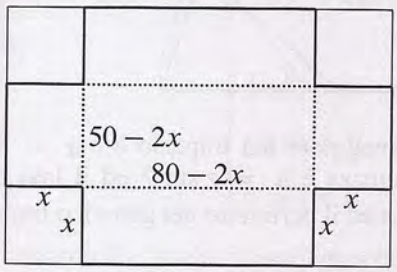
ESERCIZIO 7.21 **Applicazioni dello studio di funzione a problemi vari**

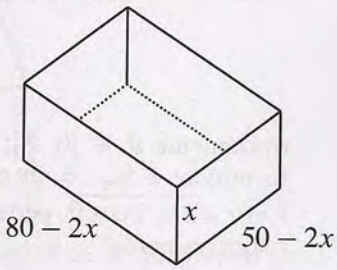
① *Con un foglio di cartoncino di* 80×50 cm *vogliamo costruire una scatola (senza coperchio), tagliando dagli angoli quattro quadrati. Qual è la massima capacità della scatola così ottenuta?*
② *Tra tutti i trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio* r*, determinare quello di area massima e quello di perimetro massimo.*

Soluzione

In generale, nel trattare i problemi di questo genere, occorre innanzitutto individuare una grandezza da usare come variabile x, ed esprimere poi la quantità che si intende massimizzare (o minimizzare) come funzione di x, al variare di x in un certo dominio D.

① Scegliamo come variabile x la lunghezza (in cm) dei tagli che faremo:





Il volume V della scatola sarà allora

$$V = f(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x(x^2 - 65x + 1000).$$

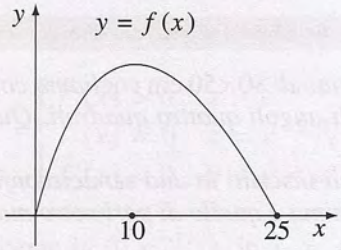
Il nostro scopo è trovare il massimo di $f(x)$ quando $x \in [0, 25]$. Poiché f è continua su $[0, 25]$ e derivabile su $(0, 25)$, gli unici punti di massimo e minimo possono essere gli estremi dell'intervallo stesso e gli (eventuali) punti in cui $f'(x) = 0$; osserviamo inoltre che $f(0) = f(25) = 0$ e che $f(x) > 0$ se $0 < x < 25$, quindi $x = 0$ e $x = 25$ sono i due minimi assoluti della funzione, mentre il massimo assoluto di f dovrà necessariamente trovarsi in $(0, 25)$, e la sua derivata sarà nulla. Il calcolo di f' implica

$$f'(x) = 4(3x^2 - 130x + 1000) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{100}{3} \end{cases}$$

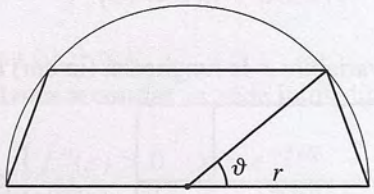
Solo $x = 10$ cade nell'intervallo $(0, 25)$, pertanto è il massimo cercato; a conferma di questo fatto, si può osservare che

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & 0 < x < 10 \\ f'(x) < 0 & 10 < x < 25 \end{cases}.$$

In corrispondenza di $x = 10$ abbiamo $f(10) = 18000$, quindi il massimo volume della scatola è $V_{\max} = 18000$ cm^3; un grafico qualitativo di f è il seguente:



② Prendiamo come variabile ϑ l'angolo tra la base ed il raggio spiccato verso il vertice superiore destro:



ovviamente $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; la base maggiore del trapezio è $b_M = 2r$, la base minore è $b_m = 2r\cos\vartheta$, l'altezza è $h = r\sin\vartheta$ ed il lato obliquo è $l = r\sqrt{2 - 2\cos\vartheta}$, pertanto l'area ed il perimetro del generico trapezio sono rispettivamente

$$A = \frac{(b_m + b_M)\cdot h}{2} = f(\vartheta) = r^2(1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta, \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$P = b_m + b_M + 2l = g(\vartheta) = 2r(1 + \cos\vartheta + \sqrt{2 - 2\cos\vartheta}), \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

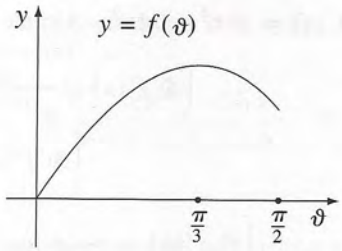
Cominciamo allora con il trovare i punti di massimo e minimo di f: f è continua su $[0, \frac{\pi}{2}]$ e derivabile in $(0, \frac{\pi}{2})$, inoltre $f'(\vartheta) = r^2(\cos\vartheta + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$, osserviamo che

$$\cos\vartheta + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 2\cos^2\vartheta + \cos\vartheta - 1,$$

pertanto (trattando quest'ultima formula come un polinomio di secondo grado in $\cos\vartheta$) troviamo che

$$\begin{cases} f'(\vartheta) > 0 & 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{3} \\ f'(\vartheta) = 0 & \vartheta = \dfrac{\pi}{3} \\ f'(\vartheta) < 0 & \dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases};$$

e possiamo concludere che l'area è massima se $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, un grafico qualitativo di f è



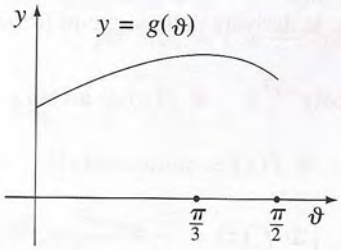
e l'area massima è $A_{\max} = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.
Passiamo allo studio del perimetro, cioè di $g(\vartheta)$: calcolando la derivata troviamo

$$g'(\vartheta) = -\sin\vartheta + \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2-2\cos\vartheta}} = \frac{1-\sqrt{2-2\cos\vartheta}}{\sqrt{2-2\cos\vartheta}}\sin\vartheta,$$

quindi

$$\begin{cases} g'(\vartheta) > 0 & 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{3} \\ g'(\vartheta) = 0 & \vartheta = \dfrac{\pi}{3} \\ g'(\vartheta) < 0 & \dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Concludiamo che anche il perimetro è massimo se $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, un grafico qualitativo di g è



il perimetro massimo è $P_{\max} = g(\frac{\pi}{3}) = 5r$.

7.2 Esercizi proposti

22 Calcolare, ove è definita, la derivata delle seguenti funzioni:

① $f(x) = 3x^5 + 8x^3 - 2x^2 + \pi$; ② $f(x) = \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$;

③ $f(x) = \dfrac{e}{x^2+1}$; ④ $f(x) = \sqrt{2+x^2}$; ⑤ $f(x) = \left[\dfrac{x^2-1}{x+3}\right]^4$;

⑥ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ⑦ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; ⑧ $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

$$\left[① \ f'(x) = 15x^4 + 24x^2 - 4x; \ ② \ f'(x) = -\tfrac{15}{x^6} - \tfrac{24}{x^4} + \tfrac{4}{x^3}\right]$$

$$\left[③ \ f'(x) = -\tfrac{2ex}{(x^2+1)^2}; \ ④ \ f'(x) = \tfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right]$$

$$\left[⑤ \ f'(x) = 4\left[\tfrac{x^2-1}{x+3}\right]^3 \tfrac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}\right]$$

$$\left[⑥ \ f'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}; \ ⑦ \ f'(x) = \tfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$\left[⑧ \ f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{x}}\right]$$

23 Calcolare, ove è definita, la derivata delle seguenti funzioni:

① $f(x) = \cos(3x) - 3\cos^3 x$; ② $f(x) = \mathrm{Ch}\,(\pi x^2)$; ③ $f(x) = \sin(\tan(x))$;

④ $f(x) = \pi^{\cos x^2}$; ⑤ $f(x) = \ln \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; ⑥ $f(x) = \tan x - \dfrac{1}{\cos x}$.

$$[① \ f'(x) = 3\sin(3x) + 9(\cos x)^2 \sin x; \ ② \ f'(x) = 2\pi x \mathrm{Sh}\,(\pi x^2)]$$

$$\left[③ \ f'(x) = \tfrac{\cos(\tan x))}{(\cos x)^2}; \ ④ \ f'(x) = -2x\sin(x^2)\pi^{\cos x^2}\ln\pi\right]$$

$$\left[⑤ \ f'(x) = -\tfrac{2}{\cos x}; \ ⑥ \ f'(x) = \tfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right]$$

24 Calcolare, ove è definita, la derivata delle seguenti funzioni:

$$① \ f(x) = \arccos(e^{-x^2}); \quad ② \ f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x};$$

$$③ \ f(x) = \sin(\arcsin(x)).$$

$$\left[① \ f'(x) = \tfrac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}}; \ ② \ f'(x) = 0; \ ③ \ f'(x) = 1\right]$$

25 Determinare i valori da attribuire ai parametri presenti affinché le funzioni qui elencate siano continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$:

$$① \ f(x) = \begin{cases} e^x\cos(2x) & x \geq 0 \\ \alpha x + \beta e^{-x} & x < 0 \end{cases}; \qquad ② \ f(x) = \begin{cases} (1+\sqrt[3]{x})\mathrm{Ch}\,x & x \geq 0 \\ \gamma x + \delta & x < 0 \end{cases}.$$

$$[① \ \alpha = 2, \beta = 1; \ ② \ \text{impossibile}]$$

26 Determinare il valore massimo ed il valore minimo assoluto assunto da ciascuna delle seguenti funzioni nell'intervallo specificato.

① $f(x) = x(x^2-1)$, $x \in [-3, 2]$; ② $f(x) = \cos x + x\sin x$, $x \in [0, \pi]$.

$$[① \ \max = 6, \min = -24; \ ② \ \max = \tfrac{\pi}{2}, \min = -1]$$

27 Calcolare i seguenti limiti (può essere utile applicare il teorema di de l'Hopital, oppure gli sviluppi di MacLaurin):

$$① \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin 2x}; \quad ② \lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x^2} - \operatorname{Sh} x}{x^2 \ln(1+3x)}; \quad ③ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{Sh} x} - e^x}{(x+2)(\arctan x)^3}.$$

$$\left[① -\tfrac{1}{6};\ ② \tfrac{11}{18};\ ③ \tfrac{1}{12}\right]$$

28 Calcolare i seguenti limiti, al variare dei parametri α e β:

$$① \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos 2x - x + 2x^3}{x^\alpha}; \quad ② \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \operatorname{Ch}(2x) - \sin x + \beta x^2}{x^\alpha \sin 2x}.$$

$$[① \lim = 0 \text{ se } \alpha < 5, \lim = \tfrac{2}{3} \text{ se } \alpha = 5, \lim = +\infty \text{ se } \alpha > 5]$$

$$\left[② \ \beta = \tfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 2 & \lim = 0 \\ \alpha = 2 & \lim = \frac{1}{6} \\ \alpha > 2 & \lim = +\infty \end{cases}, \ \beta \neq \tfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 1 & \lim = 0 \\ \alpha = 1 & \lim = \frac{2\beta - 3}{4} \\ \alpha > 1 & \begin{cases} \beta > \frac{3}{2} & \lim = +\infty \\ \beta < \frac{3}{2} & \lim = -\infty \end{cases} \end{cases}\right]$$

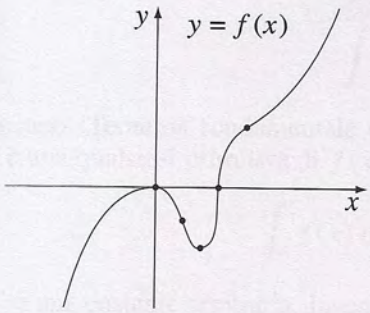
29 Studiare le seguenti funzioni:

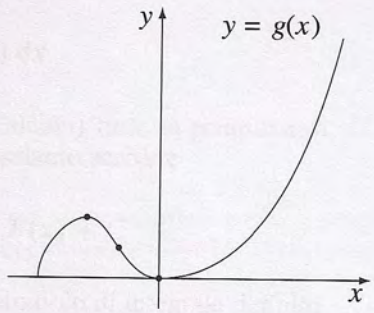
$$① \ f(x) = x^2 \sqrt[3]{x-1}; \quad ② \ g(x) = (1+x)\ln^2(1+x); \quad ③ \ h(x) = e^{-|x^2-1|}.$$

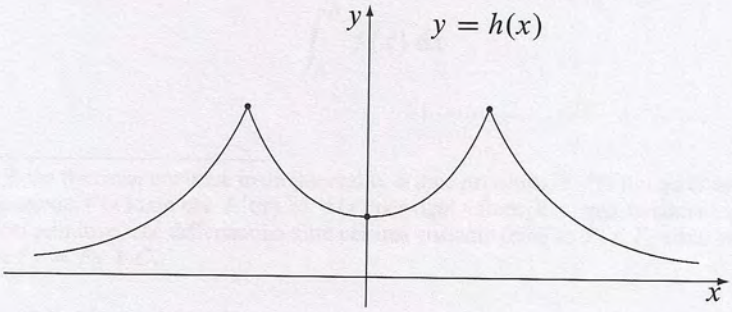
$$\left[① \text{ max in } x = 0, \text{ min in } x = \frac{6}{7}, \text{ flessi in } x = 1, \frac{12 \pm 3\sqrt{2}}{14}\right]$$

$$\left[② \text{ max in } x = \frac{1-e^2}{e^2}, \text{ min in } x = 0, \text{ flesso in } x = \frac{1-e}{e}\right]$$

$$[③ \text{ max in } x = \pm 1 \text{ (punti angolosi), min in } x = 0]$$







CAPITOLO 8

Calcolo integrale e applicazioni

8.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

ESERCIZIO 8.1 **Integrali indefiniti e definiti**

Spiegare il significato dei simboli

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

sapendo poi che $2xe^{2\sin x}(1+x\cos x)$ *è la derivata di* $x^2e^{2\sin x}$, *calcolare*

$$① \int 2xe^{2\sin x}(1+x\cos x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad ② \int_0^{\pi/4} 2xe^{2\sin x}(1+x\cos x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

Con il simbolo di integrale indefinito

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

si indicano (Teorema fondamentale del Calcolo) *tutte* le primitive di $f(x)$[a], se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, possiamo scrivere

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

ove C è una costante arbitraria. Invece, il simbolo di integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[a] $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo, si dice *primitiva* di $f(x)$ in quell'intervallo una qualsiasi funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni valore di x; una funzione continua ammette infinite primitive, che differiscono tutte per una costante (cioè se F_1 e F_2 sono due primitive di f, allora $F_1 = F_2 + C$.

corrisponde al valore $F(b) - F(a)$ (anche in questo caso, $F(x)$ è una *qualsiasi* primitiva di $f(x)$); in generale, allora, per calcolare un integrale definito, possiamo[b]:

- determinare una primitiva della funzione integranda, considerando l'integrale indefinito corrispondente,
- valutare la differenza della primitiva nei due estremi.

① Il testo del problema ha fornito già una primitiva della funzione integranda, per cui

$$\int 2xe^{2\sin x}(1 + x\cos x)\,\mathrm{d}x = x^2e^{2\sin x} + C.$$

② Si tratta di valutare $x^2e^{2\sin x}$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = 0$, quindi

$$\int_0^{\pi/4} 2xe^{2\sin x}(1 + x\cos x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2e^{2\sin x}\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 e^{2\sin\frac{\pi}{4}} - 0^2e^{2\sin 0} = \frac{\pi^2}{16}e^{\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 8.2 **Integrali immediati**

Calcolare i seguenti integrali:

① $\displaystyle\int \left(5 + 17x^3 - 7\sqrt[5]{x^4} - \frac{8}{x} + \frac{3}{\sqrt[8]{x^5}}\right)\mathrm{d}x\,;$

② $\displaystyle\int \left(\cos x + 3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\,;$

③ $\displaystyle\int \left(e^x - 2\mathrm{Sh}\,x + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\,.$

Soluzione

Abbiamo già osservato che per calcolare un integrale è necessario determinare una primitiva della funzione integranda, anzi: la difficoltà dell'esercizio risiede principalmente in questo. Ovviamente la situazione più semplice si verifica nel caso in cui la funzione integranda sia proprio una delle derivate che compaiono nella "tabella delle derivate", reinterpretiamo allora questa tabella[c], sapendo che il nostro scopo si è ora invertito rispetto all'originario calcolo delle derivate[d]

[b] Questa metodologia è utilizzabile ogniqualvolta sia agevole "riconoscere" una primitiva, vedremo più avanti situazioni specifiche in cui conviene invece scegliere strategie alternative.

[c] Nella tabella, F è una primitiva di f.

[d] Attenzione, nel caso di $f(x) = \frac{1}{x}$ abbiamo indicato in un'unica scrittura due primitive: poiché f dev'essere continua sull'intervallo di integrazione si verifica che $\ln x$ è la primitiva di f se $x > 0$, mentre $\ln(-x)$ è la primitiva di f se $x < 0$.

f:	K (costante)	x^α, $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos x$	$\sin x$
F:	Kx	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\sin x$	$-\cos x$

f:	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$	$\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$
F:	$\tan x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Th} x$

Inoltre, l'integrazione è lineare, cioè (se α e β sono costanti e f e g due funzioni)

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, \mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int g(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

cosa che ci permette di "spezzettare" l'integrale di una somma in integrali più semplici.

① Tutti gli addendi che figurano nella funzione integranda sono potenze di x, poiché (usando la tabella delle primitive)

$$\text{primitiva di } 5 : 5x, \qquad \text{primitiva di } x^3 : \frac{x^4}{4}, \qquad \text{primitiva di } \frac{1}{x} = \ln|x|$$

e inoltre, osservato che $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$ e $\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} = x^{-\frac{5}{8}}$,

$$\text{primitiva di } \sqrt[5]{x^4} = \frac{1}{\frac{9}{5}}x^{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}, \qquad \text{primitiva di } \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} = \frac{1}{\frac{3}{8}}x^{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}},$$

allora

$$\begin{aligned}
&\int \left(5 + 17x^3 - 7\sqrt[5]{x^4} - \frac{8}{x} + \frac{3}{\sqrt[8]{x^5}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int 5\, \mathrm{d}x + 17\int x^3\, \mathrm{d}x - 7\int \sqrt[5]{x^4}\, \mathrm{d}x - 8\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}\, \mathrm{d}x \\
&= 5x + 17\frac{x^4}{4} - 7\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} - 8\ln|x| + 3\frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}} + C \\
&= 5x + \frac{17}{4}x^4 - \frac{35}{9}\sqrt[5]{x^9} - 8\ln|x| + 8\sqrt[8]{x^3} + C.
\end{aligned}$$

② Nuovamente, usando la tabella delle primitive,

$$\text{primitiva di } \cos x = \sin x\,, \qquad \text{primitiva di } \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x\,,$$

$$\text{primitiva di } \sin x = -\cos x\,,$$

combiniamo tutti i risultati:

$$\int \left(\cos x + 3 \sin x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int \cos x \, \mathrm{d}x + 3 \int \sin x \, \mathrm{d}x + 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \sin x - 3 \cos x + 4 \tan x + C.$$

③ Anche in questo caso, la tabella delle primitive fornisce

$$\text{primitiva di } e^x = e^x, \qquad \text{primitiva di } \mathrm{Sh}\, x = \mathrm{Ch}\, x\,,$$
$$\text{primitiva di } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad \text{primitiva di } \frac{1}{1+x^2} = \arctan x\,,$$

e quindi

$$\int \left(e^x - 2\mathrm{Sh}\, x + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int e^x \, \mathrm{d}x - 2 \int \mathrm{Sh}\, x \, \mathrm{d}x + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x - 3 \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$
$$= e^x - 2\mathrm{Ch}\, x + 2 \arcsin x - 3 \arctan x + C.$$

ESERCIZIO 8.3 **Integrali riconducibili a integrali immediati**

Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int e^{-2x} \, \mathrm{d}x\,; \qquad ② \int \cos 3x \, \mathrm{d}x\,; \qquad ③ \int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione

Vi sono casi molto frequenti in cui la funzione integranda non appare esattamente com'è nella tabella delle primitive, e tuttavia con un poco di "occhio clinico" è possibile determinarne la primitiva.

① Le funzione integranda è e^{-2x}, poiché si tratta di un esponenziale, con ogni probabilità anche la primitiva sarà dello stesso genere; aggiustando le costanti, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-2x}) = -2e^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{-2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-2x}) = e^{-2x}\,,$$

e quindi

$$\int e^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

② Sappiamo che una primitiva di $\cos x$ è $\sin x$, è ragionevole supporre che nella primitiva di $\cos 3x$ dovrà figurare $\sin 3x$: come prima aggiustiamo le costanti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin 3x) = 3\cos 3x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin 3x) = \cos 3x\,,$$

e allora

$$\int \cos 3x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x) + C.$$

③ È un caso tipico, che conviene imparare a riconoscere: se la funzione integranda è una frazione in cui il numeratore è la derivata del denominatore, allora la primitiva cercata è il logaritmo del valore assoluto del denominatore[e], anche in questo caso occorre giocare con le costanti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x^2+1)] = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x^2+1)] = \frac{x}{x^2+1}\,,$$

pertanto[f]

$$\int \frac{x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

ESERCIZIO 8.4 **Integrali definiti di funzioni pari o dispari su intervalli della forma (-a, a)**

Calcolare i seguenti integrali definiti (ove $a > 0$):

① $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(3 + 10x^4 - \sqrt[3]{x^2}\right)\mathrm{d}x\,;$ ② $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin(x^3)\ \mathrm{d}x\,;$

③ $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{5+\operatorname{Sh} x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\,;$ ④ $\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{|x|} + e^{-|x|} - x|x|\right)\mathrm{d}x\,.$

Soluzione

Osserviamo che se $f_P(x)$ è una funzione pari e se $f_D(x)$ è una funzione dispari, i loro integrali su un intervallo simmetrico rispetto all'origine possono essere semplificati: sia $a > 0$, allora

$$\int_{-a}^{a} f_P(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f_P(x)\ \mathrm{d}x, \qquad \int_{-a}^{a} f_D(x)\ \mathrm{d}x = 0\,.$$

[e] In generale, se in un dato intervallo f è sempre positiva o sempre negativa:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

[f] Possiamo omettere il valore assoluto, poiché $x^2 + 1$ è sempre positivo.

① Notiamo che la funzione integranda è pari, quindi

$$\int_{-2}^{2}\left(3+10x^4-\sqrt[3]{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}\left(3+10x^4-\sqrt[3]{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\left[3x+2x^5-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_0^2 = 2\left(6+64-\frac{3}{5}\sqrt[3]{32}\right) = 140-\frac{12}{5}\sqrt[3]{4}\,.$$

② La funzione integranda è dispari, quindi senza conto alcuno concludiamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin(x^3)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

③ La funzione integranda non è né pari né dispari, però l'integrale può essere suddiviso:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{5+\operatorname{Sh}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{Sh}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

la funzione del primo dei due integrali è pari, mentre quella del secondo è dispari, quindi

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 10[\arctan x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\pi\,;$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{Sh}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0\,;$$

complessivamente

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{5+\operatorname{Sh}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\pi\,.$$

④ Considerazioni sulla parità o disparità delle funzioni possono risultare particolarmente significative qualora nella funzione integranda compaiano dei moduli; di nuovo la funzione integranda nel suo complesso non è né pari né dispari, osserviamo però che $\sqrt{|x|}$ ed $e^{-|x|}$ sono pari, mentre $x|x|$ è dispari, quindi

$$\int_{-a}^{a}\Big(\underbrace{\sqrt{|x|}+e^{-|x|}}_{\text{pari}}-\underbrace{x|x|}_{\text{dispari}}\Big)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a}\left(\sqrt{|x|}+e^{-|x|}\right)\,\mathrm{d}x$$

notiamo poi che sull'intervallo $(0,a)$ x è positiva e quindi $|x|=x$, possiamo allora togliere il modulo dal secondo integrale:

$$\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{|x|}+e^{-|x|}-x|x|\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a}\left(\sqrt{x}+e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-e^{-x}\right]_0^a = \frac{4}{3}\sqrt{a^3}-2e^{-a}+2\,.$$

ESERCIZIO 8.5 **Primitive di funzioni definite a tratti**

Calcolare $\int |x-2|\,\mathrm{d}x$, *specificandone l'insieme di definizione.*

Soluzione

Osserviamo, per prima cosa, che la funzione integranda $f(x) = |x-2|$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, pertanto la sua primitiva $F(x)$ esiste, ed è continua, su tutto $\mathbb{R}$. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$$

impostiamo il calcolo della primitiva separatamente sui due intervalli $x < 2$ e $x > 2$:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int (x-2)\,\mathrm{d}x & x > 2 \\ \displaystyle\int (2-x)\,\mathrm{d}x & x < 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x + C & x > 2 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} + D & x < 2 \end{cases};$$

occorre a questo punto imporre che F sia continua su tutto $\mathbb{R}$, poiché

$$\lim_{x\to 2^+} F(x) = C - 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-} F(x) = D + 2\,,$$

i due limiti devono essere uguali, e allora $D = C-4$, $F(x)$ avrà quindi la seguente espressione:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x + C & x > 2 \\ C - 2 & x = 2 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} + C - 4 & x < 2 \end{cases}.$$

Osserviamo che, qualora avessimo scritto che

$$\int (x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^2}{2} + H \quad \text{e} \quad \int (2-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(2-x)^2}{2} + K\,,$$

l'espressione di F sarebbe stata (una volta garantita la continuità in $x = 2$ ponendo $H = K$)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{2} + H & x > 2 \\ H & x = 2 \\ -\dfrac{(x-2)^2}{2} + H & x < 2 \end{cases},$$

che coincide con quella precedentemente trovata, se $H = C - 2$. Questa espressione può anche essere anche scritta in maniera più compatta come

$$F(x) = \frac{(x-2)|x-2|}{2} + H\,.$$

ESERCIZIO 8.6 **Integrale e valor medio**

Calcolare il valor medio della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *nell'intervallo* $[0, \sqrt{3}]$.

Soluzione

Dalla teoria, sappiamo che il valor medio M della funzione f sull'intervallo $[a, b]$ è dato da

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nel nostro caso, allora, il valor medio cercato è

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\big[\arctan x\big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

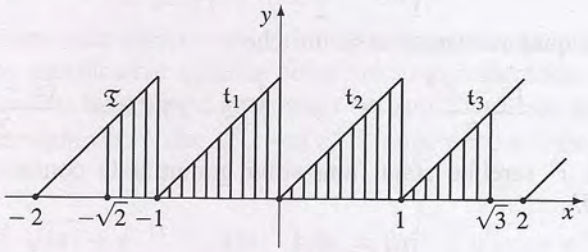
ESERCIZIO 8.7 **Interpretazione geometrica dell'integrale**

Calcolare

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \operatorname{mant} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

La funzione $\operatorname{mant} x$ è continua a tratti, e pertanto è dotata di primitiva, primitiva che tuttavia non è di facile determinazione. Per calcolare il presente integrale possiamo fare ricorso alla sua interpretazione geometrica: se $f(x) \geq 0$ per $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rappresenta l'area del trapezoide contenuto tra l'asse delle ascisse e la funzione f in corrispondenza dell'intervallo $[a, b]$. Osserviamo allora che $\operatorname{mant} x \geq 0$ per ogni x, e pertanto l'integrale cercato corrisponde all'area evidenziata in figura:



Si tratta di due triangoli t_1 e t_2 con base e altezza unitarie, un triangolo t_3 in cui la base e l'altezza valgono entrambe $\operatorname{mant}\sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$ e un trapezio $\mathfrak{T}$ in cui la base maggiore vale 1, la base minore vale $\operatorname{mant}(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$ e l'altezza $-1 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, in definitiva

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \operatorname{mant} x\,\mathrm{d}x &= \operatorname{area}(t_1) + \operatorname{area}(t_2) + \operatorname{area}(t_3) + \operatorname{area}(\mathfrak{T})\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (2 - \sqrt{3}) + \frac{4\sqrt{2} - 5}{2} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

8.1.1 Integrazione per parti

ESERCIZIO 8.8 **Formula dell'integrazione per parti**

Enunciare la formula dell'integrazione per parti e utilizzarla per calcolare i seguenti integrali:

$$① \int x \cos x \, dx \, ; \qquad ② \int_0^6 x e^{3x} \, dx \, .$$

Soluzione

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e $F(x)$ e $G(x)$ due relative primitive, allora la formula d'integrazione per parti nel caso di integrali indefiniti si scrive[g]

$$\int F(x)g(x) \, dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) \, dx \, ,$$

mentre nel caso di integrali definiti diventa

$$\int_a^b F(x)g(x) \, dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) \, dx \, ;$$

l'utilità di questa formula consiste principalmente nella possibilità di sostituire un integrale di un prodotto tra due funzioni con un altro integrale, ove figura un altro prodotto, di più facile risoluzione.

① La funzione integranda è il prodotto di due funzioni, così com'è appare "inattaccabile", ma se con un'integrazione per parti deriviamo la x, ci ritroveremo con un integrale semplificato:

$$\int \underbrace{x}_{F} \underbrace{\cos x}_{g} \, dx = \underbrace{x}_{F} \underbrace{\sin x}_{G} - \int \underbrace{1}_{f} \underbrace{\sin x}_{G} \, dx \, ;$$

e poiché la primitiva di $\sin x$ è $-\cos x$, avremo

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C.$$

② Al solito, partiamo dall'integrale indefinito:

$$\int \underbrace{x}_{F} \underbrace{e^{3x}}_{g} \, dx = \underbrace{x}_{F} \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_{G} - \int \underbrace{1}_{f} \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_{G} \, dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} \, dx \, ,$$

[g] In modo più compatto: $\int Fg = FG - \int fG$.

e quindi

$$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + C\,,$$

valutiamo l'integrale

$$\int_0^6 xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^6 = \frac{17}{9}e^{18} + \frac{1}{9}\,.$$

ESERCIZIO 8.9 **Impiego in "cascata" dell'integrazione per parti**

Calcolare

$$\int x^3 \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

Uno dei più importanti usi dell'integrazione per parti è il calcolo di integrali di funzioni del tipo $x^n f(x)$ (ove sia nota la primitiva di f, e a sua volta sia facilmente integrabile), replicando più volte l'integrazione per parti, è possibile "prosciugare" la potenza n-esima di x, e ritrovarsi con una funzione integranda più semplice. Agiamo allora in questa direzione:

$$\int \underbrace{x^3}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Sh}\,x}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x^3}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Ch}\,x}_{G} - \int \underbrace{3x^2}_{f}\,\underbrace{\mathrm{Ch}\,x}_{G}\,\mathrm{d}x = x^3\mathrm{Ch}\,x - 3\int x^2\mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{d}x;$$

replichiamo allora la procedura per l'ultimo integrale:

$$\int \underbrace{x^2}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Ch}\,x}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Sh}\,x}_{G} - \int \underbrace{2x}_{f}\,\underbrace{\mathrm{Sh}\,x}_{G}\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{Sh}\,x - 2\int x\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{d}x,$$

e di nuovo

$$\int \underbrace{x}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Sh}\,x}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{F}\,\underbrace{\mathrm{Ch}\,x}_{G} - \int \underbrace{1}_{f}\,\underbrace{\mathrm{Ch}\,x}_{G}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x + C;$$

allora, tornando indietro

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{Sh}\,x - 2\left\{x\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x + C\right\}\\ &= x^2\mathrm{Sh}\,x - 2x\mathrm{Ch}\,x + 2\mathrm{Sh}\,x + C,\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{d}x &= x^3\mathrm{Ch}\,x - 3\left\{x^2\mathrm{Sh}\,x - 2x\mathrm{Ch}\,x + 2\mathrm{Sh}\,x + C\right\}\\ &= x^3\mathrm{Ch}\,x - 3x^2\mathrm{Sh}\,x + 6x\mathrm{Ch}\,x - 6\mathrm{Sh}\,x + C.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.10 **Integrazione per parti in caso di primitive non note**

Calcolare (ove possibile) i seguenti integrali:

$$① \int \ln x \, dx \, ; \qquad ② \int e^{x^2} \, dx \, .$$

Soluzione

① La primitiva di $\ln x$ non fa parte dell'elenco di primitive immediate, al contrario è nota (e facilmente maneggiabile) la sua derivata[h]; il procedimento si basa sull'idea che la funzione integranda (nel nostro caso $\ln x$) sia in realtà il prodotto $1 \cdot \ln x$:

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{\ln x}_{F} \underbrace{1}_{g} \, dx = \underbrace{\ln x}_{F} \underbrace{x}_{G} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f} \underbrace{x}_{G} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

② In questo caso, a nulla giova l'applicazione dell'integrazione per parti, si può anzi dimostrare che non esiste alcuna funzione nota di cui e^{x^2} sia la derivata.

ESERCIZIO 8.11 **Impiego "ricorsivo" dell'integrazione per parti**

Calcolare

$$\int \sin(3x) e^{2x} \, dx \, .$$

Soluzione

In un caso come questo, non è possibile usare la tecnica di integrazione per parti per "prosciugare" una funzione come nell'Esercizio 8.8 (funzioni esponenziali e trigonometriche non scompaiono, una volta derivate ...), cionondimeno applichiamo la regola, scegliendo in base a gusto personale quale funzione derivare e quale integrare:

$$\int \underbrace{\sin(3x)}_{F} \underbrace{e^{2x}}_{g} \, dx = \underbrace{\sin(3x)}_{F} \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{G} - \int \underbrace{3\cos(3x)}_{f} \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{G} \, dx \, ,$$

quindi

$$\int \sin(3x) e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{2} \int \cos(3x) e^{2x} \, dx \, ;$$

[h] Lo stesso metodo può essere applicato per calcolare integrali che coinvolgono funzioni quali $\arctan x$, $\arcsin x$... delle quali è nota la derivata.

ripetiamo la procedura un'altra volta, in maniera coerente con la precedente, ossia scegliendo nuovamente di integrare l'esponenziale e derivare la funzione trigonometrica[i]:

$$\int \underbrace{\cos(3x)}_{F}\,\underbrace{e^{2x}}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\cos(3x)}_{F}\,\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{G} - \int \underbrace{-3\sin(3x)}_{f}\,\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{G}\,\mathrm{d}x\,,$$

e cioè

$$\int \cos(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(3x)e^{2x} + \frac{3}{2}\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x\,;$$

risostituendo ora il risultato ottenuto nella formula precedente, troviamo

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(3x)e^{2x} + \frac{3}{2}\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{4}e^{2x}\left(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\right) - \frac{9}{4}\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x;\end{aligned}$$

infine, portando a primo membro l'integrale che compare alla fine del secondo:

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\right) + C,$$

da cui

$$\int \sin(3x)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{13}\,e^{2x}\left(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\right) + C.$$

8.1.2 Integrazione delle funzioni razionali

ESERCIZIO 8.12 — Riduzione di funzioni razionali

Ridurre (ove possibile) le seguenti funzioni razionali a somme di funzioni razionali semplici:

① $\dfrac{x+1}{x^2+2x+10}$; ② $\dfrac{4x-3}{x^2+x-6}$; ③ $\dfrac{3x^3+4x+16}{x^4-16}$;

④ $\dfrac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}$; ⑤ $\dfrac{2x^5+11x^3-x^2+15x-2}{x^2+4}$;

⑥ $\dfrac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}$; ⑦ $\dfrac{x^4+2x^2}{x^2-1}$.

[i] Se optassimo per la scelta opposta, troveremmo un'identità.

Soluzione

Si dice *funzione razionale* un rapporto tra due polinomi $P_n(x)$ e $Q_m(x)$, rispettivamente di grado n e m. È possibile scorgere un parallelo tra polinomi e numeri interi: innanzitutto consideriamo le frazioni proprie $\frac{3}{7}$ e $\frac{25}{42}$, nella prima il denominatore è primo, e quindi non è possibile alcuna riduzione, nella seconda il denominatore è scomponibile ($42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$) e quindi può essere riscritta come somma/differenza tra frazioni proprie con denominatori primi:

$$\frac{25}{42} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{7};$$

allo stesso modo, se $n < m$ (l'equivalente di una frazione propria) e il polinomio al denominatore è scomponibile, è possibile riscrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali più semplici (e con denominatore non ulteriormente scomponibile[j]). Consideriamo adesso le frazioni improprie $\frac{31}{7}$ e $\frac{781}{42}$: effettuando le corrispondenti divisioni troviamo

$$31 : 7 = 4 \text{ con il resto di } 3, \qquad 781 : 42 = 18 \text{ con il resto di } 25,$$

e quindi possiamo riscrivere le suddette frazioni come

$$\frac{31}{7} = 4 + \frac{3}{7}, \qquad \frac{781}{42} = 18 + \frac{25}{42};$$

abbiamo trasformato le frazioni improprie $\frac{31}{7}$ e $\frac{781}{42}$ in numeri interi, cui vanno aggiunte le frazioni proprie $\frac{3}{7}$ e $\frac{25}{42}$, e abbiamo già visto che $\frac{3}{7}$ non è ulteriormente riducibile, poiché il denominatore è primo, mentre è possibile riscrivere $\frac{25}{42}$ come somma di frazioni proprie in cui ciascun denominatore è primo ($\frac{25}{42} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{7}$). Allo stesso modo, se in una frazione il grado n del polinomio al numeratore è maggiore o uguale al grado m del polinomio al denominatore, è possibile riscrivere questa frazione come somma di un polinomio (il cui grado è la differenza $n - m$ dei gradi a numeratore e denominatore) e di una frazione residua, in cui il numeratore ha grado necessariamente inferiore al denominatore:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)} \qquad \begin{array}{l} \text{grado di } A(x)\text{: } n - m\,, \\ \text{grado di } R(x)\text{: minore di } m\,. \end{array}$$

Inoltre, se il polinomio $Q_m(x)$ al denominatore è scomponibile (cioè se, conoscendone le radici, possiamo scriverlo come prodotto di polinomi più semplici), è possibile ricondurre $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ a una somma di frazioni più semplici (come è capitato con la frazione $\frac{25}{42}$).

[j] Sappiamo che un qualsiasi polinomio a coefficienti reali $Q_m(x)$ può essere espresso tramite prodotto di binomi di primo grado e trinomi di secondo grado aventi $\Delta < 0$.

① Il discriminante $\Delta = -36$ del polinomio al denominatore è negativo, pertanto non è possibile alcuna riduzione.

② Poiché $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, è possibile riscrivere la frazione come somma di frazioni più semplici: i due denominatori sono di primo grado, quindi il numeratore di ciascuno di essi sarà di grado zero, e cioè una costante:

$$\frac{4x-3}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

Effettuiamo allora la somma delle frazioni al secondo membro e, raccogliendo le x, uguagliamo i numeratori:

$$\frac{4x-3}{x^2+x-6} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 3A-2B=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=1, B=3;$$

e allora[k]

$$\frac{4x-3}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3}.$$

③ Il polinomio al denominatore si scrive $x^4 - 16 = (x^2+4)(x+2)(x-2)$, e quindi scomponiamo la frazione di partenza nella somma di tre frazioni, aventi come denominatori i tre fattori di questo prodotto e come numeratori i più generici polinomi di grado inferiore ad essi; in due casi si tratterà di costanti nel terzo caso di un binomio di primo grado:

$$\frac{3x^3+4x+16}{x^4-16} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}.$$

Come prima, effettuando la somma delle frazioni al secondo membro e uguagliando i numeratori, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+C+D=3 \\ B-2C+2D=0 \\ -4A+4C+4D=4 \\ -4B-8C+8D=16 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=1, B=-2, C=\frac{1}{2}, D=\frac{3}{2};$$

[k] Vi è un metodo più immediato per giungere allo stesso risultato: da

$$\frac{4x-3}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

eliminando i denominatori si ottiene l'uguaglianza $4x-3 = A(x+3)+B(x-2)$, che dev'essere valida per ogni $x \in \mathbb{R}$, in particolare ponendo $x=2$ e annullando il coefficiente di B si ottiene $5 = 5A$, e dunque $A = 1$, viceversa ponendo $x = -3$ e annullando il coefficiente di A si ottiene $-15 = -5B$, cioè $B = 3$.

e quindi

$$\frac{3x^3+4x+16}{x^4-16}=\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}.$$

④ Il polinomio al denominatore si scrive $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$, poiché uno dei fattori compare al secondo grado, nella scomposizione andranno inserite due frazioni: una con il denominatore al primo grado e una con il denominatore al secondo grado[1]:

$$\frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

sommando le frazioni e raccogliendo le x otteniamo

$$\frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x^2+5x-2},$$

ed eguagliando i numeratori troviamo $A=3, B=-2, C=4$; allora la scomposizione cercata è

$$\frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}.$$

⑤ In questo caso il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, occorre pertanto effettuare la divisione di $2x^5+11x^3-x^2+15x-2$ per x^2+4, con pochi conti otteniamo $2x^3+3x-1$ con il resto di $3x+2$, scriviamo allora

$$\frac{2x^5+11x^3-x^2+15x-2}{x^2+4}=2x^3+3x-1+\frac{3x+2}{x^2+4},$$

e poiché poi x^2+4 non è scomponibile in $\mathbb{R}$ non è possibile alcuna ulteriore semplificazione.

⑥ Anche in questo caso il grado del numeratore è maggiore del grado al denominatore, dividendo $x^4+3x^3-4x^2-9$ per x^2+x-6 otteniamo allora x^2+2x con il resto di $12x-9$, quindi

$$\frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}=x^2+2x+\frac{12x-9}{x^2+x-6},$$

osserviamo poi che il denominatore è scomponibile, e che $12x-9=3(4x-3)$, ricordandoci allora il punto ② possiamo scrivere

$$\frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}=x^2+2x+\frac{3}{x-2}+\frac{9}{x+3}.$$

[1] È una regola generale: si può dimostrare che se uno dei fattori compare con una potenza p maggiore di 1, nella scomposizione vanno inserite tutte le sue potenze da 1 a p, ciascuna con la sola costante al numeratore.

⑦ Dividendo $x^4 + 2x^2$ per $x^2 - 1$ otteniamo $x^2 + 3$ con il resto di 3, quindi

$$\frac{x^4 + 2x^2}{x^2 - 1} = x^2 + 3 + \frac{3}{x^2 - 1},$$

anche $x^2 - 1$ è scomponibile, con il solito metodo:

$$\frac{3}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{x^2 - 1}$$

da cui $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, e quindi

$$\frac{x^4 + 2x^2}{x^2 - 1} = x^2 + 3 + \frac{\frac{3}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{3}{2}}{x + 1}.$$

ESERCIZIO 8.13 **Integrali di funzioni razionali al cui denominatore figurano polinomi di primo o secondo grado**

Calcolare i seguenti integrali:

① $\displaystyle\int \frac{5}{3x - 2}\,dx$; ② $\displaystyle\int \frac{x - 15}{x^2 - 2x - 3}\,dx$; ③ $\displaystyle\int \frac{6x}{4x^2 + 12x + 9}\,dx$;

④ $\displaystyle\int \frac{13}{x^2 - 4x + 8}\,dx$; ⑤ $\displaystyle\int \frac{3x - 5}{x^2 - 2x + 4}\,dx$.

Soluzione

Abbiamo visto nell'esercizio precedente che una qualsiasi funzione razionale $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ può essere ricondotta alla somma di un polinomio (se $n > m$) più alcune frazioni con al denominatore polinomi di primo e secondo grado (questi ultimi irriducibili), pertanto è sufficiente saper integrare queste ultime tipologie e alcuni casi particolari ad esse correlate; ricavando le derivate dei secondi membri e bilanciando le costanti, otteniamo i seguenti integrali notevoli

$$1: \int \frac{1}{ax + b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax + b| + C,$$

$$2: \int \frac{1}{1 + \left(\frac{ax + b}{c}\right)^2}\,dx = \frac{c}{a}\arctan\left(\frac{ax + b}{c}\right) + C,$$

$$3: \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\,dx = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

inoltre

$$4: \int \frac{1}{(ax + b)^n}\,dx = \frac{1}{a(1 - n)}\,\frac{1}{(ax + b)^{n-1}} + C,$$

$$5: \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}\,dx = \frac{1}{1 - n}\,\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C.$$

① Se al denominatore figura un polinomio di primo grado e al numeratore una costante, è sufficiente ricondurre tale espressione alla tipologia 1:

$$\int \frac{5}{3x-2}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{3x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln|3x-2| + C.$$

② Se il trinomio di secondo grado al denominatore è scomponibile (come nel nostro caso, abbiamo infatti $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$), usando il metodo visto nell'esercizio precedente al punto ②, ci riportiamo a due casi analoghi al punto ① più sopra. Con pochi conti troviamo

$$\frac{x-15}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \overset{\substack{A=4\\ B=-3}}{=} \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-3},$$

e allora

$$\begin{aligned}\int \frac{x-11}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-3}\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\ln|x+1| - 3\ln|x-3| + C.\end{aligned}$$

③ Il polinomio al denominatore è un quadrato perfetto: $4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$, anche in questo caso sfruttiamo il metodo già visto nell'esercizio precedente:

$$\frac{6x}{4x^2+12x+9} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{(2x+3)^2} \overset{\substack{A=3\\ B=-9}}{=} \frac{3}{2x+3} - \frac{9}{(2x+3)^2},$$

e quindi, ricordando gli integrali 1 e 4,

$$\begin{aligned}\int \frac{6x}{4x^2+12x+9}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\ln|2x+3| + \frac{9}{2}\frac{1}{2x+3} + C.\end{aligned}$$

④ Se al denominatore compare un polinomio di secondo grado irriducibile, al numeratore comparirà una costante o tutt'al più un polinomio di primo grado, esaminiamo dapprima il primo caso:

$$\int \frac{\text{costante}}{\text{polinomio irriducibile di II grado}}\,\mathrm{d}x,$$

Notiamo che si può sempre riscrivere un polinomio di secondo grado irriducibile come somma di una costante positiva e di un quadrato perfetto[m], nel nostro caso, completando il quadrato, troviamo

$$\frac{13}{x^2-4x+8}=\frac{13}{x^2-4x+4-4+8}=\frac{13}{(x-2)^2+4};$$

per ricondurci all'integrale 2 raccogliamo allora 13 dal numeratore e 4 dal denominatore:

$$\frac{13}{x^2-4x+8}=\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1};$$

quindi:

$$\int\frac{13}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x=\frac{13}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{13}{4}\cdot 2\cdot\arctan\frac{x-2}{2}+C.$$

⑤ Rimane da considerare il caso in cui in corrispondenza di un denominatore di secondo grado irriducibile compaia al numeratore un binomio di primo grado:

$$\int\frac{\text{binomio di I grado}}{\text{polinomio irriducibile di II grado}}\,\mathrm{d}x,$$

in questi casi è necessario ricondursi all'integrale 3, giocando con le costanti, affinché al numeratore compaia la derivata del denominatore, con quanto rimane (e si tratterà necessariamente di una semplice costante) applicheremo il metodo del punto ④; nel nostro caso, poiché la derivata del denominatore è $2x-2$, dobbiamo trasformare il numeratore, raccogliendo il 3 davanti alla x e moltiplicando per 2, aggiungendo/sottraendo poi quanto occorre dal termine noto:

$$3x-5=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{10}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-2+2-\frac{10}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x-2)-2$$

e quindi

$$\int\frac{3x-5}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+4}-\frac{2}{x^2-2x+4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$$

[m] Cioè, se $b^2-4ac<0$ esistono $\alpha>0$, β qualsiasi e $\gamma>0$ per cui

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=(\alpha x+\beta)^2+\gamma.$$

il primo dei due integrali è adesso un integrale del tipo 3 e si risolve immediatamente (non è necessario mettere il modulo nel logaritmo, il trinomio è sempre positivo):

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-2x+4)+C$$

per quanto riguarda il secondo integrale, occorre, come al punto ④, completare il quadrato e raccogliere il termine noto

$$\frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{x^2-2x+1-1+4} = \frac{1}{(x-1)^2+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1},$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

riuniamo allora i due risultati, ottenendo

$$\int \frac{3x-5}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

ESERCIZIO 8.14 **Integrali di funzioni razionali**

Calcolare gli integrali indefiniti delle funzioni dell'Esercizio 8.12.

Soluzione

① Abbiamo già visto che la frazione non è riducibile, occorre pertanto agire come nel punto ⑤ dell'esercizio precedente, notiamo che basta moltiplicare per 2 il numeratore di

$$\frac{x+1}{x^2+2x+10}$$

per ottenere la derivata del denominatore, quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10)+C.$$

② Poiché

$$\frac{4x-3}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+3},$$

troviamo

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-3}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x-2|+3\ln|x+3|+C.\end{aligned}$$

③ Poiché

$$\frac{3x^3+4x+16}{x^4-16}=\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2},$$

allora

$$\int\frac{3x^3+4x+16}{x^4-16}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x-2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x,$$

il secondo e il terzo integrale sono immediati, per il primo agiamo come al punto ⑤ dell'esercizio precedente (osserviamo che la derivata del denominatore è semplicemente $2x$):

$$\begin{aligned}\int\frac{x-2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{2}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{2}{4}\,2\,\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C;\end{aligned}$$

quindi, usando le proprietà dei logaritmi,

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^3+4x+16}{x^4-16}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C\\&=\frac{1}{2}\ln[|x^4-16|(x-2)^2]-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

④ Sappiamo che

$$\frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2},$$

e quindi (usando poi le proprietà dei logaritmi, come al punto precedente)

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}&=3\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x\\&=3\ln|x-2|-2\ln|x-1|-4\frac{1}{x-1}+C\\&=\ln\frac{|x-2|^3}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}+C.\end{aligned}$$

⑤ Abbiamo visto che

$$\frac{2x^5+11x^3-x^2+15x-2}{x^2+4}=2x^3+3x-1+\frac{3x+2}{x^2+4},$$

allora

$$\int\frac{2x^5+11x^3-x^2+15x-2}{x^2+4}\,dx=\int(2x^3+3x-1)\,dx+\int\frac{3x+2}{x^2+4}\,dx,$$

il primo dei due integrali è l'integrale di un polinomio: per il secondo, visto che il denominatore è di secondo grado (e la derivata vale $2x$), procediamo nel solito modo (uguale a sopra, punto ③):

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+2}{x^2+4}\,dx&=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx+2\int\frac{1}{x^2+4}\,dx\\&=\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\frac{2}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\\&=\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C,\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\int\frac{2x^5+11x^3-x^2+15x-2}{x^2+4}\,dx\\&\quad=\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}-x+\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

⑥ Abbiamo trovato che

$$\frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}=x^2+2x+\frac{3}{x-2}+\frac{9}{x+3},$$

e quindi, visto che

$$\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{9}{x+3}\right)dx=3\ln|x-2|+9\ln|x+3|+C,$$

integrando anche il polinomio troviamo

$$\int\frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}\,dx=\frac{x^3}{3}+x^2+3\ln|x-2|+9\ln|x+3|+C.$$

⑦ Già sappiamo che

$$\frac{x^4+2x^2}{x^2-1}=x^2+3+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}-\frac{\frac{3}{2}}{x+1}=x^2+3+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right),$$

e poiché

$$\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C,$$

abbiamo

$$\int \frac{x^4+2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

ESERCIZIO 8.15 **Intervalli d'integrazione**

Dopo aver verificato che

$$\int \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + C\,,$$

stabilire se le seguenti uguaglianze sono vere:

① $\displaystyle\int_3^4 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{3}{5}$; ② $\displaystyle\int_1^3 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{5}{3}$;

③ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 3$;

in caso non lo siano, spiegarne il motivo.

Soluzione

Incominciamo con la verifica, poiché con la solita scomposizione in fattori otteniamo

$$\frac{8}{4-x^2} = \frac{2}{2+x} + \frac{2}{2-x} = \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2}$$

allora

$$\int \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| - 2\ln|x-2| + C = \ln\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2} + C\,,$$

e quindi

$$\int_a^b \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\right]_a^b.$$

Osserviamo però che la funzione integranda non è definita se $x = \pm 2$, quindi l'intervallo d'integrazione $[a, b]$ *non potrà in alcun caso* contenere tali valori, in altre parole, la formula che abbiamo appena scritto vale unicamente se l'intervallo $[a, b]$ è contenuto in uno dei tre intervalli

$$(-\infty, -2), \qquad (-2, 2), \qquad (2, +\infty)\,.$$

① Poiché $[3,4] \subset (2,+\infty)$ l'integrale proposto ha senso, dopodiché

$$\int_3^4 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{4+2}{4-2}\right)^2 - \ln\left(\frac{3+2}{3-2}\right)^2 = \ln\frac{3^2}{5^2} = 2\ln\frac{3}{5}\,.$$

② In questo caso l'intervallo $[1,3]$ non può essere usato: contiene $x=2$, ove la funzione non è definita, e quindi non è lecito calcolare questo integrale con i soliti metodi[n].

③ Poiché l'intervallo d'integrazione è ammissibile, l'integrale ha senso, inoltre possiamo osservare che la funzione integranda è pari e quindi, come già abbiamo visto, il valore dell'integrale è il doppio del valore trovato unicamente per $x>0$, nel nostro caso

$$\int_0^1 \frac{8}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1+2}{1-2}\right)^2 - \ln\left(\frac{0+2}{0-2}\right)^2 = \ln 3^2 = 2\ln 3\,.$$

8.1.3 Integrazione per sostituzione

ESERCIZIO 8.16 **Formula dell'integrazione per sostituzione**
Applicazione diretta e inversa

Enunciare la formula dell'integrazione per sostituzione e utilizzarla per calcolare i seguenti integrali:

$$① \int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x\,; \qquad ② \int \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

Se f è una funzione continua e g è una funzione derivabile con derivata continua, allora

$$\int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u = \left[\begin{array}{c}\text{posto}\\ g(u)=v\\ g'(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}v\end{array}\right] = \int f(v)\,\mathrm{d}v\,;$$

è bene porre attenzione su un aspetto della formula: nel momento in cui prendiamo la funzione $g(u)$ e la chiamiamo v, il legame tra u e v si ripercuote (sempre attraverso la funzione g) anche tra $\mathrm{d}u$ e $\mathrm{d}v$:

$$g(u)=v \quad \Leftrightarrow \quad g'(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}v\,;$$

La formula di integrazione per sostituzione può essere applicata in entrambi i sensi, a seconda di quale dei due membri sia più comodo da calcolare: in un caso, se la funzione integranda è formata da una funzione composta, moltiplicata

[n] Poiché siamo in presenza di un asintoto verticale, si tratterebbe di un integrale generalizzato, che però vedremo non convergere. In ogni caso la scrittura proposta è sbagliata.

per la derivata della funzione interna (come nel primo membro qui sopra), può essere comodo isolare la funzione più interna e, come abbiamo osservato, il termine $g'(u)\,\mathrm{d}u$ si trasforma in $\mathrm{d}v$; in alternativa, se si prende la variabile v e la si trasforma in $g(u)$, il differenziale $\mathrm{d}v$ si trasforma in $g'(u)\,\mathrm{d}u$.

① Come dicevamo, siamo proprio nel primo caso: la funzione $\sin^3 x$ è $f(g(x))$, con $g(x) = \sin x$ e $f(t) = t^3$, notiamo inoltre che $\cos x$ è proprio la derivata di $\sin x$:

$$\int \underbrace{(\sin x)^3}_{f(g(x))} \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C,$$

notiamo ora che, per concludere il calcolo, è necessario una volta effettuato l'integrale ritornare alla variabile x, risostituendo la t nel risultato ottenuto°:

$$\frac{1}{4}t^4 + C \overset{[t=\sin x]}{=} \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

② In questo caso, sostituire e^{2x} con t può semplificare i conti: tuttavia se scriviamo semplicemente $e^{2x} = t$ manca poi il termine $2e^{2x}$ con cui scrivere la trasformazione $2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$; esplicitiamo allora il legame tra x e t rispetto a x:

$$e^{2x} = t \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln t \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$$

e quindi

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} e^{2x} = t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t;$$

si tratta ora dell'integrale di una funzione razionale e, una volta calcolato, sarà necessario ritornare alla variabile x:

$$\int \frac{1}{1+t}\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\ln|t| - \ln|t+1|\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + C,$$

in definitiva

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + C.$$

° È possibile evitare la sostituzione di ritorno nel caso di integrali definiti, come vedremo tra poco.

ESERCIZIO 8.17 **Integrazione per sostituzione di integrali definiti**

Calcolare

$$\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

Nel caso di un integrale definito da calcolare per sostituzione, vi sono due possibilità: la prima consiste nel calcolare l'integrale indefinito corrispondente e poi procedere alla sostituzione (come in tutti i casi già visti), oppure procedere alla sostituzione anche degli estremi dell'intervallo d'integrazione, con il vantaggio di non dover effettuare la sostituzione di ritorno. Calcoliamo allora l'integrale del testo in entrambi i modi, prima con l'integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + C;$$

ritorniamo a x:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C\,,$$

e quindi

$$\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^3} = \frac{14}{3}\,.$$

In alternativa, all'atto della sostituzione, sostituiamo con la stessa regola anche gli estremi[p]:

$$\int_1^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \ln 1 = 0 \\ \ln e^3 = 3 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{14}{3}\,.$$

[p] In accordo con la formula

$$\int_a^b f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u = \begin{bmatrix} g(u) = v \\ g'(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}v \\ g(a) = \alpha,\ g(b) = \beta \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(v)\,\mathrm{d}v.$$

ESERCIZIO 8.18 **Sostituzioni varie**

Calcolare i seguenti integrali:

① $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$; ② $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^4}\,\mathrm{d}x$; ③ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

④ $\displaystyle\int \frac{\pi^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; ⑤ $\displaystyle\int \frac{4x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione

Sovente gli integrali per sostituzione hanno la forma

$$\int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

ossia contengono "in bella vista" la funzione g e la sua derivata g', non esiste una regola generale che permetta di accorgersi di questo fatto, solo un poco di pratica può aiutare ...

① Davanti all'esponenziale troviamo – quasi – la derivata dell'esponente:

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{e^t}{2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

② A parte il segno, $-\sin x$ è la derivata di $2+\cos x$:

$$\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^4}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 2+\cos x = t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= -\int \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{6+3\cos^3 x} + C.$$

③ La derivata di $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$:

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x} = t \\ \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= -\int \sin t\,\mathrm{d}t = \cos t + C = \cos\frac{1}{x} + C.$$

④ Ricordiamo[q] che $\frac{1}{\cos^2 x}$ è la derivata di $\tan x$,

$$\int \frac{\pi^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \tan x = t \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right]$$
$$= \int \pi^t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^t}{\ln \pi} + C = \frac{\pi^{\tan x}}{\ln \pi} + C.$$

⑤ A volte occorre suddividere e combinare:

$$\int \frac{4x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,;$$

ora, da un lato notiamo che con il numeratore creiamo la derivata del radicando:

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right]$$
$$= -2\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -4\sqrt{t} + C = -4\sqrt{1-x^2} + C\,;$$

dall'altro il fattore $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è – quasi – la derivata del numeratore:

$$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \arccos x = t \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$
$$= -\int t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t^2 + C = -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C\,,$$

e quindi, combinando i risultati e prestando attenzione ai segni:

$$\int \frac{4x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -4\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C.$$

ESERCIZIO 8.19 **Integrali di funzioni trigonometriche, I**

Calcolare i seguenti integrali:

① $\int \cos^4 x \sin^5 x\,\mathrm{d}x$; ② $\int \cos x \sin^5 x\,\mathrm{d}x$;

③ $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$; ④ $\int \cos^2 x \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

Soluzione

Tutti gli integrali dell'esercizio hanno la forma

$$\int \cos^n x \sin^m x \, \mathrm{d}x \,,$$

la strategia di soluzione varia in due casi:

1) almeno una delle due potenze n e m è dispari (integrali ① e ②);
2) n e m sono entrambi pari (integrali ③ e ④).

Nel caso 1) si effettua una sostituzione: se una sola delle potenze è dispari, la sostituzione consiste nel chiamare u la funzione con la potenza pari, mentre quella con la potenza dispari viene "spezzata" in due: la singola potenza dispari combinata con $\mathrm{d}x$ darà $\mathrm{d}u$, mentre la restante potenza pari dev'essere riscritta in funzione dell'altra (ricordando che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

① Il coseno ha potenza pari, il seno ha potenza dispari, bisognerà porre $\cos x = u$ e $\sin x \, \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$, per cui

$$\sin^5 x \, \mathrm{d}x = (\sin^4 x)(\sin x \, \mathrm{d}x) = (\sin^4 x)(-\,\mathrm{d}u) \,,$$

è ora necessario esprimere $\sin^4 x$ in funzione di u, ossia di $\cos x$:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x \,,$$

per cui

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \sin^5 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^4 x \big(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\big) \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\begin{array}{c} \cos x = u \\ \sin x \, \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u \end{array} \right] = -\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, \mathrm{d}u \\
&= -\frac{u^5}{5} + 2\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.
\end{aligned}$$

② In questo caso, entrambe le potenze sono dispari, perciò potremmo indifferentemente scegliere l'una o l'altra delle due funzioni come u, ovviamente

---

[9] Oltre a notare che se $a > 0$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}.$$

conviene scegliere quella con la potenza più elevata, in maniera da facilitare i conti:

$$\int \cos x \sin^5 x \, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \end{bmatrix} = \int u^5 \, du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Se invece (caso numero 2) entrambe le potenze sono pari, occorrono le formule trigonometriche[r]

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

③ Facendo immediatamente uso di queste formule:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

④ In generale, in un caso come questo, conviene riportarsi a una funzione integranda con solo seni o coseni (nel nostro caso seni, visto che la potenza è maggiore) e poi usare ricorsivamente le formule:

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^4 x \, dx = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \, dx$$

ora

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

pertanto

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C;$$

[r] In alternativa, si può arrivare al risultato utilizzando in maniera ricorsiva – come già abbiamo visto in un caso – l'integrazione per parti.

analogamente per $\sin^6 x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 - 3\cos 2x + 3\frac{1+\cos 4x}{2} - \cos^3 2x\right) \\ &= \frac{1}{16}(5 - 6\cos 2x + 3\cos 4x) - \frac{1}{8}\cos^3 2x\end{aligned}$$

il primo addendo si integra direttamente, come nel caso precedente, per quanto riguarda il secondo si usa il metodo del caso numero 1 (c'è una potenza dispari ...):

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int (\cos^2 2x)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left\{\int \cos 2x\,\mathrm{d}x - \int \sin^2 2x \cos 2x\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C\,;\end{aligned}$$

in definitiva

$$\int \cos^2 x \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{16} + \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

ESERCIZIO 8.20 **Integrali di funzioni trigonometriche, II**
Funzioni razionali di sin e cos

Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x; \qquad ② \int \frac{\sin 2x}{5 - 2\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione

Se la funzione integranda è una funzione razionale di sin e cos, eccettuati casi immediati, si opera per sostituzione, usando le formule parametriche di trigonometria, che forniscono seno e coseno di un angolo α a partire dalla tangente di $\frac{\alpha}{2}$, nel nostro caso:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Con questa sostituzione, si trasforma una funzione razionale di seni e coseni in una funzione razionale di polinomi, integrabile con i soliti metodi.

① Proviamo immediatamente:

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+2t-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1+\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\ln|t-1-\sqrt{2}| - \ln|t-1+\sqrt{2}|) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan\dfrac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan\dfrac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

② Non è necessario usare questa sostituzione: usando le formule di duplicazione ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$), l'integrale si trasforma in una funzione razionale di $\sin x$, in cui $\cos x$ appare "accanto a $\mathrm{d}x$", basta quindi porre $\sin x = t$:

$$\int \frac{\sin 2x}{5 - 2\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x \cos x}{5 - 2\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{2t}{5-2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t-2}{5-2t+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{5-2t+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln(t^2 - 2t + 5) + \arctan\frac{t-1}{2} + C$$

$$= \ln((\sin x)^2 - 2\sin x + 5) + \arctan\frac{\sin x - 1}{2} + C.$$

ESERCIZIO 8.21 **Integrali di funzioni trigonometriche, III**
Funzioni razionali di $\sin^2$, $\cos^2$, tan ...

Calcolare gli integrali:

$$① \int \frac{2\tan^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x; \qquad ② \int \frac{1+\tan^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione

Se la funzione integranda è una funzione razionale di

$$\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x, \tan x,$$

una sostituzione vantaggiosa (a parte casi immediati) consiste nel porre $\tan x = t$, in dettaglio

$$t = \tan x, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

mentre $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ si trasformano nel modo seguente:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

A questo punto, ci si è ricondotti ad una funzione razionale, integrabile con i metodi standard.

① L'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int \frac{2\tan^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2t^3}{1+\dfrac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^3}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(t - \frac{t}{1+2t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+2t^2) + C \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+2\tan^2 x) + C.\end{aligned}$$

② Non è necessario procedere alla sostituzione del punto precedente: analogamente all'Esercizio 8.18, ④, ponendo $\tan x = t$, abbiamo $\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ e dunque

$$\int \frac{1+\tan^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int (1+t^3)\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^4}{4} + C = \tan x + \frac{\tan^4 x}{4} + C.$$

ESERCIZIO 8.22 **Integrali con $\sqrt{ax^2+b}$**

Calcolare ($\alpha > 0$) i seguenti integrali:

① $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; ② $\displaystyle\int x\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$; ③ $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-12}\,\mathrm{d}x$;

④ $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; ⑤ $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$; ⑥ $\displaystyle\int \sqrt{x^2-\alpha^2}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione

Negli integrali del testo vi è una differenza sostanziale tra quelli della prima e della seconda riga: ciò che conta è la presenza o meno, accanto alla radice, di una potenza *dispari* di x.

① ② ③ In tutti e tre i casi, con la x fuori dalla radice possiamo costruire il differenziale del radicando:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1-x^2=t \\ x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$$
$$\int x\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 3+x^2=t \\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$$
$$\int x\sqrt{x^2-12}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^2-12=t \\ x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2-12)^{\frac{3}{2}} + C.$$

④ In questo caso, è necessario ricorrere alle identità trigonometriche (nella fattispecie: $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$), e porre $x = \sin t$ (e quindi $t = \arcsin x$)[s]:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

⑤ Ricordando che $1+\mathrm{Sh}^2 t = \mathrm{Ch}^2 t$, bisogna che sotto la radice compaia un termine di quel genere, raccogliendo il 4, poniamo poi $\frac{x}{2} = \mathrm{Sh}\,t$ (che

[s] Osserviamo che, ponendo all'atto della sostituzione $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, ci impegnamo a mantenere questa scelta nel momento in cui ritorneremo dalla primitiva in t alla primitiva in x.

comporta poi $t = \ln(\frac{x}{2} + \sqrt{(x/2)^2 + 1}))$[t]:

$$\int \sqrt{4 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} = \mathrm{Sh}\,t \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= 4\int \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 t}\,\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{d}t = 4\int \mathrm{Ch}^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{Sh}\,2t\right) + C = 2\,(t + \mathrm{Sh}\,t\mathrm{Ch}\,t) + C$$

$$= 2\left(\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{(x/2)^2 + 1}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{1 + (x/2)^2}\right) + C.$$

⑥ Anche in questo caso ricorriamo alle funzioni iperboliche, e questa volta usiamo la relazione $\mathrm{Ch}^2 t - 1 = \mathrm{Sh}^2 t$, analogamente a prima raccogliamo α^2 e poniamo poi $\frac{x}{\alpha} = \mathrm{Ch}\,t$ (il che, se x è positivo, vuol dire che $t = \ln(\frac{x}{\alpha} + \sqrt{(x/\alpha)^2 - 1}))$:

$$\int \sqrt{x^2 - \alpha^2}\,\mathrm{d}x = \alpha\int \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{x}{\alpha} = \mathrm{Ch}\,t \\ \mathrm{d}x = \alpha\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \alpha^2\int \sqrt{\mathrm{Ch}^2 t - 1}\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{d}t = \alpha^2\int \mathrm{Sh}^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha^2\int \frac{\mathrm{Ch}\,(2t) - 1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sh}\,(2t) - t\right) + C = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{2\mathrm{Sh}\,t\mathrm{Ch}\,t}{2} - t\right) + C$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{x}{\alpha}\sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 1} - \ln\left(\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 1}\right)\right] + C.$$

ESERCIZIO 8.23 **Integrali binomi**

Calcolare gli integrali:

$$① \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x; \qquad ② \int \frac{1}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}\,\mathrm{d}x.$$

[t] Ricordiamo che per le funzioni iperboliche valgono formule analoghe a quelle delle funzioni trigonometriche:

$$\mathrm{Ch}^2\alpha = \frac{\mathrm{Ch}\,(2\alpha) + 1}{2}, \qquad \mathrm{Sh}^2\alpha = \frac{\mathrm{Ch}\,(2\alpha) - 1}{2}.$$

Soluzione

Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, l'integrale

$$\int x^{\alpha}(a + bx^{\beta})^{\gamma}\, \mathrm{d}x$$

si chiama *integrale binomio*. Si riesce ad integrare in termini finiti nei tre casi seguenti[u]:

1) $\gamma \in \mathbb{Z}$ — se $\gamma > 0$ l'integrale è immediato, se $\gamma < 0$ è sufficiente porre $x = t^m$, ove m è il minimo comune multiplo tra i denominatori di α e di β;
2) $\dfrac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$ — si pone $a + bx^{\beta} = t^m$, ove m è il denominatore di γ;
3) $\dfrac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z}$ — si pone $ax^{-\beta} + b = t^m$, ove m è il denominatore di γ.

① Con i simboli appena adottati, $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{3}$, dunque

$$\frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z},$$

poniamo allora $1 + \sqrt[4]{x} = t^3$, da cui $x = (t^3 - 1)^4$, e dunque $\mathrm{d}x = 12(t^3 - 1)^3 t^2\, \mathrm{d}t$, l'integrale diventa quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{t}{(t^3-1)^2}\, 12(t^3-1)^3 t^2\, \mathrm{d}t \\ &= \int 12t^3(t^3-1)\, \mathrm{d}t = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C \\ &= \frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7 - 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4 + C.\end{aligned}$$

② In questo caso, $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{3}{4}, \gamma = -\frac{1}{3}$, dunque

$$\frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} = -1 \in \mathbb{Z},$$

[u] In effetti, non è strettamente necessario che α e β siano razionali, è sufficiente che valgano le condizioni qui riportate. Ad esempio, si può seguire la stessa falsariga per calcolare

$$\int x^{2\sqrt{2}-1}\left(2x^{\sqrt{2}} - 3\right)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}x.$$

poniamo quindi $x^{-3/4}+1=t^3$, da cui $x=(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}$ e

$$\mathrm{d}x=-4t^2(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}\,\mathrm{d}t,$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{x^{\frac{3}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\left((t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{7}{4}}t}(-4)t^2(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}\,\mathrm{d}t=-4\int t\,\mathrm{d}t\\&=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.24 **Integrali abeliani**

Calcolare gli integrali:

$$① \int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x;\qquad ② \int\sqrt{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione

Gli integrali appartengono alla famiglia degli *integrali abeliani*: integrali del tipo

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

over R è una funzione razionale; vi sono tre casi:

1) $a>0$ — si pone $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$;
2) $c>0$ — si pone $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx$;
3) $a<0$ e $b^2-4ac>0$ — dette x_1 e x_2 le radici del radicando (cioè le soluzioni di $ax^2+bx+c=0$), si pone $ax^2+bx+c=(x-x_1)^2t^2$, ovvero $a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)^2t^2$.

① L'integrale in esame ricade nel caso 1; poniamo dunque

$$\sqrt{x^2-x+1}=x+t\qquad(\text{cioè } t=\sqrt{x^2-x+1}-x),$$

elevando ambo i membri al quadrato otteniamo $x^2-x+1=x^2+2xt+t^2$, e dunque ricaviamo la x:

$$x=\frac{1-t^2}{2t+1},\qquad \mathrm{d}x=-2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

inoltre

$$\sqrt{x^2-x+1} = x+t = \frac{1-t^2}{2t+1}+t = \frac{t^2+t+1}{2t+1},$$

la funzione integranda diventa

$$\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{\left(\dfrac{1-t^2}{2t+1}\right)^2+\dfrac{1-t^2}{2t+1}+1}{\dfrac{1-t^2}{2t+1}\,\dfrac{t^2+t+1}{2t+1}} = \frac{t^4-2t^3+3t^2+6t+1}{(1-t^2)(t^2+t+1)}$$

possiamo allora trasformare l'integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^4-2t^3+3t^2+6t+1}{(1-t^2)(t^2+t+1)}(-2)\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int \frac{t^4-2t^3+3t^2+6t+1}{(1-t^2)(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \bigstar\end{aligned}$$

con un po' di conti, si vede che

$$-2\frac{t^4-2t^3+3t^2+6t+1}{(1-t^2)(2t+1)^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}-\frac{3}{2t+1}+\frac{5}{2}\frac{1}{(2t+1)^2},$$

dunque

$$\begin{aligned}\bigstar &= \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}-\frac{3}{2t+1}+\frac{5}{2}\frac{1}{(2t+1)^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{t}{2}+\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|-\frac{5}{4}\frac{1}{2t+1}+C\\ &= \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{2}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2-x+1}+x}{1+\sqrt{x^2-x+1}-x}\right|+\\ &\quad -\frac{3}{2}\ln|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1|-\frac{5}{4}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1}+C\end{aligned}$$

② Anche in questo caso, l'integrale ricade nel caso 1; poniamo dunque $\sqrt{x^2+x} = x+t$, elevando ambo i membri al quadrato otteniamo $x^2+x = x^2+2xt+t^2$, e dunque ricaviamo la x:

$$x = \frac{t^2}{1-2t}, \qquad \mathrm{d}x = 2\frac{t-t^2}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad x+t = \frac{t^2}{1-2t}+t = \frac{t-t^2}{1-2t};$$

possiamo allora trasformare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{t-t^2}{1-2t}\right)2\frac{t-t^2}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{(t-t^2)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t = \bigstar$$

con un po' di conti, si vede che

$$2\frac{(t-t^2)^2}{(1-2t)^3} = -\frac{t}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2t-1)} - \frac{1}{8(2t-1)^3},$$

dunque (ricordando che da $\sqrt{x^2+x} = x+t$ si ottiene $t = \sqrt{x^2+x} - x$)

$$\begin{aligned}
\bigstar &= \int \left(-\frac{t}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2t-1)} - \frac{1}{8(2t-1)^3}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{t^2}{8} + \frac{t}{8} + \frac{1}{8}\ln|2t-1| + \frac{1}{32(2t-1)^2} + C \\
&= \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+x} - 2x^2 - 2x}{8} + \frac{1}{8}\ln|2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1| + \\
&\quad + \frac{1}{32(2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1)^2} + C
\end{aligned}$$

8.1.4 Integrali impropri

ESERCIZIO 8.25 **Integrali su intervalli illimitati**

Stabilire per quali valori del parametro reale α il seguente integrale converge,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

per tali valori calcolarlo.

Soluzione

L'integrale su un dominio di integrazione illimitato è definito come limite di integrali su intervalli limitati:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cominciamo allora con il calcolare $\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ al variare di α, se $\alpha = 1$

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{\alpha=1}{=} \int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^R = \ln R;$$

se $\alpha \neq 1$

$$\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^R x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^R = \frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha};$$

quindi, se $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \ln R = +\infty,$$

e se $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}.$$

In definitiva:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ converge se } \alpha > 1, \\ \searrow \text{ diverge se } \alpha \leq 1. \end{array}$$

ESERCIZIO 8.26 **Integrali in presenza di discontinuità**

Stabilire per quali valori del parametro reale β, il seguente integrale converge,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x,$$

per tali valori calcolarlo.

Soluzione

Negli esempi che sceglieremo, ci limiteremo per semplicità al caso di un asintoto verticale, la definizione non cambia per funzioni comunque discontinue in uno dei due estremi dell'intervallo.

In questo caso, la funzione integranda presenta un asintoto verticale in corrispondenza dell'estremo sinistro. Se la funzione $f(x)$ presenta in $x = b$ un asintoto verticale, l'integrale di $f(x)$ su $[a, b]$ è definito come

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

analogamente, se la funzione $g(x)$ presenta in $x = a$ un asintoto verticale, l'integrale di $g(x)$ su $[a, b]$ è definito come

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nel nostro caso

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x,$$

se $\beta = 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \overset{\beta=1}{=} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon;$$

se $\beta \neq 1$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{R} x^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta};$$

quindi, se $\beta = 1$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = +\infty,$$

e se $\beta \neq 1$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ \dfrac{1}{1-\beta} & \text{se } \beta < 1 \end{cases}.$$

In definitiva[v]:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ converge se } \beta < 1, \\ \searrow \text{ diverge se } \beta \geq 1. \end{array}$$

ESERCIZIO 8.27 — Calcolo di integrali impropri

Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x; \qquad ② \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x; \qquad ③ \int_{0}^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione

Per ciascuno degli integrali, usiamo la definizione.

① L'integrale è improprio perché il dominio è illimitato, cominciamo con il calcolare la primitiva:

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

e quindi

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{3}^{R} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{3}^{R} = \frac{1}{\ln 3}.$$

---

[v] Ovviamente, questo risultato può essere generalizzato al caso di un asintoto verticale in $x = a$ (sia $b > a$):

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^{\beta}}\,\mathrm{d}x \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ converge se } \beta < 1, \\ \searrow \text{ diverge se } \beta \geq 1. \end{array}$$

② L'integrale è improprio perché il dominio è illimitato, calcoliamolo direttamente:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_1^R = e.$$

③ L'integrale è improprio perché in $x = 0$ la funzione integranda ha un asintoto verticale, la primitiva è (integrando per parti)

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C,$$

quindi

$$\int_0^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[x\ln x - x\Big]_\varepsilon^{e^2} = e^2.$$

ESERCIZIO 8.28 **Criteri per la convergenza degli integrali impropri**
Criterio del confronto asintotico

Stabilire se i seguenti integrali convergono o meno:

① $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$; ② $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+\sin x}{(x-1)(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$;

③ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; ④ $\displaystyle\int_0^{4} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x$;

⑤ $\displaystyle\int_0^{3} \frac{\sin x}{x^2e^x}\,\mathrm{d}x$; ⑥ $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1-e^{-\sqrt[3]{x-2}}}{\mathrm{Sh}\,(2-x)}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione

Per stabilire se un integrale improprio converge o no, vi sono due criteri, analoghi a quelli per le serie, iniziamo con il criterio del confronto asintotico[w].

[w] **Criterio del confronto asintotico** (1): Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite, positive e continue nell'intervallo $(a, +\infty)$, e per $x \to +\infty$ si ha che $f(x) \sim g(x)$, allora i due integrali $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere: o convergono entrambi o divergono entrambi.
Criterio del confronto asintotico (2): Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite, positive e continue nell'intervallo $(a, b]$, hanno entrambe un asintoto verticale in $x = a$ e per $x \to a^+$ si ha che $f(x) \sim g(x)$, allora i due integrali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere: o convergono entrambi o divergono entrambi.
Scriveremo $\int f \sim \int g$.

① L'integrale è improprio poiché il dominio è illimitato (in realtà, la funzione integranda ha un asintoto verticale in $x = -1$, ma tale valore è esterno all'intervallo di integrazione, perciò la cosa non ha alcuna importanza), esaminiamo quindi il comportamento all'infinito di $f(x)$:

$$\frac{2x-1}{(1+x)^3} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2},$$

poiché all'infinito $\frac{2}{x^2}$ è integrabile (la potenza è maggiore di 1), allora l'integrale dell'esercizio converge.

② Anche in questo caso l'integrale è improprio unicamente perché l'intervallo è illimitato

$$\frac{x+\sin x}{(x-1)(1+\sqrt[3]{x})} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

e pertanto l'integrale dato diverge, in quanto la potenza di x è minore di 1.

③ Per ogni x si verifica facilmente che $e^x - \sqrt{x} > 0$, pertanto non ci sono asintoti verticali al finito, l'integrale è improprio per la presenza dell'estremo $+\infty$, il comportamento asintotico all'infinito è

$$\frac{1}{e^x - \sqrt{x}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^x} = e^{-x};$$

poiché (esercizio precedente) per x che tende a $+\infty$ la funzione e^{-x} è integrabile, anche l'integrale assegnato converge.

④ L'integrale è improprio per la presenza di un asintoto in $x = 0$, usando le stime asintotiche

$$\begin{aligned} &\ln(1+\sqrt{x}) \overset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}, \\ &x(x+3) \overset{x\to 0}{\sim} 3x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x(x+3)} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{3x} = \frac{1}{3\sqrt{x}},$$

e poiché la potenza di x è minore di 1, l'integrale converge.

⑤ L'integrale è improprio per la presenza di un asintoto in $x = 0$, usiamo le stime asintotiche

$$\begin{aligned} &\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x, \\ &x^2 e^x \overset{x\to 0}{\sim} x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x^2 e^x} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

e pertanto l'integrale non converge (la potenza di x è uguale a 1).

⑥ L'integrale è improprio in $x = 2$, analizziamo il comportamento asintotico della funzione:

$$\begin{aligned} &1 - e^{-\sqrt[3]{x-2}} \overset{x\to 2}{\sim} \sqrt[3]{x-2}, \\ &\mathrm{Sh}\,(2-x) \overset{x\to 2}{\sim} 2-x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-e^{-\sqrt[3]{x-2}}}{\mathrm{Sh}\,(2-x)} \overset{x\to 2}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{2-x} = -\frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

e quindi (la potenza $\frac{2}{3}$ è minore di 1) la funzione è integrabile, quindi l'integrale converge.

ESERCIZIO 8.29 **Criteri per la convergenza degli integrali impropri**
Criterio del confronto

Stabilire se i seguenti integrali convergono :

① $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$; ② $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{6+\sin x}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$; ③ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione

Sempre in analogia con quanto accadeva per le serie, vi è a disposizione anche il criterio del confronto[x].

① Il nostro scopo è mostrare che l'integrale converge (ne siamo persuasi, per la presenza del termine in x^3 al denominatore della funzione integranda), dobbiamo allora trovare la funzione maggiorante g, integrabile nello stesso intervallo, poiché $2+\cos x \le 3$ e $x^3+1 \ge x^3$ allora

$$\frac{2+\cos x}{x^3+1} \le \frac{3}{x^3};$$

poiché inoltre

$$\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^3}\,\mathrm{d}x = 3\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

e sappiamo che quest'ultimo integrale converge, allora converge anche l'integrale di partenza.

---

[x] **Criterio del confronto** (1): Se nell'intervallo $(a,+\infty)$ la funzione $f(x)$ è minore o uguale a $g(x)$, ed entrambe sono continue e positive (cioè $\forall x \in (a,+\infty)$ si ha $0 \le f(x) \le g(x)$) allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ diverge},$$

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}.$$

Criterio del confronto (2): Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite e continue in$(a,b]$, hanno entrambe un asintoto verticale in $x=a$ e nell'intervallo $(a,b]$ la funzione $f(x)$ è minore o uguale a $g(x)$, ed entrambe sono continue positive (cioè $\forall x \in (a,b]$ si ha $0 \le f(x) \le g(x)$) allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ diverge},$$

$$\int_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}.$$

In tutti i casi, la relazione tra f e g verrà espressa con $\int f \le \int g$.

② Visto che il numeratore si comporta sostanzialmente come una costante, e al denominatore la funzione si comporta come $\sqrt{x}$, proviamo a dimostrare che l'integrale non converge trovando una funzione minorante, con la stessa tattica di prima

$$\frac{6+\sin x}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{5}{\sqrt{x}},$$

e quest'ultima è una funzione il cui integrale non converge:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 5\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,;$$

quindi diverge anche l'integrale di partenza.

③ La funzione integranda non è definitamente positiva, pertanto non possiamo usare il criterio del confronto. In generale, come con le serie di segno qualsiasi, se una funzione non ha segno costante, è possibile verificare la *convergenza assoluta* dell'integrale improprio, verificando se converge $\int |f(x)|\,\mathrm{d}x$, e come con le serie la convergenza assoluta implica la convergenza semplice. Nel caso in esame poiché

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$$

e l'integrale di $\frac{1}{x}$ non converge a $+\infty$, avendo maggiorato il modulo di f con una funzione che non converge nulla possiamo dire riguardo la convergenza assoluta[y]. Osserviamo che, poiché $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$, in $x = 0$ la funzione può essere prolungata con continuità e pertanto nel primo estremo l'integrale è ben definito. Scriviamo allora

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,;$$

per mostrare che l'integrale di partenza converge, è sufficiente mostrare che converge l'integrale su $[\pi, +\infty)$; lo calcoliamo per parti (integrando $\sin x$ e derivando $\frac{1}{x}$):

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\,\cos x\right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\cos x\,\mathrm{d}x$$

poiché $\left|\frac{1}{x^2}\cos x\right| \leq \frac{1}{x^2}$ l'ultimo integrale converge assolutamente, quindi semplicemente, e pertanto converge (semplicemente) anche l'integrale di partenza.

[y] In realtà, è possibile dimostrare che il nostro integrale non converge assolutamente.

ESERCIZIO 8.30 **Integrali impropri in entrambi gli estremi**

Determinare se i seguenti integrali convergono oppure no:

① $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(2+\sqrt{x})}\,dx$; ② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$;

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Soluzione

Se un integrale presenta in più di un punto un comportamento "improprio", è necessario studiarne separatamente il comportamento in corrispondenza di ciascuno di tali punti[z].

① L'integrale è improprio, sia per la presenza di un dominio illimitato, sia per la presenza di un asintoto verticale in $x = 0$, spezziamo l'integrale in due (in un qualsiasi punto di ascissa a):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(2+\sqrt{x})}\,dx = \int_0^{a} \frac{\arctan x}{x^2(2+\sqrt{x})}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(2+\sqrt{x})}\,dx,$$

verifichiamo che ciascuno dei due converga. Esaminiamo l'integrale su $(a, +\infty)$, per $x \to +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \arctan x \to \dfrac{\pi}{2} \\ x^2(1+\sqrt{x}) \sim x^{5/2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\arctan x}{x^2(1+\sqrt{x})} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{5/2}},$$

per il criterio del confronto asintotico ($\frac{5}{2} > 1$) l'integrale su $(a, +\infty)$ converge; passiamo all'integrale su $(0, a)$, per $x \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} \arctan x \sim x \\ x^2(1+\sqrt{x}) \sim 2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\arctan x}{x^2(2+\sqrt{x})} \sim \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x},$$

poiché la funzione è infinita di ordine 1, l'integrale non converge. Riassumendo

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^{a} & \text{non converge} \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} & \text{converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \quad \text{non converge.}$$

[z] Per esempio, in caso di un integrale su $(-\infty, +\infty)$, bisogna verificare singolarmente sia l'integrale a $+\infty$, sia quello a $-\infty$, se entrambi convergono, allora convergerà l'integrale di partenza.

② Notiamo che il denominatore della funzione integranda non si annulla mai, pertanto la funzione non presenta alcun asintoto verticale e l'integrale è improprio poiché il dominio di integrazione è tutto $\mathbb{R}$; lo spezziamo come nel caso precedente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x,$$

e poiché per $x \to \pm\infty$

$$\frac{1}{x^2+2x+10} \sim \frac{1}{x^2}$$

che è integrabile, entrambi gli integrali convergono, quindi converge anche l'integrale di partenza.

③ Operiamo esattamente come nel punto ②:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

nuovamente notiamo che per $x \to \pm\infty$

$$\frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x}$$

che non è integrabile, e quindi nessuno dei due integrali converge, a maggior ragione non convergerà l'integrale di partenza[aa].

ESERCIZIO 8.31 **Integrali impropri dipendenti da un parametro**

Determinare per quali valori dei parametri α, β e γ i seguenti integrali convergono:

① $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$; ② $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^{\beta}(x+2)}\,\mathrm{d}x$; ③ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^{\gamma}\sqrt{1-x^2}}$.

[aa] Il seguente ragionamento: poiché $\frac{x}{1+x^2}$ è dispari, allora per ogni valore R

$$\int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{e pertanto} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

è **errato**, perché secondo la nostra definizione i due integrali a $+\infty$ e a $-\infty$ devono convergere separatamente.

Soluzione

① Osservato che la funzione integranda non ha alcuna irregolarità in $(3, +\infty)$, esaminiamone il comportamento agli estremi dell'intervallo:

$$\frac{1}{x(x-3)^\alpha} \overset{x\to 3}{\sim} \frac{1}{3(x-3)^\alpha} \qquad \frac{1}{x(x-3)^\alpha} \overset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

pertanto, spezzando al solito l'integrale ($a > 3$):

$$\int_3^a \frac{1}{x(x-3)^\alpha}\,\mathrm{d}x \sim \int_3^a \frac{1}{3(x-3)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ che converge se } \alpha < 1,$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)^\alpha}\,\mathrm{d}x \sim \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x \text{ che converge se } \alpha+1>0 \Rightarrow \alpha > 0,$$

e quindi l'integrale del testo converge se $0 < \alpha < 1$.

② Anche in questo caso, la funzione è definita (e continua) in $(0, +\infty)$ per cui è sufficiente analizzare il suo comportamento agli estremi dell'intervallo d'integrazione:

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^\beta(x+2)} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^\beta} = \frac{1}{2x^{\beta-2}} \qquad \frac{1-e^{-x^2}}{x^\beta(x+2)} \overset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\beta+1}},$$

pertanto, spezzando l'integrale con $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{1-e^{-x^2}}{x^\beta(x+2)}\,\mathrm{d}x \sim \int_0^a \frac{1}{2x^{\beta-2}}\,\mathrm{d}x \text{ che converge se } \beta-2<1 \Rightarrow \beta < 3,$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^\beta(x+2)}\,\mathrm{d}x \sim \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\,\mathrm{d}x \text{ che converge se } \beta+1>0 \Rightarrow \beta > 0,$$

e quindi l'integrale converge se $0 < \beta < 3$.

③ Anche in questo caso, è sufficiente studiare il comportamento della funzione agli estremi di $(0, 1)$ (osserviamo che $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}$):

$$\frac{\sin x}{x^\gamma\sqrt{1-x^2}} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^\gamma} = \frac{1}{x^{\gamma-1}} \qquad \frac{\sin x}{x^\gamma\sqrt{1-x^2}} \overset{x\to 1}{\sim} \frac{\sin 1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}},$$

pertanto ($0 < a < 1$)

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x^\gamma\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \sim \int_0^a \frac{1}{x^{\gamma-1}}\,\mathrm{d}x \text{ che converge se } \gamma-1<1 \Rightarrow \gamma < 2,$$

$$\int_a^1 \frac{\sin x}{x^\gamma\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \sim \int_a^1 \frac{\sin 1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \text{ che converge,}$$

e quindi l'integrale del testo converge se $\gamma < 2$.

8.1.5 Applicazioni

ESERCIZIO 8.32 **Aree di figure piane**

Calcolare l'area delle seguenti regioni piane limitate:

① *la regione compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di* $f(x) = \ln x$, *quando* $\frac{1}{e^2} \leq x \leq e^3$;

② *la regione compresa tra il grafico di* $f(x) = x^2$ *e il grafico di* $g(x) = \sqrt{x}$;

③ *la regione compresa tra il grafico di* $f(x) = \cos x$ *e il grafico di* $g(x) = \sin x$, *quando* $0 \leq x \leq \pi$.

Soluzione

Data una generica funzione f, l'area della regione di piano compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f in un intervallo $[a, b]$ è data da

$$\int_a^b |f(x)|\, dx\,;$$

per prima cosa è quindi necessario, per calcolare l'area richiesta, analizzare il segno della funzione integranda, onde poter se necessario suddividere l'intervallo d'integrazione $[a, b]$ nei sottointervalli ove $f > 0$ e $f < 0$.

Date due generiche funzioni f e g, l'area della regione di piano compresa tra i rispettivi grafici in corrispondenza dell'intervallo $[a, b]$ è

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,;$$

anche in questo caso, è necessario analizzare il segno di $f(x) - g(x)$.

① Poiché sappiamo che $\ln x$ è positivo se $x > 1$ e negativo se $x < 1$, abbiamo che

$$\text{area} = \int_{\frac{1}{e^2}}^{e^3} |\ln x|\, dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} (-\ln x)\, dx + \int_1^{e^3} \ln x\, dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1} + \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^3} = e^2 + e^3 - 2\,.$$

② La regione in questione corrisponde all'intervallo $0 \leq x \leq 1$, in questo intervallo $\sqrt{x} \geq x^2$ quindi

$$\text{area} = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}|\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

③ Determinando il segno di $\cos x - \sin x$ per $0 \le x \le \pi$, troviamo che

$$\begin{cases} \cos x - \sin x > 0 & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x - \sin x < 0 & \dfrac{\pi}{4} < x < \pi \end{cases},$$

pertanto

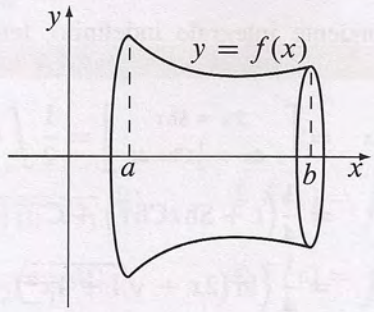
$$\begin{aligned} \text{area} &= \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) \, dx \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.33 **Solidi di rivoluzione**

Determinare il volume e la superficie laterale del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle ascisse il grafico della funzione $y = x^3$ con $0 \le x \le 1$.

Soluzione

Sia $f(x)$ una funzione positiva nell'intervallo (a, b), se immaginiamo di fare ruotare il grafico di $f(x)$ attorno all'asse delle ascisse, questo individuerà un solido di rotazione:



si può dimostrare che il volume V del solido ottenuto e l'area S_L della sua superficie laterale sono rispettivamente date da

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx, \qquad S_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx.$$

Nel nostro caso, $f(x) = x^3$, applicando le formule appena ricordate si trova

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^3\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 \, dx = \frac{\pi}{7};$$

inoltre

$$
\begin{aligned}
S_L &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\begin{array}{c} x^4 = t \\ x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t \\ 1^4 = 1 \quad 0^4 = 0 \end{array} \right] = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1+9t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{27} \left(1+9t\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{27} \left(\sqrt{1000} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 8.34 **Lunghezza di linee cartesiane**

Determinare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$, quando $0 \le x \le 1$.

Soluzione

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b), si dimostra che la lunghezza l della linea $y = f(x)$ è data da

$$
l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.
$$

Nel nostro caso $f(x) = x^2$, dunque

$$
l = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x;
$$

calcoliamo il corrispondente integrale indefinito, tenendo presente l'Esercizio 8.22, ⑤:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} 2x = \mathrm{Sh}\,t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{d}t \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \mathrm{Ch}^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} \left(t + \mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t \right) + C \\
&= \frac{1}{4} \left(\ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right) + 2x\sqrt{1+4x^2} \right) + C,
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
l = \frac{1}{4} \left[\ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right) + 2x\sqrt{1+4x^2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})}{4} \simeq 1.479.
$$

ESERCIZIO 8.35 **Masse e baricentri**

Una sbarretta, lunga 9 cm, ha densità lineare $f(x) = (10 + \sqrt{x})\,\frac{g}{cm}$ (ove x rappresenta la distanza dal primo estremo). Calcolare la massa della sbarretta e la distanza del baricentro dal primo estremo.

Soluzione

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva nell'intervallo (a, b), se attribuiamo ad $f(x)$ il significato di *densità di massa* (dunque avente come unità di misura $\frac{\text{unità di massa}}{\text{unità di lunghezza}}$) di una sbarretta – unidimensionale – corrispondente all'intervallo (a, b), allora la massa M della sbarretta e l'ascissa x_B del suo baricentro sono date rispettivamente da

$$M = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x_B = \frac{1}{M}\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nel caso del nostro esercizio, indichiamo con x la distanza (in cm) dal primo estremo del generico punto della sbarretta, e dunque

$$M = \int_0^9 (10 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left[10x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^9 = 108,$$

quindi la sbarretta pesa 108 g; inoltre

$$x_B = \frac{1}{108}\int_0^9 x(10 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{108}\left[5x^2 + \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_0^9 = \frac{93}{20} = 4.65,$$

dunque la distanza del baricentro dal primo estremo della sbarretta è 4.65 cm.

8.1.6 Funzioni integrali

ESERCIZIO 8.36 **Insiemi di definizione, segno**

Date le funzioni

① $F(x) = \displaystyle\int_4^x \frac{e^t}{1 + \sqrt{t(10-t)}}\,\mathrm{d}t$; ② $F(x) = \displaystyle\int_1^x \cos^2 t \ln t\,\mathrm{d}t$;

③ $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{e^t}{1 + \sqrt{t^2 - t}}\,\mathrm{d}t$; ④ $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{e^t}{1 + \sqrt{t^2 - t}}\,\mathrm{d}t$;

⑤ $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t+1}\,\mathrm{d}t$; ⑥ $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t+1}}\,\mathrm{d}t$;

stabilire quale sia l'insieme di definizione D_F di ciascuna di esse. Per le funzioni dei punti ①-④ specificare in quale sottoinsieme di D_F F è positiva e in quale è negativa.

Soluzione

Data una funzione $f(t)$, continua in un intervallo (a, b), il teorema fondamentale del Calcolo[bb] garantisce che la sua *funzione integrale* $F(x)$ sia (continua e) derivabile in tutti i valori x dell'intervallo (a, b). La condizione data da tale teorema può essere però talvolta "superata", e l'insieme di definizione di $F(x)$ può essere più esteso del corrispondente insieme di f: se la funzione integranda presenta in $x = \bar{x}$ un asintoto verticale, e in un intorno di $\bar{x}$ l'integrale (improprio) converge, allora la funzione integrale potrà essere definita anche in $x = \bar{x}$; se inoltre f è definita da ambo le parti di $\bar{x}$ allora $F(x)$ può "scavalcare" l'asintoto verticale.

① L'insieme di definizione della funzione integranda è $D_f = [0, 10]$, dove f è continua; dunque l'insieme di definizione di F è $D_F = [0, 10]$. Osserviamo poi che la $f(t) > 0$ in tutto D_f, quindi

$$x > 4 \Rightarrow \int_4^x f(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

mentre (poiché cambiare l'ordine degli estremi di un integrale equivale a cambiare di segno il risultato)

$$x < 4 \Rightarrow \int_4^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^4 f(t)\,\mathrm{d}t < 0\,;$$

In definitiva il segno di $F(x)$ si comporta come segue:

$0 \le x < 4$	$x = 4$	$4 < x \le 10$
$F(x) < 0$	$F(x) = 0$	$F(x) > 0$

② L'insieme di definizione della funzione integranda è $D_f = (0, +\infty)$, dove f è continua; dunque F è definita (e derivabile) in tutto D_f; osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_1^0 \cos^2 t \ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \cos^2 t \ln t\,\mathrm{d}t,$$

l'ultimo integrale, che è improprio nel primo estremo, converge poiché

$$\cos t \ln t \overset{x\to 0}{\sim} \ln t$$

e per $t \to 0$ la funzione logaritmo è integrabile (Esercizio 8.24, ③), quindi esiste finito

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = l_0,$$

[bb] **Teorema fondamentale del Calcolo**: data $f(t)$ continua in (a, b) e dato $x_0 \in (a, b)$, sia

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t:$$

la funzione $F(x)$ è derivabile in (a, b) e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.

e dunque $D_F = [0, +\infty)$. Per quanto riguarda il segno di F, abbiamo che $f(t) > 0$ per $t > 1$ e $f(t) < 0$ per $0 < t < 1$, dunque se $x > 1$ avremo ovviamente che $F(x) > 0$, mentre se $0 < x < 1$ la corrispondente $F(x)$ è un integrale di una funzione negativa (e quindi avente valore negativo), ma con i due estremi in ordine scambiato. Riportando dunque i due estremi nel corretto ordine crescente e cambiando nuovamente valore all'integrale, si ottiene un risultato positivo; in definitiva $F(x) > 0$ anche per $0 < x < 1$.

③ L'insieme di definizione della funzione integranda è $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, ivi f è continua. Tuttavia, non è possibile calcolare l'integrale di f su un intervallo che contenga $(0, 1)$, ove f non è definita. Poiché dunque il "campo base" da cui calcoliamo i valori di F è $x_0 = 2$, F è definita solo per quei valori di x per i quali l'integrale tra 2 e x ha senso, dunque per $x \geq 1$, in definitiva quindi $D_F = [1, +\infty)$. Poiché analogamente al punto ① la funzione integranda è positiva per ogni valore di t, possiamo concludere che $F(2) = 0$, $F(x) > 0$ se $x > 2$ e $F(x) < 0$ per $1 \leq x < 2$.

④ La funzione integranda è la stessa del punto precedente. Valgono dunque le stesse considerazioni fatte pocanzi. L'unica differenza è nel "campo base": poiché $x_0 = -1$, in questo caso ad avere significato sono gli integrali tra -1 e x con $x \leq 0$, dunque $D_F = (-\infty, 0]$. Ancora una volta, sfruttando gli stessi argomenti del punto precedente, possiamo concludere che $F(-1) = 0$, $F(x) > 0$ se $-1 < x \leq 2$ e $F(x) < 0$ per $x < -1$.

⑤ L'insieme di definizione della funzione integranda è $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, ivi f è continua. Osserviamo che la funzione integranda non è integrabile in senso improprio in un intorno di $\bar{x} = -1$, poiché il numeratore è finito e il denominatore è un infinitesimo del primo ordine; ripetendo dunque lo stesso ragionamento del precedente punto ③, poiché $x_0 = 1$ l'integrale che definisce F dev'essere fatto su un intervallo interamente alla destra di $\bar{x}$, e dunque $D_F = (-1, +\infty)$.

⑥ Come al punto precedente, l'insieme di definizione della funzione integranda è $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, ivi f è continua. Al contrario di prima, tuttavia, $f(t)$ è integrabile (in senso improprio) nell'intorno di $\bar{x} = -1$; dunque è possibile attribuire un valore anche agli integrali calcolati su un intervallo che comprende $\bar{x}$, a titolo di esempio

$$\begin{aligned} F(-2) &= \int_1^{-2} \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t+1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{1} \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\left\{\int_{-2}^{-1} \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t+1}}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t+1}}\,\mathrm{d}t\right\} \end{aligned}$$

ed entrambi i due integrali che compaiono all'ultimo membro sono convergenti. In definitiva, grazie all'integrabilità in senso improprio di $f(t)$ nell'intorno di $\bar{x} = -1$ possiamo dire che $F(x)$ è definita su tutto $D_F = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 8.37 **Simmetrie**

Date le funzioni

$$① \; F(x) = \int_2^x \frac{te^{t^2}}{\sqrt[4]{t^2+2}}\,dt; \qquad ② \; F(x) = \int_0^x \frac{\sin t^4}{t^2+1}\,dt;$$

$$③ \; F(x) = \int_1^x \frac{\sin t^4}{t^2+1}\,dt;$$

stabilire se il grafico di ciascuna di esse abbia simmetrie particolari.

Soluzione

Sappiamo che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari, e che la derivata di una funzione dispari è una funzione pari. È possibile dimostrare che la funzione integrale di una funzione dispari è (sempre) una funzione pari, mentre non è detto che la funzione integrale di una funzione pari sia una funzione dispari: se $f(t)$ è pari, allora

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

è una funzione dispari, mentre per ogni $x_0 \neq 0$ la funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

non è né pari né dispari, o meglio il grafico di $F(x)$ è quello di una funzione dispari, traslata in verticale:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{x_0}^0 f(t)\,dt}_{\text{valore costante}} + \underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{\text{funzione dispari}}.$$

① La funzione integranda è dispari, dunque $F(x)$ è pari.

② La funzione integranda è pari; $F(x)$ è definita partendo da $x_0 = 0$, dunque è una funzione dispari.

③ La funzione integranda (la stessa del punto precedente) è pari; in questo caso $x_0 \neq 0$, dunque $F(x)$ non ha simmetrie evidenti (ma si tratta pur sempre di una funzione dispari traslata).

ESERCIZIO 8.38 **Comportamento all'infinito**

Determinare il comportamento per $x \to +\infty$ delle funzioni seguenti

$$① \; F(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{2+\sin t^4}\,dt; \qquad ② \; F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}}\,dt;$$

$$③ \; F(x) = \int_0^x \frac{2t^2+\ln(t+1)}{t^2+e^{-t}}\,dt; \quad ④ \; F(x) = \int_0^x \frac{2t+\ln(t+1)}{t+e^{-t}}\,dt.$$

Soluzione

Sappiamo che (Esercizio 7.18) le informazioni relative al comportamento per $x \to +\infty$ di una funzione $f(x)$ si hanno dallo studio del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$

e, qualora questo esista finito (diciamo uguale a m),

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$

Esaminiamo i casi proposti dal testo, sfruttando il teorema di de l'Hôpital per sbarazzarci delle difficoltà dovute alla definizione di $F(x)$ tramite integrale: ricordiamo infatti che – grazie al teorema fondamentale del Calcolo – $F'(x) = f(x)$, ove f è la funzione integranda.

① Poiché (per definizione di integrale improprio)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2+1}{2+\sin t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{2+\sin t^4}\,\mathrm{d}t$$

e l'ultimo integrale diverge a $+\infty$ (per il criterio del confronto: $\frac{t^2+1}{2+\sin t^4} > \frac{t^2}{3}$), studiamo l'eventuale presenza di asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2+1}{2+\sin t^4}\,\mathrm{d}t}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+1}{2+\sin x^4}}{1} = +\infty.$$

Poiché il limite trovato è $+\infty$, possiamo concludere che la funzione $F(x)$ tende a $+\infty$ con la concavità rivolta verso l'alto.

② Come al punto precedente, studiamo il comportamento di F:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t.$$

L'ultimo integrale converge, dunque F ha un asintoto orizzontale: $F(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ove

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t.$$

Possiamo (ma è facoltativo) provare a "quantificare" l: osserviamo — e si tratta di una maggiorazione alquanto grossolana — che per $t > 0$ abbiamo $1 < \sqrt{t+2} < e^t$, dunque

$$\frac{e^{-t}}{e^t} < \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}} < \frac{e^{-t}}{1}.$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ otteniamo

$$\frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t < l < \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

③ $F(x)$ è infinita per $x \to +\infty$, infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{2t^2 + \ln(t+1)}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 + \ln(t+1)}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

e l'ultimo integrale diverge. Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{2t^2 + \ln(t+1)}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^2 + \ln(x+1)}{x^2 + e^{-x}}}{1} = 2.$$

Il candidato coefficiente angolare dell'asintoto è $m = 2$, passiamo al termine noto[cc]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [F(x) - 2x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[\int_0^x \frac{2t^2 + \ln(t+1)}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left[\frac{2t^2 + \ln(t+1)}{t^2 + e^{-t}} - 2\right]\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\ln(t+1) - 2e^{-t}}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+1) - 2e^{-t}}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale converge per il criterio del confronto asintotico[dd], dunque la funzione F ammette asintoto obliquo a $+\infty$.

④ La situazione è analoga a quella del punto precedente:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 2.$$

[cc] È comodo osservare che

$$x = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t.$$

[dd] È infatti possibile mostrare che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,\mathrm{d}x$$

converge $\forall\beta$ se $\alpha > 1$, e converge $\forall\beta > 1$ se $\alpha = 1$, mentre diverge in tutti gli altri casi.

Se ora proviamo a determinare q (il termine noto dell'asintoto obliquo), con conti identici a quelli appena svolti otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[F(x)-2x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^x \frac{2t+\ln(t+1)}{t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\ln(t+1)-2e^{-t}}{t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln(t+1)-2e^{-t}}{t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale diverge; in definitiva F non ammette asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

ESERCIZIO 8.39 — Polinomio di Taylor

Date le funzioni

$$① \; F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t; \qquad ② \; F(x)=\int_2^{x^2+1}\sin t^2\,\mathrm{d}t;$$

scrivere per ciascuna di esse il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0=1$, disegnare inoltre un grafico qualitativo di F nell'intorno di $x_0=1$.

Soluzione

Sappiamo che il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in x_0 di una generica funzione $f(x)$ è

$$T_2(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2;$$

in entrambi i casi, occorre determinare il valore di F e delle sue derivate prima e seconda in $x_0=1$.

① Osserviamo immediatamente che $F(1)=0$, inoltre (detta, al solito, f la funzione integranda)

$$F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x},\; F''(x)=f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2} \;\Rightarrow\; F'(1)=e,\; F''(1)=0.$$

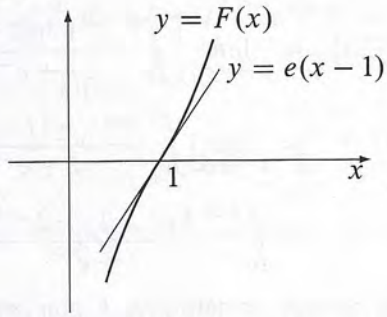
In definitiva il polinomio cercato è

$$T_2(x)=0+e(x-1)+\frac{1}{2}0\,(x-1)^2=e(x-1).$$

Per disegnare un grafico qualitativo nell'intorno di un punto, avremmo bisogno di informazioni circa la concavità/convessità di F. La derivata seconda indica la possibile presenza di un flesso; ricorriamo dunque alla derivata terza:

$$F'''(x)=f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} \;\Rightarrow\; F'''(1)=e.$$

La funzione F ha pertanto in $x = 1$ un flesso ascendente, ed il suo grafico qualitativo nell'intorno del punto è



② La funzione F del testo non è propriamente una funzione integrale, bensì una funzione composta con una funzione integrale[ee]. Detto $\beta(x) = x^2 + 1$, osserviamo che $\beta(1) = 2$ e dunque $F(1) = 0$ (poiché i limiti dell'integrale coincidono); inoltre

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) = 2x\sin[(x^2+1)^2] \quad \Rightarrow \quad F'(1) = 2\sin 4.$$

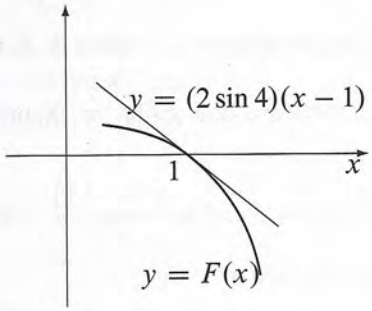
Derivando la F' così ottenuta

$$F''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\sin[(x^2+1)^2]\right) = 2\sin[(x^2+x)^2] + 8x^2(x^2+1)\cos[(x^2+1)^2].$$

Dunque $F''(1) = 2\sin 4 + 16\cos 4$, in definitiva

$$T_2(x) = (2\sin 4)(x-1) + \frac{1}{2}(2\sin 4 + 16\cos 4)(x-1)^2.$$

Infine, poiché $\sin 4 < 0$ e $\cos 4 < 0$, e quindi $F'(1) < 0$, $F''(1) < 0$, il grafico di $F(x)$ in un intorno di $x = 1$ è



[ee] È sufficiente adattare il teorema fondamentale del Calcolo, per ottenere (a patto che tutte le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari):

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

8.2 Esercizi proposti

40 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$① \int (3x^5 - 4x^4 + x^2 - 3x - 6)\,\mathrm{d}x; \quad ② \int (\cos 2x - \sin 3x + e^{-3x})\,\mathrm{d}x;$$

$$③ \int 2^x e^{-x}\,\mathrm{d}x; \quad ④ \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x; \quad ⑤ \int \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

$$\left[① \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{4}{5}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + C;\ ② \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + C\right]$$

$$\left[③ \tfrac{2^x e^{-x}}{\ln(2)-1} + C;\ ④ \tan x - x + C;\ ⑤ \ln(e^x + 1) + C\right]$$

41 Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$① \int_{-\pi}^{\pi} \left(x|x^3| - \cos^3 x + \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x;$$

$$② \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x|x^3| - \cos^3 x + \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x;$$

$$③ \int_{-1}^{1} \left(x^3\cos(x^2) - \sin(x^3) + \sqrt[3]{|x|} + \ln(x+2)\right)\mathrm{d}x.$$

$$\left[① 0;\ ② \tfrac{4}{3};\ ③ 3\ln(3) - \tfrac{1}{2}\right]$$

42 Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$① \int_0^7 \lfloor \sqrt{x} \rfloor\,\mathrm{d}x; \quad ② \int_0^9 \mathrm{mant}\,(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x; \quad ③ \int_0^{2\pi} \lfloor 2\sin x \rfloor\,\mathrm{d}x.$$

$$[① 9;\ ② 5;\ ③ -\pi]$$

43 Calcolare le aree delle regioni piane sotto elencate:

① regione piana limitata compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione $y = x^2 - 2x$, quando $x \in [0, 3]$;
② regione piana limitata compresa tra le funzioni $y = x^2 - 2x$ e $y = 3x - x^2$;
③ regione piana limitata compresa tra le funzioni $y = 2x + 3$ e $y = x^2$.

$$\left[① \tfrac{8}{3};\ ② \tfrac{125}{24};\ ③ \tfrac{32}{3}\right]$$

44 Calcolare i seguenti integrali indefiniti ($H(x)$ è la funzione di Heaviside):

$$① \int xH(x)\,\mathrm{d}x; \quad ② \int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x.$$

$$\left[① \tfrac{1}{2}x^2 H(x) + C;\ ② \operatorname{sgn}(x)(1 - e^{-|x|}) + C\right]$$

45 Calcolare i seguenti integrali ($n \in \mathbb{N}$, α e β sono dei parametri reali):

$$① \int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx; \qquad ② \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx\,.$$

$$\left[① \tfrac{(-1)^n-1}{n^2};\ ② \tfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))+C\right]$$

46 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx; \qquad ② \int_3^4 \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx\,;$$

$$③ \int_{1/2}^1 \frac{4x+1}{4x^2-8x+5}\,dx\,; \qquad ④ \int_3^4 \frac{x+2}{4x^2-8x-5}\,dx\,;$$

$$⑤ \int_2^3 \frac{x+3}{x^3-x^2+x-1}\,dx; \qquad ⑥ \int_0^1 \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}\,dx\,.$$

$$\left[① \arctan\tfrac{2}{3}-\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{13}{8};\ ② 2\ln\tfrac{54}{25};\ ③ \tfrac{5\pi-4\ln 2}{8}\right]$$

$$\left[④ \tfrac{1}{8}\ln 21;\ ⑤ \ln 2-\arctan 3+\arctan 2;\ ⑥ \tfrac{\pi+\ln 2}{2}\right]$$

47 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_0^1 \ln(4x^2+1)\,dx; \qquad ② \int_{-1}^1 \left(xe^{-x}-\sin\sqrt[3]{x}\right)dx\,;$$

$$③ \int_{1/2}^1 \arctan(2x-1)\,dx; \qquad ④ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\ln(2x+1)}}{2x+1}\,dx\,;$$

$$⑤ \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\,dx; \qquad ⑥ \int_0^1 \left(x^2+\sqrt[4]{1+e^x}\right)e^x\,dx\,.$$

$$\left[① \ln 5+\arctan 2-2;\ ② -2e^{-1};\ ③ \tfrac{\pi-2\ln 2}{8}\right]$$

$$\left[④ \tfrac{3}{8}\sqrt[3]{(\ln 3)^4};\ ⑤ \tfrac{5}{3}\ln 2-\ln 3;\ ⑥ e-2+\tfrac{4}{5}\left(\sqrt[4]{(1+e)^5}-\sqrt[4]{32}\right)\right]$$

48 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_0^{\pi/4} (\cos^3 x-\sin^3 x)\sin x\,dx; \qquad ② \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x-3\cos x}{2+\sin x}\,dx\,.$$

$$\left[① \tfrac{14-3\pi}{32};\ ② \tfrac{9-4\sqrt{3}}{9}\pi+3\ln\tfrac{2}{3}\right]$$

49 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3-\cos x}{(1+2\cos x)\sin^2 x}\,dx; \qquad ② \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx.$$

$$\left[① \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(9-7\sqrt{3}+14\ln\tfrac{1+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}\right);\ ② \ln\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{4}\right]$$

50 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^7-1}}\,dx; \qquad ② \int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}}{x\sqrt[12]{x^7}}\,dx.$$

$$\left[① \tfrac{2}{7}\left(\arctan\sqrt{2186}-\arctan\sqrt{127}\right);\ ② \tfrac{12}{7}\left(\sqrt[3]{2^7}-\sqrt[3]{\tfrac{3^7}{2^7}}\right)\right]$$

51 Calcolare i seguenti integrali:

$$① \int_{-3}^{-2} \frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+2x}}\,dx; \qquad ② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[12]{x^2+x+1}}\,dx.$$

$$\left[\begin{array}{l} ① \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{30}+4-\sqrt{2})(\sqrt{8}+2+\sqrt{2})}{(\sqrt{30}+4+\sqrt{2})(\sqrt{8}+2-\sqrt{2})}; \\ ② \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{7}{2}+\frac{3}{2(1+2\sqrt{3})}+\ln\left(1+2\sqrt{3}\right)\right) \end{array}\right]$$

52 Stabilire per quali valori dei parametri contenuti i seguenti integrali impropri convergono:

$$① \int_0^{10} \frac{x\sin x}{(x^2+x)^\alpha}\,dx; \quad ② \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha}{(x+3)^3+e^{\beta x}}\,dx; \quad ③ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{\alpha x}}{(x+6)^\beta}\,dx.$$

$$\left[① \alpha<3;\ ② \begin{cases}\beta>0 \Rightarrow \forall\alpha \\ \beta\le 0 \Rightarrow \alpha<2\end{cases};\ ③ \begin{cases}\alpha>0 \Rightarrow \nexists\beta \\ \alpha=0 \Rightarrow \beta>2 \\ \alpha<0 \Rightarrow \forall\beta\end{cases}\right]$$

53 Stabilire per quali valori dei parametri contenuti i seguenti integrali impropri convergono:

$$① \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{(x+1)(x-1)^\gamma}\,dx; \qquad ② \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma\sqrt{x}}\sin x}{x^\gamma}\,dx;$$

$$③ \int_0^{+\infty} \frac{x^\gamma[\ln(e^x-1)]}{x^2(1+x^4)}\,dx; \qquad ④ \int_2^{+\infty} \frac{xe^{\alpha x}}{(x^2+x-6)^\beta}\,dx.$$

$$[① 0<\gamma<1;\ ② 0<\gamma<2;\ ③ 1<\gamma<4;\ ④ \alpha<0, \beta<1]$$

54 Calcolare il volume V e la superficie laterale S_L dei solidi di rotazione ottenuti facendo ruotare attorno all'asse delle ascisse le seguenti funzioni, negli intervalli indicati:

$$① f(x)=\mathrm{Ch}\,x,\ 0<x<1; \qquad ② f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi.$$

$$\left[\begin{array}{l} ① V=\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{Sh}\,1\mathrm{Ch}\,1), S_L=\pi(1+\mathrm{Sh}\,1\mathrm{Ch}\,1); \\ ② V=\frac{\pi^2}{2}, S_L=2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})) \end{array}\right]$$

55 Calcolare la lunghezza l delle curve cartesiane individuate dalle seguenti funzioni, negli intervalli indicati:

$$① \ f(x) = \sqrt{x^3},\ 0 < x < 1, \qquad ② \ f(x) = \operatorname{Ch} x,\ 0 < x < 1.$$

$$\left[① \ l = \tfrac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8); ② \ l = \operatorname{Sh} 1\right]$$

56 Una sbarretta è lunga 1 m, e ha densità lineare

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right],$$

(ove x rappresenta la distanza dal primo estremo). Calcolare la massa M della sbarretta e la distanza d del baricentro dal primo estremo.

$$\left[M = \tfrac{\pi + \ln 4}{4} \simeq 1.1320\,kg,\ d = \tfrac{4 - \pi + \ln 4}{\pi + \ln 4} \simeq 49.58\,cm\right]$$

57 Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$F(x) = \int_1^x e^{\alpha t} \ln t \, dt.$$

CAPITOLO 9 Algebra lineare

9.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

9.1.1 Algebra delle matrici e dei vettori

ESERCIZIO 9.1 **Le matrici e le loro dimensioni**
Vettori riga e vettori colonna

Scrivere la matrice **A** *i cui elementi sono definiti dalla relazione* $a_{ij} = 10i + 2j$, *con* $i \in \{1, 2, 3\}$ *e* $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, *scrivere la matrice* **B** *formata da una sola colonna, il cui generico elemento* b_k *è* -1^k, *con* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soluzione

Se una matrice **M** ha n righe e m colonne, indicheremo questo fatto con la scrittura $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(n, m)$; le matrici del testo sono rispettivamente $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(3, 4)$ e $\mathbf{B} \in \mathscr{M}(5, 1)$, e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 & 18 \\ 22 & 24 & 26 & 28 \\ 32 & 34 & 36 & 38 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

una matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(n, 1)$, come ad esempio **B**, viene detta anche *vettore colonna*, una matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(1, m)$ viene detta anche *vettore riga*.

ESERCIZIO 9.2 **Matrice trasposta**

Scrivere le matrici trasposte delle matrici **A** *e* **B** *dell'esercizio precedente.*

Soluzione

Data una matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(n, m)$, la sua matrice trasposta $\mathbf{M}^{\mathsf{T}} \in \mathscr{M}(m, n)$ si ottiene scambiando righe e colonne. La trasposta di un vettore riga è un vettore colonna, la trasposta di un vettore colonna è un vettore riga. Nel caso in esame, abbiamo rispettivamente

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 12 & 22 & 32 \\ 14 & 24 & 34 \\ 16 & 26 & 36 \\ 18 & 28 & 38 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Osservazione: da adesso in avanti, le matrici verranno indicate con le lettere maiuscole, in grassetto; quando faremo esplicitamente riferimento a *vettori* (cioè a matrici con una sola riga o una sola colonna), si tratterà sempre di *vettori colonna*, in altre parole: il simbolo $\mathbf{v}$ indicherà sempre un vettore colonna, mentre $\mathbf{v}^T$ indicherà un vettore riga.

ESERCIZIO 9.3 **Prodotto di una matrice per un numero**
Somma e differenza di matrici

Date le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix},$$

calcolare $3\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ *e* $3\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$.

Soluzione

Il prodotto di una matrice per un numero λ si ottiene moltiplicando per λ tutti gli elementi della matrice:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix};$$

e allora

$$3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 21 & -3 \\ 9 & 30 \end{bmatrix}.$$

Somma (e differenza) di due matrici *aventi lo stesso numero di righe e di colonne* si effettuano sommando (sottraendo) gli elementi corrispondenti, ad esempio:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix};$$

nel nostro caso

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 27 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$3\mathbf{A} - 4\mathbf{B} = 3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ -19 & -7 \\ 13 & 50 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.4 **Prodotto fra matrici**

Date le seguenti matrici

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

calcolare **MN** *e* **NM**.

Soluzione

Il prodotto tra due matrici si può effettuare solo se il numero di colonne del primo fattore corrisponde al numero di righe del secondo fattore (si chiamano *conformabili* due matrici che soddisfano questa proprietà), inoltre il numero di righe del risultato corrisponde al numero di righe del primo fattore, mentre il numero di colonne del risultato corrisponde al numero di colonne del secondo fattore, ossia: se $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(n,k)$ e $\mathbf{B} \in \mathscr{M}(k,m)$, allora $\mathbf{AB} \in \mathscr{M}(n,m)$:

$$\underset{(n,k)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(k,m)}{\mathbf{B}} = \underset{(n,m)}{\mathbf{AB}}$$

uguali!

L'elemento c_{ij} della matrice AB si calcola prendendo la riga i-esima della matrice A e la colonna j-esima della matrice B, moltiplicando gli elementi corrispondenti e sommando i risultati:

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ a_{i1}\ a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_{kj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\text{ove} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

La matrice **MN** avrà tante righe quante sono le righe di **M** (cioè 2) e tante colonne quante sono le colonne di **N** (cioè 2), e avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{MN} &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 4 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 3\cdot(-10) \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 4 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot(-10) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -31 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

invece, la matrice **NM** ha tante righe quante sono le righe di **N** (cioè 3) e tante colonne quante sono le colonne di **M** (cioè 3):

$$\begin{aligned} \mathbf{NM} &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + (-10)\cdot 1 & 4\cdot 1 + (-10)\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-10)\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -16 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il prodotto tra matrici non è commutativo, cioè in generale $\mathbf{MN} \neq \mathbf{NM}$.

ESERCIZIO 9.5 **Prodotto fra vettori e matrici**

Data la matrice $\mathbf{A}$ *e i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sotto indicati,*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

calcolare $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{Aw}$.

Soluzione

Il prodotto tra una matrice $\mathbf{A}$ ed un vettore $\mathbf{u}$ (ricordiamo che per noi un vettore è innanzitutto un vettore colonna) deve sottostare alle regole del prodotto tra matrici; pertanto, se $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(n, m)$:

- per calcolare il prodotto $\mathbf{Au}$ è necessario che $\mathbf{u}$ abbia m componenti, ossia $\mathbf{u} \in \mathscr{M}(m, 1)$:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,1)}{\mathbf{u}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{Au}} \quad ;$$

- per calcolare il prodotto $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ è necessario che $\mathbf{u}$ abbia n componenti, $\mathbf{u} \in \mathscr{M}(n, 1)$ e dunque $\mathbf{u}^\mathsf{T} \in \mathscr{M}(1, n)$:

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{u}^\mathsf{T}} \cdot \underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \underset{(1,m)}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}} \quad ;$$

$\mathbf{v}^\mathsf{T}$ è un vettore riga, avente due colonne (tante quante le righe di $\mathbf{A}$), quindi $\mathbf{v}^\mathsf{T}$ e $\mathbf{A}$ sono conformabili e

$$\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{w}$ è un vettore colonna, formato da tre righe, e la matrice $\mathbf{A}$ ha tre colonne, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{w}$ sono conformabili e

$$\mathbf{Aw} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.6 **Prodotto fra matrici e trasposizione**

Siano $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(n, k)$ *e* $\mathbf{B} \in \mathscr{M}(k, m)$, *dimostrare che*

$$(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

Soluzione

Le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono conformabili per ipotesi. Sia α_{ij} l'elemento che si trova sulla riga i-esima e sulla colonna j-esima del primo membro dell'uguaglianza (cioè di $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}$), e sia β_{ij} l'elemento che si trova sulla riga i-esima e sulla colonna

j-esima del secondo membro dell'uguaglianza (cioè di $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$), mostriamo che i due valori coincidono.

In seguito alla trasposizione, α_{ij} è l'elemento che si trova sulla j-esima riga e sulla i-esima colonna di $\mathbf{AB}$, dunque

$$\alpha_{ij} = \sum_{h=1}^{k} a_{jh}b_{hi} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jk}b_{ki};$$

βij è l'elemento che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna di $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, dunque il prodotto dell'i-esima riga di $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ (e cioè la i-esima colonna di $\mathbf{B}$, che è diventata riga) con la j-esima colonna di $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ (e cioè la j-esima riga di $\mathbf{A}$, che è diventata colonna), in formule

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ b_{1i} & b_{2i} \cdots & b_{ki} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & a_{j1} & \\ & a_{j2} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_{jk} & \end{bmatrix} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \ldots + b_{ki}a_{jk}.$$

Osserviamo che $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, e dunque la proprietà è dimostrata.

ESERCIZIO 9.7 **Matrici triangolari e diagonali**

Mostrare che se $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono triangolari superiori (inferiori), allora lo sono anche la somma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *e il prodotto* $\mathbf{AB}$*, mostrare che se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono diagonali, allora lo sono anche la somma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *e il prodotto* $\mathbf{AB}$.

Soluzione

Si dice *triangolare superiore* una matrice quadrata $\mathbf{T}_S$ i cui elementi sotto la diagonale sono tutti nulli, si dice *triangolare inferiore* una matrice quadrata $\mathbf{T}_I$ i cui elementi sopra la diagonale sono tutti nulli:

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_I = \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

si dice *diagonale* una matrice $\mathbf{D}$ in cui tutti gli elementi sia sopra sia sotto la diagonale sono nulli:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

Il fatto che la somma di matrici triangolari superiori dia ancora una matrice triangolare superiore, che la somma di matrici triangolari inferiori dia ancora una matrice triangolare inferiore, e che la somma di matrici diagonali dia ancora una

matrice diagonale è immediato; scriviamolo nel caso di due matrici triangolari superiori: se **A** e **B** sono triangolari superiori, allora

$$j > i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{ij} = 0 \\ b_{ij} = 0 \end{cases}$$

se $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, abbiamo

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \overset{j>i}{=} 0 + 0$$

per quanto riguarda il prodotto, se $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$, allora preso $j > i$ dobbiamo dimostrare che $m_{ij} = 0$, infatti

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot 0 + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} = 0; \end{aligned}$$

infatti nei termini della prima sommatoria $b_{kj} = 0$ perché k va da 0 a i, che è minore di j per ipotesi; nei termini della seconda sommatoria $a_{ik} = 0$ perché k va da $i + 1$ a n, e pertanto è maggiore di i. Analoghi conti si possono fare con le matrici triangolari inferiori. Per le matrici diagonali, è sufficiente osservare che una matrice diagonale è contemporaneamente triangolare superiore e triangolare inferiore.

ESERCIZIO 9.8 **Matrici a scala**

Dire se ciascuna delle matrici

$$① \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad ② \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$③ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad ④ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

è una matrice a scala.

Soluzione

Diciamo che una riga di una matrice è una *riga nulla* se tutti i suoi elementi sono nulli, se una riga non è nulla, chiamiamo *pivot* il primo elemento (da sinistra a destra) diverso da zero.

Una matrice è *a scala* se verifica le seguenti due caratteristiche:

- *se vi è una o più righe nulle, queste sono le ultime righe della matrice* (in altre parole: dopo una riga nulla non vi può essere una riga che non sia nulla);
- il *pivot* di ciascuna riga dev'essere a destra dei *pivot* delle righe precedenti.

In ciascuna matrice segniamo in grassetto i *pivot* e lasciamo indicati gli zeri che li precedono; sostituiamo invece un asterisco ai numeri che non giocano alcun ruolo.

① La matrice è

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & * & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & * \end{bmatrix},$$

il *pivot* della terza riga non è alla destra del *pivot* della seconda riga, dunque la matrice non è a scala.

② La matrice è

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & * \end{bmatrix},$$

ciascun *pivot* è a destra dei precedenti, dunque la matrice è a scala.

③ La matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & * & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * \end{bmatrix},$$

ciascun *pivot* è a destra dei precedenti, tuttavia la terza riga è una riga nulla, e dopo di essa vi è un'altra riga, che non è nulla: la matrice non è a scala.

④ La matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & * & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ciascun pivot è a destra dei precedenti, e le righe nulle sono in fondo: la matrice è a scala.

ESERCIZIO 9.9 Riduzione a scala. Metodo di eliminazione di Gauss

Ridurre a scala le seguenti matrici:

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Il metodo di eliminazione di Gauss (in breve MEG) permette di ridurre a scala qualsiasi matrice; esso consiste nella ripetuta applicazione di tre "mosse"[a]:

[a] Le vere e proprie "mosse" sono le prime due, la terza è un trucco per (a volte) semplificare i conti.

- sommare a una riga il multiplo di un'altra riga;
- scambiare tra loro due righe;
- moltiplicare una riga per una costante.

In sostanza, si usa il *pivot* di ciascuna riga per annullare gli elementi della matrice al di sotto di esso, giungendo così in ogni caso ad una matrice a scala.

① Usiamo il *pivot* della prima riga per annullare gli elementi al di sotto di esso: sommiamo alla seconda riga il doppio della prima, cambiata di segno; idem per la terza; alla quarta riga sommiamo il triplo della prima cambiata di segno:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 3\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ora usiamo il *pivot* della seconda riga per annullare gli elementi al di sotto di esso: alla quarta riga sottraiamo il doppio della seconda riga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_2 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix};$$

per poter continuare, è ora necessario procedere ad uno scambio di righe, poiché il *pivot* della quarta riga si trova a sinistra del *pivot* della terza riga; scambiamo le righe:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{r}_3 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix},$$

e la matrice è ridotta a scala.

② Procediamo come nel caso precedente. Il *pivot* della prima riga è 5, dunque per sistemare la seconda riga è necessario sottrarle $\frac{3}{5}$ della prima riga:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{r}_2 - \tfrac{3}{5}\mathbf{r}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 4 & -2 & 9 & 14 \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{17}{5} & -\frac{27}{5} \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nota subito che i calcoli si fanno onerosi. Una strada alternativa, e più comoda, consiste innanzitutto nello scambiare la prima e la quarta riga:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, è immediato eliminare gli elementi sotto il nuovo *pivot* della prima riga:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \mathbf{r}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - \frac{5}{2}\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 9 & 14 \end{bmatrix},$$

proseguiamo, basandoci sul *pivot* della seconda riga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 9 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 - 4\mathbf{r}_2 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e concludiamo usando il *pivot* della terza riga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la forma di una matrice ridotta a scala non è unica: procedendo con scambi si arriva a diverse espressioni; tuttavia vi è una caratteristica invariante tra le diverse riduzioni a scala di una matrice: il numero di *pivot* e la loro posizione.

9.1.2 Combinazione lineare di vettori. Rango di una matrice. Determinante

ESERCIZIO 9.10 **Combinazioni lineari di vettori Dipendenza e indipendenza lineare**

Dati i vettori (vettori colonna)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ h \end{bmatrix},$$

determinare, ove possibile, il valore da attribuire al parametro reale h affinché i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{w}$ *siano linearmente dipendenti.*

Soluzione

Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, si chiama *combinazione lineare* ogni somma del tipo

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k.$$

I vettori sono detti *linearmente dipendenti* se esiste una k-pla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ di valori non tutti nulli dei coefficienti λ_i per cui

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k = 0.$$

Se invece l'uguaglianza

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k = 0$$

implica necessariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, i vettori sono detti *linearmente indipendenti*. Scriviamo allora la più generica combinazione lineare dei vettori dell'esercizio:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ 2\alpha + 4\gamma \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma \\ \beta + h\gamma \end{bmatrix},$$

perciò i tre vettori saranno linearmente dipendenti se potremo trovare una terna di valori α, β e γ (non tutti uguali a 0) tali per cui

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ 2\alpha + 4\gamma \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma \\ \beta + h\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ \beta + h\gamma = 0 \end{cases}.$$

Poniamo $\gamma = 1$; dalla seconda equazione ricaviamo $\alpha = -2\gamma = -2$, che inserito nella prima dà $\beta = \gamma = 1$; e notiamo che la terna $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$ verifica anche la terza equazione; i tre vettori saranno allora linearmente dipendenti se anche l'ultima equazione sarà verificata, cosa che avviene se $h = -1$. Riassumendo: se $h \neq -1$ i tre vettori sono linearmente indipendenti; se invece $h = -1$ i tre vettori sono linearmente dipendenti, e la combinazione lineare $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u} + \gamma\mathbf{w}$ con $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 1$ dà zero: $-2\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w} = 0$; ciò significa che ciascuno dei tre può essere espresso in funzione degli altri due, ad esempio $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Osservazione importante: *vettori linearmente dipendenti*

① Se i vettori hanno n componenti e sono più di n, saranno con certezza linearmente dipendenti; ad esempio, i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \\ 3270 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 10 \\ -100 \end{bmatrix},$$

sono senz'altro dipendenti, poiché sono quattro ed hanno solo tre componenti, e $4 > 3$.

② Vettori proporzionali sono ovviamente dipendenti. Se i vettori sono solo due, essi sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali, mentre se i vettori sono tre o più possono (come nell'esercizio qui sopra) essere dipendenti anche senza essere proporzionali: occorre e basta che uno di essi sia esprimibile come combinazione lineare degli altri.

ESERCIZIO 9.11 **Rango di una matrice**

Calcolare il rango delle matrici **A** *e* **B** *dell'Esercizio 9.9.*

Soluzione

Data una qualsiasi matrice M, si può dimostrare che le seguenti tre quantità sono uguali tra loro:

- il numero n_r di righe (intese come vettori riga) linearmente indipendenti;
- il numero n_c di colonne (intese come vettori colonna) linearmente indipendenti;
- il numero n_p di *pivot* della matrice **M**, una volte ridotta a scala.

Si chiama *rango* di **M**, in simboli rk **M** tale valore comune, in simboli

$$\operatorname{rk}\mathbf{M} = n_r = n_c = n_p.$$

Per determinare il rango di una matrice, è possibile procedere con la riduzione a scala, e contare i *pivot*, abbiamo visto nell'Esercizio 9.9 che

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MEG}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix},$$

dunque rk $\mathbf{A} = 4$; per quanto riguarda la matrice **B**,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 9 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MEG}} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e dunque rk $\mathbf{B} = 3$.

ESERCIZIO 9.12 **Indipendenza lineare, un riesame**

Servendosi dell'algoritmo di Gauss, stabilire nuovamente per quali valori del parametro reale h i vettori dell'Esercizio 9.10 sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Soluzione

Poiché il rango di una matrice è (anche) il numero di righe linearmente indipendenti, costruiamo la matrice **A** avente come righe i tre vettori (trasposti) dell'Esercizio 9.10:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{v}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & h \end{bmatrix}$$

e riduciamo **A** a scala, prima la prima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & h \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & h-1 \end{bmatrix}$$

e successivamente la seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & h-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo ora la matrice ridotta a scala: il rango di **A**, e cioè il numero di *pivot*, dipende da h: se $h \neq -1$, il rango di **A** è tre, e dunque **u**, **v** e **w** sono linearmente indipendenti; se invece $h = -1$, il rango di **A** è due, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

ESERCIZIO 9.13 — Determinante di una matrice 2 x 2

Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Il determinante[b] di una matrice avente due righe e due colonne è dato dalla formula

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc;$$

quindi

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = 1 \times 10 - 4 \cdot (-2) = 18.$$

ESERCIZIO 9.14 — Minori complememtari, complementi algebrici

Data la matrice **A***:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

calcolarne il minore complementare ed il complemento algebrico dello 0 posto sulla seconda riga.

[b] Se **A** è un generica matrice *quadrata*, il determinante di **A** è in genere indicato in uno dei simboli seguenti:

$$\det \mathbf{A}, \qquad |\mathbf{A}|, \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Soluzione

Data una qualsiasi matrice **A**, è detto *minore* il determinante di una sottomatrice quadrata di **A**. Si chiama poi *minore complementare* di un elemento a_{ij} della matrice quadrata **A** (e lo indicheremo con M_{ij}) il determinante della matrice che si ottiene cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima della matrice **A**; mentre si chiama *complemento algebrico* di un elemento a_{ij} il numero $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Nel nostro caso dobbiamo focalizzarci su a_{21}, il primo elemento della seconda riga: per calcolarne il minore complementare dobbiamo "cancellare" la seconda riga e la prima colonna:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$M_{21} = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = 43$$

e $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -43$.

ESERCIZIO 9.15 — Determinante di una matrice generica *n* x *n*

Calcolare

$$① \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \qquad ② \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 12 \\ 6 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Per una matrice generica a n righe e n colonne, il determinante si può calcolare usando il *Teorema di Laplace*[c]. Osserviamo che questa metodologia è tanto più vantaggiosa se nella matrice esistono righe o colonne con degli zeri. In effetti, è più comodo rileggere il teorema di Laplace in questo modo: una volta scelta la riga (o la colonna) di **A** da usare, ciascuno degli elementi di quella riga (o colonna) porta con sé un segno + o −, che nelle matrici 3×3 e 4×4 è dato dallo schema che segue,

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

(mentre nelle matrici più grandi si ottiene sempre seguendo la formazione "a scacchiera", con un + in corrispondenza dell'elemento in alto a sinistra).

[c] **Teorema di Laplace**: il determinante di una matrice è dato dalla somma degli elementi di una riga o una colonna qualsiasi, ciascuno moltiplicato per il proprio complemento algebrico.

Presi allora gli elementi della riga o della colonna prescelta, li si moltiplica ciascuno per il proprio minore complementare, e i prodotti ottenuti si sommano o si sottraggono secondo la scacchiera sopra riportata.

① Nel caso della nostra matrice (chiamiamola **A**), possiamo ad esempio scegliere la prima riga (il che significa che 1 e 3 – moltiplicati per i loro minori complementari – verranno sommati, mentre 2 verrà sottratto) ed ottenere

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 0.$$

② In questo caso (chiamiamo **B** la matrice), conviene senz'altro usare la seconda colonna, ove compaiono due zeri (osservando che, in accordo con la scacchiera, -2 è un elemento con il segno $+$, mentre 3 è un elemento con il segno $-$), quindi:

$$\det \mathbf{B} = +(-2) \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 12 \\ 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_1} - 3 \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_2};$$

ora, per calcolare i due determinanti delle matrici $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$, riapplichiamo Laplace, magari rispetto alla prima riga:

$$\det \mathbf{M}_1 = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= 1 \cdot (1 + 48) - 2 \cdot (1 - 72) + (-1) \cdot (-4 - 6) = 201;$$
$$\det \mathbf{M}_2 = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= 1 \cdot (3 + 8) - 2 \cdot (2 - 12) + (-1) \cdot (-8 - 18) = 57;$$

da cui

$$\det \mathbf{B} = +(-2) \cdot \underbrace{201}_{\det \mathbf{M}_1} - 3 \cdot \underbrace{57}_{\det \mathbf{M}_2} = -573.$$

ESERCIZIO 9.16 **Determinante di una matrice 3 x 3 (metodo di Sarrus)**

Calcolare

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Data una matrice 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

è possibile calcolare $\det A$ anche nel modo seguente: si riportano, accanto alla terza colonna, le prime due,

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

con lo schema così ottenuto si costruiscono tre diagonali discendenti e tre diagonali ascendenti:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

il determinante di $\mathbf{A}$ è allora dato dalla somma dei prodotti delle diagonali discendenti, meno la somma dei prodotti delle diagonali ascendenti:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ & -\big(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\big) \end{aligned}$$

quindi, nel nostro caso,

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & 1 & 2 \\ -2 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-2} & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ -2 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-2} & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & \boxed{2} & 3 & -1 \end{array}$$

infine

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + \\ &\quad - \big(3 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 2\big) = \\ &= 2 + 6 - (9 - 8) = 7. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 9.17 **Determinante e metodo di eliminazione di Gauss**

Calcolare il determinante delle matrici seguenti:

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 9 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -1 & 8 & 3 \\ -2 & -2 & -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che il determinante gode di alcune importanti proprietà:

- il determinante di una matrice triangolare (e quindi anche di una matrice diagonale) è il prodotto degli elementi che si trovano sulla diagonale;
- se ad una riga aggiungo il multiplo di un'altra riga, il determinante non varia;
- se scambio due righe, il determinante cambia di segno.

Pertanto, se la matrice di cui dobbiamo calcolare il determinante è triangolare, il calcolo è immediato; se invece la matrice è una matrice generica, è sufficiente applicare il MEG (tenendo conto, nel caso lo si faccia, di quanti scambi di righe si effettuino), per arrivare ad una matrice triangolare avente lo stesso determinante della matrice di partenza (al limite, cambiato di segno, nel caso di un numero dispari di scambi di righe).

① La matrice **A** è triangolare, dunque il suo determinante è il prodotto degli elementi della diagonale:

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = -72.$$

② La matrice **B** è una matrice generica; riduciamola a scala, iniziando dalla prima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 9 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -1 & 8 & 3 \\ -2 & -2 & -5 & -3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_5 + 2\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la seconda riga è inadatta a procedere con il MEG; la scambiamo con la quarta (e dunque il determinante della matrice ottenuta con il MEG sarà l'opposto del determinante di **B**):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \mathbf{r}_2 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Continuiamo con la riduzione della seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \\ \\ \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e della terza:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \mathbf{r}_5 - 2\mathbf{r}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ed infine della quarta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Siamo dunque pervenuti ad una matrice triangolare, il cui determinante, cambiato di segno, corrisponde al determinante di **B**, in definitiva

$$\det \mathbf{B} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\big(1 \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 3 \cdot 2\big) = 48.$$

ESERCIZIO 9.18 **Legame tra rango e determinante di una matrice**

Determinare il rango di ciascuna delle seguenti matrici:

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}; \quad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad ③ \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Si può dimostrare che il determinante di una matrice **M** è diverso da zero se e solo se le righe (e le colonne) di **M** sono linearmente indipendenti. Tale circostanza lega indissolubilmente i concetti di determinante e di rango: se una matrice **N** (anche non quadrata: con un numero arbitrario di righe e colonne) ha rango r, allora in **N** vi sono r righe (e colonne) linearmente indinendenti, ma non $r+1$, dunque si può scegliere una sottomatrice quadrata $r \times r$ di **N** con determinante diverso da zero (perché le sue righe/colonne sono indipendenti), mentre non è possibile in alcun modo scegliere una sottomatrice quadrata $(r+1) \times (r+1)$ con tale caratteristica; schematizzando la situazione:

$$\operatorname{rk} N = r \quad \begin{cases} \bullet \text{ esiste una sottomatrice } r \times r \text{ di } \mathbf{N} \text{ con determinante non nullo;} \\ \bullet \text{ ogni sottomatrice } (r+1) \times (r+1) \text{ di } \mathbf{N} \text{ ha determinante nullo.} \end{cases}$$

Intendiamo calcolare il rango delle matrici di questo esercizio senza usare il MEG, ma sfruttando le caratteristiche dei determinanti.

① Partiamo allora dalla matrice **A**; poiché le righe hanno 2 elementi, il rango di **A** non potrà essere maggiore di 2, inoltre **A** non è una matrice formata da soli zeri, il che significa che il rango sarà almeno 1, quindi $1 \leq \operatorname{rk} \mathbf{A} \leq 2$; se il rango fosse 1, le tre righe sarebbero proporzionali (che equivale a dire che le due colonne sarabbero proporzionali), cosa che non si verifica, quindi $\operatorname{rk} \mathbf{A} = 2$. In alternativa avremmo potuto arrivare a questo risultato anche partendo dalla sottomatrice quadrata formata dalle prime due righe di **A**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

il determinante vale 7, e perciò le prime due righe sono linearmente indipendenti; quindi il rango di **A** non è minore di 2, non potendo neppure essere maggiore di 2 (perché **A** ha solo due colonne) necessariamente $\operatorname{rk} \mathbf{A} = 2$.

② Consideriamo la matrice **B**: poiché le tre righe (e le tre colonne) sono tutte tra loro proporzionali, il rango di **B** è 1 (e in effetti, nessuna sottomatrice 2×2 di **B** ha determinante diverso da zero).

③ Infine, la matrice **C**: vediamo subito che la sottomatrice formata dalle prime due righe e colonne

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, e quindi il rango di **C** è almeno 2; inoltre **C** ha tre righe, quindi il rango non può essere maggiore di tre, in formule $2 \leq \operatorname{rk} \mathbf{C} \leq 3$; osserviamo che per stabilire se il rango di **C** sia 2 o 3, abbiamo a disposizione diverse strategie:

- esaminare le combinazioni lineari delle tre righe e vedere se (in accordo con la definizione) sono linearmente dipendenti; se lo sono, il rango di **C** è 2, altrimenti è 3;
- posto che le prime due colonne sono indipendenti, esaminare separatamente la terza e la quarta, per vedere se ciascuna di loro è combinazione delle prime due; se lo sono entrambe, il rango è 2, se almeno una delle due non lo è, allora il rango sarà 3;
- esaminare i determinanti delle sottomatrici 3×3 contenute in **C** (si tratta di quattro matrici, ognuna ottenuta cancellando una delle quattro colonne): se tutti e quattro i determinanti valgono zero, il rango di **C** è 2, se anche un solo determinante è diverso da 0 allora il rango è 3.

Poiché le prime due strade si rifanno al metodo di eliminazione, che in questo esercizio non intendiamo usare, optiamo per l'ultima: esaminando le quattro

sottomatrici di ordine 3 ($\mathbf{c}_i$ è la colonna i-esima), troviamo

$$\det\left[\mathbf{c}_1\middle|\mathbf{c}_2\middle|\mathbf{c}_3\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -6 & -1\end{bmatrix} = 0$$

$$\det\left[\mathbf{c}_1\middle|\mathbf{c}_2\middle|\mathbf{c}_4\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -6 & 2\end{bmatrix} = 0$$

$$\det\left[\mathbf{c}_1\middle|\mathbf{c}_3\middle|\mathbf{c}_4\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix} = 0$$

$$\det\left[\mathbf{c}_2\middle|\mathbf{c}_3\middle|\mathbf{c}_4\right] = \det\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ -6 & -1 & 2\end{bmatrix} = 0$$

e poiché i determinanti si annullano tutti, rk $\mathbf{C} = 2$ (vedremo nel prossimo esercizio un teorema che ci permette di risparmiare alcuni conti).

ESERCIZIO 9.19 **Rango e minori orlati – Teorema di Kronecker**

Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare dei parametri α e β:

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0 & \alpha\end{bmatrix}; \quad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 6 & 3\beta\\ 0 & 4 & 3 & \beta^2\end{bmatrix}.$$

Soluzione

① La matrice $\mathbf{A}$ non è quadrata, cominciamo allora con il considerare la sottomatrice $\mathbf{M}$ formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Il determinante è 1, diverso da zero, e quindi rk $\mathbf{A} \geq 2$, per stabilire se il rango di $\mathbf{A}$ sia 2 o 3, dovremmo, come nell'esercizio precedente, calcolare i quattro determinanti delle sottomatrici 3×3 contenute in $\mathbf{A}$, utilizzando il teorema di Kronecker[d]; prendiamo allora il minore $\mathbf{M}$ che abbiamo già considerato: da adesso $\mathbf{M}$ sarà il nostro "minore pilota"; grazie al teorema di Kronecker possiamo limitarci a considerare solo le due sottomatrici 3×3 contenenti $\mathbf{M}$,

[d] **Teorema di Kronecker**: se la matrice $\mathbf{A}$ possiede una sottomatrice quadrata $\mathbf{M}$ di ordine r con $\det \mathbf{M} \neq 0$, allora il rango di $\mathbf{A}$ è r se e solo se si annullano i determinanti di tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r + 1$ contenenti $\mathbf{M}$.

ossia le due matrici ottenute *orlando* **M** con le righe e colonne disponibili: con i simboli dell'esercizio precedente, si tratta delle matrici $[\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\mathbf{c}_3]$ e $[\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\mathbf{c}_4]$, poiché

$$\det\left[\mathbf{c}_1\middle|\mathbf{c}_2\middle|\mathbf{c}_3\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix} = 0$$

e

$$\det\left[\mathbf{c}_1\middle|\mathbf{c}_2\middle|\mathbf{c}_4\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & \alpha\end{bmatrix} = \alpha + 3.$$

Vediamo che

- se $\alpha \neq -3$ vi è un determinante diverso da 0 e pertanto $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 3$ (e per quest'affermazione non occorreva scomodare Kronecker...);
- se invece $\alpha = -3$ entrambi questi determinanti si annullano, e grazie al teorema di Kronecker possiamo affermare (senza calcolare anche gli altri due determinanti) che $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$.

② Passiamo alla matrice **B**; poiché si tratta di una matrice quadrata, cominciamo a calcolarne il determinante (ricordiamoci che, se il determinante di una matrice quadrata è diverso da zero, allora il rango di quella matrice è massimo), notiamo però che

$$\det\mathbf{B} = 0 \qquad \forall\beta;$$

ciò significa che non esiste alcun valore di β per cui $\operatorname{rk}\mathbf{B} = 4$; usiamo allora il teorema di Kronecker e cominciamo, come nel caso della matrice **A**, isolando il minore pilota **M** (2×2) il cui determinante sia diverso da zero; ovviamente ci conviene scegliere una sottomatrice che non contenga β, in modo da non appesantire inutilmente i conti: la matrice in alto a sinistra

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & -1\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 1\\ 5 & 3 & 6 & 3\beta\\ 0 & 4 & 3 & \beta^2\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

il cui determinante vale 4, va benissimo per i nostri scopi. Dobbiamo adesso *orlare* **M** con le righe e le colonne di **B**, e cioè dobbiamo esaminare tutte le matrici 3×3 contenute in **B** che a loro volta contengano **M**, si tratta di quattro matrici:

- la matrice $\mathbf{M}_{3,3}$ costruita con la terza riga e la terza colonna:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & -1\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1\\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & 3\beta\\ 0 & 4 & 3 & \beta^2\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M}_{3,3} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 6\end{bmatrix},$$

- la matrice $\mathbf{M}_{3,4}$ costruita con la terza riga e la quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & 6 & \mathbf{3\beta} \\ 0 & 4 & 3 & \beta^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M}_{3,4} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3\beta \end{bmatrix},$$

- la matrice $\mathbf{M}_{4,3}$ costruita con la quarta riga e la terza colonna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 3\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \beta^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M}_{4,3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

- la matrice $\mathbf{M}_{4,4}$ costruita con la quarta riga e la quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 5 & 3 & 6 & 3\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & 3 & \boldsymbol{\beta^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{M}_{4,4} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo i determinanti delle quattro matrici:

$$\det \mathbf{M}_{3,3} = 0, \quad \det \mathbf{M}_{3,4} = 12 + 12\beta, \quad \det \mathbf{M}_{4,3} = 0, \quad \det \mathbf{M}_{4,4} = 4\beta^2 - 4.$$

I quattro determinanti si annullano tutti solo se $\beta = -1$, in tal caso $\operatorname{rk} \mathbf{B} = 2$; in tutti gli altri casi $\det \mathbf{M}_{3,4} \neq 0$, e quindi la matrice $\mathbf{B}$ ha rango 3.

9.1.3 Matrici inverse

ESERCIZIO 9.20 **Matrice inversa di una matrice 2 x 2**

Calcolare la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ *di*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Il calcolo dell'inversa di una matrice $\mathbf{M}$ è possibile solo se $\mathbf{M}$ è *nonsingolare* (ossia se il suo determinante è diverso da zero).

Nel caso di una generica matrice 2×2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

la condizione $\det \mathbf{M} \neq 0$ corrisponde a chiedere che $ad - bc \neq 0$, e in tal caso

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix};$$

quindi, notando che $\det \mathbf{A} = 10$ e che pertanto $\mathbf{A}$ è invertibile,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.21 **Matrice inversa di una matrice $n \times n$**

Calcolare $\mathbf{A}^{-1}$ *e* $\mathbf{B}^{-1}$, *ove*

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Per calcolare l'inversa di una matrice $\mathbf{C}$ (ovviamente, nel caso in cui sia invertibile...), è possibile procedere in diversi modi: il primo consiste nello scrivere

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & \vdots & \vdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}};$$

(ove C_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento c_{ij}.) Per calcolare la matrice inversa di $\mathbf{C}$ occorre allora raccogliere in una matrice tutti i minori complementari M_{ij} degli elementi della matrice di partenza, trasformarli nei complementi algebrici seguendo il diagrammma "a scacchiera": $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, scrivere la trasposta della matrice così ottenuta e dividere tutto per il determinante di $\mathbf{C}$, applichiamolo ad entrambe le matrici di questo esercizio.

① Partiamo allora con la matrice $\mathbf{A}$: il determinante è $\det \mathbf{A} = 2$, la matrice costituita dai minori complementari è

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Per passare alla matrice dei complementi algebrici basta cambiare di segno gli elementi centrali dei quattro lati (che nella scacchiera hanno il segno meno):

$$\begin{bmatrix} A_{11} = M_{11} & A_{12} = -M_{12} & A_{13} = M_{13} \\ A_{21} = -M_{21} & A_{22} = M_{22} & A_{23} = -M_{23} \\ A_{31} = M_{31} & A_{32} = -M_{32} & A_{33} = M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ora ne scriviamo la trasposta

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

e dividiamo tutto per il determinante di **A** (che vale 2):

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

② Passiamo alla matrice **B**, il cui determinante vale $\det \mathbf{B} = -4$: la matrice costituita dai minori complementari è

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & -6 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Passiamo alla matrice dei complementi algebrici (quelli che nella scacchiera hanno il segno meno):

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ne scriviamo la trasposta

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e dividiamo tutto per il determinante di **B** (cioè -4):

$$\frac{1}{\det \mathbf{B}}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Un secondo modo per calcolare l'inversa di una matrice consiste nell'accostarle la matrice identità (formando quindi una matrice a n righe e $2n$ colonne), e ridurre alla matrice identità la sottomatrice di sinistra attraverso operazioni sulle righe (combinazioni lineari e prodotti di righe per numeri), nella sottomatrice a destra comparirà allora l'inversa cercata. Seguiamo questa procedura per calcolare nuovamente l'inversa di **A**, accostiamole l'identità:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

per far comparire l'identità nelle prime tre colonne; consideriamole una alla volta, dalla prima alla terza. Nella prima colonna deve comparire solo l'1 al

primo posto; sotto di esso c'è già uno zero; facciamo allora comparire uno zero anche nel primo elemento della terza riga sostituendo, alla terza riga, la stessa terza riga meno due volte la prima riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Consideriamo ora la seconda colonna: facciamo scomparire il 2 e il -2 che sono sopra e sotto il -4, sommando alla prima riga metà della seconda e sottraendo alla terza riga metà della seconda:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \\ \\ \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right],$$

per far comparire degli 1 sulla diagonale, dividiamo la seconda riga per -4 e moltiplichiamo la terza riga per -2:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{4}\mathbf{r}_2 \\ -2\mathbf{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

A questo punto dobbiamo unicamente fare scomparire i due termini diversi da zero nella terza colonna, sopra l'1 della diagonale; per fare ciò, sottraiamo alla prima riga metà della terza e alla seconda riga un quarto della terza:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right], \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Notiamo che a destra della linea verticale compare la matrice inversa di $\mathbf{A}$, analogamente a quanto ottenuto più sopra.

9.1.4 Sistemi lineari. Impostazione e soluzione

ESERCIZIO 9.22 **Scrittura di un sistema lineare in forma matriciale e viceversa**

Esprimere i seguenti sistemi lineari come prodotti di matrici:

$$① \begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 0 \\ 7x_1 - 2y_2 = 1 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases};$$

Esprimere i seguenti prodotti di matrici come sistemi lineari:

$$③ \begin{bmatrix} 3 & 0 & \pi \\ 2 & 100 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ -12 \end{bmatrix}; \qquad ④ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, è sempre possibile trascriverlo in forma matriciale, mettendone in evidenza le componenti, ossia:

- le incognite in un vettore $\mathbf{x}$, *vettore (colonna) delle incognite*;
- i coefficienti delle incognite in una matrice $\mathbf{A}$, *matrice dei coefficienti*;
- i "termini noti" in un vettore $\mathbf{b}$, *vettore (colonna) dei termini noti*.

Con tali posizioni il sistema diventa $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dove ovviamente avremo

$$\mathbf{A} \in \mathscr{M}(m,n), \quad \mathbf{x} \in \mathscr{M}(n,1) \quad \text{e} \quad \mathbf{b} \in \mathscr{M}(m,1).$$

I nostri sistemi si scriveranno allora

$$① \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad ② \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda la conversione da forma matriciale a sistema, basta effettuare il prodotto tra matrici, ottenendo, nei nostri casi:

$$③ \begin{cases} 3x_1 + \pi x_3 = 130 \\ 2x_1 + 100x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}; \qquad ④ \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \\ ex + fy = \gamma \end{cases}.$$

ESERCIZIO 9.23 **Sistemi lineari di *m* equazioni in *n* incognite**
Soluzione con il metodo di eliminazione

Risolvere, ove possibile, i seguenti sistemi lineari:

$$① \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x + 3y - z + 2t = 2 \\ 2x + 4y + z - t = 6 \\ 2x + 3y + 4z - t = 4 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} x - y + 3z = -8 \\ 3x - y + 5z = -10 \\ -x + 4y = 2 \\ x + 2y - 3z = 13 \end{cases};$$

$$③ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6 = 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 6x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 + 5x_6 = 18 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 5x_4 - x_5 + 12x_6 = 20 \end{cases}.$$

Soluzione

È possibile usare il MEG per risolvere un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: con la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ e con il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ si costruisce la cosiddetta "matrice completa" $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e tramite il MEG la si riduce a scala. In accordo con il teorema di Rouché-Capelli[e] quello che può accadere è:

[e] **Teorema di Rouché-Capelli**: data la matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(m,n)$ e dato il vettore colonna $\mathbf{b} \in \mathscr{M}(m,1)$, l'esistenza ed il numero di soluzioni del sistema lineare di m equazioni in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dipende da $\operatorname{rk}\mathbf{A}$ e da $\operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$:

- se $\operatorname{rk}\mathbf{A} < \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, il sistema non ha soluzione;
- se $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = n$, il sistema ha una e una sola soluzione;
- se $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = k < n$, il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da $n - k$ parametri.

- l'ultimo *pivot* di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si trova nell'ultima colonna: allora $\operatorname{rk}\mathbf{A} < \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e il sistema non ha soluzione;
- nessun *pivot* di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si trova nell'ultima colonna, e inoltre non vi sono colonne di $\mathbf{A}$ senza *pivot*: allora $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = n$ e il sistema ha una e una sola soluzione; per trovarla si procede con la "sostituzione all'indietro";
- nessun *pivot* di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si trova nell'ultima colonna, e vi è almeno una colonna di $\mathbf{A}$ senza *pivot*: allora $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = k < n$ e il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $n-k$ parametri; per trovarle si considerano "parametri" le variabili cui non corrisponde alcun *pivot*, e si risolve il sistema con la "sostituzione all'indietro", rispetto alle variabili individuate dai *pivot*.

① Riduciamo a scala la matrice completa, prima la prima colonna:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right],$$

quindi la seconda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right],$$

e completiamo con la terza colonna:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right];$$

l'ultimo *pivot* si trova nell'ultima colonna, il sistema non ha soluzione.

② Riduciamo anche in questo caso a scala la matrice completa, partendo dalla prima colonna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -8 \\ 3 & -1 & 5 & -10 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 14 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 21 \end{array}\right]$$

e ora la seconda colonna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 14 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 21 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Non c'è bisogno di procedere oltre: la matrice è ridotta a scala. Non vi sono *pivot* sull'ultima colonna, ed in ciascuna delle tre colonne precedenti compare un *pivot*: il sistema ha una sola soluzione. Per ricavarla procediamo a ritroso dall'ultima equazione, da $9z = -27$ si ricava $z = -3$, l'equazione immediatamente precedente è $2y - 4z = 14$, ossia $y = 7 + 2z$, e dunque $y = 1$, infine da $x - y + 3z = -8$ si ottiene $x = y - 3z - 8$, cioè $x = 2$. In definitiva, l'unica soluzione del sistema è la terna $(x, y, z) = (2, 1, -3)$.

③ Riduciamo ancora una volta a scala la matrice completa:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & -6 & -2 & 7 & 20 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 1 & 5 & 18 \\ 3 & 8 & 7 & -5 & -1 & 12 & 20 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 3\mathbf{r}_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 9 & 2 \end{array}\right];$$

per quanto riguarda la seconda colonna, è sufficiente agire sulla quarta riga:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 9 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right];$$

per completare la riduzione a scala, è necessario scambiare le ultime due righe:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{r}_3 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

I *pivot* di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si trovano su prima, seconda, quarta e quinta colonna, dunque x_1, x_2, x_4 e x_5 sono le variabili rispetto alle quali va risolto il sistema; al contrario, poiché a x_3 e a x_6 non è associato alcun *pivot*, esse vanno trattate come parametri, poniamo dunque $x_3 = \alpha$ e $x_6 = \beta$ e portiamole a secondo membro, la matrice completa associata al sistema è dunque

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 6-\alpha-\beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2-2\alpha-4\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6-3\beta \end{array}\right].$$

Procedendo con la sostituzione all'indietro, troviamo (tenendo a mente che le variabili sono x_1, x_2, x_4 e x_5) $x_5 = 2 - \beta$, $x_4 = -2 - \beta$, $x_2 + x_4 = 2-2\alpha-4\beta$, da cui $x_2 = 4-2\alpha-3\beta$, e infine $x_1+2x_2-2x_4-x_5 = 6-\alpha-\beta$, da cui $x_1 = -4+3\alpha+2\beta$. In definitiva, le soluzioni del sistema sono i vettori della forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 9.24 **Sistemi lineari di n equazioni in n incognite**
Soluzione con la regola di Cramer

Calcolare la soluzione dei seguenti sistemi lineari:

$$① \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ x + 2y = 19 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 8 \\ x - y - z = -3 \end{cases}.$$

Soluzione

Entrambi i sistemi del testo hanno il numero di equazioni uguale al numero di incognite, e pertanto la matrice dei coefficienti è quadrata. Il teorema di Cramer afferma che, dato il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

se la matrice $\mathbf{A}$ è nonsingolare (cioè: $\det \mathbf{A} \neq 0$), allora il sistema ha una e una sola soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ data da

$$\bar{x}_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots \quad \bar{x}_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}},$$

ove ciascuna matrice $\mathbf{A}_i$ è ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ sostituendo alla i-esima colonna il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti, ad esempio

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & \vdots & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

① Il sistema si riscrive in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \end{bmatrix};$$

la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ ha determinante $\det \mathbf{A} = 10 \neq 0$, quindi

$$\bar{x} = \frac{\det \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{100}{10} = 10, \qquad \bar{y} = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}.$$

② Il sistema si riscrive in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix};$$

la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ ha determinante $\det \mathbf{A} = 7 \neq 0$, quindi

$$\bar{x} = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{14}{7} = 2, \quad \bar{y} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-7}{7} = -1,$$

$$\bar{z} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{21}{7} = 3.$$

9.1.5 Sistemi lineari. Interpretazione geometrica e discussione

ESERCIZIO 9.25 **Discussione ed interpretazione geometrica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite**

Interpretare dal punto di vista geometrico i seguenti sistemi lineari di due equazioni:

$$① \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} 2x - y = 2 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}; \qquad ③ \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}.$$

Soluzione

Possiamo vedere la risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

come la ricerca di punti comuni a 2 rette aventi equazioni

$$\mathfrak{r}_1 : a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{r}_2 : a_2 x + b_2 y = c_2,$$

nel piano cartesiano. La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema saranno rispettivamente

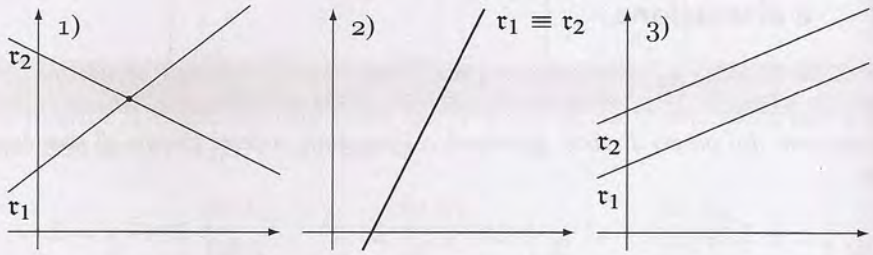
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right].$$

Confrontiamo allora il rango di $\mathbf{A}$, con il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Considerato che ciascuno dei due può essere 1 o 2, e che in ogni caso sarà $\operatorname{rk} \mathbf{A} \leq \operatorname{rk} [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, possiamo avere solo tre casi:

1) $\operatorname{rk} \mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rk} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, i ranghi sono uguali tra loro e uguali al numero di incognite: il sistema ha un'unica soluzione (x, y);

2) $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 1$, i ranghi sono uguali tra loro e inferiori di un'unità rispetto al numero di incognite: il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro;
3) $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, i ranghi non sono uguali tra loro: il sistema non ha soluzione.

Nel caso 1) il rango di $\mathbf{A}$ è 2 e pertanto il determinante di $\mathbf{A}$ non è zero, il che significa che le due righe di $\mathbf{A}$ non sono proporzionali, e poiché (a_1, b_1) non è proporzionale a (a_2, b_2) le due rette devono essere incidenti, e l'unica soluzione (x, y) corrisponde alle coordinate del punto in comune; nel caso 2) le due rette sono in realtà la stessa retta (le due equazioni sono identiche o proporzionali tra loro), e le soluzioni corrispondono a tutti i punti di tale retta; nel caso 3) le due rette sono parallele (hanno infatti lo stesso coefficiente angolare poiché i coefficienti di x e y sono uguali o proporzionali, però $\operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, e pertanto tra i termini noti non c'è la stessa proporzione).



Veniamo ai tre sistemi proposti.

① La matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

il cui determinante è $\det\mathbf{A} = -8 \neq 0$, quindi il rango di $\mathbf{A}$ è 2, così come il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$; vi è un'unica soluzione (nel nostro caso $x = 2, y = 1$), ci troviamo nel caso 1: le due rette sono incidenti e con pochi conti si verifica che essi si incontrano nel punto $(2, 1)$.

② La matrice dei coefficienti e quella completa sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Il determinante di $\mathbf{A}$ è zero, infatti la seconda riga è il triplo della prima cambiata di segno, e pertanto $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$; se invece prendiamo la sottomatrice di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ formata dalle ultime due colonne

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

il suo determinante non si annulla, e quindi $\operatorname{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$ (poiché $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ contiene al suo interno un minore di ordine due il cui determinante non si annulla), siamo nel caso 3 e le rette sono parallele.

③ La matrice dei coefficienti e quella completa sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \end{array}\right].$$

Si vede subito che in entrambe la seconda riga è il triplo della prima, pertanto $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 1$ e il sistema ha infinite soluzioni, ossia tutti i punti della retta $2x - y = 2$.

ESERCIZIO 9.26 **Discussione ed interpretazione geometrica di un sistema lineare di tre equazioni in due incognite**

Interpretare, al variare dei parametri α, β e γ, i seguenti sistemi lineari di tre equazioni:

$$① \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2\alpha^2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = \beta \\ 3x + y = 10 \end{cases}; \qquad ③ \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = \gamma \end{cases}.$$

Soluzione

Risolvere un sistema lineare di tre equazioni in due incognite corrisponde a cercare i punti comuni a tre rette

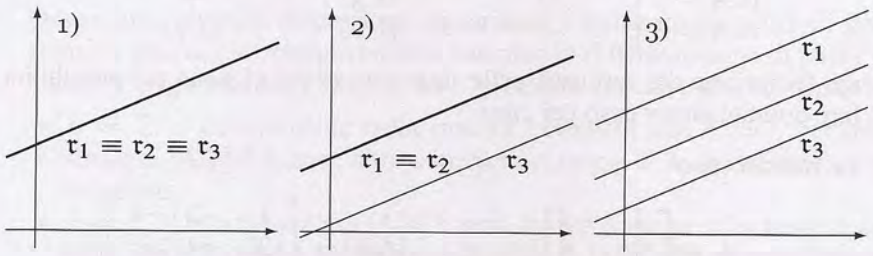
$$\mathfrak{r}_1 : a_1x + b_1y = c_1, \qquad \mathfrak{r}_2 : a_2x + b_2y = c_2, \qquad \mathfrak{r}_3 : a_3x + b_3y = c_3$$

nel piano cartesiano. Esaminiamo le varie configurazioni, classificandole in base ai rispettivi coefficienti angolari (che sono dati dai valori a_i e b_i, e cioè dagli elementi della matrice $\mathbf{A}$ del sistema), vi sono tre possibilità:

- le tre rette hanno tutte lo stesso coefficiente angolare;
- due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, la terza ha coefficiente angolare diverso;
- tutte e tre le rette hanno diverso coefficiente angolare.

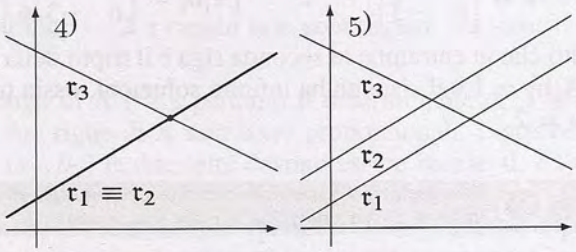
A seconda dei termini noti, le posizioni reciproche varieranno secondo lo schema seguente:

1) le tre rette sono coincidenti, cioè in realtà un'unica retta;
2) due rette sono coincidenti, e la terza è ad esse parallela;
3) le tre rette sono tutte e tre parallele;

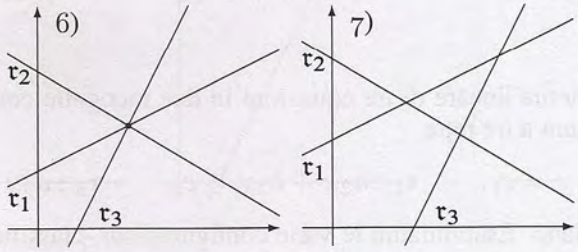


4) le due rette con lo stesso coefficiente angolare sono in realtà coincidenti, la terza incrocia entrambe nell'unico punto comune;

5) le due rette con lo stesso coefficiente angolare sono parallele, la terza incrocia ciascuna di esse in un punto diverso;



6) le tre rette, tutte con diverso coefficiente angolare, si incrociano in un punto comune;
7) le tre rette, tutte con diverso coefficiente angolare, si incrociano a coppie in tre punti distinti.



Nel caso 1) il rango di $\mathbf{A}$ e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono entrambi uguali a 1: abbiamo infinite soluzioni (tutti i punti dell'unica retta in gioco). Nei casi 2) e 3) il rango di $\mathbf{A}$ è 1 e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 2, quindi non vi sono soluzioni. Nel caso 4) il rango di $\mathbf{A}$ e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono entrambi uguali a 2: abbiamo un'unica soluzione, data dalle coordinate del punto comune. Nel caso 5) il rango di $\mathbf{A}$ è 2 e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 3: non abbiamo soluzioni. Nel caso 6) il rango di $\mathbf{A}$ e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono entrambi uguali a 2: abbiamo un'unica soluzione, data dalle coordinate del punto comune. Nel caso 7) il rango di $\mathbf{A}$ è 2 e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 3: non abbiamo soluzioni.

Radunando tutto in uno schema:

	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 1$	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 2$	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 3$
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$	1)	2), 3)	—
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$	—	4), 6)	5), 7)

la reale distinzione dei vari casi, nelle situazioni in cui vi siano più possibilità, si può fare direttamente e caso per caso.

① Le matrici sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2\alpha^2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{array}\right].$$

Notiamo che $\mathbf{A}$ è fatta da tre righe proporzionali, e quindi $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$ (questo significa che $\det([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 0$ per ogni valore di α). Osserviamo allora la matrice completa:

- perché tutta la seconda riga sia proporzionale alla prima occorre che $2\alpha^2 = 2$, ossia $\alpha = \pm 1$;
- perché tutta la terza riga sia propozionale alla prima occorre che $\alpha = -1$;
- perché le ultime due righe siano proporzionali tra loro occorre che $2\alpha^2 = -2\alpha$, e cioè $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$.

Stiliamo allora la seguente casistica:

- se $\alpha = -1$, le tre equazioni sono proporzionali, quindi descrivono la stessa retta, ed il sistema ha infinite soluzioni (caso 1);
- se $\alpha = 1$, le prime due equazioni descrivono la stessa retta, e la terza una retta con lo stesso coefficiente angolare, ma diverso termine noto, quindi vi sono due rette coincidenti ed una parallela, il sistema non ha soluzione (caso 2);
- se $\alpha = 0$, le ultime due equazioni descrivono la stessa retta, e la prima una retta con lo stesso coefficiente angolare, ma diverso termine noto, quindi vi sono due rette coincidenti ed una parallela, il sistema non ha soluzione (caso 2);
- se $\alpha \neq \pm 1$ e $\alpha \neq 0$, non c'è alcuna coppia di equazioni proporzionali, e si tratta di tre rette parallele (caso 3).

② Le matrici $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & \beta \\ 3 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

La matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2, infatti le due ultime righe non sono proporzionali. Per ciò che riguarda la matrice completa, la prima e la terza riga, non essendo in alcun modo proporzionali, corrispondono a due rette incidenti (nel punto $x = 3, y = 1$), al variare di β anche la seconda riga potrà o meno corrispondere ad una retta passante per lo stesso punto:

- se $\beta \neq 2$ le prime due righe corrispondono a due rette parallele ed il sistema non ha soluzione (caso 5);
- se $\beta = 2$ allora la prima e la seconda riga sono proporzionali ed il sistema ha una sola soluzione (cioè, appunto, il punto $(3, 1)$, e siamo nel caso 4).

Osserviamo che una discussione riguardante l'esistenza di soluzioni del sistema si poteva fare semplicemente calcolando il determinante di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ (che è quadrata): poiché $\det([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 14 - 7\beta$, allora vi sono come sopra due casi:

- $\beta \neq 2$: il determinante della matrice completa non è zero, pertanto il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 3, senz'altro superiore al rango di $\mathbf{A}$, quindi non ci sono soluzioni;
- $\beta = 2$: il determinante di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è zero, quindi il rango della matrice completa non è 3, poiché $\mathbf{A}$ è una sottomatrice di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ed ha rango 2, anche il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 2, e quindi il sistema ha una e una sola soluzione.

③ Le matrici $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & \gamma \end{array}\right].$$

Osserviamo immediatamente che $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$, e che fra le tre righe di $\mathbf{A}$ non c'è alcun tipo di proporzionalità, quindi le tre rette hanno coefficienti angolari diversi e saremo nel caso 6 o nel caso 7 a seconda che vi siano o meno soluzioni. Esaminiamo allora il determinante della matrice completa: $\det([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 20 + 10\gamma$, quindi come nel caso precedente abbiamo due casi:

- $\gamma \neq -2$: il determinante della matrice completa non è zero, pertanto il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 3, senz'altro superiore al rango di $\mathbf{A}$, quindi non ci sono soluzioni (caso 7: le rette si intersecano a due a due, ma non hanno alcun punto comune);
- $\gamma = -2$: il determinante di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è zero, quindi il rango della matrice completa non è 3; poiché $\mathbf{A}$ è una sottomatrice di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ed ha rango 2, anche il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 2, e quindi il sistema ha una e una sola soluzione (le tre rette si incontrano tutte in un punto, caso 6).

ESERCIZIO 9.27 **Discussione e interpretazione geometrica di un sistema lineare di due equazioni in tre incognite**

Interpretare dal punto di vista geometrico, al variare del parametro α, il sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - \alpha^2 z = 2 \\ 2x - 6y - 8z = \alpha + 2 \end{cases}$$

Soluzione

Possiamo vedere la risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in tre incognite

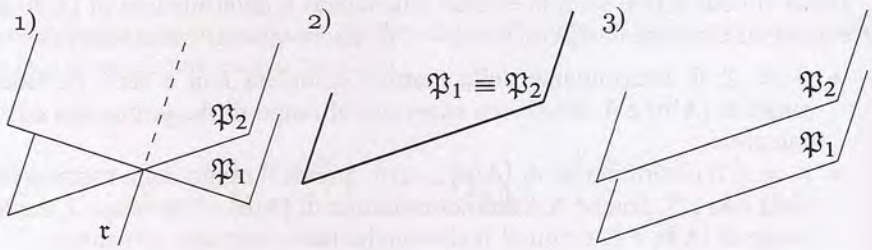
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

come la ricerca di punti comuni a due piani, di equazioni

$$\mathfrak{P}_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \qquad \mathfrak{P}_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2.$$

Partiamo da considerazioni geometriche, vi sono tre possibilità:

1) $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono incidenti (e quindi hanno in comune una retta $\mathfrak{r}$);
2) $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ coincidono (e quindi tutti i loro punti sono in comune);
3) $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono paralleli (e quindi non hanno punti comuni).



Nel caso 1) le soluzioni saranno le coordinate dei punti della retta $\mathfrak{r}$, comune a $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$; nel caso 2) le soluzioni, saranno le coordinate dell'unico piano $\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}_2$; nel caso 3) non vi sono soluzioni.

Dal punto di vista del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cx \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cd_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

basta osservare la matrice dei coefficienti e la matrice completa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right]:$$

- se $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono incidenti (caso numero 1), allora i coefficienti di x, y e z non sono tutti proporzionali e quindi $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$. Poiché il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ non può essere maggiore di 2, essendo anch'essa composta da solo due righe, né può diminuire (ricordiamoci che orlando una matrice con un altra riga o colonna il rango non può in alcun caso diminuire), anche $\operatorname{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$;
- se i due piani sono paralleli o coincidenti, i coefficienti di x, y e z sono proporzionali, e quindi $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$; a decidere se sono realmente coincidenti o solo paralleli provvedono i termini noti d_1 e d_2:

  – se anche tra d_1 e d_2 vale la stessa proporzione, le due righe di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono interamente proporzionali, e quindi anche $\operatorname{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 1$, allora $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ coincidono (caso numero 2);

  – se non sussiste lo stesso rapporto, $\operatorname{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$, e allora $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono paralleli (caso numero 3).

In accordo con il teorema di Rouché-Capelli, vi sono soluzioni solo se $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \operatorname{rk}[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$: se entrambi i ranghi sono uguali a 2, avremo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, ossia tutti i punti della retta $\mathfrak{r}$ (caso numero 1); se entrambi sono uguali a 1, avremo $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni, cioè tutti i punti di $\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}_2$ (caso numero 2).

Radunando tutto in uno schema:

	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 1$	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 2$
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$	2)	3)
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$	—	1)

Veniamo al nostro sistema, le matrici sono rispettivamente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -\alpha^2 \\ 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\alpha^2 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & \alpha+2 \end{array}\right].$$

Si vede subito che le due righe di $\mathbf{A}$ sono proporzionali se e solo se $\alpha^2 = 4$, e cioè $\alpha = \pm 2$ (ovviamente, potremmo anche dire che le colonne di $\mathbf{A}$ sono tutte e

tre proporzionali se $\alpha^2 = 4$: le prime due lo saranno in ogni caso, la terza solo se $\alpha^2 = 4$); esaminiamo allora la matrice completa in ciascuno di questi due casi:

$$\boxed{\alpha = 2} \qquad\qquad \boxed{\alpha = -2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

se $\alpha = 2$ allora anche le righe di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono interamente proporzionali (o anche le quattro colonne di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sono tutte proporzionali), mentre se $\alpha = -2$ l'ultima colonna non è proporzionale alle prime tre; riassumendo:

- $\alpha \neq \pm 2$: il rango di $\mathbf{A}$ e quello di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ valgono entrambi 2;
  i due piani sono incidenti, caso 1);
  infinite soluzioni dipendenti da un parametro, ovvero tutti i punti della retta $\mathfrak{r}$);
- $\alpha = 2$: il rango di $\mathbf{A}$ e quello di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ valgono entrambi 1;
  i due piani coincidono, caso 2);
  infinite soluzioni dipendenti da due parametri, ovverosia tutti i punti del piano $x - 3y - 4z = 2$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

- $\alpha = -2$: il rango di $\mathbf{A}$ è 1 e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 2;
  i due piani sono paralleli, caso 3);
  nessuna soluzione.

Per trovare le coordinate dei punti di $\mathfrak{r}$, soluzione nel caso $\alpha \neq 2$, procediamo con il MEG:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\alpha^2 & 2 \\ 2 & -6 & -8 & \alpha + 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\alpha^2 & 2 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 - 8 & \alpha - 2 \end{array}\right].$$

Si ricava che y è una variabile libera (un parametro), inoltre

$$z = \frac{\alpha - 2}{2\alpha^2 - 8} = \frac{1}{2\alpha + 4}, \qquad x = 2 + 3y + \alpha^2 z = 2 + 3y + \frac{\alpha^2}{2\alpha + 4},$$

in definitiva, $\mathfrak{r}$ ha equazione

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{\alpha^2}{2(\alpha+2)} \\ 0 \\ \frac{1}{2(\alpha+2)} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.28 **Discussione e interpretazione geometrica di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite**

Discutere e risolvere al variare dei parametri α, β, γ e δ i seguenti sistemi lineari di tre equazioni:

$$① \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \alpha^2 y - 2z = 4 \\ -x - 2y + z = \alpha \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} 2x - y - 4z = 4 \\ \beta^2 x - 2y - 8z = 6 + \beta \\ 2x - y + 2\beta z = 6 - \beta \end{cases};$$

$$③ \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = \gamma \\ x + 4y + 5z = 6 \end{cases};$$

dandone un'interpretazione geometrica.

Soluzione

Risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

equivale a cercare i punti comuni a tre piani, di equazioni ($i = 1, 2, 3$)

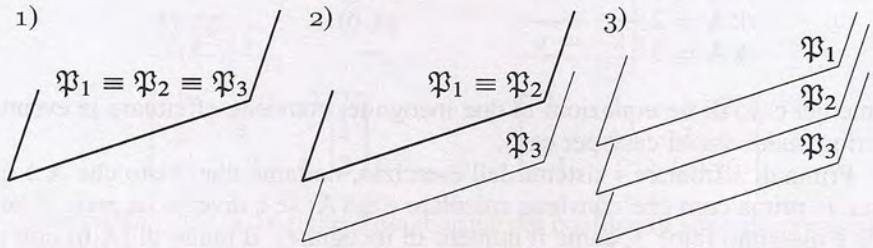
$$\mathfrak{P}_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i .$$

Per esaminare le posizioni reciproche di tre piani nello spazio, partiamo dal considerare le rispettive inclinazioni (date dai coefficienti a_i, b_i e c_i); vi sono tre possibilità:

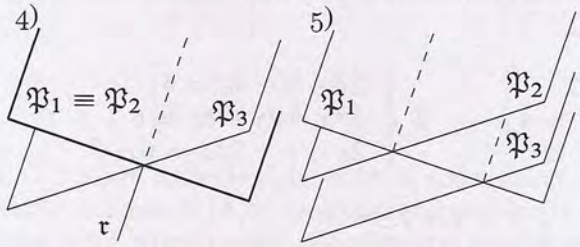
- i tre piani hanno tutti la stessa inclinazione;
- due di loro hanno la stessa inclinazione, il terzo ha un'altra inclinazione;
- tutti e tre hanno inclinazioni diverse.

A seconda poi dei termini noti d_i, queste tre possibilità si suddividono in otto casi complessivi:

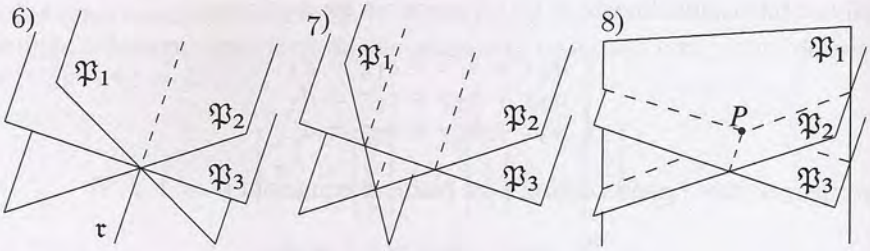
1) tre piani con la stessa inclinazione, coincidenti;
2) tre piani con la stessa inclinazione, due coincidenti ed uno parallelo;
3) tre piani con la stessa inclinazione, tutti paralleli tra loro;



4) due piani con la stessa inclinazione e coincidenti, il terzo incidente;
5) due piani con la stessa inclinazione e paralleli, il terzo incidente ad entrambi;



6) tre piani con tre diverse inclinazioni, con una retta in comune;
7) tre piani con tre diverse inclinazioni, con nessun punto comune;
8) tre piani con tre diverse inclinazioni, con un punto comune.



Osserviamo poi che nei casi 2), 3), 5) e 7) non vi sono punti comuni ai piani, e quindi non c'è alcuna soluzione; nel caso 8) c'è un unico punto comune P, e quindi le coordinate di P rappreseteranno l'unica soluzione; nei casi 4) e 6) i punti comuni sono infiniti, disposti lungo una retta $\mathfrak{r}$ e nel caso 1) i punti in comune sono infiniti, tutti i punti dell'unico piano in esame.

Dal punto di vista del teorema di Rouché–Capelli, se non vi sono soluzioni, cioè nei casi casi 2), 3), 5) e 7), è perché il rango di $\mathbf{A}$ è inferiore al rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$; nei casi 2) e 3) il rango di $\mathbf{A}$ è 1 mentre quello di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 2; nei casi 5) e 7) il rango di A è 2 mentre quello di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è 3; se vi sono soluzioni i ranghi delle due matrici coincidono: nel caso 1) valgono entrambi 1; nei casi 4) e 6) valgono entrambi 2; nel caso 8) valgono entrambi 3; riuniamo tutto in uno schema:

	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 1$	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 2$	$\operatorname{rk}[\mathbf{A}\|\mathbf{b}] = 3$
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$	1)	2), 3)	—
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$	—	4), 6)	5), 7)
$\operatorname{rk}\mathbf{A} = 3$	—	—	8)

Come nel caso di tre equazioni in due incognite, conviene effettuare le eventuali ulteriori suddivisioni caso per caso.

Prima di affrontare i sistemi dell'esercizio, notiamo che, visto che $\mathbf{A}$ è quadrata, la prima cosa che conviene calcolare è $\det \mathbf{A}$: se è diverso da zero, il rango di $\mathbf{A}$ è massimo (cioè 3, come il numero di incognite), il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ non può essere superiore ed il sistema avrà una ed una sola soluzione.

① Per quanto riguarda il primo sistema, le matrici dei coefficienti e completa sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \alpha^2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \alpha^2 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & \alpha \end{array}\right].$$

Il determinante di $\mathbf{A}$ vale zero per ogni valore di α, poiché la prima e la terza riga sono uguali tra loro a parte il segno, quindi il rango di $\mathbf{A}$ non sarà mai 3; per verificare se il rango di $\mathbf{A}$ sia 1 o 2, calcoliamo il determinante della sottomatrice 2×2 formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne in alto a sinistra di $\mathbf{A}$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 - 4.$$

Consideriamo dapprima il caso $\alpha^2 - 4 \neq 0$: se $\alpha \neq \pm 2$ questo determinante non si annulla, nella matrice $\mathbf{A}$ è contenuta una sottomatrice di rango 2, e quindi $\mathbf{A}$ ha rango 2, vediamo allora di stabilire il rango della matrice completa. Abbiamo individuato una sottomatrice 2×2 con un determinante non nullo (la prima in alto a sinistra); per stabilire se il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sia 2 o 3 occorre e basta (in base al teorema di Kronecker) che noi *orliamo* questa sottomatrice o con la terza o con la quarta colonna di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$: se la orliamo con la terza colonna ritroviamo la matrice dei coefficienti e già sappiamo che il determinante è zero, se invece la orliamo con la quarta colonna otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \alpha^2 & 4 \\ -1 & -2 & \alpha \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale $\alpha^3 + 2\alpha^2 - 4\alpha - 8$. Visto che abbiamo posto $\alpha \neq \pm 2$ questo determinante è necessariamente diverso da zero e il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ vale 3 mentre il rango di $\mathbf{A}$ vale 2, e pertanto non vi sono soluzioni. Dal punto di vista geometrico guardando $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si vede che nella prima e terza equazione i coefficienti sono proporzionali, ma non lo sono i termini noti, quindi il piano corrispondente alla prima riga ed il piano corrispondente alla terza riga sono paralleli; inoltre, poiché i coefficienti della seconda equazione non sono proporzionali a quelli delle altre due righe (infatti $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 2$), il piano corrispondente a questa equazione non sarà parallelo agli altri. Rimangono da esaminare i casi $\alpha = 2$ ed $\alpha = -2$. A questo scopo conviene sostituire direttamente nella matrice completa i valori di α ed esaminarla caso per caso:

$\boxed{\alpha = 2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\boxed{\alpha = -2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

In entrambi i casi le tre righe della matrice dei coefficenti sono proporzionali, e quindi $\operatorname{rk}\mathbf{A} = 1$; per ciò che riguarda $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, nel caso $\alpha = 2$ le due prime righe sono proporzionali, e quindi le due equazioni identificano lo stesso piano,

mentre la terza ha un diverso termine noto (e quindi ad essa corrisponde un piano parallelo a quello delle prime due); nel caso $\alpha = -2$ le tre righe sono interamente proporzionali, e quindi tutte e tre identificano lo stesso piano; riassumendo i casi discussi, complessivamente la situazione è la seguente:

- $\alpha \neq \pm 2$: due piani paralleli, uno incidente ad entrambi – caso 5);
- $\alpha = 2$: due piani coincidenti, uno parallelo – caso 2);
- $\alpha = -2$: tre piani coincidenti – caso 1).

② Per il secondo sistema, le matrici dei coefficienti e completa sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ \beta^2 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 2\beta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 4 \\ \beta^2 & -2 & -8 & 6+\beta \\ 2 & -1 & 2\beta & 6-\beta \end{array}\right].$$

Calcoliamo subito il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\det \mathbf{A} = 2\beta^3 + 4\beta^2 - 8\beta - 16 = 2(\beta - 2)(\beta + 2)^2$$

per cui se $\beta \neq \pm 2$ il determinante di $\mathbf{A}$ è diverso da zero ed il sistema ha una ed una sola soluzione, che possiamo determinare, ad esempio, con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{1}{\beta + 2}, \qquad y = -2\frac{\beta + 5}{\beta + 2}, \qquad z = \frac{2 - \beta}{2(\beta + 2)}.$$

Per discutere i casi $\beta = \pm 2$ scriviamo esplicitamente la matrice completa nei due casi:

$$\boxed{\beta = -2} \qquad\qquad \boxed{\beta = 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & -8 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \end{array}\right] \qquad\qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & -8 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Se $\beta = -2$, la matrice dei coefficienti ha tre righe proporzionali, mentre i termini noti non lo sono, quindi $\operatorname{rk} \mathbf{A} = 1$ e $\operatorname{rk} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$ e non vi sono soluzioni; se $\beta = 2$, la matrice dei coefficienti ha le prime due righe proporzionali e la terza no, quindi il rango di $\mathbf{A}$ è 2, lo stesso dicasi della matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, e pertanto $\operatorname{rk} \mathbf{A} = \operatorname{rk} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro; considerato che le prime due equazioni sono equivalenti, per determinare tali soluzioni usiamo la prima e la terza equazione (usando x come parametro):

$$\begin{cases} 4x - 2y - 8z = 8 \\ 2x - y + 4z = 4 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y - 4z = 4 - 2x \\ -y + 4z = 4 - 2x \end{cases},$$

da cui ricaviamo $y = 2x - 4$ e $z = 0$, pertanto le soluzioni saranno tutti i punti del tipo $(x, 2x - 4, 0)$. Dal punto di vista geometrico, la situazione è

- $\beta \neq \pm 2$: tre piani in posizione generica, con un punto P in comune – caso 8);
- $\beta = 2$: due piani coincidenti, uno incidente, con una retta $\mathfrak{r}$ in comune – caso 4);
- $\beta = -2$: tre piani paralleli – caso 3).

Le coordinate di P (per $\beta \neq \pm 2$) e l'equazione di $\mathfrak{r}$ (per $\beta = 2$) sono rispettivamente

$$P\left(\frac{1}{\beta+2}, -2\frac{\beta+5}{\beta+2}, \frac{2-\beta}{2(\beta+2)}\right) \qquad \mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

③ La matrice dei coefficienti e la matrice completa del terzo sistema sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & \gamma \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right].$$

Poiché $\det \mathbf{A} = 0$, la matrice dei coefficienti ha rango 2 (infatti non vi sono righe proporzionali). Per determinare il rango di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ usiamo il teorema di Kronecker, scegliendo come "minore pilota" quello formato dalle prime due righe e colonne in alto a sinistra in $\mathbf{A}$, il cui determinante è diverso da zero; possiamo orlare questo minore in due modi possibili: o con la terza o con la quarta colonna; orlandolo con la terza riotteniamo $\mathbf{A}$, di cui già sappiamo che il determinante è zero; orlandolo con la quarta colonna otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & \gamma \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale $9 - 3\gamma$. La matrice completa avrà allora rango 3 se $\gamma \neq 3$, e in questo caso non vi saranno soluzioni, rango 2 se $\gamma = 3$, in questo caso vi saranno infinite soluzioni, dipendenti da un parametro. Coerentemente con la nostra scelta del minore pilota (che corrispondeva ai coefficienti di x e y nelle prime due equazioni), interpretiamo z come parametro e le riscriviamo nella forma

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2z \\ 2x - y = 3 - z \end{cases},$$

da cui $x = 2 - z$ e $y = 1 - z$, e pertanto le soluzioni del sistema saranno tutti i punti del tipo $(2 - z, 1 - z, z)$. Dal punto di vista geometrico, la situazione è

- $\gamma \neq 3$: tre piani messi "a prisma" – caso 7);
- $\gamma = 3$: tre piani con una retta $\mathfrak{r}$ in comune – caso 6);

e l'equazione di $\mathfrak{r}$ è

$$\mathfrak{r}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.29 **Sistemi lineari omogenei**

Discutere, risolvere ed interpretare geometricamente (ove possibile) i seguenti sistemi, al variare dei parametri α, β e γ:

$$① \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + \alpha z = 0 \end{cases};$$

$$③ \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \beta x + y - 2z = 0 \end{cases}; \qquad ④ \begin{cases} x + 2y + 2z - t = 0 \\ y - 2z + 3t = 0 \\ \gamma^2 x + 3y + 2t = 0 \\ 2x + (2+\gamma)y + 6z - 5t = 0 \end{cases}.$$

Soluzione

I sistemi di questo esercizio hanno tutti in comune una cosa: si tratta di sistemi *omogenei*, cioè sistemi in cui il vettore **b** dei termini noti è nullo[f], ossia della forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Osserviamo che orlando la matrice **A** con il vettore **0** il rango non potrà mai aumentare, e quindi tutti i sistemi omogenei avranno sempre almeno una soluzione: poiché poi il prodotto di **A** per un vettore di zeri dà **0**, questa soluzione sempre presente è la soluzione nulla.

① Partiamo allora dal primo sistema: è un sistema di tre equazioni in due incognite, la matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix};$$

il rango di **A** è due (le righe non sono proporzionali), per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ha una e una sola soluzione, poiché $x = 0, y = 0$ è necessariamente soluzione; concludiamo senza alcun calcolo ulteriore che è anche l'unica soluzione possibile. Geometricamente si tratta di tre rette che, nel piano, si incontrano nell'origine.

② È un sistema di tre equazioni in tre incognite, la matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

e $\det \mathbf{A} = 12 - 3\alpha$. Si distinguono allora due casi:

- $\alpha \neq 4$: il determinante di **A** è diverso da zero e la soluzione del sistema è unica, e quindi necessariamente $x = 0, y = 0, z = 0$; si tratta di tre piani che si incontrano nell'origine;

[f] D'ora in avanti indicheremo con il simbolo **0** (zero scritto in grassetto) un vettore di zeri.

- $\alpha = 4$: il rango di $\mathbf{A}$ è 2 (non si tratta in alcun caso di tre righe proporzionali), ed in base al teorema di Rouché–Capelli possiamo dire che il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro, determinabili usando due delle tre equazioni (e usando una delle tre variabili, ad esempio z, come parametro).

Per determinare le soluzioni dal caso $\alpha = 4$, notiamo che il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante diverso da zero, possiamo allora scegliere x e y nelle prime due equazioni come incognite, ottenendo

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ 2x - y = -z \end{cases}.$$

Da questo sistema ricaviamo $x = \frac{2}{3}z$, $y = \frac{7}{3}z$, quindi le soluzioni sono tutte le terne del tipo $(\frac{2}{3}z, \frac{7}{3}z, z)$ o anche $(2z, 7z, 3z)$; dal punto di vista geometrico si tratta di tre piani passanti per l'origine che hanno in comune, oltre all'origine stessa, una retta (ovviamente passante per l'origine).

③ Il terzo sistema ha come matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{A}$ non è quadrata; per determinarne il rango ricorriamo al teorema di Kronecker; possiamo partire (come già altre volte) dalla sottomatrice formata dalle prime due righe e due colonne di $\mathbf{A}$: il determinante è diverso da zero, e possiamo orlarla o con la terza o con la quarta riga:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ \beta & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

il determinante della matrice a sinistra è 0, quello della matrice a destra è $6 + 6\beta$, quindi:

- $\beta \neq -1$: il rango di $\mathbf{A}$ è 3 e il sistema ha una e una sola soluzione (necessariamente $x = y = z = 0$, perché il sistema è omogeneo), sono le equazioni di quattro piani che si intersecano nell'origine;
- $\beta = -1$: il rango di $\mathbf{A}$ è due e vi sono infinite soluzioni dipendenti da un parametro, soluzioni ricavabili attraverso due delle quattro equazioni (coerentemente con la scelta del minore pilota usiamo le prime due, con z come parametro):

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

  troviamo $x = -\frac{3}{2}z$, $y = \frac{1}{2}z$, e quindi le soluzioni sono tutte le terne del tipo $(-\frac{3}{2}z, \frac{1}{2}z, z)$ o anche $(-3z, z, 2z)$. Dal punto di vista geometrico il sistema descrive quattro piani che hanno in comune una retta.

④ Abbiamo nuovamente un sistema la cui matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ \gamma^2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2+\gamma & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

è quadrata; se $\det \mathbf{A} \neq 0$ allora la soluzione è unica (e pertanto $x = y = z = t = 0$), con qualche conto troviamo che $\det \mathbf{A} = 4(\gamma - 1)^2(\gamma + 1)$, e quindi se $\gamma \neq \pm 1$ il rango di $\mathbf{A}$ è 4 e l'unica soluzione è quella nulla; come al solito studiamo separatamente i casi $\gamma = 1$ e $\gamma = -1$:

$$\boxed{\gamma = -1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\gamma = 1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che per entrambe queste matrici il rango non è 4 (visto che corrispondono ai casi in cui il determinante si annulla); osserviamo anche che hanno le prime tre righe uguali (cambia solo la quarta), e che in entrambe la terza riga è la somma delle prime due. Questo significa che il rango delle sottomatrici formate dalle prime tre righe è in entrambi i casi 2, e pertanto possiamo trascurare una delle prime tre righe; tralasciamo la prima e consideriamo allora le sottomatrici formate dalle ultime tre righe:

$$\boxed{\gamma = -1} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\gamma = 1} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Per determinarne il rango possiamo partire in entrambi i casi dalla sottomatrice in alto a sinistra e orlarla prima con la terza e poi con la quarta colonna; nel caso $\gamma = -1$ avremo a che fare con le due matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Il determinante della prima è 4, quello della seconda è -6. In entrambi i casi il loro rango è 3 e quindi è 3 anche il rango di $\mathbf{A}$. Nel caso $\gamma = 1$ avremo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Poiché il determinante di entrambe queste matrici è zero possiamo concludere che in questo caso il rango di **A** è 2. Per determinare le infinite soluzioni (dipendenti da un parametro) del caso $\gamma = -1$ possiamo usare tre delle quattro equazioni (non le prime tre, che sono linearmente dipendenti), ad esempio le ultime tre, usando t come parametro:

$$\begin{cases} y - 2z = -3t \\ x + 3y = -2t \\ 2x + y + 6z = 5t \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $x = -2t, y = 0, z = \frac{3}{2}t$, e pertanto le soluzioni del sistema di partenza nel caso $\gamma = -1$ sono costituite da tutte le quaterne del tipo $(-2t, 0, \frac{3}{2}t, t)$. Per determinare le infinite soluzioni dipendenti da due parametri del caso $\gamma = 1$ bastano due equazioni, ad esempio la seconda e la terza, usando y e t come parametri:

$$\begin{cases} 2z = y + 3t \\ x = -3y - 2t \end{cases}.$$

Questo sistema è già risolto rispetto alle sue incognite: le soluzioni sono tutte le quaterne $(-3y - 2t, y, \frac{y+3t}{2}, t)$, al variare di y e t in $\mathbb{R}$.

9.1.6 Spazi vettoriali e sottospazi, dimensione

ESERCIZIO 9.30 **Gli insiemi $\mathbb{R}^n$**

Mostrare che per ogni valore di n l'insieme

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare[g]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

[g] In effetti, il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere sostituito da un altro generico campo $\mathbb{K}$, come ad esempio $\mathbb{C}$, in tal caso alcune delle proprietà che vedremo nel seguito vanno leggermente modificate.

Soluzione

Un insieme $\mathscr{V}$ è detto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se sui suoi elementi sono definite due operazioni, dette "somma" e "prodotto per uno scalare":

- la "somma" associa a due elementi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathscr{V}$ un altro elemento di $\mathscr{V}$, indicato con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;
- il "prodotto per uno scalare" associa ad un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ ed a un elemento $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ un altro elemento di $\mathscr{V}$, indicato con $\lambda\mathbf{v}$.

La somma e il prodotto per uno scalare verificano le seguenti proprietà:

- la somma è *commutativa* e *associativa*, cioè per tutti gli elementi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ di $\mathscr{V}$ si ha
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w});$$
- esiste l'*elemento neutro* della somma: cioè esiste un elemento $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ di $\mathscr{V}$ per cui, se $\mathbf{v}$ è un qualsiasi elemento di $\mathscr{V}$,
$$\mathbf{v} + \mathbf{0}_{\mathscr{V}} = \mathbf{0}_{\mathscr{V}} + \mathbf{v} = \mathbf{v};$$
- ogni elemento $\mathbf{v}$ di $\mathscr{V}$ ha il suo *opposto*, ossia un elemento che sommato a $\mathbf{v}$ dà $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ (tale elemento si indica con $-\mathbf{v}$);
- vale la relazione $1\ \mathbf{v} = \mathbf{v}$;
- vale la *proprietà associativa* tra il prodotto di scalari ed il prodotto scalare-per-vettore, cioè per ogni $\mathbf{v}$ in $\mathscr{V}$ e per ogni coppia di numeri reali λ e μ:
$$(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v});$$
- il prodotto per uno scalare gode della *proprietà distributiva* sia rispetto alla somma di scalari, sia rispetto alla somma di vettori, cioè se λ e μ sono numeri reali e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono elementi di $\mathscr{V}$, allora
$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}, \qquad \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

Notiamo che per le n-ple di numeri reali (cioè per gli elementi di $\mathscr{V}$) tutte queste proprietà sono conseguenza immediata delle equivalenti proprietà per le somme e i prodotti tra numeri reali, pertanto *ogni* $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio vettoriale.*

ESERCIZIO 9.31 — Caratterizzazione di spazi vettoriali generici

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

① $\mathscr{V} = \{$*matrici* 3×3 *triangolari superiori*$\}$,
② $\mathscr{V} = \{$*polinomi di grado n in x*$\}$,
③ $\mathscr{V} = \{$*polinomi di grado minore o uguale a n in x*$\}$,

e identificarli con un opportuno spazio $\mathbb{R}^k$.

Soluzione

Per verificare se un insieme sia o meno uno spazio vettoriale, occorre stabilire se goda o meno delle proprietà elencate nell'esercizio precedente.

① La somma di due matrici ed il prodotto scalare-matrice godono di tutte le proprietà sopra elencate, poiché tali operazioni sono definite sulla base della somma e del prodotto tra numeri reali; inoltre, poiché la somma di due matrici triangolari siperiori è ancora triangolare superiore, ed inoltre moltiplicando una matrice triangolare superiore per uno scalare si ottiene ancora una matrice triangolare superiore, allora possiamo concludere che $\mathscr{V}$ è uno spazio vettoriale. Se decidiamo di elencare gli elementi non-zero di una matrice triangolare superiore in un opportuno vettore:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

ci accorgiamo della corrispondenza tra $\mathscr{V}$ ed $\mathbb{R}^6$. Infine, l'elemento $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ è la matrice nulla, corrispondente al vettore nullo.

② Anche per la somma tra polinomi valgono le proprietà sopra elencate, in quanto la somma di polinomi o il prodotto di un polinomio per uno scalare si effettuano tramite le analoghe operazioni sui coefficienti dei singoli monomi, coefficienti che – essendo numeri reali – godono ovviamente di tali proprietà. Notiamo però che l'insieme $\mathscr{V}$ dei polinomi di grado n *non è* uno spazio vettoriale, perché non è chiuso rispetto alla somma, infatti se consideriamo i due polinomi seguenti:

$$x^n + x - 1, \qquad -x^n + 2x^2 + 4,$$

la loro somma $2x^2 + x + 3$ *non è più* un polinomio di grado n.

③ Le considerazioni appena svolte nel punto ② ci portano immediatamente a dire che $\mathscr{V}$ è uno spazio vettoriale, inoltre possiamo stabilire la seguente corrispondenza tra polinomi di grado minore o uguale a n e vettori di $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}$$

e quindi possiamo all'occorrenza identificare $\mathscr{V}$ con $\mathbb{R}^{n+1}$. Infine l'elemento $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ è il polinomio $0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$, corrispondente del vettore nullo.

ESERCIZIO 9.32 **Spazi vettoriali e insiemi di funzioni**

Stabilire quali dei seguenti insiemi di funzioni sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$*:*

① $\mathscr{V} = \mathscr{C}[0,1] = \{$*funzioni continue nell'intervallo* $[0,1]\}$;
② $\mathscr{V} = \{$*funzioni periodiche in* $\mathbb{R}\}$;
③ $\mathscr{V} = \{$*funzioni periodiche di periodo assegnato* T *in* $\mathbb{R}\}$.

Soluzione

Abbiamo visto nell'Esercizio 9.30 quali caratteristiche debba possedere un insieme per essere uno spazio vettoriale. Per ciascuno degli esempi proposti, controlliamo che siano soddisfatte.

① Poiché la somma (commutativa) di due funzioni continue su un intervallo I dà come risultato una funzione continua su I, e poiché il multiplo di una funzione continua è una funzione continua, l'insieme $\mathscr{C}[0,1]$ è uno spazio vettoriale; l'elemento $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ è la funzione identicamente nulla su $[0,1]$.

② Sappiamo già (Esercizio 4.12) che la somma di due funzioni periodiche di periodo diverso può non essere periodica, dunque può accadere che

$$\mathbf{u} \in \mathscr{V}, \mathbf{v} \in \mathscr{V} \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v} \notin \mathscr{V},$$

e dunque $\mathscr{V}$ non è uno spazio vettoriale.

③ La somma di due funzioni aventi lo stesso periodo T è ancora una funzione avente periodo T, il prodotto di una funzione periodica per uno scalare è ancora una funzione avente medesimo periodo, dunque $\mathscr{V}$ è uno spazio vettoriale; l'elemento $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ è la funzione identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 9.33 **Generatori e basi, dimensione**

Dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mostrare che sono generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$*, e da questi ricavare una base per* $\mathbb{R}^3$.

Soluzione

Dato uno spazio vettoriale $\mathscr{V}$, un insieme di suoi elementi $\mathbf{v}_i$ è detto insieme di *generatori* se tutti gli elementi di $\mathscr{V}$ possono essere espressi tramite combinazione lineare dei $\mathbf{v}_i$; se inoltre i vettori $\mathbf{v}_i$ sono indipendenti, allora costituiscono una *base*, la *dimensione* di $\mathscr{V}$ è il numero di elementi che compongono le sue basi. Sappiamo inoltre che la dimensione di un qualsiasi $\mathbb{R}^k$ è k.

Veniamo all'esercizio: perché questi vettori generino tutto $\mathbb{R}^3$, occorre verificare che tra essi ve ne siano tre linearmente indipendenti; ossia che il rango della matrice

$$\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sia tre. Procediamo con il MEG:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

I *pivot* della matrice ridotta a scala sono tre e si trovano su prima, seconda e quarta colonna, sappiamo quindi che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti, e pertanto generano $\mathbb{R}^3$; come base di $\mathbb{R}^3$ potremmo prendere questi stessi vettori, o anche (nessuno lo vieta) la più comoda base canonica $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ove[h]

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.34 **Sottoinsiemi e sottospazi vettoriali**

Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono anche sottospazi:

① $I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x + y = 0 \right\}$; ② $I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z = 4 \right\}$;

③ $I_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 4x = 2y = z \right\}$; ④ $I_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : xyz \geq 0 \right\}$.

Soluzione

Per verificare che un sottoinsieme I di uno spazio vettoriale $\mathscr{V}$ sia un sottospazio, occorre e basta verificare che l'insieme I sia chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per uno scalare, ossia verificare che per ogni coppia $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di elementi di I e per ogni numero reale λ accada che

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in I, \qquad \lambda\mathbf{v} \in I.$$

[h] Dato lo spazio $\mathbb{R}^k$, si chiama *base canonica* la base formata dai k vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, ove ciascun $\mathbf{e}_i$ ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima, ad esempio in $\mathbb{R}^4$ la base canonica è formata da

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo inoltre che il vettore nullo $\mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ deve necessariamente appartenere ad ogni sottospazio, pertanto un insieme che non contiene $\mathbf{0}_{\mathcal{V}}$ sicuramente non è un sottospazio.

① Osserviamo che tutti e soli gli elementi di I_1 hanno la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ z \end{bmatrix}, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Controlliamo la chiusura di I_1 rispetto alla somma:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ -2\beta \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ -2\alpha-2\beta \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} \overset{\alpha+\beta=\gamma}{=} \begin{bmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ z_1+z_2 \end{bmatrix},$$

pertanto, la somma di due elementi di I_1 ha come seconda componente il doppio della prima cambiata di segno e quindi è ancora un elemento di I_1, e quindi I_1 è chiuso rispetto alla somma; vediamo il prodotto per uno scalare:

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda(-2\alpha) \\ \lambda z \end{bmatrix} \overset{\lambda\alpha=\delta}{=} \begin{bmatrix} \delta \\ -2\delta \\ \lambda z \end{bmatrix},$$

e quindi I_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

② I_2 è formato da tutte le terne il cui terzo elemento vale 4, poiché il vettore nullo non è tra queste, sicuramente I_2 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

③ Poiché $z = 4x$ e $y = 2x$, I_3 è formato da tutti e soli i vettori della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix}, \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

procedendo come al punto ① si verifica che I_3 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

④ I_4 è formato da tutte le terne $\alpha\beta\gamma$ il cui prodotto è positivo, non è chiuso rispetto al prodotto: se moltiplichiamo un elemento di I_4 per -1

$$-1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{bmatrix},$$

otteniamo un nuovo elemento, in cui il prodotto delle componenti $(-\alpha)(-\beta)(-\gamma) = -\alpha\beta\gamma$ è minore di zero, e quindi non appartiene più a I_4.

ESERCIZIO 9.35 **Sottospazi generati, span**

Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

determinare il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *e* $\mathbf{v}_4$ *(che in simboli è espresso da* $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$*), specificandone la dimensione e una base.*

Soluzione

Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbb{R}^n$, con $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ si intende l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k ; \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione minore o uguale a k, poiché la sua dimensione è uguale al numero di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linearmente indipendenti. Per stabilire quanti e quali vettori siano linearmente indipendenti, applichiamo il MEG alla matrice

$$\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 | \mathbf{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ -1 & -5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

inanzitutto la prima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ -1 & -5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ocupiamoci ora della seconda colonna, nella terza non compaiono *pivot*, e quindi passiamo all'ultima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le posizioni dei *pivot* (prima, seconda e quarta colonna) indicano che i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti, e dunque costituiscono una base per $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, che quindi è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3.

ESERCIZIO 9.36 **Gli spazi row e col**

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 8 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -3 & 7 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix},$$

determinare una base per row $\mathbf{A}$ *e* col $\mathbf{A}$.

Soluzione

Data una matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(m,n)$, si chiama *spazio riga* di $\mathbf{M}$, e si indica con row $\mathbf{M}$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato dalle m righe di $\mathbf{M}$:

$$\operatorname{row}\mathbf{M} = \operatorname{span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\};$$

si chiama *spazio colonna* di $\mathbf{M}$, e si indica con col $\mathbf{M}$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalle n colonne di $\mathbf{M}$:

$$\operatorname{col}\mathbf{M} = \operatorname{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}.$$

Ovviamente, per definizione di rango abbiamo che

$$\dim\operatorname{col}\mathbf{M} = \dim\operatorname{row}\mathbf{M} = \operatorname{rk}\mathbf{M}.$$

Per stabilire quali righe formano una base per row $\mathbf{M}$ e quali colonne formano una base per col $\mathbf{M}$, è sufficiente ridurre a scala la matrice:

- le righe corrispondenti ai *pivot* formano una base per row $\mathbf{M}$: è possibile scegliere sia le righe originali della matrice $\mathbf{M}$ sia le righe della sua riduzione a scala;
- le colonne corrispondenti ai *pivot* formano una base per col $\mathbf{M}$: è *necessario* scegliere le colonne della matrice $\mathbf{M}$ originale.

Riduciamo dunque a scala la matrice $\mathbf{A}$, la prima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 8 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -3 & 7 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 - 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix};$$

poi la seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix};$$

nella terza colonna non vi sono *pivot*, passiamo alla quarta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_5 - 2\mathbf{r}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

nella quinta colonna non vi sono *pivot*, concludiamo con la sesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I *pivot* si trovano sulle prime quattro righe, che dunque formano una base per row $\mathbf{A}$; possiamo scegliere sia le righe della matrice ridotta a scala, sia le righe della matrice originale, nel primo caso

$$\mathcal{B}_{\text{row}\,\mathbf{A}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\},$$

nel secondo caso, alternativamente,

$$\mathcal{B}_{\text{row}\,\mathbf{A}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

I *pivot* si trovano in corrispondenza della prima, seconda, quarta e sesta colonna, dunque una base per col $\mathbf{A}$ è formata dalle corrispondenti colonne della matrice originale $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{B}_{\text{col}\,\mathbf{A}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 9.37 **Nucleo di una matrice**

Determinare una base per il nucleo della matrice $\mathbf{A}$ *dell'esercizio precedente.*

Soluzione

Data una matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}(m,n)$, si chiama *nucleo* di $\mathbf{M}$, e si indica con ker $\mathbf{M}$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori che moltiplicati per $\mathbf{M}$ danno il vettore nullo[i]:

$$\ker \mathbf{M} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}.$$

Poiché dobbiamo determinare le soluzioni di $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, serviamoci direttamente della matrice $\mathbf{A}$ ridotta a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Le posizioni dei *pivot* indicano che x_3 e x_5 vanno trattati come parametri. L'ultima equazione non porta nulla, la penultima dà $x_6 = 0$; tenuto conto di questo, la terza equazione dà $x_4 = x_5$, la seconda dà $x_2 = -2x_4 - x_5 = -3x_5$, infine la prima dà $x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = x_3 + 2x_5$. In definitiva le soluzioni di $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sono i vettori

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

il nucleo di $\mathbf{A}$ ha quindi dimensione 2, ed una base è

$$\mathscr{B}_{\ker \mathbf{A}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 9.38 **Intersezione e somma di sottospazi. Somma diretta**

Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - z = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y + 2z = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = y = z \right\},$$

[i] In altre parole, ker $\mathbf{M}$ è l'insieme delle soluzioni $\mathbf{v}$ del sistema omogeneo $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

determinare e descrivere (fornendone una base) i seguenti sottospazi:

$$① \; V_1 \cap V_2, \qquad ② \; V_1 \cap V_3, \qquad ③ \; V_2 \cap V_3,$$

$$④ \; V_1 + V_2, \qquad ⑤ \; V_1 + V_3, \qquad ⑥ \; V_2 + V_3,$$

specificando in quali casi la somma è una somma diretta.

Soluzione

Se $\mathscr{V}$ è uno spazio vettoriale e U e V sono due sottospazi. Si chiamano *intersezione* e *somma* di U e V i seguenti sottospazi: $U \cap V$ è il sottospazio formato dai vettori che appartengono ad entrambi:

$$U \cap V = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V} : \mathbf{v} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\},$$

$U + V$ è il sottospazio formato da tutte le possibili somme tra un qualsiasi elemento di U e un qualsiasi elemento di V:

$$U + V = \{\mathbf{w} \in \mathscr{V} : \exists \mathbf{u} \in U \text{ e } \exists \mathbf{v} \in V \text{ tali che } \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}.$$

Se poi $U \cap V = \{\mathbf{0}_{\mathscr{V}}\}$, allora la somma $U + V$ prende il nome di *somma diretta* e si indica con $U \oplus V$; ciò significa che per ogni elemento $\mathbf{w}$ di $U \oplus V$ esiste un'unica coppia $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di cui esso è la somma. In tutti i casi, tra le dimensioni degli spazi considerati vale la relazione (*formula di Grassmann*)

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Notiamo che V_1 e V_2 hanno dimensione 2, mentre V_3 ha dimensione 1; per ciascuno di essi forniamo una base:

- V_1 è formato da tutti i vettori aventi prima e terza componente uguali e la seconda componente libera di variare:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{B}_{V_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\};$$

- V_2 è formato da tutti i vettori con la seconda componente uguale al doppio della terza, cambiata di segno, mentre la prima è libera di variare:

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{B}_{V_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\};$$

- V_3 è formato da tutti i vettori con le tre componenti uguali:

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{B}_{V_3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

① Poiché l'intersezione di due sottospazi è costituita dai vettori che appartengono ad entrambi, bisogna che questi vettori verifichino tutte le richieste di entrambi. Cominciamo con $V_1 \cap V_2$:

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

e quindi

$$\mathcal{B}_{V_1 \cap V_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

② Passiamo a $V_1 \cap V_3$: notiamo che la condizione $x = y = z$ di V_3 è già contenuta nella richiesta $x - z = 0$ di V_1, e quindi V_3 è un sottospazio di V_1, e allora

$$V_1 \cap V_3 = V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

③ Infine $V_2 \cap V_3$: la condizione $y + 2z = 0$ di V_3 è incompatibile con la richiesta $x = y = z$ di V_3 (l'unica soluzione sarebbe $x = y = z = 0$), e quindi

$$V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

④ Avendo già determinato le intersezioni tra i vari sottospazi, possiamo usare la formula che lega le dimensioni per ricavare informazioni sulla somma. Partiamo da $V_1 + V_2$:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3;$$

poiché $V_1 + V_2$ ha dimensione 3, coincide[j] con lo stesso $\mathbb{R}^3$ e possiamo scegliere come base la base canonica $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

⑤ Nel caso di $V_1 + V_3$

$$\dim(V_1 + V_3) = \dim V_1 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_3) = 2 + 1 - 1 = 2;$$

poiché $V_1 + V_3$ ha la stessa dimensione del suo sottospazio V_1, allora $V_1 + V_3 = V_1$, pertanto

$$\mathcal{B}_{V_1 + V_3} = \mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

[j] Se lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ ha dimensione n ed un suo sottospazio V ha anch'esso dimensione n, necessariamente $\mathcal{V} = V$.

⑥ Infine $V_2 + V_3$: poiché $V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, allora $\dim(V_2 \cap V_3) = 0$, quindi $V_2 + V_3$ è in realtà una somma diretta: $V_2 \oplus V_3$, inoltre:

$$\dim(V_2 + V_3) = \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_2 \cap V_3) = 2 + 1 - 0 = 3;$$

pertanto, visto che $V_2 \oplus V_3$ ha dimensione 3, concludiamo che $V_2 \oplus V_3 = \mathbb{R}^3$.

9.1.7 Applicazioni lineari

ESERCIZIO 9.39 Applicazioni lineari

Date le seguenti funzioni tra spazi $\mathbb{R}^n$, stabilire quali sono applicazioni lineari e quali no.

$$① \ \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + \pi z \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 4y \\ |x| - y \\ 2z \end{bmatrix};$$

$$③ \ \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 4y \\ y - 2x \\ x + y - 2 \end{bmatrix}; \qquad ④ \ \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xz + 4y \\ 2x - y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Una funzione $\mathcal{L}$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è detta *applicazione lineare* se soddisfa le seguenti condizioni:

$$1: \mathcal{L}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) + \mathcal{L}(\mathbf{u}), \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n;$$
$$2: \mathcal{L}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{L}(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo allora quali delle funzioni del testo soddisfano le due condizioni.

① $\mathbf{f}$ è lineare, infatti, chiamando $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ due vettori generici, verifichiamo che le due condizioni siano soddisfatte, condizione numero 1:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + \pi(z_1 + z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2y_1 + 3x_2 - 2y_2 \\ x_1 + \pi z_1 + x_2 + \pi z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3x_1 - 2y_1 \\ x_1 + \pi z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 - 2y_2 \\ x_2 + \pi z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}(\mathbf{u});
\end{aligned}$$

condizione numero 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\lambda \mathbf{v}) &= \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(\lambda x) - 2(\lambda y) \\ \lambda x + \pi(\lambda z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(3x - 2y) \\ \lambda(x + \pi z) \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + \pi z \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

② La funzione "valore assoluto" non è lineare, quindi se in una funzione **f** compare un valore assoluto, si può essere certi che **f** non è lineare. Poiché vogliamo dimostrare che **f** non è lineare, è sufficiente trovare una coppia di vettori che non soddisfa la 1 (o una coppia scalare-vettore che non soddisfa la 2); consideriamo

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, anche $\mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, mentre

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3},$$

e quindi **f** non è lineare.

③ Una conseguenza immediata della condizione 2 è la seguente: se **f** è lineare, allora l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo (in simboli $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$); nel nostro caso, poiché la terza componente del vettore risultato contiene un "termine noto", **f** non potrà essere lineare, verifichiamolo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

④ Anche in questo caso, la presenza nell'espressione analitica di **f** del prodotto xz (e il prodotto non è lineare) impedisce che **f** sia lineare, possiamo verificarlo, prendendo la condizione 2 e mostrando che, per esempio, $\mathbf{f}(2\mathbf{v}) \neq 2\,\mathbf{f}(\mathbf{v})$:

$$\mathbf{f}(2\mathbf{v}) = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4xz + 8y \\ 4x - 2y \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2xz + 8y \\ 4x - 2y \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{f}(\mathbf{v}).$$

ESERCIZIO 9.40 **Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generici**

Verificare che tutte le funzioni sottoelencate sono applicazioni lineari, specificando per ciascuna di esse lo spazio vettoriale $\mathscr{W}$ d'arrivo.

① *Sia $\mathscr{V} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e ivi derivabili infinite volte; $\mathscr{L}(\mathbf{v}(x)) = \mathbf{v}'(x)$.*

② *Sia $\mathscr{V} = \mathscr{C}[0, 1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue sull'intervallo chiuso $[0, 1]$;*

$$\mathscr{L}(\mathbf{v}(x)) = \int_0^1 \mathbf{v}(x)\,\mathrm{d}x.$$

③ *Sia $\mathscr{V}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due;*

$$\mathscr{L}(\mathbf{v}(x)) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{v}(1) \end{bmatrix}.$$

Soluzione

① Sappiamo dalla teoria che l'operazione di derivazione è lineare, infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x)+g(x)\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\lambda f(x)\Big)=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x);$$

in questo caso $\mathscr{W}=\mathscr{V}$.

② Come l'operazione di derivazione, anche l'integrazione è lineare, infatti

$$\int_0^1\Big(f(x)+g(x)\Big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1\Big(\lambda f(x)\Big)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

in questo caso $\mathscr{W}=\mathbb{R}$.

③ Siano $\mathbf{v}_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ e $\mathbf{v}_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ due elementi di $\mathscr{V}$, ovviamente

$$[\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2](x)=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2),$$
$$[\lambda\mathbf{v}_1](x)=\lambda(a_1x^2+b_1x+c_1)=\lambda a_1x^2+\lambda b_1x+\lambda c_1;$$

inoltre

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1(x))=\begin{bmatrix} c_1\\ a_1+b_1+c_1\end{bmatrix},\qquad \mathcal{L}(\mathbf{v}_2(x))=\begin{bmatrix} c_2\\ a_2+b_2+c_2\end{bmatrix},$$

dunque per quanto riguarda la condizione numero 1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big([\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2](x)\big)&=\begin{bmatrix} c_1+c_2\\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} c_1\\ a_1+b_1+c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_2\\ a_2+b_2+c_2\end{bmatrix}\\ &=\mathcal{L}(\mathbf{v}_1(x))+\mathcal{L}(\mathbf{v}_2(x)),\end{aligned}$$

e per quanto riguarda la numero 2:

$$\mathcal{L}\big([\lambda\mathbf{v}_1](x)\big)=\begin{bmatrix} \lambda c_1\\ \lambda a_1+\lambda b_1+\lambda c_1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} c_1\\ a_1+b_1+c_1\end{bmatrix}=\lambda\mathcal{L}(\mathbf{v}_1(x)),$$

e dunque $\mathcal{L}$ è lineare, e in questo caso $\mathscr{W}=\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 9.41 **Matrice rappresentativa – 1**

Scrivere la matrice corrispondente a ciascuna delle applicazioni lineari sotto elencate (nell'ipotesi che si utilizzi in ogni caso la base canonica):

$$① \ \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y-3z \\ x-5z+10t \\ y+z-5t \end{bmatrix}; \quad ② \ \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \\ 2x+3y \end{bmatrix};$$

$$③ \ \mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \begin{Bmatrix} \textit{proiezione ortogonale del vettore } \mathbf{v} \\ \textit{lungo il piano } \mathfrak{P} : x+y+z=0 \end{Bmatrix}$$

Soluzione

Presi due spazi vettoriali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ con $\dim \mathcal{V} = n$ e $\dim \mathcal{W} = m$, le cui basi sono rispettivamente $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, ogni applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, è univocamente rappresentabile da una matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ a m righe e n colonne, la cui j-esima colonna è formata dai coefficienti da attribuire all'immagine del j-esimo elemento della base di $\mathcal{V}$ in termini della base di $\mathcal{W}$, ad esempio

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_j) = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{w}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} & a_{1j} = \alpha_1 & \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ & a_{mj} = \alpha_m & \end{bmatrix}.$$

① Se le basi assegnate sono – come nel nostro caso – le basi canoniche, allora la matrice associata a $\mathcal{L}$ è formata dai coefficienti di x, y, z, t (cioè delle componenti del vettore $\mathbf{v}$) nelle componenti del vettore risultato $\mathbf{w}$:

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y-3z \\ x-5z+10t \\ y+z-5t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-3z+0t \\ x+0y-5z+10t \\ 0x+y+z-5t \end{bmatrix}$$

e quindi

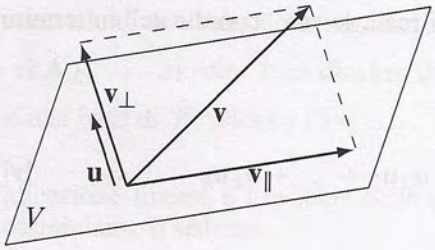
$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

② Ripetiamo la procedura, questa volta la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ avrà tre righe e due colonne:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \\ 2x+3y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

③ In questo caso, occorre prima di tutto determinare l'espressione analitica di $\mathcal{L}$: ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ può essere decomposto nella somma di due vettori

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel},$$



in cui $\mathbf{v}_\parallel \in \mathfrak{P}$ e rappresenta proprio la proiezione cercata, e quindi $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\parallel$, mentre $\mathbf{v}_\perp$ è perpendicolare a $\mathfrak{P}$; poiché $\mathfrak{P}$ è il piano $x + y + z = 0$, e quindi è perpendicolare al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_\perp$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$; con la formula della proiezione ortogonale (Esercizio 2.7) troviamo

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{x+y+z}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x-y-z \\ 2y-x-z \\ 2z-x-y \end{bmatrix};$$

pertanto

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x-y-z}{3} \\ \dfrac{2y-x-z}{3} \\ \dfrac{2z-x-y}{3} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.42 **Matrice rappresentativa – 2**

Sia $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due, e sia $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che ad ogni polinomio $\mathbf{v}(x)$ associa il vettore di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}(x)) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(1) \\ \mathbf{v}(2) \end{bmatrix};$$

scrivere la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$, assegnando a $\mathcal{V}$ la base

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \left\{\mathbf{u}_1(x) = 1, \mathbf{u}_2(x) = x, \mathbf{u}_3(x) = x^2\right\}$$

e a $\mathbb{R}^2$ la base canonica.

Soluzione

Se $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale di dimensione k, e $\mathbf{v}$ un suo elemento, fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ in $\mathcal{V}$, l'elemento $\mathbf{v}$ sarà espresso, in termini di $\mathcal{B}$, da

una k-pla di numeri reali, le sue "coordinate" in termini di $\mathcal{B}$, che indicheremo con $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k \qquad \Leftrightarrow \qquad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Esprimiamo il generico polinomio di secondo grado in termini della base $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{v}(x)]_{\mathcal{B}} = [ax^2 + bx + c]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

poiché inoltre

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}(x)) = \mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a + b + c \\ 4a + 2b + c \end{bmatrix},$$

la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ rappresentativa di $\mathcal{L}$ in termini delle basi $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}$ è la matrice a due righe e tre colonne tale che $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}[\mathbf{v}(x)]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{L}(\mathbf{v}(x))]_{\mathcal{C}}$, ossia

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a + b + c \\ 4a + 2b + c \end{bmatrix},$$

e dunque

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.43 Nucleo e immagine di un'applicazione

Determinare nucleo ed immagine, e relative dimensioni, delle applicazioni lineari degli Esercizi 9.41 e 9.42.

Soluzione

Sia $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ un'applicazione lineare, si chiama *nucleo* di $\mathcal{L}$ (in simboli $\ker \mathcal{L}$) il sottoinsieme di $\mathcal{V}$ formato da tutti i vettori la cui immagine è zero:

$$\ker \mathcal{L} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{W}}\},$$

$\ker \mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$; si chiama *immagine* di $\mathcal{L}$ (in simboli $\operatorname{im} \mathcal{L}$) il sottoinsieme di $\mathcal{W}$ formato da tutti i vettori che sono immagine di qualche elemento di $\mathcal{V}$:

$$\operatorname{im} \mathcal{L} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} : \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\},$$

im $\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathscr{W}$. Valgono le seguenti relazioni[k]:

$$1): \dim \operatorname{im} \mathcal{L} = \operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}}, \qquad 2): \dim \mathscr{V} = \dim \ker \mathcal{L} + \dim \operatorname{im} \mathcal{L};$$

inoltre se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathscr{V}$, allora $\{\mathcal{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathcal{L}(\mathbf{v}_n)\}$ è un insieme di generatori per im $\mathcal{L}$.

① Il nucleo di un'applicazione lineare è l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, per cui esaminiamo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

riducendo $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ a scala si trova

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

dunque $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$ e pertanto $\dim \ker \mathcal{L} = 4 - 2 = 2$; esprimiamo allora x e y in funzione delle variabili libere z e t, sostituendo all'indietro abbiamo

$$y = 5t - z, \quad x = 3z - 2y = 5z - 10t, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\dim \ker \mathcal{L} = 2$, troviamo la base

$$\mathcal{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il sottospazio vettoriale im $\mathcal{L}$ è generato dalle colonne di $A_{\mathcal{L}}$:

$$\operatorname{im} \mathcal{L} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dalla formula 1 ricaviamo che $\dim \operatorname{im} \mathcal{L}=2$; poiché i *pivot* si trovano su prima e seconda colonna di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ ridotta a scala, una base per im $\mathcal{L}$ è formata dalle corrispondenti colonne di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

[k] La relazione 2 è nota con il nome di *Teorema di nullità più rango*.

② Data la matrice di rappresentazione

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

si vede (anche senza riduzione a scala) che $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, quindi $\dim \ker \mathcal{L} = 0$ e $\dim \operatorname{im} \mathcal{L} = 2$, il nucleo di $\mathcal{L}$ è quindi composto dal solo vettore nullo $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, mentre l'immagine è il sottospazio generato dalle colonne di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, che essendo indipendenti ne formano anche una base:

$$\ker \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

③ In questo caso, possiamo rispondere alla domanda per via geometrica: poiché l'applicazione $\mathcal{L}$ corrisponde alla proiezione ortogonale sul piano $\mathfrak{P} : x + y + z = 0$, ossia nella direzione di

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

l'immagine di tutti i vettori proporzionali a $\mathbf{u}$ sarà $\mathbf{0}$, e quindi $\ker \mathcal{L} = \{\alpha \mathbf{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, mentre l'immagine di $\mathcal{L}$ sarà $\mathfrak{P}$; sappiamo che $\dim \mathfrak{P} = 2$, quindi una base di $\mathfrak{P}$ può essere costituita da due vettori proporzionali a due colonne di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ (diciamo le prime due):

$$\mathcal{B}_{\operatorname{im} \mathcal{L}} = \mathcal{B}_{\mathfrak{P}} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

④ Guardando la matrice rappresentativa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

notiamo che le due righe non sono proporzionali, dunque $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$ e pertanto $\dim \operatorname{im} \mathcal{L} = 2$, poiché $\operatorname{im} \mathcal{L}$ è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{im} \mathcal{L}$ coincide con $\mathbb{R}^2$, e come base possiamo scegliere la base canonica $\mathcal{C}$. Per determinare $\ker \mathcal{L}$ (del quale il teorema di nullità più rango garantisce che $\dim \ker \mathcal{L} = 1$), riduciamo $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ a scala, si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0},$$

da cui $y = -3z$ e $x = -y - z = 2z$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

e quindi una base per ker $\mathcal{L}$ è

$$\mathcal{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \right\}.$$

In effetti, il nucleo di $\mathcal{L}$ è formato da tutti i polinomi di secondo grado che si annullano in $x = 1$ e in $x = 2$, ossia dai multipli di $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, e osserviamo che

$$[x^2 - 3x + 2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

ESERCIZIO 9.44 Applicazioni iniettive, suriettive e biiettive

Per ciascuna delle applicazioni lineari sotto elencate, stabilire se si tratta di applicazioni iniettive, suriettive e biiettive;

① $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ y + z \end{bmatrix}$; ② $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + z \\ x + y \\ 3x + z \end{bmatrix}$;

③ $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x - y + 3z \\ 3x + y + 2z \end{bmatrix}$; ④ $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + z \\ y - 2z \\ 2x + y \\ y + z \end{bmatrix}$.

Soluzione

Un'applicazione $\mathcal{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ si dice *iniettiva* se elementi distinti hanno immagini distinte:

$$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \neq \mathcal{L}(\mathbf{v}_2);$$

si dice *suriettiva* se ogni elemento di $\mathcal{W}$ è immagine di qualche elemento di $\mathcal{V}$:

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W},\ \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ t.c. } \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w};$$

si dice *biiettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. Se $\mathcal{L}$ è un'applicazione lineare, allora valgono le seguenti condizioni:

$$\mathcal{L} \text{ iniettiva} \quad \Leftrightarrow \quad \ker \mathcal{L} = \{\mathbf{0}_{\mathcal{V}}\} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = \dim \mathcal{V};$$

$$\mathcal{L} \text{ suriettiva} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = \dim \mathcal{W}.$$

① In questo caso, con i simboli qui sopra usati, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$; poiché $\dim \mathcal{W} > \dim \mathcal{V}$, l'applicazione $\mathcal{L}$ non potrà in alcun caso essere iniettiva; se osserviamo la matrice associata

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si vede che $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, pertanto $\dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 2 = \dim \mathcal{W}$, e quindi $\mathcal{L}$ è suriettiva.

② Questa volta $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathscr{W} = \mathbb{R}^3$, la matrice associata a $\mathcal{L}$ è

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MEG}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dunque $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$; abbiamo quindi

$$\dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 2 < \dim \mathscr{W} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ non è suriettiva;}$$

$$\dim(\ker \mathcal{L}) = \dim \mathscr{V} - \dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ non è iniettiva.}$$

③ Anche in questo caso $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathscr{W} = \mathbb{R}^3$, la matrice associata a $\mathcal{L}$ è

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 5$, quindi $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 3$, e allora

$$\dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 3 = \dim \mathscr{W} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ è suriettiva,}$$

$$\dim(\ker \mathcal{L}) = \dim \mathscr{V} - \dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 3 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ è iniettiva,}$$

quindi $\mathcal{L}$ è biiettiva.

④ Abbiamo $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathscr{W} = \mathbb{R}^4$, $\dim \mathscr{V} < \dim \mathscr{W}$ quindi $\mathcal{L}$ non potrà in alcun caso essere suriettiva, la matrice associata a $\mathcal{L}$ è

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MEG}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 3$, quindi $\dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 3$ e

$$\dim(\ker \mathcal{L}) = \dim \mathscr{V} - \dim(\operatorname{im} \mathcal{L}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ è iniettiva.}$$

ESERCIZIO 9.45 **Matrice di cambiamento di base**

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la base canonica $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e la base

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

dato il generico vettore $\mathbf{w}$, scrivere la matrice $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}}$ che trasforma le componenti di $\mathbf{w}$ in termini di $\mathcal{C}$ nelle componenti in termini di $\mathcal{U}$, cioè la matrice tale per cui

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}} = \mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}} [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}.$$

Soluzione

Come abbiamo già fatto negli Esercizi 9.42 e 9.43, data una base $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, se $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3$, cioè se a_1, a_2, a_3 sono le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\mathcal{U}$, scriveremo

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}};$$

prendiamo ora due basi diverse: $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$; le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto a $\mathcal{V}$ possono essere ottenute dalle coordinate rispetto a $\mathcal{U}$ tramite un prodotto matriciale:

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = \mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}},$$

ove la matrice $\mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ rappresenta le coordinate dei vettori di $\mathcal{U}$ in termini di $\mathcal{V}$, cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 + \gamma_3\mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix};$$

infine, notiamo che la trasformazione inversa è l'inversa della matrice:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \left(\mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}.$$

Nel nostro caso, poiché una delle due basi è la base canonica, sappiamo scrivere immediatamente le espressioni dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ in termini degli $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,$$

e quindi possiamo scrivere $\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$, e poi ottenere $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}}$ invertendola:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}} = \left(\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.46 **Cambiamento di base e applicazioni lineari**

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la base

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

e prendiamo l'applicazione lineare $\mathcal{L}$ tale che:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2, \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_3.$$

① *Scrivere la matrice* $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}$ *rappresentativa di* $\mathcal{L}$ *in corrispondenza della base* $\mathcal{U}$.

② *Data la base*

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(per la quale $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$*), scrivere la matrice* $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{V}}$ *rappresentativa di* $\mathcal{L}$ *in corrispondenza di* $\mathcal{V}$.

③ *Scrivere l'espressione di* $\mathcal{L}$ *in termini della base canonica.*

Soluzione

① La matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}$, rappresentativa di $\mathcal{L}$ in corrispondenza della base $\mathcal{U}$, sarà data dai coefficienti delle trasformazioni dei vettori $\mathbf{u}_i$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{u}_2) = 0\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,$$
$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3,$$

ovvero

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}, \quad \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}},$$
$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}$$

pertanto la matrice rappresentativa cercata è

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

② Se l'applicazione lineare $\mathcal{L}$ ha come matrice rappresentativa $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}$ rispetto alla base $\mathcal{U}$, allora la stessa $\mathcal{L}$ è rappresentata, rispetto alla base $\mathcal{V}$, dalla matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{V}} = \mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}} \mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$. Poiché sappiamo l'espressione degli elementi di $\mathcal{V}$ in termini di $\mathcal{U}$, possiamo scrivere la matrice di cambio di base $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 = 4\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

e con qualche conto si trova la matrice inversa

$$\mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \left(\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

quindi, effettuando il prodotto tra matrici:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{V}} = \mathbf{C}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

e pertanto

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 \\ 10 & 4 & 9 \\ -8 & -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

③ A noi occorre la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{C}}$; poiché dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inoltre al punto ① abbiamo calcolato $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}$; risulta $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}\mathbf{C}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}}$ e quindi

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 21 & -12 & -12 \\ 4 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

pertanto, in termini della base canonica,

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x - 4y - 4z \\ \dfrac{4x - y - 2z}{3} \\ \dfrac{7x + 5y - 2z}{3} \end{bmatrix}.$$

9.1.8 Autovalori e autovettori. Diagonalizzazione

ESERCIZIO 9.47 **Definizione di autovalore e autovettore di una matrice**

Data la seguente coppia di matrice e vettore:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - 2 & 1 \\ 1 & 2 - \alpha & 4 - \alpha \\ \alpha + 2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

determinare (se esiste) il valore da attribuire ad α affinché il vettore $\mathbf{w}$ *sia un autovettore della matrice* $\mathbf{A}$.

Soluzione

Data una matrice quadrata $\mathbf{M}$, si dicono *autovettori* di $\mathbf{M}$ tutti i vettori $\mathbf{v}$ che risolvono (con un opportuno valore di λ) l'equazione

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v};$$

in questo caso λ è detto *autovalore* relativo all'autovettore $\mathbf{v}$ (ovvero: $\mathbf{v}$ è l'autovettore relativo all'autovalore λ).

Perché $\mathbf{w}$ sia un autovettore di $\mathbf{A}$, basta imporre che sia verificata l'equazione $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha-2 & 1 \\ 1 & 2-\alpha & 4-\alpha \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

che riscritta in forma di sistema lineare (in cui le incognite sono α e λ) diventa successivamente

$$\begin{cases} \alpha - 2 - 1 = 0 \\ 2 - \alpha - 4 + \alpha = \lambda \\ \alpha - 1 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ -2 = \lambda \\ \alpha - 1 = -\lambda \end{cases},$$

da cui $\alpha = 3, \lambda = -2$; quindi $\mathbf{w}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ solo se $\alpha = -3$, ed in tal caso l'autovalore corrispondente è $\lambda = -2$ (l'esercizio non lo richiedeva, ma è un'informazione che abbiamo ottenuto "gratis").

ESERCIZIO 9.48 **Calcolo di autovalori e autovettori**
Autovalori reali e distinti

Calcolare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Data una matrice M (ovviamente *quadrata*) $n \times n$, per calcolarne autovalori ed autovettori conviene partire dal calcolo degli autovalori, che sono le radici del *polinomio caratteristico* $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M})$:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0;$$

si tratta ovviamente di un polinomio di grado n, che pertanto ha sempre n radici (reali o complesse, contate con la dovuta molteplicità). Dopodiché, per ogni autovalore trovato λ_k, i relativi autovettori $\mathbf{v}_k$ si determinano risolvendo il sistema lineare

$$[\lambda_k\mathbf{I} - \mathbf{M}]\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

① Cominciamo dalla matrice **A**: il polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix}\lambda-4 & -1\\ -2 & \lambda-3\end{bmatrix} = \lambda^2-7\lambda+10,$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$; l'autovettore $\mathbf{v}_1$ relativo a λ_1 è soluzione del sistema

$$[2\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Le due equazioni sono necessariamente proporzionali (in questo caso, addirittura identiche)[1], basta pertanto ricavare dalla prima che $2x+y=0$, ossia $y=-2x$, e concludere che tutti vettori della forma $\begin{bmatrix}x\\ -2x\end{bmatrix}$ sono autovettori per **A**, relativi all'autovalore $\lambda_1 = 2$; scegliendo (per semplicità) $x=1$ ricaviamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Cerchiamo adesso $\mathbf{v}_2$; esso sarà soluzione del sistema

$$[5\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dalle due equazioni si ricava immediatamente $x=y$, e quindi (ponendo di nuovo per semplicità $x=1$)

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

② Veniamo alla matrice **B**: il polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}) = \det\begin{bmatrix}\lambda-2 & -4 & -6\\ 1 & \lambda+1 & -1\\ 0 & -2 & \lambda-8\end{bmatrix} = \lambda^3-9\lambda^2+8\lambda$$

ossia $\lambda(\lambda^2-9\lambda+8)$, che ha come radici $0, 1$ e 8, quindi abbiamo i tre autovalori

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 8.$$

[1] Dato che λ è un autovalore, il determinante della matrice dei coefficienti $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ è 0, e allora, in base al teorema di Rouché–Capelli, il sistema omogeneo $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ avrà necessariamente infinite soluzioni, se la matrice è una matrice 2×2, allora le due equazioni del sistema sono proporzionali, se la matrice è una generica matrice $n\times n$, le soluzioni si possono ricavare da $n-1$ equazioni, scelte – con giudizio – tra le n del sistema.

Per ciascun autovalore, calcoliamo il corrispondente autovettore: l'autovettore $\mathbf{v}_1$ è soluzione del sistema

$$[0\,\mathbf{I}-\mathbf{B}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

che può essere riscritto come

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione ricaviamo $y = -4z$, e sostituendo nella seconda ricaviamo $x = z - y = 5z$, pertanto le soluzioni del sistema sono costituite da tutti i vettori le cui componenti sono proporzionali a $[5z, -4z, z]^{\mathsf{T}}$, ponendo al solito per semplicità $z = 1$ troviamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passiamo a ricavare l'autovettore relativo a $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2$ è soluzione del sistema

$$[1\,\mathbf{I}-\mathbf{B}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

che può essere riscritto come

$$\begin{cases} x + 4y + 6z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Di nuovo, partendo dall'ultima equazione ricaviamo $y = -\frac{7}{2}z$, e sostituendo nella seconda ricaviamo $x = z - 2y = 8z$; pertanto le soluzioni del sistema sono costituite da tutti i vettori le cui componenti sono proporzionali a $\left[8z, -\frac{7}{2}z, z\right]^{\mathsf{T}}$; ponendo ad esempio $z = 2$ troviamo

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Infine, considerando $\lambda_3 = 8$, $\mathbf{v}_3$ è soluzione del sistema

$$[8\mathbf{I}-\mathbf{B}]\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

che può essere riscritto come

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ x + 9y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

La terza equazione fornisce $y = 0$, posto $y = 0$ le prime due equazioni sono proporzionali, e si riducono entrambe a $x = z$, pertanto (ponendo ad esempio $z = 1$) troviamo

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.49 **Calcolo di autovalori e autovettori. Autovalori reali, molteplicità algebrica e molteplicità geometrica**

Calcolare gli autovalori e gli autovettori delle matrici

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$③ \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 6 & -10 & 12 \\ 6 & -12 & 14 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Osserviamo che, se l'autovalore $\tilde{\lambda}$ è radice semplice del polinomio caratteristico come nei due casi dell'esercizio precedente, allora a $\tilde{\lambda}$ corrisponderà *sempre* un solo autovettore; se invece $\tilde{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità m, allora a $\tilde{\lambda}$ *possono* corrispondere da 1 a m autovettori linearmente indipendenti; m si chiama *molteplicità algebrica* di $\tilde{\lambda}$, mentre si chiama *molteplicità geometrica* il numero dei suoi autovettori linearmente indipendenti. Un autovalore le cui molteplicità algebrica e geometrica sono uguali è detto *regolare*[m].

① Calcoliamo gli autovalori e gli autovettori di $\mathbf{A}$: il polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

quindi i due autovalori di $\mathbf{A}$ sono

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 3,$$

[m] Ovviamente, tutti gli autovalori delle matrici dell'esercizio precedente erano regolari, in quanto ciascuno di essi aveva molteplicità algebrica 1 (erano radici semplici del polinomio caratteristico) e molteplicità geometrica 1 (a ciascuno corrispondeva un solo autovettore).

ciò equivale a dire che $\lambda_1 = 3$ è l'unico autovalore di $\mathbf{A}$, con molteplicità algebrica 2, calcoliamo il corrispondente autovettore (o i corrispondenti autovettori): tutti gli autovettori $\mathbf{v}_1$ relativi a λ_1 dovranno essere soluzioni del sistema

$$[3\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

entrambe le equazioni del sistema implicano $x = y$, ciò significa che gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 3$ sono tutti e soli i vettori con le due componenti uguali, scegliendo ad esempio $x = 1$ troviamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questo risultato significa che λ_1, avendo molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, non è un autovalore regolare[n].

② Passiamo alla matrice $\mathbf{B}$, il cui polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 3 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda + 16;$$

poiché $\lambda^3 - 12\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$, i tre autovalori di $\mathbf{B}$ sono

$$\lambda_1 = -4 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

L'autovalore -4 ha molteplicità algebrica 1, il che significa che anche la molteplicità geometrica sarà 1, e quindi a λ_1 corrisponderà senz'altro un unico autovettore $\mathbf{v}_1$, che troviamo nel solito modo:

$$[(-4)\mathbf{I} - \mathbf{B}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ossia, scritto in forma di sistema

$$\begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}.$$

---

[n] Osserviamo che se una matrice $\mathbf{M}$ 2×2 ha un autovalore $\bar{\lambda}$ regolare e con molteplicità 2, allora $\mathbf{M}$ deve necessariamente essere diagonale:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Dalla terza equazione ricaviamo $z = x$, sostituendo z con x nella prima otteniamo $y = x$, pertanto ogni soluzione del sistema sarà proporzionale alla terna (x, x, x), e scegliendo direttamente $x = 1$, troviamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passiamo a $\lambda_2 = 2$; si tratta di un autovalore con molteplicità algebrica 2, ciò significa che, in via teorica, prima di effettuare qualsiasi calcolo, potrebbe esserci un solo autovalore collegato all'autovalore 2, oppure potrebbero essercene due. Il sistema da risolvere è

$$[2\mathbf{I} - \mathbf{B}]\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2, infatti non può avere rango 3 (perché è singolare e inoltre le prime due righe sono uguali), mentre le ultime due righe non sono evidentemente proporzionali, e quindi $\operatorname{rk}(2\mathbf{I} - \mathbf{B}) = 2$. Il teorema di Rouché-Capelli assicura allora che il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro, ottenibili dalle ultime due equazioni: dall'ultima si ricava $z = -x$, in ciascuna delle precedenti sostituendo z ricaviamo $x + 2y + 3(-x) = 0$, ossia $y = x$, e pertanto gli autovalori di $\lambda_2 = 2$ sono dati unicamente da (scegliendo $x = 1$)

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò equivale a dire che l'autovalore 2, avendo molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, non è regolare.

③ Consideriamo ora la matrice $\mathbf{C}$: il polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{C}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -12 & 12 \\ -6 & \lambda + 10 & -12 \\ -6 & 12 & \lambda - 14 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda + 16,$$

che è uguale a quello di $\mathbf{B}$; anche per la matrice $\mathbf{C}$ gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -4 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

L'autovalore -4 ha molteplicità algebrica 1, il che significa che anche la molteplicità geometrica sarà 1, e quindi a λ_1 corrisponderà senz'altro un unico autovettore $\mathbf{v}_1$, dato da

$$[(-4)\mathbf{I} - \mathbf{C}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 \\ -6 & 6 & -12 \\ -6 & 12 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Riscriviamo l'equazione in forma di sistema, dividendo tutte le righe per 6:

$$\begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione ricaviamo $y = z$, sostituendo y con z nella seconda otteniamo $-x = z$, e pertanto ogni soluzione sarà del tipo $(-z, z, z)$; scegliendo direttamente $z = 1$, troviamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda $\lambda_2 = 2$ (autovalore con molteplicità geometrica uguale a 2), scriviamo il corrispondente sistema

$$[2\mathbf{I} - \mathbf{C}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & -12 & 12 \\ -6 & 12 & -12 \\ -6 & 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

In questo sistema tutte e tre le righe sono proporzionali (il rango di $2\mathbf{I} - \mathbf{C}$ è 1) e sono equivalenti all'equazione $x - 2y + 2z = 0$; è allora possibile determinare due autovettori linearmente indipendenti, innanzitutto esprimendo una delle variabili in funzione delle altre due (ad esempio $x = 2y - 2z$) e poi attribuendo alternativamente 1 e 0 alle due variabili scelte:

$$x = 2y - 2z \quad \xrightarrow{y=1, z=0} \quad \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x = 2y - 2z \quad \xrightarrow{y=0, z=1} \quad \mathbf{v}_{2,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

quindi λ_2 è regolare (le molteplicità algebrica e geometrica coincidono).

ESERCIZIO 9.50 **Calcolo di autovalori e autovettori**
Autovalori complessi

Calcolare autovalori ed autovettori delle matrici

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ i & 2-i \end{bmatrix}.$$

Soluzione

① Calcoliamo il polinomio caratteristico di **A**:

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-3\end{bmatrix} = \lambda^2-4\lambda+4,$$

i cui zeri sono $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Poiché gli autovalori non sono reali, anche gli autovettori non lo saranno; calcoliamo $\mathbf{v}_1$, relativo a $\lambda_1 = 2+i$, esso sarà soluzione di:

$$[(2+i)\mathbf{I}-\mathbf{A}]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1+i & -2\\ 1 & -1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso le due equazioni

$$\begin{cases}(1+i)\alpha-2\beta=0\\ \alpha+(-1+i)\beta=0\end{cases}$$

sono proporzionali (moltiplicando la seconda per $1+i$ si ottiene la prima), dalla seconda ricaviamo allora $\alpha = (1-i)\beta$. Agendo nello stesso modo con $\lambda_2 = 2-i$ e $\mathbf{v}_2$:

$$[(2-i)\mathbf{I}-\mathbf{A}]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1-i & -2\\ 1 & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

(in questo caso moltiplicando la seconda equazione per $1-i$ si ottiene la prima) otteniamo $\alpha = (1+i)\beta$, quindi

$$\lambda_1 = 2+i, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1-i\\ 1\end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2-i, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1+i\\ 1\end{bmatrix}.$$

Osserviamo anche che, come λ_2 è il complesso coniugato di λ_1, così $\mathbf{v}_2$ è il complesso coniugato di $\mathbf{v}_1$. Osserviamo che una matrice ad elementi reali può avere autovalori complessi, tuttavia si tratterà con certezza di autovalori complessi coniugati poiché il polinomio caratteristico ha coefficienti reali; a tali autovalori complessi coniugati si accompagneranno necessariamente autovettori complessi coniugati.

② La matrice **B** ha elementi complessi, non preoccupiamocene e svolgiamo i conti abituali. Il polinomio caratteristico di **B** è

$$\det[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}] = \det\begin{bmatrix}\lambda & -2\\ -i & \lambda+i-2\end{bmatrix} = \lambda^2+(i-2)\lambda-2i,$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -i$. Cerchiamo $\mathbf{v}_1$, autovettore relativo a $\lambda_1 = 2$:

$$[2\mathbf{I}-\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -2\\ -i & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $\alpha = \beta$ e dunque un autovettore relativo a λ_1 è

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo $\mathbf{v}_2$, relativo a $\lambda_2 = -i$:

$$[-i\mathbf{I} - \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -i & -2 \\ -i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui $i\alpha = -2\beta$, un autovettore relativo a λ_2 è ad esempio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.51 Diagonalizzazione di una matrice

Le matrici degli esercizi precedenti

① $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; ② $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$; ③ $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

④ $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; ⑤ $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 6 & -10 & 12 \\ 6 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

⑥ $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; ⑦ $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ i & 2-i \end{bmatrix}$;

sono diagonalizzabili? In caso affermativo scrivere la matrice di passaggio **P** *e trasformare ciascuna di esse in matrice diagonale.*

Soluzione

Una matrice **M** si dice *diagonalizzabile* se esistono una matrice **D** diagonale ed una matrice **P** non singolare, detta *matrice di passaggio*, tali per cui $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{D}$. Dalla teoria sappiamo che sulla diagonale della matrice **D** vi sono gli autovalori di **M**; inoltre, sempre la teoria può garantire che, se una matrice ha tutti gli autovalori distinti, allora sono senz'altro regolari ed i corrispondenti autovettori sono senz'altro linearmente indipendenti e pertanto possono costituire una matrice di passaggio; se invece una matrice possiede autovalori con molteplicità algebrica maggiore di uno, sarà diagonalizzabile solo se tali autovalori sono regolari, e in tal caso **P** è nuovamente formata dagli autovettori corrispondenti. Occorre inoltre fare una distinzione: abbiamo visto nell'esercizio precedente che matrici ad elementi reali possono avere sia autovalori reali sia autovalori complessi e che matrici ad elementi complessi avranno sicuramente almeno un autovalore complesso. Non ha senso chiedersi se una matrice sia diagonalizzabile se non si specifica il "terreno di gioco" in cui ci si muove: se la matrice **M** ha elementi complessi, la

sua diagonalizzazione (qualora sia permessa dalla regolarità degli autovalori) avverrà senz'altro in $\mathbb{C}$, se invece la matrice $\mathbf{M}$ ha solo elementi reali, qualora abbia autovalori complessi (coniugati), potrebbe – sempre in virtù della regolarità degli autovalori – essere diagonalizzabile in $\mathbb{C}$, ma non sarà mai diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. In generale, senza ulteriori specificazioni, quando scriveremo "diagonalizzabile" intenderemo "diagonalizzabile in $\mathbb{R}$".

① La matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, poiché ha due autovalori regolari. Scegliamo come matrice diagonale la matrice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

pertanto la corrispondente matrice di passaggio $\mathbf{P}$ avrà come prima colonna l'autovettore $\mathbf{v}_1$ (relativo a $\lambda_1 = 2$) e come seconda colonna $\mathbf{v}_2$ (relativo a $\lambda_2 = 5$):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con qualche conto troviamo che

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

e quindi[o]

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}.$$

② Anche la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile, perché gli autovalori sono distinti e quindi regolari, se scegliamo come matrice diagonale la matrice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

cui corrisponde la matrice di passaggio

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

[o] Se invece avessimo scelto $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_1]$, la matrice diagonale corrispondente sarebbe stata

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

con un po' di fatica se ne calcola l'inversa:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & 6 & 29 \end{bmatrix};$$

e a questo punto basta un prodotto:

$$\underbrace{\frac{1}{28}\begin{bmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & 6 & 29 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}.$$

③ La matrice **E** possiede un solo autovalore con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, quindi non è diagonalizzabile (né in $\mathbb{R}$ né in $\mathbb{C}$).

④ Lo stesso dicasi per la matrice **F**: possiede due autovalori, uno con molteplicità algebrica e geometrica 1, l'altro (λ_2) con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, e quindi non regolare.

⑤ La matrice **G** possiede due autovalori: $\lambda_1 = -4$ con molteplicità algebrica e geometrica 1, $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica e geometrica 2, e quindi regolari entrambi; ad essi corrispondono gli autovettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con i quali costruire la matrice di passaggio

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_{2,1} | \mathbf{v}_{2,2}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alla quale corrisponde l'inversa

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix};$$

e, dato l'ordine con cui gli autovettori sono stati accostati nella matrice P, con qualche conto si vede che

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 6 & -10 & 12 \\ 6 & -12 & 14 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}.$$

⑥ La matrice $\mathbf{H}$ non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$, perché pur essendo reale i suoi autovalori sono complessi. Tuttavia, $\mathbf{H}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$, avendo due autovalori distinti, e pertanto regolari: scegliamo come matrice diagonale la matrice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix},$$

pertanto la corrispondente matrice di passaggio $\mathbf{P}$ avrà come prima colonna l'autovettore $\mathbf{v}_1$ e come seconda colonna $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con qualche conto troviamo che

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix};$$

e quindi

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}.$$

⑦ La matrice $\mathbf{K}$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$, perché ha due autovalori regolari (ovviamente, essendo $\mathbf{K}$ una matrice ad elementi complessi, non ha senso domandarsi se sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$). Scegliamo come matrice diagonale la matrice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

pertanto la corrispondente matrice di passaggio $\mathbf{P}$ avrà come prima colonna l'autovettore $\mathbf{v}_1$ e come seconda colonna $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

Con qualche conto troviamo che

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-2-i}\begin{bmatrix} -i & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{i-2}{5}\begin{bmatrix} -i & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1+2i & 4-2i \\ 2-i & i-2 \end{bmatrix};$$

e quindi

$$\underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1+2i & 4-2i \\ 2-i & i-2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ i & 2-i \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}.$$

9.1.9 Ortogonalità

ESERCIZIO 9.52 **Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Norma di vettori colonna Angolo compreso. Ortogonalità**

Dati i vettori (vettori colonna, cioè matrici $n \times 1$)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcolare i prodotti scalari

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \qquad \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \qquad \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle,$$

e le norme $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$; calcolare infine il coseno dell'angolo α tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Soluzione

In uno spazio vettoriale $\mathscr{V}$, si chiama *prodotto scalare* un'operazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$$

che associa ad una coppia di elementi di $\mathscr{V}$ un numero reale. Se $\mathscr{V} = \mathbb{R}^n$, in analogia con quanto fatto con i prodotti scalari tra vettori del piano e dello spazio, si parla di *prodotto scalare* tra due vettori colonna $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ (aventi ovviamente lo stesso numero di elementi) quando si effettua il consueto prodotto matriciale righe–per–colonne nella forma

$$\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle = \mathbf{c}_1^{\mathsf{T}} \mathbf{c}_2.$$

Il risultato è una matrice 1×1 (cioè uno scalare) data dalla somma dei prodotti degli elementi di posti corrispondenti. Ad esempio se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori colonna a 4 componenti, il loro prodotto scalare è:

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4.$$

Allora, nel nostro caso:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5,$$

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = -5,$$

(in accordo con il fatto che il prodotto scalare è commutativo).

Infine

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sempre in accordo con i prodotti scalari della geometria, si chiama *norma* di un vettore $\mathbf{v}$ (e la indichiamo con $\|\mathbf{v}\|$) la radice quadrata del prodotto scalare di $\mathbf{v}$ per se stesso:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 36,$$

e quindi $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{36} = 6$ ed analogamente $\|\mathbf{w}\| = 3$. Sempre in analogia con la geometria possiamo quindi parlare di *angolo compreso* tra due vettori dicendo che, se α è l'angolo compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{-5}{6 \cdot 3};$$

infine, se il prodotto scalare tra due vettori non nulli è uguale a zero, diremo che i due vettori sono *ortogonali*, come $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ in questo esercizio.

ESERCIZIO 9.53 **Prodotto scalare in spazi vettoriali generici**

Date le seguenti coppie $\mathscr{V}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, stabilire se l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathscr{V}$.

① $\mathscr{V} = \{$*polinomi di grado minore o uguale a 2*$\}$,

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = \mathbf{v}(0)\mathbf{w}(0) + \mathbf{v}(1)\mathbf{w}(1) + \mathbf{v}(2)\mathbf{w}(2).$$

② $\mathscr{V} = \{$*polinomi di grado minore o uguale a 3*$\}$,

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = \mathbf{v}(0)\mathbf{w}(0) + \mathbf{v}(1)\mathbf{w}(1) + \mathbf{v}(2)\mathbf{w}(2).$$

③ $\mathscr{V} = \mathscr{C}[0, 1]\{$*funzioni continue sull'intervallo* $[0, 1]\}$,

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Soluzione

Affinché l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sia un prodotto scalare, deve verificare quattro proprietà:

- *commutatività*:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{V};$$

- *distributività rispetto alla somma di vettori*:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathscr{V};$$

- *omogeneità rispetto al prodotto per uno scalare*:

$$\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{V};$$

- *positività* e *annullamento*:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathscr{V}$$
$$\text{e}$$
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{se e solo se } \mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathscr{V}}.$$

Verifichiamo che nei casi del testo tali proprietà siano soddisfatte.

① Dati due polinomi di grado minore o uguale a due

$$\mathbf{v}(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \mathbf{w} = px^2 + qx + r,$$

il loro prodotto $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle$ vale

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = cr + (a+b+c)(p+q+r) + (4a+2b+c)(4p+2q+r),$$

osserviamo che le proprietà commutativa e distributiva seguono immediatamente dalle analoghe proprietà numeriche; vale anche la proprietà di omogeneità, infatti

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle &= \lambda cr + [\lambda(a+b+c)](p+q+r) + [\lambda(4a+2b+c)](4p+2q+r) \\ &= \lambda\big[cr + (a+b+c)(p+q+r) + (4a+2b+c)(4p+2q+r)\big] \\ &= \lambda \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle.\end{aligned}$$

Infine, osserviamo che è valida anche la proprietà di positività, infatti

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = c^2 + (a+b+c)^2 + (4a+2b+c)^2$$

ed il secondo membro è senz'altro positivo poiché è una somma di quadrati; occorre verificare infine che $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}_{\mathscr{V}}$, in effetti porre $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = 0$ significa porre

$$\begin{cases} c^2 = 0 \\ (a+b+c)^2 = 0 \\ (4a+2b+c)^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ a+b+c = 0 \\ 4a+2b+c = 0 \end{cases}.$$

La prima equazione impone $c = 0$; sostituendo $c = 0$ nelle altre due equazioni si ottiene il sottosistema

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 4a+2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 0, b = 0;$$

e dunque vale anche la proprietà di annullamento[p]; pertanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathscr{V}$.

② Le proprietà commutativa, distributiva e di omogeneità sono analoghe al caso precedente, dunque siamo già sicuri della loro validità. Analogo discorso vale per la positività di $\langle \cdot, \cdot \rangle$, mentre non vale la proprietà di annullamento: nella nota abbiamo appena visto che imporre $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = 0$ significa imporre che il polinomio $\mathbf{v}(x)$ si annulli in $x = 0, 1, 2$: un polinomio di secondo grado che si annulla in tre distinti valori di x è necessariamente il polinomio nullo, mentre ciò non vale se $\mathbf{v}(x)$ è un polinomio di terzo grado: basta ad esempio scegliere

$$\mathbf{v}(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

affinché $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = 0$ senza che $\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}_{\mathscr{V}}$. In definitiva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non è un prodotto scalare nello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre.

③ La commutatività del prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è di immediata verifica: se $\mathbf{v}(x)$ e $\mathbf{w}(x)$ sono due funzioni continue sull'intervallo $[0, 1]$, allora

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathbf{w}(x)\mathbf{v}(x)\, \mathrm{d}x = \langle \mathbf{w}(x), \mathbf{v}(x) \rangle .$$

Distributività e omogeneità seguono direttamente dalle proprietà di linearità dell'integrale; grazie alla proprietà di monotonia dell'integrale è possibile garantire anche la proprietà di positività e di annullamento di $\langle \cdot, \cdot \rangle$, che dunque è un prodotto scalare su $\mathscr{C}[0, 1]$.

ESERCIZIO 9.54 — Ortogonalizzazione. Procedimento di Gram-Schmidt

Sia $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, *ove*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix};$$

un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, *determinare una base ortogonale per* V.

[p] Si sarebbe potuto anche ragionare così: $\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = 0$ equivale a chiedere

$$(\mathbf{v}(0))^2 + (\mathbf{v}(1))^2 + (\mathbf{v}(2))^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(2) = 0,$$

dunque $\mathbf{v}(x)$ è un polinomio di secondo grado che si annulla in corrispondenza di tre diversi valori di x, e quindi è il polinomio nullo.

Soluzione

Per determinare una base *ortogonale* (cioè una base formata da vettori tra loro ortogonali[q]) a partire da un certo gruppo di vettori, possiamo usare il procedimento di Gram-Schmidt: se i vettori generici sono $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ e la base che cerchiamo è $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}$, allora

- il primo vettore della base è uno dei vettori del gruppo, scegliamo allora per comodità il primo:
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1;$$
- il secondo vettore della base è la differenza tra il secondo vettore del gruppo e la sua proiezione ortogonale[r] lungo $\mathbf{u}_1$:
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1;$$
- il terzo vettore della base è la differenza tra il terzo vettore del gruppo e la sua proiezione lungo il sottospazio generato da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$:
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2;$$
- e così via fino a $\mathbf{v}_k$.

(Se in uno di questi passaggi il risultato a secondo membro si annulla, significa che il vettore $\mathbf{v}_i$ in questione è combinazione lineare dei precedenti e quindi, non fornendo alcun contributo, va eliminato.)

Procediamo nel nostro caso: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ e considerando che $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 12$ e $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 6$:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{12}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passo successivo: considerando che $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 6$, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 6$, $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 12$ e $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 12$:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{12}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

[q] Mentre è detta *ortonormale* un base ortogonale i cui elementi abbiano tutti lunghezza unitaria, cioè una base formata da versori.

[r] In conformità a quanto avveniva in geometria analitica (Esercizio 2.7), la proiezione di $\mathbf{v}$ nella direzione individuata da $\mathbf{u}$ è data da

$$\Big(\text{proiezione di } \mathbf{v} \text{ nella direzione di } \mathbf{u}\Big) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u}.$$

Quindi $\mathbf{v}_3$, essendo combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, va scartato; procediamo con $\mathbf{v}_4$ ($\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_1 \rangle = 18$, $\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_2 \rangle = 12$):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{18}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{12}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

in definitiva,

$$\mathcal{B}_V = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 9.55 Ortogonalizzazione in spazi vettoriali generici

Sia $\mathcal{V} = \mathcal{C}[0,1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0,1]$, sia $V = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$ il sottospazio di $\mathcal{V}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2, posto in $\mathcal{V}$ il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)\,\mathrm{d}x,$$

determinare una base ortogonale per V.

Soluzione

Il procedimento di Gram-Schmidt non perde di validità se ambientato in spazi vettoriali generici, applichiamolo dunque al nostro caso. Siano

$$\mathbf{v}_1(x) = 1, \qquad \mathbf{v}_2(x) = x, \qquad \mathbf{v}_3(x) = x^2$$

i tre generatori di V, procediamo come nell'esercizio precedente:

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{v}_1(x) = 1,$$

per il secondo elemento della base, osserviamo che

$$\langle \mathbf{v}_2(x), \mathbf{u}_1(x) \rangle = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad \langle \mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_1(x) \rangle = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,$$

e dunque

$$\mathbf{u}_2(x) = \mathbf{v}_2(x) - \frac{\langle \mathbf{v}_2(x), \mathbf{u}_1(x) \rangle}{\langle \mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_1(x) \rangle}\mathbf{u}_1(x) = x - \frac{\frac{1}{2}}{1}1 = x - \frac{1}{2};$$

infine, il terzo elemento, osserviamo che

$$\langle \mathbf{v}_3(x), \mathbf{u}_1(x)\rangle = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3},$$

$$\langle \mathbf{v}_3(x), \mathbf{u}_2(x)\rangle = \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{12},$$

$$\langle \mathbf{u}_2(x), \mathbf{u}_2(x)\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{12},$$

e dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3(x) &= \mathbf{v}_3(x) - \frac{\langle \mathbf{v}_3(x), \mathbf{u}_1(x)\rangle}{\langle \mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_1(x)\rangle}\mathbf{u}_1(x) - \frac{\langle \mathbf{v}_3(x), \mathbf{u}_2(x)\rangle}{\langle \mathbf{u}_2(x), \mathbf{u}_2(x)\rangle}\mathbf{u}_2(x)\\ &= x^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1}1 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Pertanto, una base ortogonale per V è

$$\mathcal{B}_V = \left\{\mathbf{u}_1(x) = 1, \mathbf{u}_2(x) = x - \frac{1}{2}, \mathbf{u}_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}\right\};$$

non si tratta di una base ortonormale, poiché

$$\|\mathbf{u}_1(x)\|^2 = \langle \mathbf{u}_1(x), \mathbf{u}_1(x)\rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1,$$

$$\|\mathbf{u}_2(x)\|^2 = \langle \mathbf{u}_2(x), \mathbf{u}_2(x)\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$\|\mathbf{u}_3(x)\|^2 = \langle \mathbf{u}_3(x), \mathbf{u}_3(x)\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180},$$

e non tutti i vettori $\mathbf{u}_i$ hanno norma unitaria.

ESERCIZIO 9.56 **Proiezione su un sottospazio vettoriale**

Sia $\mathscr{V} = \mathscr{C}[0,1]$ *lo spazio vettoriale delle funzioni continue su* $[0,1]$, *sia* $V = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$ *il sottospazio di* $\mathscr{V}$ *dei polinomi di grado minore o uguale a 2, dato l'elemento* $\mathbf{w}(x) = e^x \in \mathscr{V}$ *calcolarne la proiezione ortogonale* $\mathbf{w}_V(x)$ *su* V. *Spiegare in che senso* $\mathbf{w}_V(x)$ *è il polinomio di secondo grado che* meglio approssima $\mathbf{w}(x)$ *in* V.

Soluzione

Sappiamo dalla teoria che, se V è un sottospazio di $\mathscr{V}$ e $\mathscr{B}_V = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ è una base *ortonormale* per V, la proiezione su V di un generico elemento $\mathbf{w} \in \mathscr{V}$ è[8]

$$\mathbf{w}_V = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{w}, \mathbf{b}_i \rangle \, \mathbf{b}_i .$$

Abbiamo visto nell'esercizio precedente che una base ortogonale per V è

$$\mathscr{B}_V = \left\{ \mathbf{u}_1(x) = 1, \mathbf{u}_2(x) = x - \frac{1}{2}, \mathbf{u}_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \right\}.$$

Per renderla una base ortonormale è sufficiente dividere ciascun elemento per la propria norma, se diversa da 1:

$$\mathbf{b}_1(x) = \mathbf{u}_1(x) = 1 \qquad \text{perché } \|\mathbf{u}_1(x)\| = 1$$

$$\mathbf{b}_2(x) = \frac{\mathbf{u}_2(x)}{\|\mathbf{u}_2(x)\|} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{3}(2x - 1),$$

$$\mathbf{b}_3(x) = \frac{\mathbf{u}_3(x)}{\|\mathbf{u}_3(x)\|} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

A questo punto, disponiamo di una base ortonormale per V:

$$\mathscr{B}_V = \{\mathbf{b}_1(x), \mathbf{b}_2(x), \mathbf{b}_3(x)\}.$$

Applichiamo dunque la formula:

$$\mathbf{w}_V(x) = \langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_1(x) \rangle \, \mathbf{b}_1(x) + \langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_2(x) \rangle \, \mathbf{b}_2(x) + \langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_3(x) \rangle \, \mathbf{b}_3(x).$$

[8] Tale formula, leggermente modificata, vale anche nel caso di una base ortogonale: se i vettori $\mathbf{u}_i$ costituiscono una base ortogonale, allora

$$\mathbf{w}_V = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i .$$

Osserviamo che

$$\langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_1(x)\rangle = \int_0^1 e^x \, 1 \, \mathrm{d}x = e - 1,$$

$$\langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_2(x)\rangle = \int_0^1 e^x \, \sqrt{3}(2x-1) \, \mathrm{d}x = \sqrt{3}(3-e),$$

$$\langle \mathbf{w}(x), \mathbf{b}_3(x)\rangle = \int_0^1 e^x \, \sqrt{5}(6x^2-6x+1) \, \mathrm{d}x = \sqrt{5}(7e-19),$$

e dunque il polinomio cercato è

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_V(x) &= (e-1)\,1+\sqrt{3}(3-e)\,\sqrt{3}(2x-1)+\sqrt{5}(7e-19)\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\\ &= 30(7e-19)x^2-12(18e-49)x+3(13e-35).\end{aligned}$$

$\mathbf{w}_V(x)$ è il polinomio di secondo grado che meglio approssima $\mathbf{w}(x) = e^x$ nel senso che ne costituisce la proiezione ortogonale nel sottospazio dei polinomi di secondo grado; è comunque bene ricordare che tale risultato dipende da due circostanze:

- il nostro "terreno di gioco" è l'intervallo $[0, 1]$, poiché $\mathscr{V}$ riguarda tale intervallo;
- il concetto di distanza e il concetto di ortogonalità dipendono dalla scelta dell'operazione che costituisce il prodotto scalare: con un diverso prodotto scalare i risultati sarebbero stati diversi.

ESERCIZIO 9.57 Matrici ortogonali

Siano $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *due matrici ortogonali, dimostrare che* $\mathbf{UV}$ *è ortogonale.*

Soluzione

Una matrice quadrata $\mathbf{M}$ è detta ortogonale se $\mathbf{MM}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$, cioè se $\mathbf{M}^\mathsf{T} = \mathbf{M}^{-1}$; inoltre si può dimostrare che $\mathbf{M}$ è ortogonale se e solo se gode delle seguenti proprietà:

- le righe (intese come vettori riga) sono tra di loro ortogonali;
- le colonne (intese come vettori colonna) sono tra di loro ortogonali;
- la somma dei quadrati di ogni riga e di ogni colonna è 1 (cioè ogni vettore riga ed ogni vettore colonna di $\mathbf{M}$ hanno norma 1).

Dimostriamo allora che se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono ortogonali anche il loro prodotto lo è:

$$(\mathbf{UV})(\mathbf{UV})^\mathsf{T} \overset{1)}{=} (\mathbf{UV})(\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}) \overset{2)}{=} \mathbf{U}(\mathbf{VV}^\mathsf{T})\mathbf{U}^\mathsf{T} \overset{3)}{=} \mathbf{UIU}^\mathsf{T} = \mathbf{UU}^\mathsf{T} \overset{4)}{=} \mathbf{I}.$$

L'uguaglianza 1 segue dal fatto che la trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine inverso, l'uguaglianza 2 dall'associatività del prodotto tra matrici, la 3 e la 4 dal fatto che rispettivamente $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U}$ sono ortogonali per ipotesi.

ESERCIZIO 9.58 **Caratterizzazione delle matrici ortogonali 2 x 2**

Elencare tutte le tipologie di matrici ortogonali 2×2; determinare inoltre, ove possibile, autovalori e autovettori di tali matrici.

Soluzione

Sia $\mathbf{U}$ una matrice ortogonale 2×2, in base a quanto detto sopra la prima colonna di $\mathbf{U}$ è un versore, in altre parole $u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1$, dalla trigonometria sappiamo che se $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ allora α e β sono necessariamente il coseno e il seno di un opportuno angolo ϑ, e dunque la prima colonna di una qualsiasi matrice ortogonale $\mathbf{U}$ è formata da coseno e seno di un angolo opportuno:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \cdot \\ \sin\vartheta & \cdot \end{bmatrix},$$

la seconda colonna dev'essere anch'essa un versore a due componenti, inoltre dev'essere perpendicolare alla prima colonna, abbiamo solo due possibilità:

$$1)\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, \qquad 2)\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Queste matrici, al variare di ϑ, rappresentano tutte e sole le matrici ortogonali 2×2.

Determiniamo gli autovalori e gli autovettori di queste matrici; i polinomi caratteristici sono:

$$1)\ \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{U}) = \det\begin{bmatrix} \lambda - \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \lambda - \cos\vartheta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta + 1,$$

$$2)\ \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{U}) = \det\begin{bmatrix} \lambda - \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \lambda + \cos\vartheta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Nel caso 1) la matrice $\mathbf{U}$ non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$, poiché i suoi autovalori sono $\lambda = \pm i$; nel caso 2) la matrice $\mathbf{U}$ ammette come autovalori $\lambda = \pm 1$, determiniamo i corrispondenti autovettori:

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1: \quad (-\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ 1 + \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

ESERCIZIO 9.59 **Rotazioni e riflessioni**

Sia $\mathcal{L}$ l'applicazione lineare che associa a ciascun punto P del piano cartesiano un nuovo punto Q (in simboli: $\mathcal{L}(P) = Q$), tale che la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alla base canonica del piano sia una matrice $\mathbf{U}$ 2×2 ortogonale. Descrivere l'effetto di $\mathcal{L}$ sui punti del piano.

Soluzione

Se $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ sono i punti legati dall'applicazione $\mathcal{L}$, abbiamo che

$$\mathcal{L}(P) = Q \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{U}\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}.$$

Nell'esercizio precedente, abbiamo visto che vi sono solo due tipologie di matrici ortogonali 2×2, esaminiamo l'effetto di ciascuna di esse sul vettore delle coordinate del punto P:

- nel caso 1) abbiamo

$$\begin{cases} x_Q = x_P \cos\vartheta - y_P \sin\vartheta \\ y_Q = x_P \sin\vartheta + y_P \cos\vartheta \end{cases},$$

  ossia il punto Q è ottenuto dal punto P ruotando attorno all'origine in senso antiorario di un angolo ϑ;
- nel caso 2)

$$\begin{cases} x_Q = x_P \cos\vartheta + y_P \sin\vartheta \\ y_Q = x_P \sin\vartheta - y_P \cos\vartheta \end{cases}.$$

  Con un po' di fatica, è possibile vedere che Q è il punto simmetrico di P rispetto ad una retta $y = mx$, e che $m = \tan\frac{\vartheta}{2}$.

9.1.10 Matrici simmetriche e forme quadratiche. Similitudine

ESERCIZIO 9.60 **Diagonalizzazione di matrici reali e simmetriche**

Diagonalizzare le seguenti matrici

$$① \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad ② \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

usando matrici di passaggio ortogonali.

Soluzione

Le due matrici del testo sono simmetriche e a coefficienti reali, ciò significa che sono *sempre* diagonalizzabili (gli autovalori sono sempre regolari), ed in più la matrice di passaggio può essere scelta in modo da essere ortogonale.

① Partiamo da $\mathbf{A}$: il polinomio caratteristico è

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda,$$

i cui zeri sono

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_3 = 5,$$

quindi gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uguale a 1. Calcoliamo gli autovettori, per $\lambda_1 = 0$ abbiamo

$$[0\,\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono costituite da tutti i vettori per cui $x = 0$ e $z = -2y$. Questa volta scegliamo y in modo che la norma dell'autovettore sia 1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{bmatrix}, \quad \xrightarrow{\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{5}|y| = 1} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Passiamo a $\lambda_2 = -1$, abbiamo:

$$[(-1)\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

usando la seconda e la terza equazione troviamo $y = -2x$ e $z = -x$, quindi

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{bmatrix}, \quad \xrightarrow{\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{6}|x| = 1} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Consideriamo infine $\lambda_3 = 5$, abbiamo:

$$[5\,\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

usando prima la terza e poi la seconda equazione troviamo $x = 5z$ e $y = 2z$, quindi

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5z \\ 2z \\ z \end{bmatrix}, \quad \xrightarrow{\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{30}|z| = 1} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}.$$

Una matrice di passaggio è allora

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix},$$

che è ortogonale, e pertanto la sua inversa coincide con la trasposta:

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 5/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix};$$

basta effettuare i prodotti per verificare che

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

② Per quanto riguarda la matrice $\mathbf{B}$, il polinomio caratteristico è:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

i cui zeri sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Entrambi gli autovalori sono regolari (lo garantisce la teoria), quindi l'autovalore doppio -1 avrà necessariamente molteplicità geometrica uguale a 2. Calcoliamo gli autovettori: per $\lambda_1 = 2$ abbiamo

$$[2\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono costituite da tutti i vettori con tre componenti uguali tra loro; scegliamole allora, al solito, in modo che la norma dell'autovettore sia 1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \qquad \xrightarrow{\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}|x| = 1} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ora occupiamoci di $\lambda_2 = -1$:

$$[(-1)\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Tutte e tre le equazioni del sistema (anche se cambiate di segno) sono equivalenti a $x + y + z = 0$. Da quest'unica relazione, scrivendo una delle variabili in funzione delle altre due come nell'Esercizio 9.49 ③, possiamo ricavare i due autovettori distinti: da $z = -x - y$ ricaviamo allora

$$z = -x - y \qquad \xrightarrow{x=1, y=0} \qquad \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$z = -x - y \quad \xrightarrow{x=0,y=1} \quad \mathbf{v}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

In questo esercizio il nostro scopo era, oltre a trovare tre vettori che fossero linearmente indipendenti (e $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_{2,1}$ e $\mathbf{v}_{2,2}$ lo sono), sceglierli ortogonali. Osserviamo però che $\mathbf{v}_{2,1}$ e $\mathbf{v}_{2,2}$ non sono ortogonali tra loro (anche se la teoria ci assicura che con qualsiasi scelta di x e y sono entrambi ortogonali a $\mathbf{v}_1$). Scelto allora $\mathbf{v}_{2,1}$ come abbiamo fatto noi, dobbiamo scegliere $\mathbf{v}_{2,2}$ in modo che soddisfi le due condizioni: essere ortogonale a $\mathbf{v}_{2,1}$ (cioè $\langle \mathbf{v}_{2,2}, \mathbf{v}_{2,1} \rangle = 0$) ed essere un vettore relativo a $\lambda_2 = 1$ (un vettore, quindi, le cui componenti soddisfino la relazione $z = -x - y$). Se le tre componenti di $\mathbf{v}_{2,2}$ sono α, β e γ, esse devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{2,2} \text{ autovett. rel. a } \lambda_2 = -1 \\ \mathbf{v}_{2,2} \cdot \mathbf{v}_{2,1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha - \beta \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

da cui ad esempio[t] $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 1$. Infine, normalizziamo ciascuno dei vettori come negli esercizi precedenti:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Una matrice di passaggio, ad esempio, sarà

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_{2,1} | \mathbf{v}_{2,2}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix};$$

che è ortogonale, e quindi:

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Se effettuassimo i prodotti, verificheremmo che

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[t] In alternativa, avremmo potuto ragionare così: $\mathbf{v}_{2,2}$ dev'essere perpendicolare sia a $\mathbf{v}_1$ sia a $\mathbf{v}_{2,1}$, e quindi per le proprietà del prodotto vettore $\mathbf{v}_{2,2}$ è necessariamente proporzionale a $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2,1}$.

ESERCIZIO 9.61 **Similitudine tra matrici**

Dimostrare che se la matrice **B** *è simile alla matrice* **A**, *allora* **A** *è simile a* **B**.

Soluzione

Una matrice **B** si dice *simile* ad una matrice **A** se esiste una matrice **P** per cui $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ (ovviamente **P** è invertibile).
Se **B** è simile ad **A**, allora esiste **P** per cui $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$; moltiplicando questa uguaglianza a sinistra per **P** e a destra per $\mathbf{P}^{-1}$ troviamo $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}$, e cioè che **A** è simile a **B** (e la matrice di passaggio è $\mathbf{P}^{-1}$). Pertanto d'ora in avanti parleremo, senza ulteriori precisazioni, di "matrici simili", intendendo che l'una può essere trasformata nell'altra attraverso un'opportuna matrice di passaggio.

ESERCIZIO 9.62 **Matrici simili**

Stabilire quali matrici tra le seguenti sono simili,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 6 & -10 & 12 \\ 6 & -12 & 14 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso di matrici simili, scrivere la matrice di passaggio.

Soluzione

Sappiamo che due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante e gli stessi autovalori, pertanto due matrici con autovalori differenti non saranno mai simili. Se due matrici hanno gli stessi autovalori determinare la matrice di passaggio non è in generale facile. Un caso più accessibile riguarda le sole matrici diagonalizzabili: se due matrici **A** e **B** con gli stessi autovalori sono entrambe diagonalizzabili, allora sono simili; se una delle due è diagonalizzabile e l'altra non lo è, allora non saranno in alcun caso simili; se due matrici non sono diagonalizzabili, non vi è alcuna regola generale che permetta di stabilire se siano simili o meno.

Abbiamo già visto (Esercizio 9.51, ④ e ⑤) che la matrice **A** non è diagonalizzabile, mentre la matrice **B** lo è, pertanto **A** e **B** non sono simili. Calcolando il polinomio caratteristico della matrice **C**, notiamo che anche gli autovalori di **C** sono (come quelli di **A** e **B**) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; poiché inoltre **C** è (reale e) simmetrica, sappiamo che è diagonalizzabile; avendo poi gli stessi autovalori di **B** sarà simile ad essa. Infine consideriamo **D**: poiché $\det \mathbf{D} = 0$, ed è diverso dal determinante di **A**, **B** e **C**, **D** non sarà simile ad alcuna di esse.

Sappiamo (sempre dall'Esercizio 9.51) che la matrice **P**, che diagonalizza **B** è

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e cioè $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ è diagonale (notare l'ordine con cui compaiono gli autovalori):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 6 & -10 & 12 \\ 6 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Con conti analoghi a quelli dell'Esercizio 9.60, poiché $\mathbf{C}$ è simmetrica, si può vedere che la matrice ortogonale $\mathbf{U}$ che diagonalizza $\mathbf{C}$ disponendo gli autovalori nello stesso ordine è

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

pertanto (ricordando che $\mathbf{U}$ è ortogonale e dunque $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}$)

$$\mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{CU} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Moltiplichiamo ora l'uguaglianza $\mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{CU} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ a sinistra per $\mathbf{U}$ e a destra per $\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$, otteniamo

$$\mathbf{C} = \mathbf{UP}^{-1}\mathbf{BPU}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{UP}^{-1})\mathbf{B}(\mathbf{PU}^{\mathsf{T}}) = (\mathbf{PU}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{PU}^{\mathsf{T}})$$

e quindi la matrice di passaggio da $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ è

$$\mathbf{PU}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{2} & 4 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.63 **Forme quadratiche e matrici associate**

Stabilire quali espressioni tra le seguenti costituiscono delle forme quadratiche, per quelle che lo sono, determinare la matrice associata.

① $q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 4xz - z^2$;
② $q(x, y, z) = x^2 - xy + y^3 + 4yz + 8z^2$;
③ $q(x, y) = x^2 - 8xy + 20y^2$;
④ $q(x, y, z, t) = x^2 + 2yt + 2yz + 2zt$;
⑤ $q(x, y, z, t) = x^2 + 2(y - 1)z + z^2 + xt$.

Soluzione

Si chiama *forma quadratica* un polinomio omogeneo di secondo grado (cioè un polinomio formato solo da monomi di secondo grado). I polinomi dei punti ①, ③ e ④ sono forme quadratiche, i polinomi di ② e ⑤ non lo sono: il primo non lo è per la presenza di y^3, che non è di secondo grado, l'altro non lo è a causa del

termine $2(y-1)z$, che svolto dà $2yz-2z$, ed il monomio $2z$ non è (ovviamente) di secondo grado.

In due sole variabili è immediato (basta eseguire i prodotti) convincersi che

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Detto $\mathbf{x}$ il vettore delle incognite e detta $\mathbf{Q}$ la matrice simmetrica che sulla diagonale riporta i coefficienti dei quadrati che compongono la forma q e fuori dalla diagonale il coefficiente del doppio prodotto, dimezzato, abbiamo che

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad q(x,y) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

In generale, data la forma quadratica in k variabili

$$q(\mathbf{x}) = q(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij}x_ix_j,$$

possiamo scrivere $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}$ ove $\mathbf{Q}$ è la matrice tale che

$$q_{ii} = a_{ii}, \qquad q_{ij} = q_{ji} = a_{ij}.$$

La matrice $\mathbf{Q}$ è detta *matrice associata* alla forma quadratica $q(\mathbf{x})$, per costruzione $\mathbf{Q}$ è simmetrica.

① La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

③ La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}.$$

④ La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 9.64 **Segno delle forme quadratiche – 1. Casi immediati**

Stabilire il segno delle seguenti forme quadratiche:

① $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$;
② $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4xz$;
③ $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$.

Soluzione

Una forma quadratica $q(\mathbf{x})$ si dice

- *definita positiva* se $q(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- *semidefinita positiva* se $q(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}$, ed esistono vettori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in corrispondenza dei quali $q(\mathbf{x}) = 0$;
- *definita negativa* se $q(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- *semidefinita negativa* se $q(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x}$, ed esistono vettori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in corrispondenza dei quali $q(\mathbf{x}) = 0$;
- *indefinita* se esistono due vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ in corrispondenza dei quali $q(\mathbf{x}_1) > 0$ e $q(\mathbf{x}_2) < 0$.

Spesso non è immediato stabilire il segno di una forma quadratica; vi sono però dei casi in cui è molto facile distinguere tra le varie possibilità; in questo esercizio ci occupiamo di questi casi immediati, lasciando al prossimo lo studio del caso generale.

① Poiché q è una somma di quadrati, si annulla se tutti i termini sono nulli ($q(\mathbf{0}) = 0$, come accade in tutti i casi), altrimenti è senz'altro positiva; pertanto, q è definita positiva.

② La differenza tra i segni di x^2 e di y^2 suggerisce che il segno di q non sia costante; è sufficiente confrontare

$$q(1,0,0) = 1 \qquad \text{e} \qquad q(0,1,0) = -1$$

per verificarlo; dunque q è indefinita.

③ Riconoscendo un quadrato perfetto, notiamo che

$$q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2,$$

dunque q è non negativa, infatti $q(x,y) \geq 0$, e vi sono valori di x e y (non contemporaneamente nulli) per i quali $q = 0$, ad esempio $x = y = 1$; se ne deduce che q è semidefinita positiva.

ESERCIZIO 9.65 Segno delle forme quadratiche – 2. Caso generale

Stabilire il segno delle seguenti forme quadratiche:

① $q(x,y,z) = 8x^2 + 4xy - 2xz + 4y^2 + 2yz + 2z^2$;
② $q(x,y,z) = -3x^2 + 2xy - 8xz - 2y^2 + 2yz - 6z^2$;
③ $q(x,y,z) = x^2 - 2xz + y^2 + z^2$;
④ $q(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + 2xz - 2y^2 - 2yz - 4z^2$;
⑤ $q(x,y,z) = x^2 - 2xz - 3y^2 + z^2$;
⑥ $q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 - 2yz + 4z^2$;
⑦ $q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + 2yt + 2yz + 2zt$.

Soluzione

Dalla teoria sappiamo che il segno della forma quadratica è legato al segno degli autovalori λ_i della matrice associata $\mathbf{Q}$:

- tutti i $\lambda_i > 0$: q è *definita positiva*;
- tutti i $\lambda_i \geq 0$ e vi è almeno un autovalore nullo: q è *semidefinita positiva*;
- tutti i $\lambda_i < 0$: q è *definita negativa*;
- tutti i $\lambda_i \leq 0$ e vi è almeno un autovalore nullo: q è *semidefinita negativa*;
- vi sono almeno un autovalore positivo e un autovalore negativo: q è *indefinita*.

Abbiamo visto in precedenza che determinare gli autovalori di una matrice può non essere immediato: se la matrice è 3×3 si tratta di risolvere un'equazione di terzo grado, e le cose peggiorano se la matrice ha addirittura dimensioni maggiori; tuttavia, non è necessario conoscere esattamente gli autovalori: è sufficiente determinarne il segno. Per stabilire il segno degli autovalori di una matrice $\mathbf{M}$ occorre conoscere il determinante di $\mathbf{M}$ e i determinanti delle cosiddette "matrici di nord-ovest", ossia le sottomatrici quadrate composte dalle prime righe e prime colonne di $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \ldots$$

(osserviamo che se $\mathbf{M}$ è una matrice $k \times k$, allora ovviamente $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}$). Si dimostra che: se gli autovalori di $\mathbf{M}$ sono tutti positivi, allora $\det \mathbf{M}_h > 0$ per ogni $h = 1, \ldots, k$, se invece gli autovalori sono tutti negativi, $\det \mathbf{M}_h$ è positivo se h è pari e negativo se h è dispari; dunque, riassumendo, se $\mathbf{Q}$ è la matrice associata a q:

$$q \text{ definita positiva} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathbf{Q}_h > 0, \quad \forall h = 1, \ldots, k,$$

$$q \text{ definita negativa} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \det \mathbf{Q}_{2h} > 0 \\ \det \mathbf{Q}_{2h+1} < 0 \end{cases},$$

in tutti gli altri casi q è indefinita o semidefinita[u]. Osserviamo che, affinché q sia definita (positiva o negativa), in ogni caso i minori di nord-ovest di ordine pari devono essere positivi.

① La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

[u] Ricordiamo che $\det \mathbf{Q}$ è il prodotto degli autovalori, e quindi se $\det \mathbf{Q} \neq 0$ allora q non può essere semidefinita; mentre se $\det \mathbf{Q} = 0$ non è detto che q sia semidefinita: $\mathbf{Q}$ accanto all'autovalore nullo potrebbe avere due autovalori di segno diverso, ed essere dunque indefinita.

$\det \mathbf{Q} = 40$, inoltre i suoi minori di nord-ovest sono

$$\det \mathbf{Q}_1 = \det\begin{bmatrix}8\end{bmatrix} = 8, \quad \det \mathbf{Q}_2 = \det\begin{bmatrix}8 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} = 28, \quad \det \mathbf{Q}_3 = \det \mathbf{Q} = 40,$$

essendo tutti e tre positivi, concludiamo che q è definita positiva.

② La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}-3 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 1\\ -4 & 1 & -6\end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = -3$, inoltre i suoi minori di nord-ovest sono

$$\det \mathbf{Q}_1 = \det\begin{bmatrix}-3\end{bmatrix} = -3, \quad \det \mathbf{Q}_2 = \det\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix} = 5, \quad \det \mathbf{Q}_3 = \det \mathbf{Q} = -3,$$

i minori "dispari" ($\det \mathbf{Q}_1$ e $\det \mathbf{Q}_3$ sono negativi), il minore "pari" $\det \mathbf{Q}_2$ è positivo, concludiamo che q è definita negativa.

③ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 0$, dunque q potrebbe essere semidefinita o indefinita, in questo caso anziché studiare i minori di nord-ovest calcoliamo direttamente il polinomio caratteristico:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = (\lambda - 1)[\lambda^2 - 2\lambda] = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

gli autovalori sono 0, 1 e 2: q è semidefinita positiva.

④ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 25$, inoltre i suoi minori di nord-ovest sono

$$\det \mathbf{Q}_1 = 3, \quad \det \mathbf{Q}_2 = -7, \quad \det \mathbf{Q}_3 = \det \mathbf{Q} = 25,$$

poiché $\det \mathbf{Q}_2 < 0$, q sicuramente non è definita (né positiva, né negativa); il fatto che $\det \mathbf{Q} \neq 0$ implica che q non può essere semidefinita; dunque q è indefinita.

⑤ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 0$, dunque q potrebbe essere semidefinita o indefinita; se calcoliamo direttamente il polinomio caratteristico:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = (\lambda + 3)[\lambda^2 - 2\lambda] = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 2),$$

gli autovalori sono 0, -3 e 2: q è indefinita[v].

⑥ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = -12$, inoltre i suoi minori di nord-ovest sono

$$\det \mathbf{Q}_1 = 1, \quad \det \mathbf{Q}_2 = -1, \quad \det \mathbf{Q}_3 = \det \mathbf{Q} = -12.$$

Anche in questo caso, poiché $\det \mathbf{Q}_2 < 0$, q sicuramente non è definita (né positiva, né negativa); il fatto che $\det \mathbf{Q} \neq 0$ implica che q non può essere semidefinita; dunque q è indefinita.

⑦ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 3$, iniziamo dai minori di nord-ovest:

$$\det \mathbf{Q}_1 = 1, \quad \det \mathbf{Q}_2 = -1.$$

Non serve andare oltre: $\det \mathbf{Q}_2 < 0$ e dunque q non è definita; il determinante di $\mathbf{Q}$ non si annulla, e dunque q non è semdefinita, pertanto q è indefinita.

ESERCIZIO 9.66 **Segno delle forme quadratiche – 3. Due variabili**

Stabilire il segno delle seguenti forme quadratiche in due variabili:

① $q(x, y) = 8x^2 + 4xy + y^2$;
② $q(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2$;
③ $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

[v] Ad un risultato analogo saremmo arrivati studiando anche i minori di nord-ovest: $\det \mathbf{Q}_1 = 1$ e $\det \mathbf{Q}_2 = -3$, dunque...

Soluzione

Se la forma q è in due sole variabili, lo studio di essa è molto più spedito: ricordando che il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori e che la traccia[w] è la somma degli autovalori, vale il seguente schema:

segno di q	autovalori	$\det \mathbf{Q}$	$\operatorname{tr} \mathbf{Q}$
definita positiva	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	> 0	> 0
definita negativa	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	> 0	< 0
semidefinita positiva	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	$= 0$	> 0
semidefinita negativa	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	$= 0$	< 0
indefinita	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	< 0	—

Riassumendo, occorre guardare innanzitutto $\det \mathbf{Q}$:

- se è positivo, q è definita (e per stabilire se è definita positiva o definita negativa si guarda $\operatorname{tr} \mathbf{Q}$);
- se è nullo, q è semidefinita (e per stabilire se è semidefinita positiva o semidefinita negativa si guarda $\operatorname{tr} \mathbf{Q}$);
- se è negativo, q è indefinita (indipendentemente da $\operatorname{tr} \mathbf{Q}$).

① La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 4$, $\operatorname{tr} \mathbf{Q} = 9$, dunque q è definita positiva.

② La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = 0$, $\operatorname{tr} \mathbf{Q} = 5$, dunque q è semidefinita positiva.

③ La matrice associata a q è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q} = -3$, dunque q è indefinita.

ESERCIZIO 9.67 **Riduzione a forma canonica**

Ridurre a forma canonica le seguenti forme quadratiche:

① $q(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$;
② $q(x, y) = 7x^2 - 12xy - 2y^2$;
③ $q(x, y, z) = 3x^2 + 2yz$;
④ $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2yz + z^2$.

[w] Data una matrice $\mathbf{M}$, la traccia di $\mathbf{M}$, in simboli $\operatorname{tr} \mathbf{M}$, è la somma degli elementi che si trovano sulla diagonale.

Soluzione

Una forma quadratica si dice essere "in forma canonica" se compaiono solo i quadrati, e non i doppi prodotti. Ogni forma quadratica può essere ricondotta a forma canonica tramite un cambio di variabili: se $\mathbf{Q}$ è la matrice rappresentativa, essendo simmetrica può essere diagonalizzata usando una matrice di passaggio $\mathbf{U}$ ortogonale: $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{D}$; in altre parole possiamo scomporre $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}.$$

Se ora chiamiamo $\mathbf{x}$ il vettore delle variabili, osserviamo che

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{D}(\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}),$$

in altre parole, la stessa forma quadratica, usando come vettore delle variabili il vettore $\mathbf{X} = (\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x})$, è scritta in forma canonica, perché tutti i doppi prodotti si sono annullati. Per trasformare q in forma canonica occorre dunque determinare la matrice di passaggio ortogonale $\mathbf{U}$ che diagonalizza $\mathbf{Q}$, e riscrivere q in termini delle nuove variabili $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

① La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\lambda_1 = 4, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix};$$

normalizzando i vettori giungiamo alla consueta formula di diagonalizzazione:

$$\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D},$$

pertanto, grazie alle formule sopra ricordate, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

In definitiva, ponendo $X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ e $Y = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ otteniamo che

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4X^2 + 2Y^2.$$

② La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\lambda_1 = 10, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -5, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}.$$

La matrice di passaggio e la matrice diagonale sono rispettivamente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$$

procedendo in modo analogo a prima, il nuovo vettore delle variabili è

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x-y}{\sqrt{5}} \\ \frac{x+2y}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e dunque

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10X^2 - 5y^2.$$

③ La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\lambda_1 = 3, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 1, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}, \ \lambda_3 = -1, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix}.$$

La matrice di passaggio e la matrice diagonale sono rispettivamente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il nuovo vettore delle variabili è

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y+z}{\sqrt{2}} \\ \frac{y-z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$3x^2 + 2yz = 3X^2 + Y^2 - Z^2.$$

④ La matrice associata è

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = -1, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

La matrice di passaggio e la matrice diagonale sono rispettivamente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il nuovo vettore delle variabili è

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ \frac{x-z}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-2y+z}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$x^2 + 2xy + 2yz + z^2 = 2X^2 + Y^2 - Z^2.$$

ESERCIZIO 9.68 **Riconoscimento di coniche e quadriche**

Riconoscere la natura delle coniche definite dalle seguenti equazioni:

① $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8;$
② $7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10.$

Riconoscere la natura delle quadriche definite dalle seguenti equazioni:

③ $3x^2 + 2yz = 8;$
④ $x^2 + 2xy + 2yz + z^2 = -4;$

(nota: i primi membri sono le forme quadratiche esaminate nell'Esercizio 9.67).

Soluzione

Negli Esercizi 2.42 e 2.43 abbiamo visto le equazioni di coniche e quadriche. Una generica forma quadratica in due o tre variabili può essere ricondotta (mediante il cambio di variabili dell'esercizio precedente) alla forma canonica di una conica, se le variabili sono due, o di una quadrica, se le variabili sono tre.

① Sappiamo che, posto

$$X = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad Y = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

possiamo trasformare $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4X^2 + 2Y^2 = 8.$$

L'equazione

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

è l'equazione di un'ellisse, i cui semiassi sono lunghi rispettivamente $\sqrt{2}$ quello lungo l'asse X e 2 quello lungo l'asse Y. Poiché l'equazione dell'asse X è $Y = 0$, e porre $Y = 0$ significa porre $x + y = 0$, l'asse X del riferimento ruotato è la bisettrice di secondo e quarto quadrante, orientata verso sud-est, mentre l'asse Y è la bisettrice di primo e terzo quadrante, orientata verso nord-est. In definitiva, l'ellisse ha come assi le bisettrici del piano cartesiano, e passa per i punti $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

② Ponendo

$$X = \frac{2x-y}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad Y = \frac{x+2y}{\sqrt{5}},$$

l'equazione diventa

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10X^2 - 5y^2 = 10,$$

ossia

$$X^2 - \frac{Y^2}{2} = 1,$$

che è l'equazione di un'iperbole, che ha come asse focale l'asse X, cioè la retta $Y = 0$, ovvero la retta $x + 2y = 0$, orientata verso sud-est, mentre l'altro asse di simmetria è l'asse Y, cioè la retta $X = 0$, cioè la retta $2x - y = 0$, orientata verso nord-est. Gli asintoti dell'iperbole sono le due rette $Y = \pm\sqrt{2}X$, ossia le due rette $(x + 2y) = \pm\sqrt{2}(2x - y)$, vale a dire le rette

$$y = \frac{2\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}}x \quad \text{e} \quad y = \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}x.$$

③ Ponendo

$$X = x, \quad Y = \frac{y+z}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad Z = \frac{y-z}{\sqrt{2}},$$

l'equazione diventa

$$3x^2 + 2yz = 3X^2 + Y^2 - Z^2 = 8,$$

che è l'equazione di un iperboloide a una falda, a sezione ellittica (i coefficienti di X e di Y sono diversi tra loro); l'asse dell'iperboloide è l'asse Z, individuato dal vettore $\mathbf{v} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

④ Ponendo

$$X = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}, \qquad Y = \frac{x-z}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad Z = \frac{x-2y+z}{\sqrt{6}},$$

l'equazione diventa

$$x^2 + 2xy + 2yz + z^2 = 2X^2 + Y^2 - Z^2 = -4,$$

che è l'equazione di un iperboloide a due falde, a sezione ellittica (i coefficienti di X e di Y sono diversi tra loro); l'asse dell'iperboloide è l'asse Z, individuato dal vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

9.2 Esercizi proposti

69 Determinare per quali valori di α i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \\ 2 \end{bmatrix}$$

$[\alpha \neq -1]$

70 Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$[\det \mathbf{A} = x^5 - 2x^2, \det \mathbf{B} = -10, \det \mathbf{C} = 28]$

71 Calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{5\alpha^2 + \alpha + 2} \begin{bmatrix} \alpha - 1 & -1-\alpha & 1+\alpha^2 \\ 5\alpha - 1 & -3 & 1-2\alpha \\ 4 & 2+5\alpha & -2-\alpha \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -14 & 8 \\ -5 & -3 & 13 & -7 \\ -4 & -2 & 10 & -6 \\ -2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \right]$$

72 Discutere, al variare dei parametri reali α e β, la risolubilità dei seguenti sistemi:

$$① \begin{cases} -4x + (1+\alpha^2)y = 8 \\ 2x - y = \alpha - 3 \end{cases}, \qquad ② \begin{cases} x + 2\beta y = 1 \\ 3x + \beta^2 y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases},$$

e darne un'interpretazione geometrica.

$$① \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \alpha \neq \pm 1 & \Rightarrow \exists!\ \text{sol.} - \text{caso } 1 \\ \bullet\ \alpha = 1 & \Rightarrow \exists\infty^1\ \text{sol.} - \text{caso } 2 \\ \bullet\ \alpha = -1 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \text{caso } 3 \end{array}\right]$$

$$② \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \beta = 1, \beta = 3 & \Rightarrow \exists!\ \text{sol.} - \text{caso } 6 \\ \bullet\ \beta \neq 1, \beta \neq 3 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \begin{array}{l} \text{caso } 5, \text{ se } \beta = 0, 6, -\frac{3}{2} \\ \text{caso } 7, \text{ se } \beta \neq 0, 6, -\frac{3}{2} \end{array} \end{array}\right]$$

73 Discutere, al variare dei parametri reali α e β, la risolubilità dei seguenti sistemi:

$$① \begin{cases} \alpha x + y + 2z = \alpha + 1 \\ 2x + (\alpha - 1)y + (2\alpha - 2)z = 3 \end{cases}, \qquad ② \begin{cases} 2x - \beta^2 y + 6z = 2 \\ -x + 2y + 3z = \beta \end{cases},$$

e darne un'interpretazione geometrica.

$$① \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \alpha \neq 2, -1 & \Rightarrow \exists\infty^1\ \text{sol.} - \text{caso } 1 \\ \bullet\ \alpha = 2 & \Rightarrow \exists\infty^2\ \text{sol.} - \text{caso } 2 \\ \bullet\ \alpha = -1 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \text{caso } 3 \end{array}\right]$$

$$② \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \beta \neq \pm 2 & \Rightarrow \exists\infty^1\ \text{sol.} - \text{caso } 1 \\ \bullet\ \beta = \pm 2 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \text{caso } 3 \end{array}\right]$$

74 Discutere, al variare dei parametri reali α e β, la risolubilità dei seguenti sistemi:

$$① \begin{cases} 2x + (\alpha - 2)y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = \alpha \\ x + (\alpha + 4)z = 5 \end{cases}, \qquad ② \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x - 2y + 6z = 2\beta^2 \\ (\beta - 1)x + y - 3z = \beta \end{cases},$$

e darne un'interpretazione geometrica.

$$① \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \alpha \neq 3, -4 & \Rightarrow \exists!\ \text{sol.} - \text{caso } 8 \\ \bullet\ \alpha = 3 & \Rightarrow \exists\infty^1\ \text{sol.} - \text{caso } 6 \\ \bullet\ \alpha = -4 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \text{caso } 7 \end{array}\right]$$

$$② \left[\begin{array}{ll} \bullet\ \beta \neq \pm 1 & \Rightarrow \nexists\ \text{sol.} - \text{caso } 5 \\ \bullet\ \beta = 1 & \Rightarrow \exists\infty^1\ \text{sol.} - \text{caso } 4 \\ \bullet\ \beta = -1 & \Rightarrow \exists\infty^2\ \text{sol.} - \text{caso } 1 \end{array}\right]$$

75 Determinare autovalori e autovettori delle seguenti matrici:

$$① \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad ② \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$③ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad ④ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ciascuna di loro è diagonalizzabile?

$$\left[① \ \lambda_1 = 4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -2, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -13 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 0, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[② \ \lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 6, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[③ \ \lambda_1 = 6, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[④ \ \lambda_1 = 6, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \mathbf{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

[**A**, **C** e **D** lo sono; **B** no.]

76 Stabilire per quali valori del parametro reale α la matrice **A** è diagonalizzabile:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Se } \alpha > 0 \text{ e } \alpha \neq \frac{9}{2}, \mathbf{A} \text{ è diagonalizzabile in } \mathbb{R}; \\ \text{se } \alpha < 0, \mathbf{A} \text{ è diagonalizzabile in } \mathbb{C}, \text{ ma non in } \mathbb{R}; \\ \text{se } \alpha = 0 \text{ o } \alpha = \frac{9}{2}, \mathbf{A} \text{ non è diagonalizzabile né in } \mathbb{R} \text{ né in } \mathbb{C}. \end{array} \right]$$

77 Stabilire per quali valori di α le seguenti matrici sono simili:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & \alpha & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

[$\alpha = -2$]

78 Dopo aver verificato che $\mathscr{V}$, insieme delle matrici 3×3, è uno spazio vettoriale, stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathscr{V}$ sono anche sottospazi:

- V_1: matrici triangolari superiori;
- V_2: matrici triangolari (inferiori o superiori);
- V_3: matrici il cui determinante vale 1;
- V_4: matrici il cui determinante vale 0;
- V_5: matrici invertibili;
- V_6: matrici simmetriche.

Per ciascuno dei sottospazi, calcolare la dimensione ed esibire una base.

[Sono sottospazi vettoriali solo V_1 e V_6; $\dim V_1 = \dim V_6 = 6$]

79 Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\2\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad V = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}\alpha+1\\3\alpha-1\\\alpha\\1\end{bmatrix}\right\},$$

determinare $U \cap V$ e $U + V$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{l} \bullet\ \alpha = 2 \quad \Rightarrow V \subset U \ \Rightarrow\ U \cap V = V,\ U + V = U \\ \bullet\ \alpha \neq 2 \quad \Rightarrow U \cap V = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow U + V = U \oplus V \end{array}\right]$$

80 Mostrare che l'applicazione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+2y+z\\3x+y+2z+t\\2x-y+z+t\end{bmatrix}$$

è lineare; determinare le basi per il nucleo e per l'immagine.

$$\left[\mathcal{B}_{\ker \mathbf{f}} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\\3\end{bmatrix}\right\}, \mathcal{B}_{\operatorname{im}\mathbf{f}} = \left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right]$$

81 Data l'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per cui

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1) - 2\mathcal{L}(\mathbf{e}_2),$$

scrivere la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ associata a $\mathcal{L}$, determinandone poi le basi per il nucleo e per l'immagine.

$$\left[\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\3&-2&7\end{bmatrix}, \mathcal{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\}, \mathcal{B}_{\operatorname{im}\mathcal{L}} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}\right]$$

82 Data l'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per cui

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x+y+3z\\x+2y+z\\x-y+2z\end{bmatrix},$$

e la base

$$\mathcal{U} = \left\{\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

scrivere la matrice rappresentativa $\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}}$ di $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{U}$.

$$\left[\mathbf{A}_{\mathcal{L},\mathcal{U}} = \begin{bmatrix}0&0&0\\7&3&2\\4&0&3\end{bmatrix}\right]$$

9.2.1 Suggerimenti

Per l'esercizio 54: Stabilire per quali valori di α la matrice $\mathbf{A}$ possiede autovalori multipli, e analizzarne la regolarità.

Per l'esercizio 56: V_2: La somma di una matrice triangolare inferiore ed una triangolare superiore non è in generale triangolare; la matrice nulla non appartiene né a V_3 né a V_5; per V_4, considerare la seguente somma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Marco Boella

ANALISI MATEMATICA 1 E ALGEBRA LINEARE

Eserciziario Seconda edizione

9788871927695

Il libro, che nella prima edizione ha riscosso un grande successo tra gli studenti, offre una raccolta di esercizi riguardanti gli argomenti che più frequentemente compaiono in un primo corso di Matematica: numeri complessi, successioni e serie, limiti, calcolo differenziale e integrale, geometria analitica e algebra lineare. Per ogni argomento, vengono richiamati i principali aspetti teorici e gli esercizi sono svolti in dettaglio. In conclusione di ciascun capitolo vengono proposti i testi, senza svolgimento, di altri esercizi, come ulteriore verifica individuale dell'apprendimento. Pensato come aiuto allo studio, il libro è destinato agli studenti che, all'ingresso in una qualsiasi facoltà scientifica, devono sostenere l'esame di Matematica.
La nuova edizione è stata ampliata nella parte di algebra lineare in particolare con l'aggiunta di esercizi sul metodo di Gauss, proiezioni ortogonali, minimi quadrati, fattorizzazione delle matrici. La parte di calcolo integrale è stata invece ampliata con l'aggiunta delle funzioni integrali.

Marco Boella è docente a contratto presso il Politecnico di Milano e insegna Analisi Matematica e Calcolo delle Probabilità e Statistica.

19,00 euro

9 788871 927695

Visitate il nostro sito web
http://hpe.pearson.it