II.9 - CONVOLUZIONE

Proposizione: Siano f e g due funzioni $L^1(\mathbb{R})$. Si definisce **prodotto di convoluzione** il seguente

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

i. Il prodotto $(f*g)(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}$

ii. La funzione $x \mapsto (f*g)(x)$ è di classe $L^1(\mathbb{R}_x)$

iii. Vale la seguente disuguaglianza: $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Dimostrazione:

i. $F(x,y) = |f(x-y)||g(y)| \geq 0$. Essa è misurabile poiché è il prodotto di due funzioni misurabili.

- per q.o. y, $x \mapsto F(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}_x$:

$$\int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)||g(y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\,dz = |g(y)| \cdot \|f\|_1$$

- $y \mapsto \int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx$ è integrabile su $\mathbb{R}_y$:

$$\int_{\mathbb{R}_y} \left[dy \int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx \right] = \int_{\mathbb{R}_y} \left[|g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx \right] = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Per il teorema di Tonelli $F(x,y)$ è quindi integrabile su $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, e quindi, se è integrabile il suo modulo, è integrabile anche la funzione stessa $f(x-y)g(y)$ e dal teorema di Fubini segue quindi la prima tesi.

ii. $\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}_x} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy \right| dx \le \int_{\mathbb{R}_x} dx \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)||g(y)|\,dy =$

(per il teorema di Fubini è possibile scambiare l'ordine dell'integrazione)

$$= \int_{\mathbb{R}_y} \left[dy \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right] = \int_{\mathbb{R}_y} \left[|g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx \right] = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$(f*g)(x)$ è quindi integrabile e si è dimostrata anche l'ultima tesi.

La proposizione rimane valida anche per $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$. Il prodotto sarà in questo caso in $L^p(\mathbb{R})$ e l'ultima disuguaglianza diventerà: $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Proposizione: sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Valgono i seguenti risultati:

- $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\left(f * g\right)^{(k)} = f * g^{(k)}$

Teorema: per ogni $p \in [1, +\infty)$, la chiusura di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ coincide con $L^p(\mathbb{R})$: $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$

La dimostrazione di tale teorema si ottiene con l'uso di particolari funzioni, dette <u>mollifficatori</u>.

Si chiama mollificatore una funzione non negativa $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ a supporto compatto compreso tra $[-1,1]$ che abbia integrale unitario:

$$\rho \geq 0, \quad \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{spt} \rho \subseteq [-1,1], \quad \int_{\mathbb{R}} \rho = 1$$

Dato un mollificatore ρ si ha inoltre che $\rho_n = n\rho(nx)$ definisce una famiglia di mollificatori, ovvero che ρ_n è un mollificatore per ogni n con supporto incluso in $\left[-1/n, 1/n\right]$.

Si consideri ora una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}),\ \ p \neq +\infty$. La mollificazione di f via ρ è definita come il prodotto di convoluzione tra f e ρ_n, ovvero:

$$f_n := f * \rho_n = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)dy$$

Si può poi dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$, con $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n. Se si approssimano poi le f con una successione $f_k = f\chi_{[-k,k]}$ si ottiene la dimostrazione del teorema.

II.10 - SPAZI l^P

- Per $p \in [1,+\infty)$ si definisce lo spazio l^P come l'insieme delle successioni di $\mathbb{R}^N$ tali che la serie del loro modulo, elevato alla p, converga:

$$l^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N : \quad \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Si può dimostrare che tali spazi sono di Banach con la seguente norma:

$$\|(x_n)\|_{l^p} := \left(\sum |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- Per $p=+\infty$ si definisce invece l^∞ come l'insieme delle successioni di $\mathbb{R}^N$ il cui estremo superiore sia finito:

$$l^\infty := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

Anche questo è uno spazio di Banach se si considera la norma:

$$\|(x_n)\|_{l^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

<u>*Osservazioni:*</u>

1. $l^p \subseteq l^\infty, \quad \forall p \in [1,+\infty)$, infatti: $\sum |x_n|^p < +\infty \quad \Rightarrow \quad |x_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |x_n|$ limitato

   Se $p \le q$, allora $l^p \subseteq l^q$

2. Le successioni in l^p sono successioni di successioni:

$$\begin{array}{ccccc} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 & \dots \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^i & x_2^i & \dots & x_n^i & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Se una successione $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{i\to+\infty} 0$ in l^p, allora $\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n^i \xrightarrow{i\to+\infty} 0$, ma non è in generale valido il viceversa.

3. In maniera analoga è possibile definire $l^p(\mathbb{Z})$, intendendo in questo caso che l'indice della successione è un numero relativo.

II.10 - FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Teorema di differenziazione: data una funzione $f \in L^1([a,b])$, si consideri:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

Allora, per q.o. x, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Data una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice che essa è **assolutamente continua** se esiste una funzione $f\in L^1([a,b])$ di cui F sia la primitiva:

$$F\in AC \quad\Leftrightarrow\quad \exists f\in L^1([a,b]):\ F(x)=\int_a^x f(t)dt+c$$

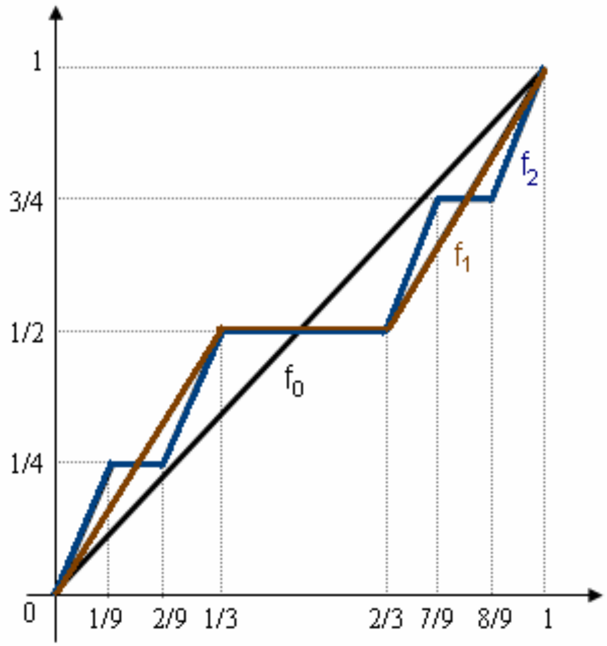
Tale condizione è equivalente alla seguente:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\quad \forall(x_i,y_i)\subseteq(a,b),\ i=1,\dots,N\ \text{ 2 a 2 disg.}\quad \sum_i\left|y_i-x_i\right|<\delta\Rightarrow\sum_i\left|F(y_i)-F(x_i)\right|<\varepsilon$$

In particolare, l'insieme delle funzioni assolutamente continue è incluso in quello delle funzioni uniformemente continue e si può dimostrare che tale inclusione è stretta.

Conseguenze:

- Siano F e G due funzioni assolutamente continue, allora anche FG è assolutamente continua: $F,G \in AC([a,b]) \Rightarrow F \cdot G \in AC([a,b])$, da cui si ricava che:
  $$(FG)(b)-(FG)(a)=\int_a^b (FG)'=\int_a^b (fG+Fg)$$
  Vale quindi per le funzioni assolutamente continue la formula di integrazione per parti.
- Data una funzione F assolutamente continua con derivata nulla q.o., essa è costante:
  $$F \in AC([a,b]),\ \ F'=0\ \ q.o.\ \Rightarrow\ F=c\ \ q.o.\ \Rightarrow\ F=c$$
  Ciò non è invece in generale valido se F è solamente continua.



Il limite della successione in figura, che si dimostra essere uniforme, è la funzione di Cantor, che è quindi continua.

La misura dell'insieme dei punti in cui ha derivata nulla è:

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1$$

Essa è quindi una funzione continua che ha derivata nulla q.o., ma che non è costante poiché passa da 0 a 1 in [0,1]

II.11 - Spazi di Hilbert

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un'applicazione $a: V \times V \to \mathbb{R}$ si dice forma bilineare simmetrica se ha le seguenti proprietà:

- $a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v,u) + \beta a(w,u) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u,v) + \beta a(u,w)$
- $a(u,v) = a(v,u)$

In spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ si parla invece di forme sesquilineari hermitiane $a: V \times V \to \mathbb{C}$ se:

- $a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v,u) + \beta a(w,u) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $a(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} a(u,v) + \bar{\beta} a(u,w)$
- $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$

Una funzione $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **forma quadratica** se esiste un'applicazione a bilineare simmetrica tale che $f(v) = a(v, v)$.

<u>*Osservazioni:*</u>

- Se esiste una tale applicazione, allora essa è unica ed in particolare:
  $$f(u+v) - f(u) - f(v) = a(u+v, u+v) - a(u,u) - a(v,v) = a(u,v) + a(v,u) = 2a(u,v)$$
  $$a(u,v) = \frac{1}{2}\left[f(u+v) - f(u) - f(v)\right]$$
- Chiedere che a sia simmetrica non è restrittivo. Se infatti esiste una forma bilineare b tale che $f(v) = b(v,v)$, è sempre possibile trovare una forma bilineare simmetrica a con le stesse caratteristiche. Infatti:
  $a(u,v) = \frac{1}{2}\left[b(u,v) + b(v,u)\right]$ è simmetrica e $a(v,v) = \frac{1}{2} \cdot 2b(v,v) = b(v,v) = f(v)$

Uno spazio $\left(V, \|\cdot\|\right)$ di Banach si dice **spazio di Hilbert** se il quadrato della norma è una forma quadratica e la norma si dice hilbertiana:

$$\|\cdot\|^2 = a(v,v)$$

In tal caso l'applicazione $a(u,v)$ è chiamata **prodotto scalare** su V.

Proposizione: uno spazio $\left(V, \|\cdot\|\right)$ di Banach è di Hilbert se e solo se vale la seguente identità:

$$\forall x, y \in V: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ (id. del parallelogrammo)}$$

Proposizione: sia $\left(V, \|\cdot\|\right)$ uno spazio di Hilbert, allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|a(x, y)| \le \|x\|\|y\|$$

–

Esempi:

- $V=\mathbb{R}^N$, $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{1/2}$ è di Hilbert con $a(x,y)=\sum_{i=1}^{N}x_i y_i$
- $V=l^2$, $\|x\|_2=\left(\sum_{i\geq 0}x_i^2\right)^{1/2}$ è di Hilbert $a(x,y)=\sum_{i\geq 0}x_i y_i$
- $V=L^2(A)$, $\|f\|_2=\left(\int_A f^2\right)^{1/2}$ e A misurabile di $\mathbb{R}^N$ è di Hilbert con $a(f,g)=\int_A f\cdot g$

- $V = \mathbb{R}^N$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{1/p}$ non è di Hilbert per $p \neq 2$
- $V = C^0\left([a,b]\right)$, $\|f\|_\infty$ non è di Hilbert. Infatti, si consideri per esempio: $[a,b]=[0,1]$, $\quad f(x)=x$, $\quad g(x)=1-x$. L'identità del parallelogrammo non è soddisfatta: $\|1\|_\infty^2 + \|2x-1\|_\infty^2 \neq 2\|x\|_\infty^2 + 2\|1-x\|_\infty^2$; $\quad 1+1 \neq 2+2$; $\quad 2 \neq 4$, che è ovviamente impossibile.