Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova intermedia di Analisi III, 5 novembre 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Siano α, β due parametri reali, con $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, e sia

$$f(x) = \frac{1 - e^{-\sqrt{x}}}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}.$$

(a) Per ogni fissato $p \in [1, +\infty]$, stabilire per quali valori α, β si ha $f \in L^p(0, 1/2)$.

(b) Per ogni fissato $p \in [1, +\infty]$, stabilire per quali valori α, β si ha $f \in L^p(1/2, +\infty)$.

Soluzione.
(a) Si ha:

$$f(x) \overset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{2}} \, |\ln x|^\beta}.$$

Pertanto

- $f \in L^\infty(0, 1/2)$ se e solo se $\alpha \leq 1/2$ (altrimenti la funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$);
- $f \in L^p(0, 1/2)$ se e solo se $|f|^p$ è integrabile in un intorno dell'origine. Ció accade: se $\alpha < \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ indipendentemente da β, oppure se $\alpha = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$, e $\beta > \frac{1}{p}$.

(b) Si ha

$$f(x) \overset{x \to 1}{\sim} \frac{C}{|x - 1|^\beta}, \qquad f(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta},$$

Pertanto

- $f \notin L^\infty(1/2, +\infty)$, poiché, indipendentemente dal valore di β, la funzione tende a $+\infty$ per $x \to 1$.
- $f \in L^p(1/2, +\infty)$ se e solo se $|f|^p$ è integrabile in un intorno del punto 1 e di $+\infty$.
  Si ha che: $|f|^p$ è integrabile in un intorno di $x = 1$ se e solo se $\beta < \frac{1}{p}$, indipendentemente da α; $|f|^p$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ se $\alpha > \frac{1}{p}$ indipendentemente da β, oppure se $\alpha = \frac{1}{p}$, e $\beta > \frac{1}{p}$.
  Quindi si ha $f \in L^p(1/2, +\infty)$ per gli (α, β) tali che $\beta < \frac{1}{p} < \alpha$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) L'operatore T definito su $\mathcal{D}(-1, 1)$ come $T(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi'' \, dx$ è un elemento di $\mathcal{D}'(-1, 1)$.

si', perché lineare e se $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(-1, 1)$ si ha $T(\varphi_n) \to 0$

(b) L'operatore T definito su $\mathcal{D}(-1, 1)$ come $T(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi^2 \, dx$ è un elemento di $\mathcal{D}'(-1, 1)$.

no, perché non lineare

(c) La successione $T_n := n\delta_{1 - \frac{1}{n}}$ converge a zero in $\mathcal{D}'(-1, 1)$ (dove $\delta_{1-\frac{1}{n}}$ indica la delta di Dirac concentrata nel punto $1 - \frac{1}{n}$).

si, perché data $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ si ha $\langle T_n, \varphi \rangle = 0$ per n abbastanza grande.

(d) La successione $T_n := (\delta_0)^{(n)}$ converge a zero in $\mathcal{D}'(-1, 1)$ (dove $\delta_0^{(n)}$ indica la derivata n-esima della delta di Dirac concentrata nel punto 0).

no, perché data $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ non si ha in generale $\varphi^{(n)}(0) \to 0$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Si consideri la seguente funzione di variabile complessa, dove α è un fissato numero complesso:

$$f_\alpha(z) := \frac{e^{\alpha z}}{\big(1+e^{2z}\big)^2}\,.$$

(a) Classificare le singolarità isolate di f, e calcolare il residuo nella singolarità z_0 con $\mathrm{Im}(z_0) \in (0,\pi)$.

(b) Determinare l'insieme S degli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui la restrizione di f_α a $\mathbb{R}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. (a) Le singolarità isolate di f sono i punti in cui si annulla il denominatore, ossia i punti della forma $i\pi/2 + ik\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di poli di ordine 2. La singolarità con $\mathrm{Im}(z_0) \in (0,\pi)$ è $z_0 = i\pi/2$. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f_\alpha, z_0) &= \lim_{z\to i\pi/2} \frac{d}{dz}\Big(e^{\alpha z}\frac{(z-i\pi/2)^2}{\big(1+e^{2z}\big)^2}\Big)\\ &= \lim_{z\to i\pi/2}\Big(\frac{2(z-i\pi/2)(e^{2z}+1)-(z-i\pi/2)^2 4e^{2z}}{(e^{2z}+1)^3}e^{\alpha z} + \alpha e^{\alpha z}\Big(\frac{z-i\pi/2}{e^{2z}+1}\Big)^2\Big)\end{aligned}$$

Usando l'espansione $e^{2z}+1 \sim -2(z-i\pi/2)$ si trova subito che il limite del secondo addendo è $(\alpha/4)e^{i\pi\alpha/2}$. Usando la stessa espansione, e il teorema di de L'Hopital, si vede facilmente che il limite del primo addendo è $(-1/2)e^{i\pi\alpha/2}$. Quindi

$$\mathrm{Res}(f_\alpha, z_0) = \big(\alpha/4 - 1/2\big)e^{i\pi\alpha/2}\,.$$

(b) Si ha:

$$|f_\alpha(x)| = \frac{e^{ax}}{(1+e^{2x})^2} \qquad \text{con } a := \mathrm{Re}(\alpha)\,.$$

Per $x \to +\infty$, si ha $f_\alpha(x) \sim e^{(a-4)x}$, che è sommabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $a < 4$. Per $x \to -\infty$, si ha $f_\alpha(x) \sim e^{ax}$, che è sommabile in un intorno di $-\infty$ se e solo solo se $a > 0$. Pertanto l'insieme S è la striscia $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 4$.

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Fornire una condizione sufficiente su una successione di funzioni misurabili $f_n : E \to \mathbb{R}$ (E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$) affinché, nell'integrazione secondo Lebesgue, valga

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E f_n \,.$$

$f_n \geq 0$ (per il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi)

(b) Enunciare il teorema di Fubini.

Si veda uno dei testi consigliati.

(c) Sia T_n una successione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dimostrare che, se $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $T_n' \to S$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, allora $S = T'$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Basta verificare che $S = T'$ nel senso delle distribuzioni: infatti, data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle S, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_n', \varphi \rangle = -\lim_n \langle T_n, \varphi' \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$