Invertibilità locale

Teorema Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω,

e sia $z^0 \in \Omega$ tale che $f'(z^0) \neq 0$.

Allora f è "localmente invertibile in z^0"

($\exists\, U(z^0)$ tale che $f|_{U(z^0)}$ invertibile)

e la funzione inversa f^{-1} è derivabile in senso complesso

in $f(z^0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z^0)) = \frac{1}{f'(z^0)}$$

Esempi

1) $f(z) = e^z$, $z^0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(z^0) = e^{z_0} \neq 0$

$$(\log z)'\,(\underbrace{e^{z_0}}_{w_0}) = \frac{1}{e^{z_0}} \quad \left(\frac{1}{w_0}\right)$$

2) $f(z) = z^n$, $z^0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(z^0) = n z_0^{n-1} \neq 0$ $\forall z^0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dim.

Recall. $C^1 \ni \Phi = (u, v)$ campo vettoriale $: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x^0, y^0) \in \Omega$

$\det J\Phi(x^0, y^0) \neq 0 \Rightarrow \Phi$ "localmente invertibile in (x^0, y^0)" e

$$J\Phi^{-1}\left(\Phi(x^0, y^0)\right) = \left(J\Phi(x^0, y^0)\right)^{-1}$$

matrice inversa

$z^0 = x^0 + iy^0$, $f = u + iv \rightsquigarrow (x^0, y^0)$, $\Phi = (u, v)$.

$$J\Phi(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det J\Phi(x^0, y^0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z^0)|^2 \neq 0$$

$(f'(z^0) = \alpha + i\beta)$

$(f'(z^0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x)$

$$J\Phi^{-1}\left(\Phi(x^0, y^0)\right) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$$

$$(f^{-1})'(f(z^0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{\overline{f'(z^0)}}{|f'(z^0)|^2} = \frac{1}{f'(z^0)}$$

$\blacksquare$

Ricerca di primitive

(come determinarla?)

Problema: Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esiste ? unica ?

$F : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω tale che

$$F'(z) = f(z).$$

Una tale F si dice PRIMITIVA DI f.

[**Recall**: Data $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA

(Teorema fondamentale del calcolo)

allora una primitiva di f è data da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

e tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale.]

<u>Riguardo l'unicità:</u> una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

1) F primitiva di f, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow F+\lambda$ primitiva di f

$$(F+\lambda)' = F' + \lambda' = f$$

2) F_1, F_2 primitive di $f \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$.

$G := F_1 - F_2$ Tesi: G è costante

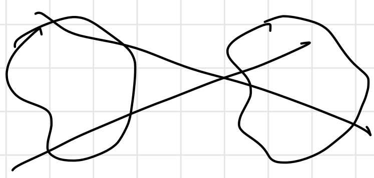
$$G' = (F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

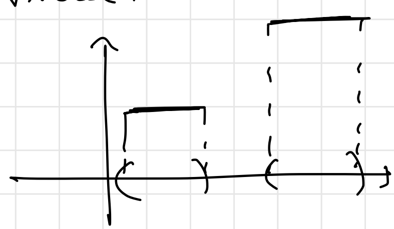
$G = u + iv$ $\quad G' = u_x - i u_y = v_y + i v_x$

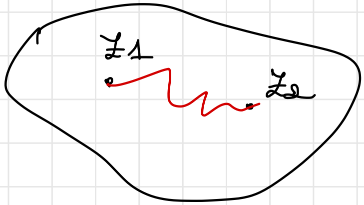
$$G' = 0 \Rightarrow \nabla u(x^0, y^0) = \nabla v(x^0, y^0) = \underline{0}$$

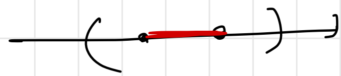
$\Rightarrow u$ costante, v costante.

<u>N.B.</u>: 2) vale se Ω è CONNESSO.









Esistenza

$f = u + iv$, $F = U + iV$

$\uparrow$ data $\qquad\qquad$ $\uparrow$ incognita

$$F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x$$
$$\|$$
$$f = u + iv$$

Quindi U e V (affinché F sia primitiva di f) devono soddisfare:

$$\begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 := u\,dx - v\,dy \\ V \text{ potenziale per } \omega_2 := v\,dx + u\,dy. \end{cases}$$

Concludiamo che

f ammette primitive $\iff$ ω_1, ω_2 esatte.

$\not\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

f olomorfa. $\iff$ ω_1, ω_2 chiuse.

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \text{ chiusa} \iff u_y = -v_x \\ \omega_2 \text{ chiusa} \iff v_y = u_x \end{bmatrix}$$

$$\oint_\gamma f = 0 \quad \forall \gamma \text{ circuito } \subseteq \Omega$$
$$\Updownarrow$$
f ammette primitive $\Leftrightarrow$ ω_i esatte $\Leftrightarrow$ $\oint_\gamma \omega_i = 0 \quad \forall \gamma$ circuito $\subseteq \Omega$

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$ (sì, se Ω è semplicemente connesso)

f olomorfa $\Leftrightarrow$ ω_i chiuse $\Rightarrow$ $\oint_\gamma \omega_i$ non cambia se sostituisco γ con un circuito OMOTOPO.

$\Updownarrow$

$\oint_\gamma f$ " " "

Osservazioni:

- Differenza rispetto al caso reale: in campo complesso se f ammette primitive, f è olomorfa.
- Su domini semplicemente connessi, le due proprietà sono equivalenti. In generale NO.

Es. $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. non sempl. connesso

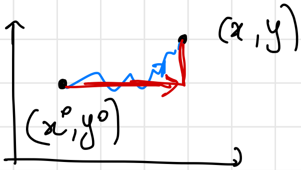
olomorfa ma non ammette primitive

$$\left(f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}, \quad \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \right)$$

u e v soddisfano CR, ma (almeno) una tra ω_1 e ω_2 non esatta].

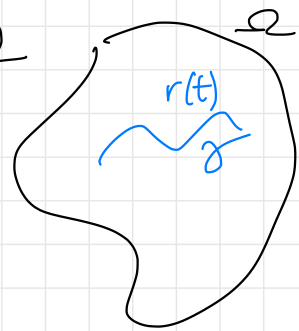
- Come calcolo F? (se esiste).

$$F = U + iV, \quad \text{dove} \begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 \\ V \text{ potenziale per } \omega_2. \end{cases}$$



$$\begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 = \displaystyle\int_{\gamma : (x^\circ, y^\circ) \rightsquigarrow (x,y)} \omega_1 \\ V \text{ potenziale per } \omega_2 = \displaystyle\int_{\gamma : (x^\circ, y^\circ) \rightsquigarrow (x,y)} \omega_2 \end{cases}$$

- Def. Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dato γ cammino in Ω parametrizzato da $r : [a, b] \longrightarrow \Omega$
$r(t) = r_1(t) + i\, r_2(t)$.



$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(r(t))\, r'(t)\, dt}$$

$$= \int_a^b (u + iv)(r_1' + i r_2')\, dt$$

$$= \int_a^b (u r_1' - v r_2')\,dt + i \int_a^b (v r_1' + u r_2')\,dt$$

$$= \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2.$$

- Riformulazione del calcolo di F

$$F(z) = \int_{\gamma : z^0 \rightsquigarrow z} f$$

- <u>Teorema di Morera</u>:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ circuito} \subseteq \Omega \Rightarrow f \text{ olomorfa}$$

- <u>Teorema di Cauchy</u>

f olomorfa su $\Omega \Rightarrow \oint_\gamma f$ non cambia se sostituisco un circuito $\gamma \subseteq \Omega$ con uno ad esso omotopo

(In particolare, se γ omotopo a 1 punto $\Rightarrow \oint_\gamma f = 0$)

$$\int_a^b (u r_1' - v r_2')\,dt = \int_a^b u(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t)\,dt - \int_a^b v(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)\,dt.$$

$$\int_a^b (u r_1' - v r_2')\,dt = \int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma u\,dx - v\,dy$$

per def di integrale di una forma

$$\int_a^b (v r_1' + u r_2')\, dt$$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_a^b v\, dx + u\, dy = \int_a^b v(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t)\, dt$$

$$+ \int_a^b u(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)\, dt.$$