QUADRICHE

martedì 11 dicembre 2018 19:41

1. GENERALITÀ SULLE SUPERFICI NELLO SPAZIO

Una superficie algebrica è il luogo degli zeri di un polinomio.
L'ordine della superficie è il grado del polinomio.
Una superficie algebrica del primo ordine è quindi un piano.
Le superfici algebriche del secondo ordine sono dette **QUADRICHE**.

Ecco alcuni semplici esempi di superfici:

La **SFERA** è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso.
La sfera di raggio R e centro $C(x_c, y_c, z_c)$ ha equazione

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$$

Questo porta ad un'equazione del tipo

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Ⓢ $\quad x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

e quindi chiamiamo "sfera" ogni luogo di punti le cui coordinate (eventualmente complesse) soddisfano l'equazione Ⓢ.
Le coordinate del centro e il raggio (eventualmente complesso) sono

$$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right), \quad R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d}$$

Si chiama <u>SUPERFICIE CONICA</u> o semplicemente <u>CONO</u> un luogo di rette (dette GENERATRICI) passanti per un punto fisso (detto VERTICE).
Quando il vertice è "all'infinito", cioè quando le generatrici sono parallele, il cono prende il nome di <u>CILINDRO</u>.
Si dice DIRETTRICE del cono/cilindro una qualsiasi curva tale che ogni direttrice sia determinata, oltre che dal vertice, dal passaggio per un punto di questa curva.
Non si richiede in generale che la direttrice sia una curva piana

Non si richiede, in generale, che la direttrice sia una curva piana.
Quando la direttrice è una conica, allora il cono/cilindro ha un'equazione polinomiale di secondo grado e prende nome di cono/cilindro **QUADRICO**.
Il cono/cilindro si dice **CIRCOLARE** quando ammette come direttrice una circonferenza; si dice **CIRCOLARE RETTO** quando la retta congiungente il vertice e il centro della circonferenza (detto **ASSE** del cono/cilindro) è perpendicolare al piano della direttrice.

ES Scrivere l'equazione del cilindro con generatrici parallele all'asse x e direttrice

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

che tipo di curva è γ?

Basta eliminare la x tra le equazioni di γ

Basta eliminare la x tra le equazioni di γ

$$\begin{cases} x = -y-z \\ (-y-z)^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{2y^2+2z^2+2yz=1}$$

"In alternativa", si indica con (x_0,y_0,z_0) il generico punto di γ e si scrive una rappresentazione della retta per (x_0,y_0,z_0) con la direzione dell'asse x. Si usano poi le eq. di γ per eliminare x_0, y_0 e z_0

$$\begin{cases} \begin{cases} x = x_0+t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \\ x_0+y_0+z_0=0 \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = x-t \\ y_0 = y \\ z_0 = z \\ (x-t)^2+y^2+z^2=1 \\ (x-t)+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = x-t \\ y_0 = y \\ z_0 = z \\ t = x+y+z \\ (y+z)^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\boxed{2y^2+2z^2+2yz=1}$$

ES Scrivere l'eq. del cono di vertice $V(1,2,3)$ e direttrice

ES Scrivere l'eq. del cono di vertice $V(1,2,3)$ e direttrice

$$\gamma: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Indicato con $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto di γ, scriviamo una rappresentazione della retta per P e V

$$r \begin{cases} x = 1 + (x_0 - 1)t \\ y = 2 + (y_0 - 2)t \\ z = 3 + (z_0 - 3)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Sfruttiamo ora le eq. di γ per eliminare t, x_0, y_0, z_0

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x-1}{t} + 1 \\ y_0 = \frac{y-2}{t} + 2 \\ z_0 = \frac{z-3}{t} + 3 \\ y_0 = x_0^2 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo

$$\begin{cases} \frac{y-2}{t} + 2 = \left(\frac{x-1}{t} + 1\right)^2 \\ \frac{z-3}{t} + 3 = 0 \end{cases}$$

$\{ z_0 = 0$

t

$$\begin{cases} t = \dfrac{3-z}{3} \\ t(y-2+2t) = (x-1+t)^2 \end{cases}$$

$$\frac{3-z}{3}\left(y-2+2\cdot\frac{3-z}{3}\right) = \left(x-1+\frac{3-z}{3}\right)^2$$

$$(3-z)(3y-2z) = (3x-z)^2$$

$$© \quad \boxed{9x^2 - z^2 + 3yz - 6xz - 9y + 6z = 0}$$

Proviamo che la retta per V e O è contenuta nella quadrica di equazione ©

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$ Sostituendo in © si ha

$$9t^2 - 9t^2 + 18t^2 - 18t^2 - 18t + 18t = 0$$

cioè $\qquad 0=0$

ES Data la curva γ rappresentata parametricamente da

$$\gamma: \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

scrivere l'equazione del

1. cilindro con generatrici parallele all'asse x e direttrice γ
2. cilindro con generatrici con la direzione del vettore $\underline{v}\,(0,1,2)$ e direttrice γ
3. cono con vertice nell'origine $O(0,0,0)$ e direttrice γ.

Le superfici qui descritte sono quadriche?

$[\,y^3=x^2, \; z=x^3+2(y-x^2), \; xz=y^2\,]$

Una **SUPERFICIE DI ROTAZIONE** è ottenuta dalla rotazione

di una curva (detta GENERATRICE) attorno ad una retta fissa (detto ASSE DI ROTAZIONE).
Le sezioni della superficie di rotazione con piani contenenti l'asse sono dette MERIDIANI. Tutti i meridiani sono tra loro uguali e ciascuno di essi può essere considerato generatrice della superficie.
Qual è l'eq. di una superficie di rotazione?
Preso un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sulla generatrice, consideriamo il piano per P ortogonale all'asse di rotazione (piano di rotazione).
Il punto P, nella rotazione, descrive una circonferenza sul piano di rotazione. Questa circonferenza può essere descritta come l'intersezione di una sfera con centro sull'asse di rotazione e il piano di rotazione. Eliminando i parametri, si ha l'equazione della superficie di rotazione.

ES Scrivere l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione attorno all'asse y della "cubica gobba" γ rappresentata da

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Il piano di rotazione del punto $P(t, t^2, t^3)$ è

$$\pi: \quad y - t^2 = 0$$

consideriamo ora una sfera con centro sull'asse di rotazione, per semplicità consideriamo come centro $O(0,0,0)$, e raggio $\overline{OP}$:

$$\mathcal{S}: \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (t-0)^2 + (t^2-0)^2 + (t^3-0)^2$$

Eliminando il parametro t dal sistema $\begin{cases} \pi \\ \mathcal{S} \end{cases}$ abbiamo l'eq. richiesta

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + t^4 + t^6 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = y + y^2 + y^3$$

$$\boxed{y^3 - x^2 - z^2 + y = 0}$$

ES Scrivere l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione di una retta attorno ad una retta (asse) sghemba; per esempio:

di una retta attorno ad una retta (asse) sghemba; per esempio:

asse di rotazione: asse z

generatrice: $x-1=y+z-1=0$

Scriviamo la generatrice in forma parametrica $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$.

Il piano di rotazione per il punto $P(1,1-t,t)$ è

$$\pi: \quad z=t$$

La sfera di centro O e raggio OP ha equazione

$$S: \quad x^2+y^2+z^2=1+(1-t)^2+t^2$$

Eliminando t da $\begin{cases} \pi \\ S \end{cases}$ si ha

$$\begin{cases} z=t \\ x^2+y^2+z^2=2t^2-2t+2 \end{cases} \qquad x^2+y^2+z^2=2z^2-2z+2$$

$$\boxed{x^2+y^2-z^2+2z-2=0}$$

Volendo evitare la forma parametrica della retta generatrice, consideriamo un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ della generatrice, il piano di rotazione $z = z_0$, la sfera di centro O e raggio OP

$$x^2+y^2+z^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2$$

Eliminando x_0, y_0, z_0 da

$$\begin{cases} z = z_0 & \leftarrow \text{piano di rotazione} \\ x^2+y^2+z^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2 & \leftarrow \text{sfera} \\ x_0 - 1 = 0 & \\ y_0 + z_0 - 1 = 0 & \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}\right\} \leftarrow \text{generatrice}$$

otteniamo l'eq. cercata

$$\begin{cases} z_0 = z \\ x_0 = 1 \\ y_0 = 1 - z \\ x^2+y^2+z^2 = 1^2+(1-z)^2+z^2 \end{cases}$$

$$\boxed{x^2+y^2-z^2+2z-2=0}$$

$x^2+y^2+z^2 = 1^2+(1-z)^2+z^2$

CASO PARTICOLARE E IMPORTANTE:

se l'asse di rotazione è uno degli assi coordinati e la generatrice appartiene a un piano coordinato, l'equazione della superficie di rotazione è particolarmente semplice.

Sia, per esempio, l'asse z l'asse di rotazione della curva γ sul piano xz

$$\gamma: \begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

La superficie di rotazione ha equazione $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

Infatti, detto $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto di γ, dobbiamo eliminare x_0, y_0, z_0 dal sistema

$$\begin{cases} z=z_0 \\ x^2+y^2+z^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2 \\ F(x_0,z_0)=0 \\ y_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

e abbiamo
$$\begin{cases} z_0 = z \\ y_0 = 0 \\ x^2+y^2 = x_0^2 \\ F(x_0, z_0) = 0 \end{cases}$$
quindi $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$

ES Data l'ellisse $\mathcal{E}: \begin{cases} y^2+2z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ sul piano yz, scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando $\mathcal{E}$ attorno all'asse z

$$\boxed{x^2+y^2+2z^2=1}$$

ES Data la parabola $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ sul piano xz, scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la parabola attorno all'asse z

$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

2. SUPERFICI DEL SECONDO ORDINE

Una **SUPERFICIE QUADRICA** o **QUADRICA** è il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione algebrica di secondo grado in x, y, z a coefficienti reali, quindi $F(x,y,z) = 0$ con:

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z$$

$+ a_{44}$

Indicata con A la matrice dei coefficienti di F, possiamo scrivere:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$F(x,y,z) = (x,y,z,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anche per le quadriche, metteremo in evidenza i coefficienti dei termini quadratici chiamando B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e quindi $A = \left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}_T & a_{44} \end{array}\right]$ dove $\underline{c} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$

IL PIANO TANGENTE

IL PIANO TANGENTE

Una retta interseca una quadrica in due punti (perché?)
Se i punti di intersezione sono reali e distinti, diciamo la retta **SECANTE**
se i punti di intersezione sono reali e coincidenti, diciamo la retta **TANGENTE**
se i punti di intersezione sono immaginari coniugati, diciamo la retta **ESTERNA**
Fissato un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ della quadrica, il luogo delle tangenti per P è dato da

$$(x_0,y_0,z_0,1)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0$$

Se l'equazione non è banale (cioè se $(x_0,y_0,z_0,1)A\neq\underline{0}$) allora il luogo è un piano, altrimenti (cioè se $(x_0,y_0,z_0,1)A=\underline{0}$) allora tutte le rette per P intersecano la quadrica in due punti coincidenti in P.
Diciamo che il punto P della quadrica è **SEMPLICE** quando le tangenti formano un piano, mentre diciamo che P è **DOPPIO** nell'altro caso.
Si può provare il seguente

TEOREMA I punti doppi delle quadriche sono caratterizzati da

$$(x_0,y_0,z_0,1)\,A=(0,0,0,0)$$

$$(x_P, y_P, z_P, 1) A = (0,0,0,0)$$

Se P è un punto semplice, allora il piano tangente ha equazione

$$(x_P, y_P, z_P, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Includendo nel nostro studio anche i "punti all'infinito" abbiamo i seguenti casi:

* $rkA = 4$, cioè $\det A \neq 0$
  La quadrica non ha punti doppi e si dice NON SPECIALIZZATA
* $rkA = 3$
  La quadrica ha un solo punto doppio. Tutte le rette passanti per il punto doppio e per un secondo punto della quadrica, sono (completamente) contenute nella quadrica. Abbiamo dunque un cono che ha per vertice il punto doppio se questo è "al finito", oppure un cilindro se il punto doppio è all'infinito. In questo caso diciamo che la quadrica è SPECIALIZZATA

UNA VOLTA.

* $rkA=2$

La quadrica ha una retta di punti doppi. Tutte le rette congiungenti un punto doppio con un punto semplice sono contenute nella quadrica. La quadrica è quindi **spezzata in piani distinti** che si intersecano sulla retta di punti doppi se questa è "al finito" (e ha equazione $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\underline{0}$) / due piani sono paralleli se la retta di punti doppi è "all'infinito". I due piani possono essere immaginari coniugati. Quando $rkA=2$, la quadrica è anche detta **SPECIALIZZATA DUE VOLTE**.

* $rkA=1$

La quadrica si dice **SPECIALIZZATA TRE VOLTE** e si spezza in un solo piano di punti doppi, contato due volte.

NATURA DEI PUNTI

Un piano taglia una quadrica secondo una conica,
a meno che la quadrica sia spezzata ed il piano ne sia una componente.
Si dimostra il seguente

TEOREMA Per una quadrica non spezzata, un piano che non passi per l'eventuale punto doppio interseca la quadrica secondo una conica degenere se e solo se è tangente in un punto semplice.

Un punto semplice P di una quadrica non spezza si dice

* **ELLITTICO** quando il piano tangente in P taglia la quadrica in una conica spezzata in due rette immaginarie coniugate
* **PARABOLICO** quando il piano tangente in P taglia la quadrica in una conica spezzata in due rette reali COINCIDENTI
* **IPERBOLICO** quando il piano tangente in P taglia la quadrica in una conica spezzata in due rette reali distinte.

Si dimostra infine che:

TEOREMA I punti semplici di una quadrica non spezzata hanno tutti la stessa natura.

tutti la stessa natura.