Analisi matematica 2		25 luglio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + xy$$

nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$g(x,y,z) = xy + z^2$$

nell'insieme $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

2.

a) Definire la nozione di punto di equilibrio (o punto critico) di un sistema autonomo. Trovare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = xy - x \\ y' = y + xy^2 \end{cases}$$

e studiarne la natura con il metodo di linearizzazione.

b) Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 1 + e^{-2t}$$

3. Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

nel cilindro

$$\Omega := \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1/2\}$$

Dimostrare che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e trovare un potenziale.

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)\, x^n \quad ; \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+n^2}\,(x-1/2)^n$$

Calcolare la somma della serie a) in ogni punto dell'intervallo di convergenza (*Suggerimento:* calcolare una primitiva integrando termine a termine).

ii) Determinare lo sviluppo di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$$

senza calcolare integrali. Usare lo sviluppo trovato per calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$.

SOLUZIONI

1.

a) Derivate parziali:
$$f_x(x,y) = -2x + y; \quad f_y(x,y) = x - 2y$$
I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente
$$\nabla f(x,y) = (-2x+y)\,\mathbf{i} + (x-2y)\,\mathbf{j}$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$
troviamo l'unica soluzione $(0,0)$. Calcolando le derivate seconde:
$$f_{xx}(x,y) = -2; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1; \quad f_{yy}(x,y) = -2$$
e valutando la matrice Hessiana in $(0,0)$ si deduce che si tratta di un punto di massimo con $f(0,0) = 1$. Sulla frontiera dell'insieme D si studia la funzione composta
$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\,\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$
che ha due punti di massimo per $\theta = \pi/4$ e $\theta = 5\pi/4$ e due punti di minimo per $\theta = 3\pi/4$ e $\theta = 7\pi/4$. Abbiamo quindi i punti $P_1(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_2(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $P_3(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_4(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, con $f(P_1) = f(P_2) = 1/2$ e $f(P_3) = f(P_4) = -1/2$.
In conclusione, l'origine è il punto di massimo assoluto e i punti P_3, P_4, sono di minimo assoluto della funzione in D.

b) L'insieme E è la palla di raggio 1 centrata nell'origine; cerchiamo i punti critici di g *all'interno* di E. Vettore gradiente:
$$\nabla g(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$
Matrice Hessiana:
$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Annullando il gradiente, si trova l'unico punto critico $(0,0,0)$. La matrice Hessiana ha autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; dunque, l'origine è un colle.
Gli estremi sulla superficie della palla si possono cercare tra i punti critici vincolati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; in alternativa, osserviamo che essendo
$$g(x,y,-z) = g(x,y,z)$$
possiamo limitarci a studiare gli estremi di g sulla superficie cartesiana
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad (x,y) \in D\,.$$
Abbiamo allora
$$g(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = xy + 1 - x^2 - y^2 = f(x,y)\,, \qquad (x,y) \in D\,.$$
Utilizzando i risultati del punto a) si conclude che la funzione g (sulla palla) assume il valore massimo nei punti $(0,0,\pm 1)$ con $g(0,0,\pm 1) = 1$ e valore minimo nei punti $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, con $g(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = g(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) = -1/2$.

2.

a) I punti di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ y + xy^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(0,0)$ e $(-1,1)$. Per scrivere il sistema linearizzato si calcola la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ y^2 & 1+2xy \end{pmatrix}$$

Nei punti critici:

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J}(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = v \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in $(1,-1)$ è

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u - v \end{cases}$$

Nel primo caso, la matrice dei coefficienti ha gli autovalori ± 1, quindi l'origine è un *colle* per il sistema linearizzato; nel secondo caso, gli autovalori sono $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, per cui l'origine è un *fuoco stabile* per il sistema linearizzato. In base alla teoria, anche per il sistema non lineare il punto $(0,0)$ è instabile, mentre il punto $(1,-1)$ è un fuoco stabile.

b) Equazione omogenea associata:

$$z'' + 4z = 0$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Data la forma del termine noto dell'equazione completa, si può cercare una soluzione particolare del tipo

$$\psi(t) = A + Be^{-2t}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = \frac{1}{8}.$$

Integrale generale:

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2t}$$

3. La superfce del cilindro è l'unione di 3 superfici regolari: la *superfice laterale*

$$\Sigma \equiv \{(x,y,z)\,|\,x^2+z^2=1, \quad 0\le y\le 1/2\}$$

e le due basi

$$D_1 \equiv \{(x,0,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\}, \qquad D_2 \equiv \{(x,1/2,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\}$$

Usando la parametrizzazione

$$x=\cos u, \quad y=v, \quad z=\sin u, \qquad 0\le u<2\pi, \quad 0\le v\le 1/2,$$

la normale esterna *sulla superfice laterale* Σ è

$$\mathbf{n}_e = \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{k}$$

Su Σ abbiamo

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e = 2\sin u\cos u\,, \qquad dS = dudv\,,$$

per cui si trova subito

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} 2\sin u\cos u\,dudv = 0$$

Sulle due basi del cilindro:

$$\mathbf{n}_e = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e = 0, \quad \text{su } D_1$$

$$\mathbf{n}_e = \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e = 1, \quad \text{su } D_2$$

Dunque:

$$\int\int_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = 0;$$

$$\int\int_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\int_{x^2+z^2\le 1} dxdz = \pi;$$

In definitiva:

$$\int\int_{\partial E} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\int_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS + \int\int_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS + \int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = 0+\pi+0=\pi$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_x(z) + \partial_y(2y) + \partial_z(x) = 2$$

Abbiamo allora

$$\int\int\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \int\int\int_\Omega 2\, dxdydz =$$

$$= 2\int\int\int_\Omega dxdydz = 2|\Omega| = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Poiché $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3$, il campo è conservativo. Il potenziale che si annulla nell'origine è

$$U(x, y, z) = xz + y^2$$

4.

i) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie a) ha raggio di convergenza $R = 1$, per cui converge (assolutamente) per $-1 < x < 1$. Agli estremi dell'intervallo la serie non converge perchè il termine generale non tende a zero.
La serie b) ha centro in $x_0 = 1/2$ e raggio di convergenza $R = 1/2$, dunque converge assolutamente nell'intervallo $(0, 1)$. Agli estremi dell'intervallo il valore assoluto del termine generale è uguale a $1/(n^2 + 1)$; essendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty,$$

la serie di potenze converge assolutamente nell'intervallo chiuso $[0, 1]$.
Detta f la somma della serie a), abbiamo per ogni $x \in (-1, 1)$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{x}{1+x}\,.$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\frac{x}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

ii) La funzione è periodica di periodo 2π. Applicando note identità trigonometriche, possiamo scrivere

$$f(x) = 1 + \cos(x) + \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

ovvero

$$f(x) = \frac{3}{2} + \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Dunque, i coefficienti diversi da zero della serie di Fourier associata a f sono

$$a_0 = 3; \qquad a_1 = 1; \qquad a_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Dalle relazioni di ortogonalità, si ricava:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi(9/2 + 1 + 1/4) = \frac{23}{4}\pi\,.$$