Luca Mauri Enrico Schlesinger

Esercizi di algebra lineare e geometria

Con sito web

ZANICHELLI

Rilettura critica: Beatrice Orlandini

Impaginazione e disegni: Compomat, Configni (RI)

Copertina:
– *Progetto grafico*: Miguel Sal & C., Bologna
– *Realizzazione*: CL'EM, Milano
– *Immagine di copertina*: Sony Center, Berlino (Particolare) © Isabella Nenci, 2012.

Prima edizione: gennaio 2013

Ristampa

5 4 3 2 1 2013 2014 2015 2016 2017

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

Zanichelli editore S.p.A.
piazza Castello 4
20121 Milano
e-mail: linea_universitaria@zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it
fax 0272025050

Stampa: Tipografia Babina
Via Aldo Moro 18, 40068 San Lazzaro di Savena (BO)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Ad Ayana e Carina

Indice generale

Prefazione

Abbiamo raccolto in questo volume le soluzioni dettagliate di tutti gli esercizi del testo *Algebra lineare e geometria* (Zanichelli, 2011) scritto da Enrico Schlesinger. Speriamo così di rispondere in modo adeguato alle numerose richieste che ci sono giunte in tal senso dagli studenti.

Nell'utilizzare questo eserciziario, come ogni altro, è bene che lo studente tenga presente due principi generali. Il primo è che un esercizio è tanto più utile quanto più è svolto personalmente; è di solito tempo sprecato svolgere un esercizio leggendone contestualmente la soluzione; questo è particolarmente vero per i molti esercizi che sono una semplice verifica di comprensione del testo, o che richiedono un'applicazione automatica di un procedimento. Certo, gli esercizi del volume hanno disparati livelli di difficoltà, e un'eccezione al principio generale è fornita dagli esercizi più complessi, per la risoluzione dei quali è normale non sapere da dove cominciare; per tali esercizi è imperativo avere una soluzione a disposizione, tanto più se, come spesso accade, si tratta di complementi di teoria non trattati in dettaglio nel testo solo per motivi di spazio. Il secondo principio generale è che raramente un esercizio ammette un'unica soluzione come raramente esiste un'unica strada per andare da una città a un'altra; di norma la soluzione da noi proposta è solo una delle tante possibili (in qualche caso ne abbiamo proposta più di una) e il fatto che lo studente ne abbia trovata un'altra non significa necessariamente che abbia sbagliato.

Abbiamo incluso qualche esercizio non presente nel testo di teoria, fornendone il più delle volte il risultato o uno schema di risoluzione; questa parte del volume sarà integrata da un sito web sul quale contiamo di rendere disponibili ulteriori esercizi.

Del testo abbiamo mantenuto la notazione, la terminologia, la suddivisione in capitoli e la numerazione degli esercizi. In alcuni casi abbiamo modificato il testo originale dell'esercizio per correggere errori di stampa ed errori veri e propri, o per rendere l'esercizio più significativo. I riferimenti a teoremi o ad altri esercizi si intendono all'interno dello stesso capitolo o del capitolo corrispondente del testo, a meno che non sia esplicitamente indicato un capitolo diverso.

Luca Mauri, Enrico Schlesinger

1 Spazio euclideo e vettori

1. RICHIAMI DI GEOMETRIA EUCLIDEA NELLO SPAZIO

1 Mostrare che per un punto P e una retta $\mathbf{r}$ non contenente P passa uno e un solo piano.

Soluzione. Dal momento che ogni retta contiene infiniti punti, possiamo scegliere due punti distinti $A, B \in \mathbf{r}$. Per il terzo assioma di incidenza a pagina 4 del testo, un piano $\mathbf{H}$ contiene la retta $\mathbf{r}$ se e soltanto se contiene i punti A e B. Quindi il problema si riduce a quello di dimostrare che esiste un unico piano $\mathbf{H}$ passante per A, B e P. Ma questi tre punti non sono allineati perché $P \notin \mathbf{r}$ e per tre punti non allineati passa uno e un solo piano per il secondo assioma di incidenza.

2 Una retta $\mathbf{r}$ e un piano $\mathbf{H}$ si dicono paralleli se non hanno punti in comune oppure se $\mathbf{r}$ è contenuta in $\mathbf{H}$. Mostrare che:

1. una retta $\mathbf{r}$ e un piano $\mathbf{H}$ sono paralleli se e solo se esiste una retta $\mathbf{s}$ che è contenuta in $\mathbf{H}$ e che è parallela a $\mathbf{r}$;
2. una retta $\mathbf{r}$ e un piano $\mathbf{H}$ non sono paralleli se e solo se hanno esattamente un punto in comune.

Soluzione. 1. Supponiamo che sia $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$. Se $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{H}$, basta prendere $\mathbf{s} = \mathbf{r}$. Se invece $\mathbf{r}$ non ha punti comuni con $\mathbf{H}$, scegliamo un punto $P \in \mathbf{H}$. Per l'esercizio 1 esiste un unico piano $\mathbf{K}$ passante per $\mathbf{r}$ e P. La retta $\mathbf{s} = \mathbf{H} \cap \mathbf{K}$ non ha punti comuni con $\mathbf{r}$ perché è contenuta in $\mathbf{H}$ ed è complanare a $\mathbf{r}$ perché è contenuta in $\mathbf{K}$. Dunque $\mathbf{r} \parallel \mathbf{s}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{r} \not\subseteq \mathbf{H}$ e che esista una retta $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{H}$ parallela a $\mathbf{r}$. Le rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono parallele ma distinte, dunque esiste un piano $\mathbf{K}$ che le contiene entrambe. Dal quarto assioma di incidenza abbiamo che $\mathbf{H} \cap \mathbf{K} = \mathbf{s}$ e dunque $\mathbf{H} \cap \mathbf{r} = \mathbf{H} \cap (\mathbf{K} \cap \mathbf{r}) = (\mathbf{H} \cap \mathbf{K}) \cap \mathbf{r} = \mathbf{s} \cap \mathbf{r} = \varnothing$.

2. Questa è una conseguenza immediata del terzo assioma di incidenza: dati una retta $\mathbf{r}$ e un piano $\mathbf{H}$, allora o $\mathbf{r}$ e $\mathbf{H}$ non hanno punti comuni, oppure ne hanno uno solo, oppure $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{H}$. Nel primo e e nel terzo caso $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$ per definizione. Quindi la seconda condizione caratterizza il non-parallelismo.

3 Due piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si dicono paralleli se non hanno punti in comune oppure coincidono. Mostrare che:

1. due piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono paralleli se e solo se l'insieme delle rette parallele a $\mathbf{H}_1$ coincide con l'insieme delle rette parallele a $\mathbf{H}_2$: intuitivamente, due piani sono paralleli se le direzioni contenute in $\mathbf{H}_1$ coincidono con quelle contenute in $\mathbf{H}_2$;
2. due piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ non sono paralleli se e solo se l'intersezione $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ è una retta.

Soluzione. 1. Supponiamo che $\mathbf{H}_1 \parallel \mathbf{H}_2$. Se $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$, è chiaro che ogni retta parallela a $\mathbf{H}_1$ è anche parallela a $\mathbf{H}_2$. Se $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \varnothing$ e $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}_1$, allora, per l'esercizio 2, esiste una retta $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{H}_1$ parallela a $\mathbf{r}$. Poiché $\mathbf{s} \cap \mathbf{H}_2 \subseteq \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \varnothing$, allora per definizione $\mathbf{s} \parallel \mathbf{H}_2$ e ancora per l'esercizio 2 esiste una retta $\mathbf{t} \subseteq \mathbf{H}_2$ parallela a $\mathbf{s}$. Ma la relazione di parallelismo è transitiva, dunque $\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}$ e di conseguenza $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}_2$ sempre per l'esercizio 2.

Viceversa, supponiamo che ogni retta parallela a $\mathbf{H}_1$ sia pure parallela a $\mathbf{H}_2$. Se $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ hanno in comune almeno un punto P, allora preso un qualunque punto $Q \neq P$ in $\mathbf{H}_1$, la retta PQ è parallela ad $\mathbf{H}_1$. Ma allora deve essere anche parallela ad $\mathbf{H}_2$ e poiché ha in comune con questo piano il punto P, deve essere contenuta in $\mathbf{H}_2$ per il terzo assioma di incidenza. Dunque $Q \in \mathbf{H}_2$. In conclusione, tutti i punti di $\mathbf{H}_1$ appartengono anche ad $\mathbf{H}_2$ e dunque i due piani coincidono per il quarto assioma di incidenza.

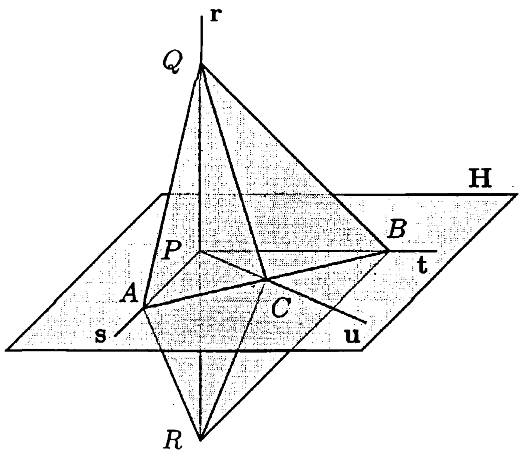
2. Dal quarto assioma di incidenza sappiamo che due piani possono essere disgiunti, avere una retta in comune oppure coincidere. Nel primo e terzo caso sono paralleli per definizione. Il secondo caso caratterizza dunque la condizione che non siano paralleli.

Si dice che una retta $\mathbf{r}$ e un piano $\mathbf{H}$ sono perpendicolari se $\mathbf{r}$ è perpendicolare a ogni retta contenuta nel piano $\mathbf{H}$. Mostrare che:

1. dati una retta $\mathbf{r}$ e un punto P, esiste un unico piano $\mathbf{H}$ passante per P e perpendicolare a $\mathbf{r}$; inoltre $\mathbf{H}$ è l'unione delle infinite rette che passano per P e che sono perpendicolari a $\mathbf{r}$;
2. dati un piano $\mathbf{H}$ e un punto P, esiste un'unica retta $\mathbf{r}$ passante per P e perpendicolare a $\mathbf{H}$;
3. mostrare che due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele; le rette perpendicolari a uno stesso piano hanno quindi un'unica direzione, che si dice direzione *normale* al piano. Mostrare che due piani sono paralleli se e soltanto se hanno la stessa direzione normale;
4. mostrare che un piano $\mathbf{H}$ e una retta $\mathbf{r}$ sono paralleli se e solo se la direzione normale al piano è perpendicolare alla retta $\mathbf{r}$.

Soluzione. 1. La definizione di ortogonalità fra rette è invariante per parallelismo; dunque, sostituendo $\mathbf{r}$ con la sua parallela per P se necessario, possiamo supporre che $P \in \mathbf{r}$. Mostriamo che esistono due rette distinte $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ passanti per P e perpendicolari a $\mathbf{r}$. Scelto un punto S non appartenente a $\mathbf{r}$, sia $\mathbf{H}_S$ il piano per S che contiene $\mathbf{r}$. Nel piano $\mathbf{H}_S$ esiste un'unica retta $\mathbf{s}$ passante per P e perpendicolare a $\mathbf{r}$. Per trovare la seconda retta $\mathbf{t}$, sostituiamo il punto S con un punto T che non appartenga al piano $\mathbf{H}_S$: nel piano $\mathbf{H}_T$ individuato da T e $\mathbf{r}$ sia $\mathbf{t}$ la retta passante per P e perpendicolare a $\mathbf{r}$. La retta $\mathbf{t}$ è distinta da $\mathbf{s}$ perché T appartiene al piano $\mathbf{H}_T$ per $\mathbf{r}$ e $\mathbf{t}$, mentre T non appartiene al piano $\mathbf{H}_S$ per $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Le rette $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ sono incidenti in P, dunque esiste un unico piano **H** che le contiene. Ma ogni piano perpendicolare a **r** deve contenere sia **s** sia **t**, dunque deve coincidere con **H**. Questo prova che, se il piano cercato esiste, allora è certamente unico. Occorre ancora dimostrare che **H** è effettivamente perpendicolare a **r** e cioè che ogni retta di **H** passante per P è perpendicolare a **r**.

Facciamo riferimento alla figura a lato. Sia **u** una retta di **H** passante per P e distinta da **s** e da **t**. Scegliamo due punti $A \in \mathbf{s}$ e $B \in \mathbf{t}$ *distinti da* P *in modo che* AB *non sia parallela a* **u** e chiamiamo C il punto in cui **u** interseca AB. Scegliamo due punti $Q, R \in \mathbf{r}$ da parti opposte di **H** in modo che i segmenti PQ e PR siano congruenti. Siccome il segmento AP è perpendicolare a QR e P è il punto medio di QR, $\triangle AQR$ è isoscele; in modo simile si prova che $\triangle BQR$ è isoscele. Ma allora $\triangle ABQ \equiv \triangle ABR$, da cui consegue che $\triangle ACQ \equiv \triangle ACR$. Ma allora $\triangle CQR$ è isoscele e la mediana PC è ortogonale alla base QR. Questo significa che **u** è perpendicolare a **r**.



Resta ancora da provare che ogni retta **w** passante per P e perpendicolare a **r** è contenuta in **H**. Sia **K** il piano generato da **r** e **w** e sia $\mathbf{z} = \mathbf{H} \cap \mathbf{K}$. Tutte le rette di **H** sono perpendicolari a **r**, dunque anche **z** lo è. Ma allora, nel piano **K**, **w** e **z** sono due perpendicolari per P alla stessa retta **r**. Dunque $\mathbf{w} = \mathbf{z} \subseteq \mathbf{H}$.

2. Siano P e Q due punti dello spazio. La corrispondenza che a una retta **r** passante per P associa la retta $\mathbf{r}_Q$ passante per Q e parallela a **r** è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle rette passanti per P e l'insieme delle rette passanti per Q; inoltre **r** è perpendicolare a un dato piano **H** se e solo se $\mathbf{r}_Q$ è perpendicolare a **H**. Basta perciò dimostrare l'affermazione per un solo punto P dello spazio: possiamo quindi assumere che $P \in \mathbf{H}$. Siano **s** e **t** due rette distinte di **H** passanti per P. Per quanto dimostrato al punto 1, esistono piani **K** e **L** passanti per P e perpendicolari rispettivamente a **s** e **t**. L'intersezione $\mathbf{r} = \mathbf{K} \cap \mathbf{L}$ è allora una retta perpendicolare sia a **s** che a **t** e dunque ad **H**. Quanto all'unicità, si osserva che ogni retta per P e perpendicolare a **H** deve essere ortogonale sia a **s** che a **t**, quindi deve stare in $\mathbf{K} \cap \mathbf{L}$ e cioè deve coincidere con **r**.

3. Supponiamo che **r** e **s** siano perpendicolari ad **H**. Siano $P = \mathbf{H} \cap \mathbf{r}$, $Q = \mathbf{H} \cap \mathbf{s}$ e sia $\mathbf{r}'$ la parallela a **r** per Q. Il fatto che la definizione di perpendicolarità fra rette sia invariante per parallelismo implica che $\mathbf{r}'$ è perpendicolare a **H** in Q. Per l'unicità della perpendicolare dimostrata al punto 2, deve allora essere $\mathbf{s} = \mathbf{r}'$ e dunque $\mathbf{s} \parallel \mathbf{r}$.

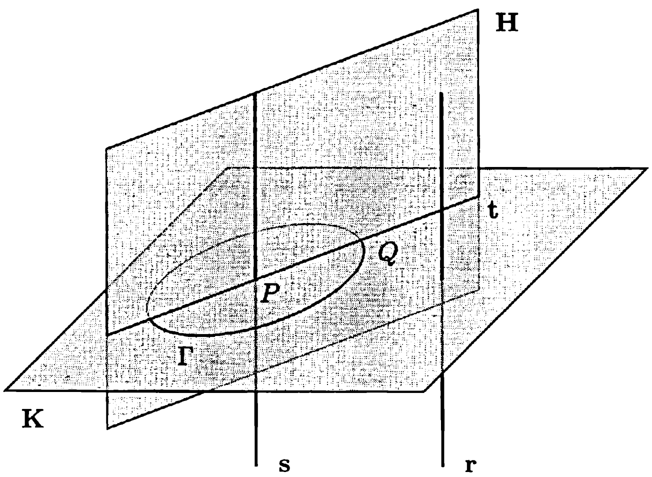
Supponiamo ora che i piani **H** e **K** siano paralleli e che **r** sia una retta perpendicolare ad **H**. Siano $P = \mathbf{H} \cap \mathbf{r}$ e $Q = \mathbf{K} \cap \mathbf{r}$. Se **s** è una retta di **K** per Q, consideriamo il piano **L** generato da **s** e da **r** e poniamo $\mathbf{t} = \mathbf{L} \cap \mathbf{H}$. Allora $\mathbf{t} \subseteq \mathbf{H}$ è perpendicolare a **r** e parallela a **s**. Dunque $\mathbf{s} \perp \mathbf{r}$ e $\mathbf{K} \perp \mathbf{r}$. Questo prova che piani paralleli hanno la stessa direzione normale.

Viceversa, supponiamo che i piani **H** e **K** abbiano la stessa direzione normale e un punto P in comune. Sia **r** la retta perpendicolare ad entrambi i piani passante per P. Per il punto 1 deve essere $\mathbf{H} = \mathbf{K}$.

4. Sia $\mathbf{t} \perp \mathbf{H}$. Se $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$, allora per l'esercizio 2, deve esistere $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{H}$ parallela a $\mathbf{r}$. Per definizione di perpendicolarità $\mathbf{t} \perp \mathbf{s}$ e dunque $\mathbf{t} \perp \mathbf{r}$ per l'invarianza della perpendicolarità rispetto al parallelismo. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{r}$ abbia in comune un punto P con $\mathbf{H}$. Sia $\mathbf{t}$ la perpendicolare a $\mathbf{H}$ per P e sia $\mathbf{r} \perp \mathbf{t}$. Poiché $\mathbf{r}$ passa per P e $\mathbf{r} \perp \mathbf{t}$, deve essere $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{H}$. Dunque se $\mathbf{r} \perp \mathbf{t}$, allora $\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$.

5 Dati una retta $\mathbf{r}$ e un punto P, esistono infiniti piani per P paralleli a $\mathbf{r}$: si tratta dei piani che contengono la retta $\mathbf{s}$ per P che è parallela a $\mathbf{r}$. Per parametrizzare tali piani, si fissi nel piano per P perpendicolare a $\mathbf{s}$ la circonferenza Γ con centro in P e raggio 1. A ogni punto Q della circonferenza si associ il piano $\mathbf{H}$ che contiene Q e la retta $\mathbf{s}$. Si mostri che in questo modo si ottiene una corrispondenza 2 a 1 fra la circonferenza Γ e l'insieme dei piani per P paralleli a $\mathbf{r}$.

Soluzione. Ogni piano $\mathbf{H}$ che contiene $\mathbf{s}$ passa per P ed è parallelo a $\mathbf{r}$ (esercizio 2, punto 1). Viceversa, se $\mathbf{H}$ è parallelo a $\mathbf{r}$ allora è parallelo anche a $\mathbf{s}$ (esercizio 2 punto 1 e transitività del parallelismo); ma se $P \in \mathbf{H}$, allora $P \in \mathbf{s} \cap \mathbf{H}$ e dunque $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{H}$. Quindi l'insieme dei piani passanti per P e paralleli a $\mathbf{r}$ coincide con l'insieme dei piani passanti per $\mathbf{s}$; indichiamo questo insieme con $\mathcal{F}$.



Il testo dell'esercizio descrive esplicitamente la costruzione di una funzione $f : \Gamma \to \mathcal{F}$; se $Q \in \Gamma$, allora $Q \notin \mathbf{s}$ ed esiste un unico piano $\mathbf{H}$ che contiene $\mathbf{s}$ e Q (esercizio 1); in particolare $\mathbf{H} \in \mathcal{F}$ e possiamo porre $f(Q) = \mathbf{H}$. Piuttosto che esaminare f direttamente, ne costruiamo una fattorizzazione.

Indichiamo con $\mathbf{K}$ il piano passante per P e perpendicolare a $\mathbf{s}$ e con $\mathcal{G}$ l'insieme delle rette di $\mathbf{K}$ passanti per P. Definiamo una funzione $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ con la formula $h(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \cap \mathbf{K}$. La formula ha senso perché i piani $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$ non hanno la stessa direzione normale, dunque non sono paralleli (esercizio 4) e si intersecano in una retta $\mathbf{t}$ (quarto assioma di incidenza). D'altra parte $P \in \mathbf{H} \cap \mathbf{K} = \mathbf{t}$ e dunque $\mathbf{t} \in \mathcal{G}$. Mostriamo che h è biettiva. Se $h(\mathbf{H}) = \mathbf{t} = h(\mathbf{H}')$ allora $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$ hanno in comune sia $\mathbf{t}$ che $\mathbf{s}$; queste rette sono distinte, dunque $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$ (quarto assioma di incidenza) e h è iniettiva. Se $\mathbf{t} \in \mathcal{G}$, allora $\mathbf{t} \neq \mathbf{s}$; scelto un punto $Q \in \mathbf{t} \setminus \mathbf{s}$ esiste un unico piano $\mathbf{H}$ per Q e $\mathbf{s}$; ma $h(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \cap \mathbf{K}$ ha in comune con $\mathbf{t}$ sia P che Q, dunque $h(\mathbf{H}) = \mathbf{t}$ e h è suriettiva. Di conseguenza h è biettiva e ci permette di identificare $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$; quindi, piuttosto che studiare la funzione $f : \Gamma \to \mathcal{F}$, possiamo studiare la funzione $g = h \circ f : \Gamma \to \mathcal{G}$. Il vantaggio di questa prospettiva è che abbiamo tradotto un problema di geometria dello spazio in un problema di geometria piana relativa a $\mathbf{K}$.

Esaminiamo g in maggiore dettaglio. Se $Q \in \Gamma$ e $\mathbf{H}$ è il piano passante per $\mathbf{s}$ e Q, allora $\mathbf{H} \cap \mathbf{K}$ è la retta $\mathbf{t}$ passante per P e per Q; dunque $g(Q) = \mathbf{t}$. La funzione g è certamente suriettiva, perché data una retta $\mathbf{t}$ di $\mathbf{K}$ passante per P, questa interseca Γ in due punti distinti Q e Q' simmetrici rispetto al centro P; per definizione, $g(Q) = \mathbf{t} = g(Q')$. Questo stesso argomento mostra tuttavia che g non è iniettiva.

Per rendere iniettiva g occorre introdurre una relazione di equivalenza R e identificare punti opposti di Γ. La g induce allora una funzione biettiva $\Gamma/R \to \mathcal{G}$ dall'insieme quoziente. I punti di Γ/R sono infiniti, dunque $\mathcal{G}$ è infinito e quindi anche $\mathcal{F}$ lo è.

6 Dati un piano $\mathbf{H}$ e un punto P, si mostri che esistono infinite rette per P parallele a $\mathbf{H}$, e l'unione di tali rette è l'unico piano $\mathbf{K}$ passante per P che sia parallelo a $\mathbf{H}$. Anche queste rette possono essere messe in corrispondenza coi punti di una circonferenza: se Γ nel piano $\mathbf{K}$ è la circonferenza di centro P e raggio 1, le rette per P parallele a $\mathbf{H}$ sono le rette PQ che congiungono P a un punto Q della circonferenza Γ.

Soluzione. Dai punti 3 e 1 dell'esercizio 4 sappiamo che esiste un unico piano $\mathbf{K}$ passante per P e parallelo ad $\mathbf{H}$: se infatti $\mathbf{r}$ è una retta perpendicolare ad $\mathbf{H}$, allora $\mathbf{K}$ è l'unico piano per P perpendicolare a $\mathbf{r}$. Dal punto 1 dello stesso esercizio sappiamo che $\mathbf{K}$ è l'insieme $\mathcal{G}$ delle rette passanti per P e perpendicolari a $\mathbf{r}$ e dal punto 4 sappiamo che $\mathcal{G}$ coincide con l'insieme delle rette per P parallele ad $\mathbf{H}$. Per provare che $\mathcal{G}$ è infinito basta osservare che $\mathcal{G}$ è l'insieme delle rette di $\mathbf{K}$ che passano per P; possiamo allora utilizzare l'ultima parte della dimostrazione dell'esercizio 5.

7 Dimostrare che la relazione di parallelismo per le rette dello spazio è una relazione di equivalenza

Soluzione. Il punto è mostrare la proprietà transitiva: se $\mathbf{r}$ è parallela a $\mathbf{s}$, e $\mathbf{s}$ è parallela a $\mathbf{l}$, allora $\mathbf{r}$ è parallela a $\mathbf{l}$. Supponiamo che $\mathbf{r} \parallel \mathbf{s}$ e $\mathbf{s} \parallel \mathbf{l}$: dobbiamo mostrare $\mathbf{r} \parallel \mathbf{l}$. Questo è ovvio se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$. Quindi possiamo supporre che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ siano distinte, così che esiste un unico piano $\mathbf{H}$ che contiene $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, e $\mathbf{r} \cap \mathbf{s} = \varnothing$. Primo caso: la retta $\mathbf{l}$ è contenuta nel piano $\mathbf{H}$. Allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{l}$ sono complanari, e occorre mostrare che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{l}$ sono uguali oppure non hanno punti in comune. Se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{l}$ si intersecano in un punto P, allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{l}$ sono due rette passanti per P e parallele a $\mathbf{s}$, e per l'assioma delle parallele si ha $\mathbf{r} = \mathbf{l}$. Quindi $\mathbf{r}$ e $\mathbf{l}$ o coincidono o non hanno alcun punto in comune, il che significa che sono parallele. Secondo caso: la retta $\mathbf{l}$ non è contenuta nel piano $\mathbf{H}$, quindi esiste un punto P di $\mathbf{l}$ che non appartiene a $\mathbf{H}$. Siano $\mathbf{H_r}$ e $\mathbf{H_s}$ passanti per P che contengono rispettivamente $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Si noti che $\mathbf{r} = \mathbf{H_r} \cap \mathbf{H}$ perché $\mathbf{H_r}$ e $\mathbf{H}$ sono due piani distinti contenenti $\mathbf{r}$, e analogamente $\mathbf{s} = \mathbf{H_s} \cap \mathbf{H}$. Il punto P appartiene ai due piani $\mathbf{H_r}$ e $\mathbf{H_s}$, che perciò si incontrano lungo una retta $\mathbf{l}' = \mathbf{H_r} \cap \mathbf{H_s}$. La retta $\mathbf{l}'$ non incontra il piano $\mathbf{H}$ perché

$$\mathbf{l}' \cap \mathbf{H} = \mathbf{H_r} \cap \mathbf{H}_s \cap \mathbf{H} = (\mathbf{H_r} \cap \mathbf{H}) \cap (\mathbf{H_s} \cap \mathbf{H}) = \mathbf{r} \cap \mathbf{s} = \varnothing.$$

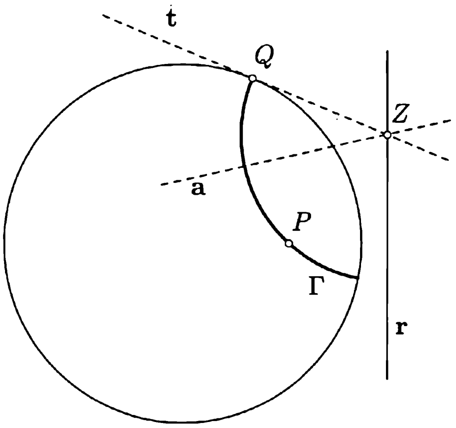
In particolare, $\mathbf{l}'$ non ha punti in comune con $\mathbf{r}$ che è contenuta in $\mathbf{H}$. Ora $\mathbf{l}'$ è complanare a $\mathbf{r}$, perché entrambe le rette giacciono in $\mathbf{H_r}$. Siccome $\mathbf{l}'$ e $\mathbf{r}$ non hanno punti in comune e sono complanari, $\mathbf{l}' \parallel \mathbf{r}$. Lo stesso ragionamento mostra che $\mathbf{l}' \parallel \mathbf{s}$. Quindi $\mathbf{l}'$ passa per P ed è parallela a $\mathbf{s}$. Ma anche la retta $\mathbf{l}$ passa per P ed è parallela a $\mathbf{s}$. Per l'assioma delle parallele $\mathbf{l}' = \mathbf{l}$, e allora $\mathbf{l}' \parallel \mathbf{r}$ significa $\mathbf{l} \parallel \mathbf{r}$ come volevasi dimostrare.

8 Questo esercizio descrive brevemente il modello di Poincaré per il *piano iperbolico.* In questo modello i *punti* sono i punti di un cerchio C nel piano euclideo, esclusi quelli del bordo. Le *rette* sono i diametri del cerchio e gli archi di circonferenza in C che intersecano il bordo di C perpendicolarmente. Si dimostra che, con questa

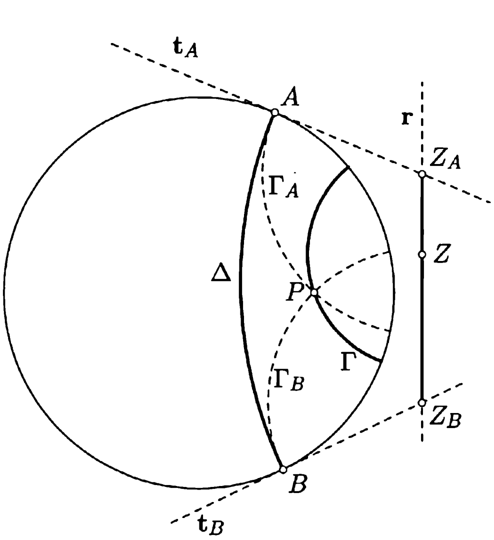
definizione di punti e rette, i primi quattro assiomi euclidei sono soddisfatti (per esempio per due punti passa una e una sola retta). Mostrare che invece l'assioma delle parallele non vale: per un punto passano infinite rette parallele a una retta data.

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{H}$ il disco aperto che fornisce il modello di Poincaré per il piano iperbolico e con $\partial\mathbf{H}$ il bordo del disco. Possiamo pensare ai punti di $\partial\mathbf{H}$ come a punti all'infinito del modello. Chiameremo *linee* le rette di $\mathbf{H}$; dal punto di vista euclideo una linea è allora o una circonferenza perpendicolare a $\partial\mathbf{H}$ oppure un diametro di $\mathbf{H}$, che possiamo considerare come una circonferenza di raggio infinito.

L'idea è illustrata dalla seconda figura qui sotto: vi sono raffigurate tre linee Γ, Γ_A, Γ_B per il punto P, tutte quante parallele alla linea Δ.



Per comprendere il comportamento delle linee parallele in $\mathbf{H}$ cominciamo a descrivere come ottenere e parametrizzare le linee di $\mathbf{H}$ passanti per un punto fissato P. Dato un punto Q su $\partial\mathbf{H}$ esiste un'unica linea Γ di $\mathbf{H}$ che passa per P e Q. Infatti, poiché Γ deve essere perpendicolare a $\partial\mathbf{H}$ e poiché il raggio di una circonferenza passante per un punto è perpendicolare alla tangente in quel punto, il centro Z di Γ deve appartenere alla tangente $\mathbf{t}$ a $\partial\mathbf{H}$ in Q. D'altra parte il segmento PQ deve essere una corda di Γ e dunque Z deve appartenere all'asse $\mathbf{a}$ del segmento PQ; dunque deve essere $Z = \mathbf{t} \cap \mathbf{a}$. Una volta determinato Z, la linea Γ è allora l'arco di circonferenza con centro Z passante per P e interno ad $\mathbf{H}$, che è ortogonale a $\partial\mathbf{H}$ anche nel secondo punto di intersezione. Si può dimostrare che al variare di $Q \in \partial\mathbf{H}$ il centro Z delle linee per P descrive una retta $\mathbf{r}$. Questa retta parametrizza le linee di $\mathbf{H}$ passanti per P nel senso che la costruzione che abbiamo descritto sopra definisce una funzione biettiva fra i punti di $\mathbf{r}$ e le linee di $\mathbf{H}$ passanti per P. In particolare, esistono infinite linee passanti per P.



Fissiamo ora un punto P e una linea Δ di $\mathbf{H}$ non passante per P. Descriviamo qualitativamente come determinare le parallele a Δ passanti per P. Indichiamo con A e B le intersezioni di Δ con $\partial\mathbf{H}$. Esistono due parallele limite a Δ passanti per P: le linee Γ_A e Γ_B passanti per P che intersecano $\partial\mathbf{H}$ in A e B appunto. I loro centri sono i punti Z_A e Z_B di $\mathbf{r}$ che stanno sulle tangenti a $\partial\mathbf{H}$ in A e B. I punti Z_A e Z_B determinano il segmento di $\mathbf{r}$ su cui stanno i centri delle parallele cercate: per ogni punto Z appartenente al segmento di estremi Z_A e Z_B, la circonferenza di centro Z passante per P è una linea Γ di $\mathbf{H}$ che non interseca Δ. I punti del segmento corrispondono biettivamente alle parallele e sono in numero infinito. Dunque anche le parallele sono infinite.

2. PROIEZIONI ORTOGONALI E PRODOTTO SCALARE

9 Dati i punti $A = (3,2,1)$, $B = (2,2,5)$, $C = (1,2,7)$, scrivere la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{AB}$ su $\overrightarrow{AC}$. Calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

Soluzione. Poniamo

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

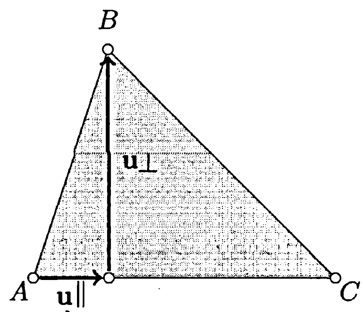
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la proiezione di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$ con la formula (6.3) a pagina 34 del testo:

$$\mathbf{u}_{\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\, \mathbf{v} = \frac{26}{40} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{13}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Per determinare l'area di $\triangle ABC$ basta osservare che l'altezza del triangolo relativa al lato AC è la componente di $\mathbf{u}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ e cioè

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{13}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



L'area di $\triangle ABC$ è allora

$$S = \frac{1}{2}\, \|\mathbf{v}\|\, \|\mathbf{u}_{\perp}\| = \frac{1}{2}\, \sqrt{40}\, \sqrt{\frac{1}{10}} = 1.$$

10 Posto $A = (2,1,3)$ e $B = (1,1,4)$, scrivere i (due) versori che sono diretti come la retta AB. Ripetere l'esercizio per due punti generali $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Soluzione. La retta AB ha la direzione del vettore

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I versori corrispondenti sono

$$\mathbf{u} = \pm \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso generale la direzione della retta è data dal vettore

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}.$$

cui corrispondono i due versori

$$\mathbf{u} = \pm\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \pm\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(b_i - a_i)^2}}\begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}.$$

11 Trovare un versore che forma angoli uguali coi tre semiassi positivi.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{v} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$ sia un versore. Se chiamiamo α l'angolo che $\mathbf{v}$ forma con il versore $\mathbf{i} = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ nella direzione positiva dell'asse x, allora, dalla formula (6.10) a pagina 37 del testo, abbiamo che

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|} = \frac{a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0}{1\cdot 1} = a.$$

In modo simile si trova che $\cos(\beta) = b$ e $\cos(\gamma) = c$, dove β e γ sono gli angoli che $\mathbf{v}$ forma con i versori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ nella direzione positiva degli assi y e z. Se $\mathbf{v}$ forma angoli uguali con i tre semiassi positivi allora $\alpha = \beta = \gamma$ e dunque $a = b = c$. Questo significa che $\mathbf{v} = [a, a, a]^{\mathrm{T}}$. Il fatto che $\mathbf{v}$ sia un versore significa che deve essere $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$ e dunque che $3a^2 = 1$. Ne consegue che le sole scelte possibili sono $a = \pm 1/\sqrt{3}$. Dunque i soli versori che soddisfano le condizioni richieste sono $\mathbf{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.

12 Usando le proprietà del prodotto scalare mostrare l'uguaglianza (teorema di Carnot o del coseno):

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Soluzione. Basta utilizzare la proposizione 6.5 e osservare che

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{(definizione di modulo)}\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && \text{(linearità del prodotto)}\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && \text{(commutatività del prodotto)}\\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 && \text{(definizione di modulo).}
\end{aligned}$$

13 Dimostrare la *disuguaglianza di Schwarz*: $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$. Dedurne (usando il teorema di Carnot) la *disuguaglianza triangolare*:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Quando vale l'uguaglianza in queste due disuguaglianze?

Soluzione. Dimostriamo anzitutto la disuguaglianza di Schwarz. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora la disuguaglianza è certamente verificata, perché entrambi i suoi termini sono nulli. Possiamo allora assumere che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano entrambi diversi dal vettore nullo. In questo caso basta dimostrare la disuguaglianza per dei versori. Infatti

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right| \le 1$$

e nell'ultima disuguaglianza i quozienti sono versori associati a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Supponiamo dunque che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano dei versori. Scomponiamo $\mathbf{u}$ nella forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp}$, dove $\mathbf{u}_{\|} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$ è la proiezione di $\mathbf{u}$ nella direzione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|}$ è la componente ortogonale. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 &= \left\|\mathbf{u}_{\|}\right\|^2 && \text{definizione di } \mathbf{u}_{\|}\\
&\le \left\|\mathbf{u}_{\|}\right\|^2 + \|\mathbf{u}_{\perp}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 && \text{teorema di Carnot e } \mathbf{u}_{\|} \perp \mathbf{u}_{\perp}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Prendendo le radici quadrate abbiamo la disuguaglianza di Schwarz $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le 1$ per i versori. Si osservi che l'uguaglianza vale se e soltanto se $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{0}$, e cioè quando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa direzione.

Dimostriamo ora la disuguaglianza triangolare. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 && \text{(teorema di Carnot)}\\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\ |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \text{(disuguaglianza di Schwarz)}\\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.
\end{aligned}
$$

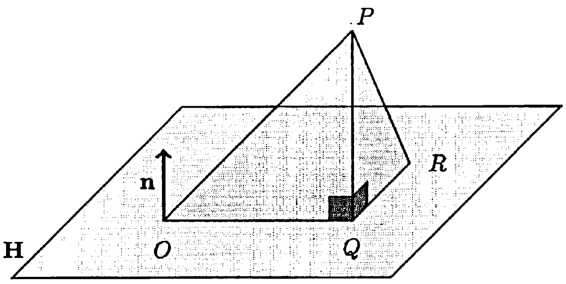
Prendendo le radici quadrate troviamo $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Per avere l'uguaglianza devono verificarsi due condizioni: anzitutto deve essere $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ che, come abbiamo visto sopra, significa che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono avere la stessa direzione; inoltre deve essere $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, e ciò significa che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono avere anche lo stesso verso.

14 **Proiezione ortogonale su un piano.** Sia $\mathbf{n}$ un vettore perpendicolare al piano $\mathbf{H}$. Dato un vettore libero $\mathbf{v}$, si ponga $\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_n}$, dove $\mathbf{v_n}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{n}$. Si dice che $\mathbf{v_H}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}$, perché $\mathbf{v_H}$ è parallelo a $\mathbf{H}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{v_H}$ è perpendicolare a $\mathbf{H}$.

1. Supponiamo che $O \in \mathbf{H}$, $\mathbf{v} \equiv \overrightarrow{OP}$ e $\mathbf{v_H} \equiv \overrightarrow{OQ}$. Mostrare che la retta QP è ortogonale a $\mathbf{H}$, e che Q è il punto di $\mathbf{H}$ più vicino a P.
2. Scrivere una formula per le componenti di $\mathbf{v_H}$ quando $\mathbf{n} = [3,2,1]^{\mathrm{T}}$ e quindi per un generico $\mathbf{n} = [a,b,c]^{\mathrm{T}}$.
3. Se $\mathbf{H}$ è il piano xy, mostrare che la proiezione ortogonale di $[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ è $[x,y,0]^{\mathrm{T}}$
4. Supponiamo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ siano due vettori non nulli, paralleli a $\mathbf{H}$ e perpendicolari tra loro. Mostrare che
$$\mathbf{v_H} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_w}$$
Osservare che l'ipotesi che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ siano perpendicolari tra loro è necessaria affinché questa formula sia vera.

Soluzione. 1. Abbiamo che

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v_H} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{v_n}) = \mathbf{v_n}.$$



Questo prova che la direzione della retta QP coincide con quella di $\mathbf{v_n}$, che a sua volta coincide con quella di $\mathbf{n}$. Poiché $\mathbf{n}$ è normale ad $\mathbf{H}$, anche la retta QP è ortogonale ad $\mathbf{H}$. Ne consegue che, preso un qualunque punto $R \in \mathbf{H}$, il triangolo $\triangle PQR$ è rettangolo in Q. Dal teorema di Pitagora 5.3 abbiamo allora che

$$\overline{PQ}^2 \leq \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PR}^2.$$

Prendendo le radici quadrate troviamo $\overline{PQ} \leq \overline{PR}$ per ogni R e dunque Q è il punto di $\mathbf{H}$ che minimizza la distanza da P.

2. Posto $\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$, troviamo

$$\mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} = \frac{3x + 2y + z}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 9x + 6y + 3z \\ 6x + 4y + 2z \\ 3x + 2y + z \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 9x + 6y + 3z \\ 6x + 4y + 2z \\ 3x + 2y + z \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5x - 6y - 3z \\ -6x + 10y - 2z \\ -3x - 2y + 13z \end{bmatrix}.$$

Ripetendo i calcoli per un generico $\mathbf{n} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$ troviamo

$$\mathbf{v_H} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{bmatrix} (b^2 + c^2)x - aby - acz \\ (a^2 + c^2)y - abx - bcz \\ (a^2 + b^2)z - acx - bcy \end{bmatrix}.$$

3. Il piano xy ha equazione $z = 0$ e un vettore normale è $\mathbf{n} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Possiamo usare la formula del punto precedente, oppure ripetere i conti:

$$\mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} = \frac{z}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Se $\mathbf{n}$ è un vettore normale ad $\mathbf{H}$, allora $\{\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ è una base ortogonale dello spazio. Posto

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{u}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{w}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w},$$

otteniamo una base ortonormale $\{\mathbf{n}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0\}$. Dalla proposizione 6.4 abbiamo allora, per ogni vettore $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_0)\mathbf{w}_0\\ &= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\,\mathbf{w}\\ &= \mathbf{v_n} + \mathbf{v_u} + \mathbf{v_w}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_n} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_w}.$$

Mostriamo con un esempio che l'ortogonalità di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ è necessaria. Come al punto 3, prendiamo il piano $z = 0$ e consideriamo i vettori $\mathbf{u} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w} = [1,1,0]^{\mathrm{T}}$. Per un generico vettore $\mathbf{v} = [x,y,z]^{\mathrm{T}}$ abbiamo

$$\mathbf{v_u} + \mathbf{v_w} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\mathbf{w} = \frac{x}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{x+y}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3x+y\\x+y\\0\end{bmatrix}$$

mentre si è visto al punto 3 che $\mathbf{v_H} = [x,y,0]^{\mathrm{T}}$. Questi due vettori sono, in generale, differenti come si vede prendendo ad esempio $\mathbf{v} = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

15 Sia $\mathbf{H}$ il piano per l'origine perpendicolare al vettore $\mathbf{n} = [1,3,2]^{\mathrm{T}}$. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = [4,1,5]^{\mathrm{T}}$ come somma di un vettore parallelo a $\mathbf{H}$ e di un vettore perpendicolare ad $\mathbf{H}$.

Soluzione. Dall'esercizio 14 sappiamo che la componente ortogonale e la componente parallela di $\mathbf{v}$ rispetto ad $\mathbf{H}$ sono

$$\mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} = \frac{17}{14}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}17\\51\\34\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_n} = \begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix} - \frac{1}{14}\begin{bmatrix}17\\51\\34\end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}39\\-37\\36\end{bmatrix}.$$

3. PRODOTTO VETTORIALE E PRODOTTO MISTO

16 Determinare un vettore $\mathbf{w}$ perpendicolare ai due vettori $\mathbf{u} = [1,2,3]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v} = [3,2,1]^{\mathrm{T}}$. Verificare il risultato controllando che $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

Soluzione. Osservato che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono paralleli perché non sono uno multiplo dell'altro, possiamo costruire il vettore $\mathbf{w}$ utilizzando la proposizione 7.1 che garantisce come il prodotto vettoriale $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ sia ortogonale ai vettori di partenza. Troviamo

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\8\\-4\end{bmatrix}.$$

Verifichiamo esplicitamente l'ortogonalità:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\8\\-4\end{bmatrix} = (-4)+16+(-12)=0,$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\8\\-4\end{bmatrix} = (-12)+16+(-4)=0.$$

17 Determinare l'area del parallelogramma che ha tre vertici in $A=(0,1,2)$, $B=(0,2,3)$ e $C=(1,2,3)$ calcolando il modulo del prodotto vettore $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Controllare che si ottiene lo stesso risultato calcolando il modulo di $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}$. Posto $D=(2,2,2)$, calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

L'area del parallelogramma generato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ è per definizione di prodotto vettoriale,

$$S = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2}.$$

Se invece utilizziamo i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, troviamo

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&1\\1&0&0\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

e anche questo vettore ha modulo $\sqrt{2}$.

Infine per calcolare il volume del parallelepipedo calcoliamo il prodotto misto

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix} = 1.$$

Il volume del parallelepipedo è il valore assoluto di questo prodotto e quindi vale 1.

18 Nel piano cartesiano siano $A=(1,2)$, $B=(2,4)$, $C=(-2,7)$. Calcolare l'area del triangolo ABC. (Suggerimento: l'area di un triangolo è la metà dell'area di un parallelogramma.)

Soluzione. Il triangolo $\triangle ABC$ è equivalente alla metà del parallelogramma generato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Poiché

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&0\\-3&5&0\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\11\end{bmatrix},$$

l'area del parallelogramma vale

$$S = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = 11$$

e l'area del triangolo vale $\frac{11}{2}$.

19 Calcolare il volume del tetraedro di vertici $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-2, 7, 0)$, $D = (1, 1, 1)$. (Suggerimento: il volume di un tetraedro è un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza; quindi è un sesto del volume di un parallelepipedo.)

Soluzione. Determiniamo anzitutto il volume del parallelepipedo generato dai vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

e dunque il volume del parallelepipedo vale 11. Il triangolo $\triangle ABC$ è equivalente alla metà del parallelogramma generato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, dunque il volume del prisma triangolare che ha base $\triangle ABC$ e spigolo $\overrightarrow{AD}$ è la metà del volume del parallelepipedo e vale $\frac{11}{2}$. Il volume del tetraedro vale un terzo del volume del prisma e quindi $\frac{11}{6}$.

20 Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ i tre vettori $\mathbf{u} = [1, 2, a]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v} = [2, 4, 7]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$? Ripetere l'esercizio sostituendo $\mathbf{v} = [2, 3, 7]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w} = [1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$

Soluzione. Dalla proposizione 7.5 sappiamo che i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e soltanto se il loro prodotto misto è diverso da zero. Poiché

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

non esistono valori di a per cui i primi tre vettori formano una base. Il motivo è che, per ogni valore di a, il vettore $\mathbf{v} = [2, 4, 7]^{\mathrm{T}}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$.

Se invece $\mathbf{v} = [2, 3, 7]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w} = [1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$, allora

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 - a,$$

quindi i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ per tutti i valori di a eccetto $a = 7$.

21 Mostrare che il prodotto misto ha le seguenti simmetrie:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}).$$

Soluzione. Ricordiamo dalla proposizione 7.4 che il valore assoluto del prodotto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ è il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori. Questo parallelepipedo non cambia se si permuta l'ordine dei tre vettori, dunque i valori assoluti di tutti i prodotti misti indicati sopra coincidono. L'unica possibile variazione è nel segno. Ricordiamo che $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ è positivo se la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è destra, negativo se la terna è sinistra. Poniamo

$$\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è destra} \\ -1 & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è sinistra.} \end{cases}$$

Per una qualunque terna abbiamo che

$$\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Queste formule si verificano analiticamente osservando che

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2) - (u_1 v_3 w_2 + u_2 v_1 w_3 + u_3 v_2 w_1). \end{aligned}$$

Scambiano le coordinate di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si alterano i segni di tutti gli addendi, quindi cambia il segno del determinante. Se invece permutiamo ciclicamente le righe verso l'alto gli addendi preservano il loro segno ed il determinante non cambia.

La prima delle formule sulle terne dimostra immediatamente la prima formula richiesta. La seconda formula sulle terne, applicata due volte, dimostra la seconda serie di formule richieste.

22 Il prodotto vettoriale non è un'operazione associativa: trovare tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tali che

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Soluzione. Prendiamo $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{j}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

23 Mostrare l'uguaglianza

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

(Suggerimento: ridursi al caso in cui $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{w}$ appartiene al piano xy.)

Soluzione. Facciamo alcune riduzioni. Anzitutto la definizione di prodotto vettoriale non dipende dalla scelta del sistema di riferimento; possiamo dunque scegliere un riferimento ortonormale in modo che $\mathbf{v}$ abbia direzione e verso di $\mathbf{i}$. In secondo luogo, se moltiplichiamo l'unità di misura del riferimento per $t > 0$, le lunghezze di tutti i vettori risultano moltiplicate per $\frac{1}{t}$. Entrambi i termini della formula da dimostrare vengono quindi moltiplicati per $\frac{1}{t^3}$ e questo non altera la loro uguaglianza; dunque possiamo assumere che $\mathbf{v}$ abbia lunghezza unitaria e cioè che sia $\mathbf{v} = \mathbf{i}$. Infine possiamo ruotare il riferimento intorno ad $\mathbf{i}$ in modo che il vettore $\mathbf{w}$ appartenga al piano generato da $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e cioè risulti $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$. Con queste riduzioni e utilizzando le formule a pagina 40 e 41 del testo abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times (\mathbf{i} \times (w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j})) \\
&= \mathbf{u} \times w_2\mathbf{k} \\
&= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times w_2\mathbf{k} \\
&= u_2w_2\mathbf{i} - u_1w_2\mathbf{j}, \\
(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{i} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{w} \\
&= (u_1w_1 + u_2w_2)\mathbf{i} - u_1\mathbf{w} \\
&= (u_1w_1 + u_2w_2)\mathbf{i} - (u_1w_1\mathbf{i} + u_1w_2\mathbf{j}) \\
&= u_2w_2\mathbf{i} - u_1w_2\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

24 Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori non paralleli. Mostrare che $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è perpendicolare a tutte le combinazioni lineari $x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$ (geometricamente, se $\mathbf{v} \equiv \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} \equiv \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è normale al piano OAB).

Soluzione. Per definizione, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è perpendicolare al piano generato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$ e dunque $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. Dalla bilinearità del prodotto vettoriale abbiamo

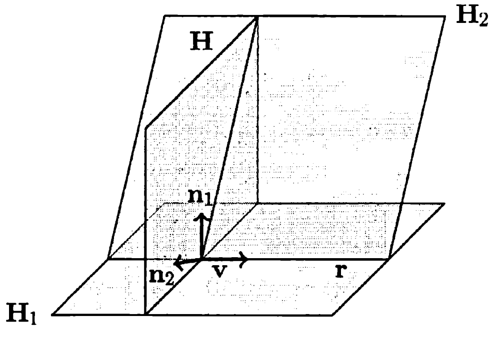
$$\begin{aligned}
(x\mathbf{v} + y\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= x\,\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + y\,\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&= x \cdot 0 + y \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è ortogonale a tutte le combinazioni lineari di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

25 Supponiamo che due piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si intersechino nella retta $\mathbf{r}$. Mostrare che il prodotto vettoriale dei vettori normali di $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ è parallelo a $\mathbf{r}$.

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{v}$ la direzione di $\mathbf{r}$ e con $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ le direzioni normali dei piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ rispettivamente.

Poiché $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{H}_1$ deve essere $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1$. Ma è anche $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{H}_2$, dunque $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2$. I piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ non sono paralleli; dunque i vettori $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ non sono paralleli e generano un piano $\mathbf{H}$. La direzione $\mathbf{v}$ è ortogonale a quella dei due generatori di $\mathbf{H}$, quindi è quella della normale ad $\mathbf{H}$. Ma $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ha, per definizione, la direzione normale a quella del piano generato da $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ e quindi ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$.



26 Dimostrare che il prodotto vettoriale è bilineare completando la seguente traccia.

1. Usando la definizione di prodotto vettoriale si mostri che per ogni scalare t

$$t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (t\mathbf{w}).$$

e se ne deduca che per controllare la bilinearità del prodotto vettoriale basta verificare che

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}$$

sotto l'ipotesi aggiuntiva che $\mathbf{k}$ sia un versore.

2. Sia $\mathbf{H}$ il piano perpendicolare al versore $\mathbf{k}$ (si può assumere che $\mathbf{k}$ sia il versore dell'asse z, e quindi che $\mathbf{H}$ sia il piano xy); si mostri che per ogni vettore $\mathbf{u}$ parallelo a $\mathbf{H}$, il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ si ottiene ruotando $\mathbf{u}$ di $\pi/2$ (in senso orario rispetto a $\mathbf{k}$) nel piano $\mathbf{H}$. Se ne deduca che

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}$$

se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli a $\mathbf{H}$.

3. Sia $\mathbf{u}_\mathbf{H}$ la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u}$ sul piano $\mathbf{H}$: se $\mathbf{H}$ è il piano xy, $(x, y, z)_\mathbf{H} = (x, y, 0)$. Si mostri

$$\mathbf{u} \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_\mathbf{H} \times \mathbf{k}$$

4. Si concluda ora che $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}$.

Soluzione. 1. Supponiamo anzitutto che sia $t > 0$. Detto θ l'angolo fra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\|(t\mathbf{v}) \times \mathbf{w}\| &= \|t\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,|\sin\theta| \\ &= t\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,|\sin\theta| \\ &= t\,\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= \|t(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\|\,.\end{aligned}$$

Poiché $t\mathbf{v}$ ha la stessa direzione e verso di $\mathbf{v}$, anche $(t\mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ ha la stessa direzione e verso di $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e dunque $(t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = t(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Se $t = -1$, abbiamo

$$\begin{aligned}\|-\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| &= \|-\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,|\sin(\pi + \theta)| \\ &= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,|\sin\theta| \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= \|-(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\|\,.\end{aligned}$$

La direzione di $-\mathbf{v}$ è la stessa di $\mathbf{v}$, dunque $-\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ hanno anche la stessa direzione. Ma poiché il verso di $-\mathbf{v}$ è opposto a quello di $\mathbf{v}$, i vettori $(-\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ formano una terna sinistra; dunque $-\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ha verso opposto a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. In conclusione, $-\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Dai due casi esaminati consegue che $(t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = t(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In modo del tutto simile si prova lo stesso risultato per $t\mathbf{w}$. Per concludere la dimostrazione del punto 1 basta ora osservare che la definizione di prodotto vettoriale non dipende dalla posizione del sistema di riferimento; possiamo quindi scegliere il riferimento in modo che il versore $\mathbf{k}$ abbia la stessa direzione e verso di $\mathbf{w}$. La definizione del prodotto vettoriale dipende invece dalla scelta dell'unità di misura. Ma, se moltiplichiamo l'unità per $t > 0$, le misure di tutti i vettori vengono moltiplicate per $\frac{1}{t}$ e quanto abbiamo provato sopra mostra che entrambi i termini della formula $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ vengono moltiplicati per $\frac{1}{t^2}$. Quindi una modifica dell'unità di misura non altera la validità dell'uguaglianza. Possiamo allora scegliere l'unità di misura pari a $\|\mathbf{w}\|$ e dimostrare che

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}.$$

2. Se $\mathbf{u}$ sta in $\mathbf{H}$, allora $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ deve essere ortogonale a $\mathbf{k}$. Ma il piano ortogonale a $\mathbf{k}$ è $\mathbf{H}$, dunque $\mathbf{u} \times \mathbf{k} \in \mathbf{H}$. D'altra parte $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ deve essere anche ortogonale a $\mathbf{u}$, quindi deve stare sulla retta di $\mathbf{H}$ perpendicolare a $\mathbf{u}$. Infine, dal momento che la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{k}, \mathbf{u} \times \mathbf{k})$ deve essere destra, la rotazione da $\mathbf{u}$ verso $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ deve essere pari a $-\frac{\pi}{2}$ vista dalla direzione positiva di $\mathbf{k}$, quindi in senso orario. Infine si osservi che $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è la diagonale del parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Applicando una rotazione di $-\frac{\pi}{2}$ a questo parallelogramma otteniamo un parallelogramma di lati $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{k}$ con diagonale $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{k}$. Dunque

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{k} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}.$$

3. Il piano $\mathbf{K}$ generato da $\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}$ contiene $\mathbf{k}$ ed è quindi ortogonale ad $\mathbf{H}$; ne consegue che $\mathbf{H} \cap \mathbf{K}$ è la retta che contiene la proiezione $\mathbf{u_H}$ di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{H}$; in particolare $\mathbf{u_H} \in \mathbf{K}$. Ma allora i vettori $\mathbf{u} \times \mathbf{k}$ e $\mathbf{u_H} \times \mathbf{k}$ devono avere la stessa direzione, quella normale a $\mathbf{K}$. Hanno anche lo stesso verso perché $\mathbf{u}$, $\mathbf{u_H}$ e $\mathbf{k}$ giacciono in uno stesso semipiano di $\mathbf{K}$. Infine hanno lo stesso modulo perché, nel piano $\mathbf{K}$, $\mathbf{u_H}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sulla retta $\mathbf{H} \cap \mathbf{K}$, quindi il parallelogramma di spigoli $\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}$ ha base e altezza che coincidono con quelli del rettangolo di spigoli $\mathbf{k}$ e $\mathbf{u_H}$. Dunque $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = \mathbf{u_H} \times \mathbf{k}$.

4. Proviamo anzitutto che la proiezione su $\mathbf{H}$ è additiva e cioè preserva le somme: dati due vettori $\mathbf{u}_1 = [x_1, y_1, z_1]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{u}_2 = [x_2, y_2, z_2]^{\mathrm{T}}$, abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)_{\mathbf{H}} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_{\mathbf{H}} \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= (\mathbf{u}_1)_{\mathbf{H}} + (\mathbf{u}_2)_{\mathbf{H}}.\end{aligned}$$

Possiamo finalmente concludere che

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{k} &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})_{\mathbf{H}} \times \mathbf{k} && \text{(punto 3)} \\ &= (\mathbf{u_H} + \mathbf{v_H}) \times \mathbf{k} && \text{(additività della proiezione)} \\ &= \mathbf{u_H} \times \mathbf{k} + \mathbf{v_H} \times \mathbf{k} && \text{(punto 2)} \\ &= \mathbf{u} \times \mathbf{k} + \mathbf{v} \times \mathbf{k} && \text{(punto 3).}\end{aligned}$$

4. GEOMETRIA ANALITICA DI RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

27 Nel piano cartesiano sia $\mathbf{r}$ la retta per $A = (1, 0)$ diretta come $\mathbf{v} = [2, 3]^{\mathrm{T}}$. Verificare che $\mathbf{r}$ coincide con la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}u. \end{cases}$$

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{s}$ la retta descritta dalle equazioni parametriche. La direzione di $\mathbf{s}$ è quella del vettore $\mathbf{u} = [1, \frac{3}{2}]^{\mathrm{T}}$. Poiché $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ possiamo concludere che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ hanno la stessa direzione. Se facciamo la sostituzione $u = 1$ in $\mathbf{s}$ troviamo il punto $A = (1, 0)$. Dunque $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, oltre ad avere la stessa direzione, hanno anche un punto in comune. Di conseguenza $\mathbf{r} = \mathbf{s}$.

28 Si trovi l'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P_1 = (0, 1, 2)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (1, 3, 5)$. Si determinino le componenti dei due versori normali al piano.

Soluzione. Se indichiamo con $X = (x, y, z)$ il punto generico di $\mathbb{R}^3$ e poniamo

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \overrightarrow{P_1X} = \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix},$$

possiamo scrivere l'equazione del piano nella forma $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (si vedano le formule (8.9) e (8.10) del testo).

Poiché risulta

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x - 2y + z,$$

il piano cercato ha equazione $x - 2y + z = 0$. Dalla proposizione a pagina 55 del testo sappiamo che un vettore normale al piano è $\mathbf{n} = [1, -2, 1]^{\mathrm{T}}$. I versori corrispondenti sono allora

$$\mathbf{v} = \pm\frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\,\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

29 Trovare l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $P = (0, 1, 2)$ e perpendicolare alla retta $\mathbf{r}$ di equazioni $x + y + z = x - 2y + 3z = 0$.

Soluzione. La retta $\mathbf{r}$ è assegnata come intersezione di due piani; la sua direzione è ortogonale a quella delle direzioni normali di entrambi i piani ed è dunque quella del prodotto vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Indicato con $X = (x, y, z)$ il punto generico dello spazio e posto $\mathbf{x} = \overrightarrow{PX}$, il piano cercato ha equazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$. Poiché

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} = 5x - 2(y-1) - 3(z-2) = 5x - 2y - 3z + 8,$$

troviamo l'equazione $5x - 2y - 3z + 8 = 0$.

30 Si considerino i piani $\mathbf{H}_1$ di equazione $x - y + 3z - 5 = 0$ e $\mathbf{H}_2$ di equazione $2x + 2y - 4z = 0$.

1. Trovare una retta contenuta in $\mathbf{H}_1$ e parallela a $\mathbf{H}_2$.
2. Mostrare che non esiste una retta contenuta in $\mathbf{H}_1$ e perpendicolare a $\mathbf{H}_2$.
3. Trovare un piano perpendicolare a $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$.

Soluzione. 1. Una retta che soddisfa le condizioni richieste è $\mathbf{r} = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$. Le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x - y + 3z - 5 = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

2. Una retta $\mathbf{s}$ perpendicolare ad $\mathbf{H}_2$ deve avere la stessa direzione del vettore $\mathbf{n}_2 = [2, 2, -4]^{\mathrm{T}}$ normale ad $\mathbf{H}_2$. D'altra parte se $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{H}_1$ la sua direzione deve essere ortogonale a quella del vettore $\mathbf{n}_1 = [1, -1, 3]^{\mathrm{T}}$ che è normale ad $\mathbf{H}_1$. Dunque se esistesse una retta che soddisfa entrambe le condizioni, dovrebbe essere $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$. Ma $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -12 \neq 0$, quindi una retta del genere non esiste.

3. Ricordiamo che due piani sono perpendicolari se le loro normali sono ortogonali. Un vettore ortogonale alle direzioni di $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ è il prodotto vettoriale

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Il piano passante per l'origine la cui direzione normale è quella di $\mathbf{n}$ soddisfa le condizioni richieste. Invece di utilizzare $\mathbf{n}$ direttamente, conviene dividere le sue coordinate per 2. Si trova l'equazione $x - 5y - 2z = 0$.

31 Si considerino i piani $\mathbf{H}_1$ di equazione $x - y + 2z - 4 = 0$ e $\mathbf{H}_2$ di equazione $2x + 5y + z - 9 = 0$.

1. Trovare una retta parallela ad entrambi i piani.
2. Mostrare che non esiste una retta perpendicolare ad entrambi i piani.

Soluzione. 1. Possiamo scrivere le equazioni cartesiane di una retta parallela ad entrambi i piani intersecando due piani paralleli a quelli dati - eventualmente gli stessi piani dati. Ad esempio, se prendiamo i piani paralleli e passanti per l'origine troviamo la retta

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

2. Perché esista una retta perpendicolare ad entrambi i piani occorre che la sua direzione coincida con le direzioni normali di entrambi i piani e dunque che queste coincidano. Le direzioni normali ad $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono quelle dei vettori $\mathbf{n}_1 = [1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{n}_2 = [2,5,1]^{\mathrm{T}}$ che dovrebbero dunque essere proporzionali. Ma questo è palesemente falso.

32 Si determinino le equazioni cartesiane della retta $\mathbf{r}$ di $\mathbb{R}^3$ perpendicolare al piano di equazione $x - 2y + z = 35245$ e passante per il punto $P = (1,2,3)$. Sia $\mathbf{s}$ la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $Q = (1,2,3)$ e $R = (3,2,a)$ dove a è un parametro reale. Si stabilisca se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono perpendicolari o parallele per qualche valore di a.

Soluzione. Possiamo scrivere le equazioni parametriche di $\mathbf{r}$ nella forma $X = P + t\mathbf{n}$ dove $\mathbf{n} = [1,-2,1]^{\mathrm{T}}$ è la normale al piano. Troviamo

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Eliminando il parametro t da queste equazioni, ad esempio risolvendo la prima equazione rispetto a t e sostituendo nelle rimanenti, otteniamo l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

La direzione di $\mathbf{s}$ è quella del vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR} = [2,0,a-3]^{\mathrm{T}}$. Le rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono perpendicolari se sono ortogonali le loro direzioni, cioè se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ma $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = a - 1$, dunque abbiamo ortogonalità solo per $a = 1$. D'altra parte $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono parallele se hanno la stessa direzione, cioè se sono proporzionali i vettori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{v}$. Ma il sistema $\mathbf{n} = t\mathbf{v}$, che si scrive esplicitamente nella forma

$$\begin{cases} 1 = 2t \\ -2 = 0t \\ 1 = (a-3)t, \end{cases}$$

non ha soluzioni per via della seconda equazione. Quindi $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ non sono mai parallele.

33 Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1,2,3)$ e perpendicolare al piano di equazione $x + 3y + z = 300005$. Calcolare la distanza del punto P dal piano $x + y + z = 0$.

Soluzione. L'equazione parametrica della retta è $X = P + t\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n} = [1,3,1]^{\mathrm{T}}$ è un vettore normale al piano. Troviamo

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana eliminiamo t dalle equazioni parametriche. Se, ad esempio, risolviamo la prima equazione rispetto a t e sostituiamo nelle rimanenti, troviamo

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Per determinare la distanza di P dal piano $\mathbf{H} : x + y + z = 0$, usiamo la formula a pagina 61 del testo. Troviamo

$$d(P, \mathbf{H}) = \frac{|1 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = 2\sqrt{3}.$$

34 Calcolare la distanza del punto $P = (2, 3, 5)$ dalla retta $\mathbf{r}$ di equazioni cartesiane $x + y - 3 = x - y + z - 6 = 0$.

Soluzione. Per poter utilizzare la formula (8.18) a pagina 62 del testo dobbiamo determinare la direzione di $\mathbf{r}$ e un suo punto A. Conviene allora scrivere $\mathbf{r}$ in forma parametrica risolvendo il sistema delle sue equazioni cartesiane. Se prendiamo x come variabile libera troviamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 9 - 2t. \end{cases}$$

La direzione di $\mathbf{r}$ è quella del vettore $\mathbf{w} = [1, -1, -2]^{\mathrm{T}}$ e posto $t = 0$ nell'equazione cartesiana, troviamo il punto $A = (0, 3, 9)$. Possiamo utilizzare la formula (8.18) con $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP} = [2, 0, -4]^{\mathrm{T}}$. Poiché

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{10}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix},$$

abbiamo

$$d(P, \mathbf{r}) = \left\| \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w} \right\| = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

35 Trovare le equazioni della retta passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle rette $\mathbf{r}$, di equazioni $x = y + 2 = z - 3$, e $\mathbf{s}$, di equazioni $x = 2y + 1 = 3z - 4$.

Soluzione. Osserviamo anzitutto che possiamo sostituire le rette $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ con le parallele

$$\mathbf{r}' : x = y = z, \qquad \mathbf{s}' : x = 2y = 3z.$$

Queste rette passano per l'origine, quindi possiamo immediatamente ottenere le loro direzioni $\mathbf{u} = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v} = [6, 3, 2]^{\mathrm{T}}$ sostituendo $x = 1$ in $\mathbf{r}'$ e $x = 6$ in $\mathbf{s}'$. La retta cercata deve essere perpendicolare sia a $\mathbf{r}'$ che a $\mathbf{s}'$, quindi la sua direzione è quella del prodotto vettoriale

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

La retta cercata ha dunque equazione $X = P + t\mathbf{w}$, ovvero

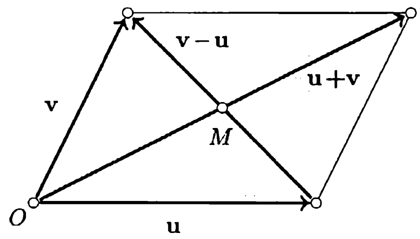
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

36 Mostrare che le diagonali di un parallelogramma si bisecano.

Soluzione. Possiamo assumere che il parallelogramma abbia un vertice nell'origine e che due lati siano dati dai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Le diagonali del parallelogramma sono rappresentate dai vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Il punto medio della seconda diagonale è

$$M = \mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Ma l'ultimo termine è il punto medio della prima diagonale.



37 Determinare l'equazione del luogo dei punti $X = (x, y, z)$ equidistanti dai punti $P = (2, 3, 1)$ e $Q = (-1, 2, 5)$ in due modi distinti:

1. imponendo che $\|PX\|^2 = \|QX\|^2$;
2. osservando che si tratta del piano perpendicolare a PQ che passa per il punto medio del punto PQ.

Soluzione. 1. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|PX\|^2 = \|QX\|^2 &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 \\ &\Leftrightarrow 6x + 2y - 8z + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y - 4z + 8 = 0. \end{aligned}$$

L'ultima equazione descrive il luogo geometrico cercato e rappresenta un piano.

2. Identifichiamo un punto X con il vettore $\overrightarrow{OX}$. Il punto medio del segmento PQ è allora

$$M = P + \frac{1}{2}(Q - P) = \frac{1}{2}(P + Q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3\right),$$

mentre la direzione normale al piano cercato $\mathbf{H}$ è quella del vettore

$$\mathbf{n} = Q - P = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{H}$ ha equazione $\mathbf{n} \cdot (X - M) = 0$. Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (X - M) &= \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{5}{2} \\ z - 3 \end{bmatrix} \\ &= -3\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z - 3) \\ &= -3x - y + 4z - 8, \end{aligned}$$

l'equazione di **H** si scrive esplicitamente nella forma $-3x - y + 4z - 8 = 0$ ed è equivalente a quella trovata al punto 1.

38 Trovare centro e raggio R della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6 = 0$.

Soluzione. Se completiamo i quadrati troviamo successivamente

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + z^2 = -6$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + z^2 = -6 + 4 + 9$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 7.$$

La formula (8.16) a pagina 59 del testo mostra che l'ultima equazione descrive la sfera di dunque centro $C = (2, -3, 0)$ e raggio $R = \sqrt{7}$.

39 Trovare:

1. l'equazione della sfera di centro $P = (1, 2, 4)$ e raggio 7; fissato poi un parametro reale a, si consideri la retta **r** di equazioni parametriche $(a + t, 2 + t, 3 + t)$; si determinino i punti (se esistono) in cui la retta taglia la sfera;
2. la distanza della retta **r** dal centro della sfera; confrontando tale distanza con il raggio, si stabilisca se **r** taglia la sfera in due punti distinti, in un unico punto o in nessun punto; si verifichi che il risultato ottenuto è in accordo col primo punto dell'esercizio.

Soluzione. 1. La sfera cercata ha equazione

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 49.$$

Se semplifichiamo i termini troviamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z - 28 = 0.$$

Per determinare le intersezioni di **r** con la sfera sostituiamo le coordinate del punto generico della retta nell'equazione della sfera. Si noti che è più conveniente effettuare questa sostituzione nella prima delle due equazioni scritte sopra:

$$[(a + t) - 1]^2 + [(2 + t) - 2]^2 + [(3 + t) - 4]^2 = 49.$$

Semplificando i termini troviamo l'equazione quadratica

$$3t^2 + 2(a - 2)t + (a^2 - 2a - 47) = 0.$$

Il discriminante ridotto del polinomio nel termine a sinistra vale

$$\frac{D}{4} = -2a^2 + 2a + 145$$

e ha due zeri semplici per $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{291})$. La retta **r** interseca dunque la sfera solo per valori di a compresi fra questi due zeri. In questi casi, le soluzioni dell'equazione quadratica in t sono date da

$$t = \frac{1}{3}\left(2 - a \pm \sqrt{-2a^2 + 2a + 145}\right)$$

e le coordinate dei punti di intersezione si ottengono sostituendo questi valori nelle coordinate del punto generico di **r**:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(2 + 2a \pm \sqrt{-2a^2 + 2a + 145}\right) \\ y = \frac{1}{3}\left(8 - a \pm \sqrt{-2a^2 + 2a + 145}\right) \\ x = \frac{1}{3}\left(11 - a \pm \sqrt{-2a^2 + 2a + 145}\right). \end{cases}$$

Si osservi che quando $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{291})$ i due punti di intersezione devono coincidere; in questi due casi **r** è tangente alla sfera.

2. Per calcolare la distanza di P da **r** usiamo la formula (8.18). Un punto di **r** si ottiene sostituendo $t = 0$ nell'equazione parametrica; troviamo $A = (a, 2, 3)$. La direzione di **r** è quella del vettore dei coefficienti di t nell'equazione parametrica, $\mathbf{w} = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$. Infine $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP} = [1 - a, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Dunque

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2-a}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2a+1 \\ a-2 \\ a+1 \end{bmatrix}$$

e

$$d(P, \mathbf{r}) = \left\| \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}(a^2 - a + 1)}.$$

La retta **r** taglia la sfera quando $d(P, \mathbf{r}) \leq R$ o, in modo equivalente, quando $d(P, \mathbf{r})^2 \leq R^2$. Se riduciamo i termini di quest'ultima disuguaglianza troviamo $2a^2 - 2a - 145 \leq 0$ che equivale alla condizione $D/4 \geq 0$ trovata al punto 1. In particolare, **r** taglia la sfera in un unico punto per $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{291})$, in due punti distinti quando a è compresa fra questi due valori e in nessun punto in tutti gli altri casi.

40 Si considerino le rette **r** e **s** di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 + 2u \\ y = 2 - u \\ z = 7 - 3u \end{cases}$$

Si calcoli la distanza di **r** da **s** e si stabilisca se sono incidenti, parallele o sghembe.

Soluzione. Le due rette non sono parallele perché i vettori

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

che determinano le loro direzioni non sono proporzionali. Possiamo allora calcolare la distanza fra le due rette con la formula (8.20). Come punti P e Q prendiamo quelli che si ottengono per $t = -1$ e $u = 2$ rispettivamente: $P = (1, -3, -1)$ e $Q = (1, 0, 1)$. Abbiamo allora

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ -4 \end{bmatrix},$$

da cui otteniamo

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = 2\sqrt{69}, \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 40$$

e dunque $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{20}{\sqrt{69}}$. Poiché la distanza è positiva e le rette non sono parallele, possiamo concludere che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono sghembe.

41 Trovare delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta $\mathbf{r}$ di $\mathbb{R}^3$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano di equazione $x+y+2z = 35245$. Sia $\mathbf{s}$ la retta di equazioni cartesiane $x + y - 3 = x - y + z - 6 = 0$. Si calcoli la distanza tra le due rette e si stabilisca se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono sghembe (rispettivamente incidenti, parallele, ortogonali).

Soluzione. La direzione normale al piano è quella del vettore $\mathbf{v} = [1, 1, 2]^{\mathrm{T}}$. Dunque la retta $\mathbf{r}$ ha equazione parametrica $X = P + t\mathbf{v}$, ovvero

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

Per determinare le equazioni cartesiane di $\mathbf{r}$ eliminiamo il parametro t utilizzando la prima delle equazioni parametriche. Troviamo

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Determiniamo ora un'equazione parametrica di $\mathbf{s}$. Se scegliamo x come parametro e risolviamo le rimanenti equazioni che definiscono $\mathbf{s}$, troviamo

$$\begin{cases} x = u \\ y = 3 - u \\ z = 9 - 2u. \end{cases}$$

La direzione di $\mathbf{s}$ è allora quella del vettore $\mathbf{w} = [1, -1, -2]^{\mathrm{T}}$. Possiamo immediatamente concludere che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ non sono perpendicolari perché $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -4 \neq 0$ e non sono neppure parallele perché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono proporzionali. Determiniamo la distanza fra $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ con la formula (8.20). Come punti sulle due rette scegliamo quelli che corrispondono ai valori dei parametri $t = u = 0$ e cioè $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (0, 3, 9)$. Abbiamo

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

dunque

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = 2\sqrt{5}, \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -8$$

e $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{4}{\sqrt{5}}$. In particolare $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ non sono incidenti ma sghembe.

42 **Fascio di piani.** Sia $\mathbf{r}$ la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Il *fascio di piani per* $\mathbf{r}$ è l'insieme dei piani che contengono $\mathbf{r}$. Si mostri che:

1. Un piano $\mathbf{H}$ contiene la retta $\mathbf{r}$ se e solo la sua equazione è combinazione lineare delle due equazioni della retta, cioè ha la forma

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

dove λ e μ sono due numeri reali non entrambi nulli. Questa equazione si dice equazione del fascio di piani per $\mathbf{r}$.

2. Tutti i piani del fascio per $\mathbf{r}$, tranne il piano $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, hanno un'equazione della forma

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 + t(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0,$$

che si dice equazione affine del fascio di piani per $\mathbf{r}$.

3. I piani del fascio sono parametrizzati da una semicirconferenza di raggio uno nel piano (λ, μ). (Suggerimento: dividere l'equazione del fascio per $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.)

Soluzione. 1. Indichiamo con $\mathbf{H}_i$ il piano di equazione

$$a_ix + b_iy + c_iz - d_i = 0$$

per $i = 1, 2$ e con $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ l'insieme degli zeri della combinazione lineare

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0.$$

Si osservi che il vettore dei coefficienti delle indeterminate della combinazione lineare è $\lambda\mathbf{n}_1 + \mu\mathbf{n}_2$, dove $\mathbf{n}_i = [a_i, b_i, c_i]^{\mathrm{T}}$. Poiché $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \mathbf{r}$, i piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ non sono paralleli, dunque i vettori $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ che rappresentano le loro direzioni normali non sono proporzionali, dunque la combinazione lineare $\lambda\mathbf{n}_1 + \mu\mathbf{n}_2$ è nulla solo se $\lambda = \mu = 0$. Questo significa che in tutti gli altri casi $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ è l'insieme degli zeri di un'equazione lineare e dunque è un piano. Tutti i piani $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ contengono $\mathbf{r}$. Infatti ogni punto di $\mathbf{r}$ è soluzione delle due equazioni di $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ e quindi è anche soluzione dell'equazione di $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ perché annulla i coefficienti di λ e μ. Resta da provare che ogni piano $\mathbf{H}$ contenente $\mathbf{r}$ è della forma $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$. Il vettore normale $\mathbf{n}$ di $\mathbf{H}$ è ortogonale alla direzione $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ di $\mathbf{r}$; dunque per la proposizione 7.5 deve essere $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}_1 + \mu\mathbf{n}_2$ con λ e μ non contemporaneamente nulli. Ora il piano $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ ha la stessa direzione normale di $\mathbf{H}$, dunque i due piani sono paralleli. Ma hanno in comune $\mathbf{r}$. Quindi $\mathbf{H} = \lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$.

2. Se si moltiplica l'equazione di un piano per una costante non nulla, la nuova equazione descrive lo stesso piano. Ma se $\lambda \neq 0$ e poniamo $t = \mu/\lambda$, allora moltiplicando per $\frac{1}{\lambda}$ l'equazione di $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$ otteniamo l'equazione di $\mathbf{H}_1 + t\mathbf{H}_2$. Dunque $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 + t\mathbf{H}_2$. Se $\lambda = 0$ allora $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2 = \mu\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2$ poiché in questo

caso $\mu \neq 0$. Quindi tutti i piani del fascio, ad eccezione al più di $\mathbf{H}_2$, sono descritti dall'equazione affine. Se $\mathbf{H}_2$ potesse essere descritto dalla combinazione affine, allora la direzione del vettore normale $\mathbf{n}_2$ dovrebbe coincidere con quella di $\mathbf{n}_1 + t\mathbf{n}_2$ per un qualche t. Ma allora si avrebbe che $\mathbf{n}_1 + t\mathbf{n}_2 = u\mathbf{n}_2$ e da questo conseguirebbe che $\mathbf{n}_1$ è multiplo di $\mathbf{n}_2$, il che è impossibile come abbiamo visto sopra.

3. Indichiamo con $\mathcal{F}$ il fascio supportato da $\mathbf{r}$ e con

$$\Gamma = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : v_1^2 + v_2^2 = 1\right\}$$

la circonferenza unitaria. Definiamo una funzione $f : \Gamma \to \mathcal{F}$ con la formula

$$f(\mathbf{v}) = v_1\mathbf{H}_1 + v_2\mathbf{H}_2.$$

La definizione è ben posta perché se $\mathbf{v} \in \Gamma$ non può essere $v_1 = v_2 = 0$. Proviamo anzitutto che f è suriettiva. Infatti dato un piano $\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2 \in \mathcal{F}$, λ e μ non possono essere contemporaneamente nulli. Ma allora $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \neq 0$ e dividendo si ottiene che

$$\lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\mathbf{H}_1 + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\mathbf{H}_2.$$

Il vettore

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\begin{bmatrix}\lambda \\ \mu\end{bmatrix}$$

ha norma unitaria, quindi appartiene a Γ e $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$. Vediamo infine di stabilire se f è iniettiva. Supponiamo che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma$ e che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$. Questo significa che $u_1\mathbf{H}_1 + u_2\mathbf{H}_2 = v_1\mathbf{H}_1 + v_2\mathbf{H}_2$ e dunque che coincidono le direzioni normali, cioè che deve essere $u_1\mathbf{n}_1 + u_2\mathbf{n}_2 = t(v_1\mathbf{n}_1 + v_2\mathbf{n}_2)$ per un $t \in \mathbb{R}$. Da questa formula consegue che $(u_1 - tv_1)\mathbf{n}_1 = (tv_2 - u_2)\mathbf{n}_2$. Poiché $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ non sono proporzionali, deve essere

$$\begin{cases} u_1 - tv_1 = 0 \\ u_2 - tv_2 = 0, \end{cases}$$

cioè $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$. Poiché $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma$, questo accade soltanto se $\mathbf{u} = \pm\mathbf{v}$. Dunque f è iniettiva solo su metà della circonferenza.

43 Trovare l'equazione cartesiana del piano per il punto $P = (3, 1, -7)$ contenente la retta $\mathbf{r}$ di equazioni $x + y + 1 = 2x - z - 3 = 0$. (Suggerimento: scrivere l'equazione affine del fascio di piani per la retta, quindi determinare t imponendo il passaggio per il punto).

Soluzione. Il piano cercato appartiene al fascio supportato da $\mathbf{r}$, quindi deve essere della forma $\mathbf{H} = \lambda\mathbf{H}_1 + \mu\mathbf{H}_2$, dove

$$\mathbf{H}_1 : x + y + 1 = 0, \qquad \mathbf{H}_2 : 2x - z - 3 = 0,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e non sono simultaneamente nulli. Osservato che $P \notin \mathbf{H}_2$, perché le sue coordinate non soddisfano $\mathbf{H}_2$, possiamo sostituire la combinazione lineare omogenea con la combinazione lineare affine: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + t\mathbf{H}_2$, dove $t \in \mathbb{R}$. Per determinare t imponiamo che $P \in \mathbf{H}_1 + t\mathbf{H}_2$. Troviamo l'equazione

$$(3 + 1 + 1) + t(2 \cdot 3 - (-7) - 3) = 0$$

che ha come unica soluzione $t = -\frac{1}{2}$. Quindi $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{H}_2$. Semplificando i termini troviamo successivamente

$$\begin{aligned}&(x+y+1) - \frac{1}{2}(2x - z - 3) = 0\\ &y + \frac{1}{2}z + \frac{5}{2} = 0\\ &2y + z + 5 = 0.\end{aligned}$$

44 Si trovi l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente i punti $P = (1,3,1)$ e $Q = (0,4,1)$ e perpendicolare al piano di equazione $x + y + z = 37$. (Suggerimento: scrivere l'equazione del fascio di piani per la retta PQ, quindi imporre la perpendicolarità dei vettori normali.)

Soluzione. Un'equazione parametrica della retta PQ è $X = P + t\overrightarrow{PQ}$ o, in termini di coordinate,

$$\begin{cases} x = 1 - t\\ y = 3 + t\\ z = 1.\end{cases}$$

Eliminando il parametro t otteniamo le equazioni cartesiane della retta

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0\\ z = 1.\end{cases}$$

Il piano cercato contiene la retta PQ quindi appartiene al fascio

$$(x + y - 4) + t(z - 1) = 0.$$

Abbiamo utilizzato l'equazione affine perché il piano $z - 1 = 0$ non è certamente soluzione del nostro problema, visto che il suo vettore normale $[0,0,1]^{\mathrm{T}}$ non è ortogonale al vettore normale $\mathbf{n} = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$ del piano $x+y+z = 37$. Riordinando l'equazione del fascio troviamo che i suoi piani hanno equazione

$$x + y + tz + (-t - 4) = 0$$

e quindi vettore normale $\mathbf{n}_t = [1,1,t]^{\mathrm{T}}$. Il piano del fascio è ortogonale a $x+y+z = 37$ se sono ortogonali i corrispondenti vettori normali, cioè se $\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{n} = 0$. Quest'equazione si scrive esplicitamente come $2 + t = 0$ e ha come unica soluzione $t = -2$. Quindi il piano cercato è

$$x + y - 2z - 2 = 0.$$

45 Per quali valori del parametro reale k i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $2x + ky + 4z = 4$, $3x + y + kz = k$ e $x - ky - 4z = k - 6$, si intersecano in una retta?

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{H}_i$, per $i = 1,2,3$, i piani assegnati e con $\mathbf{n}_i$ i corrispondenti vettori normali dei coefficienti. Se gli $\mathbf{H}_i$ si intersecano in una retta $\mathbf{r}$ allora tutti gli $\mathbf{n}_i$ giacciono nello stesso piano, quello passante per l'origine e ortogonale alla direzione di $\mathbf{r}$. Dunque una condizione necessaria è che sia $\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = 0$. Ora risulta

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} 2 & k & 4 \\ 3 & 1 & k \\ 1 & -k & -4 \end{vmatrix} = 3k^2 - 12$$

e quindi la condizione necessaria è che sia $k = \pm 2$. Per stabilire cosa accade in questi due casi calcoliamo $\bigcap \mathbf{H}_i$, cioè risolviamo i sistemi

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ x - 2y - 4z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -2 \\ x + 2y - 4z = -8. \end{cases}$$

Il primo sistema ammette le infinite soluzioni $[0, 2 - 2t, t]^{\mathrm{T}}$ mentre il secondo sistema non ne ammette. Dunque i tre piani si intersecano in una retta solo per $k = 2$.

Un altro modo per risolvere lo stesso problema parte dall'osservazione che $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_3$ non sono proporzionali per nessun valore di k. Quindi $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_3$ non sono mai paralleli e si intersecano in una retta $\mathbf{r}$. Il piano $\mathbf{H}_2$ contiene $\mathbf{r}$ se e soltanto se appartiene al fascio di piani generato da $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_3$, che ha equazione

$$\lambda(2x + ky + 4z - 4) + \mu(x - ky - 4z - k + 6) = 0,$$

ovvero, riordinando i coefficienti,

$$(2\lambda + \mu)x + k(\lambda - \mu)y + 4(\lambda - \mu)z - (4\lambda + (k - 6)\mu) = 0.$$

Perché $\mathbf{H}_2$ appartenga al fascio deve essere

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ k(\lambda - \mu) = 1 \\ 4(\lambda - \mu) = k \\ 4\lambda + (k - 6)\mu = k. \end{cases}$$

Questo sistema, che non è lineare, ammette come unica soluzione la terna $\lambda = \frac{7}{6}$, $\mu = \frac{2}{3}$ e $k = 2$. In questo modo si ritrova il risultato precedente.

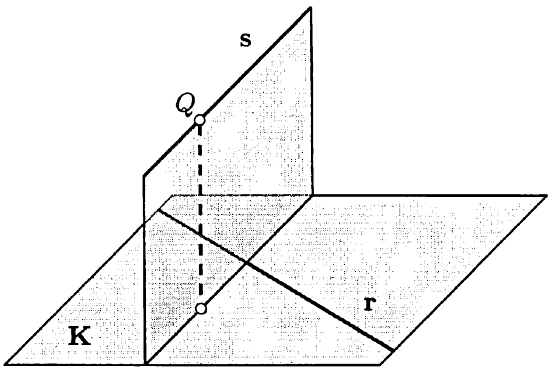
46 Un altro metodo per calcolare la distanza tra due rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ è il seguente:

1. si determina l'equazione cartesiana del piano $\mathbf{K}$ che contiene $\mathbf{r}$ e che è parallelo a $\mathbf{s}$ (per esempio usando il fascio di piani per $\mathbf{r}$, se si conoscono le equazioni cartesiane di $\mathbf{r}$);
2. si sceglie un punto qualsiasi Q della retta $\mathbf{s}$ e si usa il fatto che $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{K}, Q)$ (perché la distanza tra $\mathbf{K}$ e Q è realizzata da un vettore parallelo a $\overrightarrow{P_0Q_0}$);
3. si calcola la distanza $d(\mathbf{K}, Q)$ usando la formula per la distanza tra un punto e un piano.

Usando questo metodo ripetere l'esercizio 40.

Soluzione. Determiniamo delle equazioni cartesiane di $\mathbf{r}$ eliminando il parametro t dalla seconda equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 5y - z + 14 = 0. \end{cases}$$



Il fascio di piani supportato da $\mathbf{r}$ ha allora equazione affine

$$x + (5t - 2)y - tz + (14t - 7) = 0.$$

Il piano passante per $\mathbf{r}$ e parallelo ad $\mathbf{s}$ è il piano del fascio il cui vettore normale $\mathbf{n} = [1, 5t-2, -t]^{\mathrm{T}}$ è ortogonale alla direzione $\mathbf{w} = [2, -1, -3]^{\mathrm{T}}$ di $\mathbf{s}$. La condizione di ortogonalità $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$ si traduce nell'equazione $4 - 2t = 0$ che ha come unica soluzione $t = 2$. Sostituendo questo valore di t nell'equazione del fascio troviamo il piano $\mathbf{K} : x + 8y - 2z + 21 = 0$. Come punto della retta $\mathbf{s}$ prendiamo $Q = (1, 0, 1)$, ottenuto per $u = 2$. Infine

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{K}, Q) = \frac{|1 + 0 - 2 + 21|}{\sqrt{1 + 64 + 4}} = \frac{20}{\sqrt{69}}.$$

2 Sistemi lineari

1. METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

10 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, n). Mostrare che il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ha sempre almeno una soluzione: il vettore nullo $\mathbf{0}$. Mostrare anche che $r([\mathbf{A}|\mathbf{0}]) = r(\mathbf{A})$, coerentemente col teorema di Rouché-Capelli.

Soluzione. Per dimostrare che $\mathbf{0}$ è soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ basta provare che $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$. Il prodotto $\mathbf{A0}$ è un vettore colonna di m righe la cui riga i è il prodotto della riga i di $\mathbf{A}$ per l'unica colonna di $\mathbf{0}$ e vale dunque

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot 0) = 0.$$

Tutte le righe di $\mathbf{A0}$ sono nulle e dunque $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$. Un'alternativa per dimostrare che $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ è quella di fare uso della proposizione 5.4:

$$\mathbf{A0} = \mathbf{A}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \mathbf{A0} = \mathbf{0}.$$

L'ultima uguaglianza è una conseguenza del fatto che una qualunque matrice moltiplicata per 0 dà la matrice nulla.

Per calcolare $r([\mathbf{A}|\mathbf{0}])$, supponiamo che $\mathbf{U}$ sia la riduzione a scala di $\mathbf{A}$ e che S sia la successione di operazioni riga utilizzate per ottenere $\mathbf{U}$ da $\mathbf{A}$. La stessa successione S applicata alla matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ produce allora la matrice $[\mathbf{U}|\mathbf{0}]$, perché tutti gli elementi dell'ultima colonna sono nulli. Ma $[\mathbf{U}|\mathbf{0}]$ è una matrice a scala e dunque è la riduzione a scala di $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$. I suoi pivot sono esattamente quelli di $\mathbf{U}$, dunque

$$r([\mathbf{A}|\mathbf{0}]) = r([\mathbf{U}|\mathbf{0}]) = r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{A}).$$

11 La linearità in $\mathbf{v}$ del prodotto $\mathbf{Av}$ è una versione matematica del *principio di sovrapposizione*: mostrare che se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono soluzione rispettivamente dei sistemi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$, allora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

Soluzione. Se $\mathbf{v}_i$ è soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$, allora $\mathbf{Av}_i = \mathbf{b}_i$. La proposizione 5.4 garantisce che il prodotto di una matrice per un vettore è lineare nel vettore. Dunque

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{Av}_1 + \mathbf{Av}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

Questo significa che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

12 Sia $\mathbf{A}$ una matrice con due sole righe. Mostrare che, se $r(\mathbf{A}) < 2$, allora o la prima riga è nulla oppure la seconda è un multiplo scalare della prima.

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ le righe di $\mathbf{A}$. Si osservi che se $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ allora la conclusione è soddisfatta. D'altra parte, se $\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{A}_2 = 0 \cdot \mathbf{A}_1$. Dunque l'unico caso da considerare è quello in cui sia $\mathbf{A}_1$ che $\mathbf{A}_2$ non sono nulle. Si noti che in questo caso deve essere $r(\mathbf{A}) = 1$.

Siano a_{1i} e a_{2j} i primi elementi non nulli di $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$. Proviamo che deve essere $i = j$. Infatti se fosse $i < j$, allora la matrice $\mathbf{A}$ sarebbe a scala di rango 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots \end{bmatrix}$$

Se invece fosse $i > j$ allora, scambiando le due righe, otterremmo una riduzione a scala di $\mathbf{A}$ di rango 2 e dunque ancora $r(\mathbf{A}) = 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots \end{bmatrix}$$

Dunque $i = j$ e a_{1i} è l'unico pivot di $\mathbf{A}$. Se indichiamo con $\mathbf{U}$ la riduzione a scala di $\mathbf{A}$, allora

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1, \qquad \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_2 - \frac{a_{2i}}{a_{1i}}\mathbf{A}_1.$$

Ma $r(\mathbf{A}) = 1$ implica che la seconda riga di $\mathbf{U}$ deve essere nulla e dunque

$$\mathbf{A}_2 = \frac{a_{2i}}{a_{1i}}\mathbf{A}_1.$$

13 Sia $\mathbf{B}$ una matrice con due sole colonne. Mostrare che, se $r(\mathbf{B}) < 2$, allora o la prima colonna è nulla oppure la seconda è un multiplo scalare della prima.

Soluzione. Il sistema lineare $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ ha soluzioni perché, come visto nell'esercizio 10, $r([\mathbf{B}|\mathbf{0}]) = r(\mathbf{B})$. Dal teorema di Rouché-Capelli sappiamo anche che queste soluzioni sono infinite, perché ci sono due indeterminate e $r(\mathbf{B}) < 2$. In particolare, deve esistere almeno una soluzione non nulla $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$. Se indichiamo con $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ le colonne di $\mathbf{B}$, allora

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}.$$

Se $x_2 = 0$ allora $x_1 \neq 0$ e $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$. Se invece $x_2 \neq 0$, allora

$$\mathbf{b}_2 = -\frac{x_1}{x_2}\mathbf{b}_1$$

e la seconda colonna è multiplo della prima.

14 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo $(3,3)$. Mostrare che $r(\mathbf{A}) < 3$ se e solo se le tre colonne di $\mathbf{A}$, come vettori di $\mathbb{R}^3$, sono linearmente dipendenti. Concludere che la matrice ha rango tre se e solo se il suo determinante è diverso da zero (il determinante della matrice è il prodotto misto delle sue tre colonne).

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{a}_i$ la colonna i-esima di $\mathbf{A}$. Per il teorema di Rouché-Capelli, $r(\mathbf{A}) < 3$ se e soltanto se il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ammette una soluzione non nulla, cioè se e soltanto se esiste una terna non nulla $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

e questa è esattamente la condizione di dipendenza lineare fra le colonne di $\mathbf{A}$. La proposizione 7.5 del capitolo 1 prova che questa condizione è equivalente all'annullarsi del prodotto misto $\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$.

15 Sia $ax+by+c = 0$ la generica equazione di una retta nel piano cartesiano. Si scriva il sistema lineare nelle incognite a, b, c ottenuto richiedendo che la retta passi per due punti A e B. Sia $\mathbf{A}$ la matrice 2×3 dei coefficienti di tale sistema. Si mostri che $r(\mathbf{A}) = 2$ se e solo se i due punti sono distinti. Dedurre usando Rouché-Capelli che esiste un'unica retta in $\mathbb{R}^2$ che passa per due punti distinti.

Soluzione. La retta generica $\mathbf{r} : ax + by + c = 0$ passa per due punti assegnati $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ se e soltanto se i coefficienti a, b e c nell'equazione di $\mathbf{r}$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0. \end{cases}$$

È conveniente riordinare le indeterminate secondo la successione (c, a, b). In questo modo la matrice dei coefficienti del sistema e la sua riduzione a scala sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

La prima riga di $\mathbf{U}$ è certamente non nulla per la presenza del coefficiente 1. La seconda riga di $\mathbf{U}$ è nulla quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, cioè quando $A = B$. Dunque $r(\mathbf{A}) = 2$ se e soltanto se $A \neq B$.

Se $A \neq B$ e, di conseguenza, $r(\mathbf{A}) = 2$, allora il teorema di Rouché-Capelli garantisce che le soluzioni del sistema sono tutti i multipli di un vettore non nullo $\mathbf{v} = [c, a, b]^{\mathrm{T}}$. Si osservi che non può essere $a = b = 0$, altrimenti dalle equazioni del sistema si ottiene anche $c = 0$, mentre deve essere $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pertanto tutte le soluzioni del problema sono della forma

$$t(ax + by + c) = 0$$

con $t \in \mathbb{R}$ e $p(x, y) = ax + by + c$ un polinomio di grado 1. Se $t = 0$ questa equazione non rappresenta una retta. Se invece $t \neq 0$ l'equazione è equivalente ad $ax+by+c = 0$ che rappresenta un'unica retta di $\mathbb{R}^2$.

16 Sia $ax+by+cz+d=0$ la generica equazione di un piano dello spazio cartesiano. Si scriva il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d ottenuto richiedendo che il piano passi per tre punti A_1, A_2 e A_3. Sia $\mathbf{A}$ la matrice 3×4 dei coefficienti di tale sistema. Si mostri che $r(\mathbf{A}) = 3$ se e solo se i tre punti non sono allineati. Dedurre usando Rouché-Capelli che esiste un unico piano in $\mathbb{R}^3$ che passa per tre punti non allineati.

Soluzione. Supponiamo che i punti assegnati siano $A_i = (x_1, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Il piano generico di $\mathbb{R}^3$ passa per questi punti se e soltanto se i coefficienti a, b, c e d della sua equazione sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0. \end{cases}$$

Conviene riordinare le indeterminate secondo la successione (d, a, b, c). In questo modo la matrice dei coefficienti del sistema e la matrice ottenuta dopo il primo passo dell'eliminazione gaussiana assumono la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Se indichiamo con $\mathbf{C}$ la matrice ottenuta da $\mathbf{B}$ cancellando la prima riga, allora $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{C}) + 1$, quindi il problema si riduce a quello di stabilire quando $r(\mathbf{C}) = 2$. Dall'esercizio 12 sappiamo che $r(\mathbf{C}) < 2$ se e soltanto se una riga è multipla dell'altra e cioè se o $A_2 - A_1$ è multiplo di $A_3 - A_1$, o $A_3 - A_1$ è multiplo di $A_2 - A_1$. Ma questa condizione equivale ad affermare che i punti A_1, A_2 e A_3 sono allineati.

Supponiamo dunque che i tre punti non siano allineati e che, di conseguenza, sia $r(\mathbf{A}) = 3$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema iniziale ammette infinite soluzioni della forma $t\mathbf{v}$ con $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} = [a, b, c, d]^{\mathrm{T}}$ un vettore non nullo. A queste soluzioni del sistema corrispondono le infinite equazioni $t(ax + by + cz + d) = 0$. Per $t = 0$ questa equazione non rappresenta un piano. Se $t \neq 0$, invece, l'equazione equivale ad $ax + by + cz + d = 0$ che è di grado 1, perché se fosse $a = b = c = 0$ allora dal sistema si otterrebbe anche $d = 0$, mentre deve essere $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Dunque per $t \neq 0$ tutte le equazioni descrivono un unico piano.

17 Si determini un'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = e$ per l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ passante per i punti

$$P_1 = (1, -1, 3, -2), \qquad P_2 = (-2, 2, -4, 0),$$
$$P_3 = (3, -4, 8, -3), \qquad P_4 = (2, -1, 8, -4).$$

Soluzione. L'iperpiano

$$\mathbf{H} : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = e$$

passa per i punti P_i assegnati se i coefficienti dell'equazione di $\mathbf{H}$ sono soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a - b + 3c - 2d - e = 0 \\ -2a + 2b - 4c - e = 0 \\ 3a - 4b + 8c - 3d - e = 0 \\ 2a - b + 8c - 4d - e = 0 \end{cases}$$

ottenuto sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione di $\mathbf{H}$. Se scriviamo la matrice dei coefficienti del sistema e la riduciamo a scala, troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 8 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 4$ il sistema ha infinite soluzioni che dipendono, in questo caso, dalla variabile libera e. Risolvendo la riduzione a scala del sistema per sostituzione retrograda troviamo

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{10}e \\ b = -\frac{2}{5}e \\ c = -\frac{3}{10}e \\ d = -\frac{9}{10}e, \end{cases}$$

da cui, prendendo $t = \frac{1}{10}e$ come parametro, si vede che tutte le soluzioni sono della forma $t[-3, -4, -3, -9, 10]^{\mathrm{T}}$ con $t \in \mathbb{R}$. Escluso il valore $t = 0$ per cui la soluzione non rappresenta un iperpiano, tutti gli altri valori di t definiscono equazioni equivalenti. Scelto, per convenienza, $t = -1$, troviamo

$$\mathbf{H} : 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 = -10.$$

18 Fissato $a \in \mathbb{R}$ si considerino le rette $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ di equazioni parametriche rispettivamente

$$(x, y, z) = (at, a^2t, 1 - t)$$
$$(x, y, z) = (2 + u, 2 - 11u, -1 + 3u).$$

Determinare i valori del parametro a per il quale le due rette sono incidenti e per tali valori trovare il punto P di incidenza.

Soluzione. I punti comuni alle due rette si ottengono per quei valori di t e u per cui risulta

$$(at, a^2t, 1 - t) = (2 + u, 2 - 11u, -1 + 3u).$$

Se uguagliamo le coordinate corrispondenti otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} at - u = 2 \\ a^2t + 11u = 2 \\ t + 3u = 2 \end{cases}$$

nelle indeterminate t e u. Per risolvere questo sistema scriviamo la matrice completa e la riduciamo a scala per eliminazione gaussiana. Troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & -1 & 2 \\ a^2 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ a^2 & 11 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1-3a & 2-2a \\ 0 & 11+a & 2-2a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_2 - a\mathrm{R}_1 \longrightarrow \\ \mathrm{R}_3 - a\mathrm{R}_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 32 & 8(1-a) \\ 0 & 11+a & 2(1-a) \end{bmatrix} \mathrm{R}_2 + 3\mathrm{R}_3 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_2/8 \\ 4\left(\mathrm{R}_3 - \frac{11+a}{32}\mathrm{R}_2\right) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1-a \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) \end{array}\right]$$

Il rango della matrice dei coefficienti è sempre due, mentre quello della matrice completa è due se e solo se $a = 1$ oppure $a = -3$. Soltanto in questi due casi il sistema ha soluzione e la soluzione è unica. Quindi le due rette sono incidenti solo per $a = 1$ e $a = -3$. Per determinare il punto di intersezione in questi due casi, risolviamo il sistema associato alla matrice ridotta a scala. Nel caso $a = 1$ abbiamo

$$\begin{cases} t + 3u = 2 \\ 4u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -3u + 2 = 2 \\ u = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $u = 0$ nell'equazione della seconda retta troviamo il punto d'incidenza $P = (2, 2, -1)$. Nel caso $a = -3$ abbiamo invece

$$\begin{cases} t + 3u = 2 \\ 4u = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -3u + 2 = -1 \\ u = 1. \end{cases}$$

Anche in questo caso, sostituendo $u = 1$ nell'equazione della seconda retta, si trova il punto di intersezione $P = (3, -9, 2)$.

19 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, n) di rango r. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

1. Se il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, allora $r = m$.
2. Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette più di una soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ non ammette alcuna soluzione.
3. Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette infinite soluzioni, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette infinite soluzioni per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
4. Se il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette al più una soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, allora $r = n$.

5. Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ non ammette alcuna soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ ammette infinite soluzioni.

6. Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette esattamente una soluzione, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette esattamente una soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soluzione. 1. Vera. Vale la pena osservare che vale un'affermazione leggermente più generale: il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ha soluzione per ogni $\mathbf{b}$ se e soltanto se $r = m$. Infatti se $r = m$, allora, posto $r' = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, deve essere $r \leq r' \leq m = r$. Ma allora $r = r'$ e il sistema ha soluzione per il teorema di Rouché-Capelli. Se invece $r < m$, allora, riducendo $\mathbf{A}$ a scala, si ottiene una matrice $\mathbf{U}$ la cui ultima riga è nulla. Detta S la successione delle operazioni riga effettuate per passare da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{U}$ e detto $\mathbf{b}$ il vettore di $\mathbb{R}^m$ che si ottiene dal vettore $\mathbf{e}_m = [0, \ldots, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ applicando le operazioni inverse di S nell'ordine opposto, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non ha soluzione. Infatti, applicando le operazioni di S alla matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ si ottiene la riduzione a scala $[\mathbf{U}|\mathbf{e}_m]$ che ha $r < r'$.

2. Vera. Se $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette più di una soluzione, allora per il teorema di Rouché-Capelli deve essere $r < n = m$. Per quanto dimostrato al punto 1, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non può avere soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

3. Falsa. Il sistema di un'equazione in un'unica incognita $0x = 0$ ammette infinite soluzioni in $\mathbb{R}$, mentre il sistema $0x = 1$ non ne ammette nessuna.

4. Vera. Il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ deve avere un'unica soluzione. Dal teorema di Rouché-Capelli $r = n$.

5. Vera. Se il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ non ammette soluzione, allora deve essere $r < m$ per quanto dimostrato al punto 1. Ma allora $r < n$ e il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ammette infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ variabili libere.

6. Falsa. Si prenda come matrice $\mathbf{A}$ il vettore colonna $\mathbf{e}_1 = [1, 0]^{\mathrm{T}}$. Allora il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1$ ammette l'unica soluzione $\mathbf{x} = 1$. Invece il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_2 = [0, 1]^{\mathrm{T}}$ non ha soluzione.

20 Verificare il teorema di Rouché-Capelli negli esempi del paragrafo 3 del testo:

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 8y + 10z = 20 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ 2x + 3y - 10z = 2 \\ 5x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \\ 4x + y - 9z = 7 \end{cases}$

Soluzione. 1. La matrice completa del sistema è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

ed è già ridotta a scala. Se indichiamo con r il rango della matrice dei coefficienti, con r' il rango della matrice completa e con n il numero delle colonne della matrice dei coefficienti, abbiamo $r = r' = 1 < 3 = n$. Il teorema di Rouché-Capelli prevede dunque che il sistema abbia infinite soluzioni che dipendono da $n - r = 3 - 1 = 2$ parametri. Come si vede nel testo le soluzioni sono date dai vettori $[-2t_1 - 3t_2 + 6, t_1, t_2]^{\mathrm{T}}$ che dipendono appunto dai due parametri t_1 e t_2.

2. Se scriviamo la matrice completa del sistema e la riduciamo a scala troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array}\right].$$

In questo caso $r = r' = 2$, dunque il sistema ha soluzioni. Queste soluzioni dipendono da $n - r = 3 - 2 = 1$ parametro e quindi sono infinite. Come si vede nel testo, le soluzioni possono essere scritte nella forma $[2 - t, 2 - t, t]^{\mathrm{T}}$ con $t \in \mathbb{R}$.

3. Riducendo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 10 & 20 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

In questo caso $n = r = r' = 3$ dunque il sistema ha un'unica soluzione. Come mostrato nel testo, questa soluzione è il vettore $[0, 0, 2]^{\mathrm{T}}$.

4. Riducendo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

In questo caso $r = r' = 2 < 3 = n$, dunque il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da 1 parametro. Le soluzioni sono date nel testo nella forma $[1 + 2t, 2t, t]^{\mathrm{T}}$ con $t \in \mathbb{R}$.

5. Riducendo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right].$$

In questo caso $r = 2 < 3 = r'$, quindi il sistema non ha soluzione in accordo con quanto visto nel testo.

21 Ridurre a scala le matrici seguenti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \\ 3 & 8 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 4 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -6 & 1 & 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. 1. Utilizziamo l'elemento di posto $(1,1)$ come pivot per eliminare tutti gli altri elementi della prima colonna, sottraendo multipli della prima riga a tutte le righe successive. Le operazioni riga effettuate ad ogni passo sono indicate a destra della matrice corrispondente. Così, nel primo passo, la prima riga non viene modificata, la seconda riga della nuova matrice è la seconda riga di $\mathbf{A}$ cui è stata sommata la prima, la terza riga si ottiene sommando alla terza riga di $\mathbf{A}$ il doppio della prima e così via. Si noti che le righe indicate ad ogni passo si riferiscono a quelle della matrice immediatamente precedente.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 14 & 19 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 15 \\ 0 & 2 & 6 & 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 - 5R_1 \\ R_5 - 3R_1 \end{matrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 4R_2 \\ R_4 - 4R_2 \\ R_5 - 2R_2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 + R_3 \\ R_5 - 2R_3 \end{matrix} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ R_5 + R_4 \end{matrix}$$

2. Con la stessa simbologia del punto precedente abbiamo

$$\mathbf{B} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 + 3R_1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + 3R_2 \\ R_4 - 4R_2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 + R_3 \end{matrix}$$

22 Determinare il rango delle matrici seguenti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 & 10 \\ -3 & -5 & -1 & -8 \\ 1 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & -3 & 9 & 5 & 10 \\ -2 & 4 & 6 & -18 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Se utilizziamo l'eliminazione gaussiana e riduciamo a scala le matrici troviamo

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La riduzione a scala di $\mathbf{A}$ presenta tre righe non nulle, dunque $r(\mathbf{A}) = 3$. La riduzione a scala di $\mathbf{B}$ ha quattro righe non nulle, dunque $r(\mathbf{B}) = 4$.

23 Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 8z = -18 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 8y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 8 \\ 3x + 4y - 8z = 18 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 4y + 6z = 1 \\ 6x + 5y + 6z = -1 \\ 6x + y + 3z = -11. \end{cases}$

Soluzione. 1. Riduciamo a scala la matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Sia la riduzione a scala delle matrice dei doefficienti che quella della matrice completa hanno tre righe non nulle, dunque $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha un'unica soluzione, che calcoliamo per sostituzione retrograda a partire dal sistema associato alla riduzione a scala:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3z = -8 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y + 4 = -2 + 4 = 2 \\ y = 3z - 8 = 9 - 8 = 1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Un'alternativa alla sostituzione retrograda è la forma normale di Gauss-Jordan: dopo avere effettuato la riduzione a scala di $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, utilizziamo i pivot dal basso a destra verso l'alto a sinistra per eliminare gli elementi di ciascuna colonna al di sopra dei pivot. Otteniamo la matrice

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

da cui si legge immediatamente la soluzione $[2, 1, 3]^{\mathrm{T}}$.

2. Riduciamo a scala la matrice completa del sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -8 & 18 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

In questo caso $r(\mathbf{A}) = 3 < 4 = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ e dunque, sempre per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non ha soluzioni.

3. Riduciamo la scala la matrice completa del sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & -1 \\ 6 & 1 & 3 & -11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Come nel caso precedente, $r(\mathbf{A}) = 3 < 4 = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ e il sistema non ha soluzioni.

24 Risolvere il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 17 \\ x_1 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 5 \end{cases}$$

Soluzione. Scriviamo la matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ del sistema e la riduciamo a scala.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & -7 & 7 & 17 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Abbiamo $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 4$ e dunque il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - r = 5 - 4 = 1$ variabile libera. Ricordiamo che le variabili dipendenti sono quelle che corrispondono alle colonne della matrice a scala in cui compaiono i pivot, mentre le rimanenti variabili sono libere. Nel nostro caso la variabile libera è x_5. Per determinare le soluzioni scriviamo il sistema associato alla riduzione a scala e risolviamo per sostituzione retrograda rispetto alle sole variabili dipendenti.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 5 = x_5 + 2 \\ x_2 = -2x_4 - x_5 + 2 = -x_5 + 2 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 + 1 = -2x_5 + 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per scrivere le soluzioni in forma vettoriale sostituiamo la variabile libera x_5 con un parametro t. Troviamo

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 1 - 2t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

 © 978-88-08-19252-3

25 Risolvere il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_4 - 7x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 12x_4 - 12x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema è omogeneo e quindi soddisfa certamente le condizioni del teorema di Rouché-Capelli. Per determinare lo spazio delle soluzioni basta allora ridurre a scala la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$. Troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -7 & -7 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 3$, le soluzioni dipendono da $n - r = 6 - 3 = 3$ variabili libere. Le variabili dipendenti, che corrispondono alle colonne dei pivot, sono x_1, x_2 e x_3, mentre le rimanenti sono libere. Scriviamo allora il sistema associato alla matrice a scala e lo risolviamo rispetto alle variabili dipendenti per sostituzione retrograda. Troviamo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 - 3x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 - x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 - x_6 = -9x_4 + x_5 + 13x_6 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 = 5x_4 + x_5 - 5x_6 \\ x_3 = 2x_4 + x_5 - 4x_6 \end{cases}$$

Se introduciamo i parametri $t_1 = x_4$, $t_2 = x_5$ e $t_3 = x_6$, possiamo riscrivere la soluzione nella forma

$$\begin{cases} x_1 = -9t_1 + t_2 + 13t_3 \\ x_2 = 5t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 = 2t_1 + t_2 - 4t_3 \\ x_4 = t_1 \\ x_5 = t_2 \\ x_6 = t_3 \end{cases} \qquad \mathbf{x} = t_1 \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

26 Tra le parabole di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

determinare quella che passa per i punti $(-1, 2)$, $(0, 3)$ e $(1, 6)$.

Soluzione. La parabola passa per i punti assegnati se le coordinate di questi punti sono soluzioni dell'equazione della parabola, cioè se sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 3 \\ a + b + c = 6. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare nei coefficienti della parabola che risolviamo riducendo a scala la matrice completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 3 = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, il sistema ha un'unica soluzione che determiniamo per sostituzione retrograda a partire dal sistema associato alla riduzione a scala.

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b - c + 2 = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Dunque l'unica parabola del tipo assegnato che passa per i punti dati ha equazione $y = x^2 + 2x + 3$.

2. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

27 Siano $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ due rette di $\mathbb{R}^3$ definite dalle equazioni cartesiane

$$\mathbf{r} : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4. \end{cases}$$

Sia S il sistema lineare di quattro equazioni in tre incognite ottenuto prendendo l'unione delle equazioni di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$. Indicati con r ed r' i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa di S, si provi che la posizione reciproca di $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ è determinata da r e r' come segue e che questi sono gli unici valori possibili per r e r'.

1. Se $r = 2 = r'$ allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ coincidono.
2. Se $r = 2$ e $r' = 3$ allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono parallele e distinte.
3. Se $r = 3 = r'$ allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono incidenti.
4. Se $r = 3$ e $r' = 4$ allora $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono sghembe.

28 Siano $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ due piani di $\mathbb{R}^3$ rappresentati dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{H}_1 : X = P + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{H}_2 : X = Q + u_1\mathbf{w}_1 + u_2\mathbf{w}_2.$$

Sia $\mathbf{A}$ la matrice 3×4 le cui colonne sono date dai vettori $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{w}_i$ e sia $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$. Indicato con $r = r(\mathbf{A})$ e con $r' = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, si provi che gli unici valori possibili per r ed r' sono quelli indicati di seguito e che questi valori determinano la posizione reciproca dei due piani come segue.

1. Se $r = 2 = r'$ allora $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ coincidono.
2. Se $r = 2$ e $r' = 3$ allora $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono paralleli e distinti.
3. Se $r = 3 = r'$ allora $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ hanno una retta in comune.

29 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m,n) e rango r e sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Si provino i fatti seguenti relativi al sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

1. Il sistema ammette almeno una soluzione per ogni $\mathbf{b}$ se e solo se $r = m$.
2. Il sistema ammette al più una soluzione per ogni $\mathbf{b}$ se e solo se $r = n$.
3. Il sistema ammette esattamente una soluzione per ogni $\mathbf{b}$ se e solo se $r = m = n$.

(Suggerimento: vedere l'esercizio 19.)

30 Risolvere i sistemi lineari seguenti.

1. $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 6 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 4x_5 = -7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 7y - z = -2 \\ 2x - 8y + z = -8 \\ x + y - 9z = -2 \\ x - 4y + 6z = -1 \\ 2x - 3y - 4z = 2 \end{cases}$

Soluzione. Nessuno dei sistemi ha soluzione.

31 Risolvere i sistemi lineari seguenti.

1. $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = -4 \\ x + 4y - 11z = -1 \\ -5x + 9y - 11z = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 4y - z = -3 \\ 2x - 6y + z = -7 \\ x + 2y - 9z = -3 \\ x - 3y + 6z = 2 \\ 2x - y - 4z = -2 \end{cases}$

Soluzione. Entrambi i sistemi ammettono come unica soluzione il vettore $[2, 2, 1]^{\mathrm{T}}$.

32 Risolvere i sistemi lineari seguenti.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 6x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 5 \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 6x_5 = -2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 10 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 5 \\ -3x_1 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 3x_5 = -6 \\ -5x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 3x_5 = 3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 8 \\ -7x_1 + 7x_2 + 13x_3 - 20x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$

Soluzione. Tutti i sistemi ammettono come soluzioni i vettori $[1 + t_1 - t_2, t_1, 1 + t_2, t_2, 1]^{\mathrm{T}}$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

33 Risolvere in dipendenza dal parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare seguente.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - kx_3 + (k-1)x_4 = k^2 - k \\ 3x_1 + 3x_2 - 2kx_3 + (2k-2)x_4 = 2k^2 - 2k - 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4kx_3 + (3k-3)x_4 = 3k^2 - 4k - 2. \end{cases}$$

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema non ha soluzione. Se $k = 1$ il sistema ammette le soluzioni $[1 - t_1, t_1, 2, t_2]^{\mathrm{T}}$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. In tutti gli altri casi, il sistema ammette le soluzioni $[1 - t, t, 1 + \frac{1}{k}, k + 1]^{\mathrm{T}}$ con $t \in \mathbb{R}$.

3 Algebra delle matrici

1. IL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

1 Moltiplicare la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

a destra per i vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ e verificare che così si ottengono le colonne di $\mathbf{A}$. Moltiplicare poi $\mathbf{A}$ a sinistra per ${\mathbf{e}_1}^{\mathrm{T}}$, ${\mathbf{e}_2}^{\mathrm{T}}$ e ${\mathbf{e}_3}^{\mathrm{T}}$ e verificare che così si ottengono le righe di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Moltiplicazione a destra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Moltiplicazione a sinistra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{\cdot}1 + 0{\cdot}3 + 0{\cdot}6 & 1{\cdot}2 + 0{\cdot}4 + 0{\cdot}7 & 1{\cdot}3 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}1 + 1{\cdot}3 + 0{\cdot}6 & 0{\cdot}2 + 1{\cdot}4 + 0{\cdot}7 & 0{\cdot}3 + 1{\cdot}5 + 0{\cdot}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{\cdot}1 + 0{\cdot}3 + 1{\cdot}6 & 0{\cdot}2 + 0{\cdot}4 + 1{\cdot}7 & 0{\cdot}3 + 0{\cdot}5 + 1{\cdot}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

2 Calcolare i prodotti indicati, dopo aver controllato che si possano effettuare e aver scritto il numero di righe e di colonne che la matrice prodotto deve avere in ciascun caso:

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$

Soluzione. Ricordiamo che il prodotto $\mathbf{AB}$ di due matrici è definito solo quando il numero di colonne di $\mathbf{A}$ è uguale al numero di righe di $\mathbf{B}$. Questa condizione è soddisfatta per tutti i prodotti indicati ad eccezione dell'ultimo. La matrice prodotto $\mathbf{AB}$, quando è definita, ha lo stesso numero di righe di $\mathbf{A}$ e lo stesso numero di colonne di $\mathbf{B}$.

1. Il prodotto è una matrice di tipo $(1,1)$ e può essere identificata con uno scalare.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = [1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 4\cdot 1] = [11] = 11.$$

2. La matrice prodotto è di tipo $(3,3)$.

$$\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 4\\2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 4\\1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\2 & 4 & 8\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

3. La matrice prodotto è di tipo $(2,2)$.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{\cdot}1+2{\cdot}0-4{\cdot}1 & 1{\cdot}2+2{\cdot}1+4{\cdot}4\\2{\cdot}1+0{\cdot}0+1{\cdot}1 & 2{\cdot}2+0{\cdot}1-1{\cdot}4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 20\\3 & 0\end{bmatrix}$$

4. La matrice prodotto è di tipo $(3,3)$.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{\cdot}1+2{\cdot}2 & 1{\cdot}2+2{\cdot}0 & 1{\cdot}4-2{\cdot}1\\0{\cdot}1+1{\cdot}2 & 0{\cdot}2+1{\cdot}0 & 0{\cdot}4-1{\cdot}1\\-1{\cdot}1+4{\cdot}2 & -1{\cdot}2+4{\cdot}0 & -1{\cdot}4-4{\cdot}1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\2 & 0 & -1\\7 & -2 & -8\end{bmatrix}$$

5. Come già detto, in questo caso il prodotto non è definito, perché $\mathbf{A}$ ha due colonne mentre $\mathbf{B}$ ha tre righe.

3 Calcolare le potenze $\mathbf{A}^k$ della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Soluzione. Cominciamo a calcolare il quadrato di $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando calcoliamo il cubo di $\mathbf{A}$ troviamo

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Questo implica che $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ per ogni $k \geq 3$. Lo dimostriamo per induzione su k. Supponiamo vera l'affermazione per un $k \geq 3$ fissato. Per il successore $k+1$ abbiamo

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}.$$

Dunque la formula è vera per tutti i $k \geq 3$.

4 Sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determinare tutte le matrici $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Soluzione. Se indichiamo con $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ le colonne di $\mathbf{B}$, la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ è equivalente alle condizioni

$$\mathbf{Ab}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per $i = 1, 2$. Questo significa che le matrici $\mathbf{B}$ cercate sono quelle le cui colonne appartengono al nucleo di $\mathbf{A}$, che determiniamo risolvendo il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Riducendo a scala $\mathbf{A}$ troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque $r(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ ha dimensione $n - r = 1$. Se risolviamo il sistema associato alla riduzione a scala rispetto all'unica variabile dipendente e sostituiamo un parametro t alla variabile libera, otteniamo le soluzioni del sistema nella forma $[-2t, t]^{\mathrm{T}}$.

Le colonne di $\mathbf{B}$ si ottengono scegliendo due valori non necessariamente uguali di t. Dunque

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ x & y \end{bmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{K}$.

5 Per il prodotto di matrici *non vale la legge di annullamento*: il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla senza che alcuno dei fattori sia nullo. Fornire dei controesempi:

1. trovare una matrice quadrata $\mathbf{A}$, non nulla, di ordine 2 tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$;
2. trovare due distinte matrici quadrate $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ di ordine due, non nulle, tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$.

Soluzione. 1. I calcoli fatti nell'esercizio 3 suggeriscono di utilizzare una matrice triangolare alta. In effetti, se prendiamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

2. Come visto nell'esercizio 4, basta prendere una matrice **B** le cui colonne stanno nel nucleo di **A**. Utilizzando i conti di quell'esercizio, possiamo prendere la stessa matrice **A** e scegliere $x = y = 1$ per **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6 Per il prodotto di matrici *non vale la legge di cancellazione*: da $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ non segue $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Trovare tre matrici quadrate **A**, **B** e **C** di ordine due tali che $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, ma $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Mostrare però che la legge di cancellazione vale se $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ contiene solo il vettore nullo.

Soluzione. Ancora una volta possiamo riprendere l'esercizio 4 e scegliere due matrici **B** e **C** le cui colonne stanno nel nucleo di **A**. Ad esempio, possiamo prendere $x = y = 1$ per **B** e $x = y = 2$ per **C**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dall'esercizio 4 abbiamo allora che

$$\mathbf{AB} = \mathbf{O} = \mathbf{AC}.$$

Supponiamo ora che $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ contenga solo il vettore nullo e $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Allora $\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{O}$. Quest'ultima uguaglianza equivale a dire che tutte le colonne di $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ appartengono al nucleo di **A**. Quindi tutte le colonne di $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ sono il vettore nullo, e questo significa che $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, come volevasi dimostrare.

7 Sia **A** una matrice quadrata di ordine n. Spiegare perché $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2\mathbf{A}$.

Soluzione. Ricordiamo che le potenze naturali di una matrice **A** sono definite induttivamente dalle formule

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}^n\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Ricordiamo anche che il prodotto di matrici è associativo, cioè vale la formula

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}),$$

e che in mancanza di parentesi il prodotto si intende associato a sinistra. Da queste formule abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{A}^2\mathbf{A} &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^2)\mathbf{A} && \text{(convenzione sulle parentesi)}\\
&= (\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}))\mathbf{A} && \text{(definizione di potenza)}\\
&= ((\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{A})\mathbf{A} && \text{(proprietà associativa)}\\
&= (\mathbf{A}^2\mathbf{A})\mathbf{A} && \text{(definizione di potenza)}\\
&= \mathbf{A}^3\mathbf{A} && \text{(definizione di potenza)}\\
&= \mathbf{A}^4 && \text{(definizione di potenza).}
\end{aligned}$$

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n. Mostrare che $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$ per ogni $k, l \geq 0$.

Soluzione. Dimostriamo la formula per induzione su l. Per $l = 0$ occorre ricordare che $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ è l'elemento neutro del prodotto, per cui risulta

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^k\mathbf{I} = \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k+0}.$$

Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo l e per tutti i k. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{l+1} &= \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^l\mathbf{A}) && \text{(definizione di potenza)}\\
&= (\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l)\mathbf{A} && \text{(proprietà associativa del prodotto)}\\
&= \mathbf{A}^{k+l}\mathbf{A} && \text{(ipotesi induttiva)}\\
&= \mathbf{A}^{k+l+1} && \text{(definizione di potenza).}
\end{aligned}$$

La formula è dunque vera per il successore di l e tutti i k, dunque è vera per tutti gli l e k.

Dimostrare che per il prodotto di due matrici diagonali vale la formula

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

Concludere che il prodotto tra matrici diagonali è commutativo.

Soluzione. Se poniamo $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, allora $a_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$ e $b_{ij} = \delta_{ij}\mu_i$, dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

è il simbolo di Kronecker. Se indichiamo con $\mathbf{C}$ la matrice prodotto $\mathbf{AB}$, allora

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\lambda_i\delta_{kj}\mu_k = \lambda_i\delta_{ij}\mu_i$$

e questo significa esattamente che $\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$. Scambiando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si ottiene $\mathbf{BA} = \operatorname{diag}(\mu_1\lambda_1, \ldots, \mu_n\lambda_n)$. Infine, ricordando che il prodotto in $\mathbb{K}$ è commutativo e dunque che $\lambda_i\mu_i = \mu_i\lambda_i$ per tutti gli indici i, abbiamo

$$\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n) = \operatorname{diag}(\mu_1\lambda_1, \ldots, \mu_n\lambda_n) = \mathbf{BA}.$$

10 Sia
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determinare tutte le matrici $\mathbf{A}$ di tipo $(2,2)$ che commutano con $\mathbf{B}$ e cioè per cui risulta $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Soluzione. Consideriamo la matrice incognita
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
Poiché
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 6a_{12} & a_{11} \\ a_{21} + 6a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ 6a_{11} & 6a_{12} \end{bmatrix},$$
la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ equivale al sistema ottenuto scrivendo le uguaglianze fra tutti gli elementi corrispondenti delle due matrici.
$$\begin{cases} a_{11} + 6a_{12} = a_{11} + a_{21} \\ a_{11} = a_{12} + a_{22} \\ a_{21} + 6a_{22} = 6a_{11} \\ a_{21} = 6a_{12} \end{cases} \equiv \begin{cases} 6a_{12} - a_{21} = 0 \\ a_{11} - a_{12} - a_{22} = 0 \\ 6a_{11} - a_{21} - 6a_{22} = 0 \\ 6a_{12} - a_{21} = 0 \end{cases}.$$
Per risolvere il sistema, che è omogeneo, riduciamo a scala la matrice dei coefficienti
$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e risolviamo il sistema associato alla riduzione a scala rispetto alle variabili dipendenti a_{11} e a_{12}:
$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} - a_{22} = 0 \\ 6a_{12} - a_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11} = a_{12} + a_{22} = \frac{1}{6}a_{21} + a_{22} \\ a_{12} = \frac{1}{6}a_{21} \end{cases}$$
Se introduciamo i parametri $x = a_{22}$ e $y = \frac{1}{6}a_{21}$, troviamo
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}a_{21} + a_{22} & \frac{1}{6}a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + y & y \\ 6y & x \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \\ &= x\mathbf{I} + y\mathbf{B} \end{aligned}$$
con $x, y \in \mathbb{K}$.

11 Trovare due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ di tipo $(2,2)$, con $\mathbf{D}$ diagonale, tali che $\mathbf{DA} \neq \mathbf{AD}$.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che moltiplicare $\mathbf{A}$ a sinistra per una matrice diagonale $\mathbf{D}$ significa moltiplicare tutte le righe di $\mathbf{A}$ per l'elemento della corrispondente riga di $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} \end{bmatrix}.$$

In modo simile, moltiplicare $\mathbf{A}$ a destra per $\mathbf{D}$ significa moltiplicare le colonne di $\mathbf{A}$ per l'elemento della corrispondente colonna di $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} \end{bmatrix}.$$

Come si vede, gli elementi sulla diagonale principale dei due prodotti coincidono e sono dunque privi di interesse per il nostro problema. Invece i due elementi al di fuori della diagonale principale sono diversi non appena $d_1 \neq d_2$ e i corrispondenti elementi di $\mathbf{A}$ non sono nulli. Possiamo allora prendere, ad esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per ottenere

$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{AD}.$$

12 Sia $\mathbf{I}$ la matrice identità di ordine n. Mostrare che

$$(\lambda\mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\lambda\mathbf{I})$$

per ogni matrice quadrata $\mathbf{B}$ di ordine n.

Soluzione. Utilizziamo l'omogeneità del prodotto di matrici a pagina 124 del testo e il fatto che $\mathbf{I}$ è elemento neutro per il prodotto.

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{I})\mathbf{B} &= \lambda(\mathbf{IB}) && \text{(omogeneità)} \\ &= \lambda\mathbf{B} && \text{(elemento neutro)} \\ &= \lambda(\mathbf{BI}) && \text{(elemento neutro)} \\ &= \mathbf{B}(\lambda\mathbf{I}) && \text{(omogeneità).} \end{aligned}$$

13 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine 2 che commuta con tutte le matrici quadrate di ordine 2: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ per ogni matrice $\mathbf{B}$ quadrata di ordine 2. Dimostrare che $\mathbf{A}$ è un multiplo scalare dell'identità: esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$. Dimostrare l'enunciato analogo per le matrici quadrate di ordine n.

Soluzione. Consideriamo le matrici

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{A}$ commuta con tutte le matrici di ordine 2, deve anche commutare con queste matrici. Ma

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_{12}\mathbf{A} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow a_{21} = 0 \quad \text{e} \quad a_{11} = a_{22}.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo,

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_{21} = \mathbf{E}_{21}\mathbf{A} \Leftrightarrow a_{12} = 0 \quad \text{e} \quad a_{11} = a_{22}.$$

Dunque deve essere $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = a_{21} = 0$. Se poniamo $\lambda = a_{11} = a_{22}$, otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I}.$$

Dimostriamo ora il caso generale per matrici di ordine n. Indichiamo con $\mathbf{E}_{ij}$ la matrice quadrata di ordine n che ha tutti gli elementi nulli, fatta eccezione per l'elemento di posto (i, j) che vale 1. Se indichiamo con e_{hk}^{ij} l'elemento di posto (h, k) della matrice $\mathbf{E}_{ij}$, allora

$$e_{hk}^{ij} = \delta_{ih}\delta_{jk}.$$

Si osservi ora che gli elementi di posto (h, k) nelle matrici $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ e $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} a_{hl}e_{lk}^{ij} &= \sum_{l=1}^{n} a_{hl}\delta_{il}\delta_{jk} = a_{hi}\delta_{jk} \\ \sum_{l=1}^{n} e_{hl}^{ij}a_{lk} &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{ih}\delta_{jl}a_{lk} = \delta_{ih}a_{jk}.\end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ commuta con tutte le matrici quadrate di ordine n deve anche, in particolare, commutare con tutte le matrici $\mathbf{E}_{ij}$. Quindi deve essere

$$a_{hi}\delta_{jk} = \delta_{ih}a_{jk}$$

per tutti gli indici i, j, h e k. Se prendiamo $i \neq h$ e $j = k$ otteniamo $a_{hi} = 0$. Quindi tutti gli elementi di $\mathbf{A}$ al di fuori della diagonale principale sono nulli. In altre parole, $\mathbf{A}$ è una matrice diagonale. Se prendiamo $i = h$ e $j = k$ otteniamo $a_{ii} = a_{jj}$, quindi tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali fra di loro. Se chiamiamo λ questo scalare, abbiamo allora che $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$.

14 Mostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte è una matrice triangolare alta. Mostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte con gli elementi sulla diagonale principale uguali a uno è ancora una matrice triangolare alta con gli elementi sulla diagonale uguali a uno. (Suggerimento: trattare prima i casi $n = 2$ e $n = 3$ per capire cosa succede).

Soluzione. Il caso delle matrici di ordine $n = 2$ si riduce a un calcolo diretto.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} + b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo stesso vale per le matrici di ordine tre.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} + a_{12} & b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} + a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esaminiamo ora il caso generale. Ricordiamo che $\mathbf{A}$ è triangolare alta se tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli, cioè se $a_{ij} = 0$ ogni volta che $i > j$. Supponiamo allora che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ siano matrici triangolari alte di ordine n e che $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ sia il loro prodotto. Fissiamo una coppia di indici (i, j) tali che $i > j$. Abbiamo che

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k<i} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k\geq i} a_{ik}b_{kj}.$$

Nell'ultimo termine la prima somma è nulla perché, essendo $\mathbf{A}$ triangolare alta, tutti i fattori a_{ik} sono nulli. Anche la seconda somma è nulla. Infatti, essendo $i > j$, nella somma si ha $k > j$ e dal momento che $\mathbf{B}$ è triangolare alta, tutti i fattori b_{kj} sono nulli. In conclusione $c_{ij} = 0$ e $\mathbf{C}$ è triangolare alta.

Supponiamo ora che, oltre ad essere triangolari alte, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ siano unipotenti, cioè abbiano tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a uno. Questo significa che $a_{ii} = 1$ e $b_{ii} = 1$ per tutti gli indici i e dunque che

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{k<i} a_{ik}b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k>i} a_{ik}b_{ki} \\ &= 0 + 1 + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Infatti, nella seconda riga, la prima somma è nulla perché sono nulli tutti gli a_{ik}, essendo $\mathbf{A}$ triangolare alta, mentre la seconda somma è nulla perché sono nulli tutti i b_{ki}, essendo $\mathbf{B}$ triangolare alta. Dunque anche $\mathbf{C}$ è unipotente.

15 Radici quadrate di $-\mathbf{I}$.

1. Mostrare che

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}.$$

Più in generale,

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{bmatrix}^2 = -\mathbf{I}.$$

2. Mostrare che ci sono infinite matrici quadrate $\mathbf{A}$ di ordine 2 a coefficienti reali (perfino interi) tali che $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$, e che tutte soddisfano $a_{22} = -a_{11}$.
3. Mostrare che esistono quattro matrici diagonali $\operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ a coefficienti complessi (e nessuna a coefficienti reali) il cui quadrato è $-\mathbf{I}$.

Soluzione. 1. Esaminiamo subito il caso generale calcolando esplicitamente il quadrato.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + (-1-a^2) & a + (-a) \\ (-1-a^2)a + (-a)(-1-a^2) & (-1-a^2) + (-a)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Il caso particolare si ottiene sostituendo $a = 2$.

2. Consideriamo la matrice quadrata generica di ordine 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e scriviamo esplicitamente la condizione $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Questa equazione fra matrici è equivalente al sistema non lineare

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = -1 \\ a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0 \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0 \\ a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = -1. \end{cases}$$

Si osservi che se fosse $a_{11} + a_{22} \neq 0$, allora dalla seconda e dalla terza equazione avremmo $a_{12} = a_{21} = 0$. Sostituendo questi valori nella prima e quarta equazione si otterrebbe $a_{11}^2 = a_{22}^2 = -1$ e queste equazioni non hanno soluzioni reali. Dunque $a_{11} + a_{22} = 0$ e il sistema precedente è equivalente al nuovo sistema

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = -1 \\ a_{22} = -a_{11}. \end{cases}$$

Che questo sistema abbia infinite soluzioni si vede, ad esempio, specializzando $a_{12} = 1$ e risolvendo rispetto ad a_{21} e a_{22}. Si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{21} = -1 - a_{11}^2 \\ a_{22} = -a_{11} \end{cases}$$

con $a_{11} \in \mathbb{R}$. Se poniamo $a = a_{11}$ otteniamo esattamente l'insieme di matrici descritto al punto 1. Si osservi anche che, per valori interi del parametro a, queste matrici hanno coefficienti in $\mathbb{Z}$.

3. Supponiamo infine che $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ sia una matrice diagonale. Allora $\mathbf{A}^2 = \operatorname{diag}(\lambda^2, \mu^2)$ e dunque

$$\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = -1 \\ \mu^2 = -1. \end{cases}$$

L'ultimo sistema non ha soluzioni in $\mathbb{R}$ perché i quadrati dei numeri reali non possono essere negativi. Il sistema ha invece quattro soluzioni in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \lambda^2 = \pm i \\ \mu^2 = \pm i \end{cases}$$

cui corrispondono le matrici

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

2. MATRICI INVERTIBILI

16 Se $\mathbf{A}$ è invertibile, si mostri che valgono le leggi di cancellazione

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{CA} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Soluzione. Sia $\mathbf{A}^{-1}$ l'inversa di $\mathbf{A}$. Allora

$\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC}$	Moltiplicazione a sinistra per $\mathbf{A}^{-1}$.
	$\Rightarrow$	$\mathbf{IB} = \mathbf{IC}$	Proprietà associativa del prodotto e definizione di matrice inversa.
	$\Rightarrow$	$\mathbf{B} = \mathbf{C}$	Proprietà dell'elemento neutro.

La seconda formula si dimostra in modo simile moltiplicando a destra per $\mathbf{A}^{-1}$.

17 Per una matrice invertibile $\mathbf{A}$ si definiscono le potenze con esponente negativo nel modo usuale:

$$\mathbf{A}^{-k} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$$

per ogni intero $k \geq 1$. Mostrare che $\mathbf{A}^h\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{h+k}$ per ogni $h, k \in \mathbb{Z}$. In particolare, l'inversa di $\mathbf{A}^k$ è $\mathbf{A}^{-k}$.

Soluzione. L'uguaglianza $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ è stata dimostrata per $m, n \in \mathbb{N}$ nell'esercizio 8. Ci riferiremo a questa formula come al caso positivo. Esaminiamo i casi rimanenti, partendo da quello in cui entrambi gli esponenti sono negativi. Qui e nel resto della soluzione supporremo sempre che $m, n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{A}^{-m}\mathbf{A}^{-n}$	$=$	$(\mathbf{A}^{-1})^m(\mathbf{A}^{-1})^n$	Definizione di potenza con esponente negativo.
	$=$	$(\mathbf{A}^{-1})^{m+n}$	Formula per il caso positivo.
	$=$	$\mathbf{A}^{-m-n}$	Definizione di potenza con esponente negativo.

Ci riferiremo a questo caso come al caso negativo. Per dimostrare il caso misto $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-n} = \mathbf{A}^{m-n}$ distinguiamo tre possibilità. Se $m = n$, allora $\mathbf{A}^{m-m} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$; dunque basta dimostrare che $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-m} = \mathbf{I}$. Lo facciamo per induzione su m. Se $m = 0$, allora

$$\mathbf{A}^0\mathbf{A}^{-0} = \mathbf{A}^0\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}.$$

Supponiamo di avere dimostrato la formula $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-m} = \mathbf{I}$ per un m fissato e dimostriamola per il suo successore $m + 1$. Abbiamo

$\mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^{-m-1}$	$=$	$\mathbf{A}\mathbf{A}^m(\mathbf{A}^{-m})(\mathbf{A}^{-1})$	Caso positivo e caso negativo già dimostrati.
	$=$	$\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1}$	Proprietà associativa del prodotto e ipotesi di induzione.
	$=$	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$	Proprietà dell'elemento neutro.
	$=$	$\mathbf{I}$	Definizione di matrice inversa.

Dunque la formula $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-m} = \mathbf{I}$ vale per tutti gli $m \in \mathbb{N}$.

Per il caso misto con $m > n$ abbiamo

$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-n}$	$=$	$\mathbf{A}^{m-n}\mathbf{A}^n\mathbf{A}^{-n}$	Caso positivo.
	$=$	$\mathbf{A}^{m-n}\mathbf{I}$	Caso misto con $m = n$.
	$=$	$\mathbf{A}^{m-n}$	Proprietà dell'elemento neutro.

Infine, nel caso misto con $m < n$ abbiamo

$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-n}$	$=$	$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^{-m}\mathbf{A}^{m-n}$	Caso negativo e proprietà associativa del prodotto.
	$=$	$\mathbf{I}\mathbf{A}^{m-n}$	Caso misto con $m = n$.
	$=$	$\mathbf{A}^{m-n}$	Proprietà dell'elemento neutro.

Resta da esaminare l'altro caso misto $\mathbf{A}^{-m}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{-m+n}$. Per questo basta ripetere le ultime due argomentazioni scambiando il ruolo di m con quello di n.

18 Mostrare che una matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ è invertibile se e solo gli elementi λ_i sono tutti diversi da zero. In tal caso l'inversa è la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

Soluzione. Basta osservare che se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale, allora $r(\mathbf{A})$ è esattamente il numero di $\lambda_i \neq 0$, perché questi sono i pivot di $\mathbf{A}$. Per il teorema 4.3, $\mathbf{A}$ è invertibile se e soltanto se il suo rango è n, cioè se e soltanto se $\lambda_i \neq 0$ per tutti gli indici i. Per dimostrare che l'inversa di $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ basta osservare che, per la formula dimostrata nell'esercizio 9, risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) &= \operatorname{diag}(\lambda_1\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n\lambda_n^{-1}) \\ &= \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Qusto prova che $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ è un'inversa destra di $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e dunque un'inversa bilatera.

19 Una matrice triangolare alta è invertibile se e solo se tutti i suoi elementi sulla diagonale principale sono diversi da zero. Se questo è il caso, anche l'inversa è una matrice triangolare alta.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia triangolare alta di ordine n. Se $a_{ii} \neq 0$ per tutti gli indici i, allora $\mathbf{A}$ è a scala e tutti gli a_{ii} sono pivot di $\mathbf{A}$. Dunque $r(\mathbf{A}) = n$ e $\mathbf{A}$ è invertibile per il teorema 4.3. Se invece $a_{ii} = 0$ e i è il primo indice per cui questo accade, allora la i-esima colonna di $\mathbf{A}$ non contiene pivot. Infatti anche $a_{ji} = 0$ per $j > i$, perchè $\mathbf{A}$ è triangolare alta e nessuno degli a_{ji} con $j < i$ può essere un pivot perché $a_{jj} \neq 0$ per $j < i$. Ma allora $\mathbf{A}$ ha al massimo $n - 1$ pivot e dunque $r(\mathbf{A}) < n$ e $\mathbf{A}$ non è invertibile sempre per il teorema 4.3.

Supponiamo ora che $\mathbf{A}$ sia triangolare alta e invertibile con inversa $\mathbf{B}$. Dalla formula $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ segue che, indicata con $\mathbf{b}_i$ la i-esima colonna di $\mathbf{B}$, risulta $\mathbf{A}\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ e cioè che $\mathbf{b}_i$ è soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$. Se da questo sistema prendiamo soltanto le ultime $n-i$ equazioni e $n-i$ incognite otteniamo un nuovo sistema lineare la cui matrice completa è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{i+1,i+1} & & * & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a_{nn} & 0 \end{array}\right].$$

Ora questo sistema è omogeneo e Crameriano perché, come dimostrato nella prima parte, $a_{ii} \neq 0$ per ogni i; dunque il sistema ammette come unica soluzione la soluzione nulla. Siccome le ultime $n - i$ componenti di $\mathbf{b}_i$ sono soluzione del sistema, questo significa che le ultime $n - i$ componenti di $\mathbf{b}_i$ sono nulle e cioè che $\mathbf{B}$ è triangolare alta.

20 Se $\mathbf{A}$ è una matrice di tipo (m, n), non necessariamente quadrata, si mostri imitando la dimostrazione del teorema 4.3 che $\mathbf{A}$ ammette un'inversa destra se e solo se $r(\mathbf{A}) = m$.

Soluzione. Se $r(\mathbf{A}) = m$ allora, per il teorema di Rouché -Capelli, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$ ammette sempre almeno una soluzione $\mathbf{b}_i \in \mathbb{K}^n$ per $i = 1, \ldots, m$. Se poniamo

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 | \cdots | \mathbf{b}_m]$$

allora $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, dunque $\mathbf{B}$ è un'inversa destra di $\mathbf{A}$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{A}$ abbia inversa destra $\mathbf{B}$. Per ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette sempre soluzione. Infatti

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bb}) = (\mathbf{AB})\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$$

dunque basta prendere $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$. Ma per l'esercizio 19 del capitolo 2 questo implica che $r(\mathbf{A}) = m$.

21 Per ogni $k \in \mathbb{K}$ risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = k \end{cases}$$

usando la formula esplicita per l'inversa di una matrice 2×2.

Soluzione. Scriviamo il sistema nella forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ k \end{bmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ è invertibile perché

$$D = ad - bc = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5 \neq 0$$

e la sua inversa è data dalla formula a pagina 131 del testo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando la formula $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a sinistra per $\mathbf{A}^{-1}$ otteniamo la soluzione del sistema nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3k - 24 \\ -2k + 36 \end{bmatrix},$$

da cui prendendo le coordinate abbiamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(3k - 24) \\ y = -\frac{1}{5}(2k - 36). \end{cases}$$

3. MATRICE TRASPOSTA. MATRICI SIMMETRICHE

22 Scrivere le matrici trasposte delle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{AB}.$$

Soluzione. Ricordiamo che per calcolare la trasposta di una matrice basta sostituire la colonna i-esima con la riga i-esima. Troviamo

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

23 Per quale valore di a la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

è simmetrica (rispettivamente antisimmetrica)?

Soluzione. Ricordiamo che $\mathbf{A}$ è simmetrica se $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. Nel nostro caso questa condizione diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

ed è equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ a = 2 \\ 2 = a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $a = 2$. In modo simile, $\mathbf{A}$ è antisimmetrica se $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, cioè se

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema corrispondente a questa equazione è

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ a = -2 \\ 2 = -a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e ammette $a = -2$ come unica soluzione.

24 Mostrare che, data una qualunque matrice quadrata $\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica e la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è antisimmetrica.

Soluzione. Per dimostrare che $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica proviamo che coincide con la sua trasposta. Abbiamo infatti che

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{TT}} & \text{Proposizione 5.2.a.} \\ & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A} & \text{Proposizione 5.2.b.} \\ & = & \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \text{Proprietà commutativa della somma.} \end{array}$$

In modo simile, per dimostrare che $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è antisimmetrica proviamo che coincide con l'opposto della sua trasposta. Abbiamo

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}^{\mathrm{TT}} & \text{Proposizione 5.2.a.} \\ & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A} & \text{Proposizione 5.2.b.} \\ & = & -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) & \text{Proprietà commutativa della somma.} \end{array}$$

25 Mostrare che ogni matrice quadrata si scrive in uno e un solo modo come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Soluzione. Se

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

con $\mathbf{B}$ simmetrica e $\mathbf{C}$ antisimmetrica, allora

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B} - \mathbf{C}.$$

Sommando e sottraendo queste due formule si ottiene

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{C},$$

da cui

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}), \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

Quindi la decomposizione cercata, se esiste, è unica. Resta da verificare che le matrici $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ così determinate sono, rispettivamente, simmetrica e antisimmetrica. Questo fatto è stato sostanzialmente dimostrato nell'esercizio 24. Infatti per $\mathbf{B}$ abbiamo che

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & = & \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \text{Proposizione 5.2.a.} \\ & = & \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) & \text{Esercizio 24.} \\ & = & \mathbf{B} & \text{Definizione di } \mathbf{B}. \end{array}$$

e dunque $\mathbf{B}$ è simmetrica. Invece per $\mathbf{C}$ abbiamo che

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & = & \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \text{Proposizione 5.2.a.} \\ & = & -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) & \text{Esercizio 24.} \\ & = & -\mathbf{C} & \text{Definizione di } \mathbf{C}. \end{array}$$

e dunque $\mathbf{C}$ è antisimmetrica.

26 Mostrare che il prodotto di due matrici simmetriche $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è una matrice simmetrica se e solo se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Trovare un esempio in cui il prodotto $\mathbf{AB}$ non è una matrice simmetrica.

Soluzione. Per provare la prima affermazione basta considerare la seguente catena di equivalenze.

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB} & \Leftrightarrow & \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB} & \text{Proposizione 5.2 c} \\ & \Leftrightarrow & \mathbf{BA} = \mathbf{AB} & \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B} \text{ sono simmetriche} \end{array}$$

Per trovare due matrici simmetriche $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ il cui prodotto non sia una matrice simmetrica basta allora trovare due matrici simmetriche che non commutino. A questo scopo possiamo utilizzare i risultati dell'esercizio 11 e scegliere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con queste matrici abbiamo

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che non è simmetrica.

27 Mostrare che la matrice inversa di una matrice simmetrica è ancora una matrice simmetrica.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia simmetrica e invertibile con inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Allora

$$\begin{array}{rcll} \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} & = & \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} & \text{Proposizione 5.2 d} \\ & = & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A} \text{ è simmetrica.} \end{array}$$

Il fatto che $\mathbf{A}^{-1}$ coincide con la propria trasposta prova che $\mathbf{A}^{-1}$ è simmetrica.

28 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$, la matrice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ è una matrice simmetrica $n \times n$, e $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ è una matrice simmetrica $m \times m$.

Soluzione. Si osservi che $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $n \times m$. Le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ sono conformabili perché il numero n di colonne di $\mathbf{A}$ coincide con il numero di righe di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. La matrice prodotto $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ è allora definita e i suoi numeri di righe e di colonne coincidono rispettivamente con il numero m di righe del primo fattore $\mathbf{A}$ e con il numero m di colonne del secondo fattore $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Dunque $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $m \times m$. Per vedere che è simmetrica basta osservare che coincide con la propria trasposta. Infatti

$$\begin{array}{rcll} \left(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{A}^{\mathrm{TT}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \text{Proposizione 5.2 c} \\ & = & \mathbf{AA}^{\mathrm{T}} & \text{Proposizione 5.2 b.} \end{array}$$

Allo stesso modo le matrici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{A}$ sono conformabili e il loro prodotto $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ è una matrice $n \times n$ che è simmetrica perché

$$\begin{array}{rcll} \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{TT}} & \text{Proposizione 5.2 c} \\ & = & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \text{Proposizione 5.2 b.} \end{array}$$

29 Si consideri la matrice simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

e sia $\mathbf{v} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ un generico vettore di $\mathbb{K}^2$. Mostrare che

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Soluzione. Basta calcolare esplicitamente la matrice prodotto $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}$. Troviamo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax + by & bx + cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2.\end{aligned}$$

30 Sia $f(x_1, \ldots, x_n)$ una funzione con derivate seconde continue su $\mathbb{R}^n$. Mostrare che la matrice Hessiana

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right]$$

è una matrice simmetrica.

Soluzione. Per il teorema di Schwartz, se $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ma questo significa esattamente che $h_{ij} = h_{ji}$, cioè che la matrice $\mathbf{H}$ è simmetrica.

31 Al generico vettore $\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ di $\mathbb{R}^3$ si associ la matrice antisimmetrica

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & x & -y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{bmatrix}.$$

Si mostri che la matrice associata al prodotto vettoriale di due vettori è

$$\mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}).$$

Soluzione. Sia $\mathbf{w} = [x', y', z']^{\mathrm{T}}$. Se usiamo la formula (7.1) del capitolo 1 per calcolare il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, abbiamo che

$$\mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{E}\left(\begin{bmatrix} yz' - y'z \\ -xz' + x'z \\ xy' - x'y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & yz' - y'z & xz' - x'z \\ -yz' + y'z & 0 & xy' - x'y \\ -xz' + x'z & -xy' + x'y & 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} 0 & x & -y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x' & -y' \\ -x' & 0 & z' \\ y' & -z' & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -xx' - yy' & yz' & xz' \\ y'z & -xx' - zz' & xy' \\ x'z & x'y & -yy' - zz' \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Scambiando $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e cioè scambiando lettere con e senza apice nell'ultima matrice, abbiamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -x'x - y'y & y'z & x'z \\ yz' & -x'x - z'z & x'y \\ xz' & xy' & -y'y - z'z \end{bmatrix}.$$

Sottraendo si ottiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} 0 & yz' - y'z & xz' - x'z \\ -yz' + y'z & 0 & xy' - x'y \\ -xz' + x'z & -xy' + x'y & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Si veda anche l'esercizio 7 del capitolo 5.

32 Scrivere la forma generale di una matrice simmetrica di ordine n e concludere che le matrici simmetriche di ordine n dipendono da $\frac{1}{2}n(n+1)$ parametri.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia una matrice simmetrica di ordine n e dunque che sia $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici i e j. Indichiamo con $\mathbf{E}_{ij}$ la matrice quadrata di ordine n che ha tutti gli elementi nulli, ad eccezione dell'elemento di posto (i, j) che è uguale a 1. Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i>j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i} a_{ii}\mathbf{E}_{ii} + \sum_{i<j} a_{ji}\mathbf{E}_{ji} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i} a_{ii}\mathbf{E}_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ji} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) + \sum_{i} a_{ii}\mathbf{E}_{ii}. \end{aligned}$$

La seconda somma nell'ultima riga ha n addendi; quanto alla prima, i suoi addendi corrispondono agli elementi che si trovano al di sopra della diagonale principale. Il numero di questi elementi può essere calcolato osservando che è la metà del numero di elementi al di fuori della diagonale principale, cioè $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. In totale, il numero di addendi nelle due somme è

$$N = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

La matrice $\mathbf{A}$ è completamente determinata dai coefficienti a_{ij} di questi addendi e dunque dipende da $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ parametri.

33 Scrivere la forma generale di una matrice antisimmetrica di ordine n e concludere che le matrici antisimmetriche di ordine n dipendono da $\frac{1}{2}n(n-1)$ parametri.

Soluzione. Se $\mathbf{A}$ è antisimmetrica, allora $a_{ji} = -a_{ij}$ per ogni coppia di indici i e j. In particolare, prendendo $i = j$, deve essere $a_{ii} = 0$ per tutti gli i. Procedendo allora come nell'esercizio 32 troviamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i>j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\ &= \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ji})\end{aligned}$$

dove la somma è estesa agli indici degli elementi che si trovano al di sopra della diagonale principale e il cui numero è

$$N = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

La matrice $\mathbf{A}$ è completamente determinata dai coefficienti a_{ij} di questi addendi e dunque dipende da $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ parametri.

34 Se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$, non necessariamente quadrata, si mostri che $\mathbf{A}$ ammette un'inversa sinistra se e solo se $r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = n$.

Soluzione. Si osservi anzitutto che

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \Leftrightarrow (\mathbf{BA})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}.$$

Questo prova che $\mathbf{A}$ ammette un'inversa sinistra se e soltanto se $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ammette un'inversa destra. Ma $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $n \times m$ e dunque, per l'esercizio 20, ammette un'inversa destra se e soltanto se il suo rango è n.

4. L'ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

35 Provare che i seguenti sistemi lineari quadrati hanno matrici dei coefficienti di rango massimo. Risolvere tali sistemi calcolando prima $\mathbf{A}^{-1}$ e poi la soluzione $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 8z = -18 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

Soluzione. 1. Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice $\mathbf{A}$ dei coefficienti del sistema.

© 978-88-08-19252-3

1. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5.

2. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}$$

6.

3. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3-2R_2 \end{array}$$

4. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 2R_2 \\ \\ \end{array}$$

7.

L'algoritmo termina al passo 7 con la matrice
significa che $\mathbf{A}$ ha rango massimo 3 e dunque è
destro è la sua inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Per trovare la soluzi
il vettore dei termini noti per l'inversa della ma

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & 3 \\ -\frac{13}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan all
punto precedente.

1. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5.

2. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-3R_1 \end{array}$$

6.

3. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3+2R_2 \\ R_4+R_2 \end{array}$$

7.

4. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4-R_3 \end{array}$$

8.

Anche in questo caso l'algoritmo termina con l
del passo 8; il blocco destro del medesimo pa

sa. Moltiplicando per l'inversa il vettore dei termini noti otteniamo la soluzione del sistema.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Procediamo come nei due casi precedenti.

1. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

3. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2 \end{array}$$

4. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 - R_3 \end{array}$$

5. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} 2R_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

6. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 + R_4 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

7. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 + 2R_3 \\ R_2 - R_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

8. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

9. $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \\ -R_2 \\ \\ -\frac{1}{2}R_4 \end{array}$$

La matrice nel blocco a destra del passo 9 è l'inversa della matrice dei coefficienti. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. LA FATTORIZZAZIONE LU

36 Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

per ogni valore di b_1, b_2, b_3.

Soluzione. Calcoliamo la fattorizzazione $\mathbf{LU}$ della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$. Per farlo, riduciamo $\mathbf{A}$ a scala per eliminazione gaussiana, tenendo traccia delle operazioni riga. Invece di scrivere esplicitamente le operazioni riga, tuttavia, scriviamo il moltiplicatore corrispondente al fianco della riga su cui viene effettuata l'operazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ m_{32} = 1 \end{matrix}$$

Dal momento che la riduzione a scala è stata completata senza utilizzare permutazioni delle righe, la matrice $\mathbf{U}$ è la riduzione a scala di $\mathbf{A}$, mentre $\mathbf{L}$ è la matrice triangolare bassa e unipotente dei moltiplicatori:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per risolvere il sistema di partenza $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ basta ora risolvere i due sistemi $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$. Risolvendo il sistema triangolare basso $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ troviamo

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \\ 2c_1 + c_2 = b_2 \\ c_1 + c_2 + c_3 = b_3 \end{cases} \equiv \begin{cases} c_1 = b_1 \\ c_2 = -2c_1 + b_2 = -2b_1 + b_2 \\ c_3 = -c_1 - c_2 + b_3 = b_1 - b_2 + b_3 \end{cases}$$

e risolvendo il sistema triangolare alto $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ troviamo infine

$$\begin{cases} x - 4y + z = b_1 \\ 2y + 3z = -2b_1 + b_2 \\ z = b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 4y - z + b_1 = -10b_1 + 9b_2 - 7b_3 \\ y = -\frac{3}{2}z - b_1 + \frac{1}{2}b_2 = -\frac{5}{2}b_1 + 2b_2 - \frac{3}{2}b_3 \\ z = b_1 - b_2 + b_3. \end{cases}$$

37 Scrivere la decomposizione $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ della matrice simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Riduciamo $\mathbf{A}$ a scala mediante eliminazione gaussiana. A destra della matrice scriviamo i moltiplicatori corrispondenti alle operazioni riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad m_{21} = 2$$

La riduzione è stata completata senza scambi dunque $\mathbf{A}$ ammette la fattorizzazione

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Poiché **A** è simmetrica e ha rango massimo, dalla fattorizzazione **LU** si ottiene $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ dove **L** è la matrice dei moltiplicatori nella fattorizzazione **LU** e **D** è la matrice diagonale i cui elementi sono quelli della diagonale principale di **U**.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La fattorizzazione cercata è dunque

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38 Scrivere la decomposizione di Cholesky $\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}$ della matrice simmetrica definita positiva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Riduciamo **A** a scala tenendo traccia dei moltiplicatori.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \to \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \qquad m_{21} = \tfrac{4}{5}$$

Come si vede la matrice **A** oltre ad essere simmetrica ha anche rango massimo, quindi ammette sia la fattorizzazione **LU** che la fattorizzazione $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ con

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

I pivot di **A** sono tutti positivi, dunque **A** è definita positiva. Posto

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

abbiamo la decomposizione di Cholesky

$$\mathbf{A} = \mathbf{CC}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

39 Scrivere la fattorizzazione **LU** per le matrici seguenti la cui riduzione a scala è stata ottenuta nell'esercizio 21 del capitolo 2 senza scambi di righe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \\ 3 & 8 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 4 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -6 & 1 & 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Poiché non è stato utilizzato alcuno scambio di righe nella riduzione a scala, possiamo usare le operazioni riga indicate nell'esercizio 21 del capitolo 2 per scrivere i moltiplicatori, ricordando che all'operazione riga $R_i - cR_j$ corrisponde il moltiplicatore $m_{ij} = c$, che è l'elemento di posto (i, j) nella matrice $\mathbf{L}$. Si ottiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

40 Mostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte (rispettivamente basse) è ancora una matrice triangolare alta (rispettivamente bassa). Mostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte con gli elementi sulla diagonale principale uguali a uno è ancora una matrice triangolare alta con gli elementi sulla diagonale uguali a uno.

Soluzione. Il caso delle matrici triangolari alte è stato trattato nell'esercizio 14. Per quanto riguarda le matrici triangolari basse, invece, basta osservare che una matrice $\mathbf{A}$ è triangolare bassa se e soltanto se la sua trasposta $\mathbf{A}^T$ è triangolare alta. Supponiamo allora che $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ sia il prodotto di due matrici triangolari basse. Dalla proposizione 5.2.c abbiamo che $\mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$. Ma $\mathbf{B}^T$ e $\mathbf{C}^T$ sono triangolari alte e per quanto dimostrato nell'esercizio 14, il loro prodotto $\mathbf{A}^T$ è una matrice triangolare alta. Dunque $\mathbf{A}$ è triangolare bassa.

41 Mostrare che l'inversa di una matrice triangolare alta (rispettivamente bassa) di rango massimo è ancora una matrice triangolare alta (rispettivamente bassa).

Soluzione. Il caso delle matrici triangolari alte è stato trattato nell'esercizio 19. Se invece $\mathbf{A}$ è triangolare bassa e invertibile, allora $\mathbf{A}^T$ è triangolare alta e, per la proposizione 5.2.d, è invertibile con inversa $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$. Per quanto dimostrato nell'esercizio 19 questa matrice è triangolare alta. Ma questo significa che $\mathbf{A}^{-1}$ è triangolare bassa.

42 Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Scrivere la matrice di permutazione $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$. Verificare il risultato eseguendo la moltiplicazione $\mathbf{PA}$.

Soluzione. La matrice $\mathbf{B}$ si ottiene da $\mathbf{A}$ scambiando la prima riga con la terza. La permutazione corrispondente è $\sigma = (1,3)$. Dunque $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$, dove $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$ è la matrice ottenuta applicando σ alle righe della matrice identità $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se si esegue il prodotto si trova che

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

43 Nei seguenti sistemi lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tratti dal capitolo 2 del testo il MEG richiede scambi di righe. Scrivere la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ per le matrici $\mathbf{A}$ di tali sistemi. Riscrivere poi i sistemi nella forma $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$, spezzarli nella coppia di sistemi $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$ e $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, e risolverli.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_6 + 2x_7 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 3x_7 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + 2x_5 - 4x_6 - 8x_7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 - 5x_5 - 8x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 10x_6 + 9x_7 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. 1. Si tratta dell'esempio a pagina 88 nel testo. Nel corso della riduzione a scala della matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ è stata applicata una sola permutazione, quella che scambia le seconda riga con la terza. Si tratta della permutazione $\sigma = (2,3)$. Posto $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$, la riduzione a scala di $\mathbf{PA}$ non presenta permutazioni e si trova

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ m_{21} = 1 \\ m_{31} = 1 \\ m_{41} = 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ m_{42} = 1 \end{matrix} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ m_{43} = -4 \end{matrix}$$

L'ultima matrice è la riduzione a scala $\mathbf{U}$ e i coefficienti m_{ij} sono i moltiplicatori. Dunque abbiamo la fattorizzazione $\mathbf{LU}$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Osservato che $\mathbf{Pb} = [4, -1, 6, 4]^{\mathrm{T}}$, cominciamo a risolvere il sistema $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$. Troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 + c_3 = 6 \\ 2c_1 + c_2 - 4c_3 + c_4 = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 - c_1 = -5 \\ c_3 = 6 - c_1 = 2 \\ c_4 = 4 - 2c_1 - c_2 + 4c_3 = 9. \end{cases}$$

Infine risolviamo il sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_4 = 9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 = -5 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = 2 - x_4 = -1 \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema di partenza è dunque il vettore $\mathbf{x} = [1, 2, -1, 3]^{\mathrm{T}}$.

2. Il sistema è quello dell'esercizio 7 nel capitolo 2 del testo. Nella soluzione dell'esercizio è stata effettuata una sola permutazione, $\sigma = (4, 6, 5)$. Se prendiamo $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$, possiamo ridurre a scala $\mathbf{PA}$ senza permutazioni.

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & -3 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 4 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 & -6 & -5 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 6 & 4 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & -7 & 1 & 2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 2 & -10 & -14 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ m_{21} = -2 \\ m_{31} = -2 \\ m_{41} = -2 \\ m_{51} = 1 \\ m_{61} = 3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -8 & -12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ m_{32} = 1 \\ m_{42} = 2 \\ m_{52} = -1 \\ m_{62} = -2 \end{array} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ m_{43} = -1 \\ m_{53} = 2 \\ m_{63} = -2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ m_{54} = -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

Dalla riduzione a scala e dai moltiplicatori abbiamo la fattorizzazione **LU**

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ora si osservi che $\mathbf{Pb} = \mathbf{P0} = \mathbf{0}$ e che il sistema omogeneo $\mathbf{Lc} = \mathbf{Pb}$ ammette come unica soluzione $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{L}$ ha rango massimo. Basta quindi risolvere il sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$ rispetto alle variabili dipendenti.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_6 + 2x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ 2x_4 + x_5 + 4x_6 + 6x_7 = 0 \\ -2x_6 + 8x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_6 - 2x_7 = 5x_3 - \frac{5}{2}x_5 + 33x_7 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 - x_7 = -2x_3 - \frac{3}{2}x_5 - 16x_7 \\ x_4 = -\frac{1}{2}x_5 - 2x_6 - 3x_7 = -\frac{1}{2}x_5 - 11x_7 \\ x_6 = 4x_7. \end{cases}$$

6. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

44 Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Dimostrare che la formula

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

vale in $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ se e soltanto se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ commutano fra loro.

45 Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Dimostrare che se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ commutano, allora $(\mathbf{AB})^n = \mathbf{A}^n\mathbf{B}^n$ per tutti gli $n \geq 0$.

4 Spazi vettoriali

1. ASSIOMI

1 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale, siano $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_d$ vettori di $\mathbf{V}$ e siano $t_1, \dots, t_d$ degli scalari. Supponiamo che

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}.$$

Mostrare che, se $t_d \neq 0$, allora

$$\mathbf{v}_d = -\frac{t_1}{t_d}\mathbf{v}_1 - \frac{t_2}{t_d}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{t_{d-1}}{t_d}\mathbf{v}_{d-1}.$$

Soluzione. Poniamo, per convenienza,

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d-1} t_i\mathbf{v}_i.$$

Osserviamo anzitutto che, siccome per ipotesi $\mathbf{w} + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$,

$$t_d\mathbf{v}_d = -\mathbf{w} = -\sum_{i=1}^{d-1} t_i\mathbf{v}_i.$$

Poiché $t_d \neq 0$, possiamo moltiplicare questa uguaglianza per $\frac{1}{t_d}$. Otteniamo così:

$$\mathbf{v}_d = -\frac{1}{t_d}\sum_{i=1}^{d-1} t_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{d-1}\left(-\frac{t_i}{t_d}\mathbf{v}_i\right).$$

2 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, sia S un insieme qualsiasi e sia

$$\mathbf{V}^S = \{\mathbf{F} : S \to \mathbf{V}\}$$

l'insieme delle funzioni con dominio S e codominio $\mathbf{V}$. Definire su $\mathbf{V}^S$ una struttura di spazio vettoriale(cioè somma e prodotto per uno scalare) come nell'esempio di

$\mathbb{K}^S$, quindi componente per componente, utilizzando le operazioni definite in $\mathbf{V}$ al posto di quelle di $\mathbb{K}$. Per esempio, l'insieme delle funzioni $\mathbf{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di una variabile reale t a valori in $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale.

Soluzione. Facciamo riferimento agli assiomi **V1–V8** della definizione 2.1. Se $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathbf{V}^S$, definiamo la somma $\mathbf{F} + \mathbf{G} \in \mathbf{V}^S$ ponendo, per ogni $s \in S$,

$$(\mathbf{F} + \mathbf{G})(s) = \mathbf{F}(s) + \mathbf{G}(s).$$

Il simbolo "+" nel termine a destra indica la somma in $\mathbf{V}$. In modo simile, il prodotto di uno scalare $t \in \mathbb{K}$ per una funzione $\mathbf{F} \in \mathbf{V}^S$ è la funzione $t\mathbf{F} \in \mathbf{V}^S$ definita, per ogni $s \in S$, dalla formula

$$(t\mathbf{F})(s) = t(\mathbf{F}(s)),$$

dove il prodotto nel termine a destra è quello di uno scalare per un vettore in $\mathbf{V}$. Verifichiamo che le formule **V1–V8** sono soddisfatte. Cominciamo dalla proprietà commutativa della somma **V1**. Per ogni $s \in S$ abbiamo

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} + \mathbf{G})(s) &= \mathbf{F}(s) + \mathbf{G}(s) && \text{(definizione di somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{G}(s) + \mathbf{F}(s) && \text{(commutatività della somma in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= (\mathbf{G} + \mathbf{F})(s) && \text{(definizione di somma in } \mathbf{V}^S\text{).}
\end{aligned}$$

Le funzioni $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ e $\mathbf{G} + \mathbf{F}$ assumono lo stesso valore per ogni $s \in S$, dunque coincidono. In altri termini, $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{F}$.

Dimostriamo la proprietà associativa della somma. Se $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbf{V}^S$ e $s \in S$, allora

$$\begin{aligned}
((\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \mathbf{H})(s) &= (\mathbf{F} + \mathbf{G})(s) + \mathbf{H}(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= (\mathbf{F}(s) + \mathbf{G}(s)) + \mathbf{H}(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) + (\mathbf{G}(s) + \mathbf{H}(s)) && \text{(proprietà associativa della somma in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) + (\mathbf{G} + \mathbf{H})(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= (\mathbf{F} + (\mathbf{G} + \mathbf{H}))(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{).}
\end{aligned}$$

Dal momento che s è generico, abbiamo $(\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \mathbf{H} = \mathbf{F} + (\mathbf{G} + \mathbf{H})$.

Proviamo l'esistenza di un elemento neutro per la somma in $\mathbf{V}^S$. A questo scopo consideriamo la funzione $\mathbf{0} : S \to \mathbf{V}$ definita, per ogni $s \in S$ dalla formula

$$\mathbf{0}(s) = \mathbf{0}$$

dove il simbolo $\mathbf{0}$ nel termine a destra è l'elemento neutro per la somma in $\mathbf{V}$. Per ogni $F \in \mathbf{V}^S$ e per ogni $s \in S$ risulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} + \mathbf{0})(s) &= \mathbf{F}(s) + \mathbf{0}(s) && \text{(definizione di somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) + \mathbf{0} && \text{(definizione di } \mathbf{0} \in \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) && \text{(} \mathbf{0} \in \mathbf{V} \text{ è elemento neutro per la somma).}
\end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{F} + \mathbf{0} = \mathbf{F}$.

Per definire l'opposto di una funzione $\mathbf{F}$, poniamo, per ogni $s \in S$,

$$(-\mathbf{F})(s) = -(\mathbf{F}(s)),$$

dove l'opposto nel termine a destra viene preso in $\mathbf{V}$. Con questa definizione risulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} + (-\mathbf{F}))(s) &= \mathbf{F}(s) + (-\mathbf{F})(s) && \text{(definizione di somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) + (-(\mathbf{F}(s))) && \text{(definizione di opposto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{0} && \text{(proprietà dell'opposto in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= \mathbf{0}(s) && \text{(definizione di } \mathbf{0} \in \mathbf{V}^S\text{)}
\end{aligned}$$

e dunque $\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

Dimostriamo la proprietà distributiva **V5**. Se $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathbf{V}^S$, $t \in \mathbb{K}$ e $s \in S$, allora

$$\begin{aligned}
(t(\mathbf{F} + \mathbf{G}))(s) &= t((\mathbf{F} + \mathbf{G})(s)) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= t(\mathbf{F}(s) + \mathbf{G}(s)) && \text{(definizione di somma in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= t\mathbf{F}(s) + t\mathbf{G}(s) && \text{(proprietà distributiva in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= (t\mathbf{F})(s) + (t\mathbf{G})(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= (t\mathbf{F} + t\mathbf{G})(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{).}
\end{aligned}$$

Dunque $t(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = t\mathbf{F} + t\mathbf{G}$.

Dimostriamo la proprietà distributiva **V6**. Se $\mathbf{F} \in \mathbf{V}^S$, $t, u \in \mathbb{K}$ e $s \in S$, allora

$$\begin{aligned}
((t + u)\mathbf{F})(s) &= (t + u)\mathbf{F}(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= t\mathbf{F}(s) + u\mathbf{F}(s) && \text{(proprietà distributiva } \mathbf{V6} \text{ in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= (t\mathbf{F})(s) + (u\mathbf{F})(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= (t\mathbf{F} + u\mathbf{F})(s) && \text{(definizione della somma in } \mathbf{V}^S\text{).}
\end{aligned}$$

Dunque $(t + u)\mathbf{F} = t\mathbf{F} + u\mathbf{F}$.

Dimostriamo la proprietà associativa **V7**. Se $\mathbf{F} \in \mathbf{V}^S$, $t, u \in \mathbb{K}$ e $s \in S$, allora

$$\begin{aligned}
(t(u\mathbf{F}))(s) &= t(u\mathbf{F})(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= t(u(\mathbf{F}(s))) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= (tu)\mathbf{F}(s) && \text{(proprietà associativa } \mathbf{V7} \text{ in } \mathbf{V}\text{)} \\
&= ((tu)\mathbf{F})(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{).}
\end{aligned}$$

Dunque $t(u\mathbf{F}) = (tu)\mathbf{F}$.

Infine, dimostriamo la normalizzazione **V8**. Se $\mathbf{F} \in \mathbf{V}^S$ e $s \in S$, allora

$$\begin{aligned}
(1\mathbf{F})(s) &= 1\mathbf{F}(s) && \text{(definizione del prodotto in } \mathbf{V}^S\text{)} \\
&= \mathbf{F}(s) && \text{(normalizzazione in } \mathbf{V}\text{).}
\end{aligned}$$

Dunque $1\mathbf{F} = \mathbf{F}$.

2. SOTTOSPAZI

3 Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono dei sottospazi vettoriali?

1. $\mathbf{H}_1 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$;
2. $\mathbf{H}_2 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$;
3. $\mathbf{H}_3 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$;
4. $\mathbf{H}_4 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = y = 0\}$;
5. $\mathbf{H}_5 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$;
6. $\mathbf{H}_6 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : y - z^2 = 0\}$;
7. $\mathbf{H}_7 = \{\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = z - 1 = 0\}$.

Soluzione. 1. Il sottoinsieme $\mathbf{H}_1$ è il nucleo della matrice $[0, 0, 1]$ e dunque è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ per via della proposizione 3.2.

2. Il sottoinsieme $\mathbf{H}_2$ è chiuso rispetto all'elemento neutro e alla somma, ma non rispetto al prodotto per uno scalare. Infatti ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_2$ con coordinata z positiva, se moltiplicato per uno scalare $t < 0$ produce un vettore la cui coordinata z è negativa. Ad esempio, $\mathbf{v} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}_2$, ma $(-1)\mathbf{v} = [0, 0, -1]^{\mathrm{T}} \notin \mathbf{H}_2$. Dunque $\mathbf{H}_2$ non è un sottospazio.

3. Ricordiamo che $xy = 0$ in $\mathbb{R}$ quando $x = 0$ oppure $y = 0$. Dunque

$$\mathbf{H}_3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \cup \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

Ciascuno dei due insiemi nel termine a destra è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo, dunque è il nucleo di una matrice e quindi un sottospazio. L'unione di sottospazi è chiusa sia rispetto all'elemento neutro che al prodotto per uno scalare ma non è in generale chiusa rispetto alla somma; si veda l'esercizio 76 per i dettagli. Ad esempio, i vettori $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ ed $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ sono elementi di $\mathbf{H}_3$, ma la loro somma $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = [1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ non lo è. Dunque $\mathbf{H}_3$ non è un sottospazio.

4. Anche in questo caso basta osservare che

$$\mathbf{H}_4 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

e dunque $\mathbf{H}_4$ è un sottospazio.

5. Dal momento che $\mathbb{Q}$ contiene zero ed è chiuso rispetto alla somma, $\mathbf{H}_5$ contiene il vettore nullo ed è chiuso rispetto alla somma. Non è invece chiuso rispetto al prodotto di uno scalare per un vettore: basta infatti osservare che se moltiplichiamo un vettore non nullo a coordinate razionali per un numero reale irrazionale, il risultato non ha tutte le coordinate razionali. Ad esempio, se moltiplichiamo $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}_5$ per lo scalare $\sqrt{2}$, otteniamo il vettore $[\sqrt{2}, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ che non appartiene ad $\mathbf{H}_5$. Quindi $\mathbf{H}_5$ non è un sottospazio.

6. Il sottoinsieme $\mathbf{H}_6$ non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare perché la condizione che lo definisce non è omogenea. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_6$, infatti, deve essere $y = z^2$. Ma allora $t\mathbf{v} \in \mathbf{H}_6$ se e soltanto se $ty = t^2 z^2$, cioè, sostituendo $y = z^2$, se e soltanto

se $(t^2 - t)z^2 = 0$ che, per $z \neq 0$, è soddisfatta solo quando $t = 0, 1$. Per fare un esempio concreto, se prendiamo $\mathbf{v} = [0, 1, 1]^T \in \mathbf{H}_6$, in modo che sia $z \neq 0$, e se $t = 2$, cioè diverso da 0 e 1, allora $t\mathbf{v} = [0, 2, 2] \notin \mathbf{H}_6$. Dunque $\mathbf{H}_6$ non è un sottospazio. Specializzando l'argomento precedente al caso $t \neq 0, 1$ intero si vede che $\mathbf{H}_6$ non è neppure chiuso rispetto alla somma.

7. Il sottoinsieme $\mathbf{H}_7$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Dal momento che il sistema non è omogeneo, non può ammettere il vettore nullo come soluzione. Di conseguenza $\mathbf{H}_7$ non contiene il vettore nullo e non è un sottospazio.

4 Sia $\mathcal{F}$ lo spazio delle funzioni reali di variabile reale. Si considerino i sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \{f \in \mathcal{F} : f(3) = 0\} \\ \mathbf{H}_2 &= \{g \in \mathcal{F} : g(2) = g(4)\} \\ \mathbf{H}_3 &= \{h \in \mathcal{F} : h(7) = 1 + h(0)\}. \end{aligned}$$

Quali di questi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{F}$?

Soluzione. 1. Ricordiamo che l'elemento neutro di $\mathcal{F}$ è la funzione nulla 0. Dal momento che $0(3) = 0$, abbiamo che $0 \in \mathbf{H}_1$. Proviamo che $\mathbf{H}_1$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare. Se $f \in \mathbf{H}_1$ e $t \in \mathbb{R}$, allora

$$(tf)(3) = tf(3) = t0 = 0$$

e dunque $tf \in \mathbf{H}_1$. Proviamo infine che $\mathbf{H}_1$ è chiuso rispetto alla somma. Se $f, g \in \mathbf{H}_1$, allora

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$$

e dunque $f + g \in \mathbf{H}_1$. Questo prova che $\mathbf{H}_1$ è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

2. *La funzione nulla 0 soddisfa la condizione $0(2) = 0 = 0(4)$ e dunque appartiene a* $\mathbf{H}_2$. Se $f \in \mathbf{H}_2$ e $t \in \mathbb{R}$, allora

$$(tf)(2) = tf(2) = tf(4) = (tf)(4).$$

Dunque $\mathbf{H}_2$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare. Infine, se $f, g \in \mathbf{H}_2$ allora

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = f(4) + g(4) = (f + g)(4).$$

Dunque $\mathbf{H}_2$ è chiuso anche rispetto alla somma ed è un sottospazio.

3. La funzione nulla non appartiene ad $\mathbf{H}_3$. Infatti $0(7) = 0 \neq 1 = 1 + 0(0)$. Quindi $\mathbf{H}_3$ non è un sottospazio.

5 Sia $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali a valori reali. Mostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{F}$ sono dei sottospazi:

1. l'insieme delle funzioni continue in un punto x_0;

2. l'insieme delle funzioni derivabili in un punto x_0;
3. l'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ delle funzioni continue in ogni punto $x \in \mathbb{R}$;
4. l'insieme $\mathcal{F}^1(\mathbb{R})$ delle funzioni derivabili in ogni punto $x \in \mathbb{R}$;
5. l'insieme $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ delle funzioni derivabili con derivata continua;
6. l'insieme delle funzioni integrabili in $[0, 1]$.

Soluzione. 1. Utilizzeremo i seguenti teoremi dalla teoria delle funzioni reali.

- Ogni $f \in \mathcal{F}$ costante è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$.
- Se $f, g \in \mathcal{F}$ sono continue in x_0, allora $f + g$ è continua in x_0.
- Se $f, g \in \mathcal{F}$ sono continue in x_0, allora fg è continua in x_0.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\mathcal{C}_{x_0} \subseteq \mathcal{F}$ il sottoinsieme delle funzioni continue in x_0. Il primo teorema mostra che la funzione zero, essendo costante, appartiene a $\mathcal{C}_{x_0}$. Il secondo teorema prova che $\mathcal{C}_{x_0}$ è chiuso rispetto alla somma. Infine, dal momento che uno scalare $t \in \mathbb{R}$ può essere identificato con la funzione costante $f(x) = t$ e dal momento che questa funzione è in $\mathcal{C}_{x_0}$ per il primo teorema, il terzo teorema prova che $\mathcal{C}_{x_0}$ è chiuso rispetto al prodotto di uno scalare per un vettore.

2. I tre teoremi sulle funzioni continue citati al punto 1 valgono se sostituiamo alla parola *continua* la parola *derivabile.* La stessa sostituzione nella dimostrazione del punto 1 prova dunque che l'insieme $\mathcal{F}^1_{x_0}$ delle funzioni derivabili in x_0 è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

3. Una prima possibilità è quella di osservare che i teoremi citati al punto 1 continuano a valere se sostituiamo la continuità in x_0 con la continuità su $\mathbb{R}$. Dunque anche la dimostrazione data sopra può essere modificata allo stesso modo. In alternativa si può utilizzare il fatto che una funzione reale è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e soltanto se è continua in ogni punto - si ricordi che la definizione di continuità sull'intero spazio usa tutti gli aperti dello spazio, mentre quella di continuità in un punto utilizza solo una base di intorni aperti del punto. In virtù di questo teorema, il sottoinsieme $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ è l'intersezione di tutti i sottospazi $\mathcal{C}_x$.

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{C}_x$$

Dall'esercizio 76 risulta che l'intersezione di sottospazi è sempre un sottospazio; dunque $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

4. Basta ripetere una delle argomentazioni usate per il punto 3, sostituendo la parola *continua* con *derivabile.*

5. Anche in questo caso basta modificare le argomentazioni utilizzate nei punti precedenti ricordando che se $U \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto allora ogni funzione costante è derivabile con derivata continua su U e che la somma e il prodotto di funzioni derivabili con derivata continua su U sono ancora funzioni derivabili con derivata continua. Un'altra soluzione, che utilizza le funzioni lineari, si può ottenere partendo dall'osservazione che la derivata è una funzione lineare $d : \mathcal{F}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}$. L'insieme $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}^1(\mathbb{R})$ è la preimmagine del sottospazio $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$ lungo d. L'affermazione consegue allora

dal fatto che la preimmagine di ogni sottospazio in una funzione lineare è sempre un sottospazio, come dimostrato nell'esercizio 11 del capitolo 5.

6. Basta utilizzare i seguenti teoremi della teoria dell'integrazione di Riemann o Lebesgue.

- Ogni funzione costante (su uno spazio di misura finita, come l'intervallo $[0, 1]$) è integrabile.
- La somma di due funzioni integrabili è integrabile.
- Il prodotto di una costante per una funzione integrabile è integrabile.

Esattamente come nel caso della continuità, il primo teorema permette di dedurre che la funzione 0 è integrabile. Il secondo e il terzo teorema permettono invece di affermare che l'insieme delle funzioni integrabili su $[0, 1]$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare e dunque è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

6 Sia $\mathbb{M}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Mostrare che l'insieme delle matrici triangolari alte e l'insieme delle matrici diagonali sono sottospazi di $\mathbb{M}$, e determinarne delle equazioni come si è fatto nel testo per le matrici simmetriche e antisimmetriche.

Soluzione. Una matrice $\mathbf{A}$ è triangolare alta se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli. Questi elementi sono gli a_{ij} il cui indice di riga i è strettamente maggiore dell'indice di colonna j. Le matrici triangolari alte sono dunque definite dalle equazioni $a_{ij} = 0$ per $i > j$. Si tratta di un sistema omogeneo di $(n^2 - n)/2$ equazioni e dunque l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}$. In modo analogo, una matrice è diagonale se tutti gli elementi che si trovano al di fuori della diagonale principale sono nulli. Queste matrici sono dunque le soluzioni del sistema omogeneo di $n^2 - n$ equazioni $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e formano perciò un sottospazio di $\mathbb{M}$.

7 Una matrice quadrata $\mathbf{N}$ si dice *nilpotente* se una potenza di $\mathbf{N}$ è uguale alla matrice nulla. Sia $\mathfrak{N}$ l'insieme delle matrici nilpotenti di ordine $n > 1$. Mostrare che $\mathfrak{N}$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, ma che $\mathfrak{N}$ non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio. (Suggerimento: considerare prima il caso $n = 2$, e cercare gli esempi tra le matrici che hanno tutti gli elementi tranne uno uguale a zero.)

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia nilpotente e più precisamente che sia $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$. Se $t \in \mathbb{K}$ è uno scalare, allora, per l'omogeneità del prodotto di matrici, t commuta con tutte le matrici e in particolare con $\mathbf{A}$. Dunque

$$(t\mathbf{A})^k = t^k\mathbf{A}^k = t^k\mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

Questo prova che $\mathfrak{N}$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Quanto alla somma, osserviamo anzitutto che nessuna matrice invertibile $\mathbf{B}$ può essere nilpotente. Se infatti fosse $\mathbf{B}^k = \mathbf{O}$, allora dall'esercizio 17 del capitolo 3 avremmo

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}^0 = \mathbf{B}^k\mathbf{B}^{-k} = \mathbf{O}\mathbf{B}^{-k} = \mathbf{O}$$

e questo è assurdo. Prendiamo ora

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2{}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si è visto nell'esercizio 5 del capitolo 3 che $\mathbf{A}_2^2 = \mathbf{O}$; dunque $\mathbf{A}_2$ è nilpotente. Anche $\mathbf{A}_2{}^{\mathrm{T}}$ è nilpotente, perché $(\mathbf{A}_2{}^{\mathrm{T}})^2 = (\mathbf{A}_2^2)^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}$. Tuttavia $\mathbf{B}_2$ ha rango massimo, come si vede immediatamente scambiando le due righe, dunque è invertibile e quindi non è nilpotente. Pertanto $\mathfrak{N}$ non è chiuso rispetto alla somma nel caso $n = 2$. Se $n > 2$ prendiamo

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} \\ \hdashline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right], \qquad \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n{}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}_2 & \mathbf{O} \\ \hdashline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right].$$

Dalle formule per il prodotto a blocchi a pagina 150 del testo si ottiene che

$$\mathbf{A}_n^2 = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{O} \\ \hdashline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right] = \mathbf{O}, \qquad \mathbf{B}_n^k = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}_2^k & \mathbf{O} \\ \hdashline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right].$$

La prima formula mostra che $\mathbf{A}_n$ è nilpotente e dunque che anche $\mathbf{A}_n{}^{\mathrm{T}}$ lo è. Poiché $\mathbf{B}_2$ è invertibile, il blocco superiore sinistro di $\mathbf{B}_n$ non è mai nullo e dunque $\mathbf{B}_n$ non è nilpotente. Questo prova che $\mathfrak{N}$ non è chiuso rispetto alla somma per ogni $n > 2$.

8 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale delle successioni $\{a_k\}$ di numeri reali. Sia ℓ_1 il sottoinsieme delle successioni $\{a_k\}$ tali che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$$

Mostrare che ℓ_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

Soluzione. Indichiamo con $s(a)$ la successione delle somme parziali dei valori assoluti di $a = \{a_k\}$.

$$s(a)_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i|$$

Ricordiamo che, per definizione, la successione a è assolutamente sommabile se la successione $s(a)$ è convergente. L'elemento neutro di $\mathbf{V}$ rispetto alla somma è la successione nulla 0, definita dalla formula $0_k = 0$. Questa successione è assolutamente sommabile perché $s(0)_k = 0 \to 0$. Dunque $0 \in \ell_1$.

Supponiamo ora che $a \in \ell_1$ e che $t \in \mathbb{R}$ sia uno scalare. Se $s(a) \to A$, allora

$$s(ta)_k = \sum_{i=0}^{k} |ta_i| = |t| \sum_{i=0}^{k} |a_i| = |t| s(a)_k \to |t| A.$$

Dunque ta è assolutamente sommabile e appartiene a ℓ_1.

Supponiamo infine che $a, b \in \ell_1$. Se $s(a) \to A$ e $s(b) \to B$ allora, dalla disuguaglianza $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$, abbiamo che

$$s(a+b)_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i + b_i| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| + \sum_{i=0}^{k} |b_i| = s(a)_k + s(b)_k \leq A + B.$$

La successione $s(a+b)$ è allora monotona crescente e superiormente limitata, dunque deve necessariamente convergere e questo significa che $a + b \in \ell_1$. Quindi ℓ_1 è un sottospazio di $\mathbf{V}$.

9 Sia $\mathcal{F} = \mathbb{R}^I$ l'insieme delle funzioni reali definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, e sia $L^1(I)$ il sottoinsieme delle funzioni $f(x)$ misurabili il cui modulo $|f(x)|$ è una funzione integrabile secondo Lebesgue su I. Mostrare che $L^1(I)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}$.

Soluzione. Indichiamo con L l'insieme delle funzioni reali non negative e misurabili rispetto alla misura di Lebesgue m. Faremo uso dei teoremi seguenti relativi all'integrale di Lebesgue.

1. Se $f \in L$ e $t \geq 0$, allora $\int_I (tf) = t \int_I f$.
2. Se $f, g \in L$ allora $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.
3. Se $f \in L$, allora $\int_I f \geq 0$.

Dai teoremi 1 e 3 consegue che l'integrale preserva l'ordine: se $f \leq g$ allora $\int_I f \leq \int_I g$.

Dimostriamo che $L^1(I)$ è un sottospazio di $\mathcal{F}$. La funzione nulla 0 è una funzione semplice; dalla definizione di integrale di una funzione semplice si ottiene

$$\int_I |0| \, dm = \int_I 0 \, dm = 0 \cdot m(I) = 0$$

e dunque $0 \in L^1(I)$. In secondo luogo, $|f + g| \leq |f| + |g|$ e dunque, dal fatto che l'integrale preserva l'ordine, abbiamo

$$\int_I |f+g| \, dm \leq \int_I (|f| + |g|) \, dm = \int_I |f| \, dm + \int_I |g| \, dm.$$

Se $f, g \in L^1(I)$ il termine a destra è finito, dunque lo è anche quello a sinistra e $f + g \in L^1(I)$. Infine se $t \in \mathbb{R}$, allora dal teorema 1 abbiamo che

$$\int_I |tf| \, dm = \int_I |t| \cdot |f| \, dm = |t| \int_I |f| \, dm.$$

Se $f \in L^1(I)$, allora il termine a destra è finito, dunque è finito anche quello a sinistra e $tf \in L^1(I)$.

3. COMBINAZIONI LINEARI

10 Scrivere il vettore $\mathbf{v} = [1, -2, 5]^T$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Per scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_i$ dobbiamo stabilire se esistono scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$ per cui risulti

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}.$$

Indicata con $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3]$ la matrice ottenuta accostando i vettori colonna $\mathbf{v}_i$ e con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ il vettore delle indeterminate, l'equazione precedente si scrive nella forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ ed è un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite. Lo risolviamo riducendo a scala la matrice completa.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Dalla riduzione a scala si ottiene per sostituzione retrograda l'unica soluzione $\mathbf{x} = [-6, 3, 2]^T$. Dunque

$$\mathbf{v} = -6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3.$$

11 Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{v} = [-2, 1, k]^T$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = [0, 3, -2]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [-1, 2, 5]^T$.

Soluzione. Si tratta di determinare per quali k esistono scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ per cui risulti

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

e quindi, posto $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, per quali k il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ ammette soluzione. Riducendo a scala la matrice completa del sistema si trova

$$[\mathbf{A}|\mathbf{v}] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & k \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3k - 36 \end{array}\right].$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2, mentre la matrice completa ha rango 2 solo se $3k - 36 = 0$, cioè se $k = 12$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione solo in quest'ultimo caso. Possiamo dunque concludere che $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ solo quando $k = 12$.

12 Scrivere il polinomio $(1+x)^3$ e la sua derivata $3(1+x)^2$ come combinazione lineare dei polinomi 1, x, x^2 e x^3.

Soluzione. Se espandiamo i due polinomi troviamo

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3\\ 3(1+x)^2 &= 3+6x+3x^2.\end{aligned}$$

I termini a destra rappresentano i polinomi a sinistra come combinazione lineare delle potenze di x. Ad esempio, il primo polinomio ha come coefficienti della combinazione lineare i numeri 1, 3, 3 e 1.

13 Scrivere il polinomio $\mathbf{p}(x) = -x^2 + 7$ come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{p}_1(x) = x^2 - 2x + 5, \qquad \mathbf{p}_2(x) = 2x^2, \qquad \mathbf{p}_3(x) = x + 1.$$

Soluzione. Si tratta di determinare coefficienti $x_i \in \mathbb{K}$ per cui risulti

$$x_1\mathbf{p}_1(x) + x_2\mathbf{p}_2(x) + x_3\mathbf{p}_3(x) = \mathbf{p}(x).$$

Se espandiamo questa formula troviamo

$$(x_1 + 2x_2)x^2 + (-2x_1 + x_3)x + (5x_1 + x_3) = -x^2 + 7.$$

Dal momento che due polinomi coincidono quando coincidono i coefficienti degli stessi monomi, l'ultima formula equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1\\ -2x_1 + x_3 = 0\\ 5x_1 + x_3 = 7,\end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $\mathbf{x} = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}$. Dunque

$$\mathbf{p}(x) = \mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) + 2\mathbf{p}_3(x).$$

Lo stesso calcolo può essere effettuato in una prospettiva diversa identificando ciascun polinomio con il vettore dei suoi coefficienti, ordinati ad esempio per potenze decrescenti dell'indeterminata.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix}.$$

Se poniamo $\mathbf{A} = [\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_3]$, allora l'equazione $\sum_i x_i\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$ equivale al sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$, che è esattamente quello risolto sopra. Dalla riduzione a scala della matrice completa troviamo

$$[\mathbf{A}|\mathbf{p}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1 & 7\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 7\end{array}\right]$$

e quindi, per sostituzione retrograda, l'unica soluzione $\mathbf{x} = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}$. Come già visto, si ottiene $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3$.

14 Mostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,2]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}_3 = [0,0,1]^{\mathrm{T}}$ sono un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. I vettori $\mathbf{v}_i$ sono dei generatori se ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ può essere scritto come combinazione lineare

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3.$$

Se poniamo $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3]$ e $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$, questo significa che il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ deve ammettere soluzione per ogni $\mathbf{v}$. Riducendo a scala la matrice dei coefficienti di questo sistema troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La riduzione a scala ha tre righe non nulle, dunque $r(\mathbf{A}) = 3$. D'altra parte, la matrice completa del sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{v}]$ non può avere rango maggiore di 3 perché ha solo tre righe. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha sempre una soluzione. Dunque i vettori $\mathbf{v}_i$ sono dei generatori di $\mathbb{R}^3$.

15 Spiegare perché $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$. Generalizzare a un numero arbitrario di vettori: il sottospazio $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ non dipende dall'ordine in cui si prendono i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$. (Una possibile soluzione è l'osservazione che $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ è il più piccolo sottospazio che contiene $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$; questa proprietà è indipendente dall'ordine dei vettori).

Soluzione. Dalla proposizione 4.2 sappiamo che per ogni insieme finito di vettori S, $\mathcal{L}(S)$ è il minimo sottospazio rispetto all'inclusione che contiene S. In particolare, se $S = T$ sono due insiemi finiti di vettori, allora $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$. Ma $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$, perché i due insiemi hanno gli stessi elementi. Dunque $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.

Più in generale, dato un insieme finito di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ e una permutazione $\sigma \in S_d$, abbiamo che

$$\left\{\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(d)}\right\} = \{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_d\}$$

sempre perché i due insiemi hanno gli stessi elementi. Dunque

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_d).$$

16 Spiegare perché $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$ e $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$.

Soluzione. Abbiamo osservato nell'esercizio 15 che se $S = T$ sono insiemi finiti di vettori, allora $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$. Basta allora osservare che $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\}$, perché i due insiemi hanno gli stessi elementi, per dedurre che $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$.

Per la seconda uguaglianza osserviamo che se $S \subseteq T$ sono due sottoinsiemi finiti di vettori, allora $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$, semplicemente perché ogni combinazione lineare di vettori in S è anche una combinazione lineare di vettori in T. Da $\{\mathbf{v}\} \subseteq \{\mathbf{v}, \mathbf{0}\}$ possiamo dunque concludere che $\mathcal{L}(\mathbf{v}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{0})$. Viceversa, il vettore $\mathbf{0}$ appartiene ad ogni sottospazio e dunque anche a $\mathcal{L}(\mathbf{v})$; ma allora $\mathcal{L}(\mathbf{v})$ è un sottospazio che contiene $\{\mathbf{v}, \mathbf{0}\}$ e dunque deve contenere $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{0})$. Dalle due inclusioni consegue che $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{0})$.

17 Mostrare che per ogni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Soluzione. Dalla proposizione 4.2 sappiamo che $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è un sottospazio che contiene sia $\mathbf{v}$ che $\mathbf{w}$. Come ogni sottospazio è chiuso rispetto alla somma, dunque contiene anche $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Ma, essendo un sottospazio che contiene sia $\mathbf{v}$ che $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, deve contenere $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ perché, sempre per la proposizione 4.2, questo è il minimo sottospazio che contiene sia $\mathbf{v}$ che $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Dunque $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

L'inclusione opposta si prova in modo del tutto simile. Il sottospazio $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ contiene sia $\mathbf{v}$ che $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Essendo un sottospazio, è chiuso rispetto alle combinazioni lineari e quindi contiene anche $\mathbf{w} = -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Ma poiché contiene sia $\mathbf{v}$ che $\mathbf{w}$, deve contenere $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ che è il minimo sottospazio che contiene questi due vettori. Dunque $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w})$. Dalle due inclusioni si ottiene $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w})$.

18 Scrivere il vettore $[i, 1 + i]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$ come combinazione lineare (a coefficienti complessi!) dei vettori della base canonica di $\mathbb{C}^2$.

Soluzione. Basta separare le coordinate e raccogliere i coefficienti corrispondenti per ottenere

$$\begin{bmatrix} i \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1+i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i\mathbf{e}_1 + (1+i)\mathbf{e}_2.$$

19 Scrivere la funzione costante 1 come combinazione lineare delle funzioni $\cos^2(x)$ e $\sin^2(x)$.

Soluzione. Basta ricordare che le funzioni trigonometriche seno e coseno soddisfano la formula

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{K}$. La formula prova che la funzione 1 è combinazione lineare di $\sin^2(x)$ e $\cos^2(x)$ con coefficiente 1 per entrambe.

20 Scrivere la funzione coseno iperbolico come combinazione lineare di funzioni esponenziali.

Soluzione. Ricordiamo che, per definizione,

$$\mathrm{Ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Questo significa che il coseno iperbolico è combinazione lineare delle due funzioni esponenziali e^x ed e^{-x} con coefficiente $\frac{1}{2}$ per entrambe.

21 Scrivere la funzione $\cos(x)$ come combinazione lineare a coefficienti complessi di funzioni esponenziali complesse. (Suggerimento: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.)

Soluzione. Ricordiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le formule

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x).$$

La prima è la formula di Eulero per i numeri complessi, mentre la seconda si ottiene dalla prima sostituendo x con $-x$ e ricordando che

$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Sommando i termini delle due formule troviamo $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ da cui

$$\cos(x) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}.$$

22 Mostrare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = y(x)$ è $\mathbb{R}e^x$, la retta generata dalla funzione esponenziale nello spazio vettoriale delle funzioni $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soluzione. L'equazione differenziale $y' = y$ è a variabili separabili. Il suo integrale generale è

$$y(x) = ce^x$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Questo significa che l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è l'insieme dei multipli dell'esponenziale e^x e quindi è la retta generata da e^x in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

23 Mostrare che il sottospazio di $\mathbb{M}(2,2)$ formato dalle matrici triangolari alte è generato dalle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Ricordiamo che la generica matrice triangolare alta è della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Basta allora osservare che

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

per concludere che ogni matrice triangolare alta di ordine due è combinazione lineare delle matrici date, che formano dunque un insieme di generatori per $\mathbb{M}(2,2)$.

24 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{S}$ un sottoinsieme (non necessariamente finito) di $\mathbf{V}$. Mostrare che l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di $\mathbf{S}$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$, ed è il minimo sottospazio di $\mathbf{V}$ che contenga $\mathbf{S}$. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale delle successioni di numeri reali. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathbf{e}_n$ la successione che è identicamente nulla tranne per l'n-esima componente, che è uguale a 1. Si mostri che il minimo sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che contenga tutte le successioni $\mathbf{e}_n$ è il sottospazio delle successioni finite (cioè delle successioni $\mathbf{a} = \{a_k\}$ tali che $a_k = 0$ per k sufficientemente grande).

Soluzione. Indichiamo con $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di $\mathbf{S}$ e dimostriamo che $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ è il minimo sottospazio che contiene $\mathbf{S}$. Questa affermazione è stata dimostrata per il caso in cui $\mathbf{S}$ è finito nella proposizione 4.2. Il caso generale consegue da questo non appena si osservi che ogni combinazione lineare è, per definizione, una somma finita e dunque

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \bigcup \mathcal{L}(\mathbf{S}_i)$$

dove l'unione è presa su tutti i sottoinsiemi finiti $\mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}$. Per dimostrare che $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ è un sottospazio basta ora utilizzare l'esercizio 76: gli $\mathcal{L}(\mathbf{S}_i)$ sono un insieme filtrante di sottospazi, perché $\mathcal{L}(\mathbf{S}_i) \cup \mathcal{L}(\mathbf{S}_j) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{S}_i \cup \mathbf{S}_j)$; dunque la loro unione $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ è un sottospazio. Certamente $\mathbf{S} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{S})$ perché ogni vettore di $\mathbf{S}$ è una combinazione lineare degli elementi di $\mathbf{S}$. Supponiamo infine che $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ sia un sottospazio che contiene $\mathbf{S}$. Ma allora $\mathbf{U}$ contiene tutti gli $\mathbf{S}_i$, dunque contiene i sottospazi $\mathcal{L}(\mathbf{S}_i)$ per la proposizione 4.2. Di conseguenza, deve contenere l'unione $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ di questi sottospazi. Questo prova che $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ è il minimo sottospazio che contiene $\mathbf{S}$.

Esaminiamo ora il caso $\mathbf{S} = \{\mathbf{e}_n : n = 0, 1, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Per quanto dimostrato nella prima parte dell'esercizio, il minimo sottospazio che contiene $\mathbf{S}$ è l'insieme $\mathcal{L}(\mathbf{S})$. Se prendiamo $\mathbf{S}_n = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, allora

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(\mathbf{S}_n)$$

perché ogni sottoinsieme finito $\mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}$ è contenuto in un $\mathbf{S}_n$. Ma gli elementi di $\mathcal{L}(\mathbf{S}_n)$ sono combinazioni lineari della forma

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{e}_k \\ &= (a_1, 0, 0 \ldots) + (0, a_2, 0, 0, \ldots) + \ldots + (0, \ldots 0, a_n, 0, 0, \ldots) \\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots)\end{aligned}$$

cioè sono le successioni nulle dopo l'indice n. Una successione è finita se e soltanto se è nulla dopo un indice n. Dunque $\bigcup_n \mathcal{L}(\mathbf{S}_n)$ è esattamente l'insieme delle successioni finite. Resta da osservare che l'unione coincide con $\mathcal{L}(\mathbf{S})$.

4. INDIPENDENZA LINEARE

25 Mostrare che i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Soluzione. Discutiamo prima in generale il metodo che utilizzeremo per risolvere questo genere di esercizi, in modo da utilizzarlo come riferimento in seguito; si veda in proposito anche l'ultimo esempio a pagina 169 del testo. Supponiamo dunque di voler stabilire se gli m vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ di $\mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti. Per definizione, questo accade se l'unica soluzione dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

nelle indeterminate $x_1, \dots, x_m$ è la soluzione nulla $x_1 = \cdots = x_m = 0$. Se $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_m]$ è la matrice le cui colonne sono i vettori assegnati e $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^{\mathrm{T}}$ è il vettore delle indeterminate, l'equazione precedente equivale al sistema lineare omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Come ogni sistema omogeneo, anche questo ammette sempre $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ come soluzione. Ma il teorema di Rouché-Capelli garantisce che questa soluzione è unica quando non ci sono variabili libere e cioè quando $r(\mathbf{A}) = m$. Dunque gli m vettori assegnati sono indipendenti se e soltanto se il rango della matrice $\mathbf{A}$ ottenuta accostando i vettori è m.
Veniamo ora al caso particolare. I due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ sono linearmente indipendenti se e soltanto se, posto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

risulta $r(\mathbf{A}) = 2$. Poiché $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine due, il teorema 4.3 del capitolo 3 garantisce che questa condizione è equivalente al fatto che $\mathbf{A}$ sia invertibile e l'ultima proposizione a pagina 131 del testo mostra che questo è equivalente a $ad - bc \neq 0$.

26 Per quali valori dei parametri a, b, c l'insieme

$$\{[1,0,0]^{\mathrm{T}},\ [1,1,0]^{\mathrm{T}},\ [a,b,c]^{\mathrm{T}}\}$$

è linearmente dipendente?

Soluzione. Facciamo riferimento all'esercizio 25 per i dettagli teorici sul metodo che utilizziamo. La matrice le cui colonne sono i vettori assegnati è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

ed è già ridotta a scala. I vettori assegnati sono linearmente indipendenti se e soltanto se $r(\mathbf{A}) = 3$ e cioè se e soltanto se $c \neq 0$. Di conseguenza, i vettori sono linearmente dipendenti nell'unico caso $c = 0$.

27 Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Facciamo riferimento all'esercizio 25 per i dettagli teorici sul metodo che utilizziamo. Costruiamo la matrice le cui colonne sono i vettori assegnati e la riduciamo a scala.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 3$, i vettori assegnati sono linearmente indipendenti.

28 Determinare se i seguenti vettori di $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(3,2)$ sono linearmente indipendenti

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Per poter utilizzare il metodo descritto nell'esercizio 25 identifichiamo una matrice 3×2 con il vettore di $\mathbb{K}^6$ i cui elementi sono gli stessi elementi della matrice ordinati lessicograficamente. Nel nostro caso, alle matrici assegnate facciamo corrispondere i vettori

$$\mathbf{v}_1 = [1,3,2,1,1,4]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_2 = [-1,0,3,5,-1,6]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_3 = [1,1,-1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}.$$

La giustificazione per questa sostituzione è, oltre che l'esistenza di un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(3,2) \simeq \mathbb{K}^6$, come spiegato nel capitolo 5 del testo, il fatto che l'equazione $\sum_k x_k \mathbf{A}_k = \mathbf{O}$, usata per stabilire l'indipendenza delle matrici, è equivalente all'equazione corrispondente $\sum_k x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ per i vettori, perché entrambe producono lo stesso sistema lineare. Se riduciamo a scala la matrice le cui colonne sono i vettori $\mathbf{v}_i$, troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 3$ i vettori $\mathbf{v}_i$ e dunque anche le corrispondenti matrici $\mathbf{A}_i$ sono linearmente indipendenti.

29 Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tre vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Si mostri che i vettori $\mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{s} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Le formule che descrivono $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ in funzione di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono equivalenti all'unica relazione fra matrici $[\mathbf{p}|\mathbf{r}|\mathbf{s}] = [\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}]\mathbf{A}$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora si osservi che $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice $[\mathbf{p}|\mathbf{r}|\mathbf{s}]$ ha nucleo ridotto al vettore nullo. Per determinare questo nucleo basta osservare che, se $[\mathbf{p}|\mathbf{r}|\mathbf{s}]\mathbf{x} = \mathbf{0}$, allora deve essere anche $[\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}]\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ma la matrice $[\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}]$ ha nucleo nullo perché $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. Dunque deve essere $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Una riduzione a scala di $\mathbf{A}$ mostra che $r(\mathbf{A}) = 3$ e dunque che, per il teorema di Rouché-Capelli, l'unica soluzione è $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. I vettori $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ sono allora linearmente indipendenti. Si veda anche l'esempio di pagina 187 sul testo.

30 Supponiamo che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ sia un insieme linearmente dipendente. Allora qualunque insieme di vettori $\mathcal{S}$ che contenga $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Soluzione. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ è linearmente dipendente, possiamo scrivere

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r$$

con $x_i \neq 0$ per almeno uno dei coefficienti. Se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ contiene l'insieme di partenza, allora

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n$$

dove $x_i \neq 0$ per almeno un indice, lo stesso della formula precedente. Dunque $\mathcal{S}$ è linearmente dipendente.

31 Sia $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora ogni sottoinsieme di $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Soluzione. Questa affermazione è equivalente a quella dell'esercizio 30. Supponiamo infatti che sia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Se $\mathcal{T}$ fosse linearmente dipendente, allora per via dell'esercizio 30, anche $\mathcal{S}$ dovrebbe essere linearmente dipendente, contro le ipotesi. Dunque $\mathcal{T}$ non può che essere linearmente indipendente.

32 Spiegare perché il fatto che dei vettori siano linearmente indipendenti o meno non dipende dall'ordine in cui sono presi.

Soluzione. I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono dipendenti se esistono scalari $t_1, \ldots, t_d$ non tutti nulli tali che

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $t_i \neq 0$ per un certo indice i. Consideriamo una permutazione σ sui d indici assegnati. Dal momento che la somma di vettori è commutativa, abbiamo

$$t_{\sigma(1)}\mathbf{v}_{\sigma(1)} + \cdots + t_{\sigma(d)}\mathbf{v}_{\sigma(d)} = \mathbf{0}.$$

In questa combinazione lineare almeno un indice è non nullo, e precisamente l'indice nella posizione j per cui $\sigma(j) = i$. Dunque anche i vettori $\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(d)}$ sono dipendenti.

33 Mostrare che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_d).$$

Il simbolo di inclusione stretta $\subsetneq$ significa *contenuto in* e *non uguale a*. (Suggerimento: combinare la proposizione 5.2 con il corollario 4.5).

Soluzione. Per semplificare la notazione, poniamo $\mathbf{S}_i = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ per $i = 1, \dots, d$; aggiungiamo anche $\mathbf{S}_0 = \varnothing$ e osserviamo che $\mathcal{L}(\mathbf{S}_0) = \{\mathbf{0}\}$.

Supponiamo che $\mathbf{S}_d$ sia linearmente indipendente. Allora, per quanto dimostrato nell'esercizio 31, $\mathbf{S}_i$ è linearmente indipendente per ogni i. Dalla proposizione 5.2 abbiamo che $\mathbf{v}_i \notin \mathcal{L}(\mathbf{S}_{i-1})$ e dunque che $\mathcal{L}(\mathbf{S}_{i-1}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbf{S}_i)$ per ogni $i = 1, \dots, d$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{S}_d$ sia linearmente dipendente. Possiamo allora scrivere

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$$

con almeno uno dei coefficienti diverso da zero. Supponiamo che t_i sia l'ultimo coefficiente non nullo. Ma allora

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

e dall'esercizio 1 si ottiene che $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei vettori di $\mathbf{S}_{i-1}$. Per il corollario 4.5. del capitolo 4 risulta $\mathcal{L}(\mathbf{S}_{i-1}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_i)$.

34 Mostrare che i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti nello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$.

Soluzione. Basta osservare che $i\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Infatti

$$i\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ma allora $i\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ fornisce il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ a coefficienti non tutti nulli e dunque $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti.

35 Nello spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale, siano: $\mathbf{v}_1$ la funzione costante 1, $\mathbf{v}_2$ la funzione $\cos^2(x)$, $\mathbf{v}_3$ la funzione $\sin^2(x)$. Mostrare che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Soluzione. Si è visto nell'esercizio 19 come la costante 1 sia combinazione lineare delle funzioni $\cos^2(x)$ e $\sin^2(x)$. Questo è sufficiente a provare che l'insieme $\{1, \cos^2(x), \sin^2(x)\}$ è linearmente dipendente.

36 Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che la funzione f e la sua derivata f' sono linearmente dipendenti se e solo se esistono due costanti reali c e λ tali che $f(x) = ce^{\lambda x}$.

Soluzione. La funzione $f(x)$ e la sua derivata $f'(x)$ sono linearmente dipendenti se e soltanto se esistono coefficienti $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, per cui risulta

$$c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Questo equivale ad affermare che f è soluzione su tutto $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$c_1 y' + c_0 y = 0.$$

Se $c_1 = 0$, allora, dovendo essere $c_0 \neq 0$ per le ipotesi fatte, l'equazione differenziale si riduce a $y = 0$ che ha come unica soluzione la funzione nulla $f(x) = 0$. Se invece $c_1 \neq 0$ abbiamo un'equazione del prim'ordine a variabili separabili. Posto $\lambda = -c_0/c_1$, l'equazione differenziale assume la forma $y' = \lambda y$ il cui integrale generale è $f(x) = ce^{\lambda x}$. In ogni caso, le soluzioni dell'equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni $f(x) = ce^{\lambda x}$ al variare di c e λ in $\mathbb{R}$.

5. BASI E DIMENSIONE

37 Sia $\mathbf{H}$ il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x - y + z = 0$. Trovare quattro basi distinte di $\mathbf{H}$. Scrivere le componenti del vettore $\mathbf{v} = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$ rispetto a ciascuna di tali basi (si osservi che le componenti sono due perché $\mathbf{H}$ ha dimensione due, e che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbf{H}$, allora $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ è un'altra base di $\mathbf{H}$).

Soluzione. I vettori di $\mathbf{H}$ sono le soluzioni in $\mathbb{R}^3$ del sistema lineare omogeneo S : $2x - y + z = 0$, che consiste di un'unica equazione. La matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = [2, -1, 1]$ è già ridotta a scala e $r(\mathbf{A}) = 1$; dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, tutte le basi di $\mathbf{H}$ contengono esattamente due vettori. Per trovare esplicitamente una base, basta risolvere S. Se scegliamo x e z come variabili libere e risolviamo rispetto alla variabile libera y, troviamo $y = 2x + z$. La soluzione generale di S è

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e da questa formula si trova la base di $\mathbf{H}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = [1,2,0]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$. Un'alternativa alla soluzione generale è quella di assegnare a una delle variabili libere un valore arbitrario purché non nullo, di azzerare le rimanenti variabili libere e di risolvere per le variabili dipendenti. In questo modo si ottiene un vettore della base di $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Ripetendo l'algoritmo per tutte le variabili libere si trova la base completa. Nel nostro caso, ad esempio, se poniamo $x = 1$ e $z = 0$ e risolviamo per y troviamo il vettore $\mathbf{v}_1 = [1,2,0]^{\mathrm{T}}$; se poniamo $x = 0$, $z = 1$ e risolviamo per y troviamo $\mathbf{v}_2 = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$, in accordo con quanto visto sopra. Resta da osservare che, dal momento che una base è un insieme ordinato, i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ determinano due basi distinte di $\mathbf{H}$, $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$.

Per trovare altre due basi scegliamo x e y come variabili libere e risolviamo S rispetto alla variabile dipendente z. Troviamo $z = -2x + y$. Posto $x = 1$, $y = 0$ e risolvendo rispetto a z troviamo il vettore $\mathbf{v}_3 = [1,0,-2]^{\mathrm{T}}$; posto invece $x = 0$, $y = 1$ e risolvendo rispetto a z ritroviamo il vettore $\mathbf{v}_2$. Le due basi che si ottengono permutando questi due vettori sono $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$ e $\mathcal{B}_4 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Per calcolare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_1$ basta risolvere il sistema lineare $\mathbf{B}_1\mathbf{x} = \mathbf{v}$, dove $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]$ è la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}_1$. In questo caso, poiché $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$, si vede subito senza alcun calcolo che una soluzione del sistema è $\mathbf{x} = [0,1]$; ma $\mathcal{B}_1$ è una base, dunque la soluzione è unica. La base $\mathcal{B}_2$ è stata ottenuta da $\mathcal{B}_1$ scambiando l'ordine dei vettori; dunque il vettore delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_2$ è $[1,0]^{\mathrm{T}}$. L'argomentazione per $\mathcal{B}_3$ è identica a quella data per $\mathcal{B}_1$, per via della presenza del vettore $\mathbf{v}_2$; si trova $[0,1]^{\mathrm{T}}$ come vettore delle coordinate. Quanto alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}_4$, basta scambiare quelle rispetto a $\mathcal{B}_3$ e si ottiene $[1,0]^{\mathrm{T}}$.

38 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale dei polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale a 2, e sia $\mathbf{H}$ il sottospazio dei polinomi tali che $P(1) = 0$. Trovare una base di $\mathbf{H}$ e concludere che $\mathbf{H}$ ha dimensione 2. Scrivere le componenti di $P(x) = x^2 - 1$ rispetto alla base trovata. (Suggerimento: un polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ è determinato dalla sua terna di coordinate $[a, b, c]^{\mathrm{T}}$ rispetto alla base canonica $\{x^2, x, 1\}$; è quindi possibile tradurre l'esercizio in un esercizio sui vettori $[a, b, c]^{\mathrm{T}}$).

Soluzione. Sappiamo, dall'ultimo esempio di pagina 175 sul testo, che $\{x^2, x, 1\}$ è una base di $\mathbf{V}$. Dunque la funzione $\mathcal{P} : \mathbb{K}^3 \to \mathbf{V}$ che associa al vettore $[a, b, c]^{\mathrm{T}}$ il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ è una funzione biettiva che permette di identificare $\mathbf{V}$ con $\mathbb{K}^3$. L'identificazione è utile perché $\mathcal{P}$ preserva le operazioni di spazio vettoriale e cioè la somma ed il prodotto per uno scalare. Il polinomio $P(x)$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se $P(1) = 0$ e cioè se $a + b + c = 0$. Dunque il sottospazio di $\mathbb{K}^3$ che corrisponde ad $\mathbf{H}$ è l'insieme $\mathbf{K}$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo formato dall'unica equazione $a + b + c = 0$. Per determinare una base di $\mathbf{K}$ utilizziamo la tecnica già discussa nell'esercizio 37: scelte b e c come variabili libere e a come unica variabile dipendente, abbiamo $a = -b - c$. Posto $b = 1$ e $c = 0$ troviamo $a = -1$; il primo vettore della base è dunque $\mathbf{v}_1 = [-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$. Posto $b = 0$ e $c = 1$ troviamo $a = -1$ e il vettore $\mathbf{v}_2 = [-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Una base di $\mathbf{K}$ è dunque $\{[-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}, [-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}\}$ e la base corrispondente di $\mathbf{H}$ è $\mathcal{B} = \{-x^2 + x, -x^2 + 1\}$; in particolare, $\dim \mathbf{H} = 2$.

Il polinomio $P(x) = x^2 - 1$ corrisponde al vettore $\mathbf{v} = [1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Quindi, invece di trovare le coordinate di $P(x)$ rispetto a $\mathcal{B}$, possiamo trovare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbf{K}$. Per farlo basta risolvere il sistema lineare omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}$, dove $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2]$. Si trova $\mathbf{x} = [0, -1]^{\mathrm{T}}$. Questo è anche il vettore delle coordinate di $P(x)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

39 Mostrare che l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2, e uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 1.

Soluzione. Ricordiamo che un numero complesso z si scrive in un unico modo nella forma $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$. Questa scrittura rappresenta z come combinazione lineare dei numeri complessi 1 e i con coefficienti reali a e b e dunque mostra che $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. In particolare $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. D'altra parte lo stesso numero complesso z può essere scritto nella forma $z = z \cdot 1$ e cioè come combinazione lineare del numero complesso 1 con coefficiente complesso z. Questa scrittura è chiaramente unica e dunque prova che $\{1\}$ è una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Dunque $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

40 Mostrare che i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono linearmente indipendenti se e soltanto se $\dim \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) = d$. (Suggerimento: una direzione è semplice perché se i vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base dello spazio da essi generato; per l'altra direzione usare il corollario 6.11).

Soluzione. Ricordiamo che $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$. Dunque, per definizione, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ è un insieme di generatori per $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono anche indipendenti, allora sono una base di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ per la proposizione 6.2 e dunque $\dim \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) = d$. Viceversa, se $\dim \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) = d$, allora i generatori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono una base di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ per il corollario 6.11. In particolare sono linearmente indipendenti sempre per la proposizione 6.2.

41 Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base dello spazio vettoriale $\mathbf{V}$, e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{V}$. Mostrare che esiste una base di $\mathbf{V}$ formata da $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ e da $n-d$ vettori della base $\mathcal{B}$.

Soluzione. Costruiamo una successione di sottoinsiemi

$$S_d \subset S_{d+1} \subset \dots \subset S_n$$

di $\mathbf{V}$ in cui ciascun S_i è linearmente indipendente e contiene esattamente i vettori. Per iniziare la costruzione prendiamo $S_d = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$. Costruito S_i, osserviamo che, se $i < n$, allora deve esistere almeno un vettore di $\mathcal{B}$ che non appartiene a $\mathcal{L}(S_i)$. Se infatti fosse $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(S_i)$, allora $\mathcal{L}(S_i)$ conterrebbe tutte le combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$; ma $\mathcal{B}$ è una base, quindi sarebbe $\mathcal{L}(S_i) = \mathbf{V}$ e $\mathbf{V}$ avrebbe una base formata da $i < n$ vettori, S_i appunto, il che contraddice il fatto che tutte le basi di uno spazio hanno la stessa cardinalità . Sia allora $\mathbf{b}_{j_{i+1}}$ il primo vettore di $\mathcal{B}$ che non appartiene a $\mathcal{L}(S_i)$ e sia $S_{i+1} = S_i \cup \{\mathbf{b}_{j_{i+1}}\}$. L'insieme S_{i+1} è costituito da $i+1$ vettori che, per la proposizione 5.2, sono linearmente indipendenti. Dunque la costruzione procede fino a S_n. Ora si osservi che S_n è un insieme linearmente indipendente di n vettori e dunque deve essere una base per via del corollario 6.11. Per come è stata costruita la successione, inoltre, S_n contiene i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ e un sottoinsieme di $n-d$ vettori di $\mathcal{B}$.

42 Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga i vettori $[1,1,1]^{\mathrm{T}}$ e $[1,2,5]^{\mathrm{T}}$. Scrivere le componenti di $[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ rispetto a tale base.

Soluzione. I vettori $\mathbf{v}_1 = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = [1,2,5]^{\mathrm{T}}$ sono linearmente indipendenti. Infatti posto $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]$, il sistema lineare omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ammette come unica soluzione il vettore nullo, perché $r(\mathbf{A}) = 2$ come si vede dalla riduzione a scala

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per estendere l'insieme indipendente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a una base di $\mathbb{R}^3$ faremo uso dell'algoritmo descritto nell'esercizio 41, partendo dalla base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Per determinare il primo vettore di $\mathcal{E}$ linearmente indipendente rispetto a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ occorre calcolare i ranghi delle matrici $[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{e}_i]$. Invece di ripetere il calcolo più volte, è conveniente ridurre a scala la matrice $\mathbf{B} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3]$ e vedere quale fra le ultime tre colonne ha un pivot nella terza riga. Effettuando la riduzione a scala troviamo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il pivot della terza riga si trova nella colonna di $\mathbf{e}_1$, dunque $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ è linearmente indipendente ed è una base di $\mathbb{R}^3$.

Per trovare le coordinate di $\mathbf{v} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$ rispetto a $\mathcal{B}$ basta risolvere il sistema lineare $[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{e}_1]\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Si trova $\mathbf{x} = [0,0,1]^{\mathrm{T}}$.

43 Mostrare che le quattro matrici

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

formano una base dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Scrivere le coordinate della matrice identità rispetto a tale base. (Suggerimento: basta verificare che le matrici sono linearmente indipendenti.)

Soluzione. Sappiamo dal terzo esempio di pagina 175 del testo che $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2,2)$ ammette una base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ formata da quattro vettori. Questa osservazione ha due conseguenze importanti. La prima è che per dimostrare che le matrici $\mathbf{B}_i$ sono una base possiamo fare uso del corollario 6.11 e dimostrare semplicemente che sono linearmente indipendenti. La seconda, e più importante, è che invece di lavorare direttamente con le matrici 2×2 possiamo utilizzare la tecnica vista nella dimostrazione del teorema 6.5 e lavorare con i vettori delle coordinate delle matrici $\mathbf{B}_i$ e della matrice identità $\mathbf{I}$ rispetto a $\mathcal{E}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per dimostrare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ è linearmente indipendente basta provare, come visto nell'esercizio 25, che la matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_4]$ ha rango quattro. Per determinare invece le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ occorre risolvere il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Possiamo risolvere simultaneamente i due problemi riducendo a scala la matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{v}]$ del sistema:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Dalla riduzione a scala si vede che $r(\mathbf{A}) = 4$; dunque $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^4$ e le matrici $\mathbf{B}_i$ sono una base di $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2,2)$. Sempre dalla riduzione a scala, per sostituzione retrograda, si trova l'unica soluzione $\mathbf{x} = [1, 0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$. Dunque $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ e, di conseguenza, $\mathbf{I} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3$.

44 Sia $P(x) = x^2$. Mostrare che $P(x)$, $P'(x)$ e $P''(x)$ formano una base dello spazio dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali.

Soluzione. Come già visto negli esercizi 38 e 43 conviene sostituire i polinomi

$$P(x) = x^2, \quad P'(x) = 2x, \quad P''(x) = 2,$$

con i vettori delle loro coordinate rispetto alla base canonica $\{x^2, x, 1\}$ dello spazio $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado massimo 2. Se costruiamo la matrice $\mathbf{A}$ che ha come colonne i vettori delle coordinate dei polinomi, troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice è già ridotta a scala e $r(\mathbf{A}) = 3$. Dunque $\{P, P', P''\}$ è una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$.

45 Sia $\mathbb{M}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n, e sia $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{M}$ il sottospazio delle matrici diagonali. Trovare una base di $\mathbb{D}$ e dedurre che $\dim(\mathbb{D}) = n$. Scrivere le coordinate della matrice identità rispetto alla base trovata.

Soluzione. Ricordiamo che l'insieme

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$$

è una base di $\mathbb{M}$, essendo $\mathbf{E}_{ij}$ la matrice che ha un 1 in posizione (i, j) e tutti gli altri elementi nulli. Se $\mathbf{A}$ è una matrice diagonale di ordine n, allora $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e dunque

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{ii}.$$

Questo prova che

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{E}_{ii} : i = 1 \dots, n\}$$

è un insieme di generatori per $\mathbb{D}$. Ma $\mathcal{D}$ è un sottoinsieme dell'insieme linearmente indipendente $\mathcal{B}$, dunque è esso stesso indipendente. Dalla proposizione 6.2 consegue che $\mathcal{D}$ è una base di $\mathbb{D}$ e in particolare che $\dim \mathbb{D} = n$. L'ultima sommatoria sopra mostra che le coordinate di $\mathbf{A}$ rispetto a $\mathcal{D}$ sono gli elementi a_{ii} che si trovano sulla diagonale principale. In particolare, le coordinate della matrice identità rispetto a $\mathcal{D}$ sono date dal vettore $[1, 1, \dots, 1]^{\mathrm{T}}$.

46 Sia $\mathbb{S}_n$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate *simmetriche* di ordine n. Trovare una base di $\mathbb{S}_n$ e mostrare che $\dim(\mathbb{S}_n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. (Suggerimento: trattare prima i casi $n = 2$ e $n = 3$.)

Soluzione. Esaminiamo prima il caso $n = 2$. Per una generica matrice simmetrica $\mathbf{A}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}(\mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}) + a_{22}\mathbf{E}_{22} \\
&= a_{11}\mathbf{S}_{11} + a_{12}\mathbf{S}_{12} + a_{22}\mathbf{S}_{22},
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\mathbf{S}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{E}_{ii} & \text{se } i = j \\ \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji} & \text{se } i < j. \end{cases}$$

Questa rappresentazione di $\mathbf{A}$ è unica, perché i coefficienti della combinazione lineare sono i coefficienti a_{ij} della matrice e sono quindi univocamente determinati da $\mathbf{A}$. Dunque $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}_{22}\}$ è una base di $\mathbb{S}_2$ e $\dim \mathbb{S}_2 = 3 = \frac{1}{2}\,2\,(2+1)$.

Il caso $n = 3$ è simile:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}\mathbf{S}_{11} + a_{12}\mathbf{S}_{12} + a_{13}\mathbf{S}_{13} + a_{22}\mathbf{S}_{22} + a_{23}\mathbf{S}_{23} + a_{33}\mathbf{S}_{33} \\
&= \sum_{i \le j} a_{ij}\mathbf{S}_{ij}
\end{aligned}
$$

e la combinazione lineare è univocamente determinata dai coefficienti a_{ij} di $\mathbf{A}$. Dunque

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}_{13}, \mathbf{S}_{22}, \mathbf{S}_{23}, \mathbf{S}_{33}\} = \{\mathbf{S}_{ij} : 1 \le i \le j \le 3\}$$

è una base di $\mathbb{S}_3$ e $\dim \mathbb{S}_3 = 6 = \frac{1}{2}\,3\,(3+1)$.

Esaminiamo infine il caso generale. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{S}_n$, allora $a_{ji} = a_{ij}$ e dunque

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i>j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ji}\mathbf{E}_{ji} \\
&= \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ji} \\
&= \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) \\
&= \sum_{i \le j} a_{ij}\mathbf{S}_{ij}.
\end{aligned}
$$

Come nei casi $n = 2$ e $n = 3$, il fatto che gli a_{ij} determinano la combinazione lineare prova che $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{S}_{ij} : 1 \le i \le j \le n\}$ è una base di $\mathbb{S}_n$. Per determinare la dimensione di $\mathbb{S}_n$ occorre contare gli elementi di $\mathcal{S}_n$. Un modo per farlo è quello di contare prima gli elementi con $i = 1$, poi quelli con $i = 2$ e così via. Troviamo

$$|\mathcal{S}_n| = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n+1).$$

In alternativa, si può osservare che gli elementi di $\mathcal{S}_n$ corrispondono agli a_{ij} che si trovano sulla diagonale principale di $\mathbf{A}$ e al di sopra di essa. Il numero di elementi sulla diagonale principale è n, quello degli elementi sopra la diagonale è la metà degli elementi al di fuori della diagonale, e cioè $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. Dunque, in totale,

$$|\mathcal{S}_n| = n + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

In ogni caso, $\dim \mathbb{S}_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

47 Sia $\mathbb{E}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate *antisimmetriche* di ordine n. Trovare una base di $\mathbb{E}$ e mostrare che $\dim(\mathbb{E}) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Soluzione. Ricordiamo che una matrice $\mathbf{A}$ di ordine n è antisimmetrica se $a_{ji} = -a_{ij}$ per tutti gli indici i e j. Se $i = j$ si trova $a_{ii} = -a_{ii}$ e dunque $a_{ii} = 0$ per ogni indice i. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{E}$ abbiamo allora che

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i=j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + \sum_{i>j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} + 0 + \sum_{i<j} a_{ji}\mathbf{E}_{ji} \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} - \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{E}_{ji} \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ji}) \\
&= \sum_{i<j} a_{ij}\mathbf{A}_{ij},
\end{aligned}$$

dove si è posto $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ji}$. I coefficienti della combinazione lineare sono univocamente determinati da $\mathbf{A}$, perché matrici antisimmetriche diverse hanno coefficienti diversi e dunque l'insieme $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_{ij} : i < j\}$ è una base di $\mathbb{E}$. Il numero di elementi di $\mathcal{A}$ corrisponde al numero di a_{ij} che si trovano al di sopra della diagonale principale e questo numero è $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. Dunque

$$\dim \mathbb{E} = \frac{1}{2}n(n-1).$$

48 Sia $\mathbb{T}$ lo spazio vettoriale delle matrici triangolari alte di ordine n. Trovare una base di $\mathbb{T}$ e mostrare che $\dim(\mathbb{T}) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Soluzione. Se $\mathbf{A}$ è triangolare alta, allora $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ e dunque

$$\mathbf{A} = \sum_{i \leq j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

Questa combinazione lineare è univocamente determinata da $\mathbf{A}$ e matrici triangolari alte distinte producono combinazioni lineari distinte, perché devono differire per almeno un elemento a_{ij} con $i \leq j$. Dunque l'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{E}_{ij} : i \leq j\}$$

è una base di $\mathbb{T}$. Per determinare la cardinalità di $\mathcal{T}$ si procede come nell'esercizio 46 e si trova

$$\dim \mathbb{T} = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Un altro modo per ottenere lo stesso risultato è il seguente. Se $\mathbf{A}$ è una matrice simmetrica, si definisca la matrice triangolare alta $U(\mathbf{A})$ associata ad $\mathbf{A}$ come la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ azzerando tutti gli elementi che si trovano al di sotto della diagonale principale. La funzione $U : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ è biettiva e preserva la somma e il prodotto per uno scalare – nel linguaggio del capitolo 5 del testo, U è un isomorfismo di spazi vettoriali. Dunque U preserva le combinazioni lineari e di conseguenza trasforma basi in basi, nel senso che un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{S}$ è una base se e soltanto se $U(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{T}$ lo è. Dall'esercizio 46 sappiamo che $\mathcal{S} = \{\mathbf{S}_{ij} : i \leq j\}$ è una base di $\mathbb{S}$. Poiché $U(\mathbf{S}_{ij}) = \mathbf{E}_{ij}$, ritroviamo il fatto che $\mathcal{T} = U(\mathcal{S})$ è una base di $\mathbb{T}$. E poiché U preserva le basi, $\dim \mathbb{T} = \dim \mathbb{S} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

49 Sia ℓ_1 lo spazio vettoriale delle successioni $\{a_k\}$ tali che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$$

Mostrare che ℓ_1 non ha dimensione finita.

Soluzione. Sia $\mathbf{e}_i$ la successione che ha tutti i termini nulli ad eccezione dell'i-esimo, che è uguale a 1.

$$(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$$

La somma dei termini di $\mathbf{e}_i$ vale 1, dunque $\mathbf{e}_i \in \ell_1$. L'insieme

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N}\}$$

è linearmente indipendente. Infatti

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \Rightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$$
$$\Rightarrow a_1 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Questo prova che i primi n vettori di $\mathcal{E}$ sono indipendenti. Dal momento che non sono state fatte ipotesi su n, questo vale per tutti gli $n \in \mathbb{N}$; dunque $\mathcal{E}$ è indipendente e ℓ_1 contiene un insieme linearmente indipendente infinito. Se ℓ_1 avesse dimensione finita n, nessun insieme linearmente dipendente potrebbe contenere più di n vettori per il teorema 6.5. Dunque ℓ_1 non ha dimensione finita.

6. COORDINATE

50 Per quali valori del parametro reale k il polinomio $3x^2 + kx + 2$ è combinazione lineare dei polinomi $x^2 + 2x + 1$ e $x - 1$? Per tali valori trovare i coefficienti della combinazione lineare. (Suggerimento: risolvere il problema sui vettori delle coordinate rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$).

Soluzione. Consideriamo la base canonica $\{x^2, x, 1\}$. Passando ai vettori delle coordinate rispetto a questa base, il problema si riduce a quello di stabilire quando il vettore

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}(3x^2 + kx + 2) = [3, k, 2]^{\mathrm{T}}$$

è combinazione lineare dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}(x^2+2x+1) = [1,2,1]^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}(x-1) = [0,1,-1]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Questo accade quando il sistema lineare $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ammette soluzione. Se riduciamo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & k-6 \\ 0 & 0 & k-7 \end{array}\right].$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione solo per $k = 7$ e in questo caso si trova l'unica soluzione $\mathbf{x} = [3,1]^{\mathrm{T}}$. Dunque $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e

$$3x^2 + 7x + 2 = 3(x^2+2x+1) + (x-1).$$

51 Trovare le coordinate di $[x,y]^{\mathrm{T}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{[1,2]^{\mathrm{T}}, [2,1]^{\mathrm{T}}\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{x} = [x,y]^{\mathrm{T}}$ coincide con il suo vettore delle coordinate rispetto alla case canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. La matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque, per la proposizione 7.3, il vettore $\mathbf{X}$ delle coordinate di $[x,y]^{\mathrm{T}}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{bmatrix}.$$

Vale ovviamente la pena di osservare che l'esercizio può essere risolto in modo più diretto: le coordinate di $\mathbf{x}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono le soluzioni del sistema lineare $\mathbf{SX} = \mathbf{x}$ nel vettore incognito $\mathbf{X}$, dove, come sopra, $\mathbf{S}$ è la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}$. Riducendo a scala si trova

$$[\mathbf{S}|\mathbf{x}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -2x+y \end{array}\right]$$

e dunque la stessa soluzione $\mathbf{X} = \frac{1}{3}[-x+2y, 2x-y]^{\mathrm{T}}$ vista sopra.

52 Supponiamo di effettuare nel piano $\mathbb{R}^2$ il cambiamento di coordinate lineare

$$\begin{cases} X = 3x - y \\ Y = x + 2y \end{cases}$$

Trovare la base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[X,Y]^{\mathrm{T}}$ sia il vettore delle coordinate di $[x,y]^{\mathrm{T}}$ rispetto a $\mathcal{C}$. (Suggerimento: riscrivere il cambiamento di coordinate nella forma matriciale $\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$; la matrice $\mathbf{S}$ ha per colonne i vettori della base cercata).

Soluzione. Il cambiamento di coordinate assegnato è della forma $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, se $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è la base cercata ed $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la base canonica, allora le formule per il cambiamento di coordinate da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$ sono date da $\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$ dove $\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$. Questo significa che $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}$ e dunque

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dal momento che i vettori di $\mathcal{C}$ sono le colonne di $\mathbf{S}$, troviamo

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \right\}.$$

Si verifichi che i vettori $\{[1,0,1]^T, [2,0,0]^T, [3,1,1]^T\}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le componenti del vettore $[0,2,1]^T$ rispetto a tale base. (Suggerimento: risolvere il sistema lineare $[0,2,1]^T = X_1\mathbf{c}_1 + X_2\mathbf{c}_2 + X_3\mathbf{c}_3$).

Soluzione. Per verificare che i tre vettori sono indipendenti basta provare che la matrice $\mathbf{S} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3]$ ha rango tre. D'altra parte, per trovare le coordinate di $\mathbf{x} = [0,2,1]^T$ rispetto a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ occorre risolvere il sistema lineare $\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Riducendo a scala la matrice completa del sistema si trova

$$[\mathbf{S}|\mathbf{c}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Dalla riduzione a scala si vede immediatamente che $r(\mathbf{S}) = 3$ e dunque che $\mathcal{C}$ è una base. Risolvendo poi il sistema associato alla riduzione a scala per sostituzione retrograda si trova l'unica soluzione $\mathbf{X} = [-1, -\frac{5}{2}, 2]^T$.

È ovviamente possibile, anche se più inefficiente dal punto di vista computazionale, utilizzare le formule del cambiamento di base. La matrice $\mathbf{S}$ è infatti la matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$, mentre i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{X}$ rappresentano, rispettivamente, le coordinate dello stesso vettore rispetto a $\mathcal{E}$ e $\mathcal{C}$. Dalla proposizione 7.3 abbiamo

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

in accordo con quanto trovato sopra.

Verificare che $\mathcal{B} = \{[1,1,-2]^T, [2,-1,-1]^T\}$ è una base del piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$. Trovare le coordinate di $[-y-z, y, z]^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. Il piano $\mathbf{H} : x + y + z = 0$ è il nucleo della matrice $\mathbf{A} = [1, 1, 1]$. Poiché $r(\mathbf{A}) = 1$, per il teorema di Rouché-Capelli $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = 2$. Si verifica pure immediatamente che $\mathbf{Ab}_1 = \mathbf{Ab}_2 = \mathbf{0}$ e dunque che $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{H}$ resta dunque da provare che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti e cioè che la matrice $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ ha rango 2. Poiché la determinazione delle coordinate di $\mathbf{v} = [-y - z, y, z]^{\mathrm{T}}$ rispetto a $\mathcal{B}$ si riduce alla soluzione del sistema lineare $\mathbf{Bx} = \mathbf{v}$, conviene anzitutto ridurre a scala la matrice completa $[\mathbf{B}|\mathbf{v}]$ del sistema.

$$[\mathbf{B}|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -y-z \\ 1 & -1 & y \\ -2 & -1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -y-z \\ 0 & -3 & 2y+z \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dalla riduzione a scala si vede che $r(\mathbf{B}) = 2$ e dunque che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{H}$. Se risolviamo il sistema associato alla riduzione a scala per sostituzione retrograda troviamo l'unica soluzione $\mathbf{x} = \frac{1}{3}[y - z, -2y - z]^{\mathrm{T}}$ che è il vettore delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Un altro modo, meno efficiente, di risolvere l'esercizio con le formule per il cambiamento di base è questo: $\mathbf{v}$ è la soluzione dell'equazione di $\mathbf{H}$ con y, z come variabili libere e x come variabile dipendente. Dunque per ottenere una base di $\mathbf{H}$ basta porre $y = 1$, $z = 0$ una prima volta e $y = 0$, $z = 1$ una seconda volta. Si trovano i vettori $\mathbf{c}_1 = [-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{c}_2 = [-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ e la base $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$. Il vantaggio di $\mathcal{C}$ è che $\mathbf{v} = y\mathbf{c}_1 + z\mathbf{c}_2$ per costruzione, dunque le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{C}$ sono note e sono date dal vettore $\mathbf{X} = [y, z]^{\mathrm{T}}$. Dalla proposizione 7.3 si ha che la matrice di passaggio $\mathbf{S}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ deve soddisfare la condizione $\mathbf{C} = \mathbf{BS}$. Dunque il vettore $\mathbf{x}$ delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{x} = \mathbf{SX} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{CX} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} y - z \\ -2y - z \end{bmatrix},$$

in accordo con quanto visto sopra.

55 Verificare che $\mathcal{B} = \{(x+1)^2, x+1, 1\}$ è una base dello spazio dei polinomi di grado ≤ 2. Trovare le coordinate di

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. Sia $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ e sia $\mathbf{v}$ il vettore delle coordinate di P. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ basta provare che $r(\mathbf{B}) = 3$, mentre per determinare le coordinate di P rispetto a $\mathcal{B}$ basta risolvere il sistema lineare $\mathbf{Bx} = \mathbf{v}$. Se riduciamo a scala la matrice completa $[\mathbf{B}|\mathbf{v}]$ del sistema troviamo

$$[\mathbf{B}|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{array}\right].$$

Come si vede, $r(\mathbf{B}) = 3$ e dunque $\mathcal{B}$ è una base. Dalla riduzione a scala si legge anche immediatamente che l'unica soluzione del sistema è il vettore $\mathbf{x} = [a, -2a+b, a-b+c]^{\mathrm{T}}$, e queste sono le coordinate di P rispetto a $\mathcal{B}$.

Vale anche la pena di osservare che, una volta verificato che $\mathbf{B}$ ha rango massimo e quindi che $\mathcal{B}$ è una base, la stessa $\mathbf{B}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$. Poiché $\mathbf{v}$ è il vettore delle coordinate di P rispetto a $\mathcal{E}$, possiamo determinare le coordinate di P rispetto a $\mathcal{B}$ con la formula del cambiamento di base

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -2a+b \\ a-b+c \end{bmatrix}.$$

7. RANGO DI UNA MATRICE

56 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n e rango n. Mostrare che l'insieme delle righe (rispettivamente l'insieme delle colonne) di $\mathbf{A}$ è una base di $\mathbb{K}^n$.

Soluzione. Lo spazio riga $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ che, per la proposizione 8.4, ha dimensione $\dim \mathrm{Row}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = n$. Ma anche $\dim \mathbb{K}^n = n$, come si è visto nel secondo esempio a pagina 175 del testo. Quindi, per il corollario 6.12, $\mathrm{Row}(\mathbf{A}) = \mathbb{K}^n$. L'argomento per $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ è identico; occorre solo osservare che $\dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Row}(\mathbf{A}) = n$ per il teorema 8.6.

57 Sia $\mathbf{A}$ una matrice 2×3 di rango 2. Mostrare che le due righe di $\mathbf{A}$ sono linearmente indipendenti, e che le tre colonne di $\mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti. Mostrare con un esempio che non è detto né che le prime due colonne di $\mathbf{A}$ siano linearmente indipendenti né che la terza colonna sia combinazione lineare delle prime due.

Soluzione. Dalle ipotesi e dalla proposizione 8.4 abbiamo che $\dim \mathrm{Row}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = 2$. D'altra parte, per definizione, le due righe di $\mathbf{A}$ sono un insieme di generatori per $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$. Il fatto che il numero dei generatori coincida con la dimensione implica, per il corollario 6.11, che i generatori sono una base e quindi, in particolare, che sono linearmente indipendenti.

Per le colonne abbiamo, dal teorema 8.6 e dalla proposizione 8.4, che $\dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = 2$. Dal teorema 6.5 sappiamo che ogni sottoinsieme di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ contenente più di due vettori deve essere linearmente dipendente. Le colonne $\mathbf{A}$ sono tre; dunque sono linearmente dipendenti.

Consideriamo infine la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $\mathbf{A}$ è già ridotta a scala e ha due pivot, dunque $r(\mathbf{A}) = 2$. Le prime due colonne coincidono quindi sono linearmente dipendenti. D'altra parte, la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle prime due colonne è uno, mentre $\dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = 2$. Dunque la terza colonna non appartiene al sottospazio generato dalla prime due e quindi non può esserne combinazione lineare.

58 Sia $\mathbf{A}$ la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base dello spazio riga e una base dello spazio colonna di **A**. Ci sono delle righe che sono combinazioni lineari delle righe precedenti? E colonne?

Soluzione. Riduciamo a scala la matrice **A**.

$$\mathbf{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 10 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base per Row(**A**) è, per la proposizione 8.4, l'insieme $\mathcal{R}$ delle righe non nulle della riduzione a scala **U**; possiamo, per convenienza, moltiplicare ciascuna di queste righe per un fattore diverso da zero. Una base per Col(**A**) è, per l'ultima osservazione a pagina 199 del testo, l'insieme $\mathcal{C}$ delle colonne di **A** che corrispondono alle colonne di **U** in cui si trovano i pivot. Abbiamo dunque

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 17 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nel corso della riduzione a scala, la terza riga diventa nulla, come si vede al secondo passaggio. Questo significa che la terza riga di **A** è combinazione lineare delle precedenti. Si osservi che questa riga viene scambiata con la quarta nell'ultimo passaggio per ottenere la riduzione a scala. Dal momento che non ci sono altre righe nulle in **U**, questo è l'unico caso. Per quanto riguarda le colonne, sappiamo che una base di Col(**A**) si ottiene dalle colonne che corrispondono ai pivot. Questo significa che tutte le colonne che non hanno un pivot in **U** sono combinazione lineare delle precedenti. L'unica colonna per cui questo accade è la quarta, che è dunque combinazione lineare delle prime tre.

59 Trovare una base per lo spazio riga e una base per lo spazio colonna della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Rinviamo all'esercizio 58 per i riferimenti teorici. Riducendo a scala **A** si ottiene

$$\mathbf{A} \to \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base di Row(**A**) è l'insieme $\mathcal{R}$ delle righe non nulle di **U**. Una base di Col(**A**) è l'insieme $\mathcal{C}$ delle colonne di **A** che corrispondono a quelle di **U** in cui si trovano i pivot.

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

60 Nella matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la terza colonna è la somma delle prime due. Possiamo dedurre che la terza riga è combinazione lineare delle prime due? In caso affermativo trovare i coefficienti di tale combinazione lineare. (Suggerimento: la matrice ha rango 2, e le prime due righe sono linearmente indipendenti).

Soluzione. Siccome la terza colonna è somma delle prime due, la matrice ha rango ≤ 2. Quindi anche lo spazio riga ha dimensione al massimo 2. Le prime due righe della matrice sono evidentemente indipendenti, perciò lo spazio riga ha dimensione 2, e le prime due righe ne sono una base. Ne segue che la terza riga è combinazione lineare delle prime due.

Se indichiamo con $\mathbf{a}_i$ il vettore colonna corrispondente alla i-esima riga di $\mathbf{A}$, possiamo stabilire direttamente con quali coefficienti $\mathbf{a}_3$ è combinazione lineare di $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ risolvendo il sistema lineare $[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2]\mathbf{x} = \mathbf{a}_3$. Si osservi che la matrice completa di questo sistema è $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Se la riduciamo a scala troviamo

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Come si vede, sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango 2; dunque il sistema ha un'unica soluzione che si calcola per sostituzione retrograda. Si trova $\mathbf{x} = [-1, 2]^{\mathrm{T}}$. Dunque $\mathrm{R}_3 = -\mathrm{R}_1 + 2\mathrm{R}_2$.

Si osservi che in generale il fatto che la terza colonna di una matrice 3×3 sia combinazione lineare delle prime due non implica che la terza riga sia combinazione lineare delle prime due. Si prenda ad esempio la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso la terza colonna è la somma delle prime due, ma la terza riga non è in alcun modo combinazione lineare delle prime due.

61 Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due matrici per cui il prodotto $\mathbf{AB}$ è definito. Mostrare che $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$ (con uguaglianza se $\mathbf{B}$ è invertibile) e $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$ (con uguaglianza se $\mathbf{A}$ è invertibile). In particolare, se si moltiplica una matrice a destra o a sinistra per una matrice invertibile si ottiene una matrice di ugual rango. (Suggerimento: mostrare che $\operatorname{Ker}(\mathbf{B}) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathbf{AB})$ e poi usare il teorema di nullità più rango per concludere $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$; la prima disuguaglianza segue da questa passando alle matrici trasposte).

Soluzione. Mostriamo inizialmente la seconda disuguaglianza. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia una matrice $m \times n$ e che $\mathbf{B}$ sia una matrice $n \times p$. Si osservi anzitutto che

$\mathrm{Ker}(\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{AB})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{B}) &\Rightarrow \mathbf{Bx} = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \mathbf{ABx} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{AB}).\end{aligned}$$

Dunque $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{B}) \leq \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{AB})$. Dal teorema di nullità più rango si ottiene

$$\begin{aligned}r(\mathbf{AB}) &= p - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{AB})\\ &\leq p - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{B})\\ &= r(\mathbf{B}).\end{aligned}$$

Se $\mathbf{A}$ è invertibile allora $\mathrm{Ker}(\mathbf{B}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{AB})$ perché

$$\mathbf{ABx} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{Bx} = \mathbf{0},$$

dunque $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{AB}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{B})$ e sostituendo questa uguaglianza alla disuguaglianza nel calcolo di $r(\mathbf{AB})$ troviamo $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$.

La prima disuguaglianza da dimostrare si riconduce alla seconda passando alle matrici trasposte: dal corollario 8.7 sappiamo che il rango di una matrice coincide con quello della sua trasposta. Da questo fatto e dalla disuguaglianza precedente abbiamo

$$\begin{aligned}r(\mathbf{AB}) &= r((\mathbf{AB})^{\mathrm{T}})\\ &= r(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\\ &\leq r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\\ &= r(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Se $\mathbf{B}$ è invertibile allora anche $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ lo è. L'argomento sulle trasposte prova che $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$.

62 Stabilire se i vettori che compongono i seguenti insiemi sono linearmente indipendenti o meno.

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$
2. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

Soluzione. Per ciascun insieme costruiamo una matrice accostando per colonne i vettori dell'insieme. Calcoliamo poi il rango della matrice ottenuta riducendola a scala. Troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi il rango della matrice è minore del numero dei vettori di partenza. Dunque, per il corollario 8.8, entrambi gli insiemi di vettori sono linearmente dipendenti.

63 Determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{A}$ la matrice ottenuta accostando per colonne i vettori assegnati. Il sottospazio generato dai vettori è allora esattamente $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e una base di questo sottospazio può essere determinata riducendo a scala $\mathbf{A}$ come indicato nell'osservazione finale a pagina 199 del testo. Troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 4 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 7 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

I pivot di $\mathbf{U}$ si trovano nella prima, seconda e quarta colonna. Dunque la prima, seconda e quarta colonna di $\mathbf{A}$ sono una base di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e i corrispondenti vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ sono una base del sottospazio generato dall'insieme assegnato.

64 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali. Dati $g(x) = 1 + x$, $h(x) = x + x^2$, $k(x) = 3 + 2x - x^2$, $l(x) = 2$, verificare che il sottospazio di $\mathbf{V}$ generato da g, h, k, l ha dimensione 3 ed è quindi l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2. Estrarre da g, h, k, l una base di tale sottospazio. (Suggerimento: fissare una base di $\mathbf{V}$ e identificare il sottospazio con lo spazio colonna della matrice che ha per colonne i vettori delle coordinate dei quattro polinomi.)

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ il sottospazio dei polinomi di grado massimo 2. L'insieme $\mathcal{E} = \{x^2, x, 1\}$ è la base canonica di $\mathbf{U}$ e dunque $\dim \mathbf{U} = 3$. Osservato che $\{g, h, k, l\} \subseteq \mathbf{U}$ e dunque che $\mathcal{L}(g, h, k, l) \subseteq \mathbf{U}$, basta allora provare che $\dim \mathcal{L}(g, h, k, l) = 3$ per applicare il corollario 6.12 e concludere che $\mathcal{L}(g, h, k, l) = \mathbf{U}$. Piuttosto che utilizzare direttamente i polinomi faremo uso dei vettori delle loro coordinate rispetto a $\mathcal{E}$. Costruiamo una matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4]$ accostando per colonne i vettori $\mathbf{v}_i$ delle coordinate. Allora $\dim \mathcal{L}(g, h, k, l) = \dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ e per calcolare il rango riduciamo $\mathbf{A}$ a scala. Troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque $r(\mathbf{A}) = 3$ e $\mathcal{L}(g, h, k, l) = \mathbf{U}$. Inoltre, una base di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ è data da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$, perché queste sono le colonne di $\mathbf{A}$ che corrispondono alle colonne dei pivot nella riduzione a scala. I polinomi corrispondenti sono $\{g, h, l\}$ e questa è dunque una base di $\mathbf{U}$.

65 Determinare i valori da attribuire a α, β e γ affinché ciascuno degli insiemi sottoelencati sia formato da vettori linearmente dipendenti.

1. $\left\{\begin{bmatrix}\alpha^2+\alpha\\ \alpha^2-1\end{bmatrix}\right\}$

2. $\left\{\begin{bmatrix}2\\-3\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\6\\\beta\end{bmatrix}\right\}$

3. $\left\{\begin{bmatrix}3\\8\\-11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\\gamma\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-9\end{bmatrix}\right\}$.

Soluzione. Dal corollario 8.8 consegue immediatamente che un insieme $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ di vettori è linearmente dipendente quando la matrice $\mathbf{A}=[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n]$ ha rango minore di n. Nel primo caso abbiamo un insieme con un solo vettore e la condizione di dipendenza lineare diventa $r(\mathbf{A})<1$. Ma $r(\mathbf{A})=0\Leftrightarrow\mathbf{A}=\mathbf{O}$ e quindi deve essere

$$\begin{cases}\alpha^2+\alpha=0\\ \alpha^2-1=0.\end{cases}$$

Fattorizzando le equazioni o, più semplicemente, sottraendo la seconda equazione dalla prima, si trova l'unica soluzione $\alpha=-1$.

Per il secondo e il terzo caso calcoliamo il rango di $\mathbf{A}$ riducendola a scala.

$$\begin{bmatrix}2&-4\\-3&6\\6&\beta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-4\\0&\beta+12\\0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}3&1&-1\\8&\gamma&0\\-11&-3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&\frac{2}{3}&-\frac{38}{3}\\0&0&19\gamma-48\end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso i vettori sono linearmente dipendenti quando $r(\mathbf{A})<2$. Questo significa che deve essere nulla la seconda riga della riduzione a scala e cioè si deve avere $\beta=-12$. Nel terzo caso occorre che sia $r(\mathbf{A})<3$. Quindi deve annullarsi la terza riga della riduzione a scala e cioè deve essere $\gamma=\frac{48}{19}$.

66 Determinare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nei due insiemi:

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\3\\13\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\8\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\-4\\18\\-3\end{bmatrix}\right\}$

2. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\\0\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\8\\4\\2\\-1\\6\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-2\\-1\\6\\-2\\-5\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\6\\3\\4\\-4\\-4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\\-4\\3\\6\\-2\end{bmatrix}\right\}$.

Soluzione. 1. Sia $\mathbf{A}$ la matrice ottenuta accostando per colonne i vettori dati $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4\}$. Il sottospazio generato dai $\mathbf{v}_i$ è $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e una base di questo sottospazio si ottiene estraendo dall'insieme dei generatori un sottoinsieme indipendente massimale. Dunque il numero massimo di $\mathbf{v}_i$ linearmente indipendenti è il numero di vettori di una base di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e cioè è $\dim\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Dal teorema 8.6 e dalla proposizione 8.4 sappiamo che $\dim\mathrm{Col}(\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$; dunque basta ridurre $\mathbf{A}$ a scala. Abbiamo

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&5&3&5\\3&3&0&-4\\5&13&8&18\\-1&4&-3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&3\\0&0&-8&-20\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Dunque $r(\mathbf{A})=4$ e i quattro vettori $\mathbf{v}_i$ sono indipendenti.

2. Procediamo esattamente come al punto 1, riducendo a scala la matrice $\mathbf{A}$ ottenuta accostando per colonne i vettori assegnati.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 4$, quattro è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti nel secondo insieme.

8. EQUAZIONI CARTESIANE DI UN SOTTOSPAZIO

67 Trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = [1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}_2 = [1,0,0,1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}_3 = [0,1,1,0]^{\mathrm{T}}$, e stabilire per quale valore di k il vettore $\mathbf{v} = [3,12,-9,k]^{\mathrm{T}}$ appartiene ad $\mathbf{H}$. Trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (rispettivamente da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$, rispettivamente da $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$).

Soluzione. L'algoritmo per la determinazione delle equazioni cartesiane di $\mathbf{H}$ è descritto in dettaglio nella dimostrazione della proposizione 9.1: se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è la matrice dei generatori di $\mathbf{H}$, allora il numero di equazioni necessario per descrivere $\mathbf{H}$ è $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ e i coefficienti di queste equazioni sono le coordinate dei vettori di una base di $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$. Per determinare questa base risolviamo il sistema lineare $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ riducendo a scala la matrice dei coefficienti. Troviamo

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

e dunque $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = 4 - r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = 1$. Per trovare una base di $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ prendiamo il sistema lineare associato alla riduzione a scala, in cui x_4 è l'unica variabile libera, poniamo $x_4 = -1$ e risolviamo rispetto alle rimanenti variabili dipendenti; troviamo il vettore $[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$. L'equazione corrispondente di $\mathbf{H}$ è

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se le sue coordinate sono soluzione dell'equazione di $\mathbf{H}$ e cioè se $3 - 12 - 9 - k = 0$. Questo accade per $k = -18$.
Indichiamo infine con $\mathbf{H}_i$ il sottospazio di $\mathbf{H}$ ottenuto omettendo il vettore $\mathbf{v}_i$ dall'insieme dei generatori e con $\mathbf{A}_i$ la matrice corrispondente. Riducendo a scala le matrici

$\mathbf{A}_i{}^{\mathrm{T}}$ troviamo

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tutte queste matrici hanno rango due, quindi $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_i{}^{\mathrm{T}}) = 4 - r(\mathbf{A}_i{}^{\mathrm{T}}) = 2$ e sono necessarie due equazioni per descrivere ciascun $\mathbf{H}_i$. Per trovare le basi di $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}_i{}^{\mathrm{T}})$ possiamo sempre scegliere x_3 e x_4 come variabili libere e risolvere rispetto alle variabili dipendenti x_1 e x_2. Se scegliamo una prima volta $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ e una seconda volta $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ troviamo le basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Le equazioni corrispondenti dei sottospazi sono

$$\mathbf{H}_1 : \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{H}_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{H}_3 : \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

9. OPERAZIONI SUI SOTTOSPAZI

68 Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x + 2y + z = 0$ rispettivamente. Determinare una base di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ e $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Soluzione. Risolvendo i sistemi lineari $x + 2y + 3z = 0$ e $3x + 2y + z = 0$ che definiscono $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ si trovano delle basi per questi sottospazi. Per $\mathbf{U}$ conviene scegliere x come variabile dipendente e assegnare i valori alle variabili libere prendendo una prima volta $y = 1$, $z = 0$ e una seconda volta $y = 0$, $z = 1$; per $\mathbf{V}$ conviene invece scegliere z come variabile dipendente e scegliere $x = 1$, $y = 0$ prima e $x = 0$, $y = 1$ poi. Troviamo le basi

$$\mathcal{B}_{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{\mathbf{V}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dalla proposizione 10.2 sappiamo che $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\mathbf{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathbf{V}})$. Per estrarre una base dall'insieme di generatori $\mathcal{B}_{\mathbf{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathbf{V}}$ si può procedere come visto nell'esercizio 63: accostiamo i vettori in una matrice e la riduciamo a scala.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Una base di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ è data dalle colonne della matrice che corrispondono a quelle dei pivot nella riduzione a scala; dunque

$$\mathcal{B}_{\mathbf{U}+\mathbf{V}} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il sottospazio $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ ha come equazioni cartesiane l'unione delle equazioni cartesiane di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Come si è visto nel secondo esempio a pagina 206 del testo, $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ è dunque il nucleo della matrice di questo sistema. Riducendo a scala la matrice troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione uno; scelta z come variabile libera e posto $z = 1$ troviamo la base

$$\mathcal{B}_{\mathbf{U} \cap \mathbf{V}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

69 In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio $\mathbf{V}$ generato da $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3, 4]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [3, 1, 3, 4]^T$ e il sottospazio $\mathbf{W}$ generato da $\mathbf{w}_1 = [3, 4, 3, 4]^T$ e $\mathbf{w}_2 = [1, 3, 6, 9]^T$.

1. Trovare una base di $\mathbf{V} + \mathbf{W}$
2. Trovare la dimensione di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$
3. Trovare una base di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$

Soluzione. Il sottospazio $\mathbf{V}+\mathbf{W}$ è lo spazio colonna della matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2]$. Se riduciamo $\mathbf{A}$ a scala troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque $\dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = 4$ e le colonne di $\mathbf{A}$ sono una base di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Una base di $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ è allora l'insieme $\mathcal{B}_{\mathbf{V}+\mathbf{W}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. In particolare, $\dim(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = 4$. Si osservi anche che essendo sottoinsiemi di una base, gli insieme $\mathcal{B}_{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\mathcal{B}_{\mathbf{W}} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ dei generatori di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sono indipendenti; dunque $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = 2$. Dalla formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{V} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Dunque $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ è il sottospazio nullo e la sua unica base è l'insieme vuoto.

70 Sia $\mathcal{F}$ lo spazio delle funzioni reali di variabile reale. Si considerino i sottospazi delle funzioni pari $\mathbf{U} = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}.\ f(x) = f(-x)\}$ e delle funzioni dispari $\mathbf{V} = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}.\ f(-x) = -f(x)\}$. Si mostri che $\mathcal{F} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.

Soluzione. Dimostriamo che ogni $f \in \mathcal{F}$ si scrive in modo unico come somma $f = f_p + f_d$ di una funzione pari f_p e di una funzione dispari f_d. Infatti se una simile decomposizione esiste, dobbiamo avere

$$\begin{aligned} f(x) &= f_p(x) + f_d(x), \\ f(-x) &= f_p(-x) + f_d(-x) = f_p(x) - f_d(x). \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo queste due relazioni, troviamo

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \\ f_d(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \end{aligned}$$

e questo prova che, se la scomposizione esiste, allora è unica. Per provare l'esistenza della decomposizione basta ora dimostrare che le funzioni f_p e f_d appena trovate sono rispettivamente pari e dispari. Questo fatto si verifica semplicemente osservando che

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = f_p(x) \\ f_d(-x) &= \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = -f_d(-x). \end{aligned}$$

71 Mostrare che l'unione $\mathbf{H} \cup \mathbf{K}$ di due sottospazi di $\mathbf{V}$ è un sottospazio se e solo se $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{K}$ oppure $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$.

Soluzione. Se $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{K}$, allora $\mathbf{H} \cup \mathbf{K} = \mathbf{K}$ è un sottospazio. Allo stesso modo, se $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$, allora $\mathbf{H} \cup \mathbf{K} = \mathbf{H}$ è un sottospazio.

Viceversa, dimostriamo che, se $\mathbf{H} \cup \mathbf{K}$ è un sottospazio e $\mathbf{H} \not\subseteq \mathbf{K}$, allora $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$. Se $\mathbf{H} \not\subseteq \mathbf{K}$, deve esistere un vettore $\mathbf{h} \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{K}$. Preso un qualunque vettore $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$, abbiamo che

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k} + \mathbf{h}) - \mathbf{h}.$$

Il vettore $\mathbf{k} + \mathbf{h}$ appartiene a $\mathbf{H} \cup \mathbf{K}$, perché è somma di due vettori $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbf{H} \cup \mathbf{K}$ e perché $\mathbf{H} \cup \mathbf{K}$ è un sottospazio. Ma $\mathbf{k} + \mathbf{h} \notin \mathbf{K}$, perché altrimenti avremmo che $\mathbf{h} = (\mathbf{k} + \mathbf{h}) - \mathbf{k}$ sarebbe la differenza di due vettori di $\mathbf{K}$ e dunque sarebbe in $\mathbf{K}$, contro le ipotesi fatte su $\mathbf{h}$. Dunque $\mathbf{k} + \mathbf{h} \in \mathbf{H}$.

Ma allora il vettore $\mathbf{k} = (\mathbf{k} + \mathbf{h}) - \mathbf{h}$ è differenza di due vettori che appartengono al sottospazio $\mathbf{H}$ e dunque $\mathbf{k} \in \mathbf{H}$. Dal momento che $\mathbf{k}$ era un vettore qualunque di $\mathbf{K}$, possiamo concludere che $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$.

72 Dimostrare la formula di Grassmann nel modo seguente: fissare una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ di $\mathbf{H} \cap \mathbf{K}$, estenderla a una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ di $\mathbf{H}$ e a una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\}$ di $\mathbf{K}$. Mostrare che l'insieme

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\}$$

è una base di $\mathbf{H} + \mathbf{K}$. Quindi

$$\dim(\mathbf{H} + \mathbf{K}) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r = \dim \mathbf{H} + \dim \mathbf{K} - \dim(\mathbf{H} \cap \mathbf{K}).$$

Il difetto di questa dimostrazione è che, a differenza di quella presentata nel testo, non è costruttiva (non spiega come trovare una base di $\mathbf{H} \cap \mathbf{K}$).

Soluzione. Poniamo, per convenienza,

$$A = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}, \quad B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\}.$$

Gli insiemi A e B sono basi di $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$; dunque, dalla proposizione 10.2, abbiamo che

$$A \cup B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbf{H}+\mathbf{K}$. Dimostriamo che $A \cup B$ è indipendente. Supponiamo che sia

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{s} b_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{t} c_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0}.$$

Indichiamo con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ i vettori ottenuti dalle tre somme, così che la relazione precedente diventa $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Riscriviamo questa relazione nella forma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = -\mathbf{w}$ e osserviamo che, essendo $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ e $-\mathbf{w} \in \mathbf{K}$, deve essere $\mathbf{u}+\mathbf{v} = -\mathbf{w} \in \mathbf{H}\cap\mathbf{K}$. Dal momento che $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ è una base di $\mathbf{H}\cap\mathbf{K}$, la combinazione lineare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{s} b_i\mathbf{v}_i$$

si deve poter scrivere come una combinazione lineare dei soli vettori $\mathbf{u}_i$. Ma allora $b_i = 0$ per tutti gli i e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Di conseguenza anche $\mathbf{u}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$ e, poiché B è una base, ne consegue che anche $a_i = 0$ e $c_i = 0$ per tutti gli indici.

73 Siano A e B due sottoinsiemi di un insieme finito C. Mostrare che

$$\#(A\cup B) + \#(A\cap B) = \#(A) + \#(B)$$

dove il simbolo $\#(S)$ denota il numero di elementi di S. Confrontare questa formula con la formula di Grassmann (si veda anche l'esercizio 72).

Soluzione. Se X e Y sono due insiemi disgiunti, indichiamo con $X\cdot Y$ la loro unione. Si osservi che

$$\#(X\cdot Y) = \#(X) + \#(Y).$$

Dati due insiemi A e B, risulta sempre

$$\begin{aligned} A &= (A\setminus B)\cdot(A\cap B),\\ A\cup B &= (A\setminus B)\cdot(A\cap B)\cdot(B\setminus A) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \#(A) &= \#(A\setminus B) + \#(A\cap B),\\ \#(A\cup B) &= \#(A\setminus B) + \#(A\cap B) + \#(B\setminus A). \end{aligned}$$

Da queste formule si ottiene:

$$\begin{aligned} \#(A\cup B) + \#(A\cap B) &= \#(A\setminus B) + \#(A\cap B) + \#(B\setminus A) + \#(A\cap B)\\ &= \#(A) + \#(B). \end{aligned}$$

Dall'esercizio 72, con la stessa notazione, abbiamo:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{H}+\mathbf{K}) + \dim(\mathbf{H}\cap\mathbf{K}) &= \#(A\cup B) + \#(A\cap B)\\ &= \#(A) + \#(B)\\ &= \dim\mathbf{H} + \dim\mathbf{K} \end{aligned}$$

che è appunto la formula di Grassmann.

74 Estendere il concetto di somma diretta al caso di più addendi: si dice che $\mathbf{V}$ è somma diretta dei suoi sottospazi $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_r$ se ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ si scrive in uno e un solo modo nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}_1 + \cdots + \mathbf{h}_r$$

con $\mathbf{h}_i \in \mathbf{H}_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$. In tal caso si scrive $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_r$. Mostrare che

1. se $\mathcal{B}_i$ è una base di $\mathbf{H}_i$ per ogni i e $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_r$.
2. Se $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \cdots + \mathbf{H}_r$ e, per ogni i, l'intersezione di $\mathbf{H}_i$ con la somma dei rimanenti $\mathbf{H}_j$ è ridotta al solo vettore nullo, allora $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_r$.
3. L'insieme $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ è una base di $\mathbf{V}$ se e solo se nessuno dei $\mathbf{v}_i$ è nullo e

$$\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_r).$$

Soluzione. 1. Dimostriamo l'affermazione per induzione sul numero r di sottospazi. Se $r = 1$ l'affermazione è evidente: infatti se $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1$ e ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si scrive in un unico modo come un vettore di $\mathbf{H}_1$, e precisamente nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1$.

Supponiamo di avere dimostrato l'affermazione per $r-1$ sottospazi e dimostriamola per r sottospazi. Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{r-1}$ e sia $\mathbf{H} = \mathcal{L}(\mathcal{B})$. L'insieme $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ è, per ipotesi, una base di $\mathbf{V}$, dunque è linearmente indipendente. Ma allora anche il suo sottoinsieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente e dunque è una base di $\mathbf{H}$. Ora $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ è una base di $\mathbf{V}$, dunque per la proposizione 10.6 risulta $\mathbf{V} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}_r$. Ma essendo $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{r-1}$ una base di $\mathbf{H}$, dall'ipotesi induttiva si ottiene $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_{r-1}$. Questo significa che ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si scrive in modo unico nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{h}_r$ con $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ e d'altra parte che $\mathbf{h}$ si scrive in modo unico nella forma $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \cdots + \mathbf{h}_{r-1}$. Dunque ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive in modo unico nella forma $\mathbf{h}_1 + \cdots \mathbf{h}_r$ con $\mathbf{h}_i \in \mathbf{H}_i$ e cioè

$$\mathbf{V} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_{r-1} \oplus \mathbf{H}_r.$$

2. Il fatto che sia $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \cdots + \mathbf{H}_r$ implica che ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si scrive come una somma $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1 + \cdots + \mathbf{h}_r$ con $\mathbf{h}_i \in \mathbf{H}_i$. Resta da provare che questa decomposizione è univocamente determinata da $\mathbf{v}$. Supponiamo infatti che sia

$$\mathbf{h}_1 + \cdots + \mathbf{h}_r = \mathbf{h}'_1 + \cdots + \mathbf{h}'_r$$

con $\mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_i \in \mathbf{H}_i$ per ogni indice i. Allora, sempre per ogni indice i, risulta

$$\mathbf{h}_i - \mathbf{h}'_i = \sum_{j \neq i} (\mathbf{h}'_j - \mathbf{h}_j).$$

Se poniamo $\mathbf{K}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{H}_i$, allora il termine a sinistra nell'uguaglianza appartiene al sottospazio $\mathbf{H}_i$, mentre il termine a destra appartiene a $\mathbf{K}_i$. Dunque entrambi i termini appartengono a $\mathbf{H}_i \cap \mathbf{K}_i$ che è ridotto al sottospazio nullo per ipotesi. Questo significa che $\mathbf{h}_i - \mathbf{h}'_i = \mathbf{0}$, cioè che $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}'_i$ per ogni i. Dunque la scrittura $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{h}_i$ è unica e $\mathbf{V} = \mathbf{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}_r$.

3. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ è una base di $\mathbf{V}$ allora è un insieme indipendente, dunque nessuno dei $\mathbf{v}_i$ può essere nullo. Inoltre, posto $\mathbf{H}_i = \mathcal{L}(\mathbf{v}_i)$, dal punto 1 si ottiene che

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{L}(\mathbf{v}_i).$$

Viceversa, supponiamo che sia $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_r)$. In particolare, $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \mathcal{L}(\mathbf{v}_r)$ e dalla proposizione 10.2 si ottiene che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ è un insieme di generatori per $\mathbf{V}$. Proviamo che i $\mathbf{v}_i$ sono anche linearmente indipendenti. Supponiamo che sia

$$\sum_{i=1}^{r} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Posto $\mathbf{h}_i = t_i \mathbf{v}_j$, abbiamo $\mathbf{h}_1 + \cdots + \mathbf{h}_r = \mathbf{0}$ con $\mathbf{h}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_i)$. Poiché $\mathbf{0}$ si scrive anche come somma di vettori nulli e la decomposizione è unica essendo $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_r)$, si deve avere $\mathbf{h}_i = \mathbf{0}$ per ogni i. Di conseguenza $t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ e, essendo i $\mathbf{v}_i$ non nulli, deve essere $t_i = 0$ per tutti gli i. Questo prova che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ è indipendente e dunque una base di $\mathbf{V}$.

10. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

75 Dimostrare che gli assiomi che definiscono un sottospazio $\mathbf{U}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e precisamente

1. $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$
2. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$, allora $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{U}$
3. Se $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e $t \in \mathbb{K}$ allora $t\mathbf{u} \in \mathbf{U}$

sono indipendenti, cioè nessuno di essi è conseguenza degli altri, fornendo tre esempi di sottoinsiemi di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, in ciascuno dei quali sono soddisfatti solo due dei tre assiomi. (Suggerimento: esiste un solo sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che soddisfa 2 e 3 ma non 1.)

76 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale.

1. Sia $X = \{\mathbf{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ un insieme arbitrario di sottospazi di $\mathbf{V}$. Dimostrare che l'intersezione $\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{U}_\alpha$ di tutti i sottospazi $\mathbf{U}_\alpha$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$.
2. Un insieme $X = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \ldots\}$ di sottospazi è *filtrante* se per ogni coppia di sottospazi $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j \in X$ esiste un sottospazio $\mathbf{U}_k \in X$ che li contiene entrambi. Dimostrare che se X è filtrante, allora l'unione $\bigcup \mathbf{U}_i$ dei sottospazi $\mathbf{U}_i$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$.
3. Un insieme $X = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \ldots\}$ di sottospazi di $\mathbf{V}$ è una *catena* se

$$\mathbf{U}_0 \subseteq \mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{U}_2 \subseteq \ldots$$

Dimostrare che se X è una catena, allora $\bigcup \mathbf{U}_i$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$.

77 Sia $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{F}$ sono sottospazi.

1. L'insieme delle funzioni non negative, cioè quelle per cui vale la formula $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. L'insieme delle funzioni che si annullano in almeno un punto di $\mathbb{R}$.
3. L'insieme delle funzioni che si annullano in un punto fissato $x_0 \in \mathbb{R}$.

78 Determinare equazioni parametriche per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{U}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{U}_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. $\mathbf{U}_1$ è generato dai vettori $[1, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ e $[0, 1, -1, 0]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{U}_2$ è generato da $[1, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.

79 Sia $\mathbf{V}$ l'insieme dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3. Dimostrare che ciascuno dei sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ indicati sotto è un sottospazio e determinarne la dimensione e una base.

1. $\mathbf{U}_1 = \{p \in \mathbf{V} : p(0) = 0,\ p(1) = 0\}$
2. $\mathbf{U}_1 = \{p \in \mathbf{V} : p(0) = p(1)\}$
3. $\mathbf{U}_1 = \{p \in \mathbf{V} : p(0) = p'(0) = 0\}$
4. $\mathbf{U}_1 = \{p \in \mathbf{V} : p'(0) = p'(1) = 0\}$

80 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ l'insieme delle parti di $\mathbf{V}$. Si consideri la funzione $\mathcal{L} : \mathcal{P}(\mathbf{V}) \to \mathcal{P}(\mathbf{V})$ che associa ad ogni sottoinsieme di vettori $X \subseteq \mathbf{V}$ il sottospazio $\mathcal{L}(X)$ delle combinazioni lineari dei vettori in X (se X è infinito, una combinazione lineare di X è semplicemente una combinazione lineare di un sottoinsieme finito di X). Dimostrare i fatti seguenti.

1. Se $X \subseteq Y$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$.
2. Per ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbf{V}$, $X \subseteq \mathcal{L}(X)$.
3. Per ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbf{V}$, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$.
4. $\mathcal{L}(X \cap Y) \subseteq \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y)$ e $\mathcal{L}(X \cup Y) \subseteq \mathcal{L}(X) \cup \mathcal{L}(Y)$. Provare che le inclusioni possono essere proprie.
5. Se $Y \subseteq \mathcal{L}(X)$, allora $\mathcal{L}(X \cup Y) = \mathcal{L}(X)$.

81 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base dello spazio riga e una base dello spazio colonna di $\mathbf{A}$.

Si considerino poi il sottospazio $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{v}_1 = [1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = [3,1,3,4]^{\mathrm{T}}$ e il sottospazio $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{w}_1 = [-3,4,3,4]$ e $\mathbf{w}_2 = [1,3,6,9]^{\mathrm{T}}$. Trovare una base di $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ e una base di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$.

Soluzione. Riduciamo la matrice $\mathbf{A}$ a scala mediante operazioni elementari sulle righe.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 10 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un base dello spazio riga è perciò costituita dai vettori $[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$, $[0,1,3,5]^{\mathrm{T}}$, $[0,0,9,17]^{\mathrm{T}}$ (un'altra base è formata dalla prima, seconda e quarta riga). I pivots della matrice ridotta sono sulle prime tre colonne, quindi le prime tre colonne sono una base per $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Lo spazio $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ è generato dai quattro vettori dati, che sono le righe della matrice $\mathbf{A}$. Quindi $\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathrm{Row}(\mathbf{A})$ di cui abbiamo già determinato una base. Per la formula di Grassmann

$$\dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{V} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Una base di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ è costituita perciò da un qualsiasi vettore non nullo di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$. I conti fatti nella prima parte dell'esercizio mostrano che la terza riga di $\mathbf{A}$, che è $\mathbf{w}_1$, è combinazione lineare delle prime due righe $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Quindi $\mathbf{w}_1$ appartiene sia a $\mathbf{V}$ sia a $\mathbf{W}$, cioè è un vettore di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$. In conclusione, $\{\mathbf{w}_1\}$ è una base di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$.

5 Applicazioni lineari

1. APPLICAZIONI LINEARI

1 Mostrare che una matrice è determinata dall'applicazione che rappresenta: se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici $m \times n$ e $\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$, allora $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

Soluzione. Indichiamo con $\mathbf{a}_i$ la i-esima colonna della matrice $\mathbf{A}$ e ricordiamo che, se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, allora $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$. Se $\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$, allora per ogni indice i abbiamo

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_i) = \mathcal{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{B}\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i.$$

Tutte le colonne di $\mathbf{A}$ sono uguali alle corrispondenti colonne di $\mathbf{B}$ e dunque $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

2 Dati uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e un vettore $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}$, mostrare che la traslazione $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definita da $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ è lineare se e solo se $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$.

Soluzione. Se $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ e dunque $\mathbf{T}$ coincide con la funzione identità, che è lineare come si è visto nell'esempio a pagina 222 del testo. Viceversa se la traslazione $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ è lineare, allora, per la formula (2.5) di pagina 225, deve essere $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Ma:

$$\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}.$$

3 **Traccia di una matrice.** La *traccia* di una matrice quadrata $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ è la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Mostrare che $\mathrm{tr} : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n, n) \to \mathbb{K}$ è lineare.

Soluzione. Dimostriamo prima che la traccia è additiva. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici $n \times n$, allora $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ e

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}).$$

Resta da dimostrare che la traccia è una funzione omogenea. Se $t \in \mathbb{K}$, allora $t\mathbf{A} = [ta_{ij}]$ e dunque

$$\operatorname{tr}(t\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(ta_{ii}) = t\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = t \cdot \operatorname{tr}(\mathbf{A}).$$

4 Dati due spazi vettoriali $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sul campo $\mathbb{K}$, per ogni vettore $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}$ possiamo considerare la funzione costante

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Mostrare che $\mathbf{T}$ è lineare se e solo se $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ (nel qual caso $\mathbf{T}$ si dice applicazione lineare nulla).

Soluzione. Se $\mathbf{T}$ è lineare, allora deve essere $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ per la formula (2.5) a pagina 225 del testo. Ma allora

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Viceversa, se $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per tutti i $\mathbf{v}$ e questa funzione è lineare:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{v}_2),\\
&\mathbf{T}(t\mathbf{v}) = \mathbf{0} = t\mathbf{0} = t\mathbf{T}(v).
\end{aligned}$$

5 Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale delle funzioni $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia sia $\mathcal{F}^{(2)}$ il sottospazio delle funzioni che sono derivabili due volte in ogni punto x di $\mathbb{R}$. Sia $\mathfrak{L} : \mathcal{F}^{(2)} \to \mathcal{F}$ la funzione:

$$\mathfrak{L}(y(t)) = 3y''(t) + e^t y(t).$$

Mostrare che $\mathfrak{L}$ è lineare.

Soluzione. Basta ricordare che la derivata seconda è lineare e cioè che se $y_1, y_2 \in \mathcal{F}^{(2)}$ e se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned}
&(y_1(t) + y_2(t))'' = y_1''(t) + y_2''(t),\\
&(cy_1)'' = cy_1''.
\end{aligned}$$

Da queste formule si ottengono immediatamente sia l'additività

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(y_1 + y_2) &= 3(y_1(t) + y_2(t))'' + e^t(y_1(t) + y_2(t))\\
&= 3y_1''(t) + e^t y_1(t) + 3y_2''(t) + e^t y_2(t)\\
&= \mathfrak{L}(y_1) + \mathfrak{L}(y_2)
\end{aligned}$$

che l'omogeneità

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(c\, y_1) &= 3(cy_1(t))'' + e^t(c\, y_1(t))\\
&= 3cy_1''(t) + e^t c y_1(t)\\
&= c(3y_1''(t) + e^t y_1(t))\\
&= c\mathfrak{L}(y_1).
\end{aligned}$$

6 L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2 (una base è $\{1, i\}$), ma anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 1. Mostrare che la funzione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che al numero complesso $z = x + iy$ associa il suo coniugato

$$\overline{x + iy} = x - iy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

è lineare su $\mathbb{R}$, ma non è lineare su $\mathbb{C}$.

Soluzione. Proviamo anzitutto che il coniugio è additivo. Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_j = x_j + iy_j$. Risulta

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Va osservato che l'additività non dipende dal fatto che stiamo considerando $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ piuttosto che su $\mathbb{C}$ ed è quindi soddisfatta in entrambi i casi. La situazione è diversa per l'omogeneità. Prendiamo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Se consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, troviamo

$$\begin{aligned} \overline{cz} &= \overline{c(x + iy)} \\ &= \overline{cx + icy} \\ &= cx - icy \\ &= c(x - iy) \\ &= c\bar{z} \end{aligned}$$

e dunque il coniugio risulta omogeneo. Tuttavia, se consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su se stesso e $c = a + ib \in \mathbb{C}$, troviamo da una parte

$$\begin{aligned} \overline{cz} &= \overline{(a + ib)(x + iy)} \\ &= \overline{(ax - by) + i(bx + ay)} \\ &= (ax - by) - i(bx + ay), \end{aligned}$$

mentre dall'altra

$$\begin{aligned} c\bar{z} &= (a + ib)\overline{(x + iy)} \\ &= (a + ib)(x - iy) \\ &= (ax + by) + i(bx - ay). \end{aligned}$$

Ora è chiaro che questi due termini non coincidono in generale. Ad esempio, se $a = x = 0$ e $b = y = 1$ troviamo

$$\overline{cz} = \bar{i^2} = -1 \neq 1 = i\bar{i} = c\bar{z}.$$

7 Una fonte importante di esempi di funzioni lineari è costituita dai *prodotti*. Per essere precisi, siano $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$; una funzione $p : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$, cioè una funzione che a ogni coppia di vettori $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ con $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ associa un vettore $p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z}$ si dice *bilineare* se (1) per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ la funzione che manda $\mathbf{w}$ in $p(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una funzione lineare $\mathbf{W} \to \mathbf{Z}$ e (2) per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ la funzione che manda $\mathbf{v}$ in $p(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una funzione lineare $\mathbf{V} \to \mathbf{Z}$. Mostrare che i seguenti prodotti sono funzioni bilineari: il prodotto di numeri reali, il prodotto di numeri complessi, il prodotto di matrici, il prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. 1. Prodotto di numeri reali. Consideriamo la funzione prodotto

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$$

definita da $(a, b) \mapsto ab$. Dimostriamo anzitutto la linearità nel primo fattore:

$$\begin{aligned}(t_1a_1 + t_2a_2)b &= (t_1a_1)b + (t_2a_2)b && \text{(distributività sinistra)}\\ &= t_1(a_1b) + t_2(a_2b) && \text{(associatività).}\end{aligned}$$

La linearità nel secondo fattore può essere dimostrata in modo simile utilizzando la proprietà distributiva destra al posto di quella sinistra, ma è anche conseguenza, in questo caso, del fatto che il prodotto è commutativo e cioè della formula $ab = ba$. Infatti:

$$\begin{aligned}a(t_1b_1 + t_2b_2) &= (t_1b_1 + t_2b_2)a && \text{(commutatività)}\\ &= t_1(b_1a) + t_2(b_2a) && \text{(linearità nella prima componente)}\\ &= t_1(ab_1) + t_2(ab_2) && \text{(commutatività).}\end{aligned}$$

2. Prodotto di numeri complessi. Si tratta verbalmente della stessa dimostrazione data per i numeri reali. Invece di supporre che $a, b \in \mathbb{R}$ basta assumere che $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Prodotto di matrici. Consideriamo il prodotto

$$\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m, n) \times \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n, p) \xrightarrow{\cdot} \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m, p)$$

definito dalla formula $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathbf{AB}$. Proviamo anzitutto che è lineare nel primo fattore.

$$\begin{aligned}(t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2)\mathbf{B} &= (t_1\mathbf{A}_1)\mathbf{B} + (t_2\mathbf{A}_2)\mathbf{B} && \text{(distributività sinistra)}\\ &= t_1(\mathbf{A}_1\mathbf{B}) + t_2(\mathbf{A}_2\mathbf{B}) && \text{(omogeneità).}\end{aligned}$$

La linearità nel secondo fattore è simile: basta utilizzare la distributività destra del prodotto invece di quella sinistra:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t_1\mathbf{B}_1 + t_2\mathbf{B}_2) &= \mathbf{A}(t_1\mathbf{B}_1) + \mathbf{A}(t_2\mathbf{B}_2)\\ &= t_1(\mathbf{AB}_1) + t_2(\mathbf{AB}_2).\end{aligned}$$

Come osservato nell'esempio a pagina 123 del testo e a differenza degli esempi precedenti, il prodotto di matrici non è commutativo. Questo significa che per dimostrarne la bilinearità occorre effettivamente provare la linearità in ciascuna delle componenti e non basta farlo soltanto per una, come per $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Vale anche la pena di osservare che l'argomento utilizzato per provare la bilinearità del prodotto di matrici è più generale di quello usato per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ che ne è una conseguenza: infatti il prodotto di numeri reali o complessi è semplicemente il prodotto di matrici 1×1.

4. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$. La linearità del prodotto nel primo fattore è contenuta nella proposizione 6.5 del capitolo 1. La linearità rispetto al secondo fattore si prova, come per il prodotto di numeri reali o complessi, usando il fatto che anche questo prodotto è commutativo, come risulta sempre dalla proposizione 6.5. In alternativa, la bilinearità può essere ottenuta come conseguenza di quella del prodotto di matrici

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1,3) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3,1) \xrightarrow{\cdot} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1,1)$$

osservando che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$. Infatti per il secondo fattore abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2) &= \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2) \\ &= t_1\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_2 \qquad \text{(bilinearità del prodotto di matrici)} \\ &= t_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1) + t_2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il primo fattore, invece, basta ricordare che la trasposizione non altera le matrici 1×1; da questo si ottiene la proprietà commutativa del prodotto scalare nella forma $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = (\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w})^{\mathrm{T}} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ e quindi la linearità anche nel primo fattore.

5. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Per una dimostrazione diretta della bilinearità si veda l'esercizio 26 del capitolo 1. Qui invece usiamo la descrizione data nell'esercizio 31 del capitolo 3. Più precisamente, ricordiamo che se ad ogni vettore $\mathbf{v} = [x, y, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ associamo la matrice

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & x & -y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{bmatrix},$$

allora $\mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v})$. Dal momento che la funzione $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v})$ è iniettiva, per dimostrare la bilinearità del prodotto basta provare che la funzione $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ è bilineare. Cominciamo a dimostrare che la funzione $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v})$ è lineare.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & t_1x_1 + t_2x_2 & -t_1y_1 - t_2y_2 \\ -t_1x_1 - t_2x_2 & 0 & t_1z_1 + t_2z_2 \\ t_1y_1 + t_2y_2 & -t_1z_1 - t_2z_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= t_1 \begin{bmatrix} 0 & x_1 & -y_1 \\ -x_1 & 0 & z_1 \\ y_1 & -z_1 & 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -y_2 \\ -x_2 & 0 & z_2 \\ y_2 & -z_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= t_1\mathbf{E}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathbf{E}(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

La bilinearità di $\mathbf{E}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ è una conseguenza della linearità appena dimostrata e della bilinearità del prodotto di matrici. Infatti, rispetto al primo fattore abbiamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}((t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) \times \mathbf{w}) = \mathbf{E}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2)\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2)\\
&= [t_1\mathbf{E}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)]\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})[t_1\mathbf{E}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)]\\
&= t_1\mathbf{E}(\mathbf{v}_1)\mathbf{E}(\mathbf{w}) + t_2\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)\mathbf{E}(\mathbf{w}) - t_1\mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}_1) - t_2\mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)\\
&= t_1[\mathbf{E}(\mathbf{v}_1)\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}_1)] + t_2[\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v}_2)]\\
&= t_1\mathbf{E}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}) + t_2\mathbf{E}(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

La linearità rispetto al secondo fattore è simile e usa la linearità del prodotto di matrici rispetto al secondo fattore.

Viceversa, se la bilinearità del prodotto vettoriale viene dimostrata direttamente come nell'esercizio 26 del capitolo 1, allora è possibile utilizzare la bilinearità delle funzioni $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{w}) - \mathbf{E}(\mathbf{w})\mathbf{E}(\mathbf{v})$ per semplificare la soluzione dell'esercizio 31 del capitolo 3. Per dimostrare l'uguaglianza di queste funzioni basta infatti provare, in virtù della bilinearità, che coincidono sulle coppie di vettori della base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e per simmetria ci si può ridurre al caso $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j}$.

8 Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due matrici quadrate di ordine n. Si consideri il commutatore o parentesi di Lie di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Si dimostri che $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ è un prodotto bilineare, ma non è associativo: $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] \neq [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}]$ in genere.

Soluzione. La bilinearità della parentesi di Lie è una conseguenza immediata della bilinearità del prodotto di matrici dimostrata nell'esercizio 7. Per la componente sinistra abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
[t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2, \mathbf{B}] &= (t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2)\mathbf{B} - \mathbf{B}(t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2)\\
&= t_1\mathbf{A}_1\mathbf{B} + t_2\mathbf{A}_2\mathbf{B} - t_1\mathbf{B}\mathbf{A}_1 - t_2\mathbf{B}\mathbf{A}_2\\
&= t_1(\mathbf{A}_1\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_1) + t_2(\mathbf{A}_2\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_2)\\
&= t_1[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}] + t_2[\mathbf{A}_2, \mathbf{B}].
\end{aligned}$$

La linearità rispetto alla seconda componente può essere dimostrata in modo analogo, oppure usando il fatto che la parentesi di Lie è anticommutativa:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}].$$

Dall'anticommutatività abbiamo infatti che

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, t_1\mathbf{B}_1 + t_2\mathbf{B}_2] &= -[t_1\mathbf{B}_1 + t_2\mathbf{B}_2, \mathbf{A}]\\
&= -t_1[\mathbf{B}_1, \mathbf{A}] - t_2[\mathbf{B}_2, \mathbf{A}]\\
&= t_1[\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] + t_2[\mathbf{A}, \mathbf{B}_2].
\end{aligned}$$

Per vedere che la parentesi di Lie non è un'operazione associativa riprendiamo le matrici $\mathbf{E}(\mathbf{v})$ utilizzate nell'esercizio 7 e osserviamo che

$$[\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{E}(\mathbf{v})] = \mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{E}(\mathbf{v}) - \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Da questa formula si ottiene immediatamente che

$$[[\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{E}(\mathbf{v})], \mathbf{E}(\mathbf{w})] = [\mathbf{E}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \mathbf{E}(\mathbf{w})] = \mathbf{E}((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}).$$

Se dunque fosse

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}]$$

per ogni terna di matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3,3)$, avremmo anche

$$[[\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{E}(\mathbf{v})], \mathbf{E}(\mathbf{w})] = [\mathbf{E}(\mathbf{u}), [\mathbf{E}(\mathbf{v}), \mathbf{E}(\mathbf{w})]]$$

per ogni terna di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e dunque

$$\mathbf{E}((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}) = \mathbf{E}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})).$$

Dal momento che la funzione $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{v})$ è iniettiva, questo implicherebbe che

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

per ogni terna di vettori di $\mathbb{R}^3$ e questo è palesemente falso come si vede, ad esempio, prendendo $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{j}$. Per questa scelta dei vettori abbiamo infatti che

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0},\\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Le matrici corrispondenti sono

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{E}(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{E}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. NUCLEO, FIBRE E IMMAGINE

19 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. Mostrare che, se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti in $\mathbf{V}$, allora le loro immagini $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente dipendenti in $\mathbf{W}$.

Soluzione. Se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora esistono coefficienti $t_1, \ldots t_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}.$$

Se applichiamo $\mathfrak{L}$ ad entrambi i termini di questa uguaglianza e utilizziamo la sua linearità otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i\right) = \mathfrak{L}(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}.$$

Il primo e l'ultimo termine di questa formula provano che esiste una combinazione lineare dei vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_i)$ che produce il vettore nullo. I coefficienti di questa combinazione lineare sono gli scalari t_i che non sono tutti nulli. Dunque i vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente dipendenti.

10 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. Mostrare che se i vettori $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbf{V}$ e il nucleo di $\mathfrak{L}$ consiste del solo vettore nullo, allora $\mathfrak{L}(\mathbf{v_1}), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{v_n})$ sono linearmente indipendenti in $\mathbf{W}$. Mostrare con un esempio che l'ipotesi $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0}\}$ è necessaria: se i vettori $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbf{V}$, non è detto che i vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{v_1}), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{v_n})$ siano linearmente indipendenti in $\mathbf{W}$ (per esempio, considerare l'immagine della base canonica mediante l'applicazione nulla o mediante la proiezione del piano sull'asse x).

Soluzione. Supponiamo che sia $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0_V}\}$. La deduzione che segue mostra come ogni combinazione lineare dei vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_n)$ che produce il vettore nullo ha necessariamente tutti i coefficienti nulli.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0_W} \Rightarrow \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0_W} \qquad & \text{(linearità di } \mathfrak{L}) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i \in \operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) \qquad & \text{(definizione di nucleo)} \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0_V} \qquad & (\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0_V}\}) \\
\Rightarrow t_1 = \cdots = t_n = 0 \qquad & \text{(indipendenza dei vettori } \mathbf{v}_i)
\end{aligned}$$

Quindi i vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti.

Se $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L})$ non è nullo, invece, la conclusione è falsa. Consideriamo, ad esempio, la funzione lineare nulla $\mathfrak{L} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, definita dalla formula $\mathfrak{L}(x) = 0$, il cui nucleo è $\mathbb{K}$. Il vettore $1 \in \mathbb{K}$ è linearmente indipendente perché non è nullo. Tuttavia la sua immagine è il vettore $\mathfrak{L}(1) = 0$ che è linearmente dipendente.

11 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. Sia $\mathbf{Z}$ un sottospazio di $\mathbf{W}$. Mostrare che la controimmagine di $\mathbf{Z}$:

$$\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \in \mathbf{Z}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{V}$.

Soluzione. In primo luogo dimostriamo che $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ non è vuoto. Infatti $\mathfrak{L}(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W} \in \mathbf{Z}$; dunque $\mathbf{0_V} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ che non è vuoto.

Resta da provare che $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ è chiuso rispetto alle combinazioni lineari. Supponiamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ e che $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$. Allora $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \mathfrak{L}(\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Z}$ e, per la linearità di $\mathfrak{L}$, abbiamo che

$$\mathfrak{L}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) = t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2)$$

è una combinazione lineare di vettori che appartengono al sottospazio $\mathbf{Z}$. Dunque $\mathfrak{L}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Z}$ e questo significa che $t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$.

3. ALGEBRA DELLE APPLICAZIONI LINEARI

12 Descrivere geometricamente le applicazioni lineari $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentate dalle matrici

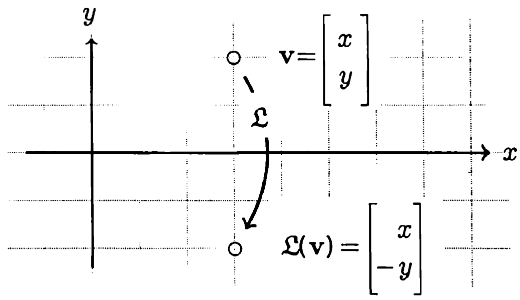
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare il quadrato delle tre matrici. Come si spiega geometricamente il risultato?

Soluzione. La prima matrice corrisponde alla funzione lineare

$$\mathfrak{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

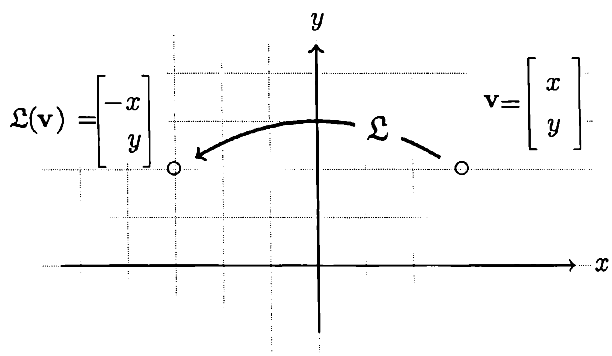
che rappresenta la riflessione rispetto all'asse delle ascisse.



La seconda matrice corrisponde alla funzione lineare

$$\mathfrak{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

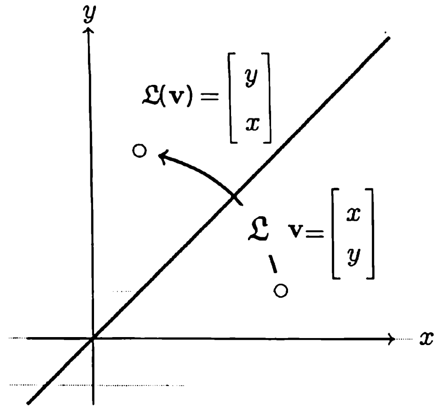
che rappresenta la riflessione rispetto all'asse delle ordinate.



La terza matrice corrisponde alla funzione lineare

$$\mathfrak{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

che rappresenta la riflessione rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.



È immediato verificare che i quadrati di tutte le matrici assegnate coincidono con la matrice identità. Questo corrisponde al fatto che $\mathcal{L}^2 = \mathcal{I}$ per tutte le applicazioni lineari corrispondenti alle matrici. In altri termini, applicando la $\mathcal{L}$ due volte si ottiene la funzione identità.

13 In questo esercizio si completa la dimostrazione che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ è uno spazio vettoriale.

1. Verificare che la somma di due applicazioni lineari è un'applicazione lineare.
2. Verificare che il prodotto di un'applicazione lineare per uno scalare è un'applicazione lineare.
3. Mostrare che le operazioni di somma e prodotto per scalare definite in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ soddisfano gli assiomi di spazio vettoriale.
4. Sia $\mathcal{F}$ la funzione che a una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) a coefficienti in $\mathbb{K}$ associa la funzione $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$. Mostrare che $\mathcal{F} : \mathrm{M}_{\mathbb{K}}(m, n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ è lineare. Meno formalmente, questo significa che la somma delle applicazioni rappresentate da due matrici è l'applicazione rappresentata dalla somma delle due matrici:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}_1} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_2} = \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2}$$

e analogamente

$$\mathcal{L}_{t\mathbf{A}} = t\mathcal{L}_{\mathbf{A}}.$$

Soluzione. 1. Siano $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, allora

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) &= \mathcal{L}_1(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) + \mathcal{L}_2(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) \\
&= (t_1\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_1) + t_2\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_2)) + (t_1\mathcal{L}_2(\mathbf{v}_1) + t_2\mathcal{L}_2(\mathbf{v}_2)) \\
&= (t_1\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_1) + t_1\mathcal{L}_2(\mathbf{v}_1)) + (t_2\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_2) + t_2\mathcal{L}_2(\mathbf{v}_2)) \\
&= t_1(\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_1) + \mathcal{L}_2(\mathbf{v}_1)) + t_2(\mathcal{L}_1(\mathbf{v}_2) + \mathcal{L}_2(\mathbf{v}_2)) \\
&= t_1(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(\mathbf{v}_1) + t_2(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(\mathbf{v}_2).
\end{aligned}$$

La prima uguaglianza consegue dalla definizione di somma di funzioni lineari; la seconda dalla linearità di $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$; la terza dalle proprietà commutativa e associativa della somma in $\mathbf{W}$; la quarta dalla proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma in $\mathbf{W}$; l'ultima dalla definizione di somma di funzioni lineari. Questa catena di uguaglianze prova che $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ preserva le combinazioni lineari e dunque è una funzione lineare.

2. Sia $\mathfrak{L} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ e sia $t \in \mathbb{K}$. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, allora

$$\begin{aligned}(t\mathfrak{L})(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) &= t\ \mathfrak{L}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2)\\ &= t(t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= t(t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1)) + t(t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= (tt_1)\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + (tt_2)\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2)\\ &= (t_1t)\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + (t_2t)\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2)\\ &= t_1(t\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1)) + t_2(t\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= t_1(t\mathfrak{L})(\mathbf{v}_1) + t_2(t\mathfrak{L})(\mathbf{v}_2).\end{aligned}$$

In questa catena, la prima uguaglianza consegue dalla definizione di prodotto di uno scalare per una funzione lineare; la seconda dalla linearità di $\mathfrak{L}$; la terza dalla distributività del prodotto scalare rispetto alla somma in $\mathbf{W}$; la quarta dalla proprietà associativa del prodotto per uno scalare in $\mathbf{W}$; la quinta dalla proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{K}$; la sesta dalla proprietà associativa del prodotto scalare in $\mathbf{W}$; l'ultima dalla definizione di prodotto di uno scalare per una funzione lineare. Dal primo e dall'ultimo termine della catena consegue che $t\mathfrak{L}$ è una funzione lineare.

3. In tutte le formule seguenti $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ $t, t_i \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$. Dimostriamo che la somma è commutativa.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_2(\mathbf{v})\\ &= \mathfrak{L}_2(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_1(\mathbf{v})\\ &= (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

La prima e l'ultima uguaglianza sono conseguenze della definizione di somma in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$; la seconda della proprietà commutativa della somma in $\mathbf{W}$. Poiché $\mathbf{v}$ è generico, l'uguaglianza vale per tutti i $\mathbf{v}$ e dunque $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1$.

Dimostriamo che la somma in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ è associativa.

$$\begin{aligned}((\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) + \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}) &= (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_3(\mathbf{v})\\ &= (\mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_2(\mathbf{v})) + \mathfrak{L}_3(\mathbf{v})\\ &= \mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + (\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_3(\mathbf{v}))\\ &= \mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v})\\ &= (\mathfrak{L}_1 + (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3))(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La terza uguaglianza consegue dalla proprietà associativa della somma in $\mathbf{W}$; tutte le altre dalla definizione di somma $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Ancora una volta, la genericità di $\mathbf{v}$ permette di concludere che l'uguaglianza vale per tutti i $\mathbf{v}$ e dunque che $(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) + \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_1 + (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3)$.

Dimostriamo che la funzione lineare $\mathbf{0}$, definita da $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$ è elemento neutro per la somma in $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L} + \mathbf{0})(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{0}(\mathbf{v})\\ &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{0}_\mathbf{W}\\ &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La prima uguaglianza consegue dalla definizione di somma in $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$; la seconda dalla definizione della funzione $\mathbf{0}$; l'ultima dalla proprietà dell'elemento neutro in $\mathbf{W}$. Ancora una volta, per la genericità di $\mathbf{v}$, possiamo concludere che $\mathfrak{L} + \mathbf{0} = \mathfrak{L}$.

Dimostriamo l'esistenza dell'opposto. Data $\mathfrak{L}$, consideriamo la funzione $-\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definita dalla formula $(-\mathfrak{L})(\mathbf{v}) = -(\mathfrak{L}(\mathbf{v}))$. La funzione $-\mathfrak{L}$ è lineare. Infatti:

$$\begin{aligned}(-\mathfrak{L})(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) &= -(\mathfrak{L}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2))\\ &= -(t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= -(t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1)) - (t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= t_1(-\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1)) + t_2(-\mathfrak{L}(\mathbf{v}_2))\\ &= t_1(-\mathfrak{L})(\mathbf{v}_1) + t_2(-\mathfrak{L})(\mathbf{v}_2).\end{aligned}$$

La prima e l'ultima uguaglianza conseguono dalla definizione di $-\mathfrak{L}$; la seconda dalla linearità di $\mathfrak{L}$; le rimanenti dalle proprietà dell'opposto in $\mathbf{W}$. Possiamo ora provare che l'assioma dell'opposto è soddisfatto da $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L} + (-\mathfrak{L}))(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}) + (-\mathfrak{L})(\mathbf{v})\\ &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}) + (-\mathfrak{L}(\mathbf{v}))\\ &= \mathbf{0}_\mathbf{W}\\ &= \mathbf{0}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La prima uguaglianza è conseguenza della definizione di somma in $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$; la seconda della definizione di $-\mathfrak{L}$; la terza della proprietà dell'opposto in $\mathbf{W}$; l'ultima è conseguenza della definizione della funzione $\mathbf{0}$. Per la genericità di $\mathbf{v}$ concludiamo che $\mathfrak{L} + (-\mathfrak{L}) = \mathbf{0}$.

Dimostriamo che il prodotto per uno scalare è distributivo a sinistra rispetto alla somma.

$$\begin{aligned}(t(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2))(\mathbf{v}) &= t(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v})\\ &= t(\mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_2(\mathbf{v}))\\ &= t\mathfrak{L}_1(\mathbf{v}) + t\mathfrak{L}_2(\mathbf{v})\\ &= (t\mathfrak{L}_1)(\mathbf{v}) + (t\mathfrak{L}_2)(\mathbf{v})\\ &= (t\mathfrak{L}_1 + t\mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La prima e la quarta uguaglianza conseguono dalla definizione di prodotto scalare in $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$; la seconda e la quinta dalla definizione di somma in $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$; la terza dalla proprietà distributiva sinistra del prodotto scalare rispetto alla somma in $\mathbf{W}$. Dalla genericità di $\mathbf{v}$ per generalizzazione si conclude che $t(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) = t\mathfrak{L}_1 + t\mathfrak{L}_2$.

Dimostriamo che il prodotto scalare è distributivo a destra rispetto alla somma.

$$\begin{aligned}((t_1+t_2)\mathfrak{L})(\mathbf{v}) &= (t_1+t_2)\mathfrak{L}(\mathbf{v})\\ &= t_1\mathfrak{L}(\mathbf{v})+t_2\mathfrak{L}(\mathbf{v})\\ &= (t_1\mathfrak{L})(\mathbf{v})+(t_2\mathfrak{L})(\mathbf{v})\\ &= (t_1\mathfrak{L}+t_2\mathfrak{L})(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La prima e la terza uguaglianza conseguono dalla definizione di prodotto scalare in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$; la seconda dalla proprietà distributiva destra del prodotto scalare rispetto alla somma; l'ultima dalla definizione di somma in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Dalla genericità di $\mathbf{v}$ si ottiene infine che $(t_1+t_2)\mathfrak{L}=t_1\mathfrak{L}+t_2\mathfrak{L}$.

Dimostriamo che il prodotto per uno scalare è associativo.

$$\begin{aligned}(t_1(t_2\mathfrak{L}))(\mathbf{v}) &= t_1(t_2\mathfrak{L})(\mathbf{v})\\ &= t_1(t_2(\mathfrak{L}(\mathbf{v}))\\ &= (t_1t_2)\mathfrak{L}(\mathbf{v})\\ &= ((t_1t_2)\mathfrak{L})(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La terza uguaglianza consegue dalla proprietà associativa del prodotto per uno scalare in $\mathbf{W}$; tutte le altre dalla definizione del prodotto scalare in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Dalla genericità di $\mathbf{v}$ otteniamo che $t_1(t_2\mathfrak{L})=(t_1t_2)\mathfrak{L}$.

Infine, proviamo che il prodotto per uno scalare è normalizzato.

$$\begin{aligned}(1\mathfrak{L})(\mathbf{v}) &= 1\mathfrak{L}(\mathbf{v})\\ &= \mathfrak{L}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

La prima uguaglianza consegue dalla definizione del prodotto per uno scalare in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$; la seconda dalla normalizzazione in $\mathbf{W}$. Dunque $1\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$.

4. Siano $t_1,t_2\in\mathbb{K}$. Se $\mathbf{x}\in\mathbb{K}^n$, allora

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{t_1\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2}(\mathbf{x}) &= (t_1\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2)\mathbf{x}\\ &= (t_1\mathbf{A}_1)\mathbf{x}+(t_2\mathbf{A}_2)\mathbf{x}\\ &= t_1(\mathbf{A}_1\mathbf{x})+t_2(\mathbf{A}_2\mathbf{x})\\ &= t_1\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_1}(\mathbf{x})+t_2\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_2}(\mathbf{x})\\ &= (t_1\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_1})(\mathbf{x})+(t_2\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_2})(\mathbf{x})\\ &= (t_1\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_1}+t_2\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_2})(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbf{x}$ è generico, si ottiene che

$$\mathfrak{L}_{t_1\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2}=t_1\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_1}+t_2\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_2}$$

e dunque

$$\mathcal{F}(t_1\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2)=\mathfrak{L}_{t_1\mathbf{A}_1+t_2\mathbf{A}_2}=t_1\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_1}+t_2\mathfrak{L}_{\mathbf{A}_2}=t_1\mathcal{F}(\mathbf{A}_1)+t_2\mathcal{F}(\mathbf{A}_2)$$

e questo prova che $\mathcal{F}$ è lineare.

14 **Forme lineari e spazio duale.** Una *forma lineare* su uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è una funzione lineare $\alpha : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$. Lo *spazio duale* di $\mathbf{V}$ è lo spazio vettoriale $\mathbf{V}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ delle forme lineari su $\mathbf{V}$. Sia $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$. Fissato un indice $k = 1, 2, \ldots, n$, sia $\beta_k : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ la funzione che a un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ associa la sua k-esima coordinata:

$$\beta_k(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = x_k.$$

1. Mostrare che β_k è una forma lineare.
2. Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$ e $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ è la base canonica, mostrare che β_k è l'applicazione lineare rappresentata dal vettore riga che ha la k-esima componente uguale a 1 e le altre componenti nulle.
3. Definire un isomorfismo tra lo spazio dei vettori riga $\mathrm{M}_{\mathbb{K}}(1, n)$ e lo spazio duale di $\mathbb{K}^n$. (Suggerimento: un vettore riga è una matrice e quindi rappresenta, per moltiplicazione, un'applicazione lineare.)

Soluzione. 1. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ e supponiamo che la loro rappresentazione come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ sia data dalle formule

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{b}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{b}_i.$$

Se $s, t \in \mathbb{K}$, allora

$$\begin{aligned} s\mathbf{x} + t\mathbf{y} &= s\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{b}_i + t\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(sx_i)\mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^{n}(ty_i)\mathbf{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(sx_i + ty_i)\mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Dunque

$$\beta_k(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = sx_k + ty_k = s\beta_k(\mathbf{x}) + t\beta_k(\mathbf{y})$$

e questo prova la linearità di β_k.

2. Se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, allora ${\mathbf{e}_k}^{\mathrm{T}}$ è il vettore riga che ha la k-esima coordinata uguale a 1 e tutte le rimanenti coordinate nulle. Per ogni $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{K}^n$ abbiamo

$${\mathbf{e}_k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = [0 \cdots 1 \cdots 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_k = \beta_k(\mathbf{x})$$

e dunque $\beta_k = \mathfrak{L}_{{\mathbf{e}_k}^{\mathrm{T}}}$.

3. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, il prodotto $\mathbf{Ax}$ è un elemento di $\mathbb{K}$. Dunque il prodotto definisce una funzione $\phi : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ che alla coppia ordinata $(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ associa lo scalare $\phi(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

Questa funzione è bilineare secondo la definizione data nell'esercizio 7; infatti se identifichiamo $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,1)$, allora ϕ è il prodotto di matrici $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n) \times \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,1) \to \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,1)$. La funzione ϕ induce una funzione

$$\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n) \xrightarrow{\phi^e} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$$

detta la sua *aggiunta esponenziale* e definita dalla formula

$$\phi^e(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Per giustificare l'affermazione che $\phi^e(\mathbf{A}) \in (\mathbb{K}^n)^*$ occorre provare la sua linearità:

$$\begin{aligned}
\phi^e(\mathbf{A})(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) &= \phi(\mathbf{A}, t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) && \text{(definizione di } \phi^e\text{)}\\
&= t_1\phi(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1) + t_2\phi(\mathbf{A}, \mathbf{x}_2) && \text{(bilinearità di } \phi\text{)}\\
&= t_1\phi^e(\mathbf{A})(\mathbf{x}_1) + t_2\phi^e(\mathbf{A})(\mathbf{x}_2) && \text{(definizione di } \phi^e\text{).}
\end{aligned}$$

Proviamo ora che ϕ^e è un isomorfismo di spazi vettoriali. Dimostriamo anzitutto che ϕ^e è lineare.

$$\begin{aligned}
\phi^e(t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2)(\mathbf{x}) &= \phi(t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2, \mathbf{x}) && \text{(definizione di } \phi^e\text{)}\\
&= t_1\phi(\mathbf{A}_1, \mathbf{x}) + t_2\phi(\mathbf{A}_2, \mathbf{x}) && \text{(bilinearità di } \phi\text{)}\\
&= t_1\phi^e(\mathbf{A}_1)(\mathbf{x}) + t_2\phi^e(\mathbf{A}_2)(\mathbf{x}) && \text{(definizione di } \phi^e\text{)}\\
&= (t_1\phi^e(\mathbf{A}_1) + t_2\phi^e(\mathbf{A}_2))(\mathbf{x}) && \text{(operazioni in } (\mathbb{K}^n)^*\text{).}
\end{aligned}$$

Dal momento che queste uguaglianze valgono per tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ otteniamo

$$\phi^e(t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2) = t_1\phi^e(\mathbf{A}_1) + t_2\phi^e(\mathbf{A}_2),$$

che è appunto la linearità di ϕ^e. Dimostriamo che ϕ^e è iniettiva. Supponiamo che sia $\mathbf{A} = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n)$ e che $\phi^e(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Allora per $i = 1, \dots, n$ abbiamo

$$a_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \phi^e(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}(\mathbf{x}) = 0.$$

e dunque $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. Questo prova che $\mathrm{Ker}(\phi^e) = \{\mathbf{O}\}$ e dunque che ϕ^e è iniettiva. Resta da provare che ϕ^e è suriettiva. Sia $\alpha \in (\mathbb{K}^n)^*$. Consideriamo la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e supponiamo che sia $\alpha(\mathbf{e}_i) = a_i$. Proviamo che, se $\mathbf{A} = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n)$, allora $\phi^e(\mathbf{A}) = \alpha$. Per un generico vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

di $\mathbb{K}^n$ abbiamo infatti che

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \mathbf{Ax} = \phi^e(\mathbf{A})(\mathbf{x}).$$

Questa uguaglianza vale per tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$; dunque $\alpha = \phi^e(\mathbf{A})$ e questo prova che ϕ^e è anche suriettiva.

15 Mostrare che:

1. se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata e $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$, allora $\mathfrak{L}^n = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^n}$;
2. più in generale, dati un polinomio $P(x) = P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e una matrice quadrata $\mathbf{A}$, si definisca
$$P(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I},$$
e si mostri che $P(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) = \mathfrak{L}_{P(\mathbf{A})}$;
3. se $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la rotazione di un angolo θ in senso antiorario, $\mathcal{R}^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la rotazione di un angolo $n\theta$ in senso antiorario, e $\mathcal{R}^{-1}$ è la rotazione di un angolo θ in senso orario.

Soluzione. 1. Dimostriamo l'affermazione per induzione su n. Se $n = 1$ l'affermazione è evidente, dal momento che $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$. Supponiamo di avere dimostrato che $\mathfrak{L}^n = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^n}$ per un certo n e dimostriamo la stessa formula per il suo successore $n+1$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{n+1} &= \mathfrak{L}^n \circ \mathfrak{L} && \text{(definizione di potenza)}\\
&= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^n} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{A}} && \text{(ipotesi induttiva e definizione di } \mathfrak{L})\\
&= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{A}} && \text{(proposizione 4.2)}\\
&= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^{n+1}} && \text{(definizione di potenza).}
\end{aligned}$$

2. Conviene utilizzare la notazione introdotta nell'esercizio 13 e in particolare la funzione $\mathcal{F} : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definita dalla formula $\mathcal{F}(\mathbf{A}) = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$. Nell'esercizio 13 è stato dimostrato che $\mathcal{F}$ è lineare, mentre quanto provato al punto 1 mostra che $\mathcal{F}(\mathbf{A}^n) = (\mathcal{F}(\mathbf{A}))^n$ e cioè che $\mathcal{F}$ è compatibile con i prodotti. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{P(\mathbf{A})} &= \mathcal{F}(P(\mathbf{A})) && \text{(definizione di } \mathcal{F})\\
&= \mathcal{F}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{A}^i\right) && \text{(definizione di } P)\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{F}\left(\mathbf{A}^i\right) && \text{(linearità di } \mathcal{F})\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{F}(\mathbf{A})^i && \text{(compatibilità di } \mathcal{F} \text{ coi prodotti)}\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i {\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}}^i && \text{(definizione di } \mathcal{F})\\
&= P(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) && \text{(definizione di } P).
\end{aligned}$$

3. Geometricamente l'enunciato è evidente: effettuare consecutivamente n rotazioni di un angolo θ equivale a effettuare un'unica rotazione di un angolo $n\theta$. Diamo per esercizio anche una dimostrazione algebrica. Se indichiamo con $\mathcal{R}(\theta)$ la rotazione di un angolo θ in senso antiorario intorno all'origine, allora $\mathcal{R}(\theta) = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(\theta)}$, dove

$$\mathbf{Q}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dalle formule di addizione delle funzioni trigonometriche abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\theta_1)\mathbf{Q}(\theta_2) &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{Q}(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}$$

e in particolare che $\mathbf{Q}(\theta)^n = \mathbf{Q}(n\theta)$. Da questa formula e da quanto dimostrato al punto 2 abbiamo allora che

$$\mathcal{R}(\theta)^n = \left(\mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(\theta)}\right)^n = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(\theta)^n} = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(n\theta)} = \mathcal{R}(n\theta)$$

che prova come l'n-esima potenza di una rotazione di un angolo θ sia la rotazione di un angolo $n\theta$. In modo simile,

$$\mathcal{R}(\theta) \circ \mathcal{R}(-\theta) = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(\theta)} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(-\theta)} = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(\theta)\mathbf{Q}(-\theta)} = \mathfrak{L}_{\mathbf{Q}(0)} = \mathfrak{L}_{\mathbf{I}} = \mathcal{I}.$$

Questo dimostra che la rotazione di un angolo θ è invertibile e che la sua inversa è la rotazione di un angolo $-\theta$ e cioè che $\mathcal{R}(\theta)^{-1} = \mathcal{R}(-\theta)$.

16 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare, e sia $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$. Mostrare che $\mathfrak{L}$ è un isomorfismo se e solo se $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

Soluzione. Cominciamo a dimostrare che $\mathfrak{L}$ è iniettiva se e soltanto se $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ è un insieme linearmente indipendente. Che la condizione sia necessaria è già stato dimostrato nell'esercizio 10. Proviamo che la condizione è sufficiente. Sia

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i \in \mathbf{V}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} && \text{(linearità di } \mathfrak{L}) \\
&\Rightarrow t_1 = \cdots = t_n = 0 && \text{(indipendenza di } \{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}) \\
&\Rightarrow \mathbf{v} = 0 && \text{(definizione di } \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Dunque $\mathfrak{L}$ è iniettiva e la condizione sufficiente.

Proviamo ora che $\mathfrak{L}$ è suriettiva se e soltanto se $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \dots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ è un insieme di generatori di $\mathbf{W}$. La condizione è necessaria. Sia infatti $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ un vettore arbitrario. Dal momento che $\mathfrak{L}$ è suriettiva, esiste un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Supponiamo che sia

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i.$$

Dalla linearità di $\mathfrak{L}$ si ottiene che

$$\mathbf{w} = \mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{b}_i).$$

Questo prova che ogni vettore di $\mathbf{W}$ si scrive come combinazione lineare dei vettori di $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ e dunque che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ è un insieme di generatori per $\mathbf{W}$. Resta da dimostrare che la condizione è sufficiente. Supponiamo allora che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ sia un insieme di generatori per $\mathbf{W}$ e che $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Se

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{b}_i)$$

prendiamo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i.$$

Dalla linearità di $\mathfrak{L}$ si ottiene

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathfrak{L}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{w}$$

e questo prova, in virtù della genericità di $\mathbf{w}$, che $\mathfrak{L}$ è suriettiva.

Per concludere basta osservare che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_n)\}$ è una base se e soltanto se è sia linearmente indipendente sia un insieme di generatori e dunque se e soltanto se $\mathfrak{L}$ è simultaneamente iniettiva e suriettiva. Quest'ultima condizione equivale a dire che $\mathfrak{L}$ è biettiva e dunque invertibile, cioè, dal momento che $\mathfrak{L}$ è lineare, che è un isomorfismo.

17 Verificare i fatti seguenti.

1. Se $\mathfrak{L}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e $\mathfrak{L}_2 : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$ sono isomorfismi, anche $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ è un isomorfismo e
$$(\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1)^{-1} = \mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathfrak{L}_2^{-1}.$$
2. La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza.
3. Se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata, l'applicazione $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ è un isomorfismo se e solo se $\mathbf{A}$ è invertibile.
4. Se $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un isomorfismo, un insieme di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ di $\mathbf{V}$ è una base di $\mathbf{V}$ (rispettivamente un insieme di generatori o un insieme linearmente indipendente) se e solo se $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)$ formano una base di $\mathbf{W}$ (rispettivamente un insieme di generatori o un insieme linearmente indipendente). In particolare, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ hanno la stessa dimensione e più in generale, ogni sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbf{V}$ ha la stessa dimensione di $\mathfrak{L}(\mathbf{H})$.

Soluzione. 1. Sappiamo dalla proposizione 4.1 che $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ è una funzione lineare. Per dimostrare che è un isomorfismo basta allora provare che è invertibile. Dal momento che

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1) \circ (\mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathfrak{L}_2^{-1}) &= \mathfrak{L}_2 \circ (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_1^{-1}) \circ \mathfrak{L}_2^{-1} \\ &= \mathfrak{L}_2 \circ \mathcal{I} \circ \mathfrak{L}_2^{-1} \\ &= \mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_2^{-1} \\ &= \mathcal{I}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathfrak{L}_2^{-1}) \circ (\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1) &= \mathfrak{L}_1^{-1} \circ (\mathfrak{L}_2^{-1} \circ \mathfrak{L}_2) \circ \mathfrak{L}_1 \\ &= \mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathfrak{L}_1 \\ &= \mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathfrak{L}_1 \\ &= \mathcal{I}\end{aligned}$$

possiamo concludere che $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ è invertibile con inversa $\mathfrak{L}_1^{-1} \circ \mathfrak{L}_2^{-1}$.

2. La relazione è riflessiva. Infatti ogni spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è isomorfo a se stesso perché l'identità $\mathcal{I} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è un isomorfismo. La relazione è simmetrica. Supponiamo infatti che lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$ sia isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbf{W}$. Deve allora esistere un isomorfismo $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e la sua funzione inversa $\mathfrak{L}^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è lineare per la proposizione 4.3 ed è invertibile con inversa $\mathfrak{L}$. Dunque $\mathfrak{L}^{-1}$ è un isomorfismo e $\mathbf{W}$ è isomorfo a $\mathbf{V}$. La relazione è transitiva. Supponiamo che $\mathbf{V}$ sia isomorfo a $\mathbf{W}$ e che questo sia, a sua volta, isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbf{Z}$. Devono allora esistere isomorfismi $\mathfrak{L}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e $\mathfrak{L}_2 : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$. Per la parte 1, $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ è un isomorfismo e dunque $\mathbf{V}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}$.

3. Se $\mathfrak{L}_\mathbf{A}$ è un isomorfismo, la funzione lineare $\mathfrak{L}_\mathbf{A}$ è iniettiva e il suo nucleo è il sottospazio nullo. Ma il nucleo di $\mathfrak{L}_\mathbf{A}$ è il nucleo di $\mathbf{A}$. Dunque $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ e, per il teorema 4.3 del capitolo 3, $\mathbf{A}$ è invertibile. Viceversa, se $\mathbf{A}$ è invertibile allora dalla proposizione 4.2 abbiamo

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\mathbf{A} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^{-1}} &= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}} = \mathfrak{L}_\mathbf{I} = \mathcal{I} \\ \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^{-1}} \circ \mathfrak{L}_\mathbf{A} &= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}} = \mathfrak{L}_\mathbf{I} = \mathcal{I}\end{aligned}$$

e questo prova che $\mathfrak{L}_\mathbf{A}$ è invertibile e dunque è un isomorfismo.

4. Supponiamo che $\mathfrak{L}$ sia un isomorfismo. Cominciamo con l'osservare che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_\mathbf{V} &\iff \mathfrak{L}\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}_\mathbf{W} && \text{(iniettività di } \mathfrak{L}) \\ &\iff \sum_{i=1}^{d} x_i \mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_\mathbf{W} && \text{(linearità di } \mathfrak{L}).\end{aligned}$$

Questo significa che il vettore nullo può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ a coefficienti non tutti nulli se e soltanto se lo stesso vale per i vettori $\{\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)\}$. Dunque il primo insieme è linearmente indipendente se e soltanto se lo è il secondo. In secondo luogo abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) &\iff \forall \mathbf{v} : \ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{v}_i && \text{(definizione di generatori)} \\
&\iff \forall \mathbf{v} : \ \mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) && \text{(iniettività di } \mathfrak{L}) \\
&\iff \mathfrak{L}(\mathbf{V}) = \mathcal{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)) && \text{(definizione di generatori)} \\
&\iff \mathbf{W} = \mathcal{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)) && \text{(suriettività di } \mathfrak{L}).
\end{aligned}$$

Dunque $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ genera $\mathbf{V}$ se e soltanto se $\{\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)\}$ genera $\mathbf{W}$. Infine $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ è una base di $\mathbf{V}$ se e soltanto se è un insieme linearmente indipendente di generatori; combinando i due risultati precedenti, questo equivale ad affermare che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{v}_d)\}$ è un insieme indipendente di generatori e cioè una base di $\mathbf{W}$. In particolare $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ hanno basi della stessa cardinalità e dunque $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

Infine, se $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{V}$ è un sottospazio, allora $\mathfrak{L}$ definisce una funzione lineare

$$\mathfrak{L}' : \mathbf{H} \to \mathfrak{L}(\mathbf{H})$$

che coincide con $\mathfrak{L}$ su tutti i vettori di $\mathbf{H}$. Questa funzione è lineare ed iniettiva perché è la restrizione ad $\mathbf{H}$ della funzione lineare e iniettiva $\mathfrak{L}$; ma è anche suriettiva per la scelta del suo codominio. Dunque $\mathfrak{L}'$ è un isomorfismo e, per quanto appena provato,

$$\dim \mathbf{H} = \dim \mathfrak{L}(\mathbf{H}).$$

18 Mostrare che lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ è isomorfo allo spazio vettoriale delle successioni *finite* di elementi di $\mathbb{K}$ (una successione $\{a_k\}_{k\geq 0}$ è finita se esiste $N \geq 0$ tale che $a_k = 0$ per ogni $k > N$).

Soluzione. Sia $\mathbf{V}$ lo spazio delle successioni finite di elementi di $\mathbb{K}$. Se $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, chiamiamo *lunghezza* di $\mathbf{a}$ il massimo indice k per cui $a_k \neq 0$. Conveniamo anche che la lunghezza della successione nulla sia 0. Indichiamo la lunghezza di $\mathbf{a}$ con il simbolo $|\mathbf{a}|$. Poniamo poi

$$\mathfrak{L}(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|} a_k x^k.$$

La somma a destra è un polinomio e dunque la formula definisce una funzione $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}[x]$. Si osservi che se sostituiamo $|\mathbf{a}|$ nella somma con un qualunque numero naturale $n \geq |\mathbf{a}|$ otteniamo sempre il medesimo risultato perché non facciamo altro che aggiungere addendi con coefficienti nulli.

Proviamo che $\mathfrak{L}$ è una funzione lineare. Siano $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e $t \in \mathbb{K}$. Si osservi che

$$t\mathbf{a} = t(a_0, a_1, \ldots) = (ta_0, ta_1, \ldots).$$

I coefficienti che erano nulli in $\mathbf{a}$ restano nulli nel prodotto $t\mathbf{a}$ e questo prova che $|t\mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}|$. Si osservi che può effettivamente essere $|t\mathbf{a}| < |\mathbf{a}|$ quando $t = 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(t\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^{|t\mathbf{a}|}(ta_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|}(ta_k)x^k \\ &= t\sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|} a_k x^k \\ &= t\mathfrak{L}(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$. Allora

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots).$$

Se $n > |\mathbf{a}|$ allora $a_n = 0$ e se $n > |\mathbf{b}|$ allora $b_n = 0$. Dunque se $n > \max(|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|)$ abbiamo sia $a_n = 0$ che $b_n = 0$ e dunque $a_n + b_n = 0$. Questo prova che $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq \max(|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|)$. Ma allora

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|} (a_k + b_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\max(|\mathbf{a}|,|\mathbf{b}|)} (a_k + b_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\max(|\mathbf{a}|,|\mathbf{b}|)} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\max(|\mathbf{a}|,|\mathbf{b}|)} b_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|} a_k x^k + \sum_{k=0}^{|\mathbf{b}|} b_k x^k \\ &= \mathfrak{L}(\mathbf{a}) + \mathfrak{L}(\mathbf{b}).\end{aligned}$$

Proviamo che $\mathfrak{L}$ è iniettiva. Ricordiamo anzitutto che il polinomio nullo, che è l'elemento neutro di $\mathbb{K}[x]$ per la somma, è il polinomio che ha tutti i coefficienti nulli. Allora

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}[x]} &\Rightarrow \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|} a_k x^k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}[x]} \\ &\Rightarrow a_0 = a_1 = \ldots = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}.\end{aligned}$$

L'unico elemento di $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$ è il vettore nullo e dunque $\mathfrak{L}$ è iniettiva.

Proviamo che $\mathfrak{L}$ è suriettiva. Sia $p \in \mathbb{K}[x]$. Se

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

consideriamo la successione finita

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{a}|} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= p.\end{aligned}$$

Dunque $\mathfrak{L}$ è una funzione lineare biettiva e pertanto è un isomorfismo.

19 In algebra astratta, una $\mathbb{K}$-algebra è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ in cui è definita una operazione *prodotto* che gode delle proprietà associativa, distributiva (a destra e sinistra), e di omogeneità che abbiamo definito nel paragrafo sul prodotto di matrici. Mostrare che $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$, col prodotto definito dal prodotto di composizione, è una $\mathbb{K}$-algebra.

Soluzione. Sappiamo dall'esercizio 13 che $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Proviamo che la composizione è associativa. Indichiamo con $\mathfrak{L}_i$ un elemento di $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ e con $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{V}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}((\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2) \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}) &= (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v})) \\ &= \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v}))) \\ &= \mathfrak{L}_1((\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v})) \\ &= (\mathfrak{L}_1 \circ (\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3))(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbf{v}$ è generico, per generalizzazione otteniamo

$$(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2) \circ \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_1 \circ (\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3).$$

Proviamo che la composizione è distributiva rispetto alla somma.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_1 \circ (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3))(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}_1((\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v})) \\ &= \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}) + \mathfrak{L}_3(\mathbf{v})) \\ &= \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2(\mathbf{v})) + \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v})) \\ &= (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}) + (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}) \\ &= (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Per generalizzazione si ottiene

$$\mathfrak{L}_1 \circ (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3) = \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3.$$

In modo simile,

$$\begin{aligned}((\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}) &= (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v}))\\ &= \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v})) + \mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_3(\mathbf{v}))\\ &= (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}) + (\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v})\\ &= (\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3)(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Quindi

$$(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) \circ \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_3.$$

Resta da provare l'omogeneità. Supponiamo che $t \in \mathbb{K}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}((t\mathfrak{L}_1) \circ \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}) &= (t\mathfrak{L}_1)(\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}))\\ &= t\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}))\\ &= t(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v})\\ &= (t(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2))(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

In modo simile,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_1 \circ (t\mathfrak{L}_2))(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}_1((t\mathfrak{L}_2)(\mathbf{v}))\\ &= \mathfrak{L}_1(t\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}))\\ &= t\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2(\mathbf{v}))\\ &= t(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)(\mathbf{v})\\ &= (t(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2))(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Dunque

$$(t\mathfrak{L}_1) \circ \mathfrak{L}_2 = t(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_1 \circ (t\mathfrak{L}_2).$$

4. IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

20 Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, e sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) = [1, 2]^{\mathrm{T}}$ e $\mathfrak{L}(\mathbf{e_2}) = [4, 3]^{\mathrm{T}}$. Mostrare che

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 4y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}.$$

Scrivere la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica.

Soluzione. Basta osservare che

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \mathfrak{L}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)\\ &= x\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) + y\mathfrak{L}(\mathbf{e}_2)\\ &= x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x + 4y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Per costruire la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica basta ricordare che le colonne di $\mathbf{A}$ sono le coordinate dei vettori $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_i)$ rispetto alla stessa base. Dunque

$$\mathbf{A} = [\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1), \mathfrak{L}(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

21 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 3x + y \end{bmatrix}.$$

Scrivere la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica e quella che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\{[1,1]^{\mathrm{T}}, [1,-3]^{\mathrm{T}}\}$. Trovare una base del nucleo e dell'immagine di $\mathfrak{L}$. Trovare equazioni cartesiane per il nucleo e per l'immagine di $\mathfrak{L}$.

Soluzione. Dal teorema 5.2 sappiamo che per scrivere la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ basta calcolare le immagini dei vettori di $\mathcal{E}$. Troviamo

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) = \mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{L}(\mathbf{e}_2) = \mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questo calcolo mostra come $\mathbf{A}$ possa essere ottenuta direttamente scrivendo nelle colonne i coefficienti delle indeterminate che compaiono nell'equazione di $\mathfrak{L}$. Per calcolare invece la matrice rappresentativa $\mathbf{B}$ di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$$

basta ricordare dalla proposizione 5.5 e dall'esempio che la segue che, se $\mathbf{S}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$, sussiste la relazione $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathfrak{L}_{\mathrm{A}}"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathfrak{L}_{\mathrm{S}}"] \arrow[r, dashed, "\mathfrak{L}_{\mathrm{B}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathfrak{L}_{\mathrm{S}}"']
\end{tikzcd}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Per determinare $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L})$ risolviamo il sistema lineare $\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, che si riduce all'unica equazione

$$3x + y = 0.$$

Se scegliamo x come variabile libera e poniamo $x = 1$, troviamo la base formata dall'unico vettore $[1, -3]^{\mathrm{T}}$. Abbiamo poi che $\operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \operatorname{Col}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}([1, 1]^{\mathrm{T}})$; dunque $\{[1, 1]^{\mathrm{T}}\}$ è una base di $\operatorname{Im}(\mathfrak{L})$. Per determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im}(\mathfrak{L})$ basta determinare $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$. Il sistema $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che si scrive esplicitamente nella forma

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0, \end{cases}$$

ha spazio delle soluzioni generato dal vettore $[1, -1]^{\mathrm{T}}$. Dunque l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im}(\mathfrak{L})$ è $x - y = 0$.

22 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Mostrare che

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. L'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$ perché la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

che ha come colonne i vettori di $\mathcal{B}$ ha rango 2. Dunque, per la proposizione 5.1, le prime due formule assegnate definiscono effettivamente un'unica funzione lineare $\mathfrak{L}$.

Per determinare l'immagine di $\mathbf{v} = [2, -1]^{\mathrm{T}}$ possiamo scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ di $\mathcal{B}$ e poi utilizzare la linearità di $\mathfrak{L}$. L'equazione

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}$$

equivale al sistema lineare $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{v}$ che ammette come unica soluzione $\mathbf{x} = [2, -1]^{\mathrm{T}}$. Dunque $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ e

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = 2\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1) - \mathfrak{L}(\mathbf{b}_2) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Un altro metodo per risolvere lo stesso problema consiste nel trovare la matrice rappresentativa $\mathbf{M}$ di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica e poi calcolare $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ utilizzando il prodotto di matrici. Si osservi che possiamo scrivere immediatamente la matrice rappresentativa $\mathbf{N}$ di $\mathfrak{L}$ se prendiamo $\mathcal{B}$ come base del dominio e la base canonica $\mathcal{E}$ come base del codominio; infatti dalle equazioni di $\mathfrak{L}$ abbiamo

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per passare da queste basi alla base canonica abbiamo solo bisogno della matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$ e questa è esattamente la matrice $\mathbf{B}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, dashed, "\mathfrak{L}_\mathrm{M}"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathfrak{L}_\mathrm{B}"] \arrow[ur, "\mathfrak{L}_\mathrm{N}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbiamo allora

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{M}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

23 Supponiamo che $\mathbf{V}$ sia uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, e sia a uno scalare. Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ l'applicazione lineare tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1) = a\mathbf{b}_1$ e $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k) = \mathbf{b}_{k-1} + a\mathbf{b}_k$ per $k = 2, \ldots, n$. Mostrare che la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è il *blocco di Jordan* $\mathbf{J}_n(a)$, cioè la matrice quadrata $n \times n$ che ha gli elementi sulla diagonale principale uguali ad a, gli elementi sulla diagonale immediatamente sopra alla diagonale principale uguali a 1, e tutti gli altri elementi nulli.

Soluzione. Sia $\mathbf{A}$ la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Per costruire $\mathbf{A}$ basta ricordare che la k-esima colonna $\mathbf{a}_k$ di $\mathbf{A}$ è il vettore delle coordinate di $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k)$ rispetto a $\mathcal{B}$. Dalla definizione di $\mathfrak{L}$ abbiamo

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{prima riga} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \qquad \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ a \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow (k-1)\text{-esima riga} \\ \leftarrow k\text{-esima riga} \\ \\ \end{matrix}$$

dove abbiamo indicato solo gli elementi non nulli dei vettori. Giustapponendo le colonne troviamo la matrice seguente, in cui tutti gli zeri sono stati omessi.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & & \\ & & a & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{bmatrix} = \mathbf{J}_n(a)$$

24 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale delle funzioni $y(x)$ che sono combinazioni lineari di $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Si consideri l'operatore differenziale:

$$\mathfrak{L}(y) = y'' + ay' + by$$

dove a e b sono numeri reali fissati. Mostrare che $\mathfrak{L}$ è una funzione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$. Trovare la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\{\cos(x), \sin(x)\}$ di $\mathbf{V}$. Mostrare che l'equazione differenziale

$$\mathfrak{L}(y) = \cos(x)$$

ha una e una sola soluzione in $\mathbf{V}$ tranne nel caso $a = 0, b = 1$. Per trattare questo caso, sia $\mathbf{Z}$ lo spazio vettoriale delle funzioni $y(x)$ che sono combinazioni lineari di $x\cos(x)$ e $x\sin(x)$. Mostrare che se $y(x) \in \mathbf{Z}$, allora $\mathfrak{L}(y) = y'' + y$ appartiene a $\mathbf{V}$, e che la funzione $\mathfrak{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{V}$ è invertibile. Trovare una soluzione $y(x)$ di $\mathfrak{L}(y) = \cos(x)$.

Soluzione. Ricordiamo che l'operatore di derivazione $\mathfrak{D} : C^{(\infty)}(\mathbb{R}) \to C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ è una funzione lineare. La linearità è infatti una riformulazione di due note proprietà dell'operatore: se $y_1, y_2 \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathfrak{D}(y_1 + y_2) = \mathfrak{D}(y_1) + \mathfrak{D}(y_2), \qquad \mathfrak{D}(cy_1) = c\mathfrak{D}(y_1).$$

Dal momento che $\cos(x), \sin(x) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, possiamo considerare il sottospazio

$$\mathbf{V} = \mathcal{L}(\cos(x), \sin(x)) \subseteq C^{(\infty)}(\mathbb{R})$$

e osservare che, essendo $\mathfrak{D}(\cos(x)) = -\sin(x)$ e $\mathfrak{D}(\sin(x)) = \cos(x)$, risulta

$$\mathfrak{D}(\mathbf{V}) = \mathcal{L}(-\sin(x), \cos(x)) = \mathbf{V}$$

e dunque che $\mathfrak{D}$ si restringe a una funzione lineare $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$. L'insieme $\mathcal{B} = \{\cos(x), \sin(x)\}$ è indipendente, come è stato provato nel terzo esempio a pagina 170 del testo, dunque è una base di $\mathbf{V}$ e le derivate di seno e coseno calcolate sopra mostrano che la matrice rappresentativa della restrizione di $\mathfrak{D}$ a $\mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $P(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$, allora $\mathfrak{L} = P(\mathfrak{D})$ e dall'esercizio 15 abbiamo che la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M} = P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + a\mathbf{A} + b\mathbf{I} = \begin{bmatrix} b-1 & a \\ -a & b-1 \end{bmatrix}.$$

La funzione $\cos(x)$ è rappresentata dal vettore $\mathbf{v} = [1, 0]^{\mathrm{T}}$ delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Dunque, invece di risolvere l'equazione differenziale $\mathfrak{L}(y) = \cos(x)$ possiamo risolvere il sistema lineare $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$. Se $a = 0$ e $b = 1$, allora $\mathbf{M} = \mathbf{O}$ mentre $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, quindi il sistema non ha soluzione. In tutti gli altri casi $\mathbf{M}$ si riduce alla matrice identità per eliminazione gaussiana, dunque $r(\mathbf{M}) = 2$, il sistema ammette un'unica soluzione e lo stesso vale per l'equazione differenziale.

Supponiamo ora che siano $a = 0$, $b = 1$ e consideriamo il sottospazio di $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(x\cos(x), x\sin(x)).$$

Poiché

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(x\cos(x)) &= (x\cos(x))'' + x\cos(x) = -2\sin(x), \\ \mathfrak{L}(x\sin(x)) &= (x\sin(x))'' + x\sin(x) = 2\cos(x), \end{aligned}$$

risulta

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{L}(-2\sin(x), 2\cos(x)) = \mathcal{L}(\sin(x), \cos(x)) = \mathbf{V}$$

e $\mathfrak{L}$ definisce una funzione lineare $\mathbf{Z} \to \mathbf{V}$. L'insieme $\mathcal{C} = \{x\cos(x), x\sin(x)\}$ è linearmente indipendente: dalla formula

$$c_1 x\cos(x) + c_2 x\sin(x) = 0$$

sostituendo $x = \pi/2$ prima e $x = \pi/3$ poi, si ottiene $c_1 = c_2 = 0$. Dunque $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbf{Z}$ e i calcoli su $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ fatti sopra provano che la matrice rappresentativa della restrizione di $\mathfrak{L}$ da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{V}$ rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione dell'equazione differenziale $\mathfrak{L}(y) = \cos x$ si riduce allora alla soluzione del sistema lineare $\mathbf{Nx} = \mathbf{v}$. Ma ora $r(\mathbf{N}) = 2$ e il sistema ha un'unica soluzione data dal vettore $[0, \frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$. Di conseguenza, l'unica soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{1}{2}x\sin(x).$$

25 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Mostrare che, se una matrice $\mathbf{B}$ non è un multiplo della matrice identità, allora le uniche matrici che commutano con $\mathbf{B}$ sono le combinazioni lineari

$$t_1\mathbf{I} + t_2\mathbf{B}$$

utilizzando la traccia seguente.

1. Mostrare che le quattro matrici

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$.

2. Si fissi una matrice $\mathbf{B} \in \mathbf{V}$. Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ la funzione definita da

$$\mathfrak{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Si mostri che $\mathfrak{L}$ è lineare.

3. Fissati i coefficienti di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (cioè le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

si calcolino i coefficienti di $\mathfrak{L}(\mathbf{A})$.

4. Si scriva la matrice $\mathbf{M}$ di tipo $(4, 4)$ che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$: occorre calcolare le coordinate di $\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{E}_4)$.

5. Si mostri che il rango di $\mathbf{M}$ è due, a meno che $\mathbf{B}$ non sia un multiplo della matrice identità, nel qual caso $\mathbf{M}$ è la matrice nulla.

6. Il nucleo di $\mathbf{M}$ consiste delle coordinate delle matrici che commutano con $\mathbf{B}$. Per il punto precedente ha dimensione 2 se $\mathbf{B}$ non è un multiplo della matrice identità. Concludere che le uniche matrici che commutano con $\mathbf{B}$ sono le combinazioni lineari

$$t_1\mathbf{I} + t_2\mathbf{B}\,.$$

(Suggerimento: il nucleo ha dimensione due, e contiene le due matrici $\mathbf{I}$ e $\mathbf{B}$, perché $\mathbf{I}$ e $\mathbf{B}$ commutano con $\mathbf{B}$. L'ipotesi che $\mathbf{B}$ non sia un multiplo della matrice identità significa che $\mathbf{I}$ e $\mathbf{B}$ sono linearmente indipendenti, quindi generano un sottospazio di dimensione due, che deve coincidere col nucleo.)

Soluzione. 1. Il fatto che $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$ è stato provato nell'esercizio 43 del capitolo 4.

2. Proviamo che $\mathfrak{L}$ è sia additiva che omogenea.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{A}_2\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}\mathbf{A}_2 \\
&= \mathbf{A}_1\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}_2 \\
&= \mathfrak{L}(\mathbf{A}_1) + \mathfrak{L}(\mathbf{A}_2). \\
\mathfrak{L}(t\mathbf{A}) &= (t\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{B}(t\mathbf{A}) \\
&= t(\mathbf{AB}) - t(\mathbf{BA}) \\
&= t(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) \\
&= t\mathfrak{L}(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

3. Per ottenere i coefficienti di $\mathfrak{L}(\mathbf{A})$ basta effettuare esplicitamente le operazioni sulle matrici dei coefficienti di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cy - bz & bx + (d-a)y - bw \\ -cx + (a-d)z + cw & -cy + bz \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4. Utilizzando la formula al punto 3 troviamo

$$\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vettore delle coordinate di $\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$ rispetto a $\mathcal{B}$ è dunque $[0, b, -c, 0]^{\mathrm{T}}$ e costituisce la prima colonna di $\mathbf{M}$. Ripetendo il calcolo per le altre matrici di $\mathcal{B}$ otteniamo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & 0 & -b \\ -c & 0 & a-d & c \\ 0 & -c & b & 0 \end{bmatrix}.$$

5, 6. Se $r(\mathbf{M}) < 2$ allora tutte le coppie di colonne di $\mathbf{M}$ devono essere linearmente dipendenti. In particolare, ogni volta che scegliamo due colonne, una delle due deve essere un multiplo dell'altra. Se applichiamo questa condizione alle prime due colonne di $\mathbf{M}$ vediamo che deve essere $c = 0$. Se la applichiamo alla seconda e alla terza colonna troviamo $a = d$. Infine, se la applichiamo alle ultime due colonne troviamo $b = 0$. Quindi, se $\mathbf{B}$ non è multiplo dell'identità, deve essere $r(\mathbf{M}) \geq 2$. In questo caso, per il teorema di Rouché-Capelli, $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{M}) \leq 2$. Ma $\mathrm{Ker}(\mathbf{M})$ è isomorfo a $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, dunque $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \leq 2$. Ora si osservi che

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) &\Leftrightarrow \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{O} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\end{aligned}$$

e dunque $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$ contiene le matrici che commutano con $\mathbf{B}$. Fra queste matrici ci sono certamente sia $\mathbf{I}$ che $\mathbf{B}$. Ma se $\mathbf{B}$ non è multiplo dell'identità, nessuna di queste due matrici è multiplo dell'altra; le due matrici sono indipendenti, $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = 2$ e $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \mathcal{L}(\mathbf{I}, \mathbf{B})$. Questo significa che le matrici che commutano con $\mathbf{B}$ sono un sottospazio di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2,2)$ di dimensione 2 con base $\{\mathbf{I}, \mathbf{B}\}$ e dunque che tutte queste matrici si scrivono in modo unico come combinazione lineare

$$\mathbf{A} = t_1\mathbf{I} + t_2\mathbf{B}.$$

26 Si consideri la funzione $\mathcal{T} : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m,n) \to \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,m)$ che a una matrice $\mathbf{A}$ associa la matrice trasposta $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Si mostri che $\mathcal{T}$ è un isomorfismo. (Suggerimento: $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.) Si trovi la matrice che rappresenta $\mathcal{T}$ rispetto alle basi canoniche nel caso $m = n = 2$.

Soluzione. Proviamo anzitutto che $\mathcal{T}$ è lineare. Se $\mathbf{A}$ è una matrice, indichiamo con $\mathbf{A}_{ij}$ il suo elemento di posto (i, j). Abbiamo:

$$\begin{aligned}[\mathcal{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})]_{ij} &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ji} \\ &= \mathbf{A}_{ji} + \mathbf{B}_{ji} \\ &= [\mathcal{T}(\mathbf{A})]_{ij} + [\mathcal{T}(\mathbf{B})]_{ij} \\ &= [\mathcal{T}(\mathbf{A}) + \mathcal{T}(\mathbf{B})]_{ij}. \\ [\mathcal{T}(t\mathbf{A})]_{ij} &= (t\mathbf{A})_{ji} \\ &= t\mathbf{A}_{ji} \\ &= t[\mathcal{T}(\mathbf{A})]_{ij} \\ &= [t\mathcal{T}(\mathbf{A})]_{ij}.\end{aligned}$$

Dal momento che queste uguaglianze valgono per tutte le coppie di indici (i, j), possiamo concludere che

$$\mathcal{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathcal{T}(\mathbf{A}) + \mathcal{T}(\mathbf{B}), \qquad \mathcal{T}(t\mathbf{A}) = t\mathcal{T}(\mathbf{A})$$

e dunque che $\mathcal{T}$ è lineare.

Proviamo ora che $\mathcal{T}$ è involutoria, cioè che $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}$, dove $\mathcal{I} : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m, n)$ è la funzione identica. Infatti

$$\begin{aligned}[(\mathcal{T} \circ \mathcal{T})(\mathbf{A})]_{ij} &= [\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathbf{A}))]_{ij} \\ &= [\mathcal{T}(\mathbf{A})]_{ji} \\ &= \mathbf{A}_{ij} \\ &= [\mathcal{I}(\mathbf{A})]_{ij}.\end{aligned}$$

Poiché l'uguaglianza vale per tutte le coppie di indici (i, j), possiamo concludere che $(\mathcal{T} \circ \mathcal{T})(\mathbf{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{A})$. Ma poiché questa uguaglianza vale per tutte le matrici $\mathbf{A}$, abbiamo che $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}$. Ora questo prova che $\mathcal{T}$ ha come inversa se stessa e dunque è un isomorfismo.

Per esaminare il caso $m = n = 2$ consideriamo la base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ di $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2, 2)$ – si veda il terzo esempio a pagina 175 del testo. Se calcoliamo le immagini dei vettori di $\mathcal{E}$ in $\mathcal{T}$ troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathbf{E}_{11}) &= \mathbf{E}_{11} \\ \mathcal{T}(\mathbf{E}_{12}) &= \mathbf{E}_{21} \\ \mathcal{T}(\mathbf{E}_{21}) &= \mathbf{E}_{12} \\ \mathcal{T}(\mathbf{E}_{22}) &= \mathbf{E}_{22}.\end{aligned}$$

Possiamo concludere che la matrice rappresentativa di $\mathcal{T}$ rispetto a $\mathcal{E}$ è

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27 Mostrare che la matrice $\mathbf{S}$ di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ di $\mathbf{V}$ rappresenta l'applicazione identità $\mathcal{I}_\mathbf{V} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ rispetto alle basi $\mathcal{C}$ per il dominio e $\mathcal{B}$ per il codominio, in ordine inverso quindi rispetto a come le abbiamo introdotte. (Suggerimento: la matrice che rappresenta $\mathcal{I}_\mathbf{V}$ ha come k-esima colonna il vettore delle coordinate di $\mathcal{I}_\mathbf{V}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}_k$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.)

Soluzione. Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{v})$ il vettore delle coordinate di $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e sia $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{v})$ il vettore delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. Se $\mathbf{S}$ è la matrice dell'identità rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$, allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ risulta

$$(\mathbf{x} \circ \mathcal{I})(\mathbf{v}) = (\mathfrak{L}_\mathbf{S} \circ \mathbf{X})(\mathbf{v}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\mathfrak{L}_S"] & \mathbb{K}^n \\
\mathbf{V} \arrow[u, "\mathbf{X}"] \arrow[r, "\mathcal{I}"'] & \mathbf{V} \arrow[u, "\mathbf{x}"']
\end{tikzcd}$$

Dal momento che $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, la formula precedente si riduce a

$$\mathbf{x} = \mathbf{SX}$$

e questa è precisamente la formula per la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

28 Se $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un'applicazione invertibile e $\mathbf{A}$ è la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, allora $\mathbf{A}$ è invertibile e l'applicazione $\mathfrak{L}^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è rappresentata da $\mathbf{A}^{-1}$ rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$.

Soluzione. Sia $\mathbf{B}$ la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}^{-1}$ rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$. La proposizione 5.4 del capitolo 5 mostra che la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}^{-1} \circ \mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è $\mathbf{BA}$. Tuttavia, $\mathfrak{L}^{-1} \circ \mathfrak{L} = \mathcal{I}$ e la matrice rappresentativa dell'identità rispetto a una qualunque base è $\mathbf{I}$. Dunque $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. In modo simile, la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L}^{-1}$ rispetto a $\mathcal{C}$ è $\mathbf{AB}$. Ma $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L}^{-1} = \mathcal{I}$, che ha come matrice rappresentativa $\mathbf{I}$. Dunque anche $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Questo prova che $\mathbf{A}$ è invertibile con inversa $\mathbf{B}$.

29 **Base duale.** Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale, e sia $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$. Lo *spazio duale* $\mathbf{V}^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ contiene le forme lineari $\beta_k : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$

$$\beta_k(x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = x_k$$

per $k = 1, 2, \dots, n$. Mostrare che

1. la funzione β_k è l'unica applicazione lineare $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$ tale che

$$\beta_k(\mathbf{b}_h) = \delta_{hk}$$

(qui δ_{hk} è il simbolo di Kronecker che vale 1 se $h = k$ e zero altrimenti);

2. l'insieme $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ è una base di $\mathbf{V}^*$: si dice che è la base duale della base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. In particolare, $\dim \mathbf{V}^* = \dim \mathbf{V}$. (Suggerimento: se una forma lineare β è rappresentata dal vettore riga $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, allora $\beta = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k$.)
3. se $\mathbf{v}$ ha coordinate $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e β ha coordinate $\mathbf{a}$ rispetto alla base duale, allora
$$\beta(\mathbf{v}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Questo esercizio mostra che una forma lineare in coordinate è un polinomio omogeneo di primo grado; questo è il significato originale di forma (polinomio omogeneo) lineare (di primo grado).

Soluzione. 1. Abbiamo già mostrato nell'esercizio 14 che β_k è lineare. Il fatto che $\beta_k(\mathbf{b}_h) = \delta_{hk}$ è chiaro dalla definizione di β_k. Il fatto che β_k sia l'unica funzione lineare che soddisfa questa condizione consegue dal fatto che $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ è una base e dalla proposizione 5.1 del capitolo 5.

2. Sia $\mathcal{B}^* = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Proviamo che $\mathcal{B}^*$ è un insieme di generatori per $\mathbf{V}^*$. Data $\beta \in \mathbf{V}^*$, sia $a_k = \beta(\mathbf{b}_k)$. Proviamo che
$$\beta = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k.$$

Infatti
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k\right)(\mathbf{b}_h) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k(\mathbf{b}_h)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{hk}\\ &= a_h\\ &= \beta(\mathbf{b}_h).\end{aligned}$$

Le due forme β e $\sum_k a_k \beta_k$ coincidono sugli elementi della base $\mathcal{B}$, dunque coincidono per la proposizione 5.1 del capitolo 5. Proviamo che $\mathcal{B}^*$ è linearmente indipendente. Sia $0 \in \mathbf{V}^*$ la forma nulla, elemento neutro della somma. Allora per ogni $h = 1, \ldots, n$ abbiamo che
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k = 0 &\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k\right)(\mathbf{b}_h) = 0(\mathbf{b}_h)\\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k(\mathbf{b}_h) = 0\\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{hk} = 0\\ &\Rightarrow a_h = 0.\end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B}^*$ è anche indipendente e dunque è una base di $\mathbf{V}^*$.

3. Se $\mathbf{x}$ è il vettore delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathbf{a}$ quello di β rispetto a $\mathcal{B}^*$, allora deve essere

$$\mathbf{x} = \sum_{h=1}^{n} x_h \mathbf{b}_h, \qquad \beta = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k.$$

Ma allora, ricordando che $\beta_k(\mathbf{v}) = x_k$, troviamo:

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k(\mathbf{v}) && \text{(definizione di } \beta\text{)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k \left(\sum_{h=1}^{n} x_h \mathbf{b}_h \right) && \text{(definizione di } \mathbf{v}\text{)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k x_k && \text{(definizione di } \beta_k\text{)}\\
&= \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

30 Sia $\mathbf{H}$ un sottospazio di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione finita, e sia $\mathfrak{M} : \mathbf{H} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. Mostrare che esiste un'estensione lineare di $\mathfrak{M}$ a tutto $\mathbf{V}$: esiste cioè un'applicazione lineare $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathfrak{M}(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. (Suggerimento: fissata una base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ di $\mathbf{H}$, la si estenda a una base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d, \mathbf{b}_{d+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ di $\mathbf{V}$; si definisca $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k) = \mathfrak{M}(\mathbf{b}_k)$ per $k \le d$, e $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k)$ in modo qualsiasi per $k > d$.)

Soluzione. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ una base di $\mathbf{H}$. L'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente in $\mathbf{V}$ e dunque, per la proposizione 6.10 del capitolo 4, è contenuto in una base

$$\bar{\mathcal{B}} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d, \mathbf{b}_{d+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}.$$

Consideriamo ora, per $k = 1, \ldots, d$ i vettori $\mathbf{w}_k = \mathfrak{M}(\mathbf{b}_k) \in \mathbf{W}$ e a questi aggiungiamo vettori $\mathbf{w}_{d+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{W}$ scelti arbitrariamente. Dal momento che $\bar{\mathcal{B}}$ è una base di $\mathbf{V}$, esiste, per la proposizione 5.1 del capitolo 5, una e una sola funzione lineare $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k) = \mathbf{w}_k$ per $k = 1, \ldots, n$. Se $\mathbf{b}_k \in \mathcal{B}$, abbiamo

$$\mathfrak{L}(\mathbf{b}_k) = \mathbf{w}_k = \mathfrak{M}(\mathbf{b}_k).$$

Ma allora, se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{H}$, possiamo scrivere $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{d} t_k \mathbf{b}_k$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$, e concludere

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{d} t_k \mathfrak{L}(\mathbf{b}_k) = \sum_{k=1}^{d} t_k \mathfrak{M}(\mathbf{b}_k) = \mathfrak{M}(\mathbf{v}).$$

Si noti che l'estensione non è unica se $\mathbf{H} \neq \mathbf{V}$ perché dipende dalla scelta dei vettori $\mathbf{w}_{d+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$.

31 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{V}$. Se $\beta(\mathbf{v}) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbf{V}^*$, allora $\mathbf{v} = 0$. [Suggerimento: se $\mathbf{v} \neq 0$, estendere a $\mathbf{V}$ la forma lineare $\mathfrak{M} : \mathbb{K}\mathbf{v} \to \mathbb{K}$ che manda la base $\mathbf{v}$ di $\mathbb{K}\mathbf{v}$ in 1 (cioè $\mathfrak{M}(t\mathbf{v}) = t$).]

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che

$$\mathbb{K}\mathbf{v} = \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbb{K}\}.$$

Se $\mathbf{v} \neq 0$ allora è linearmente indipendente e dunque è una base di $\mathbb{K}\mathbf{v}$. Per la proposizione 5.1 esiste una ed una sola funzione lineare $\mathfrak{M} : \mathbb{K}\mathbf{v} \to \mathbb{K}$ tale che $\mathfrak{M}(\mathbf{v}) = 1$. Esplicitamente, $\mathfrak{M}(t\mathbf{v}) = t$. Dall'esercizio 30 sappiamo che $\mathfrak{M}$ si estende a una forma $\bar{\mathfrak{M}} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$. Dal momento che $\bar{\mathfrak{M}}$ è un'estensione di $\mathfrak{M}$, abbiamo

$$\bar{\mathfrak{M}}(\mathbf{v}) = \mathfrak{M}(\mathbf{v}) = 1 \neq 0.$$

Dunque se tutte le forme lineari sono nulle su $\mathbf{v}$, non può essere $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

32 Dato un vettore $\mathbf{v}$ in uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, mostrare che la funzione $\mathbf{v}^{**} : \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$ definita da

$$\mathbf{v}^{**}(\beta) = \beta(\mathbf{v})$$

è una forma lineare su $\mathbf{V}^*$, quindi un elemento di $\mathbf{V}^{**}$. Mostrare che la funzione $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}$ che a $\mathbf{v}$ associa $\mathbf{v}^{**}$ è lineare, e che è un isomorfismo se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita (questa ipotesi è necessaria).

Soluzione. Proviamo che $\mathbf{v}^{**}$ è lineare. Se $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{V}^*$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, allora

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{**}(t_1\beta_1 + t_2\beta_2) &= (t_1\beta_1 + t_2\beta_2)(\mathbf{v}) \\ &= t_1\beta_1(\mathbf{v}) + t_2\beta_2(\mathbf{v}) \\ &= t_1\mathbf{v}^{**}(\beta_1) + t_2\mathbf{v}^{**}(\beta_2).\end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{v}^{**} \in \mathbf{V}^{**}$ e risulta definita una funzione $(\_)^{**} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}$. Questa funzione è lineare: infatti, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ e $\beta \in \mathbf{V}^*$, abbiamo

$$\begin{aligned}(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2)^{**}(\beta) &= \beta(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) \\ &= t_1\beta(\mathbf{v}_1) + t_2\beta(\mathbf{v}_2) \\ &= t_1\mathbf{v}_1^{**}(\beta) + t_2\mathbf{v}_2^{**}(\beta) \\ &= (t_1\mathbf{v}_1^{**} + t_2\mathbf{v}_2^{**})(\beta).\end{aligned}$$

L'uguaglianza vale per tutte le $\beta \in \mathbf{V}^*$; dunque

$$(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2)^{**} = t_1\mathbf{v}_1^{**} + t_2\mathbf{v}_2^{**}$$

e la funzione $(\_)^{**}$ è lineare. Proviamo che $(\_)^{**}$ è iniettiva. Se $\mathbf{v}^{**} = 0$ allora per ogni $\beta \in \mathbf{V}^*$ abbiamo $0 = \mathbf{v}^{**}(\beta) = \beta(\mathbf{v})$; dall'esercizio 31 otteniamo $\mathbf{v} = 0$. Resta da provare che $(\_)^{**}$ è suriettiva quando $\dim \mathbf{V} = n$ è finita. Dall'esercizio 29 sappiamo che $\dim \mathbf{V}^{**} = \dim \mathbf{V}^* = \dim \mathbf{V} = n$. Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\mathcal{B}^{**}$ è linearmente indipendente in $\mathbf{V}^{**}$ perché $(\_)^{**}$ è iniettiva. Ma poiché $\#(\mathcal{B}^{**}) = n = \dim \mathbf{V}^{**}$, $\mathcal{B}^{**}$ deve essere una base e questo implica che $(\_)^{**}$ è un isomorfismo per l'esercizio 16.

33 Se $\mathbf{H}$ è un sottospazio di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, mostrare che

$$\mathbf{H}^{\perp} = \{\beta \in \mathbf{V}^* : \ \beta(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{H}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{V}^*$; se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, mostrare che $\dim \mathbf{H}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{H}$ e dedurre che $(\mathbf{H}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{H}$ (se si identifica $\mathbf{V}^{**}$ con $\mathbf{V}$ mediante l'isomorfismo dell'esercizio precedente). (Suggerimento: la versione in coordinate di questo esercizio è la proposizione 9.1 del capitolo 4.)

Soluzione. Proviamo che $\mathbf{H}^\perp$ è un sottospazio di $\mathbf{V}^*$. Anzitutto la forma nulla 0 si annulla su ogni vettore di $\mathbf{V}$ e in particolare su quelli di $\mathbf{H}$; dunque $0 \in \mathbf{H}^\perp$. Se $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{H}^\perp$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, allora

$$(\beta_1 + \beta_2)(\mathbf{v}) = \beta_1(\mathbf{v}) + \beta_2(\mathbf{v}) = 0$$

e dunque $\beta_1 + \beta_2 \in \mathbf{H}^\perp$. Infine se $\beta \in \mathbf{H}^\perp$ e $t \in \mathbb{K}$, allora per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ abbiamo

$$(t\beta)(\mathbf{v}) = t\beta(\mathbf{v}) = t0 = 0$$

e dunque $t\beta \in \mathbf{H}^\perp$. Quindi $\mathbf{H}^\perp$ è un sottospazio di $\mathbf{V}^*$.

Sia ora $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ una base di $\mathbf{H}$. Estendiamo $\mathcal{B}$ a una base

$$\bar{\mathcal{B}} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n\}$$

di $\mathbf{V}$ e consideriamo la base duale

$$\bar{\mathcal{B}}^* = \{\beta_1, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n\}$$

di $\mathbf{V}^*$. Proveremo che $\mathcal{K} = \{\beta_{m+1}, \dots, \beta_n\}$ è una base di $\mathbf{H}^\perp$. Certamente $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{H}^\perp$, perché gli elementi di $\mathcal{K}$ si annullano su $\mathcal{B}$ e quindi su tutto $\mathbf{H}$. È pure chiaro come $\mathcal{K}$ sia indipendente, essendo un sottoinsieme della base $\bar{\mathcal{B}}^*$. Resta da provare che $\mathcal{H}$ genera $\mathbf{H}^\perp$. Supponiamo che $\beta \in \mathbf{H}^\perp$ e che sia

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k.$$

Se $1 \leq h \leq m$, allora $\mathbf{b}_h \in \mathbf{H}$ e dunque abbiamo

$$0 = \beta(\mathbf{b}_h) = \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k(\mathbf{b}_h) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{hk} = a_h.$$

Quindi

$$\beta = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \beta_k$$

e questo prova che $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ e dunque che $\mathcal{K}$ è una base di $\mathbf{H}^\perp$. In particolare,

$$\dim \mathbf{H}^\perp = n - m = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{H}.$$

Consideriamo ora l'isomorfismo $(\_)^{**} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}$ e proviamo che se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, allora $\mathbf{v}^{**} \in (\mathbf{H}^\perp)^\perp$. Infatti se $\beta \in \mathbf{H}^\perp$, allora

$$\mathbf{v}^{**}(\beta) = \beta(\mathbf{v}) = 0.$$

Ne consegue che $(\_)^{**}$ si restringe a una funzione lineare $\mathbf{H} \to (\mathbf{H}^\perp)^\perp$; questa funzione è iniettiva perché restrizione dell'isomorfismo $(\_)^{**}$. Per dimostrare che la restrizione è un isomorfismo basta allora provare che il suo dominio e codominio hanno la stessa dimensione. Infatti, dalla parte precedente dell'esercizio, abbiamo

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbf{H}^\perp)^\perp &= \dim \mathbf{V}^* - \dim \mathbf{H}^\perp \\
&= \dim \mathbf{V} - (\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{H}) \\
&= \mathit{dim}\, \boldsymbol{H}.
\end{aligned}$$

34 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si dice che una funzione lineare $\mathfrak{M} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è un'inversa sinistra (rispettivamente destra) di $\mathfrak{L}$ se $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L} = \mathcal{I}_{\mathbf{V}}$ (rispettivamente $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M} = \mathcal{I}_{\mathbf{W}}$). Mostrare che $\mathfrak{L}$ ha un'inversa sinistra se e solo se è iniettiva, e ha un'inversa destra se e solo se è suriettiva. (Suggerimento: se $\mathfrak{L}$ è iniettiva, $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ è invertibile, per cui esiste $\mathfrak{L}^{-1} : \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \to \mathbf{V}$; per ottenere un'inversa sinistra estendere, usando un esercizio precedente, $\mathfrak{L}^{-1}$ a una funzione lineare $\mathbf{W} \to \mathbf{V}$; si noti che l'inversa sinistra non è unica se $\dim(\mathbf{W}) > \dim(\mathbf{V})$; se $\mathfrak{L}$ è suriettiva, si fissi una base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ di $\mathbf{W}$ e per ogni $k = 1, \ldots, m$ si scelga $\mathbf{v}_k$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{b}_k$; si definisca $\mathcal{M} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ come la funzione lineare tale che $\mathfrak{M}(\mathbf{b}_k) = \mathbf{v}_k$ per ogni k.)

Soluzione. Supponiamo che $\mathfrak{L}$ ammetta un'inversa sinistra $\mathfrak{M}$. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) &\Rightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && \text{(definizione di nucleo)}\\
&\Rightarrow \mathfrak{M}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathbf{0} && \text{(linearità di } \mathfrak{M})\\
&\Rightarrow (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && \text{(definizione di composizione)}\\
&\Rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && (\mathfrak{M} \text{ è un'inversa sinistra di } \mathfrak{L})\\
&\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} && \text{(definizione di identità)}
\end{aligned}$$

e questo prova che $\mathfrak{L}$ è iniettiva. Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{L}$ sia iniettiva. Allora $\mathfrak{L}$, pensata come funzione lineare $\mathbf{V} \to \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ è anche suriettiva, dunque è un isomorfismo e ammette una funzione lineare inversa $\mathfrak{L}^{-1} : \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \to \mathbf{V}$. Utilizzando l'esercizio 30 possiamo estendere $\mathfrak{L}^{-1}$ a una funzione lineare $\mathfrak{M} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$. Proviamo che $\mathfrak{M}$ è un'inversa sinistra di $\mathfrak{L}$. Infatti, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) &= \mathfrak{M}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) && \text{(definizione di composizione)}\\
&= \mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) && (\mathfrak{M} \text{ coincide con } \mathfrak{L}^{-1} \text{ su } \mathrm{Im}(\mathfrak{L}))\\
&= (\mathfrak{L}^{-1} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) && \text{(definizione di composizione)}\\
&= \mathbf{v} && \text{(definizione di inversa).}
\end{aligned}$$

Dal momento che l'uguaglianza vale per tutti i vettori $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, abbiamo $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L} = \mathcal{I}$.

Supponiamo ora che $\mathfrak{L}$ ammetta un'inversa destra $\mathfrak{M}$. Allora, dato un vettore $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ qualunque, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathcal{I}(\mathbf{w}) && \text{(definizione di identità)}\\
&= (\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M})(\mathbf{w}) && (\mathfrak{M} \text{ è un'inversa destra di } \mathfrak{L})\\
&= \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathbf{w})) && \text{(definizione di composizione).}
\end{aligned}$$

Questo prova che $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ e dunque che $\mathfrak{L}$ è suriettiva. Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{L}$ sia suriettiva. Scegliamo una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ di $\mathbf{W}$ e, per ogni vettore $\mathbf{b}_i$, un vettore $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{b}_i$. Per la proposizione 5.1 esiste una ed una sola funzione lineare $\mathfrak{M} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ tale che $\mathfrak{M}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{v}_i$. Proviamo che $\mathfrak{M}$ è un'inversa destra di $\mathfrak{L}$. Infatti abbiamo, per ogni $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}$ che

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M})(\mathbf{b}_i) &= \mathfrak{L}(\mathfrak{M}(\mathbf{b}_i)) && \text{(definizione di composizione)}\\
&= \mathfrak{L}(\mathbf{v}_i) && \text{(definizione di } \mathfrak{M})\\
&= \mathbf{b}_i && \text{(scelta dei vettori } \mathbf{v}_i)\\
&= \mathcal{I}(\mathbf{b}_i) && \text{(definizione di identità).}
\end{aligned}$$

Questo prova che le funzioni lineari $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M}$ e $\mathcal{I}$ coincidono su una base di $\mathbf{W}$ e dunque, sempre per la proposizione 5.1, $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M} = \mathcal{I}$.

35 Se $\mathbf{V}$ ha dimensione n, la funzione

$$\mathcal{G} : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}) \to \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n, n)$$

che a un endomorfismo associa la matrice che lo rappresenta (rispetto a una base fissata) è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre (questo significa che $\mathcal{G}$ rispetta somma, prodotto per scalare, e prodotto, ed è iniettiva e suriettiva).

Soluzione. La funzione $\mathcal{G}$ è la composizione di due funzioni: la funzione $\mathcal{G}_1$ che associa a un endomorfismo $\mathfrak{L}$ di $\mathbf{V}$ la sua espressione in coordinate, indotta dalla scelta di una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$; e la funzione $\mathcal{G}_2$ che associa a un endomorfismo di $\mathbb{K}^n$ la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}) \arrow[rr, "\mathcal{G}"] \arrow[dr, "\mathcal{G}_1"'] & & \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n, n) \\
& \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) \arrow[ur, "\mathcal{G}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Esaminiamo anzitutto la funzione $\mathcal{G}_2$. Abbiamo visto nell'esercizio 13 che la funzione

$$\mathcal{F} : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n, n) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$$

che associa alla matrice $\mathbf{A}$ la funzione lineare $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ è lineare. Il teorema 5.2 di rappresentazione dice che ogni funzione lineare proviene da un'unica matrice, dopo che è stata fissata la base, e questo vale quanto dire che $\mathcal{F}$ è biettiva e dunque un isomorfismo di spazi vettoriali. In aggiunta, $\mathcal{F}$ preserva il prodotto. Infatti

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{AB})(\mathbf{x}) &= \mathfrak{L}_{\mathbf{AB}}(\mathbf{x}) \\
&= (\mathbf{AB})\mathbf{x} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{L}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})) \\
&= (\mathfrak{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{B}})(\mathbf{x}) \\
&= (\mathcal{F}(\mathbf{A}) \circ \mathcal{F}(\mathbf{B}))(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Dal momento che l'uguaglianza vale per tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbf{AB}) = \mathcal{F}(\mathbf{A}) \circ \mathcal{F}(\mathbf{B})$$

e questo mostra che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo di algebre. La funzione $\mathcal{G}_2$ è, per definizione, la funzione inversa di $\mathcal{F}$, dunque è essa stessa un isomorfismo di algebre.

Per esaminare $\mathcal{G}_1$, osserviamo che se $\mathfrak{L}$ è una funzione lineare e $\mathbf{x}$ è l'isomorfismo delle coordinate indotto da una base fissata $\mathcal{B}$, che associa al vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ il vettore $\mathbf{x}(\mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n$ delle sue coordinate,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{V} & \xrightarrow{\mathfrak{L}} & \mathbf{V} \\
{\scriptstyle \mathbf{x}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{x}} \\
\mathbb{K}^n & \dashrightarrow & \mathbb{K}^n
\end{array}$$

allora l'espressione in coordinate di $\mathfrak{L}$ è la funzione lineare

$$\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}) = \mathbf{x} \circ \mathfrak{L} \circ \mathbf{x}^{-1}.$$

Dimostriamo anzitutto che $\mathcal{G}_1$ è lineare. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t_1\mathfrak{L}_1 + t_2\mathfrak{L}_2)(\mathbf{z}) &= (\mathbf{x} \circ (t_1\mathfrak{L}_1 + t_2\mathfrak{L}_2) \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{z}) \\
&= t_1(\mathbf{x} \circ \mathfrak{L}_1 \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{z}) + t_2(\mathbf{x} \circ \mathfrak{L}_1 \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{z}) \\
&= t_1\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_1)(\mathbf{z}) + t_2\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_2)(\mathbf{z}) \\
&= (t_1\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_1) + t_2\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_2))(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Proviamo che $\mathcal{G}_1$ preserva la composizione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_1) \circ \mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_2) &= \mathbf{x} \circ \mathfrak{L}_1 \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} \circ \mathfrak{L}_2 \circ \mathbf{x}^{-1} \\
&= \mathbf{x} \circ \mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2 \circ \mathbf{x}^{-1} \\
&= \mathcal{G}_1(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)
\end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{G}_1$ è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre. Resta da vedere che $\mathcal{G}_1$ è biettiva. Supponiamo che $\mathfrak{L}' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sia una funzione lineare. Allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}' &\Leftrightarrow \mathbf{x} \circ \mathfrak{L} \circ \mathbf{x}^{-1} = \mathfrak{L}' \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{L} = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathfrak{L}' \circ \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Questo prova che ogni $\mathfrak{L}'$ ha un'unica preimmagine; dunque $\mathcal{G}_1$ è biettiva e dunque un isomorfismo di algebre. Infine $\mathcal{G}$, essendo composizione di isomorfismi di algebre, è pure un isomorfismo di algebre.

5. IL TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO

36 La traccia $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ di una matrice quadrata $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ è un'applicazione lineare $\operatorname{tr} : \mathrm{M}_{\mathbb{K}}(n,n) \to \mathbb{K}$. Determinarne il rango e la nullità. (Suggerimento: il rango è 1). Determinare anche una base del nucleo (che è l'insieme delle matrici a traccia nulla.)

Soluzione. La dimostrazione che la traccia è una funzione lineare è stata data nell'esercizio 3. Proviamo che tr è suriettiva. Dato $a \in \mathbb{K}$, sia $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ la matrice che ha $a_{11} = a$ e tutti gli elementi rimanenti nulli. Allora

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} = a.$$

Dunque $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{K}$ e $r(\mathrm{tr}) = \dim \mathbb{K} = 1$. Dal teorema di nullità più rango otteniamo

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \dim \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,n) - \dim \mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1.$$

Poiché $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,n) : \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$, il nucleo è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare dato dall'unica equazione

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

nelle n^2 indeterminate a_{ij}. Se utilizziamo a_{11} come unica variabile dipendente, abbiamo che tutti i rimanenti coefficienti della matrice sono variabili libere, mentre

$$a_{11} = -\sum_{i=2}^{n} a_{ii}.$$

Se $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_{ij} : 1 \le i,j \le n\}$ è la base canonica di $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,n)$, allora le matrici del nucleo sono della forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= a_{11}\mathbf{E}_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= -\sum_{i=2}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}\mathbf{E}_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} \\
&= \sum_{i=2}^{n} a_{ii}(\mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{11}) + \sum_{i\neq j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}
\end{aligned}$$

e dunque $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ è generato dalle $n^2 - 1$ matrici

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{11} : 2 \le i \le n\} \cup \{\mathbf{E}_{ij} : i \neq j\}.$$

Poiché $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1$, $\mathcal{B}$ deve essere una base del nucleo.

37 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (rispettivamente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$) un'applicazione iniettiva. Mostrare che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ è un piano (rispettivamente una retta) per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Supponiamo che $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sia iniettiva. Allora, per il corollario 6.4, $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Dalla proposizione 9.1 del capitolo 4 sappiamo allora che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ è definito da $3 - 2 = 1$ equazione lineare omogenea in 3 indeterminate e quindi della forma

$$ax + by + cz = 0$$

dove a, b e c non sono tutti nulli e questa è l'equazione di un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine.

Se $\mathfrak{L} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva, allora, sempre per la proposizione 9.1 del capitolo 4, $\dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = 1$. Se $\operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$, allora $\operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$. La formula $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ è l'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine con la direzione di $\mathbf{v}$.

38 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla formula

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ 2x + y + 3z \\ -x + 2y + z \end{bmatrix}.$$

1. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Trovare la dimensione dello spazio immagine $\operatorname{Im} \mathfrak{L}$.
3. Trovare una base di $\operatorname{Ker} \mathfrak{L}$.
4. Per quali valori di h il vettore $[2, 3, h]^{\mathrm{T}}$ appartiene all'immagine di $\mathfrak{L}$?
5. L'applicazione lineare $\mathfrak{L}$ è iniettiva o suriettiva?

Soluzione. 1. Abbiamo visto nell'esercizio 21 come la matrice $\mathbf{A}$ si ottenga mettendo nella j-esima colonna i coefficienti della j-esima indeterminata nelle equazioni di $\mathfrak{L}$. In modo equivalente, questo vale quanto dire che i coefficienti della i-esima riga di $\mathbf{A}$ sono i coefficienti delle indeterminate nella i-esima equazione. In ogni caso,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ricordiamo, dalla proposizione 3.8, che $\operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \operatorname{Col}(\mathbf{A})$; dunque $\dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \dim \operatorname{Col}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$. Dall'eliminazione gaussiana abbiamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque $\dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = 2$.

3. Ricordando che $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \operatorname{Ker}(\mathbf{A})$, per determinare $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L})$ basta risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ che in coordinate è

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Se usiamo z come variabile libera possiamo scrivere le soluzioni nella forma

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z. \end{cases}$$

Posto $z = 1$, troviamo che il vettore $[-1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$ è una base di $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L})$.

4. Il vettore $\mathbf{y} = [2, 3, h]^{\mathrm{T}}$ appartiene a $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$ se esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e dunque se il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ammette soluzione. Riducendo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & h \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{array}\right]$$

e il sistema ha soluzione se e soltanto se $h = -1$.

5. Si tratta di una applicazione immediata del corollario 6.4. Dal momento che

$$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

possiamo concludere che $\mathcal{L}$ non è né iniettiva, dal momento che la dimensione dell'immagine è minore di quella del dominio, né suriettiva, dal momento che la dimensione dell'immagine è minore di quella del codominio.

39 Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2, \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_3.$$

1. Scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathcal{L}$ rispetto alla base canonica.
2. Determinare la dimensione dell'immagine di $\mathcal{L}$ e una base del nucleo di $\mathcal{L}$.
3. Scrivere la matrice che rappresenta $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}$ rispetto alla base canonica.
4. Determinare la dimensione dell'immagine di $\mathcal{L}^2$ e una base del nucleo di $\mathcal{L}^2$.
5. Determinare la dimensione dell'immagine di $\mathcal{L}^n$ e una base del nucleo di $\mathcal{L}^n$, per ogni $n \geq 3$.

Soluzione. 1. Per determinare $\mathbf{A}$ basta scrivere nella i-esima colonna i coefficienti di $\mathcal{L}(\mathbf{e}_i)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Ricordiamo che $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}) = r(\mathbf{A})$. La matrice $\mathbf{A}$ è già ridotta a scala e $r(\mathbf{A}) = 3$. Per determinare una base di $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$ occorre risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Tuttavia, in questo caso particolare, basta osservare che il teorema di nullità più rango prevede che

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}) = 4 - 3 = 1.$$

La definizione di $\mathcal{L}$ mostra che $\mathbf{e}_2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L})$. Dal momento che $\mathbf{e}_2$ è indipendente, possiamo concludere che $\{\mathbf{e}_2\}$ è una base di $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$.

3. Sappiamo dall'esercizio 35 che la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}^2$ è

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Come nel punto 2, la matrice $\mathbf{A}^2$ è a scala e dunque otteniamo immediatamente

$$\dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}^2) = r(\mathbf{A}^2) = 2.$$

Sempre dalla matrice si vede immediatamente che, essendo nulle la seconda e la terza colonna, deve essere $\mathfrak{L}^2(\mathbf{e}_2) = \mathfrak{L}^2(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$. Dal momento che $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono indipendenti e poiché

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathfrak{L}^2) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}^2) = 4 - 2 = 2$$

otteniamo subito che $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una base di $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}^2)$.

5. Procedendo come per il punto precedente, abbiamo che la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}^n$ è $\mathbf{A}^n$. Ora

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{11}.$$

Ma ora è facile provare per induzione che $\mathbf{A}^n = \mathbf{E}_{11}$ per tutti gli $n \geq 3$: infatti se questa uguaglianza vale per un certo $n \geq 3$, allora

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} = \mathbf{E}_{11}\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}_{11}.$$

La matrice $\mathbf{E}_{11}$ è ridotta a scala e ha rango 1, dunque $\dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}^n) = 1$ per tutti gli $n \geq 3$. Il fatto che la seconda, terza e quarta colonna di $\mathbf{E}_{11}$ siano nulle mostra che $\mathfrak{L}^n(\mathbf{e}_2) = \mathfrak{L}^n(\mathbf{e}_3) = \mathfrak{L}^n(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$ per tutti gli $n \geq 3$. Dal momento che $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$ sono indipendenti e poiché

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathfrak{L}^n) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im}(\mathfrak{L}^n) = 4 - 1 = 3$$

possiamo concludere che $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base di $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}^n)$ per tutti gli $n \geq 3$.

40 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare suriettiva. Mostrare che per ogni sottospazio $\mathbf{Z}$ di $\mathbf{W}$ la controimmagine:

$$\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \in \mathbf{Z}\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{V}$ di dimensione $\dim \mathbf{Z} + \dim \operatorname{Ker}(\mathfrak{L})$. Come va modificata questa formula se $\mathfrak{L}$ non è suriettiva e $\mathbf{Z}$ non è contenuto in $\operatorname{Im}(\mathfrak{L})$?

Soluzione. Proviamo che $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$. Anzitutto $\mathfrak{L}(\mathbf{0}_\mathbf{V}) = \mathbf{0}_\mathbf{W} \in \mathbf{Z}$ perché $\mathbf{Z}$ è un sottospazio; dunque $\mathbf{0}_\mathbf{V} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$. Supponiamo poi che $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ e $t \in \mathbb{K}$; allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) &\Rightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \in \mathbf{Z} && \text{(definizione di } \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})\text{)} \\
&\Rightarrow t\mathfrak{L}(\mathbf{v}) \in \mathbf{Z} && (\mathbf{Z} \text{ è un sottospazio}) \\
&\Rightarrow \mathfrak{L}(t\mathbf{v}) \in \mathbf{Z} && \text{(linearità di } \mathfrak{L}\text{)} \\
&\Rightarrow t\mathbf{v} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) && \text{(definizione di } \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})\text{)}
\end{aligned}$$

dunque $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare. Infine

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) &\Rightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{v}_1), \mathfrak{L}(\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Z} && \text{(definizione di } \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})) \\
&\Rightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) + \mathfrak{L}(\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Z} && (\mathbf{Z} \text{ è un sottospazio}) \\
&\Rightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in \mathbf{Z} && \text{(linearità di } \mathfrak{L}) \\
&\Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) && \text{(definizione di } \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}))
\end{aligned}$$

e dunque $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ è chiuso rispetto alla somma di vettori. Questo conclude la dimostrazione che $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$.

La funzione lineare $\mathfrak{L}$ si restringe a una funzione lineare $\mathfrak{L}' : \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ definita dalla formula $\mathfrak{L}'(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$. Si osservi che

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\mathfrak{L}') = \mathfrak{L}'(\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})) = \mathbf{Z} \cap \mathrm{Im}(\mathfrak{L}), \\
&\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}') = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \mathfrak{L}^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \cap \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \mathfrak{L}^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}).
\end{aligned}$$

Applicando il teorema di nullità più rango a $\mathfrak{L}'$ troviamo

$$\dim \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}') + \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{L}') = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) + \dim(\mathbf{Z} \cap \mathrm{Im}(\mathfrak{L}))$$

e questa è la formula generale per la dimensione di $\mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z})$. Ma se $\mathfrak{L}$ è suriettiva allora $\mathbf{Z} \cap \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathbf{Z} \cap \mathbf{W} = \mathbf{Z}$ e la formula precedente diventa

$$\dim \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{Z}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) + \dim \mathbf{Z}.$$

41 Siano $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e $\mathfrak{M} : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Mostrare che

$$r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \leq r(\mathfrak{L}), \quad r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \leq r(\mathfrak{M}).$$

In particolare, $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \leq \min\{\dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{W}, \dim \mathbf{Z}\}$. Inoltre, se $\mathfrak{M}$ è iniettiva, allora $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = r(\mathfrak{L})$ e se $\mathfrak{L}$ è suriettiva, allora $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = r(\mathfrak{M})$. Dedurne che, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{S}$ sono due matrici quadrate di ordine n e $\mathbf{S}$ è invertibile, allora il rango di $\mathbf{A}$ è uguale al rango di $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$. Infatti se $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, allora

$$(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathfrak{M}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

e dunque $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$. Di conseguenza $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \leq \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$ e dal teorema di nullità più rango otteniamo

$$\begin{aligned}
r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) &= \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \\
&= \dim \mathbf{V} - \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \\
&\leq \dim \mathbf{V} - \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \\
&= \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \\
&= r(\mathfrak{L}).
\end{aligned}$$

Per ottenere la seconda disuguaglianza basta osservare che $\mathrm{Im}(\mathfrak{M}\circ\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{M})$. Infatti se $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$, deve esistere $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathbf{z}$. Posto $\mathbf{w} = \mathfrak{L}(\mathbf{v})$, abbiamo

$$\mathfrak{M}(\mathbf{w}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathbf{z}$$

e dunque $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{M})$. Di conseguenza, $\dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M}\circ\mathfrak{L}) \leq \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M})$ e, semplicemente dalla definizione, abbiamo

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) &= \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \\ &\leq \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M}) \\ &= r(\mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Dalla proposizione 6.2 abbiamo che

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{L}) &\leq \min(\dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{W}) \\ r(\mathfrak{M}) &\leq \min(\dim \mathbf{W}, \dim \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Combinando queste due disuguaglianze con quelle appena dimostrate troviamo che

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) &\leq \min(r(\mathfrak{L}), r(\mathfrak{M})) \\ &\leq \min(\dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{W}, \dim \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Se $\mathfrak{M}$ è iniettiva, allora $\mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) &\iff (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathfrak{M}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}). \end{aligned}$$

Ne consegue che $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$ e se sostituiamo questa uguaglianza al posto della corrispondente disuguaglianza nella dimostrazione della formula $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \leq r(\mathfrak{L})$, otteniamo subito l'uguaglianza $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = r(\mathfrak{L})$.

In modo simile, se $\mathfrak{L}$ è suriettiva, allora $\mathrm{Im}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{M}\circ\mathfrak{L})$. Infatti, se $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{M})$, allora esiste $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ tale che $\mathfrak{M}(\mathbf{w}) = \mathbf{z}$. Dal momento che $\mathfrak{L}$ è suriettiva, deve poi esistere $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ma allora $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})(\mathbf{v}) = \mathbf{z}$ e $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$. Dunque $\mathrm{Im}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$. L'inclusione opposta è stata dimostrata in generale sopra, dunque abbiamo che $\mathrm{Im}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L})$. Ne consegue che $\dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = \dim \mathrm{Im}(\mathfrak{M})$ e dunque $r(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) = r(\mathfrak{M})$.

Ricordiamo che se $\mathbf{M}$ è una matrice e $\mathfrak{L}_{\mathbf{M}}$ è la funzione lineare associata, allora $r(\mathbf{M}) = r(\mathfrak{L}_{\mathbf{M}})$. Inoltre $\mathbf{M}$ è invertibile se e soltanto se $\mathfrak{L}_{\mathbf{M}}$ è un isomorfismo e, in questo caso, $\mathfrak{L}_{\mathbf{M}}^{-1} = \mathfrak{L}_{\mathbf{M}^{-1}}$. Dunque, dalle formule appena dimostrate, abbiamo:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) &= r(\mathfrak{L}_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}) \\ &= r(\mathfrak{L}_{\mathbf{S}}^{-1} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{S}}) \\ &= r(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{S}}) && (\mathfrak{L}_{\mathbf{S}}^{-1} \text{ è un isomorfismo}) \\ &= r(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) && (\mathfrak{L}_{\mathbf{S}} \text{ è un isomorfismo}) \\ &= r(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

42 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione finita. Mostrare che

1. per ogni $k \geq 1$ vale l'inclusione $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^{k+1})$ ed esiste $N \geq 1$ tale che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^{k+1})$ per ogni $k \geq N$;
2. per ogni $k \geq 1$ vale l'inclusione $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k)$, ed esiste $N \geq 1$ tale che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^{k+1})$ per ogni $k \geq N$.

(Suggerimento: vi è un numero finito di possibilità per la dimensione di un sottospazio di $\mathbf{V}$.)

Soluzione. Abbiamo visto nella soluzione dell'esercizio 41 che date due funzioni lineari $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{M}$ come nel diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[rr, dashed, "\mathfrak{M}\circ\mathfrak{L}"] \arrow[dr, "\mathfrak{L}"'] & & \mathbf{Z} \\ & \mathbf{W} \arrow[ur, "\mathfrak{M}"'] & \end{tikzcd}$$

risulta sempre

$$\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}), \qquad \mathrm{Im}(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{M}).$$

In particolare, per ogni $k > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L}^k) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^{k+1}), \\ &\mathrm{Im}(\mathfrak{L}^{k+1}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k \circ \mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k). \end{aligned}$$

Dalla prima disuguaglianza otteniamo una successione debolmente crescente di sottospazi di $\mathbf{V}$

$$\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^2) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^3) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{V}.$$

Se poniamo $n_k = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k)$ e $n = \dim \mathbf{V}$, dall'inclusione dei sottospazi otteniamo una successione debolmente crescente di numeri naturali

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n.$$

Il fatto che tutti gli elementi della successione siano superiormente limitati da n implica che il numero di disuguaglianze strette nella successione è al massimo un numero finito e precisamente non si possono avere più di n disuguaglianze strette. In termini più formali, l'insieme

$$S = \{k > 1 : n_{k-1} < n_k\}$$

è finito. Dunque esiste finito $N = \max(S)$; nel caso in cui S sia vuoto, possiamo prendere $N = 1$. A partire dall'indice N non ci sono più disuguaglianze strette, dunque deve essere, per $k \geq N$, $n_k = n_{k+1}$. Per questi k, $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^{k+1})$ sono sottospazi della stessa dimensione, dunque $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^k) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^{k+1})$.

L'argomentazione per le immagini è simile. Infatti dall'inclusione $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k) \supseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^{k+1})$ valida per tutti i k si ottiene una successione debolmente decrescente di sottospazi

$$\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \supseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^2) \supseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^3) \supseteq \ldots \supseteq \{\mathbf{0}\}$$

da cui la successione debolmente decrescente delle dimensioni

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots \geq 0.$$

Anche in questo caso la successione può contenere al massimo n_1 disuguaglianze strette e dunque deve stabilizzarsi a partire da un certo indice N. A partire da questo indice si deve avere $n_k = n_{k+1}$ e quindi $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}^k) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^{k+1})$.

Per un risultato più preciso si veda la proposizione 6.6 del capitolo 7 nel testo a pagina 343.

43 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si dimostri il teorema di nullità più rango seguendo la seguente traccia. Si fissi una base $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ del nucleo di $\mathfrak{L}$, e la si estenda a una base

$$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_t\}$$

di $\mathbf{V}$. Si mostri che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{c}_t)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\,\mathfrak{L}$, quindi $r(\mathfrak{L}) = t = \dim \mathbf{V} - \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$. Questa dimostrazione è più semplice di quella presentata nel testo, ma non fornisce un metodo per ricavare basi di nucleo e immagine.

Soluzione. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\} \\ \overline{\mathcal{B}} &= \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_t\}. \end{aligned}$$

Dal momento che $\overline{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di $\mathbf{V}$, l'insieme

$$\{\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{b}_s), \mathfrak{L}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{c}_t)\}$$

è un insieme di generatori di $\mathfrak{L}(\mathbf{V}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$. Ma poiché $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, abbiamo $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$ per ogni indice i e dunque $\{\mathfrak{L}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{c}_t)\}$ è un insieme di generatori di $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})$. Resta da provare che $\{\mathfrak{L}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{c}_t)\}$ è indipendente. Infatti:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t} y_j \mathfrak{L}(\mathbf{c}_j) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathfrak{L}\left(\sum_{j=1}^{t} y_j \mathbf{c}_j\right) &= \mathbf{0} && \text{(linearità di } \mathfrak{L}) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{t} y_j \mathbf{c}_j &\in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) && \text{(definizione di } \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{t} y_j \mathbf{c}_j &= \sum_{i=1}^{s} x_i \mathbf{b}_i && (\mathcal{B} \text{ è una base di } \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} x_i \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{t} y_j \mathbf{c}_j &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow y_1 = \cdots = y_t &= 0 && (\overline{\mathcal{B}} \text{ è una base di } \mathbf{V}). \end{aligned}$$

44 Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ una base di $\mathbf{V}$ tale che $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ sia una base del nucleo come nell'esercizio precedente. Sia $\mathcal{C}$ una base di $\mathbf{W}$ i cui primi r vettori siano la base $\{\mathfrak{L}(\mathbf{c}_1), \ldots, \mathfrak{L}(\mathbf{c}_r)\}$ di $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})$. Si mostri che la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto a tali basi è la matrice a blocchi

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

dove $\mathbf{I}_r$ denota la matrice identità di ordine r; cioè $a_{ii} = 1$ per $i = 1, \ldots, r$ e gli altri coefficienti di $\mathbf{A}$ sono tutti nulli. Concludere che, a meno di un cambiamento di basi, due applicazioni lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso rango: in gergo matematico si dice che *il rango è l'unico invariante di un'applicazione lineare.*

Soluzione. Se $1 \leq i \leq r$, l'immagine dell'i-esimo vettore di $\mathcal{B}$ è l'i-esimo vettore di $\mathcal{C}$, dunque il suo vettore delle coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ è $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^n$, dove $n = \dim \mathbf{W}$. Se invece $i > r$, l'i-esimo vettore di $\mathcal{B}$ è $\mathbf{b}_{i-r}$. Questo vettore sta in $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$ e dunque la sua immagine è il vettore nullo, che ha come vettore delle coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ il vettore $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$. In conclusione, la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ si ottiene accostando i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ nelle prime r colonne, seguiti da s copie del vettore nullo. Questa matrice è esattamente la matrice $\mathbf{A}$.

La matrice $\mathbf{A}$ dipende solo dal rango di $\mathfrak{L}$. Quindi se $\mathfrak{M} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è un'altra funzione lineare di rango r, allora esistono basi $\mathcal{B}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathbf{W}$ tali che la matrice rappresentativa di $\mathfrak{M}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ è ancora $\mathbf{A}$.

45 **Matrice e rango dell'applicazione duale.** Sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. L'applicazione duale o trasposta di $\mathfrak{L}$ è la funzione $\mathfrak{L}^* : \mathbf{W}^* \to \mathbf{V}^*$ così definita: un elemento di $\mathbf{W}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{W}, \mathbb{K})$ è una forma lineare $\gamma : \mathbf{W} \to \mathbb{K}$; a γ l'applicazione $\mathfrak{L}^*$ associa la forma lineare $\mathfrak{L}^*(\gamma) : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ ottenuta componendo γ con $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L}^*(\gamma)(\mathbf{v}) = \gamma(\mathfrak{L}(\mathbf{v})).$$

Si supponga che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ abbiano dimensione finita e, fissate basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ rispettivamente, siano $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{C}^*$ le corrispondenti basi duali. Mostrare che

1. se $\mathbf{A}$ rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, allora la matrice trasposta $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ rappresenta $\mathfrak{L}^*$ rispetto a $\mathcal{C}^*$ e $\mathcal{B}^*$; in particolare, $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{L}^*$ hanno lo stesso rango;
2. vale l'uguaglianza
$$\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^*) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})^{\perp}.$$

Soluzione. 1. Sia $\mathbf{b}$ il vettore delle coordinate di γ rispetto a $\mathcal{C}^*$ e $\mathbf{x}$ il vettore delle coordinate di $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora il vettore delle coordinate di $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ rispetto a $\mathcal{C}$ è $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Dall'esercizio 29 risulta allora che

$$\mathfrak{L}^*(\gamma)(\mathbf{v}) = \gamma(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}.$$

Questo prova che $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ è il vettore delle coordinate di $\mathfrak{L}^*(\gamma)$ rispetto a $\mathcal{B}^*$ e quindi che $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ è la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}^*$ rispetto a $\mathcal{C}^*$ e $\mathcal{B}^*$.

2. Indichiamo con $\mathbf{a}_i$ la i-esima colonna di $\mathbf{A}$. Ricordando che l'immagine di $\mathfrak{L}$ è generata dai vettori le cui coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ sono le colonne di $\mathbf{A}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\gamma \in \mathrm{Im}(\mathfrak{L})^{\perp} &\iff \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_i = 0 \qquad \text{per tutti gli } i\\
&\iff \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = [0,\dots,0]\\
&\iff \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{0}\\
&\iff \gamma \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^*).
\end{aligned}$$

Dunque $\mathrm{Im}(\mathfrak{L})^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^*)$.

46 Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango r. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

1. Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette più di una soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ non ammette alcuna soluzione.
2. Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette infinite soluzioni, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette infinite soluzioni per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
3. Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ non ammette alcuna soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ ammette infinite soluzioni.
4. Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette esattamente una soluzione, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette esattamente una soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soluzione. 1. Vero. L'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ è la fibra di $\mathbf{b}_1$ in $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$. Dal momento che il sistema ha almeno una soluzione $\mathbf{x}_0$, questa fibra è della forma $\mathbf{x}_0 + \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$. L'ipotesi fatta che il sistema ammetta più di una soluzione implica che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ non è il sottospazio nullo e dunque $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) > 0$. Dal teorema di rango più nullità consegue allora che

$$\dim \mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}) < n.$$

Dunque $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$ e deve esistere almeno un vettore $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$. La fibra di $\mathbf{b}_2$ è allora vuota e il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ non ha soluzione.

2. Falso. Si prenda $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, la matrice nulla $m \times n$. Il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ha infinite soluzioni, ma per qualunque $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ non esiste alcuna soluzione. Più in generale, se prendiamo una matrice $\mathbf{A}$ per cui $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ non è né iniettiva né suriettiva, allora l'affermazione è falsa.

3. Vero. Basta argomentare come in 1. La fibra di $\mathbf{b}_1$ deve essere vuota, dunque $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ non è suriettiva. Per il teorema di rango più nullità non può essere iniettiva, il che significa che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ non è ridotto al sottospazio nullo. Ma allora la fibra di ogni vettore di $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ contiene infiniti vettori. Per concludere, basta osservare che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ non è vuota, perché contiene sicuramente $\mathbf{0}$, e dunque basta scegliere $\mathbf{b}_2$ in $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$.

4. Falso. L'affermazione implica che $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ è iniettiva, ma non necessariamente suriettiva. Se si prende una $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ che soddisfa queste due condizioni, allora ogni $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ ha un'unica preimmagine, ma ogni $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}})$ non ne ha nessuna. Per un esempio concreto, si prenda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Allora $\mathbf{e}_1$ ha un'unica preimmagine, ma $\mathbf{e}_2$ non ne ha alcuna.

6. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

47 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che manda ogni punto nella sua proiezione ortogonale sul piano $\mathbf{H} : x + y + z = 0$.

1. Dimostrare che $\mathfrak{L}$ è una funzione lineare e determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare la proiezione su $\mathbf{H}$ del piano $\mathbf{K} : y - z = 0$.

(Suggerimento: risolvere l'esercizio rispetto a una base che contiene un vettore normale ad $\mathbf{H}$ e una base di $\mathbf{H}$ e poi effettuare un cambiamento di base.)

Soluzione. La matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica è

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La proiezione di $\mathbf{K}$ è la retta generata dal vettore $[2 \ -1 \ -1]^{\mathrm{T}}$.

48 Dimostrare che le funzioni $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 : \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2,2) \to \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2,2)$ definite dalle formule

$$\mathfrak{L}_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}), \qquad \mathfrak{L}_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

sono lineari. Determinare le loro matrici rappresentative rispetto alla base canonica di $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2,2)$, i loro nuclei e le loro immagini.

49 Sia $\mathbb{K}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata x.

1. Per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $\mathbf{U}_k(a) \subseteq \mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi che ammettono uno zero di ordine almeno k in a. Si provi che i sottoinsiemi $\mathbf{U}_k(a)$ formano una catena strettamente discendente di sottospazi

$$\mathbb{K}[x] = \mathbf{U}_0(a) \supset \mathbf{U}_1(a) \supset \mathbf{U}_2(a) \supset \dots$$

2. Si dimostri che, per ogni $a \in \mathbb{K}$, la funzione $f_a : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ definita dalla formula $f_a(p(x)) = p(x - a)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali che induce un isomorfismo di sottospazi $\mathbf{U}_k(0) \to \mathbf{U}_k(a)$. Si costruisca, per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{K}$, un isomorfismo $\mathbf{U}_k(a) \to \mathbf{U}_k(b)$.

3. Si consideri la funzione $g : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ definita dalla formula $g(p(x)) = xp(x)$. Si dimostri che g è una funzione lineare iniettiva che induce un isomorfismo $\mathbf{U}_k(0) \to \mathbf{U}_{k+1}(0)$ per ogni k. Si dimostri che g^m induce un isomorfismo $\mathbf{U}_k(0) \to \mathbf{U}_{k+m}(0)$. Si spieghi come costruire un isomorfismo $\mathbf{U}_h(a) \to \mathbf{U}_k(b)$.

50 Si consideri il diagramma di spazi vettoriali e funzioni lineari su $\mathbb{K}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[rr, "\mathfrak{L}_3"] \arrow[dr, "\mathfrak{L}_1"'] & & \mathbf{W} \\ & \mathbf{V} \arrow[ur, "\mathfrak{L}_2"'] & \end{tikzcd}$$

e si supponga che il diagramma commuti, cioè che sia $\mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$.

1. Si dimostri che se $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ sono iniettive, allora anche $\mathfrak{L}_3$ è iniettiva. Viceversa, si dimostri poi che se $\mathfrak{L}_3$ è iniettiva, allora anche $\mathfrak{L}_1$ è iniettiva, ma si mostri con un esempio che $\mathfrak{L}_2$ può non esserlo.
2. Si dimostri che se $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ sono suriettive, allora anche $\mathfrak{L}_3$ è suriettiva. Viceversa, si dimostri poi che se $\mathfrak{L}_3$ è suriettiva, allora anche $\mathfrak{L}_2$ è suriettiva, ma si mostri con un esempio che $\mathfrak{L}_1$ può non esserlo.
3. Si dimostri che se due qualsiasi fra le tre funzioni $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ e $\mathfrak{L}_3$ sono isomorfismi, allora anche la terza lo è.

(Suggerimento: utilizzare i risultati dell'esercizio 34.)

51 Sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un insieme linearmente indipendente in $\mathbb{K}^n$. Dimostrare che

$$r\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\right) = m.$$

(Suggerimento: utilizzare l'esercizio 41.)

52 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di $\mathbf{V}$. Si dimostri che la funzione $\mathfrak{L} : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V}$ definita dalla formula

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$$

è lineare. Si dimostrino poi le affermazioni seguenti.

1. $\mathbf{S}$ è linearmente indipendente se e soltanto se $\mathfrak{L}$ è iniettiva.
2. $\mathbf{S}$ è un insieme di generatori se e soltanto se $\mathfrak{L}$ è suriettiva.
3. $\mathbf{S}$ è una base se e soltanto se $\mathfrak{L}$ è un isomorfismo.

53 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una funzione lineare. Si provi che le condizioni seguenti sono equivalenti.

1. $\mathfrak{L}$ è iniettiva.
2. $\mathfrak{L}$ è suriettiva.
3. $\mathfrak{L}$ è biettiva.

Si mostri con esempi che le equivalenze sono false quando $\mathbf{V}$ ha dimensione infinita.

6 Determinante

1. DETERMINANTE E MOSSE DI GAUSS

1 Calcolare il determinante delle seguenti matrici riducendole a forma triangolare mediante mosse di Gauss.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo $\mathbf{A}$ a forma triangolare alta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_3 - 3\mathrm{R}_1 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_3 \\ \mathrm{R}_2 \end{array}$$

Il prodotto degli elementi sulla diagonale principale è 25. Tuttavia nell'ultimo passo dell'algoritmo sono state scambiate due righe e il determinante ha cambiato segno. Dunque $\det(\mathbf{A}) = -25$. Se riduciamo $\mathbf{B}$ a forma triangolare alta troviamo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \mathrm{R}_2 \\ \mathrm{R}_1 \\ \\ \\ \end{array} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1 \\ \\ \mathrm{R}_4 - 3\mathrm{R}_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_3 \\ \mathrm{R}_2 \\ \\ \end{array} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{R}_3 + 3\mathrm{R}_2 \\ \mathrm{R}_4 + 4\mathrm{R}_2 \end{array} \xrightarrow{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{R}_4 - \frac{8}{7}\mathrm{R}_3 \end{array}$$

Il prodotto degli elementi sulla diagonale principale è -4 e sono stati effettuati due scambi, al primo e al terzo passo dell'algoritmo. Il determinante ha cambiato segno due volte e quindi $\det(\mathbf{B}) = -4$. Riduciamo $\mathbf{C}$ a forma triangolare alta.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4&0&0&1&1\\ 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 4&0&0&1&1\\ 0&2&1&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{R}_2\\ \mathrm{R}_1\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&-4&-8&1&-3\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&-2&0&0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_2-4\mathrm{R}_1\\ \\ \mathrm{R}_4-\mathrm{R}_1\\ \mathrm{R}_5-\mathrm{R}_1 \end{array} \qquad \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&-4&-8&1&-3\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&-2&0&0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{R}_3\\ \mathrm{R}_2\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&-6&3&-3\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&-2&0&0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{R}_3+2\mathrm{R}_2\\ \\ \\ \end{array} \qquad \xrightarrow{5} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&-6&3&-3\\ 0&0&-2&0&0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{R}_4\\ \mathrm{R}_3\\ \\ \end{array}$$

$$\xrightarrow{6} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{R}_4-3\mathrm{R}_3\\ \mathrm{R}_5-\mathrm{R}_3 \end{array} \qquad \xrightarrow{7} \begin{bmatrix} 1&1&2&0&1\\ 0&2&1&1&0\\ 0&0&-2&1&-1\\ 0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{R}_5\\ \mathrm{R}_4 \end{array}$$

Il prodotto degli elementi sulla diagonale principale è 0 e il numero di scambi è ininfluente: $\det(\mathbf{C}) = 0$.

2 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine n e t è uno scalare, allora $\det(t\mathbf{A}) = t^n \det(\mathbf{A})$. (Suggerimento: moltiplicando $\mathbf{A}$ per t si moltiplica ogni riga di $\mathbf{A}$ per t.) Se $\mathbf{A}$ ha ordine 3 e $\det(\mathbf{A}) = -2$, quanto vale $\det(3\mathbf{A})$?

Soluzione. Supponiamo che la matrice $\mathbf{A}$ venga ridotta a scala mediante una successione S di operazioni di scorrimento e di scambio delle righe.

$$\mathbf{A} \to \mathbf{U} = \begin{bmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

Se s è il numero di scambi che occorrono nella successione S, allora

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^s \det(\mathbf{U}) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

La stessa successione S applicata alla matrice $t\mathbf{A}$ produce la matrice $t\mathbf{U}$.

$$t\mathbf{A} \to t\mathbf{U} = \begin{bmatrix} tp_1 & * & \cdots & * \\ 0 & tp_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & tp_n \end{bmatrix}$$

Infatti, per quanto riguarda le operazioni di scorrimento, se $\mathrm{R}_i + c\mathrm{R}_j = \mathrm{R}_k$, allora $t\mathrm{R}_i + ct\mathrm{R}_j = t(\mathrm{R}_i + c\mathrm{R}_j) = t\mathrm{R}_k$. Il numero di scambi in S non è cambiato. Dunque

$$\begin{aligned}\det(t\mathbf{A}) &= (-1)^s \det(t\mathbf{U}) \\ &= (-1)^s \prod_{i=1}^{n} tp_i \\ &= t^n(-1)^s \prod_{i=1}^{n} p_i \\ &= t^n \det(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

In particolare, se $\mathbf{A}$ ha ordine 3 e $\det(\mathbf{A}) = -2$, abbiamo

$$\det(3\mathbf{A}) = 3^3 \det(\mathbf{A}) = 27 \cdot (-2) = -54.$$

3 Se $\mathbf{v}$ è un vettore di $\mathbb{K}^n$, il prodotto $\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $n \times n$ di rango ≤ 1 (esattamente 1 se $\mathbf{v} \neq 0$). Concludere che $\det(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) = 0$ per ogni $n > 1$. Più in generale, se $\mathbf{B}$ è una matrice $n \times p$ con $p < n$, mostrare che $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $n \times n$ di rango $\leq p$. Concludere che $\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = 0$. Verificare questa formula nel caso

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Se $\mathbf{v} = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$, allora

$$\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = [x_1\mathbf{v}|\cdots|x_n\mathbf{v}].$$

Le colonne di $\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ sono tutte multipli dell'unico vettore $\mathbf{v}$ e dunque sono linearmente dipendenti; dalla proposizione 2.3 consegue che $\det(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) = 0$.

Supponiamo ora che sia $\mathbf{B} = [\mathbf{v}_1|\cdots|\mathbf{v}_p]$ dove tutti i $\mathbf{v}_i$ sono vettori di $\mathbb{K}^n$. Allora la j-esima colonna di $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ è

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{p} b_{ij}\mathbf{v}_i.$$

Ma allora tutti i $\mathbf{w}_i$ appartengono a $\mathrm{Col}(\mathbf{B})$, che ha dimensione al massimo p e dunque

$$r(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \dim \mathrm{Col}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) \leq \dim \mathrm{Col}(\mathbf{B}) \leq p.$$

In ogni caso, $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ è una matrice $n \times n$ che non ha mai rango massimo e dunque $\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = 0$. Nel caso particolare della matrice $\mathbf{B}$ assegnata, troviamo

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 13 & 17 \end{bmatrix}.$$

Se calcoliamo il suo determinante troviamo

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 13 & 17 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^2} \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 35 & 50 & 65 \\ 45 & 65 & 85 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^2} \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

La prima uguaglianza segue dal fatto che $\det(\mathbf{B}) = t\det(\mathbf{A})$ se $\mathbf{B}$ è ottenuta moltiplicando una riga di $\mathbf{A}$ per uno scalare t (questo si dimostra come nell'esercizio 2, oppure segue dalla proposizione 4.3 a pagina 274 del testo). Il determinante dell'ultima matrice a destra è nullo perché la terza riga è uguale alla seconda moltiplicata per 2.

2. DETERMINANTE DI MATRICI DI PERMUTAZIONE

4 Stabilire se le seguenti permutazioni sono pari o dispari:

$$\sigma_1 = (5,4,3,2,1), \quad \sigma_2 = (2,1,4,3,5), \quad \sigma_3 = (2,3,1,5,4), \quad \sigma_4 = (1,2,3,5,4).$$

Scrivere le corrispondenti matrici di permutazione (sono matrici 5×5) e calcolarne il determinante.

Soluzione. Per determinare la parità delle permutazioni, le fattorizziamo come prodotto di scambi. Troviamo

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (5,4,3,2,1) = [2,4][1,5],\\
\sigma_2 &= (2,1,4,3,5) = [3,4][1,2],\\
\sigma_3 &= (2,3,1,5,4) = [4,5][1,3][1,2],\\
\sigma_4 &= (1,2,3,5,4) = [4,5].
\end{aligned}$$

Le permutazioni σ_3 e σ_4 si scrivono come prodotto di un numero dispari di scambi, dunque sono dispari, mentre σ_1 e σ_2 sono pari. Per scrivere le matrici associate alle permutazioni basta ricordare, come spiegato a pagina 269 del testo, che la i-esima riga di $\mathbf{P}_\sigma$ è la $\sigma(i)$-esima riga della matrice identità. Troviamo dunque

$$\mathbf{P}_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di queste matrici dipende soltanto dalla parità della permutazione corrispondente. Dalla proposizione 3.3 e dalla definizione 3.2 segue

$$\det(\mathbf{P}_{\sigma_1}) = \det(\mathbf{P}_{\sigma_2}) = 1, \qquad \det(\mathbf{P}_{\sigma_3}) = \det(\mathbf{P}_{\sigma_4}) = -1.$$

5 Calcolare il determinante della matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Scrivere la permutazione σ tale che $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$ e dire se σ è pari o dispari.

Soluzione. Se $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$ allora $\sigma(i)$ è l'unico elemento non nullo della i-esima riga di $\mathbf{P}$; dunque $\sigma = (4, 2, 3, 1) = [1, 4]$. Come si vede σ è uno scambio; dunque è dispari e $\det(\mathbf{P}_\sigma) = -1$.

6. Mostrare che, se $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ è una fattorizzazione $\mathbf{LU}$ (rispettivamente $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$ con $\mathbf{P}$ matrice di permutazione), allora $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{U})$ (rispettivamente $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$).

Soluzione. Ricordiamo, dalla proposizione 7.1 del capitolo 3, che se $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ è la fattorizzazione $\mathbf{LU}$ di $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{L}$ è triangolare bassa della forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{U}$ è la riduzione a scala di $\mathbf{A}$ ottenuta solo con operazioni di scorrimento. In particolare, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{U})$. D'altra parte è evidente che la riduzione a scala di $\mathbf{L}$ è la matrice identità, che si ottiene pure utilizzando solo operazioni di scorrimento. Dunque

$$\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{I})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}).$$

Nel caso generale, sappiamo dalla proposizione che precede il teorema 7.2 del capitolo 3 che, se $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sigma$ è una matrice di permutazione, allora, per qualunque matrice $\mathbf{B}$, la matrice $\mathbf{PB}$ si ottiene da $\mathbf{B}$ permutando le righe secondo quanto prescritto da σ e dunque

$$\det(\mathbf{PB}) = (-1)^\sigma \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{B}).$$

Se combiniamo questo risultato con quello ottenuto nella prima parte dell'esercizio, troviamo

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PLU}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U}).$$

7. Mostrare che ogni permutazione σ ha un'inversa σ^{-1} definita dalla proprietà

$$\sigma(i) = j \quad \Longleftrightarrow \quad i = \sigma^{-1}(j).$$

Equivalentemente, l'inversa è l'unica permutazione σ^{-1} tale che il prodotto $\sigma^{-1}\sigma$ sia la permutazione identità. Mostrare che

1. se ϵ è uno scambio, $\epsilon^{-1} = \epsilon$;
2. σ^{-1} è pari se e solo se σ è pari (suggerimento: se σ è scritta come prodotto di scambi, σ^{-1} è il prodotto degli stessi scambi in ordine inverso);
3. se $\mathbf{P}$ è la matrice di permutazione associata a σ, allora $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ è la matrice di permutazione associata a σ^{-1}.

Concludere che per ogni matrice di permutazione $\mathbf{P}$ valgono le formule

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \qquad \det(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{P}).$$

Soluzione. Una permutazione σ è una funzione biiettiva, dunque ammette un'inversa σ^{-1}. La funzione inversa è definita associando a ogni elemento j del codominio di σ l'unico elemento i della sua fibra, cioè l'unico elemento i del dominio tale che $\sigma(i) = j$. Ma questo significa esattamente che $\sigma^{-1}(j) = i \iff \sigma(i) = j$.

1. Se $\epsilon = [i, j]$ è uno scambio, allora

$$\begin{aligned} \epsilon^2(i) &= \epsilon(\epsilon(i)) = \epsilon(j) = i, \\ \epsilon^2(j) &= \epsilon(\epsilon(j)) = \epsilon(i) = j. \end{aligned}$$

Se invece $k \neq i, j$ allora ϵ non modifica k e quindi

$$\epsilon^2(k) = \epsilon(\epsilon(k)) = \epsilon(k) = k.$$

In ogni caso $\epsilon^2(k) = k$ per tutti i k e dunque ϵ^2 è l'identità. Questo significa che ϵ è l'inversa di se stessa, cioè che $\epsilon^{-1} = \epsilon$.

2. Supponiamo che $\sigma = \epsilon_1 \cdots \epsilon_n$ sia una fattorizzazione di σ come prodotto di scambi. Proviamo che la sua inversa è la permutazione $\sigma^{-1} = \epsilon_n \cdots \epsilon_1$ ottenuta componendo gli stessi scambi nell'ordine opposto. Lo facciamo per induzione su n. Se $n = 1$ si tratta del caso dimostrato al punto 1. Supponiamo di avere dimostrato l'affermazione per un certo n e dimostriamolo per il suo successore $n+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} (\epsilon_{n+1} \cdots \epsilon_1)(\epsilon_1 \cdots \epsilon_{n+1}) &= \epsilon_{n+1}((\epsilon_n \cdots \epsilon_1)(\epsilon_1 \cdots \epsilon_n))\epsilon_{n+1} && \text{(proprietà associativa)} \\ &= \epsilon_{n+1} \iota \epsilon_{n+1} && \text{(ipotesi induttiva)} \\ &= \epsilon_{n+1} \epsilon_{n+1} && \text{(elemento neutro)} \\ &= \iota && \text{(caso } n = 1) \end{aligned}$$

dove ι indica la permutazione identica. Dunque l'affermazione è vera anche per $n+1$ e quindi per tutti gli n. Ma allora σ e σ^{-1} sono il prodotto dello stesso numero di scambi e dunque hanno la stessa parità.

3. Il fatto che $\mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = (\mathbf{P}_\sigma)^{\mathrm{T}}$ è stato dimostrato nel testo dopo il teorema 7.2 del capitolo 3. Se indichiamo con $\sigma * \mathbf{A}$ la matrice ottenuta dall'azione della permutazione σ sulla matrice $\mathbf{A}$, permutando cioè le righe di $\mathbf{A}$ come prescritto da σ, allora

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{PI}) \\ &= \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\sigma * \mathbf{I}) \\ &= \sigma^{-1} * (\sigma * \mathbf{I}) \\ &= (\sigma^{-1}\sigma) * \mathbf{I} \\ &= \iota * \mathbf{I} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

e dunque $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{-1}$. Infine, abbiamo visto al punto 2 che σ e σ^{-1} hanno la stessa parità. Dunque

$$\det(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{P}_{\sigma^{-1}}) = (-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^{\sigma} = \det(\mathbf{P}_\sigma) = \det(\mathbf{P}).$$

8 Data $\sigma = (2,3,4,5,1)$, scrivere σ^{-1}, la matrice $\mathbf{P}_\sigma$ e la sua inversa.

Soluzione. Per calcolare σ^{-1} possiamo utilizzare la formula dell'esercizio 7: $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow j = \sigma(i)$. Otteniamo $\sigma^{-1} = (5,1,2,3,4)$. Per calcolare la matrice associata a σ basta ricordare che, sempre con la notazione introdotta nell'esercizio 7,

$$\mathbf{P}_\sigma = \sigma * \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Infine

$$\mathbf{P}_\sigma^{-1} = \mathbf{P}_\sigma{}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che avremmo potuto dedurre che $\sigma^{-1} = (5,1,2,3,4)$ da quest'ultima uguaglianza, tenuto conto del fatto che $(\mathbf{P}_\sigma)^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}_{\sigma^{-1}}$.

3. FORMULA ESPLICITA PER IL DETERMINANTE

9 Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3&1&-3\\ 1&3&0\\ 1&2&-1 \end{bmatrix},$$

usare la regola di Sarrus per calcolare $\det(\mathbf{A})$ e $\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ e verificare che sono uguali. Calcolare anche i determinanti delle matrici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ e verificare che sono tutti uguali a $\det(\mathbf{A})^2$.

Soluzione. Utilizzando la regola di Sarrus come viene descritta a pagina 272 del testo. Troviamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 3&1&-3\\ 1&3&0\\ 1&2&-1 \end{vmatrix} \\ &= [3\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 0\cdot 1 + (-3)\cdot 1\cdot 2] - [1\cdot 3\cdot(-3) + 2\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 1] \\ &= -5, \\ \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) &= \begin{vmatrix} 3&1&1\\ 1&3&2\\ -3&0&-1 \end{vmatrix} \\ &= [3\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 0] - [(-3)\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 1] \\ &= -5. \end{aligned}$$

In modo simile,

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 11 & 8 & -10 \\ 8 & 14 & -5 \\ -10 & -5 & 10 \end{vmatrix} = (1540 + 400 + 400) - (1400 + 275 + 640) = 25,$$

$$\det(\mathbf{A}^2) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 6 & 10 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-140 + 0 - 180) - (-240 - 105 + 0) = 25,$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} 19 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = (1140 + 336 + 336) - (640 + 931 + 216) = 25.$$

10 Verificare che $\det(\mathbf{P}_\sigma) = (-1)^\sigma$ usando la formula (4.1). (Suggerimento: nella sommatoria solo un termine è diverso da zero.)

Soluzione. Si osservi anzitutto che il termine di posto (i, j) nella matrice $\mathbf{P}_\sigma$ è

$$p_{ij} = (\mathbf{e}_{\sigma(i)})_j = \delta_{\sigma(i),j}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}_\sigma) &= \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau p_{1\tau(1)} \cdots p_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau \delta_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots \delta_{\sigma(n)n\tau(n)} \\ &= (-1)^\sigma \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza consegue dal fatto che l'unico addendo non nullo della somma corrisponde alla permutazione τ che soddisfa la condizione $\tau(i) = \sigma(i)$ per tutti gli i e dal fatto che questa permutazione è esattamente σ.

11 Spiegare perché

$$\begin{vmatrix} 3 & 27 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 36 & 6 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 36 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 3 & 27 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 36 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 27 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 36 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 27 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

(Suggerimento: il determinante è lineare nelle colonne e nelle righe della matrice.)

Soluzione. Sappiamo dal teorema 4.5 che il determinante è multilineare rispetto alle righe e dall'osservazione che segue la proposizione 4.6 che è pure multilineare rispetto alle colonne. Utilizzando la multilinearità rispetto alle colonne troviamo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3&27&4\\1&0&2\\5&36&6\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}3&27+0&4\\1&0+0&2\\5&0+36&6\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&27&4\\1&0&2\\5&0&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\1&0&2\\5&36&6\end{vmatrix}\\&=27\begin{vmatrix}3&1&4\\1&0&2\\5&0&6\end{vmatrix}+36\begin{vmatrix}3&0&4\\1&0&2\\5&1&6\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

In modo simile, se usiamo la multilinearità rispetto alle righe troviamo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3&27&4\\1&0&2\\5&36&6\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}3&27&4\\1+0&0+0&0+2\\5&36&6\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&27&4\\1&0&0\\5&36&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&27&4\\0&0&2\\5&36&6\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&27&4\\1&0&0\\5&36&6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&27&4\\0&0&1\\5&36&6\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

12 Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix}3&0&0&0\\-4&1&0&0\\-5&26&2&0\\1&3&-7&-2\end{bmatrix}.$$

Soluzione. Basta ricordare che il determinante di una matrice coincide con quello della trasposta (proposizione 4.6) e che il determinante di una matrice triangolare alta è il prodotto degli elementi sulla diagonale (teorema 2.1). Abbiamo dunque

$$\begin{vmatrix}3&0&0&0\\-4&1&0&0\\-5&26&2&0\\1&3&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-4&-5&1\\0&1&26&3\\0&0&2&-7\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot2\cdot(-2)=-12.$$

13 Mostrare che, per $n\geq 2$, il determinante $\det(\mathbf{A})$ non è una funzione lineare di $\mathbf{A}$: trovare due matrici tali che $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\neq\det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B})$. Mostrare anche che $\det(t\mathbf{A})=t^n\det(\mathbf{A})$ è in generale diverso da $t\det(\mathbf{A})$.

Soluzione. Per vedere che il determinante non è additivo nella matrice basta osservare, ad esempio, che

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=1$$

mentre

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)+\det\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=0+0=0.$$

Per vedere invece che il determinante non è omogeneo nella matrice osserviamo che

$$\det\left(2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)=4,$$

mentre

$$2\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=2\cdot 1=2.$$

14 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $B=B(\mathbf{v},\mathbf{w}):\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ una funzione bilineare. Mostrare che B è alternante, cioè $B(\mathbf{v},\mathbf{w})=-B(\mathbf{w},\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$, se e solo se $B(\mathbf{u},\mathbf{u})=0$ per ogni $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. [Suggerimento: siccome B è bilineare,

$$B(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})=B(\mathbf{v},\mathbf{v})+B(\mathbf{v},\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{v})+B(\mathbf{w},\mathbf{w}).]$$

Soluzione. Supponiamo che B sia alternante. Allora, per ogni vettore $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, abbiamo $B(\mathbf{v},\mathbf{v})=-B(\mathbf{v},\mathbf{v})$. Da questo si ottiene $2B(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$ e dunque $B(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$. Viceversa, se $B(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$ per tutti i vettori $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, dalla formula

$$B(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})=B(\mathbf{v},\mathbf{v})+B(\mathbf{v},\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{v})+B(\mathbf{w},\mathbf{w}).$$

si ottiene

$$0=0+B(\mathbf{v},\mathbf{w})+B(\mathbf{w},\mathbf{v})+0$$

e dunque

$$B(\mathbf{v},\mathbf{w})=-B(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

4. SVILUPPI DI LAPLACE

15 Scrivere gli sviluppi di Laplace del determinante della matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -3\\1 & 3 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

rispetto a ciascuna delle righe e delle colonne (6 sviluppi in tutto, devono dare lo stesso risultato).

Soluzione. Calcoliamo anzitutto i complementi algebrici della matrice $\mathbf{A}$.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Gli sviluppi rispetto alle righe sono

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 3C_{11} + 1C_{12} - 3C_{13} = -5 \\ \det(\mathbf{A}) &= 1C_{21} + 3C_{22} + 0C_{23} = -5 \\ \det(\mathbf{A}) &= 1C_{31} + 2C_{32} - 1C_{33} = -5 \end{aligned}$$

e quelli rispetto alle colonne sono

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 3C_{11} + 1C_{21} + 1C_{31} = -5 \\ \det(\mathbf{A}) &= 1C_{12} + 3C_{22} + 2C_{32} = -5 \\ \det(\mathbf{A}) &= -3C_{31} + 0C_{32} - 1C_{33} = -5. \end{aligned}$$

16 Calcolare il determinante della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. La seconda colonna contiene un unico termine non nullo. Se utilizziamo lo sviluppo di Laplace rispetto a questa colonna otteniamo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2C_{22} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il determinante residuo di ordine 3 può essere calcolato per sviluppo di Laplace ancora rispetto alla seconda colonna, che contiene un unico termine non nullo. Troviamo

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1C_{22}) = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il determinante di una matrice 2×2 si calcola, come spiegato nell'esempio che segue la definizione 5.1, trovando il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e sottraendo il prodotto degli elementi sull'altra diagonale. Dunque,

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 5 - 1 \cdot 4) = 2.$$

17 Calcolare il polinomio caratteristico $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e determinarne le radici.

Soluzione. Scriviamo il polinomio caratteristico come un determinante e sviluppiamo rispetto alla seconda colonna. Troviamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 9] \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda-3)(1-\lambda+3) \\ &= (2-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda). \end{aligned}$$

Le radici sono -2, 2 e 4.

18 Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dopo aver verificato che il determinante è non nullo. Usare la formula del teorema 5.3 e poi ripetere l'esercizio usando il metodo di Gauss-Jordan.

Soluzione. Cominciamo a calcolare il determinante di $\mathbf{A}$ con la formula di Laplace, sviluppando rispetto alla seconda colonna.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2C_{22} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 - 12) = -22$$

Dal momento che il determinante è non nullo, la matrice è invertibile. Per calcolare l'inversa troviamo la matrice trasposta dei complementi algebrici.

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dal teorema 5.3 abbiamo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = -\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

Ripetiamo il calcolo con il metodo di Gauss-Jordan.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathrm{R}_3 - 4\mathrm{R}_1$$

$$\xrightarrow{2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 \\ -\frac{1}{11}\mathrm{R}_3 \end{array} \xrightarrow{3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{R}_1 - 3\mathrm{R}_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

19 Risolvere con la formula di Cramer il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ x + 3y = 8 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ del sistema è quadrata; calcoliamo il suo determinante sviluppando secondo la prima colonna dopo averle sommato la terza.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 + 6) = -5$$

Possiamo allora applicare il corollario 5.4 per calcolare l'unica soluzione del sistema. I determinanti delle matrici $\mathbf{A}_i$ sono rispettivamente

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10.$$

La soluzione è dunque

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} |\mathbf{A}_1| \\ |\mathbf{A}_2| \\ |\mathbf{A}_3| \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. IL TEOREMA DI BINET E IL DETERMINANTE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

20 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata, allora $\det(\mathbf{A}^p) = \det(\mathbf{A})^p$ per ogni intero $p \geq 0$ (anche per gli interi p negativi se $\mathbf{A}$ è invertibile).

Soluzione. Dimostriamo prima la formula nel caso $p \geq 0$ per induzione su p. Se $p = 0$ abbiamo

$$\det(\mathbf{A}^0) = \det(\mathbf{I}) = 1 = \det(\mathbf{A})^0.$$

Supponiamo di avere dimostrato la formula per un certo $p \geq 0$ e dimostriamola per il successore $p+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^{p+1}) &= \det(\mathbf{A}^p\mathbf{A}) && \text{(definizione di potenza)} \\ &= \det(\mathbf{A}^p)\det(\mathbf{A}) && \text{(teorema di Binet)} \\ &= \det(\mathbf{A})^p\det(\mathbf{A}) && \text{(ipotesi induttiva)} \\ &= \det(\mathbf{A})^{p+1} && \text{(definizione di potenza).} \end{aligned}$$

Dunque la formula vale per tutti i $p \geq 0$. Supponiamo ora che $\mathbf{A}$ sia invertibile e che sia $p < 0$. Allora

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^p) &= \det((\mathbf{A}^{-1})^{-p}) && \text{(definizione di potenza)} \\ &= \det(\mathbf{A}^{-1})^{-p} && \text{(prima parte dell'esercizio)} \\ &= (\det(\mathbf{A})^{-1})^{-p} && \text{(corollario 6.2)} \\ &= \det(\mathbf{A})^p && \text{(definizione di potenza).} \end{aligned}$$

21 Sia $\mathbf{Q}$ una matrice quadrata reale ortogonale, cioè tale che $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Mostrare che $\det(\mathbf{Q}) = 1$ oppure $\det(\mathbf{Q}) = -1$. (Suggerimento: usando Binet, mostrare che $\det(\mathbf{Q})^2 = 1$.)

Soluzione. Basta osservare che

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\mathbf{I}) && \text{(teorema 4.5)} \\ &= \det(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}) && \text{(ortogonalità di } \mathbf{Q}\text{)} \\ &= \det(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\det(\mathbf{Q}) && \text{(teorema di Binet)} \\ &= \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q}) && \text{(proposizione 4.6)} \\ &= \det(\mathbf{Q})^2. \end{aligned}$$

Dunque $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.

6. DETERMINANTE E RANGO

22 Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{A}$ la matrice 3×2 che ha $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come colonne. Mostrare che le tre componenti del prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sono, a meno del segno, i tre minori di ordine 2 della matrice $\mathbf{A}$. Concludere che i due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo (geometricamente, questo significa che i due vettori sono paralleli). Se prendessimo due vettori di $\mathbb{R}^4$, quanti minori avrebbe $\mathbf{A}$? (risposta: 6; c'è un analogo del prodotto vettoriale anche per vettori di $\mathbb{R}^4$, ma è un vettore con 6 componenti).

Soluzione. Supponiamo che siano $\mathbf{v} = [x_1, y_1, z_1]^\mathrm{T}$ e $\mathbf{w} = [x_2, y_2, z_2]^\mathrm{T}$. Dalla formula a pagina 41 del testo abbiamo che

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

e, se indichiamo con m_i il minore corrispondente alla sottomatrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ eliminando la i-esima riga, abbiamo

$$m_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - z_1 y_2$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x_1 z_2 - z_1 x_2$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

A meno del segno, queste sono le coordinate di $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Dunque

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0} &\iff m_1 = m_2 = m_3 = 0 && \text{(calcolo precedente)} \\
&\iff r(\mathbf{A}) < 2 && \text{(teorema di Kronecker, 7.2)} \\
&\iff \dim \mathrm{Col}(\mathbf{A}) < 2 && \text{(corollario 8.8 del capitolo 4)} \\
&\iff \dim \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < 2 && \text{(definizione di } \mathbf{A}\text{)} \\
&\iff \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \text{ linearmente dipendente} && \text{(corollario 6.11 del capitolo 4).}
\end{aligned}$$

Infine, se $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_\mathbb{R}(4,2)$, i minori di ordine due si ottengono scegliendo due righe fra le quattro righe di $\mathbf{A}$. Il loro numero è dunque

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

23 Determinare al variare di k il rango della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & k & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & -1-k \\ 0 & k+5 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Il minore corrispondente alla sottomatrice formata dalla prima e seconda riga e dalla prima e terza colonna è

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

dunque $r(\mathbf{A}) \geq 2$ indipendentemente da k. Questo minore può essere orlato solo in due modi: aggiungendo necessariamente la terza riga e aggiungendo la seconda oppure la quarta colonna. Si ottengono i minori del terz'ordine

$$\delta_{3,1} = \begin{vmatrix} -5 & k & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & k+5 & 3 \end{vmatrix} = 14(k+5), \qquad \delta_{3,2} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1-k \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -15(k+5).$$

Se $k = -5$, allora tutti i minori che orlano δ_2 sono nulli e perciò $r(\mathbf{A}) = 2$ per il teorema 7.2. Se $k \neq -5$, allora $r(\mathbf{A}) \geq 3$ perché la matrice ha il minore $\delta_{3,1}$ di ordine 3 non nullo; d'altra parte $r(\mathbf{A}) \leq 3$ perché $\mathbf{A}$ ha 3 righe, dunque $r(\mathbf{A}) = 3$ se $k \neq -5$.

7. COMPLEMENTI

24 Trovare quattro matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ quadrate di ordine 2 tali che

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\right) \neq \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D}) - \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}).$$

Mostrare che non è possibile prendere $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ o $\mathbf{C} = \mathbf{O}$, perché se $\mathbf{B}$ o $\mathbf{C}$ sono le matrici nulle l'uguaglianza vale certamente.

Soluzione. Un modo semplice per trovare un controesempio è quello di utilizzare la matrice di una permutazione opportuna. Ad esempio, se prendiamo

$$\mathbf{P}_\sigma = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

la permutazione corrispondente è

$$\sigma = (1, 3, 2, 4) = [2, 3]$$

che ha parità dispari e quindi $\det(\mathbf{P}_\sigma) = -1$. Invece, tutte le sottomatrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ contengono una riga nulla e quindi il loro determinante è zero. Dunque, in questo caso,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = -1 \neq 0 = |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}|.$$

Se $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ allora, dalla proposizione 8.1 e dal fatto che $|\mathbf{O}| = 0$, abbiamo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{O}|.$$

Se invece $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, allora utilizzando il fatto che il determinante di una matrice quadrata coincide con quello della trasposta, abbiamo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}||\mathbf{D}^{\mathrm{T}}| - |\mathbf{O}||\mathbf{C}^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{C}||\mathbf{O}|.$$

7 Autovalori e autovettori

1. AUTOVETTORI E AUTOVALORI DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

1 Determinare per quali valori di m il vettore $[1, m]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore della riflessione ortogonale

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Per tali valori, qual è l'autovalore corrispondente all'autovettore $[1, m]^{\mathrm{T}}$?

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v} = [1, m]^{\mathrm{T}}$ non è mai nullo. Dunque è un autovettore se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ e cioè tale per cui sia

$$\begin{cases} m = \lambda \\ 1 = \lambda m. \end{cases}$$

Se sostituiamo dalla prima nella seconda equazione troviamo l'equazione risolvente $m^2 = 1$. Dunque il sistema ha due soluzioni: $\lambda = m = 1$ e $\lambda = m = -1$. Nel primo caso, $[1, 1]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore relativo all'autovalore 1; nel secondo, $[1, -1]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore relativo all'autovalore -1. Il significato geometrico dei conti svolti è il seguente: l'applicazione $\mathfrak{L}$ è la riflessione ortogonale che ha per asse la bisettrice del primo e terzo quadrante. Il vettore $[1, 1]^{\mathrm{T}}$ appartiene all'asse della riflessione, ed è quindi mandato in se stesso dalla riflessione, il che significa che è un autovettore relativo all'autovalore 1; il vettore $[1, -1]^{\mathrm{T}}$ è invece ortogonale all'asse di riflessione, ed è perciò riflesso nel suo opposto, cioè è un autovettore relativo all'autovalore -1.

2 Verificare che $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore relativo all'autovalore 1 dell'applicazione lineare

$$\mathfrak{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix}.$$

Mostrare che l'autospazio di $\mathfrak{L}$ relativo all'autovalore 1 è l'asse z e convincersi che $\mathfrak{L}$ è la rotazione dello spazio attorno all'asse z di un angolo retto in senso antiorario. Concludere che $\mathfrak{L}$ non ha altri autovettori reali (non ci sono altre direzioni, a parte l'asse, lasciate fisse dalla rotazione). Scrivere la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica.

Soluzione. Determiniamo anzitutto la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica. Abbiamo

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{L}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{L}(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_3) = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

possiamo concludere che $\mathbf{e}_3$ è un autovettore relativo all'autovalore 1. Per determinare l'intero autospazio $\mathbf{V}_1$ relativo all'autovalore 1 osserviamo anzitutto che, dalla definizione 2.3 risulta

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathfrak{L} - \mathcal{I}) = \operatorname{Ker}(\mathfrak{L}_{\mathbf{A}-\mathbf{I}}) = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

L'ultima matrice ha rango due, dunque il nucleo ha dimensione uno. D'altra parte abbiamo già visto che $\mathbf{e}_3 \in \mathbf{V}_1$; dunque $\mathbf{V}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_3)$ che è esattamente l'asse z. Per verificare che $\mathfrak{L}$ è una rotazione intorno all'asse z introduciamo coordinate cilindriche e scriviamo il generico vettore di $\mathbb{R}^3$ nella forma $\mathbf{v} = [r\cos\theta, r\sin\theta, z]^{\mathrm{T}}$, dove $r \geq 0$ è la distanza dall'asse z e θ è l'angolo che l'asse x forma con la proiezione del vettore sul piano xy. Abbiamo

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta + \pi/2) \\ r\sin(\theta + \pi/2) \\ z \end{bmatrix}.$$

Questo significa che $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ ha la stessa quota e la stessa distanza dall'asse z di $\mathbf{v}$, mentre l'angolo è aumentato di $\pi/2$; dunque $\mathfrak{L}$ è la rotazione intorno all'asse z di $\pi/2$. Sempre da questa formula si vede che se $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ allora, dall'uguaglianza della quota, deve essere $\lambda = 1$. Dunque $\mathbf{V}_1$ è l'unico autospazio e non ci sono altre rette trasformate in se stesse.

3 Mostrare che, se $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathfrak{L}$ relativo all'autovalore 3, allora è anche un autovettore di $\mathfrak{L}^2$ relativo all'autovalore 9. [Suggerimento: $\mathfrak{L}^2(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v}))$.]

Soluzione. Basta osservare che se $\mathbf{V}_3$ è l'autospazio relativo all'autovalore 3 e se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3$, allora

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^2(\mathbf{v}) &= \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) && \text{(definizione di composizione)} \\
&= \mathfrak{L}(3\mathbf{v}) && (\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3) \\
&= 3\mathfrak{L}(\mathbf{v}) && \text{(linearità di } \mathfrak{L}) \\
&= 3(3\mathbf{v}) && (\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3) \\
&= 9\mathbf{v} && \text{(associatività del prodotto per uno scalare).}
\end{aligned}$$

4 Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base del nucleo di $\mathcal{L}$.
2. Determinare una base dell'immagine di $\mathcal{L}$.
3. Mostrare che i vettori non nulli del nucleo e dell'immagine sono autovettori di $\mathcal{L}$.
4. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathcal{L}$. Scrivere le matrici che rappresentano $\mathcal{L}$ rispetto a tale base e rispetto alla base canonica.

Soluzione. 1 e 2. Calcoliamo la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ di $\mathcal{L}$ rispetto alla base canonica e una sua riduzione a scala $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Per determinare una base di $\operatorname{Ker}(\mathcal{L})$ basta risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, usando ad esempio z come variabile libera; una base di $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$ è invece data dalle colonne di $\mathbf{A}$ che corrispondono a quelle di $\mathbf{U}$ in cui si trovano i pivot, colonne che possiamo moltiplicare per un fattore non nullo. Troviamo rispettivamente le basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Se $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$, allora $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$. Dunque tutti i vettori non nulli del nucleo sono autovettori relativi all'autovalore 0. Per trattare l'immagine, che coincide con lo spazio colonna di $\mathbf{A}$, denotiamo con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ le colonne di $\mathbf{A}$. Un calcolo diretto mostra che $\mathcal{L}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$. Ma ogni vettore $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(\mathcal{L})$ è combinazione lineare dei $\mathbf{v}_i$ e dunque

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathcal{L}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

Questo prova che tutti i vettori non nulli di $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$ sono autovettori relativi all'autovalore 1.

4. Per determinare una base di autovettori basta osservare che $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{L})$. Infatti se $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{L})$, allora deve essere, per quanto dimostrato in 3, $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ perché $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(\mathcal{L})$ e $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$; dunque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Questo prova che la somma $\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) + \operatorname{Im}(\mathcal{L})$ è diretta. Dai punti 1 e 2 abbiamo che $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{L})) = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{L}) = 1 + 2 = 3$. Possiamo concludere che $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{L})$.

Dalla proposizione 10.6 del capitolo 4 abbiamo allora che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori. Il vettore di $\mathcal{B}_1$ è un autovettore relativo all'autovalore 0, mentre i vettori di $\mathcal{B}_2$ sono autovettori relativi all'autovalore 1; dunque la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. AUTOVETTORI E AUTOVALORI DI UNA MATRICE

5 Determinare per quali valori di m il vettore $\mathbf{v} = [1, m]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per tali valori determinare l'autovalore corrispondente all'autovettore $\mathbf{v}$.

Soluzione. Dal momento che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}$ è un autovettore se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Essendo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 7m \\ 2m \end{bmatrix},$$

l'equazione $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ equivale al sistema non lineare

$$\begin{cases} 3 + 7m = \lambda \\ 2m = \lambda m \end{cases}$$

nelle indeterminate m e λ. Se risolviamo la prima equazione rispetto a λ e sostituiamo nella seconda troviamo la risolvente in m del sistema

$$7m^2 + m = 0,$$

che ha soluzioni $m = 0$ e $m = -\frac{1}{7}$. Per $m = 0$ troviamo l'autovettore $[1, 0]^{\mathrm{T}}$ relativo all'autovalore 3, per $m = -\frac{1}{7}$ troviamo l'autovettore $[1, -\frac{1}{7}]^{\mathrm{T}}$ relativo all'autovalore 2.

6 Determinare per quali valori di k il vettore $[0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$ (rispettivamente $[0, 1, -1]^{\mathrm{T}}$) è un autovettore della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quali sono gli autovalori corrispondenti?

Soluzione. Posto $\mathbf{v} = [0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, risolviamo l'equazione $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Poiché

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix},$$

l'equazione $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} 0 = \lambda 0 \\ k = \lambda \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione $k = \lambda = 1$. Dunque $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ solo nel caso in cui $k = 1$ e in questo caso è un autovettore relativo all'autovalore 1.

Si procede in modo simile per il vettore $\mathbf{w} = [0, 1, -1]^{\mathrm{T}}$. In questo caso

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$$

e l'equazione $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} 0 = \lambda 0 \\ k = \lambda \\ -1 = -\lambda \end{cases}$$

che ha ancora come unica soluzione $k = \lambda = 1$. Dunque anche $\mathbf{w}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ solo nel caso in cui $k = 1$ e in questo caso è un autovettore relativo all'autovalore 1.

7 Mostrare che, se $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore 2, allora è anche un autovettore di $\mathbf{A}^2$ relativo all'autovalore 4. [Suggerimento: $\mathbf{A}^2\,\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{v})$.]

Soluzione. Basta osservare che

$$\mathbf{A}^2\mathbf{v} = (\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}2\mathbf{v} = 2\mathbf{A}\mathbf{v} = 2(2\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}.$$

3. RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI

8 Stabilire se la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. Se lo è, trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5,$$

ha due radici reali semplici, $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$ e dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ per il teorema 4.7. Per determinare una base di autovettori basta determinare basi per ciascun autospazio. Abbiamo

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

dove la seconda matrice è la riduzione a scala della prima. In modo simile,

$$\mathbf{V}_5 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Dunque una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

9 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico $-\lambda^3 - \lambda + 2$. Qual è l'ordine di $\mathbf{A}$? Quanto valgono il determinante e la traccia di $\mathbf{A}$? Mostrare che $\mathbf{A}$ ha un autovalore reale e due autovalori complessi e verificare che la somma degli autovalori è la traccia, mentre il prodotto degli autovalori è il determinante.

Soluzione. Sappiamo dalla proposizione 4.2 che una matrice di ordine n ha polinomio caratteristico $P(\lambda)$ di grado n; dunque $\mathbf{A}$ deve avere ordine 3. Sempre dalla proposizione 4.2 abbiamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) &= c_1 = 0 \\ \det(\mathbf{A}) &= c_3 = 2. \end{aligned}$$

È noto che un polinomio a coefficienti reali ha sempre un numero pari di zeri non reali perché se $P(z) = 0$ allora anche $P(\bar{z}) = 0$. Dunque P, che ha ha grado 3, deve avere almeno uno zero reale. Dal momento che $P(1) = 0$, abbiamo la fattorizzazione

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda - 2).$$

Se determiniamo gli zeri di tutti i fattori troviamo

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Verifichiamo infine che la somma degli autovalori è la traccia, mentre il prodotto degli autovalori è il determinante:

Risolvere con
n° compl.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 0 = \operatorname{tr}(\mathbf{A}), \\ \prod_{i=1}^{3} \lambda_i &= (1)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 2 = \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

10 Sia $\mathbf{A}$ una matrice con polinomio caratteristico $\lambda^2 + 3\lambda + 2$. Qual è il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}+7\mathbf{I}$? In generale, che relazione c'è tra il polinomio caratteristico di una matrice $\mathbf{A}$ e quello di $\mathbf{A} + c\mathbf{I}$ (c è uno scalare fissato)?

Soluzione. Indichiamo con $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$. Allora

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}+c\mathbf{I}}(\lambda) &= \det((\mathbf{A}+c\mathbf{I})-\lambda\mathbf{I}) \\ &= \det(\mathbf{A}-(\lambda-c)\mathbf{I}) \\ &= P_{\mathbf{A}}(\lambda-c). \end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}+7\mathbf{I}}(\lambda) &= P_{\mathbf{A}}(\lambda-7) \\ &= (\lambda-7)^2+3(\lambda-7)+2 \\ &= \lambda^2-11\lambda+30. \end{aligned}$$

11 Mostrare che la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ha un solo autovalore e che tale autovalore non è regolare. Determinare gli autovettori di $\mathbf{A}$, e verificare che non esiste una base di $\mathbb{K}^2$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ (quindi $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile, né in $\mathbb{R}$ né in $\mathbb{C}$).

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ è triangolare inferiore, e i suoi autovalori sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Pertanto $\mathbf{A}$ ammette 3 come unico autovalore e la sua molteplicità algebrica è $a_3 = 2$. L'autospazio corrispondente è

$$\mathbf{V}_3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_2).$$

Dunque $g_3 = \dim(\mathbf{V}_3) = 1$, l'autovalore non è regolare e non esiste una base di $\mathbb{K}^2$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

12 Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori della matrice simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Verificare che i vettori di tale base sono tra loro perpendicolari.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8$$

e ha due radici semplici, $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{2}$. La matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ per il teorema 4.7. Determiniamo basi degli autospazi.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\sqrt{2}\mathbf{I}) \\ &= \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2-2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2-2\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

anche se sono invertiti
i miei sono bene
perché sono proporzionali

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\lambda_2} &= \operatorname{Ker}(\mathbf{A} + 2\sqrt{2}\mathbf{I}) \\
&= \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Dal momento che autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti, l'unione delle loro basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$. Resta da verificare che i vettori di $\mathcal{B}$ sono ortogonali:

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = [1+\sqrt{2} \quad 1] \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 1 = 0.$$

13 Trovare il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spiegare perché $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile. Scrivere una matrice diagonalizzabile con lo stesso polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Si osservi che $\mathbf{A}$ è triangolare bassa e dunque i suoi autovalori sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale: $\lambda_1 = 3$ semplice e $\lambda_2 = 1$ doppio. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è dunque

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Determiniamo gli autospazi.

$$\mathbf{V}_3 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Come si vede, l'autovalore 3 è regolare, come deve essere ogni autovalore semplice. Al contrario per l'autovalore 1 abbiamo $g_\lambda = 1 < 2 = a_\lambda$; l'autovalore non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile. Una matrice diagonale con lo stesso polinomio *caratteristico è la matrice diagonale*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

14 Mostrare che la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha un solo autovalore reale con molteplicità algebrica uguale a uno (quindi è un autovalore regolare). Perché $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$? La matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$? Quali sono gli autovettori complessi di $\mathbf{A}$?

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2).$$

Il primo fattore ammette la radice reale semplice $\lambda_1 = 1$ mentre il secondo fattore ha due radici complesse semplici, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Dal fatto che non tutte le radici sono in $\mathbb{R}$ e dal teorema 4.11 consegue che $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Al contrario, $\mathbf{A}$ ha 3 autovalori semplici in $\mathbb{C}$, dunque è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ per il teorema 4.7. Cerchiamo gli autovettori complessi di $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{V}_1 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-i\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-i} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}+i\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

L'applicazione associata alla matrice $\mathbf{A}$ è la rotazione dello spazio che ha per asse l'asse delle ascisse e manda il secondo vettore $\mathbf{e}_2$ della base canonica in $\mathbf{e}_2$.

15 Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice invertibile $\mathbf{S}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. (Suggerimento: gli autovalori della matrice sono 1, 2 e 10.)

Soluzione. Cerchiamo di stabilire se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(10-\lambda).$$

Dal momento che abbiamo tre autovalori distinti, la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile per il teorema 4.7. Determiniamo una base di autovettori. Abbiamo

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{10} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-10\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Una matrice $\mathbf{S}$ che diagonalizza $\mathbf{A}$ si ottiene prendendo come colonne una base di autovettori, ad esempio

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonale che si ottiene è

anche se cambio autovett, purché siano una base di autovett, D rimane uguale

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

ed ha in ciascuna colonna l'autovalore relativo all'autovettore della corrispondente colonna di $\mathbf{S}$.

16 Per quali valori di a, b, d la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ è triangolare alta, dunque i suoi autovalori sono a e d. Se $a \neq d$ i due autovalori sono semplici e $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile per il teorema 4.7. Se invece $a = d$ abbiamo un unico autovalore di molteplicità algebrica 2. In questo caso $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile quando l'autovalore è regolare, cioè quando $g_a = 2$. Ora abbiamo che

$$g_a = \dim \mathbf{V}_a = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = \dim \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e $g_a = 2$ quando $b = 0$.

17 Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

e si calcoli il limite

$$\mathbf{A}^{\infty} = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{A}^n.$$

Soluzione. Determiniamo anzitutto il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2$$

Questo polinomio ha due radici semplici, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Cerchiamo una matrice $\mathbf{S}$ che la diagonalizza e per farlo determiniamo una base di autovettori. Abbiamo

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\mathbf{V}_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Ker}\left(\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Se prendiamo

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

allora $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$ dove

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

è la matrice degli autovalori. Dall'ultima formula si ottiene $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ e dunque

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{S}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Prendendo il limite troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

18 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per quali valori di k la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile? Per tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

L'autovalore $\lambda = 4$ è semplice, dunque regolare per la proposizione 4.9. Per stabilire la regolarità dell'autovalore doppio $\lambda = 2$ occorre determinare la sua molteplicità geometrica. Abbiamo

$$g_2 = 3 - r(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Dunque $\lambda = 2$ è regolare solo quando $k = 0$ e questo è, per il teorema 4.11, l'unico caso in cui $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Assumiamo allora $k = 0$. Per determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ determiniamo delle basi di ciascun autospazio. Abbiamo

$$\mathbf{V}_2 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_4 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Una base di autovettori si ottiene, per il lemma 4.8, dall'unione delle basi degli autospazi:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

19 Sia $\mathbf{A}$ una matrice diagonalizzabile. Mostrare che $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) + \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathbb{K}^n$. Mostrare anche che lo spazio colonna è generato dagli autovettori di $\mathbf{A}$ relativi agli autovalori non nulli di $\mathbf{A}$, e che il rango di $\mathbf{A}$ coincide col numero di autovalori non nulli di $\mathbf{A}$ contati con la loro molteplicità.

Soluzione. Sia $\mathfrak{L}$ l'applicazione lineare rappresentata da $\mathbf{A}$: $\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Allora $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$, gli autovettori e gli autovalori di $\mathfrak{L}$ coincidono con gli autovettori e gli autovalori di $\mathbf{A}$, e il rango di $\mathbf{A}$ è la dimensione dell'immagine di $\mathfrak{L}$.

Siccome $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, esiste una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di $\mathfrak{L}$. Siano $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ i corrispondenti autovalori. Il numero s degli autovalori non nulli di $\mathfrak{L}$ è il numero degli indici i per cui $\lambda_i \neq 0$. Possiamo supporre $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \ldots, s$ e $\lambda_i = 0$ per $i = s + 1, \ldots, n$. Il sottospazio immagine di $\mathfrak{L}$ è generato dalle immagini $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ dei vettori della base scelta, e quindi dai vettori $\mathbf{e}_i$ per $i = 1, \ldots, s$. Tali vettori sono anche linearmente indipendenti perché costituiscono parte di una base, e quindi formano una base dell'immagine. Perciò il numero s degli autovalori non nulli di $\mathfrak{L}$ coincide con la dimensione dell'immagine: $s = r(\mathfrak{L})$. I vettori $\mathbf{e}_i$ per $i > s$ sono nell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$, cioè appartengono al nucleo; poiché sono linearmente indipendenti e sono esattamente $n - s = n - r(\mathfrak{L}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$ formano una base del nucleo. La base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è perciò unione disgiunta di una base del nucleo e di una base dell'immagine, e quindi $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \cap \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) + \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathbb{K}^n$.

20 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si determinino delle basi di $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ e $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ formate da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Determiniamo gli autovalori di $\mathbf{A}$. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(10-\lambda)(13-\lambda).$$

La matrice ha 3 autovalori distinti dunque è diagonalizzabile. Dall'esercizio 19 sappiamo che

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}_0, \qquad \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}_{10} \oplus \mathbf{V}_{13}.$$

Poiché

$$\mathbf{V}_0 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{10} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{13} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right),$$

otteniamo che

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

dove i generatori indicati sono basi di autovettori.

21 Sia $\mathbf{A}$ una matrice diagonalizzabile. Mostrare che $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2)$, $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Col}(\mathbf{A}^2)$.

Soluzione. Come nell'esercizio 19 l'asserto dipende solo dall'applicazione lineare $\mathfrak{L}$ rappresentata da $\mathbf{A}$: occorre dimostrare $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^2)$ e $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^2)$.

Siccome $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, esiste una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di $\mathfrak{L}$. Come abbiamo osservato nell'esercizio 19, una base dell'immagine di $\mathfrak{L}$ è formata dai vettori $\mathbf{e}_i$ per cui $\lambda_i \neq 0$, e una base del nucleo è formata dai vettori $\mathbf{e}_i$ per cui $\lambda_i = 0$. Siccome

$$\mathfrak{L}^2(\mathbf{e}_i) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{e}_i)) = \mathfrak{L}(\lambda_i \mathbf{e}_i) = \lambda_i^2 \mathbf{e}_i$$

e $\lambda_i^2 = 0$ se e solo se $\lambda_i = 0$, una base dell'immagine di $\mathfrak{L}^2$ è formata dai vettori $\mathbf{e}_i$ per cui $\lambda_i \neq 0$, e quindi $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}^2)$. Analogamente, $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}^2)$ perché l'insieme dei vettori $\mathbf{e}_i$ per cui $\lambda_i = 0$ è una base per entrambi i nuclei.

22 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n, e si supponga che esista un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (questo significa che il nucleo di $\mathbf{A}^2$ contiene propriamente il nucleo di $\mathbf{A}$). Mostrare che $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile.

Soluzione. Si tratta di una conseguenza immediata dell'esercizio 21. Infatti se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile deve essere $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ e dunque un vettore $\mathbf{v}$ con le proprietà indicate non può esistere.

23 Per quali valori del parametro reale a la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2a & a \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori si determini, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ di lunghezza 1 e a due a due perpendicolari.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 2a & a \\ 0 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(10-\lambda)^2.$$

L'autovalore $\lambda = 5$ è semplice e dunque regolare. L'unico problema può derivare dall'autovalore doppio $\lambda = 10$. Abbiamo

$$g_{10} = 3 - r(\mathbf{A} - 10\mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\right) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

e dunque l'autovalore $\lambda = 10$ è regolare solo quando $a = 0$ e questo è l'unico caso in cui $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. In questo caso abbiamo

$$\mathbf{V}_5 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{10} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Per ottenere una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$ basta prendere l'unione delle basi degli autospazi. Si osservi che i vettori di queste basi sono già ortogonali a coppie. Basta dunque normalizzarli dividendoli per la loro lunghezza per ottenere la base ortonormale

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

24 Per quali valori del parametro reale k la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3-k & -k & 1 \\ -1+k & 2+k & -1 \\ 1+k & k & 3 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Determiniamo anzitutto il polinomio caratteristico.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-k-\lambda & -k & 1 \\ -1+k & 2+k-\lambda & -1 \\ 1+k & k & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

L'autovalore $\lambda = 4$ è semplice e dunque regolare. Per quanto riguarda invece l'autovalore doppio $\lambda = 2$ abbiamo che

$$r(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = r\left(\begin{bmatrix} 1-k & -k & 1 \\ -1+k & k & -1 \\ 1+k & k & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Dunque $g_2 = 3 - r(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 2 \Leftrightarrow k = 0$ e questo è l'unico caso in cui tutti gli autovalori sono regolari e $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Per $k = 0$ troviamo una base per ogni autospazio.

$$\mathbf{V}_4 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $\mathbf{A}$ è allora

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

25 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata. Supponiamo che la somma dei coefficienti di ciascuna colonna sia uguale a 18. Mostrare che 18 è un autovalore di $\mathbf{A}$. (Suggerimento: per ipotesi $[1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ha lo stesso polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$.)

Soluzione. Indichiamo con a_{ij} l'elemento di posto (i,j) nella matrice $\mathbf{A}$ e poniamo $\mathbf{b} = [1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$. La condizione che la somma degli elementi di ciascuna colonna sia uguale a 18 significa che moltiplicando una riga qualsiasi di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ per il vettore $\mathbf{b}$ si ottiene 18. Quindi

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ \vdots \\ 18 \end{bmatrix} = 18\,\mathbf{b}.$$

Dunque $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 18\,\mathbf{b}$ e 18 è un autovalore di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Proviamo ora che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico. Infatti, dal momento che il determinante di una matrice coincide con il determinante della sua trasposta, abbiamo che

$$P_{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}(\lambda) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = P_{\mathbf{A}}(\lambda).$$

Dal momento che gli autovalori di una matrice sono gli zeri del polinomio caratteristico, possiamo concludere che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ hanno gli stessi autovalori e dunque che 18 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

26 Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ y' = x(t) + y(t). \end{cases}$$

Trovare due soluzioni linearmente indipendenti della forma $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w}$.

Soluzione. Se poniamo

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere il sistema differenziale nella forma $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Una funzione del tipo $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w}$ è soluzione del sistema se e soltanto se

$$e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{w}) = e^{\lambda t}(\mathbf{A}\mathbf{w})$$

per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Dal momento che $e^{\lambda t} \neq 0$ per tutti i t, la condizione equivale a $\lambda\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w}$, cioè al fatto che λ sia un autovalore di $\mathbf{A}$ e che $\mathbf{w}$ sia un autovettore corrispondente. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2).$$

Dal momento che $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti, è diagonalizzabile. Determiniamo gli autospazi.

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-2} = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

Due soluzioni del sistema differenziale sono dunque

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_1(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Le due soluzioni sono indipendenti perché il determinante di Wronski delle soluzioni è non nullo. Infatti

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 3e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{vmatrix} = e^{2t}e^{-2t}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Si osservi che il motivo concettuale per cui l'ultimo determinante non è nullo è che le colonne della matrice sono autovettori relatvi ad autovalori distinti e quindi sono indipendenti.

27 Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il prodotto $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ e si trovino una matrice invertibile $\mathbf{S}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D}$. Si ripeta l'esercizio con $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

Soluzione. Cominciamo dalla matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda).$$

Dunque $\mathbf{B}$ ha due autovalori semplici ed è diagonalizzabile. Per determinare una matrice $\mathbf{S}$ che diagonalizza $\mathbf{B}$ basta costruire una base di autovettori. Abbiamo

$$\mathbf{V}_5 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$\mathbf{V}_7 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

e dunque possiamo prendere

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per questa scelta di $\mathbf{S}$, la matrice $\mathbf{D}$ è la matrice diagonale degli autovalori corrispondenti alle colonne di $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ripetiamo il calcolo per

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

In questo caso il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda)(7-\lambda).$$

Anche in questo caso abbiamo tre autovalori semplici, quindi regolari e, di conseguenza, $\mathbf{C}$ è diagonalizzabile. Come prima, per trovare una matrice $\mathbf{S}$ che diagonalizza $\mathbf{C}$

cerchiamo una base di autovettori.

$$\mathbf{V}_0 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_5 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_7 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

Una matrice che diagonalizza $\mathbf{C}$ è dunque

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

e la corrispondente matrice diagonale è la matrice degli autovalori

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Il fatto che $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ abbiano gli stessi autovalori non nulli non è casuale: si vedano il lemma 4.1 e l'esercizio 31 del capitolo 9 del testo.

28 Sia λ un autovalore di $\mathbf{A}$. Nel testo si mostra che λ è anche un autovalore di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, con la stessa molteplicità algebrica. Mostrare che anche la molteplicità geometrica di λ, come autovalore di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, coincide con la molteplicità geometrica di λ come autovalore di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{A}$ abbia ordine n. Indichiamo con $g_\lambda(\mathbf{A})$ la molteplicità geometrica di λ come autovalore di $\mathbf{A}$ e con $\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{A})$ l'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo a λ. Allora

$$\begin{aligned}
g_\lambda(\mathbf{A}) &= \dim \mathbf{V}_\lambda(\mathbf{A}) && \text{(definizione di molteplicità geometrica)} \\
&= \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) && \text{(definizione di autospazio)} \\
&= n - r(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) && \text{(teorema di rango più nullità)} \\
&= n - r((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{\mathrm{T}}) && \text{(corollario 8.7 del capitolo 4)} \\
&= n - r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{I}) && \text{(proposizione 5.2 del capitolo 3)} \\
&= \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{I}) && \text{(teorema di rango più nullità)} \\
&= \dim \mathbf{V}_\lambda(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) && \text{(definizione di autospazio)} \\
&= g_\lambda(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) && \text{(definizione di molteplicità geometrica).}
\end{aligned}$$

29 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Posto $\mathbf{V}_1 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ e $\mathbf{V}_{-1} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$, determinare una base di $\mathbf{V}_1$ e una base di $\mathbf{V}_{-1}$, e verificare che $\dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_{-1} = 4$.
2. Qual è il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$? (Suggerimento: gli autovalori e le loro molteplicità sono determinati dal punto 1.)

Soluzione. 1. Determiniamo delle basi per $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_{-1}$.

$$\mathbf{V}_1 = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dunque $\dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_{-1} = 3 + 1 = 4$.

2. I sottospazi $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_{-1}$ sono gli autospazi di $\mathbf{A}$ relativi agli autovalori 1 e -1. Autospazi relativi ad autovalori distinti sono indipendenti, dunque $\mathbb{R}^4 = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1}$ ammette una base di autovettori di $\mathbf{A}$ e quindi $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Di conseguenza la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con la sua molteplicità geometrica e dunque $a_1 = 3$ e $a_{-1} = 1$. Possiamo allora concludere che il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1).$$

30 Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{M}(2,2) \to \mathbb{M}(2,2)$ l'applicazione lineare che a una matrice $\mathbf{A}$ associa la sua trasposta. Determinare autovalori e autovettori di $\mathfrak{L}$. [Suggerimento: (1) cos'è $\mathfrak{L}(\mathbf{A})$ per una matrice simmetrica (rispettivamente antisimmetrica)? (2) in alternativa, scrivere la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$, che è una matrice 4×4, e calcolarne gli autovalori e autovettori (naturalmente, il secondo metodo è sconsigliato).]

Soluzione. 1. Si osservi anzitutto che $\mathfrak{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ se e soltanto se $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, cioè se e soltanto se $\mathbf{A}$ è simmetrica. Questo prova che il sottospazio di $\mathbb{M}(2,2)$ delle matrici simmetriche è l'autospazio $\mathbf{V}_1$ di $\mathfrak{L}$ relativo all'autovalore 1. In modo simile, $\mathfrak{L}(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}$ se e soltanto se $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, cioè se e soltanto se $\mathbf{A}$ è antisimmetrica. Dunque il sottospazio di $\mathbb{M}(2,2)$ delle matrici antisimmetriche è l'autospazio $\mathbf{V}_{-1}$ di $\mathfrak{L}$ relativo all'autovalore -1. Dagli esercizi 46 e 47 del capitolo 4 sappiamo che $\dim \mathbf{V}_1 = 3$ e $\dim \mathbf{V}_{-1} = 1$. Dal momento che $\dim \mathbb{M}(2,2) = 4$ e che autospazi relativi ad autovalori distinti sono indipendenti, abbiamo che $\mathbb{M}(2,2) = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1}$. Dunque $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_{-1}$ sono gli unici autospazi e di conseguenza $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ sono gli unici autovalori, il primo di molteplicità 3, il secondo di molteplicità 1.

2. La matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica $\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ di $\mathbb{M}(2,2)$ è

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(-1-\lambda).$$

Dunque $\mathfrak{L}$ ammette $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ come autovalori, il primo triplo e il secondo semplice. Gli autospazi corrispondenti sono

$$\mathbf{V}_1 = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Le matrici che corrispondono ai vettori di $\mathbf{V}_1$ sono del tipo

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}(\mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}) + a_{22}\mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e dunque sono esattamente le matrici simmetriche. In modo simile, le matrici che corrispondono ai vettori di $\mathbf{V}_{-1}$ sono del tipo

$$\mathbf{A} = a_{12}(\mathbf{E}_{12} - \mathbf{E}_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque sono esattamente le matrici antisimmetriche.

31 Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Possiamo considerare i vettori $\mathbf{v}_k$ come elementi di $\mathbb{C}^n$, perché un numero reale è anche un numero complesso. Mostrare che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ se e solo se sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$. (Suggerimento: scrivere una combinazione lineare a coefficienti complessi come somma di una parte reale e di una parte immaginaria.)

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ siano indipendenti in $\mathbb{C}^n$. Se

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare in $\mathbb{R}^n$, allora lo è anche in $\mathbb{C}^n$. Ma, dal momento i vettori $\mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$, tutti i coefficienti devono essere nulli. Dunque i vettori $\mathbf{v}_k$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Viceversa, supponiamo che i $\mathbf{v}_k$ siano linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e che

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$$

in $\mathbb{C}^n$. Se $t_k = r_k + is_k$ con $r_k, s_k \in \mathbb{R}$ e se $x_{kl} \in \mathbb{R}$ è la l-esima componente di $\mathbf{v}_k$, allora l'equazione precedente in $\mathbb{C}^n$ equivale alle n equazioni in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{d}(r_k + is_k)x_{kl} = 0.$$

Dal momento che un numero complesso è nullo se e soltanto se sono nulle la sua parte reale e la sua parte immaginaria, queste equazioni sono a loro volta equivalenti alle $2n$ equazioni in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{d} r_k x_{kl} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{d} s_k x_{kl} = 0.$$

Possiamo riscrivere queste due serie di equazioni in forma vettoriale come

$$\sum_{k=1}^{d} r_k \mathbf{v}_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{d} s_k \mathbf{v}_k = 0.$$

Dal momento che i $\mathbf{v}_k$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e i coefficienti di queste equazioni sono ora reali, abbiamo $r_k = s_k = 0$ per tutti i k. Dunque $t_k = 0$ per tutti i k e i vettori $\mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$.

4. MATRICI SIMILI

32 Sia $\mathbf{A}$ una matrice simile alla matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$. Si tratta di una matrice diagonalizzabile? Qual è il suo polinomio caratteristico? La matrice $\mathbf{A}^3$ è diagonalizzabile? Qual è il suo polinomio caratteristico?

Soluzione. Per definizione una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale. La matrice $\mathbf{A}$ è simile alla matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. Dalla proposizione 5.3 sappiamo che il polinomio caratteristico è un invariante per similitudine; dunque

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = P_{\mathbf{D}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

Proviamo ora che $\mathbf{A}^3$ è simile a $\mathbf{D}^3$. Poiché $\mathbf{A}$ è simile a $\mathbf{D}$, deve esistere una matrice invertibile $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}$. Ma allora

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}) \\ &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{D}\mathbf{S} \\ &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{S} \\ &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^3\mathbf{S}. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\mathbf{D}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale; ma allora $\mathbf{A}^3$ è simile alla matrice diagonale $\mathbf{D}^3$, dunque è diagonalizzabile. Dalla similitudine di $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{D}^3$ si ottiene che

$$P_{\mathbf{A}^3}(\lambda) = P_{\mathbf{D}^3}(\lambda) = (1-\lambda)(8-\lambda)(27-\lambda).$$

33 Stabilire per quali valori del parametro reale k le due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

sono simili.

Soluzione. Dalla proposizione 5.3 sappiamo che una condizione necessaria perché due matrici siano simili è che abbiano lo stesso polinomio caratteristico. Poiché

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)$$
$$P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (k-\lambda)(4-\lambda),$$

possiamo concludere che le due matrici non sono simili se $k \neq 1$. Se invece $k = 1$ entrambe le matrici sono diagonalizzabili perché i loro polinomi si scompongono in fattori lineari distinti; dunque $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili per la proposizione 5.4.

34 Stabilire per quali valori del parametro complesso t le due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & t \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

sono simili (come matrici complesse).

Soluzione. L'argomentazione è la stessa dell'esercizio 33. I polinomi caratteristici delle due matrici sono

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 1 + \lambda^2,$$
$$P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (1-t) + \lambda^2.$$

Se $t \neq 0$ i polinomi caratteristici sono diversi e quindi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non sono simili per la proposizione 5.3. Se invece $t = 0$ i polinomi caratteristici ammettono $\lambda = \pm i$ come zeri semplici; le matrici sono allora diagonalizzabili e dunque sono simili per la proposizione 5.4.

35 Stabilire per quali valori del parametro reale k le due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

sono simili.

Soluzione. Si osservi anzitutto che le matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

La matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile perché l'autovalore $\lambda = 3$ è semplice e dunque automaticamente regolare, mentre per l'autovalore doppio $\lambda = 2$ abbiamo che

$$g_2(\mathbf{B}) = 3 - r(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Di conseguenza, $\mathbf{A}$ è simile a $\mathbf{B}$ se e soltanto se anche $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile e cioè se e soltanto se l'autovalore doppio $\lambda = 2$ è regolare anche per $\mathbf{A}$. Abbiamo

$$g_2(\mathbf{A}) = 3 - r(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-2 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \text{ o } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \neq 1, 2. \end{cases}$$

Dunque $\lambda = 2$ è regolare solo quando $k = 1$ o $k = 2$ e questi sono gli unici casi in cui $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili.

36 Stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k-1 & k-2 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 \\ k-2 & k-2 & 3-k \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. In corrispondenza di tali valori scrivere una matrice diagonale simile ad $\mathbf{A}$ e una relativa matrice di passaggio.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

e ammette $\lambda = 1$ come unico autovalore triplo. La matrice $\mathbf{A}$ è dunque diagonalizzabile se e soltanto se questo autovalore è regolare. Poiché

$$g_3 = 3 - r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} k-2 & k-2 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 \\ k-2 & k-2 & 2-k \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 2 \\ 2 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}$$

possiamo concludere che $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile solo per $k = 2$. In questo caso $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ è già diagonale e quindi possiamo prendere $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ come matrice di passaggio.

37 Si consideri l'equazione matriciale $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{X}$ incognita. L'equazione ammette soluzioni? Perché? La soluzione, se esiste, è unica? Si determini, se possibile, una soluzione.

Soluzione. L'equazione ha soluzione se e soltanto se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili. Le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(4-\lambda)$$

e $P(\lambda)$ ha tre zeri semplici; le due matrici sono dunque diagonalizzabili e di conseguenza simili per la proposizione 5.4. Supponiamo allora che $\mathbf{X}$ sia una soluzione dell'equazione. Se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

è la matrice degli autovalori e $\mathbf{T}$ è una matrice invertibile tale che $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{D}$, allora

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{T} = (\mathbf{X}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{X}\mathbf{T}).$$

Quindi, posto $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{T}$, abbiamo $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ e dunque le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le matrici della forma $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}$ dove $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ sono matrici invertibili tali che $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$. Queste matrici si costruiscono prendendo come colonne basi di autovettori per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e dunque le soluzioni sono in numero infinito; basta moltiplicare un autovettore della base per uno scalare non nullo per ottenere una base differente. Per determinare esplicitamente una soluzione, cerchiamo anzitutto una base di $\mathbb{K}^3$ costituita da autovettori di $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{V}_0 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_4 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Possiamo dunque prendere

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo poi una base di $\mathbb{K}^3$ costituita da autovettori di $\mathbf{B}$

$$\mathbf{V}'_0 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}'_1 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}'_4 = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

e prendiamo, ad esempio,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora una soluzione dell'equazione è

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

38 Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia diagonalizzabile e che $\mathbf{B}$ non lo sia. Mostrare che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non sono simili (il motivo è che la diagonalizzabilità dipende solo dall'applicazione lineare rappresentata dalla matrice, e non dalla particolare matrice usata per rappresentarla).

Soluzione. Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathbf{A}$ è simile ad una matrice diagonale $\mathbf{D}$. Se ora $\mathbf{B}$ fosse simile ad $\mathbf{A}$, allora, poiché la similitudine è una relazione di equivalenza, $\mathbf{B}$ sarebbe simile a $\mathbf{D}$ per transitività. Ma essendo simile ad una matrice diagonale sarebbe diagonalizzabile, contro le ipotesi fatte.

39 Per quali valori di k le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sono simili? (Suggerimento: per i valori di k plausibili che relazione c'è tra le colonne di $\mathbf{A}$ e quelle di $\mathbf{B}$? Come si esprime tale relazione in termini delle applicazioni rappresentate dalle due matrici?)

Soluzione. Se due matrici sono simili devono avere, per la proposizione 5.3, la stessa traccia. Dal momento che $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = k + 6$ e $\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = 7$, l'unico caso in cui le matrici possono essere simili si ha quando $k = 1$. In questo caso, si osservi che i valori che si trovano nelle colonne di $\mathbf{A}$ sono gli stessi che si trovano nelle colonne di $\mathbf{B}$, ma in ordine permutato. Più precisamente, se consideriamo la permutazione $\sigma = (3, 1, 2)$ e applichiamo questa permutazione alle colonne di $\mathbf{B}$, troviamo

$$\mathbf{B}\mathbf{P}_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ora si vede che la stessa permutazione σ, applicata alle righe di questa matrice, produce la matrice $\mathbf{A}$. Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{B} \mathbf{P}_\sigma^{-1}$ e questo mostra che, per $k = 1$, le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili. Alternativamente, si può dimostrare che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili verificando direttamente che, se $\mathfrak{L}$ è l'applicazione rappresentata da $\mathbf{A}$ rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, allora $\mathbf{B}$ rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$.

40 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n e sia $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I}$. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore 5, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore anche di $\mathbf{B}$? Qual è l'autovalore corrispondente?

Soluzione. Si tratta di un'applicazione immediata della proposizione 5.5. Se consideriamo infatti il polinomio $P(x) = x^2 - 4x + 1$, allora $\mathbf{B} = P(\mathbf{A})$ e dalla proposizione si ottiene che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{B}$ relativo all'autovalore $P(5) = 6$.

41 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata. Mostrare che, se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, allora $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ è invertibile. (Suggerimento: la condizione $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ determina gli autovalori di $\mathbf{A}$.)

Soluzione. L'unico autovalore di $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ è 0. Dalla proposizione 5.5 consegue allora che $\lambda = 0$ è anche l'unico autovalore di $\mathbf{A}$. In particolare $\lambda = -1$ non è autovalore di $\mathbf{A}$ e questo significa che l'autospazio $\mathbf{V}_{-1}$ è ridotto al vettore nullo. Ma

$$\mathbf{V}_{-1} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}).$$

Dunque $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ ha nucleo nullo e quindi è invertibile.

42 Come nel testo, poniamo $\mathcal{D}(y(t)) = y'(t)$ e $y_\lambda(t) = e^{\lambda t}$.

1. Mostrare per induzione che per ogni intero $m \geq 1$

$$\mathcal{D}^m(ty_\lambda(t)) = \lambda^m ty_\lambda(t) + m\lambda^{m-1}y_\lambda(t).$$

2. Dedurre che, per ogni polinomio $P(x)$,

$$P(\mathcal{D})(ty_\lambda(t)) = P(\lambda)ty_\lambda(t) + P'(\lambda)y_\lambda(t).$$

3. Mostrare che $ty_\lambda(t)$ risolve l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\lambda y'(t) + \lambda^2 y(t) = 0.$$

Soluzione. 1. Per $m = 1$ la formula si riduce all'uguaglianza

$$\mathcal{D}(te^{\lambda t}) = \lambda te^{\lambda t} + e^{\lambda t}$$

Supponiamo vera la formula per un certo $m \geq 1$ e dimostriamola per $m+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{m+1}(ty_\lambda) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}^m(ty_\lambda)) \\
&= \mathcal{D}(\lambda^m ty_\lambda + m\lambda^{m-1}y_\lambda) \\
&= \lambda^m(\mathcal{D}(t)y_\lambda + t\mathcal{D}(y_\lambda)) + m\lambda^{m-1}\mathcal{D}(y_\lambda) \\
&= \lambda^m(y_\lambda + t\lambda y_\lambda) + m\lambda^{m-1}\lambda y_\lambda \\
&= \lambda^m y_\lambda + \lambda^{m+1}ty_\lambda + m\lambda^m y_\lambda \\
&= \lambda^{m+1}ty_\lambda + (m+1)\lambda^m y_\lambda.
\end{aligned}$$

2. Supponiamo che sia

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m x^m.$$

Allora

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{D})(ty_\lambda) &= \sum_{m=0}^{n} c_m \mathcal{D}^m(ty_\lambda) = c_0 ty_\lambda + \sum_{m=1}^{n} \mathcal{D}^m(ty_\lambda) = \\
&= c_0 ty_\lambda + \sum_{m=1}^{n} c_m(\lambda^m ty_\lambda + m\lambda^{m-1} y_\lambda) = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n} c_m \lambda^m\right) ty_\lambda + \left(\sum_{m=1}^{n} c_m m \lambda^{m-1}\right) y_\lambda = \\
&= P(\lambda) ty_\lambda + P'(\lambda) y_\lambda.
\end{aligned}$$

3. Consideriamo il polinomio $P(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = (x-\lambda)^2$. L'equazione differenziale assegnata si può riscrivere nella forma $P(\mathcal{D})y = 0$. Dalla parte 2 dell'esercizio, tenendo conto del fatto che $P'(x) = 2(x - \lambda)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{D})(ty_\lambda) &= P(\lambda) ty_\lambda + P'(\lambda) y_\lambda \\
&= (\lambda - \lambda)^2 ty_\lambda + 2(\lambda - \lambda) y_\lambda \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dunque ty_λ è soluzione dell'equazione differenziale.

43 Una matrice quadrata $\mathbf{N}$ si dice *nilpotente* se esiste un intero positivo m tale che $\mathbf{N}^m$ sia la matrice nulla.

1. Sia $\mathbf{N}$ una matrice nilpotente. Si mostri che $\lambda = 0$ è l'unico autovalore di $\mathbf{N}$.
2. Si mostri che una matrice simile a una matrice nilpotente è nilpotente.
3. Sia $\mathbf{N}$ una matrice nilpotente di ordine 2. Si mostri che $\mathbf{N}$ è simile a una matrice $\mathbf{U}$ della forma
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Si concluda che $\mathbf{N}^2$ è la matrice nulla. [Suggerimento: si rappresenti l'applicazione lineare $\mathbf{Nx}$ rispetto a una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ in cui $\mathbf{v}_1$ appartiene al nucleo (cioè è un autovettore di $\mathbf{N}$).]
4. Sia $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ una matrice quadrata di ordine n. Si supponga che $\mathbf{U}$ sia triangolare superiore con gli elementi sulla diagonale principale nulli:
$$u_{ij} = 0 \quad \text{se } i \geq j.$$
Si mostri che $\mathbf{U}$ è nilpotente.
5. Si dia un esempio di una matrice nilpotente 2×2 che non sia triangolare.

Soluzione. 1. Si osservi anzitutto che se una matrice è invertibile, allora tutte le sue potenze sono invertibili. Una matrice nilpotente $\mathbf{N}$ non può dunque essere invertibile e questo significa che $\mathrm{Ker}(\mathbf{N}) \neq \{\mathbf{0}\}$, ovvero che $\lambda = 0$ è un autovalore di $\mathbf{N}$. D'altra parte, se λ è un autovalore della matrice nilpotente $\mathbf{N}$, allora, dalla proposizione 5.5, sappiamo che λ^m è un autovalore della matrice $\mathbf{N}^m = \mathbf{O}$. Dal momento che l'unico autovalore della matrice nulla è zero, deve essere $\lambda^m = 0$ e dunque $\lambda = 0$. Dunque ogni matrice nilpotente ammette $\lambda = 0$ come unico autovalore.

2. Supponiamo che $\mathbf{N}$ sia una matrice nilpotente e che $\mathbf{N}^m = \mathbf{O}$. Supponiamo poi che $\mathbf{A}$ sia simile a $\mathbf{N}$. Deve allora esistere una matrice invertibile $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{S}$. Ma allora

$$\mathbf{A}^m = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{S})^m = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{N}^m\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{O}\mathbf{S} = \mathbf{O}$$

e dunque $\mathbf{A}$ è nilpotente.

3. Sia $\mathfrak{L}$ la funzione lineare associata alla matrice $\mathbf{N}$. Dal punto 1 dell'esercizio sappiamo che $\lambda = 0$ è un autovalore di $\mathfrak{L}$ e quindi che esiste un autovettore $\mathbf{v}_1$ relativo a questo autovalore. Questo significa che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Completiamo l'insieme indipendente $\{\mathbf{v}_1\}$ in modo da ottenere una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. La matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto a $\mathcal{B}$ deve essere della forma

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

e quindi ammette 0 e d come autovalori. Ma $\mathbf{N}$ e $\mathbf{U}$ rappresentano la stessa funzione lineare rispetto a basi differenti, quindi devono essere simili e, in particolare, devono avere gli stessi autovalori. Dal punto 1 sappiamo che l'unico autovalore di $\mathbf{N}$ è 0, e dunque deve essere $d = 0$. Dal punto 2 sappiamo che $\mathbf{N}^2$ è simile a $\mathbf{U}^2 = \mathbf{O}$, dunque $\mathbf{N}^2 = \mathbf{O}$.

4. Sia $\mathfrak{L}$ la funzione lineare associata alla matrice $\mathbf{U}$. Sia

$$\mathbf{V}_k = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & \text{se } k = 0 \\ \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_k) & \text{se } k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Dalle ipotesi fatte sulla matrice $\mathbf{U}$ abbiamo che

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}\mathbf{e}_j = \sum_{i<j} u_{ij}\mathbf{e}_j \in \mathbf{V}_{j-1}$$

e dunque che $\mathfrak{L}(\mathbf{V}_k) \subseteq \mathbf{V}_{k-1}$ per ogni $k > 0$. Di conseguenza, $\mathfrak{L}^n(\mathbf{V}_k) \subseteq \mathbf{V}_0$ per ogni k e questo significa che $\mathfrak{L}^n = 0$, cioè che $\mathbf{U}^n = \mathbf{O}$.

5. Dal punto 3 sappiamo che deve essere $\mathbf{N} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S}$ per una matrice invertibile $\mathbf{S}$. Si osservi anche che non possiamo prendere $b = 0$ perché in questo caso si avrebbe $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ e quindi $\mathbf{N} = \mathbf{O}$ che è triangolare. Fatta eccezione per questo caso, il valore di b è ininfluente per la forma di $\mathbf{N}$ e quindi prendiamo $b = 1$ per semplificare i calcoli. Consideriamo allora una generica matrice invertibile

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso, al solo scopo di semplificare i calcoli, imponiamo che sia $\det(\mathbf{S}) = 1$. Sotto queste ipotesi abbiamo che

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{21}s_{22} & s_{22}^2 \\ -s_{21}^2 & -s_{21}s_{22} \end{bmatrix}.$$

Questo calcolo mostra che s_{21} e s_{22} non possono essere nulli se vogliamo che $\mathbf{N}$ non sia triangolare. Possiamo però fare in modo che $\mathbf{S}$ sia triangolare bassa, in modo che $\det(\mathbf{S}) = s_{11}s_{22}$. Possiamo allora prendere

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. IL PROBLEMA DELLA FORMA CANONICA

44 Determinare la forma canonica di Jordan delle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le due matrici sono simili?

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ ammette come unico autovalore $\lambda = 0$ e quindi ha solo blocchi di tipo $\mathbf{J}(0)$. Dall'osservazione di pagina 352 sappiamo che il numero di questi blocchi è

$$g_0(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = 3 - r(\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2.$$

Dunque $\mathbf{A}$ deve avere un blocco di ordine 1 e un blocco di ordine 2 e deve essere simile alla matrice di Jordan

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

In modo simile, $\mathbf{B}$ ammette $\lambda = 0$ come unico autovalore. Anche in questo caso $g_0(\mathbf{B}) = 2$ e dunque $\mathbf{B}$ è simile alla matrice $\mathbf{J}$. Poiché la similitudine è una relazione di equivalenza, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili.

45 Quante possibilità ci sono per la forma canonica di Jordan di una matrice 3×3 nilpotente? Descriverle tutte. (Suggerimento: in quanti modi si può scrivere 3 come somma di interi positivi? Le possibilità sono $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$.)

Soluzione. Se la matrice è nilpotente, allora l'unico autovalore deve essere $\lambda = 0$. Di conseguenza la matrice di Jordan contiene solo blocchi di tipo $\mathbf{J}(0)$. La somma delle dimensioni di questi blocchi deve essere 3. Dunque possiamo avere un unico blocco di ordine 3, oppure due blocchi di ordine rispettivamente 1 e 2, oppure tre blocchi di ordine 1. Le tre possibilità sono elencate esplicitamente di seguito.

$$\mathbf{J}_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_1(0) \oplus \mathbf{J}_2(0) = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{J}_1(0) \oplus \mathbf{J}_1(0) \oplus \mathbf{J}_1(0) = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dove il simbolo $\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{J}_{k_s}(\lambda_s)$ denota la matrice di Jordan i cui blocchi sono $\mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{J}_{k_s}(\lambda_s)$.

46 Mostrare che due matrici quadrate di ordine $n = 2$ (oppure $n = 3$) che abbiano gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche hanno necessariamente tutti gli invarianti $r_{k,d}$ uguali, e quindi sono simili.

Soluzione. Consideriamo anzitutto il caso $n = 2$. Fissato un autovalore λ, il corollario 6.11 implica che le possibilità per le successioni degli invarianti relativi a λ sono quelle descritte nelle prime tre colonne della tabella seguente.

Invarianti			Indice	Molteplicità		Blocchi di Jordan
r_0	r_1	r_2	e	g_λ	a_λ	
2	1	1	1	1	1	$\mathbf{J}_1(\lambda)$
2	1	0	2	1	2	$\mathbf{J}_2(\lambda)$
2	0	0	1	2	2	$\mathbf{J}_1(\lambda) \oplus \mathbf{J}_1(\lambda)$

Le due colonne della molteplicità mostrano che i valori corrispondenti della molteplicità geometrica e algebrica sono sufficienti a distinguere i tre casi.

Esaminiamo ora il caso $n = 3$. Fissato un autovalore λ, le possibilità teoriche previste dal corollario 6.11 per le successioni degli invarianti relativi a λ sono quelle descritte nelle prime quattro colonne della tabella seguente.

Invarianti				Indice	Molteplicità		Blocchi di Jordan
r_0	r_1	r_2	r_3	e	g_λ	a_λ	
3	2	2	2	1	1	1	$\mathbf{J}_1(\lambda)$
3	2	1	1	2	1	2	$\mathbf{J}_2(\lambda)$
3	2	1	0	3	1	3	$\mathbf{J}_3(\lambda)$
3	2	0	0	2	1	3	—
3	1	1	1	1	2	2	$\mathbf{J}_1(\lambda) \oplus \mathbf{J}_1(\lambda)$
3	1	0	0	2	2	3	$\mathbf{J}_1(\lambda) \oplus \mathbf{J}_2(\lambda)$
3	0	0	0	1	3	3	$\mathbf{J}_1(\lambda) \oplus \mathbf{J}_1(\lambda) \oplus \mathbf{J}_1(\lambda)$

A prima vista esistono due casi che le molteplicità dell'autovalore non sembrano poter distinguere, quelli indicati nella terza e nella quarta successione. Tuttavia la quarta successione non può verificarsi. Infatti il numero di blocchi di ordine 1 (che non può essere negativo per il lemma 6.9 o per il teorema 6.10) sarebbe $r_2 - 2r_1 + r_0 = 0-4+3 = -1$ assurdo. Un altro modo per escludere l'esistenza della quarta successione è quello di osservare che la condizione $g_\lambda = 1$ indica che esiste un unico blocco di Jordan relativo a λ la cui dimensione è e, quindi 2, il che è assurdo.

Escluso questo caso, tutti gli altri possono essere distinti dalle molteplicità.

47 Mostrare che le due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sono simili, e determinare la loro forma canonica di Jordan.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ è triangolare alta; dalla diagonale principale si vede quindi immediatamente che ammette l'autovalore doppio $\lambda_1 = 1$ e l'autovalore semplice $\lambda_2 = 5$. La molteplicità geometrica di λ_1 è

$$g_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 3 - r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Dall'esercizio 46 segue che la forma canonica di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{J}_2(1) \oplus \mathbf{J}_1(5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{B}$ ha polinomio caratteristico $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$ e dunque ha gli stessi autovalori di $\mathbf{A}$ con le stesse molteplicità. Resta da determinare la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$. Abbiamo

$$g_{\lambda_1} = 3 - r(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Dall'esercizio 46 abbiamo allora che $\mathbf{B}$ ha la stessa forma canonica di Jordan di $\mathbf{A}$ e dunque che le due matrici sono simili.

48 Determinare la forma canonica di Jordan delle matrici seguenti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è $P(\lambda) = (1-\lambda)^4$. Dunque $\mathbf{A}$ ammette $\lambda = 1$ come unico autovalore quadruplo e la sua forma canonica di Jordan $\mathbf{J}$ contiene solo blocchi di tipo $\mathbf{J}(1)$. Calcoliamo gli invarianti $r_{1,d}$.

$$r_{1,0} = r(\mathbf{I}) = 4$$

$$r_{1,1} = r(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$r_{1,2} = r((\mathbf{A} - \mathbf{I})^2) = r\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$r_{1,3} = r((\mathbf{A} - \mathbf{I})^3) = r(\mathbf{O}) = 0$$

Tutti gli invarianti successivi sono dunque nulli. Il numero b_k dei blocchi $\mathbf{J}_k(1)$ è

$$\begin{aligned} b_1 &= r_{1,2} - 2r_{1,1} + r_{1,0} = 1 \\ b_2 &= r_{1,3} - 2r_{1,2} + r_{1,1} = 0 \\ b_3 &= r_{1,4} - 2r_{1,3} + r_{1,2} = 1 \\ b_4 &= r_{1,5} - 2r_{1,4} + r_{1,3} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la forma canonica di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{J}_1(1) \oplus \mathbf{J}_3(1) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Si osservi che il calcolo di tutti gli invarianti $r_{1,d}$ non era, a rigore, strettamente necessario. Il fatto che $r_{1,1} = 2$ stabilisce infatti che $\mathbf{J}$ contiene solo due blocchi di tipo $\mathbf{J}(1)$. Dal momento che $\mathbf{A}$ ha ordine 4 abbiamo solo due possibilità: due blocchi di ordine 2 oppure un blocco di ordine 1 e un blocco di ordine 3. Se ci fossero due blocchi di ordine 2 avremmo $r_{1,2} = 0$; quindi, una volta stabilito che $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ non è la matrice nulla, possiamo concludere che la forma canonica di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{J}_1(1) \oplus \mathbf{J}_3(1)$.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{B}$ è $P(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$, dunque gli autovalori di $\mathbf{B}$ sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi doppi. Determiniamo gli invarianti per λ_1.

$$\begin{aligned}
r_{1,0} &= 4 \\
r_{1,1} = r(\mathbf{B}) &= r\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \\
r_{1,2} = r(\mathbf{B}^2) &= r\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \\
r_{1,3} = r(\mathbf{B}^3) &= r\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2.
\end{aligned}$$

Gli invarianti successivi sono dunque tutti uguali a due. Invece di calcolare ancora una volta il numero dei blocchi con il teorema 6.10 osserviamo che devono esserci $g_0 = 4 - r_{1,1} = 1$ blocchi di tipo $\mathbf{J}_k(0)$ e che la dimensione massima di questa blocchi è $e_0 = 2$; in conclusione abbiamo un unico blocco $\mathbf{J}_2(0)$. Se cominciamo a calcolare gli invarianti per λ_2 troviamo che

$$r_{2,1} = r(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = r\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

e dunque che $\mathbf{B}$ contiene due blocchi di tipo $\mathbf{J}_k(1)$. Poiché $\mathbf{B}$ ha ordine quattro e deve già contenere un blocco $\mathbf{J}_2(0)$, i due nuovi blocchi devono necessariamente avere ordine uno. Dunque la forma canonica di $\mathbf{B}$ è

$$\mathbf{J}_2(0) \oplus \mathbf{J}_1(1) \oplus \mathbf{J}_1(1) = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

49 Mostrare che una matrice nilpotente non è invertibile. Mostrare che la traccia di una matrice nilpotente è uguale a zero.

Soluzione. Dall'esercizio 43 sappiamo che l'unico autovalore di una matrice nilpotente $\mathbf{N}$ è $\lambda = 0$. Di conseguenza la forma canonica di Jordan $\mathbf{J}$ di $\mathbf{N}$ è una matrice triangolare alta stretta, cioè con tutti zeri sulla diagonale principale. In particolare, $\text{tr}(\mathbf{J}) = 0$ e $\det(\mathbf{J}) = 0$. Poiché il determinante e la traccia sono invarianti per similitudine, possiamo concludere che $\text{tr}(\mathbf{N}) = 0$ e $\det(\mathbf{N}) = 0$. Il fatto che il determinante sia nullo prova che $\mathbf{N}$ non è invertibile.

50 Mostrare che, se $\mathbf{N}$ è nilpotente e $\mathbf{BN} = \mathbf{NB}$, allora $\mathbf{BN}$ è nilpotente.

Soluzione. Sia m l'indice di nilpotenza di $\mathbf{N}$, cioè il minimo intero positivo per cui $\mathbf{N}^m = \mathbf{O}$. Allora

$$\begin{aligned}(\mathbf{BN})^m &= (\mathbf{BN})(\mathbf{BN})\cdots(\mathbf{BN})\\ &= (\mathbf{B}\cdots\mathbf{B})(\mathbf{N}\cdots\mathbf{N})\\ &= \mathbf{B}^m\mathbf{N}^m\\ &= \mathbf{B}^m\mathbf{O}\\ &= \mathbf{O}\end{aligned}$$

e dunque $\mathbf{BN}$ è nilpotente. Il punto cruciale della dimostrazione è la seconda uguaglianza, in cui si è fatto uso della relazione di commutazione $\mathbf{BN} = \mathbf{NB}$.

51 Mostrare che, se $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ sono nilpotenti e $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2\mathbf{N}_1$, allora $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ è nilpotente. (Suggerimento: binomio di Newton.)

Soluzione. Siano m_1 e m_2 gli indici di nilpotenza di $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$. Poiché $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ commutano, possiamo usare la formula del binomio di Newton e ottenere che

$$(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{m_1+m_2} = \sum_{i+j=m_1+m_2} \binom{m_1+m_2}{i} \mathbf{N}_1^i\mathbf{N}_2^j.$$

Si osservi che, nella somma a destra, se $i \geq m_1$ allora $\mathbf{N}_1^i = \mathbf{O}$. Se invece $i \leq m_1$ allora deve essere $j \geq m_2$ e dunque $\mathbf{N}_2^j = \mathbf{O}$. In ogni caso tutti gli addendi sono nulli e dunque $(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{m_1+m_2} = \mathbf{O}$.

52 Mostrare che, se $\mathbf{N}$ è nilpotente e diagonalizzabile, allora $\mathbf{N}$ è la matrice nulla.

Soluzione. Dal momento che $\mathbf{N}$ è nilpotente, l'unico autovalore di $\mathbf{N}$ è $\lambda = 0$ per l'esercizio 43. Dunque la forma canonica diagonale di $\mathbf{N}$ è la matrice nulla $\mathbf{O}$. Ma allora $\mathbf{N}$ è simile ad $\mathbf{O}$, quindi $\mathbf{N}$ è la matrice nulla.

53 Mostrare che la restrizione di $\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$ al sottospazio radicale $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$ è nilpotente.

Soluzione. Per alleggerire la notazione poniamo $\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$ e $\mathbf{K}_i = \text{Ker}(\mathbf{T}_\lambda^i)$. Dalla proposizione 6.6 otteniamo la catena ascendente di sottospazi

$$\{0\} = \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{e+1} = \cdots$$

che si stabilizza all'indice e. Insieme alla definizione 6.5 questo implica che

$$\mathbf{R}_\lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_e.$$

Ma allora $\mathbf{T}_\lambda^e \mathbf{v} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$ e $\mathbf{T}_\lambda$ è nilpotente su $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$.

54 La decomposizione di Jordan è unica: si supponga che $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{N}$, con $\mathbf{B}$ diagonalizzabile, $\mathbf{N}$ nilpotente e $\mathbf{NB} = \mathbf{BN}$; mostrare che i sottospazi radicali di $\mathbf{A}$ coincidono con gli autospazi di $\mathbf{B}$. Perché questo determina $\mathbf{B}$ (e quindi anche $\mathbf{N}$)? (Suggerimento: $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^d = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} - \mathbf{N})^d$.)

Soluzione. Dimostriamo anzitutto che se $\mathbf{A} = \mathbf{B}+\mathbf{N}$ con $\mathbf{N}$ nilpotente e $\mathbf{BN} = \mathbf{NB}$, allora $\mathbf{R}_0(\mathbf{A}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{B})$. Infatti $\mathbf{B}$ è nilpotente su $\mathbf{R}_0(\mathbf{B})$ per l'esercizio 53, e $\mathbf{N}$ è nilpotente su $\mathbf{R}_0(\mathbf{B})$ perché è nilpotente sull'intero spazio. Dall'esercizio 51 abbiamo che $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{N}$ è nilpotente su $\mathbf{R}_0(\mathbf{B})$. Ma questo significa che $\mathbf{R}_0(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{R}_0(\mathbf{A})$. Se ora poniamo $\mathbf{M} = -\mathbf{N}$, allora $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{M}$, la matrice $\mathbf{M}$ è nilpotente e commuta con $\mathbf{A}$. Dunque, per l'argomento appena utilizzato, $\mathbf{R}_0(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{R}_0(\mathbf{B})$. Dalle due inclusioni consegue l'uguaglianza dei sottospazi radicali.

Consideriamo ora il caso di un autovalore arbitrario λ. Se poniamo $\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, allora $\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda + \mathbf{N}$ e $\mathbf{NB}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda\mathbf{N}$. Dalla prima parte della dimostrazione, abbiamo allora che

$$\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{A}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{A}_\lambda) = \mathbf{R}_0(\mathbf{B}_\lambda) = \mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B}).$$

Dunque $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ hanno tutti gli autovalori e i sottospazi radicali coincidenti. Siccome $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile, gli autospazi di $\mathbf{B}$ coincidono con i sottospazi radicali di $\mathbf{B}$ e quindi con quelli di $\mathbf{A}$. Da questo segue che $\mathbf{B}$ è univocamente determinata da $\mathbf{A}$. Infatti, se

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{R}_{\lambda_i}$$

è la decomposizione dello spazio come somma diretta dei sottospazi radicali di $\mathbf{A}$, cioè degli autospazi di $\mathbf{B}$, allora $\mathbf{B}$ agisce sui vettori del sottospazio $\mathbf{R}_{\lambda_i}$ come moltiplicazione per λ_i; siccome $\mathbb{C}^n$ è la somma diretta di tali autospazi, questo determina $\mathbf{Bv}$ per ogni $\mathbf{v}$ di $\mathbb{C}^n$. Quindi $\mathbf{B}$ è univocamente determinata dagli autovalori e dai sottospazi radicali di $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{N}$ è allora determinata per differenza, essendo $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

55 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è invertibile e $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, allora $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$.

Soluzione. Moltiplicando $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ a destra per $\mathbf{I} = \mathbf{AA}^{-1}$ otteniamo

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BI} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BAA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{ABA}^{-1} = \mathbf{BA}^{-1}.$$

56 Sia $\mathbf{N}$ una matrice nilpotente. Mostrare che $\mathbf{I}+\mathbf{N}$ è invertibile e dare una formula per l'inversa. Mostrare poi che, se $\mathbf{B}$ è invertibile, $\mathbf{N}$ è nilpotente e $\mathbf{BN} = \mathbf{NB}$, allora $\mathbf{B} + \mathbf{N}$ è invertibile. [Suggerimento: per l'invertibilità basta far vedere che 0 non è un autovalore di $\mathbf{I} + \mathbf{N}$; la formula per l'inversa si trova considerando l'identità $(1 + x)(1 - x + \cdots \pm x^{d-1}) = 1 \pm x^d$.]

Soluzione. Sia d l'indice di nilpotenza di $\mathbf{N}$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\cdot\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\mathbf{N}^i &= \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\mathbf{N}^i+\sum_{i=1}^{d}(-1)^{i-1}\mathbf{N}^i\\ &= \mathbf{I}+(-1)^d\mathbf{N}^d\\ &= \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Questo prova che $\mathbf{I}+\mathbf{N}$ è invertibile e che

$$(\mathbf{I}+\mathbf{N})^{-1}=\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\mathbf{N}^i.$$

Per la seconda parte dell'esercizio basta osservare che $\mathbf{B}+\mathbf{N}=\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$. Il primo fattore è invertibile per ipotesi, quindi basta dimostrare che anche il secondo fattore è invertibile. Dall'esercizio 55 sappiamo che $\mathbf{B}^{-1}$ commuta con $\mathbf{N}$ e dall'esercizio 50 sappiamo che $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ è nilpotente. Dunque, per la prima parte dell'esercizio, $\mathbf{I}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ è invertibile.

57 Sia $\mathbf{A}$ una matrice tale che $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$. Mostrare che $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile. (Suggerimento: utilizzare la decomposizione di Jordan $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{N}$, mostrare che $\mathbf{B}^2=\mathbf{I}$ e che $\mathbf{N}$ dev'essere nulla usando l'esercizio precedente. Per i coraggiosi: dimostrare che, se $\mathbf{A}^d=\mathbf{I}$, allora $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.)

Soluzione. Sia $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{N}$ la decomposizione di Jordan di $\mathbf{A}$. Poiché $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ commutano, abbiamo

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{B}^2+2\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^2.$$

La matrice $\mathbf{B}^2$ è diagonalizzabile, perché potenza di una matrice diagonalizzabile. La matrice $\mathbf{B}\mathbf{N}$ è nilpotente per l'esercizio 50 e la matrice $\mathbf{N}^2$ è nilpotente essendo potenza di una matrice nilpotente; di conseguenza, $2\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^2$ è nilpotente per l'esercizio 51. Infine, poiché $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ commutano, anche $\mathbf{B}^2$ e $2\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^2$ commutano. Ma allora $\mathbf{A}^2=\mathbf{B}^2+(2\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^2)$ è la decomposizione di Jordan di $\mathbf{A}^2$. D'altra parte, $\mathbf{I}=\mathbf{I}+\mathbf{O}$ è una decomposizione di Jordan di $\mathbf{I}$. Da $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ e dall'unicità della decomposizione di Jordan, provata nell'esercizio 54, consegue allora che

$$\mathbf{B}^2=\mathbf{I},\qquad 2\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^2=\mathbf{O}.$$

La prima formula prova che $\mathbf{B}$ è invertibile. Dalla seconda si ottiene $(2\mathbf{B}+\mathbf{N})\mathbf{N}=\mathbf{O}$ e, poiché $2\mathbf{B}+\mathbf{N}$ è invertibile per l'esercizio 56, che $\mathbf{N}=\mathbf{O}$. Dunque $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

Il caso $\mathbf{A}^d=\mathbf{I}$ è simile. Si consideri infatti la decomposizione di Jordan $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{N}$. Dal momento $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ commutano, abbiamo

$$\mathbf{A}^d=\mathbf{B}^d+\binom{d}{1}\mathbf{B}^{d-1}\mathbf{N}+\binom{d}{2}\mathbf{B}^{d-2}\mathbf{N}^2+\cdots+\mathbf{N}^d.$$

Come nel caso precedente, $\mathbf{B}^d$ è diagonale, mentre tutti gli altri addendi sono matrici nilpotenti che commutano, quindi la loro somma è una matrice nilpotente. Dalla decomposizione $\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{O}$ e dal fatto che $\mathbf{A}^d = \mathbf{I}$ si ottiene, sempre per l'unicità della decomposizione di Jordan, che

$$\mathbf{B}^d = \mathbf{I}, \qquad \binom{d}{1}\mathbf{B}^{d-1}\mathbf{N} + \binom{d}{2}\mathbf{B}^{d-2}\mathbf{N}^2 + \cdots + \mathbf{N}^d = \mathbf{O}.$$

La prima formula prova che $\mathbf{B}$ è invertibile con inversa $\mathbf{B}^{d-1}$. Riscriviamo la seconda formula come

$$\left(\binom{d}{1}\mathbf{B}^{d-1} + \binom{d}{2}\mathbf{B}^{d-2}\mathbf{N} + \cdots + \mathbf{N}^{d-1}\right)\mathbf{N} = \mathbf{O}.$$

Il termine in parentesi è invertibile per l'esercizio 56: infatti $\mathbf{B}^{d-1}$ è invertibile mentre i rimanenti addendi sono nilpotenti per l'esercizio 50 e dunque la loro somma è nilpotente per l'esercizio 51. Dunque $\mathbf{N} = \mathbf{O}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

58 Mostrare che i seguenti sottospazi di $\mathbf{V}$ sono $\mathbf{T}$-invarianti: il nucleo e l'immagine di $\mathbf{T}$, gli autospazi e i sottospazi radicali di $\mathbf{T}$.

Soluzione. Proviamo che $\mathrm{Im}(\mathbf{T})$ è $\mathbf{T}$-invariante. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, allora $\mathbf{Tv} \in \mathrm{Im}(\mathbf{T})$. In particolare questo vale per i vettori $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(\mathbf{T})$.

Proviamo che l'autospazio $\mathbf{V}_\lambda$ relativo all'autovalore λ è $\mathbf{T}$-invariante. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, allora $\mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{v})) = \mathbf{T}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{T}(\mathbf{v})$, dunque $\mathbf{T}(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}_\lambda$. Se prendiamo $\lambda = 0$ otteniamo come caso particolare che $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ è $\mathbf{T}$-invariante.

Proviamo infine che il sottospazio radicale $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$ è $\mathbf{T}$-invariante. Poniamo $\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$ e osserviamo che $\mathbf{T}_\lambda\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}_\lambda$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$, allora esiste $d \geq 1$ tale che $\mathbf{T}_\lambda^d\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e dunque

$$\mathbf{T}_\lambda^d(\mathbf{Tv}) = \mathbf{T}(\mathbf{T}_\lambda^d\mathbf{v}) = \mathbf{T0} = \mathbf{0}$$

e questo prova che $\mathbf{Tv} \in \mathbf{R}_\lambda(\mathbf{T})$.

59 Una difficoltà nella costruzione della forma canonica di Jordan è dovuta al seguente fatto: se $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}$ è un sottospazio $\mathbf{T}$-invariante, non è detto che $\mathbf{V}_1$ abbia un complemento $\mathbf{T}$-invariante, cioè che esista un sottospazio $\mathbf{T}$-invariante $\mathbf{V}_2$ tale che $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$. Dimostrare che $\mathrm{Im}(\mathbf{T})$ ha un complemento $\mathbf{T}$-invariante $\mathbf{V}_2$ se e solo se $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \cap \mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{0\}$, e in tal caso $\mathbf{V}_2 = \mathrm{Ker}(\mathbf{T})$.

Soluzione. È utile osservare preliminarmente che la proprietà descritta in questo esercizio è tipica degli spazi vettoriali finito-dimensionali. Infatti se prendiamo lo spazio vettoriale reale $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni di numeri reali e consideriamo l'operatore $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ di spostamento destro definito dalla formula

$$\mathbf{T}(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots),$$

è facile verificare che $\mathbf{T}$ è una funzione lineare iniettiva e di conseguenza la condizione $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \cap \mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$ è certamente soddisfatta perché il nucleo è nullo. D'altra parte $\mathbf{T}$ non è suriettiva e dunque il nucleo non è complemento dell'immagine.

Supponiamo allora che $\mathbf{V}$ abbia dimensione finita. Per semplificare la notazione poniamo $\mathbf{K} = \mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ e $\mathbf{I} = \mathrm{Im}(\mathbf{T})$. Dal teorema di nullità più rango e dalla formula di Grassmann abbiamo che

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{V} &= \dim \mathbf{K} + \dim \mathbf{I} \\ &= \dim(\mathbf{K} \cap \mathbf{I}) + \dim(\mathbf{K} + \mathbf{I}).\end{aligned}$$

Poiché tutte le dimensioni sono finite, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \cap \mathbf{I} = \{\mathbf{0}\} &\iff \dim(\mathbf{K} \cap \mathbf{I}) = 0 \\ &\iff \dim(\mathbf{K} + \mathbf{I}) = \dim \mathbf{V} \\ &\iff \mathbf{K} + \mathbf{I} = \mathbf{V}.\end{aligned}$$

Da questa formula consegue immediatamente che

$$\mathbf{K} \cap \mathbf{I} = \{\mathbf{0}\} \iff \mathbf{K} \oplus \mathbf{I} = \mathbf{V}.$$

Poiché $\mathbf{K}$ e $\mathbf{I}$ sono $\mathbf{T}$-invarianti per quanto dimostrato nell'esercizio 58, resta solo da provare che se $\mathbf{V}_2$ è un complemento $\mathbf{T}$-invariante di $\mathbf{I}$, allora $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_2$, allora $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$; dunque $\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Questo prova che $\mathbf{V}_2 \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{T})$. Ma, dalla proposizione 10.5 del capitolo 4 e dal teorema di nullità più rango abbiamo che

$$\dim \mathbf{V}_2 = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{I} = \dim \mathbf{K}$$

e dunque $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}$.

60 Dati due polinomi qualsiasi $P(x)$ e $Q(x)$, mostrare che $P(\mathbf{T})Q(\mathbf{T}) = Q(\mathbf{T})P(\mathbf{T})$. In particolare, $P(\mathbf{T})$ commuta con $\mathbf{T}$.

Soluzione. Supponiamo che siano

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

Allora

$$\begin{aligned}P(\mathbf{T})Q(\mathbf{T}) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{T}^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \mathbf{T}^j\right) \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j \mathbf{T}^{i+j} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} b_j a_i \mathbf{T}^{j+i} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \mathbf{T}^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{T}^i\right) \\ &= Q(\mathbf{T})P(\mathbf{T}).\end{aligned}$$

Fondamentale in questa catena di uguaglianze è la terza che utilizza due fatti: l'uguaglianza $a_i b_j = b_j a_i$ che dipende dalla commutatività del prodotto in $\mathbb{K}$; e l'uguaglianza $\mathbf{T}^{i+j} = \mathbf{T}^{j+i}$ che consegue dall'associatività del prodotto di matrici (si veda l'esercizio 8 del capitolo 3).

61 Supponiamo che $\mathbf{T}$ sia invertibile. Allora, dati due polinomi $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ in due variabili, gli operatori $P(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1})$ e $Q(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1})$ commutano.

Soluzione. Supponiamo che siano

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j, \qquad Q(x, y) = \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j.$$

A questi polinomi possiamo associare i polinomi di Laurent

$$\begin{aligned} P_1(x) = P(x, x^{-1}) &= \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^{i-j} = \sum_{i=-n}^{n} a_i x^i \\ Q_1(x) = Q(x, x^{-1}) &= \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij} x^{i-j} = \sum_{i=-n}^{n} b_i x^i \end{aligned}$$

in cui compaiono anche potenze negative dell'indeterminata. Ora, osservato che l'uguaglianza

$$\mathbf{T}^i \mathbf{T}^j = \mathbf{T}^{i+j} = \mathbf{T}^j \mathbf{T}^i$$

vale per tutti gli interi i e j, per quanto dimostrato nell'esercizio 17 del capitolo 3, possiamo ripetere verbalmente la dimostrazione dell'esercizio 60 e ottenere che $P_1(\mathbf{T}) Q_1(\mathbf{T}) = Q_1(\mathbf{T}) P_1(\mathbf{T})$, da cui

$$\begin{aligned} P(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}) Q(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}) &= P_1(\mathbf{T}) Q_1(\mathbf{T}) \\ &= Q_1(\mathbf{T}) P_1(\mathbf{T}) \\ &= Q(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}) P(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}). \end{aligned}$$

62 Supponiamo $\mathbf{B} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sia un operatore che commuta con $\mathbf{T}$. Mostrare che $\operatorname{Ker}(\mathbf{B})$ e $\operatorname{Im}(\mathbf{B})$ sono $\mathbf{T}$-invarianti. Dedurre che gli autospazi e i sottospazi radicali di $\mathbf{T}$ sono $\mathbf{T}$-invarianti.

Soluzione. Sia $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B})$. Allora

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Questo prova che $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B})$ e dunque che $\operatorname{Ker}(\mathbf{B})$ è $\mathbf{T}$-invariante. In modo simile, se $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(\mathbf{B})$, allora deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ per almeno un $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Ma allora

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{T}\mathbf{u}).$$

Questo prova che $\mathbf{T}\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(\mathbf{B})$ e dunque che $\operatorname{Im}(\mathbf{B})$ è $\mathbf{T}$-invariante. Supponiamo ora che λ sia un autovalore di $\mathbf{T}$. L'autospazio $\mathbf{V}_\lambda$ è il nucleo dell'operatore $\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$

che commuta con $\mathbf{T}$. Dunque, per quanto dimostrato nella prima parte dell'esercizio, $\mathbf{V}_\lambda$ è $\mathbf{T}$-invariante. Infine, se indichiamo con $\mathbf{K}_i$ il nucleo di $(\mathbf{T}_\lambda)^i$, allora

$$\mathbf{R}_\lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i.$$

Dal momento che $\mathbf{T}_\lambda$ commuta con $\mathbf{T}$, anche tutte le potenze di $\mathbf{T}_\lambda$ commutano con $\mathbf{T}$. Ma allora $\mathbf{R}_\lambda$ è unione dei sottospazi $\mathbf{T}$-invarianti $\mathbf{K}_i$. Basta allora provare che l'unione di sottospazi $\mathbf{T}$-invarianti è $\mathbf{T}$-invariante. Se $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \cup \mathbf{V}_1 \cup \cdots$ dove tutti i $\mathbf{V}_i$ sono $\mathbf{T}$-invarianti e se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, deve esistere un indice i tale che $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_i$. Poiché $\mathbf{V}_i$ è $\mathbf{T}$-invariante, deve essere $\mathbf{T}(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}_i \subseteq \mathbf{V}$. Dunque $\mathbf{V}$ è $\mathbf{T}$-invariante.

63 Mostrare che il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{T}^m\mathbf{v}$ per $m \geq 1$ è un sottospazio $\mathbf{T}$-invariante, e che è contenuto in ogni sottospazio $\mathbf{T}$-invariante che contenga $\mathbf{v}$.

Soluzione. Osserviamo anzitutto che se $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ e se

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots\} \subseteq \mathbf{V}$$

è un qualunque sottoinsieme di vettori, allora $\mathbf{T}(\mathcal{L}(\mathbf{X})) = \mathcal{L}(\mathbf{TX})$. Infatti dalla linearità di $\mathbf{T}$ abbiamo che

$$\mathbf{T}(c_0\mathbf{v}_0 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_0\mathbf{T}\mathbf{v}_0 + \cdots + c_n\mathbf{T}\mathbf{v}_n.$$

I vettori a sinistra dell'uguaglianza sono esattamente gli elementi di $\mathbf{T}(\mathcal{L}(\mathbf{X}))$, mentre quelli a destra sono gli elementi di $\mathcal{L}(\mathbf{TX})$. Prendiamo ora $\mathbf{X} = \{\mathbf{T}^m\mathbf{v} : m \geq 1\}$ e osserviamo che, per questo particolare insieme di vettori, $\mathbf{T}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$. Infatti $\mathbf{T}(\mathbf{T}^m\mathbf{v}) = \mathbf{T}^{m+1}\mathbf{v}$. Da queste due osservazioni abbiamo che

$$\mathbf{T}(\mathcal{L}(\mathbf{X})) = \mathcal{L}(\mathbf{TX}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{X})$$

e questo prova che $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ è $\mathbf{T}$-invariante. Infine, se $\mathbf{H}$ è un sottospazio $\mathbf{T}$-invariante e $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, allora anche $\mathbf{T}^m\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ per ogni $m \geq 1$, e quindi $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{H}$.

64 Sia $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operatore lineare. Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti per un intero $e > 0$:

1. $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}^e) = \mathrm{Ker}(\mathbf{T}^m)$ per ogni $m \geq e$;
2. $\mathrm{Im}(\mathbf{T}^e) = \mathrm{Im}(\mathbf{T}^m)$ per ogni $m \geq e$;
3. $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}^e) \cap \mathrm{Im}(\mathbf{T}^e) = \{0\}$;
4. $\mathbf{V} = \mathrm{Ker}(\mathbf{T}^e) \oplus \mathrm{Im}(\mathbf{T}^e)$.

Soluzione. Per semplificare la notazione, poniamo $\mathbf{K}_n = \mathrm{Ker}(\mathbf{T}^n)$ e $\mathbf{I}_n = \mathrm{Im}(\mathbf{T}^n)$. Osserviamo anzitutto che i nuclei successivi formano una catena ascendente mentre le immagini successive formano una catena discendente.

$$\mathbf{K}_0 \subseteq \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \subseteq \ldots, \qquad \mathbf{I}_0 \supseteq \mathbf{I}_1 \supseteq \mathbf{I}_2 \supseteq \ldots$$

Infatti se $\mathbf{v} \in \mathbf{K}_m$, allora $\mathbf{T}^{m+1}\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^m\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{v} \in \mathbf{K}_{m+1}$. In modo analogo, se $\mathbf{v} \in \mathbf{I}_{m+1}$ allora $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{m+1}\mathbf{u}$ per almeno un vettore $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Ma allora $\mathbf{v} = \mathbf{T}^m(\mathbf{Tu})$ e dunque $\mathbf{v} \in \mathbf{I}_m$. Osserviamo anche che le affermazioni sono equivalenti solo in dimensione finita. Infatti se prendiamo $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e

$$\mathbf{T}(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

allora $\mathbf{T}$ è iniettiva, così che la condizione 1 è verificata con $e = 1$, ma le immagini sono sempre strettamente decrescenti. Dimostriamo allora l'equivalenza delle affermazioni nel caso finito-dimensionale.

$1 \iff 2$. Se $m \geq e$, allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_m &\iff \dim \mathbf{K}_e = \dim \mathbf{K}_m && (\text{perché } \mathbf{K}_e \subseteq \mathbf{K}_m)\\
&\iff \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{K}_e = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{K}_m &&\\
&\iff \dim \mathbf{I}_e = \dim \mathbf{I}_m && (\text{rango più nullità})\\
&\iff \mathbf{I}_e = \mathbf{I}_m && (\text{perché } \mathbf{I}_e \supseteq \mathbf{I}_m)
\end{aligned}$$

$3 \iff 4$ è già contenuta nella dimostrazione dell'esercizio 59.

$1 \Rightarrow 3$. Supponiamo che $\mathbf{v} \in \mathbf{K}_e \cap \mathbf{I}_e$. Allora esiste $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{T}^e\mathbf{u}$. Dal momento che $\mathbf{v} \in \mathbf{K}_e$, abbiamo che $\mathbf{T}^{2e}\mathbf{u} = \mathbf{T}^e\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{u} \in \mathbf{K}_{2e} = \mathbf{K}_e$. Ma allora $\mathbf{v} = \mathbf{T}^e\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$4 \Rightarrow 2$. Si osservi anzitutto che

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{T}^e(\mathbf{V}) = \mathbf{T}^e(\mathbf{K}_e \oplus \mathbf{I}_e) = \mathbf{T}^e(\mathbf{I}_e) = \mathbf{I}_{2e}.$$

Iterando questo calcolo troviamo che $\mathbf{I}_e = \mathbf{I}_{ke}$ per tutti i $k > 0$. Se ora $m \geq e$, allora, essendo $e > 0$, esiste almeno un k tale che $ke > m$. Poiché $ke > m \geq e$ abbiamo che $\mathbf{I}_{ke} \subseteq \mathbf{I}_m \subseteq \mathbf{I}_e$. Ma, dal momento che $\mathbf{I}_e = \mathbf{I}_{ke}$, deve valere l'uguaglianza.

65 Dimostrare che l'indice di un autovalore λ è 1 se e solo se

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Enunciare un nuovo criterio di diagonalizzabilità.

Soluzione. Fissato un autovalore λ di $\mathbf{T}$ poniamo $\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$ e $\mathbf{K}_m = \operatorname{Ker}((\mathbf{T}_\lambda)^m)$. Per definizione, λ ha indice 1 se la successione dei nuclei

$$\mathbf{K}_0 \subseteq \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \cdots$$

si stabilizza all'indice 1 e cioè, con la notazione dell'esercizio 64, se $e = 1$. Questa condizione equivale, sempre per l'esercizio 64, a

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{T}_\lambda) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{T}_\lambda) = \{\mathbf{0}\}$$

che è la condizione richiesta. Dal teorema 6.13 sappiamo che $\mathbf{T}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e soltanto se tutti i suoi autovalori hanno indice 1. Da quanto appena dimostrato e dall'esercizio 64 abbiamo allora che $\mathbf{T}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e soltanto se per ogni autovalore λ risulta $\operatorname{Ker}(\mathbf{T}_\lambda) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{T}_\lambda) = \{\mathbf{0}\}$.

66 Supponiamo che

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_s$$

e che $\mathbf{V}_i \subset \mathbf{V}$ è un sottospazio $\mathbf{T}$-invariante, per ogni $i = 1, 2, \ldots, s$. Fissate le basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s$ di $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_s$ rispettivamente, sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{V}$ ottenuta accostando i vettori di $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s$. Mostrare che

1. la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale a blocchi, e i blocchi sulla diagonale sono le matrici che rappresentano le restrizioni $\mathbf{T}_i$ di $\mathbf{T}$ ai sottospazi $\mathbf{V}_i$ rispetto a $\mathcal{B}_i$;
2. il polinomio caratteristico di $\mathbf{T}$ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle restrizioni $\mathbf{T}_i$.

Dare una nuova dimostrazione del fatto che la molteplicità algebrica di un autovalore è uguale alla dimensione del sottospazio radicale.

Soluzione. 1. Indichiamo con $\mathbf{b}_j^i$ il j-esimo vettore della base $\mathcal{B}_i$. Poiché $\mathbf{V}_i$ è $\mathbf{T}$-invariante, deve essere $\mathbf{T}(\mathbf{b}_j^i) \in \mathbf{V}_i$ e dunque sono univocamente determinati i coefficienti $a_{jk}^i \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{T}(\mathbf{b}_j^i) = \sum_{k=1}^{n_i} a_{kj}^i \mathbf{b}_k^i$$

dove $n_i = \dim \mathbf{V}_i$. Questa formula ha due conseguenze. La prima è che la matrice rappresentativa di $\mathbf{T}_i$ è

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & \cdots & a_{1n_i}^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_i1}^i & \cdots & a_{n_in_i}^i \end{bmatrix},$$

la seconda è che la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ di $\mathbf{T}$ ha nella colonna $n_1 + \cdots + n_{i-1} + j$ la j-esima colonna di $\mathbf{A}_i$ per gli indici che vanno da $n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1$ fino a $n_1 + \cdots + n_i$. Dunque

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}$$

è diagonale a blocchi.

2. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{T}$ è il determinante

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 - \lambda\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_s - \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{s} \det(\mathbf{A}_i - \lambda\mathbf{I})$$

dove l'ultima uguaglianza consegue dalla proposizione 8.1 del capitolo 6. I fattori nell'ultimo termine sono esattamente i polinomi caratteristici delle $\mathbf{T}_i$.

Supponiamo ora che $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ siano gli autovalori distinti di $\mathbf{T}$. Consideriamo la decomposizione

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{R}_{\lambda_i}$$

fornita dal teorema 6.16. Dal punto 2 dell'esercizio sappiamo che il polinomio caratteristico di $\mathbf{T}$ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle $\mathbf{T}_i$. Ciascuna $\mathbf{T}_i$ ammette λ_i come unico autovalore perché $\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$ è nilpotente su $\mathbf{R}_{\lambda_i}$. Dunque

$$a_{\lambda_i} = \deg P_{\mathbf{T}_i}(\lambda) = \dim \mathbf{R}_{\lambda_i}$$

dove $\deg P_{\mathbf{T}_i}(\lambda)$ denota il grado del polinomio $P_{\mathbf{T}_i}(\lambda)$.

67 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata e sia $P(\lambda)$ un polinomio. Mostrare che $P(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ se e solo se il polinomio minimo di $\mathbf{A}$ divide $P(\lambda)$. (Suggerimento : scomporre $P(\lambda)$ in fattori della forma $(\lambda - \lambda_i)^{d_i}$ e analizzare la dimostrazione del teorema di Hamilton-Cayley.)

Soluzione. Sia $M(\lambda)$ il polinomio minimo di $\mathbf{A}$: se $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ sono gli autovalori distinti di $\mathbf{A}$, e e_k è l'indice di λ_k, allora

$$M(\lambda) = \prod_{k=1}^{t} (\lambda - \lambda_k)^{e_k}$$

e $M(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ come spiegato nel testo. Il polinomio $M(\lambda)$ divide $P(\lambda)$ significa, per definizione, che esiste un polinomio $Q(\lambda)$ tale che $P(\lambda) = M(\lambda)Q(\lambda)$. Se questo è il caso, allora

$$P(\mathbf{A}) = M(\mathbf{A})Q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}Q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Viceversa, supponiamo $P(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Se $P(\lambda)$ è il polinomio nullo, allora $P(\lambda) = 0M(\lambda)$ e quindi $M(\lambda)$ divide $P(\lambda)$. Se invece $P(\lambda)$ non è identicamente nullo, per il teorema fondamentale dell'algebra possiamo fattorizzare $P(\lambda)$ come prodotto di fattori lineari:

$$P(\lambda) = c(\lambda - \mu_1)^{a_1}(\lambda - \mu_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \mu_s)^{a_s}$$

dove c è una costante non nulla, $\mu_1, \dots, \mu_s$ sono le radici distinte del polinomio, e $a_i \geq 1$ è la molteplicità della radice μ_i. Otteniamo quindi la fattorizzazione di $P(\mathbf{A})$

$$\mathbf{O} = P(\mathbf{A}) = c(\mathbf{A} - \mu_1\mathbf{I})^{a_1}(\mathbf{A} - \mu_2\mathbf{I})^{a_2} \cdots (\mathbf{A} - \mu_s\mathbf{I})^{a_s}.$$

Si osservi che i fattori $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$ commutano tra loro. Sia $\mathbf{R}_{\lambda_k}$ un sottospazio radicale di $\mathbf{A}$. Sappiamo che $\mathbf{R}_{\lambda_k}$ è $\mathbf{A}$-invariante, quindi anche $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$-invariante. Possiamo perciò considerare ciascun fattore $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$ come un'applicazione lineare $\mathbf{R}_{\lambda_k} \to \mathbf{R}_{\lambda_k}$, la restrizione di $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$ a $\mathbf{R}_{\lambda_k}$. Tale restrizione è invertibile a meno che $\mu_i = \lambda_k$: infatti se μ_i non è un autovalore di $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$ è addirittura invertibile su tutto lo spazio $\mathbb{C}^n$; se invece μ_i è un autovalore di $\mathbf{A}$ *diverso* da λ_k, allora $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}) \subseteq \mathbf{R}_{\mu_i}$ e $\mathbf{R}_{\mu_i} \cap \mathbf{R}_{\lambda_k} = \{\mathbf{0}\}$, e quindi la restrizione di $\mathbf{A} - \mu_i\mathbf{I}$ al sottospazio radicale $\mathbf{R}_{\lambda_k}$ ha nucleo ridotto al solo vettore nullo. Se fosse $\mu_i \neq \lambda_k$ per ogni i, allora $P(\mathbf{A})$ sarebbe prodotto di applicazioni invertibili su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$, e quindi sarebbe invertibile su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$, il che è assurdo perché $P(\mathbf{A})$ è nullo su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$. Possiamo quindi assumere $\mu_1 = \lambda_k$. Dividendo $P(\lambda)$ per $(\lambda - \mu_1)^{a_1} = (\lambda - \lambda_k)^{a_1}$ otteniamo

$$Q(\lambda) = c(\lambda - \mu_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \mu_s)^{a_s},$$

e l'argomento appena usato mostra che $Q(\mathbf{A})$ è invertibile su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$ perché $\mu_i \neq \mu_1 = \lambda_k$ se $i > 1$. Dal fatto che $Q(\mathbf{A})$ è invertibile su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$ e dall'uguaglianza

$$\mathbf{O} = P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})^{a_1}$$

segue che $(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})^{a_1}$ rappresenta l'applicazione nulla su $\mathbf{R}_{\lambda_k}$, e quindi $a_1 \geq e_k$, dove e_k è l'indice dell'autovalore λ_k.

Abbiamo così dimostrato che, per ogni autovalore λ_k, il polinomio $(\lambda - \lambda_k)^{e_k}$ divide $P(\lambda)$. Siccome i λ_k sono distinti, anche il prodotto $M(\lambda) = \prod_{k=1}^{t}(\lambda - \lambda_k)^{e_k}$ divide $P(\lambda)$.

68 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simultaneamente diagonalizzabili, allora $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Soluzione. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simultaneamente diagonalizzabili, esiste una matrice invertibile $\mathbf{S}$ tale che le matrici

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}, \qquad \mathbf{D}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$$

sono diagonali. Dall'esercizio 9 del capitolo 3 sappiamo che le matrici diagonali commutano. Dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= (\mathbf{S}\mathbf{D}_1\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}\mathbf{D}_2\mathbf{S}^{-1})\\ &= \mathbf{S}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{S}^{-1}\\ &= \mathbf{S}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\mathbf{S}^{-1}\\ &= (\mathbf{S}\mathbf{D}_2\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}\mathbf{D}_1\mathbf{S}^{-1})\\ &= \mathbf{BA}.\end{aligned}$$

6. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

69 Dato $\mathbf{v}$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$. Mostrare con un ragionamento geometrico, senza usare coordinate, che il nucleo di $\mathfrak{L}$ è la retta generata da $\mathbf{v}$, e che l'unico autovalore reale di $\mathfrak{L}$ è $\lambda = 0$. Scrivere poi la matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ in funzione delle coordinate di $\mathbf{v}$, calcolare il polinomio caratteristico di $\mathfrak{L}$ e mostrare nuovamente che $\lambda = 0$ è l'unico autovalore reale di $\mathfrak{L}$. [Suggerimento: se $\mathbf{v} \times \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, allora $\lambda\mathbf{x}$ è un vettore parallelo a $\mathbf{x}$ e al tempo stesso perpendicolare a $\mathbf{x}$. Se $\mathbf{v} = [a_1, a_2, a_3]^{\mathrm{T}}$, la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica è

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $\mathfrak{L}$ è $-\lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.]

8 Spazi euclidei

1. SPAZI EUCLIDEI

1 Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ ortogonali al vettore $\mathbf{n} = [1, 2, 3, 0]^{\mathrm{T}}$ risolvendo un opportuno sistema lineare. Trovare tutti i versori diretti come $\mathbf{n}$.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{n}$ è ortogonale a un vettore $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_4]^{\mathrm{T}}$ se $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = 0$ e cioè se $\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$. Quest'ultima condizione è un sistema lineare formato da un'unica equazione che ha $\mathbf{n}^{\mathrm{T}}$ come matrice dei coefficienti:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Le soluzioni del sistema sono i vettori di $\mathrm{Ker}(\mathbf{n}^{\mathrm{T}})$. Se risolviamo il sistema utilizzando x_1 come variabile dipendente e tutte le rimanenti come variabili libere troviamo che

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{n}^{\mathrm{T}}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

I due versori diretti come $\mathbf{n}$ sono

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = -\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2 Dato $\mathbf{v} = [\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{\mathrm{T}}$, spiegare perché

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3\mathbf{v}}{\|3\mathbf{v}\|}.$$

Qual è la norma di $\mathbf{v}$? E quella di $3\mathbf{v}$? Quale conviene calcolare? Scrivere esplicitamente le coordinate di $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

Soluzione. Ricordiamo anzitutto, come dimostrato nell'osservazione in fondo a pagina 367 nel testo, che la norma è una funzione omogenea: per ogni vettore $\mathbf{v}$ e per ogni scalare t risulta $\|t\mathbf{v}\| = |t|\,\|\mathbf{v}\|$. Nel nostro caso abbiamo

$$\frac{3\mathbf{v}}{\|3\mathbf{v}\|} = \frac{3\mathbf{v}}{3\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Conviene ora calcolare la norma del vettore $3\mathbf{v} = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}$. Infatti, dalla definizione 2.2 abbiamo che

$$\|3\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle 3\mathbf{v}, 3\mathbf{v}\rangle} = \sqrt{(3\mathbf{v})^{\mathrm{T}}(3\mathbf{v})} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Utilizzando l'omogeneità della norma troviamo

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{3}\,\|3\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Infine,

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3\mathbf{v}}{\|3\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3 Verificare che la formula

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

dove $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^{\mathrm{T}}$, definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Se indichiamo con a_{ij} il coefficiente del monomio x_iy_j, allora

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j.$$

Per dimostrare la simmetria basta osservare che per il prodotto assegnato risulta $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici (i, j); dunque

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}y_ix_j = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ji}x_jy_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

La linearità rispetto al primo fattore dipende invece dal fatto che il polinomio che definisce il prodotto è di primo grado rispetto alle coordinate di quel fattore:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_i + y_i)z_j = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_iz_j + \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}y_iz_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle,$$

$$\langle t\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(tx_i)y_j = t\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j = t\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

Un'alternativa alla verifica diretta della simmetria e della linearità nel primo fattore parte dall'osservazione che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle .
\end{aligned}$$

La simmetria del prodotto consegue allora dal fatto che $\mathbf{A}$ è simmetrica,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

mentre la linearità nel primo fattore dipende dalla proprietà distributiva e da quella omogenea del prodotto di matrici:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{z} = (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}) \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \\
&\langle t\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (t\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} = t(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}) = t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle .
\end{aligned}$$

Per dimostrare la positività conviene invece osservare che il polinomio che definisce il prodotto è quadratico omogeneo con discriminante negativo e dunque deve essere somma di quadrati. Se completiamo il quadrato troviamo infatti che

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \\
&= 2\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x_2^2\right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Se il prodotto interno è nullo devono essere nulli entrambi gli addendi nella parentesi esterna. L'annullamento del secondo addendo implica che sia $x_2 = 0$ e questa condizione, insieme all'annullamento del primo addendo implica a sua volta che sia $x_1 = 0$. Dunque deve essere $\mathbf{x} = 0$.

4 Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dei numeri reali positivi. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si definisca

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n .$$

Mostrare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Nel caso particolare $n = 2$, porre $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, e determinare tutti i vettori ortogonali, rispetto a questo prodotto scalare, al vettore $[1, 1]^{\mathrm{T}}$.

Soluzione. Come nell'esercizio 3 basta osservare che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y}$ dove

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dal momento che ogni matrice diagonale è simmetrica, procedendo esattamente come nell'esercizio 3 si vede che il prodotto è simmetrico e lineare nel primo fattore. Per dimostrare che è positivo, si osservi anzitutto che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Tutti gli addendi a destra sono il prodotto di coefficienti $\lambda_i > 0$ per quadrati $x_i^2 \geq 0$, dunque non sono negativi e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$. Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ allora tutti gli addendi devono essere nulli, cioè deve essere $\lambda_i x_i^2 = 0$ per tutti gli indici i. Poiché $\lambda_i > 0$, deve essere $x_i^2 = 0$ per tutti gli i e dunque $x_i = 0$. Ma allora $\mathbf{x} = 0$.

Se ora $\mathbf{x} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$, i vettori ortogonali a $\mathbf{x}$ sono le soluzioni $\mathbf{y}$ dell'equazione $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y} = 0$, cioè i vettori nel nucleo della matrice

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo è generato dal vettore $[3, -2]^{\mathrm{T}}$ e dunque i vettori ortogonali a $\mathbf{x}$ nel prodotto assegnato sono gli elementi della retta $\mathbb{R}[3, -2]^{\mathrm{T}}$.

5 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue in $[0, 2\pi]$ con la norma L^2. Mostrare che le funzioni $\cos(k\,x)$ (per $k \geq 0$) e $\sin(k\,x)$ (per $k \geq 1$) sono a due a due ortogonali. Mostrare che la norma L^2 di $1 = \cos(0\,x)$ è $\sqrt{2\pi}$, mentre la norma L^2 di $\cos(k\,x)$ e $\sin(k\,x)$ per $k \geq 1$ è $\sqrt{\pi}$.

Soluzione. Ricordiamo che per ogni coppia di interi m e n risulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{m,n}$$

e che

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \qquad \sin(kx) = -\frac{i}{2}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right).$$

Da queste formule si ottiene immediatamente per $m, n \geq 0$ che

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{imx} + e^{-imx}\right)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\delta_{m,-n} + \delta_{m,n} + \delta_{-m,-n} + \delta_{-m,n}\right) \\ &= \pi(\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}). \end{aligned}$$

Se ora $m, n \geq 0$ sono distinti, allora $m \neq \pm n$ e i due addendi nell'ultimo termine sono nulli. Se prendiamo $m = n = 0$ troviamo

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \pi(\delta_{0,0} + \delta_{0,0}) = 2\pi$$

e se prendiamo $m = n > 0$ troviamo

$$\|\cos(nx)\|^2 = \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = \pi(\delta_{n,n} + \delta_{n,-n}) = \pi(1 + 0) = \pi.$$

Le rimanenti relazioni di ortogonalità si provano in modo simile osservando che per $m, n > 0$

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \pi(\delta_{m,n} - \delta_{m,-n}) = \pi\delta_{m,n}$$

mentre per $m \geq 0$ e $n > 0$

$$\langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle = -\frac{i\pi}{2}(\delta_{m,-n} - \delta_{m,n} + \delta_{n,m} - \delta_{-n,m}) = 0.$$

2. IL TEOREMA DI PITAGORA E LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

6 Sia $\mathbf{v} = [2, 3]^{\mathrm{T}}$. Per quali valori di m il vettore $\mathbf{w} = [1, m]^{\mathrm{T}}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$? Verificare che $||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2$ solo per tali valori.

Soluzione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \perp \mathbf{w} &\Leftrightarrow \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = 0 \\
&\Leftrightarrow [2\ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 + 3m = 0 \\
&\Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Si osservi poi che $\mathbf{v} + \mathbf{w} = [3, m + 3]^{\mathrm{T}}$ e dunque che

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= 3^2 + (m + 3)^2 = m^2 + 6m + 18 \\
\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 &= (2^2 + 3^2) + (1^2 + m^2) = m^2 + 14.
\end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 &\Leftrightarrow m^2 + 6m + 18 = m^2 + 14 \\
&\Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

7 Calcolare (il coseno del)l'angolo formato dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{u}_2 = [2, 2, 2, 2]^{\mathrm{T}}.$$

Ripetere per i vettori

$$\mathbf{v}_1 = [0, 0, 0, 2]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{v}_2 = [1, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}.$$

Soluzione. Dalla definizione 3.5 abbiamo

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2}) = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\| \, \|\mathbf{u}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}) = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \, \|\mathbf{v}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

8 In $\mathbb{R}^4$ trovare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = [1, 2, 3, 4]^{\mathrm{T}}$ sulla retta $\mathbf{L}$ di $\mathbb{R}^4$ generata da $\mathbf{b} = [1, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$ e scrivere $\mathbf{v}$ come somma di un vettore di $\mathbf{L}$ e di un vettore ortogonale a $\mathbf{L}$. Calcolare la distanza di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{L}$.

Soluzione. Usiamo la proposizione 3.2. Il coefficiente di Fourier di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{b}$ è

$$\hat{x} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

e dunque la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{L}$ è il vettore

$$\mathbf{c} = \hat{x}\mathbf{b} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La componente di $\mathbf{v}$ ortogonale a $\mathbf{L}$ è il vettore

$$\mathbf{v} - \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e la distanza di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{L}$ è la norma di questo vettore, che vale

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{c}\| = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

9 Dimostrare che in uno spazio euclideo $\mathbf{V}$ vale la *legge del parallelogramma*:

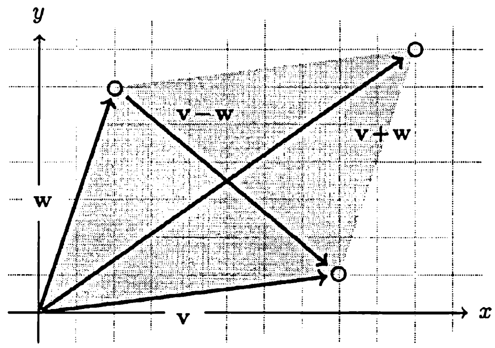
$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Fare un disegno e spiegare perché si chiama legge del parallelogramma.

Soluzione.
Dal teorema di Carnot abbiamo che

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\|^2$$
$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, -\mathbf{w} \rangle + \|-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\|^2.$$

Sommando i termini a sinistra e a destra si ottiene l'uguaglianza cercata. Per interpretare geometricamente il risultato si consideri la figura seguente.



I vettori $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono le diagonali del parallelogramma generato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Quindi l'identità trovata è una riformulazione del classico teorema secondo cui la somma dei quadrati delle lunghezze dei lati di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali.

10 Se $||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}|| = 1$ e $||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| = \sqrt{3}$, qual è il coseno dell'angolo formato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

Soluzione. Tenendo presente che $\|-\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|$, dal teorema di Carnot (proposizione 3.1) otteniamo

$$\langle \mathbf{v}, -\mathbf{w}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|-\mathbf{w}\|^2\right) = \frac{1}{2}(3-1-1) = \frac{1}{2}.$$

Usando la definizione 3.5 di angolo fra due vettori troviamo

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{-\langle \mathbf{v}, -\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1\cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

11 È possibile che in uno spazio euclideo esistano due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tali che $||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}|| = 1$ e $||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| = 3$?

Soluzione. Se esistessero due vettori con le caratteristiche indicate, dalla disuguaglianza triangolare (proposizione 3.6) si avrebbe

$$3 = \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| = 1+1 = 2$$

e questo è assurdo.

12 Sia $\mathbf{v}$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue in $[0, 2\pi]$ con la norma L^2. Calcolare la norma della funzione $\cos(x)+\sin(x)$, e verificare il teorema di Pitagora per le due funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$, che sono tra loro ortogonali e hanno entrambe norma $\sqrt{\pi}$ per l'esercizio 5.

Soluzione. Dalla definizione di norma abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\cos(x)+\sin(x)\|^2 &= \int_0^{2\pi} (\cos(x)+\sin(x))^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} [1 + 2\cos(x)\sin(x)]dx \\
&= \int_0^{2\pi} [1+\sin(2x)]dx \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Da questa formula e dall'esercizio 5 abbiamo allora che

$$\|\cos(x) + \sin(x)\|^2 = 2\pi = \|\cos(x)\|^2 + \|\sin(x)\|^2,$$

come previsto dal teorema di Pitagora.

3. BASI ORTONORMALI E MATRICI ORTOGONALI

13 Dato $\mathbf{b}_1 = [2,3]^{\mathrm{T}}$, trovare un vettore $\mathbf{b}_2$ di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\mathbf{b}_1$. Scrivere le componenti di $[x,y]^{\mathrm{T}}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Soluzione. I vettori ortogonali a $\mathbf{b}_1$ sono le soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{b}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$. Se usiamo x_2 come variabile libera troviamo le soluzioni nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \end{bmatrix}.$$

In particolare, posto $t = 2$, possiamo scegliere come soluzione ortogonale a $\mathbf{b}_1$ il vettore $\mathbf{b}_2 = [-3,2]^{\mathrm{T}}$. Le componenti del generico vettore $\mathbf{v} = [x,y]^{\mathrm{T}}$ rispetto alla base ortogonale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ sono, per la proposizione 4.3, i suoi coefficienti di Fourier rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\hat{x}_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} = \frac{2x+3y}{13}$$
$$\hat{x}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_2\|^2} = \frac{-3x+2y}{13}.$$

14 Sotto quali condizioni su a, b, c la matrice

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

è ortogonale?

Soluzione. Invece di risolvere l'equazione $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, che condurrebbe allo stesso risultato, basta ricordare che $\mathbf{Q}$ è ortogonale se le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. È immediato verificare che le colonne di $\mathbf{Q}$ sono già ortogonali; resta dunque da soddisfare la condizione di normalizzazione. I due vettori colonna hanno la stessa norma $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$. Si ottiene dunque l'unica condizione $a^2 + b^2 = c^2$.

15 L'insieme delle matrici ortogonali è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici $n \times n$?

Soluzione. La matrice nulla, che è l'elemento neutro per la somma in $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$, non è ortogonale perché le sue colonne non sono una base di $\mathbb{K}^n$. Dunque l'insieme $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}(n)$ delle matrici ortogonali non è un sottospazio. Ma $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}(n)$ non è chiuso nemmeno rispetto al prodotto scalare e alla somma. Infatti, sebbene la matrice identità $\mathbf{I}$ sia ortogonale, la matrice $2\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{I}$ non lo è perché i suoi vettori colonna non sono normalizzati.

16 Si considerino i vettori ortogonali $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [-1, 2, 1]^T$:

1. Quante sono le matrici ortogonali di ordine 3 la cui prima colonna è un multiplo scalare di $\mathbf{v}_1$ e la cui seconda colonna è un multiplo di $\mathbf{v}_2$? (Suggerimento: ci sono due versori per ogni retta per l'origine; la direzione della terza colonna è determinata dalla direzione delle prime due colonne.)
2. Determinare una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ di ordine 3 la cui prima colonna è un multiplo scalare di $\mathbf{v}_1$ e la cui seconda colonna è un multiplo di $\mathbf{v}_2$. Le righe di $\mathbf{Q}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$?

Soluzione. 1. La situazione può essere esaminata dal punto di vista geometrico a questo modo: i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ determinano due rette passanti per l'origine in $\mathbb{R}^3$, che indichiamo con $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ rispettivamente. Queste due rette sono distinte perché $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali e dunque generano un piano $\mathbf{H}$ passante per l'origine. Un vettore $\mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ quando è ortogonale ad $\mathbf{H}$ e cioè quando sta sull'unica retta $\mathbf{L}_3$ passante per l'origine e normale ad $\mathbf{H}$. La condizione di ortogonalità sulle colonne della matrice cercata $\mathbf{Q}$ impone dunque che queste colonne appartengano rispettivamente alle tre rette $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ e $\mathbf{L}_3$. Resta da soddisfare la condizione di normalizzazione. Ma su ciascuna delle rette esistono due vettori di norma unitaria, collocati da parti opposte rispetto all'origine. Abbiamo dunque $2^3 = 8$ possibili matrici che soddisfano le condizioni imposte.

2. Dal punto di vista analitico, la retta $\mathbf{L}_3$ contiene i vettori ortogonali a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Le condizioni $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x} \rangle = 0$ si traducono nelle equazioni $\mathbf{v}_i{}^T\mathbf{x} = 0$ per $i = 1, 2$ e quindi nel sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, dove le righe di $\mathbf{A}$ sono i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $r(\mathbf{A}) = 2$ perché $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Riducendo a scala $\mathbf{A}$ e scegliendo x_3 come variabile libera si trovano le soluzioni

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La retta $\mathbf{L}_3$ è dunque generata da $\mathbf{v}_3 = [1, 1, -1]^T$. Una scelta per $\mathbf{Q}$ si ottiene allora normalizzando $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Troviamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Quanto alle righe di $\mathbf{Q}$, ricordiamo dalla proposizione 4.7 che la trasposta di una matrice ortogonale è anch'essa ortogonale. Le righe di $\mathbf{Q}$ sono allora le colonne della matrice ortogonale $\mathbf{Q}^T$ e come tali sono ortogonali.

17 Dato un vettore non nullo $\mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^n$, si consideri la matrice

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}\mathbf{w}^T.$$

Scrivere $\mathbf{Q}$ nel caso in cui $n = 3$ e $\mathbf{w}$ è un vettore perpendicolare al sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. In generale, mostrare che $\mathbf{Q}$ è una matrice $n \times n$ ortogonale e simmetrica.

Soluzione. Il sottospazio $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ è il nucleo della matrice $\mathbf{A} = [1, 1, -1]$, quindi possiamo prendere $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Con questa scelta troviamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Proviamo ora in generale che $\mathbf{Q}$ è simmetrica:

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} - \frac{2}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}}(\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}}\mathbf{w}^{\mathrm{TT}}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}.$$

La verifica dell'ortogonalità di $\mathbf{Q}$ può essere fatta direttamente come segue. Osserviamo anzitutto che

$$(\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}})^2 = \mathbf{w}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w})\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \|\mathbf{w}\|^2\,\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}.$$

Ora, utilizzando nel calcolo del quadrato l'esercizio 44 del capitolo 3, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^2 \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right)^2 \\ &= \mathbf{I}^2 - \frac{4}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + \frac{4}{\|\mathbf{w}\|^4}(\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}})^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{4}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + \frac{4}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Il motivo per cui $\mathbf{Q}$ è ortogonale si comprende facilmente dal punto di vista geometrico osservando che, per via della proposizione 3.2, dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e indicate con $\mathbf{v}_{\|}$ e $\mathbf{v}_{\perp}$ la proiezione di $\mathbf{v}$ sul sottospazio generato da $\mathbf{w}$ e la componente ortogonale di $\mathbf{v}$ rispetto allo stesso sottospazio, risulta

$$\mathbf{v}_{\|} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}(\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}})\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{v}.$$

Dunque

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{\|} = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\|}$$

e questo mostra che la funzione lineare $\mathfrak{L}_{\mathbf{Q}}$ associata a $\mathbf{Q}$ è la simmetria rispetto al sottospazio ortogonale a quello generato da $\mathbf{w}$. Come ogni simmetria, $\mathfrak{L}_{\mathbf{Q}}$ è un'isometria, come si vede anche direttamente dall'ultima formula e dal teorema di Pitagora:

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\|}\|^2 = \|\mathbf{v}_{\perp}\|^2 + \|\mathbf{v}_{\|}\|^2 = \|\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\|}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Per la proposizione 4.8 la matrice rappresentativa $\mathbf{Q}$ è ortogonale.

18 Sia $\mathbf{E}$ una matrice antisimmetrica ($\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{E}$) tale che $\mathbf{I} + \mathbf{E}$ sia invertibile. Mostrare che la matrice $\mathbf{Q} = (\mathbf{I}+\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{E})$ è ortogonale. (Suggerimento: le matrici $(\mathbf{I} - \mathbf{E})$ e $(\mathbf{I} + \mathbf{E})$ commutano.) Per esempio, da $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ si ottiene la matrice $\mathbf{Q} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Se invece $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ cosa si ottiene?

Soluzione. Proviamo anzitutto che $\mathbf{I} + \mathbf{E}$ e $\mathbf{I} - \mathbf{E}$ commutano:

$$(\mathbf{I}+\mathbf{E})(\mathbf{I}-\mathbf{E}) = \mathbf{I} - \mathbf{E}^2 = (\mathbf{I}-\mathbf{E})(\mathbf{I}+\mathbf{E}).$$

Poniamo ora $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{E}$ e osserviamo che $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$. Se indichiamo con $\mathbf{B}$ l'inversa di $\mathbf{A}$, allora dalla relazione $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ trasponendo si ottiene $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$; quindi $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ è l'inversa di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Si osservi infine che dalla relazione di commutazione $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ dimostrata sopra si ottiene, prendendo le inverse, che $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}$. Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} &= \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}\mathbf{BA}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{ABB}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

e questo prova che $\mathbf{Q}$ è ortogonale. Per la matrice $\mathbf{E}$ assegnata abbiamo infine che

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{a^2+1}\begin{bmatrix} -a^2+1 & 2a \\ -2a & -a^2+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

19 Sia $\mathbf{Q}$ una matrice ortogonale di ordine n, e sia $\mathcal{B}$ la base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata dalle colonne di $\mathbf{Q}$. Mostrare che il vettore delle componenti di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ rispetto a $\mathcal{B}$ è $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. (Suggerimento: $\mathbf{Q}$ è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.) Come si confronta questa formula con quella data in termini di coefficienti di Fourier nel corollario 4.4?

Soluzione. Se indichiamo con $\mathbf{y}$ il vettore delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto a $\mathcal{B}$ allora, dalla proposizione 7.3 del capitolo 4 per le matrici di passaggio, abbiamo che $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$. Ricordando dalla proposizione 4.7 che, per una matrice ortogonale, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ abbiamo $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. Questa formula è la stessa data nel corollario 4.4 per i coefficienti di Fourier. Infatti se indichiamo con y_i la riga i-esima del vettore $\mathbf{y}$ e con $\mathbf{q}_i$ la colonna i-esima della matrice $\mathbf{Q}$, allora da $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ si ottiene che

$$y_i = \mathbf{q}_i{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{q}_i \rangle = \hat{x}_i.$$

20 Il prodotto di due riflessioni ortogonali lineari del piano è una rotazione lineare: calcolare l'angolo di rotazione in funzione dei coefficienti angolari degli assi delle due riflessioni (fare il disegno).

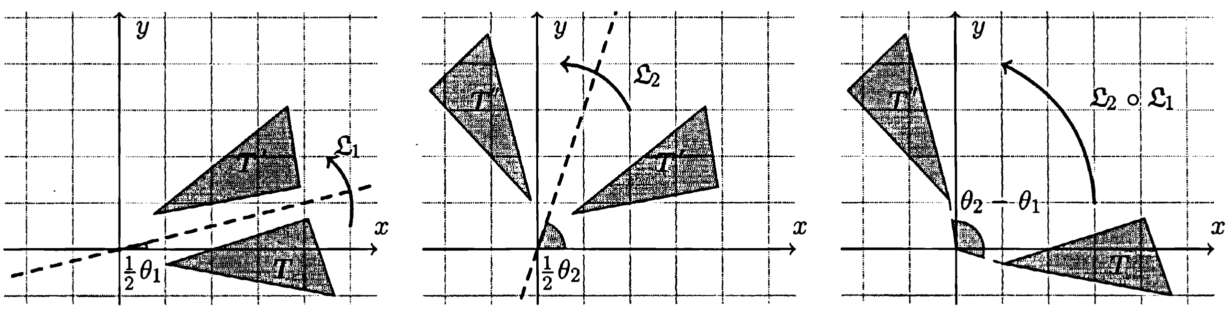
Soluzione. Poiché le riflessioni sono lineari, l'origine è il punto d'intersezione degli assi e, come spiegato a pagina 245-246 e a pagina 384 del testo, ciascuna riflessione è rappresentata da una matrice ortogonale che ha determinante -1. Il prodotto delle due riflessioni è quindi un'isometria lineare rappresentata da una matrice che ha determinante 1, ed è perciò una rotazione del piano per la classificazione delle matrici ortogonali di ordine 2.

Per determinare l'angolo di rotazione, dobbiamo scendere in maggior dettaglio. La matrice rappresentativa della riflessione che ha per asse la retta $y = mx$ è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

dove $\frac{1}{2}\theta = \operatorname{arctg}(m) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: l'angolo $\frac{1}{2}\theta$ è l'angolo acuto (con segno) che l'asse della riflessione forma con il versore $\mathbf{e}_1$ dell'asse delle ascisse, con la convenzione che $\frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{2}$ quando $m = +\infty$, cioè quando l'asse della riflessione coincide con l'asse delle ordinate.

Supponiamo che le due riflessioni, che indicheremo con $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$, abbiano assi che formano rispettivamente angoli $\frac{1}{2}\theta_1$ e $\frac{1}{2}\theta_2$ con il versore $\mathbf{e}_1$.



Il prodotto $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ ha allora matrice rappresentativa

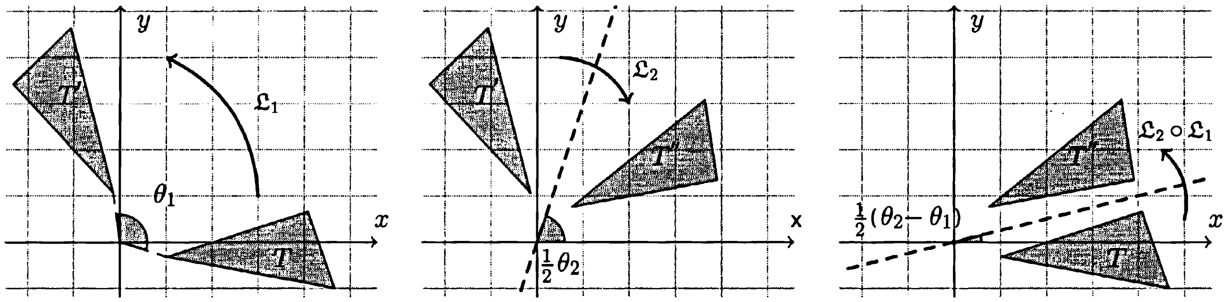
$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2-\theta_1) & -\sin(\theta_2-\theta_1) \\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_2-\theta_1) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e questa matrice, sempre per l'esempio a pagina 384, rappresenta una rotazione intorno all'origine di un angolo $\theta_2 - \theta_1 = 2(\operatorname{arctg}(m_2) - \operatorname{arctg}(m_1))$.

21 Nel piano cartesiano, si considerino una rotazione $\mathfrak{L}_1$ e una riflessione ortogonale $\mathfrak{L}_2$, entrambe lineari. Mostrare che le trasformazioni $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2$ sono entrambe delle riflessioni lineari. Calcolare il coefficiente angolare degli assi di tali riflessioni in funzione dell'angolo di rotazione di $\mathfrak{L}_1$ e del coefficiente angolare dell'asse di $\mathfrak{L}_2$ (fare il disegno).

Soluzione. Siano $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ le matrici che rappresentano rispettivamente $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ rispetto alla base canonica: entrambe le matrici sono ortogonali, $\det(\mathbf{A}_1) = 1$ perché $\mathbf{A}_1$ è una rotazione mentre $\det(\mathbf{A}_2) = -1$ perché $\mathbf{A}_2$ è una riflessione. Le matrici $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ sono perciò ortogonali e hanno determinante -1, quindi le applicazioni $\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2$ e $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ rappresentate da tali matrici sono delle riflessioni.

Per determinare gli assi di tali riflessioni, supponiamo che $\mathfrak{L}_1$ ruoti il piano in senso antiorario intorno all'origine di un angolo θ_1 e che $\mathfrak{L}_2$ abbia per asse la retta di equazione $y = m_2 x$. Come nell'esercizio 20, poniamo $\frac{1}{2}\theta_2 = \operatorname{arctg}(m_2)$.



Allora

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{bmatrix}.$$

La funzione lineare composta $\mathfrak{L}_2 \circ \mathfrak{L}_1$ ha matrice rappresentativa

$$\begin{aligned} \mathbf{A_2 A_1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 - \theta_1) & \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) & -\cos(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e questa è la matrice della riflessione rispetto alla retta di equazione $y = mx$ dove $m = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right)$.

La funzione lineare composta $\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2$ ha invece matrice rappresentativa

$$\begin{aligned} \mathbf{A_1 A_2} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e questa è la matrice della riflessione rispetto alla retta di equazione $y = mx$ dove $m = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right)$.

22 Sia $\mathfrak{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un'isometria lineare di uno spazio euclideo $\mathbf{V}$: $\mathfrak{T}$ è lineare e $||\mathfrak{T}(\mathbf{v})|| = ||\mathbf{v}||$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Mostrare che $\mathfrak{T}$ è iniettiva. Concludere che, se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, un'isometria lineare è un isomorfismo.

Soluzione. Per dimostrare che $\mathfrak{T}$ è iniettiva basta provare, per il corollario 3.5 del capitolo 5, che il suo nucleo è nullo. Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathfrak{T}) &\Rightarrow \mathfrak{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && \text{(definizione di nucleo)} \\ &\Rightarrow \|\mathfrak{T}\mathbf{v}\| = 0 && \text{(proposizione 3.6)} \\ &\Rightarrow \|\mathbf{v}\| = 0 && (\mathfrak{T} \text{ è un'isometria}) \\ &\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} && \text{(proposizione 3.6).} \end{aligned}$$

Dunque $\mathrm{Ker}(\mathfrak{T}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathfrak{T}$ è iniettiva. Se ora $n = \dim \mathbf{V}$ è finito, allora dal teorema di rango più nullità abbiamo che

$$\dim \mathrm{Im}(\mathfrak{T}) = \dim \mathbf{V} - \dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{T}) = \dim \mathbf{V} - 0 = \dim \mathbf{V}.$$

Questo prova che $\mathfrak{T}$ è suriettiva. Dunque $\mathfrak{T}$ è un isomorfismo.

23 Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi euclidei di dimensione n, e sia $\mathfrak{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare. Mostrare che $\mathfrak{T}$ è un'isometria se e solo se $\mathfrak{T}$ manda una base ortonormale di $\mathbf{V}$ in una base ortonormale di $\mathbf{W}$.

Soluzione. La condizione è necessaria. Supponiamo infatti che $\mathfrak{T}$ sia un'isometria e che $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ sia una base ortonormale di $\mathbf{V}$. Ogni isometria preserva il prodotto interno, come dimostrato nella prima osservazione di pagina 386 del testo. Dunque

$$\langle \mathfrak{T}(\mathbf{q}_i), \mathfrak{T}(\mathbf{q}_j) \rangle = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Questo prova che $\mathfrak{T}(\mathcal{B})$ è un insieme ortonormale di vettori e dunque, per la proposizione 4.2, che è linearmente indipendente. Ma la cardinalità di $\mathfrak{T}(\mathcal{B})$ coincide con la dimensione di $\mathbf{W}$, dunque $\mathfrak{T}(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{W}$ per il corollario 6.11 del capitolo 4.

La condizione è sufficiente. Supponiamo che $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ e $\mathfrak{T}(\mathcal{B})$ siano basi ortonormali rispettivamente di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{q}_i \Rightarrow \mathfrak{T}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathfrak{T}(\mathbf{q}_i)$$

perché $\mathfrak{T}$ è lineare. Ma, dal momento che le basi sono ortonormali, gli x_i in entrambe le combinazioni lineari sono i coefficienti di Fourier rispettivamente di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e di $\mathfrak{T}(\mathbf{v})$ rispetto a $\mathfrak{T}(\mathcal{B})$. Dal corollario 4.4 abbiamo allora che

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\mathfrak{T}(\mathbf{v})\|.$$

Questo prova che $\mathfrak{T}$ è un'isometria.

24 Sia $\mathfrak{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un'applicazione lineare di uno spazio euclideo $\mathbf{V}$, sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbf{V}$, e sia $\mathbf{Q}$ la matrice che rappresenta $\mathfrak{T}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Mostrare che $\mathfrak{T}$ è un'isometria se e solo se $\mathbf{Q}$ è ortogonale.

Soluzione. Le colonne di $\mathbf{Q}$ contengono le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ in $\mathfrak{T}$. Dall'esercizio 23 sappiamo che $\mathfrak{T}$ è un'isometria se e soltanto se questi vettori colonna sono ortonormali. Ma questo equivale ad affermare che $\mathbf{Q}$ è una matrice ortogonale.

25 Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria: $\|F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Mostrare che, se F preserva l'origine ($F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), allora è lineare. Concludere che ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ si può ottenere come prodotto di composizione di una traslazione e di una isometria lineare. Se $n = 2$, ogni isometria è una rototraslazione oppure una traslazione seguita da una riflessione ortogonale.

Soluzione. Proviamo anzitutto che F preserva la norma. Infatti

$$\|F(\mathbf{v})\| = \|F(\mathbf{v}) - \mathbf{0}\| = \|F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{v}\|.$$

In secondo luogo, F preserva il prodotto interno. Dall'identità di polarizzazione

$$2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

si ottiene infatti

$$\begin{aligned} 2\langle F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v})\rangle &= \|F(\mathbf{u})\|^2 + \|F(\mathbf{v})\|^2 - \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

da cui $\langle F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Se dunque $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora $F(\mathcal{Q}) = \{F(\mathbf{q}_1), \dots, F(\mathbf{q}_n)\}$ è un insieme di n vettori ortonormali di $\mathbb{R}^n$ e dunque una base ortonormale. Per un qualunque vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ possiamo utilizzare i coefficienti di Fourier per scrivere $F(\mathbf{u})$ come combinazione lineare di $F(\mathcal{Q})$:

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle F(\mathbf{u}), F(\mathbf{q}_i)\rangle\, F(\mathbf{q}_i).$$

Poiché F preserva il prodotto interno, abbiamo

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle F(\mathbf{u}), F(\mathbf{q}_i)\rangle\, F(\mathbf{q}_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{q}_i\rangle\, F(\mathbf{q}_i).$$

Ora basta osservare che, per la linearità del prodotto scalare nella prima componente, la funzione che a un vettore $\mathbf{u}$ associa il vettore $\langle \mathbf{u}, \mathbf{q}_i\rangle\, F(\mathbf{q}_i)$ è lineare per ogni indice i. La formula sopra mostra che F è somma di funzioni lineari, dunque è lineare.

Nel caso generale, supponiamo che F sia un'isometria e poniamo $G(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{0})$. Si osservi che G è un'isometria, perché

$$G(\mathbf{v}) - G(\mathbf{w}) = [F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{0})] - [F(\mathbf{w}) - F(\mathbf{0})] = F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w})$$

e dunque

$$\|G(\mathbf{v}) - G(\mathbf{w})\| = \|F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Inoltre $G(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) - F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dunque, per quanto dimostrato nella prima parte dell'esercizio, G è un'isometria lineare. Se poniamo $H(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + F(\mathbf{0})$, allora H è una traslazione e

$$(H \circ G)(\mathbf{v}) = H(G(\mathbf{v})) = G(\mathbf{v}) + F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{v}).$$

Dunque F è il prodotto di una traslazione H e dell'isometria lineare G.

Se $n = 2$, infine, sappiamo dall'esempio di pagina 384 nel testo che ogni isometria lineare è una rotazione intorno all'origine oppure una riflessione ortogonale. Per quanto dimostrato nella seconda parte dell'esercizio, abbiamo allora che ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è il prodotto di una traslazione con una di queste trasformazioni.

4. PROIEZIONI ORTOGONALI E ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT

26 Sia $\mathbf{H}$ il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x - y + z = 0$. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$ come somma di un vettore di $\mathbf{H}$ e di un vettore perpendicolare ad $\mathbf{H}$. Calcolare la distanza di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{H}$.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{n} = [3, -1, 1]$ dei coefficienti dell'equazione di $\mathbf{H}$ è una base del sottospazio $\mathbf{H}^\perp$. La proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}^\perp$ è allora

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{4}{11}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}$ è

$$\mathbf{v}_{\mathbf{H}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{11}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 \\ 26 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

La distanza di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{H}$ è $\|\mathbf{v}_\perp\| = 4/\sqrt{11}$.

27 Trovare una base ortogonale $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che il sottospazio generato da $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ coincida con lo spazio colonna della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Se indichiamo con $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ le colonne di $\mathbf{A}$, allora una base ortogonale di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ si ottiene applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Si ottiene

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1 \rangle}{\|\mathbf{q}_1\|^2}\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Per completare la base determiniamo una base ortogonale di $\mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$. Riducendo a scala $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ troviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

e dunque $\mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$ è generato, ad esempio, dal vettore $\mathbf{q}_3 = [1, -1, 4]^{\mathrm{T}}$. Questo vettore è necessariamente ortogonale sia a $\mathbf{q}_1$ che a $\mathbf{q}_2$, quindi $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ è una base ortogonale con le caratteristiche desiderate.

28 Sia $\mathbf{H}$ il piano di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Trovare una base ortonormale di $\mathbf{H}$ e una base ortonormale di $\mathbf{H}^\perp$. Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{v} = [3, 2, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ su $\mathbf{H}$ e su $\mathbf{H}^\perp$. Calcolare la distanza di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{H}$ e da $\mathbf{H}^\perp$.

Soluzione. Il sottospazio $\mathbf{H}$ è il nucleo della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se risolviamo il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ utilizzando x_3 e x_4 come variabili libere, troviamo che $\mathbf{H}$ è generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ otteniamo la base ortogonale di $\mathbf{H}$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1 \rangle}{\|\mathbf{q}_1\|^2}\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Per ottenere una base ortonormale possiamo normalizzare i vettori $\mathbf{q}_1$ e $2\mathbf{q}_2$, quest'ultimo al posto di $\mathbf{q}_2$ per semplificare il calcolo. Troviamo i vettori

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Il sottospazio $\mathbf{H}^\perp$ è lo spazio riga di $\mathbf{A}$. Dal momento che $\mathbf{A}$ è già ridotta a scala, questo spazio è generato dai vettori

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se applichiamo ancora una volta l'algoritmo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{q}_3 \rangle}{\|\mathbf{q}_3\|^2}\mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalizzando $\mathbf{q}_3$ e $3\mathbf{q}_4$ abbiamo una base ortonormale di $\mathbf{H}^\perp$:

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Per calcolare la proiezione $\mathbf{v_H}$ di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}$ usiamo la formula 5.3:

$$\mathbf{v_H} = \hat{x}_1\mathbf{q}_1 + \hat{x}_2\mathbf{q}_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{3}{10}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\-4\\3\end{bmatrix}.$$

La proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}^\perp$ si ottiene per differenza:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{H}^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v_H} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\-4\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}12\\9\\9\\-3\end{bmatrix}.$$

Le distanze di $\mathbf{v}$ da $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^\perp$ sono le norme delle proiezioni sui complementi. Dunque

$$d(\mathbf{v},\mathbf{H}) = \|\mathbf{v}_{\mathbf{H}^\perp}\| = 3\sqrt{\frac{7}{5}}$$
$$d(\mathbf{v},\mathbf{H}^\perp) = \|\mathbf{v_H}\| = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

29 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue $[0,1] \to \mathbb{R}$ con la norma L^2. Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme $\{1, x, x^2\}$.

Soluzione. Indichiamo i tre polinomi assegnati rispettivamente con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Per il primo vettore abbiamo $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1 = 1$ e

$$\|\mathbf{b}_1\|^2 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle = \int_0^1 1dx = 1.$$

Se calcoliamo il coefficiente di Fourier di $\mathbf{v}_2$ rispetto a $\mathbf{b}_1$ troviamo

$$\hat{x}_2^1 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{b}_1\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

e dunque

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \hat{x}_2^1\mathbf{b}_1 = x - \frac{1}{2}$$

con

$$\|\mathbf{b}_2\|^2 = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Infine calcoliamo i coefficienti di Fourier di $\mathbf{v}_3$. Troviamo

$$\hat{x}_3^1 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{b}_1\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\hat{x}_3^2 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{b}_2\rangle = 12\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right) dx = 1$$

da cui

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \hat{x}_3^1\mathbf{b}_1 - \hat{x}_3^2\mathbf{b}_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

30 Sia $\mathbf{V}$ lo spazio delle funzioni continue su $[-1,1]$ con la norma L^2. Sia $\mathbf{H}$ il sottospazio di $\mathbf{V}$ generato dai polinomi $\{1, x, x^2\}$. Trovare la proiezione ortogonale di $\sin(\pi x)$ su $\mathbf{H}$, e calcolare la distanza di $\sin(\pi x)$ da $\mathbf{H}$.

Soluzione. Siccome l'integrale di una funzione dispari sull'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ è nullo, i polinomi $\mathbf{b}_1 = 1$ e $\mathbf{b}_2 = x$ sono tra loro ortogonali. Calcoliamo la norma di questi polinomi:

$$\|\mathbf{b}_1\|^2 = \int_{-1}^1 1\, dx = 2,$$

$$\|\mathbf{b}_2\|^2 = \int_{-1}^1 x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$

Per Gram-Schmidt, il polinomio

$$\mathbf{b}_3 = x^2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle x^2, \mathbf{b}_i\rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} = x^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2\, dx - \frac{3}{2}\int_{-1}^1 x^3\, dx = x^2 - \frac{1}{3}$$

è ortogonale a $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$. Abbiamo così determinato una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di $\mathbf{H}$. La norma di $\mathbf{b}_3$ è:

$$\|\mathbf{b}_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}.$$

Determiniamo ora i coefficienti di Fourier di $\sin(\pi x)$ rispetto a $\mathcal{B}$ tenendo conto del fatto che $\sin(\pi x)$ è una funzione dispari:

$$\hat{x}^1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sin(\pi x)\, dx = 0,$$

$$\hat{x}^2 = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 x \sin(\pi x)\, dx = \frac{3}{\pi},$$

$$\hat{x}^3 = \frac{45}{8}\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sin(\pi x)\, dx = 0.$$

La proiezione del vettore $\mathbf{v} = \sin(\pi x)$ su $\mathbf{H}$ è dunque

$$\mathbf{v}_{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}^i \mathbf{b}_i = \frac{3}{\pi}x.$$

Infine, la distanza di $\sin(\pi x)$ da $\mathbf{H}$ è la norma del vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v_H}$. Per il teorema di Pitagora

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v_H}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v_H}\|^2 = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x)\, dx - \int_{-1}^{1} \frac{9}{\pi^2} x^2\, dx = 1 - \frac{6}{\pi^2}.$$

Quindi la distanza cercata è $\sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}}$.

31 In $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 2x_3 y_3.$$

Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt ai vettori della base canonica per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a questo nuovo prodotto scalare.

Soluzione. Si osservi che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ è davvero un prodotto scalare: è evidentemente bilineare e simmetrico, mentre è definito positivo perché

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 x_3 \geq x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - (x_2^2 + x_3^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Calcoliamo i prodotti scalari dei vettori della base canonica:

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \qquad &&\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0, \qquad &&\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0, \\ &\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 2, &&\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, &&\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 2. \end{aligned}$$

Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt troviamo una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a questo prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{e}_3 - \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 - \frac{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{b}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = [0, 1/2, 1]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

5. EQUAZIONI NORMALI E IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

32 Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x + y - 2z = 2 \\ x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

calcolare il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ e della matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ del sistema, e dedurre che il sistema non ammette soluzioni. Determinare quindi le soluzioni ai minimi quadrati del sistema, e la proiezione ortogonale $\mathbf{p}$ del termine noto $\mathbf{b}$ sullo spazio colonna di $\mathbf{A}$. Verificare infine che $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ è perpendicolare alle colonne di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Se riduciamo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Come si vede, $r(\mathbf{A}) = 2$ e $r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$; il sistema non ha dunque soluzioni. Il corrispondente sistema delle equazioni normali è $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 14 & 12 \\ 3 & 12 & 21 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Se riduciamo a scala la matrice del nuovo sistema otteniamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 14 & 12 & 26 \\ 3 & 12 & 21 & 18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 6 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Come si vede i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa coincidono e il sistema delle equazioni normali ammette le ∞^1 soluzioni

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{x}_0$ è una qualunque di queste soluzioni, ad esempio quella che si ottiene per $t = 0$, allora la proiezione di $\mathbf{b}$ su $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ è il vettore

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Infine, per verificare che $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ è ortogonale a $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ basta osservare che

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

33 Dati

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

si determini la proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ sullo spazio delle colonne di $\mathbf{A}$ e si scomponga il vettore $\mathbf{b}$ nella forma $\mathbf{b} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v}$ appartenente allo spazio colonna $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{w}$ appartenente al sottospazio ortogonale a $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Soluzione. Determiniamo una soluzione ai minimi quadrati del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Se riduciamo a scala la matrice completa delle equazioni normali $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & -7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -10 \end{array}\right].$$

L'unica soluzione delle equazioni normali è il vettore

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 17 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

La proiezione di $\mathbf{b}$ su $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ è il vettore $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$. Dunque i vettori cercati sono

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 \\ 37 \\ -10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{v} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

34 Trovare la soluzione ai minimi quadrati del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nel caso in cui

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Determinare inoltre la proiezione $\mathbf{p}$ di $\mathbf{b}$ sullo spazio colonna di $\mathbf{A}$, e verificare che $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ è perpendicolare alle colonne di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Determiniamo anzitutto le equazioni normali.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Se riduciamo a scala il sistema delle equazioni normali troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 15 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Il sistema delle equazioni normali ammette l'unica soluzione

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La proiezione di $\mathbf{b}$ su $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ è il vettore

$$\mathbf{p} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e per verificare che $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^{\perp}$ basta osservare che

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

35 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} kx + y = k \\ x + ky = 1 \\ x + y = k \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare per quali valori del parametro k il sistema ammette soluzioni.
2. In corrispondenza di tali valori del parametro determinare tutte le soluzioni del sistema.
3. Posto $k = 2$ determinare la soluzione ai minimi quadrati.

Soluzione. 1, 2. La matrice completa del sistema

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{array}\right]$$

ha determinante

$$p(k) = k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1).$$

Se $k \neq \pm 1$ il determinante è diverso da zero e la matrice completa ha rango 3; dal momento che la matrice dei coefficienti ha rango al massimo due, il sistema non ha soluzione. Se $k = 1$ e riduciamo a scala la matrice completa troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dal momento che $r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) = 1$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni che sono date dalla formula

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se poniamo $k = -1$ e riduciamo a scala la matrice completa del sistema troviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

In questo caso $r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) = 2$ e il sistema ammette l'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Poniamo infine $k = 2$ e scriviamo le equazioni normali. Poiché

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix},$$

la matrice del sistema delle equazioni normali e la sua riduzione a scala sono

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{array}\right].$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/11 \\ 1/11 \end{bmatrix}$$

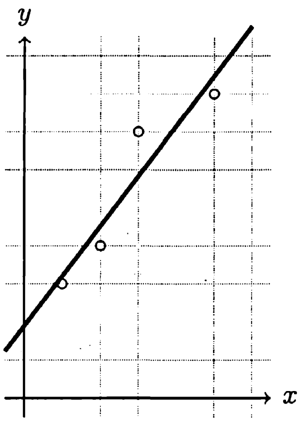
che è la soluzione ai minimi quadrati del sistema di partenza per $k = 2$.

36 Trovare la retta di regressione ai minimi quadrati per i punti $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,7)$, $(5,8)$.

Soluzione. Supponiamo che la retta cercata abbia equazione $y = ax + b$. Le condizioni di passaggio per i punti assegnati si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 4 \\ 3a + b = 7 \\ 5a + b = 8 \end{cases}$$

che non ha soluzione perché la matrice completa ha rango 3.



Il sistema delle equazioni normali associato a questo sistema è

$$\begin{cases} 39a + 11b = 72 \\ 11a + 4b = 22 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 46 \\ 66 \end{bmatrix}.$$

La retta cercata ha dunque equazione

$$y = \frac{46}{35}x + \frac{66}{35}.$$

I punti e la retta di regressione sono rappresentati nel grafico a fianco.

37 In questo esercizio si determina una parabola anziché la retta ai minimi quadrati. Dati i punti $(x_1, y_1) = (-1, 1)$, $(x_2, y_2) = (0, 1)$, $(x_3, y_3) = (1, 4)$ e $(x_4, y_4) = (2, 7)$, si determini la parabola $y(x) = ax^2 + bx + c$ che minimizza l'errore

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{4} (y_k - y(x_k))^2.$$

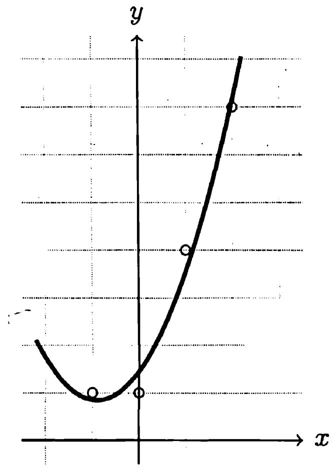
Soluzione. Le condizioni di passaggio per i punti assegnati si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a-b+c=1 \\ c=1 \\ a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$$

che non ha soluzione perché la matrice completa ha rango 4. Risolviamo allora il sistema con il metodo dei minimi quadrati che minimizza la norma di $\mathbf{b}-\mathbf{Ax}$.

Le equazioni normali sono

$$\begin{cases} 18a+8b+6c=33 \\ 8a+6b+2c=17 \\ 6a+2b+4c=13 \end{cases}$$



e ammettono come unica soluzione il vettore

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

La parabola cercata ha dunque equazione

$$y=\frac{3}{4}x^2+\frac{27}{20}x+\frac{29}{20}.$$

I punti e la parabola sono rappresentati nel grafico a fianco.

38 Spiegare perché, se $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ammette soluzioni, allora le soluzioni coincidono con le soluzioni ai minimi quadrati.

Soluzione. Basta ricordare che una soluzione ai minimi quadrati del sistema lineare $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ è, per definizione, una soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax}=\mathbf{b_H}$, dove $\mathbf{b_H}$ è la proiezione di $\mathbf{b}$ sul $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Se il sistema originario $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ammette soluzione, allora $\mathbf{b}\in\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e quindi che $\mathbf{b_H}=\mathbf{b}$. Il sistema originario e quello delle equazioni normali sono dunque equivalenti.

39 Si supponga che $\mathbf{A}$ abbia n colonne e rango r. Mostrare che le soluzioni ai minimi quadrati di $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ dipendono da $n-r$ parametri.

Soluzione. Ricordiamo che le soluzioni ai minimi quadrati di $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ sono le soluzioni del sistema lineare $\mathbf{Ax}=\mathbf{b_H}$, dove $\mathbf{b_H}$ è la proiezione di $\mathbf{b}$ sul $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Per il teorema di Rouché-Capelli, quest'ultimo sistema ha soluzione e le sue soluzioni dipendono da $n-r$ parametri.

40 Mostrare che, per ogni matrice reale $\mathbf{A}$, valgono le uguaglianze $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{Ker}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})$ e $\mathrm{Col}(\mathbf{A})=\mathrm{Col}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})$. In particolare, $r(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})=r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=r(\mathbf{A})$. (Attenzione: $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ è una matrice simmetrica e non è la trasposta di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, che è anch'essa simmetrica, e quindi coincide con la propria trasposta).

Soluzione. Se poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, allora $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{B})$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$. Dall'esercizio 38 sappiamo che questo coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema ai minimi quadrati $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$, che è $\mathrm{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})$. Dunque $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})$. Per gli spazi colonna basta utilizzare quanto appena dimostrato insieme con la proposizione 6.2:

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}})^{\perp} = \mathrm{Col}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}).$$

L'uguaglianza fra i ranghi consegue immediatamente dal fatto che $r(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

41 Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ e sia $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare rappresentata da $\mathbf{A}$: $\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. Il dominio di $\mathfrak{L}$ si decompone come somma diretta ortogonale $\mathbb{R}^n = \mathrm{Row}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, e il codominio come $\mathbb{R}^m = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$. Mostrare che la restrizione di $\mathfrak{L}$ allo spazio riga è un isomorfismo dello spazio riga sulla spazio colonna. Questo spiega (nel caso reale) perché lo spazio riga e lo spazio colonna hanno la stessa dimensione.

Soluzione. Dall'unicità della decomposizione ortogonale di un vettore enunciata nella proposizione 5.2 e dalla definizione 10.4 del capitolo 4 di somma diretta consegue immediatamente che per ogni sottospazio $\mathbf{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ risulta $\mathbb{R}^n = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^{\perp}$. Se prendiamo $\mathbf{H} = \mathrm{Row}(\mathbf{A})$, allora dalla proposizione 6.2 abbiamo che $\mathbf{H}^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ e dunque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Row}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. In modo simile, se prendiamo $\mathbf{H} = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}^m$, allora, sempre dalla proposizione 6.2 abbiamo che $\mathbf{H}^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ e dunque $\mathbb{R}^m = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

Per quanto riguarda la funzione lineare $\mathfrak{L}$, ricordiamo che $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ e dunque $\mathfrak{L}$ si restringe a una funzione lineare $\mathfrak{L}' : \mathrm{Row}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Questa funzione è iniettiva, perché

$$\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}') = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \cap \mathrm{Row}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{Row}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$$

per via della decomposizione del dominio. D'altra parte

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}(\mathrm{Row}(\mathbf{A})) + \mathfrak{L}(\mathrm{Ker}(\mathbf{A})) = \mathfrak{L}(\mathrm{Row}(\mathbf{A})) = \mathfrak{L}'(\mathrm{Row}(\mathbf{A})) = \mathrm{Im}(\mathfrak{L}')$$

e dunque $\mathfrak{L}'$ è anche suriettiva.

6. MATRICI DI PROIEZIONI ORTOGONALI

42 Nel testo abbiamo calcolato la matrice $\mathbf{P}$ della proiezione di $\mathbb{R}^4$ sulla retta generata dal vettore $\mathbf{w} = [1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spiegare perché $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ sull'iperpiano $\mathbf{H}$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{v_H}$ di $\mathbf{v} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$ su $\mathbf{H}$. Verificare che $\mathbf{v_H} = \mathbf{v}$ se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, e che $\mathbf{v_H} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\perp}$.

Soluzione. Se indichiamo con $\mathbf{L}$ la retta generata da $\mathbf{w}$, allora $\mathbf{L} = \mathrm{Col}(\mathbf{w})$ e dalla proposizione 6.2 abbiamo che

$$\mathbf{H} = \mathrm{Ker}(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Col}(\mathbf{w})^{\perp} = \mathbf{L}^{\perp}.$$

Ricordiamo ora dall'osservazione di pagina 392 del testo che se $\mathbf{v_L}$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{L}$, allora $\mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_L}$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{L}^{\perp} = \mathbf{H}$. La matrice $\mathbf{Q}$ della proiezione su $\mathbf{H}$ è allora definita dalla formula

$$\mathbf{Qv} = \mathbf{v_H} = \mathbf{v} - \mathbf{v_L} = \mathbf{Iv} - \mathbf{Pv} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v}$$

e dunque $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. La proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{H}$ è allora data da

$$\mathbf{v_H} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo ora che $\mathbf{v} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}$, cioè che sia $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Allora

$$\mathbf{v_H} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \\ 4x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}.$$

Se invece $\mathbf{v} \in \mathbf{L}$, allora $\mathbf{v} = t\mathbf{w}$ per un $t \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\mathbf{v_H} = t\mathbf{w_H} = \frac{t}{4}\begin{bmatrix} 3 - 1 - 1 - 1 \\ -1 + 3 - 1 - 1 \\ -1 - 1 + 3 - 1 \\ -1 - 1 - 1 + 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

43 Sia $\mathbf{V}$ uno spazio euclideo e sia $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{V}$ su un suo sottospazio $\mathbf{H}$. Mostrare che $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$ e $\mathbf{H}^{\perp} = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$. Inoltre $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}$, e $\mathfrak{L}$ è simmetrica nel senso che

$$\langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \rangle$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Viceversa, mostrare che, se $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è simmetrica e idempotente, allora $\mathfrak{L}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{V}$ sull'immagine di $\mathfrak{L}$.

Soluzione. Supponiamo $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sia la proiezione ortogonale di $\mathbf{V}$ su un suo sottospazio $\mathbf{H}$. Questo significa che per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ il vettore $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}$, mentre il vettore $\mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}^{\perp}$.

Mostriamo che $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$. Siccome $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, vale l'inclusione $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathbf{H}$. Ora proviamo che, se $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$, allora $\mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$: infatti, se $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$, allora $\mathbf{h} - \mathfrak{L}(\mathbf{h})$ appartiene a $\mathbf{H}$ in quanto differenza di vettori del sottospazio $\mathbf{H}$, ma appartiene anche a $\mathbf{H}^{\perp}$ per definizione di proiezione ortogonale; quindi $\mathbf{h} - \mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{0}$ è l'unico vettore che appartiene sia a $\mathbf{H}$ sia a $\mathbf{H}^{\perp}$. Questo dimostra che

$\mathbf{h} = \mathfrak{L}(\mathbf{h})$ per ogni $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$; ne segue che vale anche l'altra inclusione $\mathbf{H} \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$, per cui $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$.

Mostriamo che $\mathbf{H}^\perp = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$. Se $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^\perp$, allora

$$\mathfrak{L}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - (\mathbf{w} - \mathfrak{L}(\mathbf{w}))$$

appartiene a $\mathbf{H}^\perp$ perché è la differenza di due vettori di $\mathbf{H}^\perp$; d'altra parte $\mathfrak{L}(\mathbf{w})$ appartiene a $\mathbf{H}$ per definizione di proiezione ortogonale. Quindi $\mathfrak{L}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{0}$ è l'unico vettore che appartiene sia a $\mathbf{H}$ sia a $\mathbf{H}^\perp$. Questo vale per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^\perp$ e quindi $\mathbf{H}^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$. D'altra parte, se $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, allora $\mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \in \mathbf{H}^\perp$, e perciò vale anche l'altra inclusione $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathbf{H}^\perp$. Questo conclude la dimostrazione che $\mathbf{H}^\perp = \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$.

Per mostrare che $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}$, usiamo il fatto, appena dimostrato, che $\mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ per ogni $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$. Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, l'immagine $\mathbf{h} = \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}$, e quindi

$$\mathfrak{L}^2(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h} = \mathfrak{L}(\mathbf{v}).$$

Questo mostra $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}$.

Infine mostriamo che $\mathfrak{L}$ è un operatore simmetrico (o autoaggiunto): per semplificare le notazioni, poniamo $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$: si tratta di un vettore ortogonale a $\mathbf{H}$, qualunque sia $\mathbf{v}$. Allora per ogni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

$$\langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \rangle + \langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w}_\perp \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \rangle$$

Scambiando i ruoli di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, otteniamo anche $\langle \mathfrak{L}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{w}), \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \rangle$. Siccome il prodotto scalare è simmetrico, possiamo concludere

$$\langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{w}), \mathfrak{L}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathfrak{L}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \rangle\,.$$

Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sia un'applicazione lineare simmetrica e idempotente, e poniamo $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$. Vogliamo far vedere che $\mathfrak{L}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{V}$ su $\mathbf{H}$: dobbiamo per questo mostrare che per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ il vettore $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}$, mentre il vettore $\mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}^\perp$. Il fatto che $\mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartenga a $\mathbf{H}$ è ovvio perché per definizione $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$.

Per finire occorre dimostrare che $\mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}^\perp$. Osserviamo che, se $\mathbf{h} \in \mathbf{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{L})$, allora esiste $\mathbf{v}$ tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{h}$; per calcolare $\mathfrak{L}(\mathbf{h})$ usiamo ora l'ipotesi che $\mathfrak{L}$ sia idempotente, cioè $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathbf{v})) = \mathfrak{L}^2(\mathbf{v}) = \mathfrak{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{h}$$

Questo mostra $\mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ per ogni $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$. Possiamo ora provare che $\mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ appartiene a $\mathbf{H}^\perp$. Sia $\mathbf{h}$ un vettore qualsiasi di $\mathbf{H}$: usando la simmetria di $\mathfrak{L}$ e il fatto che $\mathfrak{L}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ calcoliamo

$$\langle \mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle - \langle \mathfrak{L}(\mathbf{v}), \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathfrak{L}(\mathbf{h}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle = 0\,.$$

Questo mostra che $\mathbf{v} - \mathfrak{L}(\mathbf{v})$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbf{H}$ come dovevasi dimostrare.

44 Sia $\mathbf{E}$ una matrice quadrata di ordine n, e si supponga che $\mathbf{E}$ sia idempotente: $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$. Mostrare che ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si scrive in uno e un sol modo come somma di un vettore di $\mathrm{Col}(\mathbf{E})$ e di un vettore di $\mathrm{Ker}(\mathbf{E})$, cioè $\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}(\mathbf{E}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$. Mostrare inoltre che $\mathrm{Col}(\mathbf{E})$ è l'autospazio di $\mathbf{E}$ relativo all'autovalore 1, mentre $\mathrm{Ker}(\mathbf{E})$ è l'autospazio di $\mathbf{E}$ relativo all'autovalore 0. Concludere che la matrice $\mathbf{E}$ è diagonalizzabile. Calcolare il polinomio caratteristico di $\mathbf{E}$ (dipende dal rango di $\mathbf{E}$).

Soluzione. Per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$\mathbf{E}(\mathbf{v} - \mathbf{E}\mathbf{v}) = \mathbf{E}\mathbf{v} - \mathbf{E}^2\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{v} - \mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Questo prova che $\mathbf{v} - \mathbf{E}\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$. D'altra parte, $\mathbf{E}\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(\mathfrak{L}_\mathbf{E}) = \mathrm{Col}(\mathbf{E})$. In conclusione, $\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{E}\mathbf{v})$ è somma di un vettore di $\mathrm{Col}(\mathbf{E})$ e di un vettore di $\mathrm{Ker}(\mathbf{E})$, dunque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}(\mathbf{E}) + \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$. Supponiamo ora che $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(\mathbf{E}) \cap \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$. Poiché $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(\mathbf{E})$, deve esistere $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{w}$, ma poiché $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$ deve essere

$$\mathbf{0} = \mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{E}^2\mathbf{w} = \mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Dunque $\mathrm{Col}(\mathbf{E}) \cap \mathrm{Ker}(\mathbf{E}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}(\mathbf{E}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{E})$.

Ora si osservi che l'autospazio relativo all'autovalore 0 è, per definizione, l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ per cui $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathrm{Ker}(\mathbf{E})$. Quanto a $\mathrm{Col}(\mathbf{E})$, abbiamo già osservato che se $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(\mathbf{E})$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{w}$ e dunque $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}$; dunque ogni vettore di $\mathrm{Col}(\mathbf{E})$ appartiene all'autospazio $\mathbf{V}_1$. Viceversa, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1$ allora $\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(\mathbf{E})$. In conclusione $\mathrm{Col}(\mathbf{E}) = \mathbf{V}_1$. Dalla prima parte della dimostrazione abbiamo allora che $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di autospazi e quindi $\mathbf{E}$ è diagonalizzabile.

Poiché $\mathbf{E}$ è diagonalizzabile, il suo polinomio caratteristico $p(x)$ si spezza su $\mathbb{R}$ come prodotto di polinomi lineari. Gli unici fattori irriducibili di $p(x)$ sono il polinomio x, che corrisponde all'autovalore 0 e il polinomio $x - 1$ che corrisponde all'autovalore 1. La molteplicità algebrica di questi autovalori coincide con quella geometrica perché $\mathbf{E}$ è diagonalizzabile. Se poniamo $r = r(\mathbf{E})$, allora $\dim \mathrm{Col}(\mathbf{E}) = r$ e $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{E}) = n - r$. Dunque il polinomio caratteristico è

$$p(x) = x^{n-r}(x - 1)^r.$$

45 Trovare una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine 2 tale che $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) + \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \neq \mathbb{R}^2$. (Suggerimento: cercare tra le matrici non diagonalizzabili.)

Soluzione. Indichiamo con $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare rappresentata dalla matrice cercata $\mathbf{A}$. Ricordiamo che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ e che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Osserviamo anzitutto che $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, può avere solo dimensione 0, 1 oppure 2. Dobbiamo escludere immediatamente il caso $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = 0$ perché in questo caso si avrebbe $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \cap \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0}\}$ e dunque anche l'intersezione sarebbe il sottospazio nullo. Dobbiamo anche escludere il caso $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = 2$, perché in questo caso dovrebbe essere $\mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^2$; ma allora $\mathfrak{L}$ sarebbe la funzione lineare nulla e $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0}\}$, il che implicherebbe ancora una volta che $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \cap \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = \{\mathbf{0}\}$. Dunque deve essere $\dim \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) = 1$. Dal teorema di rango più nullità deve allora essere anche $\dim \mathrm{Im}(\mathfrak{L}) = 1$ e la condizione $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}) \cap \mathrm{Ker}(\mathfrak{L}) \neq \{\mathbf{0}\}$, che obbliga l'intersezione ad essere un sottospazio comune di dimensione almeno 1, implica che sia $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \operatorname{Im}(\mathfrak{L})$ e che questo sottospazio abbia dimensione 1. Questo determina essenzialmente $\mathfrak{L}$: a meno di un cambiamento di base, possiamo infatti prendere $\operatorname{Ker}(\mathfrak{L}) = \operatorname{Im}(\mathfrak{L}) = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$ e quindi possiamo assumere che sia $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$; se poi estendiamo $\{\mathbf{e}_1\}$ ad una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio con il vettore $\mathbf{e}_2$, deve allora essere $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_2) \in \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$. Per comodità prendiamo $\mathfrak{L}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$. Abbiamo allora fissato i valori di $\mathfrak{L}$ su una base e quindi $\mathfrak{L}$ risulta determinata. La sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

46 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n. Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\operatorname{Col}(\mathbf{A}) \cap \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ e $\operatorname{Col}(\mathbf{A}) + \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$. (Suggerimento: fare prima il caso in cui $\mathbf{A}$ è diagonale.)

Soluzione. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di $\mathbf{A}$ e sia $\mathbf{V}_k$ l'autospazio relativo all'autovalore λ_k. Possiamo sempre assumere che sia $\lambda_1 = 0$ prendendo $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{0}\}$ quando 0 non è autovalore di $\mathbf{A}$. Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathbb{R}^n$ è somma diretta degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{V}_i.$$

Ma $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}_1$ e $\operatorname{Col}(\mathbf{A})$ è la somma degli autospazi relativi agli autovalori non nulli, dunque

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_1 \oplus \left(\bigoplus_{i>1} \mathbf{V}_i \right) = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) \oplus \operatorname{Col}(\mathbf{A})$$

e questo è esattamente quanto andava dimostrato.

7. IL CASO COMPLESSO

47 Calcolare il prodotto scalare in $\mathbb{C}^2$ dei due vettori $\mathbf{z} = [2+i, 3i]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{w} = [2, 4-i]^{\mathrm{T}}$. Calcolare la norma dei due vettori. Scrivere i corrispondenti vettori $\widetilde{\mathbf{z}}$ e $\widetilde{\mathbf{w}}$ in $\mathbb{R}^4$ e calcolarne il prodotto scalare reale. Verificare la formula (8.4) del testo in questo caso.

Soluzione. Calcoliamo il prodotto interno utilizzando la definizione 8.1:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{w}} = [2+i \;\; 3i] \begin{bmatrix} 2 \\ 4+i \end{bmatrix} = (2+i)2 + 3i(4+i) = 1 + 14i.$$

Per calcolare le norme utilizziamo la formula

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \sqrt{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{z}}} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

Abbiamo

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{(4+1)+9} = \sqrt{14}$$
$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{4+(16+1)} = \sqrt{21}.$$

Infine

$$\langle \widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = \widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\mathbf{w}} = [2\ 0\ 1\ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{i\mathbf{w}} \right\rangle = \widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} \widetilde{i\mathbf{w}} = [2\ 0\ 1\ 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 14$$

e dunque

$$\langle \widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle + i \left\langle \widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{i\mathbf{w}} \right\rangle = 1 + 14i = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$$

che è la formula (8.4).

48 Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & i & 3 \\ 2 & -i & i \end{bmatrix},$$

calcolare $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & i \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & i \\ 3 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & i & 3 \\ 2 & -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1-2i & -i \\ 1+2i & 2 & -1-3i \\ i & -1+3i & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} i & i & 3 \\ 2 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & i \\ 3 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1-i \\ -1+i & 6 \end{bmatrix}.$$

49 Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ il cui primo vettore sia un multiplo complesso di $[i, 2]^{\mathrm{T}}$. Scrivere la corrispondente matrice unitaria di ordine 2, e verificare che $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Soluzione. Costruiamo anzitutto una base ortogonale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{C}^2$ il cui primo vettore sia un multiplo del vettore assegnato. Possiamo prendere ad esempio

$$\mathbf{v}_1 = i \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\mathbf{e}_1$ è linearmente indipendente rispetto a $\mathbf{v}_1$, quindi possiamo utilizzarlo per completare la base. Va tuttavia ortogonalizzato rispetto a $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 2i \end{bmatrix}.$$

Per ottenere una base ortonormale normalizziamo $\mathbf{v}_1$ e, per comodità di calcolo, $5\mathbf{v}_2$. Otteniamo i vettori

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2i \end{bmatrix}.$$

La matrice unitaria associata alla base è

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4i & 2i \end{bmatrix}$$

e per verificare che è effettivamente unitaria basta osservare che

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -2 & -4i \\ 4 & -2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4i & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

50 Mostrare che il prodotto di due matrici unitarie è una matrice unitaria. Mostrare che l'inversa di una matrice unitaria è unitaria.

Soluzione. Supponiamo anzitutto che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ siano matrici unitarie. Allora

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{H}}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Dunque $\mathbf{AB}$ è unitaria. Dall'equazione $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ consegue che $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$. Ma allora

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

e dunque $\mathbf{A}^{-1}$ è unitaria.

51 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata complessa. Che relazione c'è tra il determinante di $\mathbf{A}$ e quello di $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$? E tra i polinomi caratteristici delle due matrici? E tra gli autovalori? Mostrare che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ calcolando il rango con il teorema di Kronecker.

Soluzione. Per il determinante abbiamo che

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) &= \det(\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}) \\
&= \det(\bar{\mathbf{A}}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma}\overline{a_{1\sigma(1)}}\cdots\overline{a_{n\sigma(n)}} \\
&= \overline{\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}} \\
&= \overline{\det(\mathbf{A})}.
\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico può essere calcolato come un determinante; dunque

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{A}^{\mathrm{H}}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \lambda\mathbf{I}) \\
&= \det(\mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \lambda\mathbf{I}^{\mathrm{H}}) \\
&= \det((\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})^{\mathrm{H}}) \\
&= \overline{\det(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})} \\
&= \overline{P_{\mathbf{A}}(\bar{\lambda})} \\
&= \overline{P_{\mathbf{A}}}(\lambda)
\end{aligned}$$

e i due polinomi sono coniugati. Ma gli zeri di due polinomi coniugati sono coniugati; infatti

$$\bar{P}(\bar{a}) = 0 \iff \overline{P(a)} = 0 \iff P(a) = 0.$$

Dunque gli autovalori di $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ sono i coniugati degli autovalori di $\mathbf{A}$. Infine il teorema di Kronecker garantisce che il rango di $\mathbf{A}$ è il massimo degli ordini dei minori non nulli di $\mathbf{A}$. I minori di $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ sono, per quanto dimostrato sui determinanti, i coniugati dei corrispondenti minori di $\mathbf{A}$ e il loro annullarsi coincide con l'annullarsi dei minori corrispondenti di $\mathbf{A}$. Dunque $r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) = r(\mathbf{A})$.

52 Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è una matrice complessa $m \times n$, il nucleo di $\mathbf{A}$ è il complemento ortogonale in $\mathbb{C}^n$ dello spazio colonna di $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$. Dedurre che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$.

Soluzione. Modifichiamo la dimostrazione data per il caso reale nella proposizione 6.2. Indichiamo con $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ i vettori riga di $\mathbf{A}$, che coincidono con le colonne di $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Dunque le colonne di $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ sono i vettori $\overline{\mathbf{v}_1}, \ldots, \overline{\mathbf{v}_m}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) &\iff \forall i \ {\mathbf{v}_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0 \\ &\iff \forall i \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_i = 0 \\ &\iff \forall i \ \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}}_i \rangle = 0 \\ &\iff \mathbf{x} \in \operatorname{Col}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\perp}. \end{aligned}$$

Per dedurre da questo che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ si osservi anzitutto che, come nel caso reale, ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ si scrive in modo unico nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{v_H} + \mathbf{v_{H^\perp}}$ dove $\mathbf{v_H} \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{v_{H^\perp}} \in \mathbf{H}^{\perp}$; si veda la discussione a pagina 421 del testo. Questo significa che $\mathbb{C}^n = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^{\perp}$ e dunque che $n = \dim \mathbf{H} + \dim \mathbf{H}^{\perp}$. Da questa osservazione e dal teorema di rango più nullità si ottiene che

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) &= \dim \operatorname{Col}(\mathbf{A}) \\ &= n - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) \\ &= n - \dim \operatorname{Col}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\perp} \\ &= \dim \operatorname{Col}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) \\ &= r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}). \end{aligned}$$

53 Una matrice *hermitiana* è una matrice complessa $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^{\mathrm{H}} = \mathbf{B}$ (l'analogo complesso di una matrice simmetrica). Mostrare che, se $\mathbf{A}$ è una matrice complessa $m \times n$, allora $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ è una matrice Hermitiana $n \times n$, e $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ è una matrice Hermitiana $m \times m$. Mostrare che

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}).$$

Soluzione. Per provare che $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ è hermitiana basta osservare che

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{HH}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}.$$

Un calcolo simile prova che $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ è hermitiana.

Dall'esercizio 52 sappiamo che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$. Proviamo ora che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})$. Osserviamo anzitutto che se $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, allora $(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Viceversa, se $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, allora

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{Ax})^{\mathrm{H}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{0} = 0.$$

Dunque $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Questo prova che $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})$. Dal teorema di rango più nullità si ottiene che

$$r(\mathbf{A}) = n - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = n - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}).$$

L'uguaglianza $r(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) = r(\mathbf{AA}^{\mathrm{H}})$ si ottiene allo stesso modo scambiando i ruoli di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$.

8. COMPLEMENTI

54 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si spieghi perché $\mathbf{A}$ è la matrice di una rotazione di $\mathbb{R}^3$. Si determinino l'asse e l'angolo di rotazione.
2. Si determinino gli autovalori di $\mathbf{A}$. La matrice è diagonalizzabile da una matrice complessa? E da una matrice reale?
3. Si determini una matrice ortogonale reale $\mathbf{Q}$ tale che

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. 1. La matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale perché le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$; infatti sono ottenute dalla base canonica applicando la permutazione $\sigma = (1, 3, 2)$. Poiché σ ha parità pari, $\det(\mathbf{A}) = 1$. Per il teorema 9.1 di Eulero, $\mathbf{A}$ rappresenta una rotazione di $\mathbb{R}^3$ il cui asse è l'autospazio $\mathbf{V}_1$ relativo all'autovalore 1. Poiché

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

l'autospazio $\mathbf{V}_1$ è generato dal vettore $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$ e l'asse di rotazione è la retta di equazione $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$. Per l'angolo di rotazione abbiamo, sempre dal teorema 9.1, che deve essere $2\cos(\alpha) + 1 = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$, da cui $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ e dunque $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ oppure $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ a seconda della orientazione che si sceglie per l'asse di rotazione.
2. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$P(\lambda) = (1 - \lambda^3) = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2).$$

L'ultimo fattore è irriducibile su $\mathbb{R}$, dunque $\mathbf{A}$ non si diagonalizza su $\mathbb{R}$. Le sue radici complesse sono tuttavia $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$. Dunque P ha tre radici semplici su $\mathbb{C}$ e $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

3. Determiniamo una base ortonormale dell'asse di rotazione e del suo complemento ortogonale, il piano della rotazione. Dal momento che l'asse di rotazione è generato dal vettore $\mathbf{v}$, il suo complemento ortogonale è lo spazio della soluzioni del sistema $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$. Risolvendo il sistema utilizzando x come variabile vincolata, troviamo la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se ortonormalizziamo questa base del piano di rotazione utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt e aggiungiamo il vettore $\mathbf{v}$ normalizzato otteniamo la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ rispetto a questa base è del tipo desiderato. Dunque $\mathbf{Q}$ è la matrice del cambiamento di base:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

55 In $\mathbb{R}^2$ il versore $\mathbf{n} = [-\sin(\alpha), \cos(\alpha)]^{\mathrm{T}}$ è ortogonale alla retta $\mathbf{r}$ che ha coefficiente angolare $\operatorname{tg}(\alpha)$. Concludere che la matrice della riflessione ortogonale rispetto alla retta $\mathbf{r}$ è

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\,\mathbf{n}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}.$$

Soluzione. La retta $\mathbf{r}$ è un iperpiano di $\mathbb{R}^2$ che forma un angolo α con l'asse x e quindi ha direzione $\mathbf{v} = [\cos\alpha, \sin\alpha]^{\mathrm{T}}$. D'altra parte $\mathbf{n}$ è un versore di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\mathbf{r}$, dal momento che $\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = 0$. Dall'esempio di pagina 429 nel testo sappiamo che la riflessione ortogonale rispetto ad $\mathbf{r}$ ha allora equazione

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - 2\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & 1 - 2\cos^2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

56 Mostrare che la matrice $n \times n$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & n-2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & n-2 \end{bmatrix}$$

è la matrice della riflessione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ rispetto all'iperpiano di equazione $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Concludere che $\mathbf{R}$ è una matrice ortogonale, con un autovalore semplice $\lambda = -1$, e un autovalore regolare $\lambda = 1$ di molteplicità $n-1$. In particolare, il determinante di $\mathbf{R}$ è -1, e il polinomio caratteristico di $\mathbf{R}$ è $(-1)^n(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$. Per $n=2$ si tratta della matrice

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e per $n = 3$ della matrice

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Un versore normale all'iperpiano si ottiene normalizzando i coefficienti dell'equazione:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dall'esempio di pagina 429 nel testo sappiamo che la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano ha allora equazione

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{n}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & n-2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & n-2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Come ogni riflessione, $\mathbf{R}$ è un'isometria e la sua matrice è dunque ortogonale. La base di $\mathbb{R}^n$ formata dal versore $\mathbf{n}$ e da una base dell'iperpiano è una base di autovettori per $\mathbf{R}$, di cui il primo è relativo all'autovalore -1 dal momento che $\mathbf{Rn} = -\mathbf{n}$, mentre tutti i rimanenti sono relativi all'autovalore 1 perché fissati da $\mathbf{R}$ in quanto punti dell'iperpiano. La presenza di una base di autovettori garantisce che tutti gli autovalori sono regolari. In particolare -1 ha molteplicità 1 mentre 1 ha molteplicità pari alla dimensione dell'iperpiano e cioè a $n-1$. Per calcolare il polinomio caratteristico basta ricordare che questo si spezza in fattori lineari determinati dagli autovalori:

$$P_{\mathbf{R}}(\lambda) = (-1-\lambda)(1-\lambda)^{n-1} = (-1)^n(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}.$$

9. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

57 Dati i punti $(x_1, y_1) = (-1, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, 2)$, $(x_3, y_3) = (1, 2)$ e $(x_4, y_4) = (2, 20)$, si determini la parabola $y(x) = ax^2 + bx + c$ che minimizza l'errore

$$||\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}||^2 = \sum_{k=1}^{4}(y_k - y(x_k))^2.$$

Detta $\overline{\mathbf{x}}$ la soluzione ai minimi quadrati di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si verifichi che $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}$ è ortogonale a $\mathbf{b} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}$.

58 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$. Si scriva quindi una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ con *determinante uguale a uno* che diagonalizza la matrice $\mathbf{A}$. Per il teorema di Eulero, la matrice $\mathbf{Q}$ rappresenta una rotazione dello spazio: determinare l'asse di rotazione e il coseno dell'angolo di rotazione. Si determini infine una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}$ sia della forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quali sono gli autovalori di $\mathbf{Q}$?

9 Teoremi spettrali e forme quadratiche

1. TEOREMA SPETTRALE

1 La matrice identità e la matrice nulla sono simmetriche? Sono matrici di proiezione? Su quale sottospazio? E una matrice diagonale è simmetrica? Quali matrici diagonali sono matrici di proiezione? Qual è la decomposizione spettrale di una matrice diagonale?

Soluzione. Ogni matrice diagonale $\mathbf{A}$ è simmetrica perché, per $i \neq j$, $a_{ij} = 0 = a_{ji}$. Dunque $\mathbf{A}$ è una matrice di proiezione se e soltanto se è idempotente. Poiché

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix},$$

la condizione di idempotenza si traduce nelle n equazioni $a_{ii}^2 = a_{ii}$ per $i = 1, \ldots, n$. Ma l'equazione $a_{ii}^2 = a_{ii}$ ammette come soluzioni solo $a_{ii} = 0, 1$. Dunque una matrice diagonale è una matrice di proiezione se e soltanto se tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali a zero o a uno; poiché abbiamo due scelte per ciascuno degli n elementi sulla diagonale principale, ci sono 2^n matrici diagonali di proiezione di ordine n.

Supponiamo ora che $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ siano gli autovalori distinti di una matrice diagonale qualsiasi $\mathbf{A}$, corrispondenti agli a_{ii} distinti. L'autospazio $\mathbf{V}_{\lambda_j}$ è il nucleo di $\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}$, quindi è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ definito dalle equazioni $x_i = 0$ per quegli indici i per cui $a_{ii} \neq \lambda_j$: una base ortonormale dell'autospazio $\mathbf{V}_{\lambda_j}$ è formata dai vettori $\mathbf{e}_k$ della base canonica per cui $a_{kk} = \lambda_j$. La proiezione $\mathbf{P}_j$ su $\mathbf{V}_{\lambda_j}$ si ottiene a partire dalla matrice identità $\mathbf{I}$ uguagliando a zero tutti gli elementi della diagonale principale i cui corrispondenti a_{ii} sono diversi da λ_j. La decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{P}_j.$$

In particolare, sia la matrice identità che la matrice nulla sono matrici di proiezione, perché hanno tutti gli elementi della diagonale principale uguali a zero o uno. La matrice identità ha come unico autovalore $\lambda = 1$, dunque la sua decomposizione spettrale è $\mathbf{I} = 1\mathbf{I}$. La matrice nulla ha come unico autovalore $\lambda = 0$ e la sua decomposizione spettrale è $\mathbf{O} = 0\mathbf{I}$. Si osservi tuttavia che mentre $\mathbf{I}$ è la matrice della proiezione su $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{O}$ è la matrice della proiezione sul sottospazio ridotto al vettore nullo.

2. Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due matrici simmetriche di ordine n. Mostrare che, se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, allora $\mathbf{AB}$ è simmetrica. L'ipotesi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ è necessaria?

Soluzione. Basta osservare che

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB} &\Leftrightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{AB}.\end{aligned}$$

Dunque la condizione è necessaria e sufficiente.

3. Per ciascuna delle seguenti matrici simmetriche $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

si trovi una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ che diagonalizzi $\mathbf{A}$ e si scriva la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$. Si scriva poi la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}^3$ e di $\mathbf{A}^{-1}$.

Soluzione. 1. La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ha polinomio caratteristico $P(x) = x^2 - 2x - 3$ e dunque ammette $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ come autovalori semplici. Gli autospazi corrispondenti sono

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{-1} &= \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\ \mathbf{V}_3 &= \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbf{A}$ è simmetrica, gli autospazi sono già ortogonali. Poiché la loro dimensione è 1 non resta che normalizzare i generatori per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\mathbf{A}$. Troviamo

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}$ la funzione lineare $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}}$ è diagonale, dunque $\mathbf{Q}$ è semplicemente la matrice del cambiamento dalla base canonica a $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la decomposizione spettrale determiniamo le proiezioni sugli autospazi. Le colonne $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ di $\mathbf{Q}$ sono basi ortonormali dei due autospazi; dunque le corrispondenti proiezioni sono date da

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Dal momento che le proiezioni sono un sistema completo di idempotenti ortogonali, si può anche calcolare la seconda proiezione dalla relazione $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$. La decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$ è allora $\mathbf{A} = -1\mathbf{P}_1 + 3\mathbf{P}_2$. Dall'osservazione di pagina 437 nel testo abbiamo allora $\mathbf{A}^3 = -1\mathbf{P}_1 + 27\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{A}^{-1} = -1\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2$.

2. Per la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

procediamo in modo del tutto simile. Il polinomio caratteristico $P_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 8$ ammette le due radici semplici $x_1 = \sqrt{8}$ e $x_2 = -\sqrt{8}$. I corrispondenti autospazi sono

$$\mathbf{V}_{\sqrt{8}} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\sqrt{2}\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-\sqrt{8}} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} + 2\sqrt{2}\mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Normalizzando le basi degli autospazi troviamo le colonne di una matrice $\mathbf{Q}$ che diagonalizza ortogonalmente $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Le proiezioni sugli autospazi sono date dalle matrici

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

e la decomposizione spettrale è $\mathbf{A} = \sqrt{8}\mathbf{P}_1 - \sqrt{8}\mathbf{P}_2$. Dunque $\mathbf{A}^3 = 16\sqrt{2}\mathbf{P}_1 - 16\sqrt{2}\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{P}_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{P}_2$.

3. Esaminiamo ora la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $P_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 1$ e gli autovalori sono $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. I corrispondenti autospazi sono

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta - 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta + 1 \end{bmatrix}\right).$$

Normalizzando le basi troviamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Le proiezioni sono

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1+\cos\theta \end{bmatrix}$$

e la decomposizione spettrale è $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$; dunque $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A}^{-1}$ hanno la stessa decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$.

4. Infine, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $P_{\mathbf{A}}(x) = 12x - 8x^2 + x^3$ e autovalori $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 6$. I corrispondenti autospazi sono

$$\mathbf{V}_0 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\mathbf{V}_6 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 6\mathbf{I}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Normalizzando le basi troviamo

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Le proiezioni sono

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e la decomposizione spettrale è $\mathbf{A} = 2\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3$. Dunque $\mathbf{A}^3 = 8\mathbf{P}_2 + 216\mathbf{P}_3$ e $\mathbf{A}^{-1}$ non esiste perché uno degli autovalori è nullo.

4 Si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si scriva la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$, e si calcoli $\sqrt{\mathbf{A}}$. Si verifichi che $\sqrt{\mathbf{A}}$ è simmetrica con autovalori ≥ 0, e che $(\sqrt{\mathbf{A}})^2 = \mathbf{A}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è $P(x) = (2-x)^2(4-x)$ e gli autovalori sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, il primo doppio, il secondo semplice. Determiniamo gli autospazi corrispondenti.

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$\mathbf{V}_4 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Dal momento che $\mathbf{A}$ è simmetrica, autospazi distinti sono sempre ortogonali; quindi per trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è sufficiente ortogonalizzare le basi degli autospazi e prenderne l'unione. In questo caso l'unico autospazio di dimensione maggiore di uno è $\mathbf{V}_2$ e la base che abbiamo ottenuto è già ortogonale. Basta allora normalizzare i vettori per ottenere una base ortonormale di autovettori:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per determinare la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$ calcoliamo le proiezioni sugli autospazi. Indichiamo con $\mathbf{q}_i$ l'i-esimo vettore della base $\mathcal{Q}$. Poiché $\dim \mathbf{V}_4 = 1$ conviene determinare anzitutto la proiezione su questo autospazio; abbiamo

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per determinare $\mathbf{P}_1$ osserviamo che deve essere $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ e dunque

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

In alternativa avremmo potuto utilizzare la matrice $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2]$ per ottenere $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$. In ogni caso, la decomposizione spettrale è $\mathbf{A} = 2\mathbf{P}_1 + 4\mathbf{P}_2$. Da questa otteniamo subito che

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \sqrt{2}\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Come si vede $\sqrt{\mathbf{A}}$ è simmetrica, come deve essere dal momento che la sua decomposizione spettrale la esibisce come combinazione lineare di matrici simmetriche. Sempre dalla decomposizione spettrale consegue che $\sqrt{\mathbf{A}}$ ristretta agli autospazi $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ si comporta rispettivamente come la moltiplicazione scalare per $\sqrt{2}$ e per 2; dunque questi sono gli autovalori di $\sqrt{\mathbf{A}}$ e sono positivi. Per verificare che $\sqrt{\mathbf{A}}^2 = \mathbf{A}$ possiamo effettuare il calcolo direttamente oppure ricordare che $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_i$. Dunque

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathbf{A}})^2 &= (\sqrt{2}\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2)^2 \\ &= 2\mathbf{P}_1^2 + 4\sqrt{2}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 4\mathbf{P}_2^2 \\ &= 2\mathbf{P}_1 + 4\mathbf{P}_2 \\ &= \mathbf{A}.\end{aligned}$$

5 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per quali valori di k la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori di k si trovino una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, e si scriva il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}^3$.

Soluzione. Per l'osservazione a pagina 433 del testo la matrice $\mathbf{A}$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se è simmetrica, cioè se e solo se $k = -2$. In questo caso, la matrice diagonale $\mathbf{D}$ è la matrice degli autovalori, ordinati a piacere. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è $P(x) = (1-x)(2-x)(10-x)$, dunque gli autovalori sono $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 10$ e

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{Q}$ ha come colonne una base ortonormale di autovettori, ordinati in modo da corrispondere agli autovalori scelti in $\mathbf{D}$. Determiniamo allora una base per gli autospazi.

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{10} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 10\mathbf{I}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

I vettori ottenuti sono già ortogonali perché appartengono ad autospazi diversi. Non rimane che da normalizzarli per ottenere

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 4 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}^3$ basta osservare che, essendo $\mathbf{A}$ simile a $\mathbf{D}$, deve essere $\mathbf{A}^3$ simile a $\mathbf{D}^3$. Dunque il polinomio cercato è il polinomio caratteristico di $\mathbf{D}^3$ che è $P_{\mathbf{D}^3}(x) = (1-x)(8-x)(1000-x)$.

6 Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathfrak{L}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathfrak{L}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3.$$

Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ tale che $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ sia diagonale. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori?

Soluzione. La matrice rappresentativa di $\mathfrak{L}$ rispetto alla base canonica è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ed è simmetrica, dunque diagonalizzabile ortogonalmente. Il suo polinomio caratteristico è $P_{\mathbf{A}}(x) = (1-x)(2-x)(4-x)$; dunque gli autovalori sono $1, 2, 4$. Gli autospazi corrispondenti sono

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

$$\mathbf{V}_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})$$

$$\mathbf{V}_4 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

Per costruire la matrice $\mathbf{Q}$ basta allora normalizzare la base trovata di autovettori, che è già ortogonale. Si trova

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ci sono diversi modi per argomentare che $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori. Possiamo anzitutto osservare che $\mathbf{A}$ è simmetrica e commuta con se stessa; dunque, come visto nell'esercizio 26 del capitolo 3, $\mathbf{A}^4$ è simmetrica e per il teorema spettrale ha una base ortonormale di autovettori. In alternativa, possiamo osservare che gli autospazi di $\mathbf{A}$ sono anche autospazi di $\mathbf{A}^4$ per le potenze degli autovalori corrispondenti; poiché $\mathbf{A}$ è ortogonalmente diagonalizzabile, $\mathbb{R}^3$ è somma ortogonale di questi autospazi; ma allora $\mathbf{A}^4$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

7 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posto $\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ e $\mathbf{V}_{-1} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$, determinare una base di $\mathbf{V}_1$ e una base di $\mathbf{V}_{-1}$ e verificare che $\dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_{-1} = 4$. Qual è il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$? Determinare se possibile una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Come si vede, $\dim \mathbf{V}_1 = 3$ e $\dim \mathbf{V}_{-1} = 1$ da cui $\dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_{-1} = 4$. Per determinare il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ basta osservare che $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_{-1}$ sono gli autospazi relativi agli autovalori 1 e -1. La somma delle loro dimensioni coincide con l'ordine di $\mathbf{A}$, quindi non ci sono altri autospazi né altri autovalori. Le molteplicità algebriche degli autovalori devono essere almeno pari a quelle geometriche e il polinomio caratteristico deve avere grado 4. Dunque 1 ha molteplicità 3 e -1 ha molteplicità 1. In conclusione, abbiamo $P_{\mathbf{A}}(x) = (1-x)^3(-1-x)$. Infine, la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, dunque è certamente diagonalizzabile ortogonalmente. Abbiamo già determinato gli autovalori di $\mathbf{A}$ con le loro molteplicità, dunque

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo anche una base di autovettori che va ortonormalizzata. Cominciamo ad ortogonalizzarla. Poiché $\mathbf{A}$ è simmetrica, abbiamo $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_{-1}$, quindi dobbiamo solo ortogonalizzare la base di $\mathbf{V}_1$. Si noti che il terzo vettore è già ortogonale al primo; quindi ci limiteremo a rendere il secondo ortogonale agli altri due utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt. Troviamo

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \hat{x}_1\mathbf{v}_1 - \hat{x}_3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

che, per questioni di ortogonalità, possiamo sostituire con il suo doppio. Abbiamo dunque la base ortogonale di autovettori

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Le normalizzazioni di questi vettori formano una base ortonormale e sono le colonne della matrice $\mathbf{Q}$ cercata:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

8 Mostrare che, se $\mathbf{w}$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$, la matrice

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$$

è una matrice $n \times n$ ortogonale e simmetrica; scrivere tale matrice quando $n = 3$ e $\mathbf{w}$ è un vettore perpendicolare al sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Soluzione. Si veda l'esercizio 17 del capitolo 8.

9 Calcolare gli autovalori di

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e dedurre che $\mathbf{A}$ è uguale a $6\mathbf{P}$ dove $\mathbf{P}$ è una matrice di proiezione ortogonale. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è $P(x) = x(6-x)^2$, dunque gli autovalori sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ e la decomposizione spettrale è $\mathbf{A} = 6\mathbf{P}_2$, dove $\mathbf{P}_2$ è la proiezione sull'autospazio $\mathbf{V}_6$. Per determinare una base ortonormale di autovettori cerchiamo anzitutto basi per gli autospazi. Abbiamo

$$\mathbf{V}_0 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathbf{V}_6 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

La base di $\mathbf{V}_6$ va ortogonalizzata con l'algoritmo di Gram-Schmidt; ortogonalizziamo il primo vettore rispetto al secondo

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1 - \hat{x}_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Infine normalizziamo i vettori per ottenere la base ortonormale

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per quali valori del parametro reale a la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2a & a \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $P(x) = (5-x)(10-x)^2$. L'autovalore $x = 5$ è semplice e dunque regolare. Quanto all'autovalore doppio $x = 10$ abbiamo

$$g_{10} = \dim \mathbf{V}_{10} = 3 - r(\mathbf{A} - 10\mathbf{I}) = 3 - r\left(\begin{bmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

Come si vede, l'autovalore è regolare solo quando $a = 0$. Ma in questo caso la matrice è anche simmetrica, quindi diagonalizzabile ortogonalmente. Per gli autospazi abbiamo

$$\mathbf{V}_5 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right), \quad \mathbf{V}_{10} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Come si vede gli autospazi sono ortogonali ma, in aggiunta, la base trovata per $\mathbf{V}_{10}$ è anch'essa già ortogonale. Per avere una base ortonormale di autovettori non resta che normalizzare le basi degli autospazi. Troviamo la base

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sia $\mathfrak{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale su un sottospazio $\mathbf{H}$ di dimensione d. Qual è il polinomio caratteristico di $\mathfrak{P}$?

Soluzione. I vettori di $\mathbf{H}$ sono tutti e soli i vettori fissati da $\mathfrak{P}$; dunque $\mathbf{H}$ è l'autospazio di $\mathfrak{P}$ relativo all'autovalore 1. D'altra parte, $\mathbf{H}^\perp$ è il nucleo di $\mathfrak{P}$ e dunque è l'autospazio relativo all'autovalore 0. Poiché $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita, $\mathbb{R}^n = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^\perp$. Questo prova che 0 e 1 sono gli unici autovalori di $\mathfrak{P}$ e che sono regolari. Quindi la loro molteplicità algebrica coincide con la dimensione degli autospazi corrispondenti e il polinomio caratteristico è $P(x) = (1-x)^d x^{n-d}$.

Un autovettore di una matrice simmetrica è necessariamente un versore? Quali matrici simmetriche hanno due autovettori linearmente indipendenti, ma non ortogonali tra loro?

Soluzione. Se una matrice ammette un autovettore $\mathbf{v}$, allora tutti i vettori non nulli di $\mathcal{L}(\mathbf{v})$ sono autovettori della matrice; la norma di questi vettori può essere fatta variare su tutto il cono positivo del campo $\mathbb{K}$ perché $\|t\mathbf{v}\| = |t|\,\|\mathbf{v}\|$, dunque non tutti gli autovettori sono versori. Ad esempio, possiamo considerare la matrice identità $\mathbf{I}$ di ordine 1 che è certamente simmetrica; ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}$ è un autovettore, ma gli unici versori sono ± 1.

Quanto alla seconda questione, si ricordi che autospazi relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica sono necessariamente ortogonali. Se vogliamo trovare autovettori non ortogonali dobbiamo allora cercare in uno stesso autospazio $\mathbf{V}$. Poiché vogliamo autovettori indipendenti, $\mathbf{V}$ deve avere dimensione almeno due. D'altra parte, se $\mathbf{V}$ ha dimensione almeno due, allora $\mathbf{V}$ contiene un sottospazio isomorfo a $\mathbb{R}^2$ e quindi un insieme di due vettori linearmente indipendenti, ma non ortogonali tra loro. Dunque condizione necessaria e sufficiente perché una matrice simmetrica abbia autovettori indipendenti ma non ortogonali è che abbia almeno un autospazio di dimensione ≥ 2. Un altro modo per esprimere la stessa condizione è dire che almeno uno degli autovalori della matrice non deve essere semplice. Per fare un esempio concreto, possiamo prendere la matrice identità $\mathbf{I}$ del second'ordine. Tutti i vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$ sono autovettori. Se prendiamo $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, allora $\mathbf{U} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1)$ e $\mathbf{U}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{e}_2)$. Il vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è allora indipendente rispetto a $\mathbf{e}_1$ ma non ortogonale a $\mathbf{e}_1$.

13 Sia $\mathbf{A}$ una matrice diagonalizzabile e sia λ un autovalore di $\mathbf{A}$. Mostrare che λ^2 è un autovalore di $\mathbf{A}^2$ e che l'autospazio di $\mathbf{A}^2$ relativo a λ^2 coincide con l'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo a λ se $-\lambda$ non è un autovalore di $\mathbf{A}$, e con la somma degli autospazi di $\mathbf{A}$ relativi a λ e $-\lambda$ se $-\lambda$ è un autovalore di $\mathbf{A}$. Mostrare che questo non è necessariamente vero per una matrice non diagonalizzabile.

Soluzione. Sia $\mathbf{v}$ un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore λ. Allora

$$\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Questo prova che λ^2 è un autovalore di $\mathbf{A}^2$ e che $\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{V}_{\lambda^2}(\mathbf{A}^2)$. Si osservi che fino a questo punto l'ipotesi di diagonalizzabilità di $\mathbf{A}$ non è stata utilizzata. Si osservi anche che l'inclusione può essere propria anche per una matrice diagonalizzabile. Se prendiamo, ad esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

allora $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_1(\mathbf{A}^2) = \mathbf{V}_1(\mathbf{A}) \oplus \mathbf{V}_{-1}(\mathbf{A})$. Quello che accade in questo caso è che ci sono due autovalori con lo stesso quadrato e l'autospazio del quadrato è la somma degli autospazi delle radici. Il fenomeno è assolutamente generale. Supponiamo infatti che $\mathbf{A}$ sia diagonalizzabile e di ordine n. Sia $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ l'insieme degli autovalori di $\mathbf{A}$ e sia $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ l'insieme dei loro quadrati; si osservi che la cardinalità del secondo insieme può essere strettamente minore di quella del primo, come nell'esempio discusso sopra. Dall'inclusione degli autospazi dimostrata all'inizio abbiamo

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbf{V}_{\lambda_k}(\mathbf{A}) \subseteq \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbf{V}_{\mu_k}(\mathbf{A}^2) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Se prendiamo le dimensioni abbiamo

$$n = \sum_{k=1}^{r} \dim \mathbf{V}_{\lambda_k}(\mathbf{A}) \leq \sum_{k=1}^{s} \dim \mathbf{V}_{\mu_k}(\mathbf{A}^2) \leq n.$$

Dall'uguaglianza del primo e ultimo termine consegue l'uguaglianza di tutti i termini intermedi e in particolare che

$$\dim \mathbf{V}_{\mu_k}(\mathbf{A}^2) = \sum_{\{\lambda_h : \lambda_h^2 = \mu_k\}} \dim \mathbf{V}_{\lambda_k}(\mathbf{A})$$

e quindi che

$$\mathbf{V}_{\mu_k}(\mathbf{A}^2) = \bigoplus_{\{\lambda_h : \lambda_h^2 = \mu_k\}} \mathbf{V}_{\lambda_k}(\mathbf{A})$$

Si osservi infine che se $\lambda_k \geq 0$ per tutti i k, allora anche i quadrati sono tutti distinti. La decomposizione diventa allora $\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{A}) = \mathbf{V}_{\lambda^2}(\mathbf{A}^2)$.

Se $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile la decomposizione degli autospazi non vale. Consideriamo infatti il blocco di Jordan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'unico autovalore è $\lambda = 0$. Ora si osservi che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ che ammette ancora $\lambda = 0$ come unico autovalore. Ma

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{V}_0(\mathbf{A}) \subset \mathbf{V}_0(\mathbf{O}) = \mathbb{R}^2.$$

14 Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica con autovalori ≥ 0. Mostrare che esiste un'unica matrice simmetrica $\mathbf{B}$ con autovalori ≥ 0 tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

Soluzione. Sia

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{P}_{a_i}$$

la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$, con tutti gli autovalori $a_i \geq 0$ e $\mathbf{V}_{a_i} = \mathrm{Im}(\mathbf{P}_{a_i})$. La decomposizione spettrale è unica a meno dell'ordine degli addendi, perché è determinata dagli autovalori a_i e dai corrispondenti autospazi $\mathbf{V}_{a_i}$. In modo simile, sia

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{P}_{b_i}$$

la decomposizione spettrale di una matrice simmetrica con autovalori $b_i \geq 0$. Dall'esercizio 13 sappiamo che

$$\mathbf{B}^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \mathbf{P}_{b_i}$$

L'essenziale unicità della decomposizione spettrale garantisce allora che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ se e soltanto se $m = n$ e, dopo una permutazione, $b_i^2 = a_i$ per tutti gli indici i e $\mathbf{P}_{a_i} = \mathbf{P}_{b_i}$. Poiché $a_i \geq 0$ esiste per ogni indice un'unica radice $b_i = \sqrt{a_i} \geq 0$, dunque $\mathbf{B}$ è univocamente determinata.

2. FORME QUADRATICHE

15 Calcolare tutti i minori principali della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Quali sono i minori principali di nord-ovest della matrice? Qual è il segno della forma quadratica associata?

Soluzione. I minori principali di ordine 1 corrispondono alle scelte di un indice i tale che $1 \leq i \leq 3$ e dunque sono gli elementi della diagonale principale:

$$|1| = 1, \qquad |1| = 1, \qquad |4| = 4.$$

I minori principali di ordine 2 corrispondono alle scelte di due indici, i e j, tali che $1 \leq i < j \leq 3$. Queste scelte corrispondono ai sottoinsiemi di ordine 2 in un insieme di 3 elementi, dunque il loro numero è $\binom{3}{2} = 3$. I minori, che corrispondono alle coppie di indici $(1,2)$, $(1,3)$ e $(2,3)$, sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Infine, l'unico minore di ordine 3, che corrisponde all'unica scelta di indici $1 \leq i < j < k \leq 3$, è il determinante della matrice data:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -21.$$

I minori principali di nord-ovest sono i primi minori principali di ciascun ordine, e corrispondono alla scelta dei valori minimi per ogni successione di indici:

$$\delta_1 = |1| = 1, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -21.$$

Il fatto che i minori principali di nord-ovest di ordine 1 e 3 abbiano segno opposto permette di concludere che la forma quadratica è indefinita. Se fosse definita, infatti, i minori principali di nord-ovest di ordine dispari avrebbero lo stesso segno. Mentre se fosse semidefinita, il minore del terz'ordine sarebbe nullo.

16 Sia $\mathbf{A}$ una matrice qualsiasi. Mostrare che $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ è (semi)definita positiva. Quando è definita positiva?

Soluzione. Per ogni vettore $\mathbf{x}$ abbiamo

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

Dunque $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ è (semi)definita positiva. D'altra parte abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{x} = 0 &\iff \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Dunque $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ è definita positiva quando $\mathbf{A}$ ha nucleo nullo e cioè quando le colonne di $\mathbf{A}$ sono indipendenti.

17 Scrivere la matrice che rappresenta la forma quadratica

$$q(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

e stabilire il segno della forma quadratica.

Soluzione. La matrice associata a q è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se calcoliamo i minori principali di nord-ovest troviamo

$$\delta_1 = |3| = 3, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Dunque q è definita positiva.

18 Determinare un cambiamento di variabili che diagonalizzi la forma quadratica dell'esercizio 17.

Soluzione. La matrice associata a q è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il cambiamento di base richiesto è quello di una diagonalizzazione ortogonale. Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono $2 \pm \sqrt{2}$ e i corrispondenti autospazi sono

$$\mathbf{V}_{2-\sqrt{2}} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) \qquad \mathbf{V}_{2+\sqrt{2}} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\right).$$

Se normalizziamo questi vettori troviamo che la matrice ortogonale del cambiamento di base è

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e quindi il cambiamento di variabili cercato è

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}X + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}Y. \end{cases}$$

19 Stabilire il segno della forma quadratica

$$q(x,y,z) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 2xz + 8yz + 5z^2$$

Soluzione. La matrice rappresentativa di q rispetto alla base canonica è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Se calcoliamo i minori principali di nord-ovest, troviamo

$$\delta_1 = |1| = 1, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -9, \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -100.$$

Poiché i minori del primo e del terzo ordine hanno segno opposto, q non può essere né definita né semidefinita. Dunque è indefinita. Un altro modo per raggiungere la stessa conclusione è osservare che il determinante di $\mathbf{A}$ è negativo, dunque almeno un autovalore deve essere negativo. Ma la traccia di $\mathbf{A}$ è positiva, dunque almeno un autovalore deve essere positivo. In conclusione, $\mathbf{A}$ è indefinita.

20 Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica. Mostrare che $\mathbf{A}^2$ è simmetrica e (semi)definita positiva.

Soluzione. Il fatto che $\mathbf{A}^2$ sia simmetrica consegue immediatamente dall'esercizio 26 del capitolo 3, in quanto prodotto di matrici simmetriche che commutano. Il fatto che sia (semi)definita positiva consegue invece dall'esercizio 16 osservando che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ per la simmetria di $\mathbf{A}$.

21 Per ciascuna delle matrici simmetriche seguenti si scriva la forma quadratica associata, e si determini se è (semi)definita positiva/negativa oppure indefinita. Si calcolino i minori principali di nord-ovest di tali matrici, e si verifichi il criterio di positività (negatività) della forma in termini di tali minori.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. 1. La forma quadratica associata alla prima matrice è

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz.$$

Si è visto nell'esercizio 3 che gli autovalori della matrice sono 0, 2 e 6 e questo significa che q è semidefinita positiva. Per ritrovare lo stesso risultato con i minori principali, cominciamo ad osservare che i minori principali di nord-ovest sono $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 4$ e $\delta_3 = 0$. Il fatto che uno dei minori di nord-ovest sia nullo esclude immediatamente, per via del teorema 3.7, che q possa essere definita, positiva o negativa che sia. Per stabilire se q è semidefinita occorre, in base al teorema 3.8, calcolare tutti i minori principali. I minori mancanti del prim'ordine valgono 4 e 2; quelli del second'ordine valgono tutti 4. Possiamo allora concludere che q è semidefinita positiva.

2. La forma quadratica associata alla seconda matrice è

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy.$$

Sappiamo dall'esercizio 4 che gli autovalori della matrice sono 2 (doppio) e 4 (semplice) e dunque che q è definita positiva. Lo stesso risultato si ritrova calcolando i minori principali di nord-ovest. Infatti $\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 8$ e $\delta_3 = 16$ sono tutti positivi. Dunque q è definita positiva per via del teorema 3.7.

3. La forma quadratica associata alla terza matrice è

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz + 2yz$$

ed è semidefinita positiva perché, come si è visto nell'esercizio 9, i suoi autovalori sono 0 e 6. Se invece calcoliamo i minori principali di nord-ovest troviamo $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 6$ e $\delta_3 = 0$. Come nel primo caso, il fatto che sia $\delta_3 = 0$ esclude il fatto che q possa essere definita. I minori principali mancanti del primo ordine valgono 5 mentre quelli del second'ordine valgono 6 e 24. Tutti i minori principali sono maggiori o uguali a zero e dunque q è semidefinita positiva.

4. La forma quadratica associata all'ultima matrice è

$$q(x_1,\dots,x_4) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le 4} (-1)^{i+j+1} x_i x_j$$

ed è indefinita perché, come visto nell'esercizio 7, i suoi autovalori sono 1 e -1. Se calcoliamo i minori di nord-ovest troviamo $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = 0$ e $\delta_3 = -\frac{1}{2}$ e $\delta_4 = -1$. Il fatto che sia $\delta_2 = 0$ esclude immediatamente che q possa essere definita, per via del teorema 3.7. Se q fosse semidefinita tutti i minori principali del primo e del terzo ordine non potrebbero avere segno opposto, per via del teorema 3.8. Dunque q non è neppure semidefinita. Deve allora essere necessariamente indefinita.

22 La funzione

$$q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 + 4yz + 2z^2$$

ha nell'origine $(0,0,0)$ un punto di massimo o di minimo assoluto?

Soluzione. La matrice associata alla forma quadratica q è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

I minori principali di nord-ovest sono $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 14$ e $\delta_3 = 20$. Dal teorema 3.7 sappiamo che q è definita positiva e dunque ha un minimo assoluto nell'origine.

23 Si determinino il valore massimo e minimo assoluto della funzione

$$R(x,y,z) = \frac{10x^2 + 9y^2 + 4yz + 6z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

al variare di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Soluzione. La funzione R è il quoziente di Rayleigh associato alla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono 5 (semplice) e 10 (doppio). Il minimo e il massimo del quoziente di Rayleigh al di fuori dell'origine coincidono, per l'osservazione di pagina 449 del testo, col minimo e massimo autovalore e dunque sono rispettivamente 5 e 10.

24 Si determinino il valore massimo e minimo assoluto della funzione

$$R(x, y, z) = \frac{9x^2 + 4xy + 2y^2 - 8xz + 8z^2}{x^2 + y^2 + 4z^2}$$

al variare di (x, y, z) in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Soluzione. La funzione assegnata è un quoziente di Rayleigh della forma

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{x}}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

sono matrici simmetriche con $\mathbf{B}$ definita positiva. Dal corollario 3.11 sappiamo allora che il massimo e il minimo di R al di fuori dell'origine coincidono con il massimo e il minimo autovalore della matrice

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono 1, 2 e 10. Dunque il minimo cercato vale 1 mentre il massimo vale 10.

25 Mostrare che gli elementi sulla diagonale principale di una matrice definita positiva sono positivi.

Soluzione. Se $\mathbf{A}$ è definita positiva, allora $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. In particolare, indicato con $\mathbf{e}_i$ l'i-esimo vettore della base canonica, abbiamo

$$a_{ii} = \mathbf{e}_i{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{e}_i > 0.$$

26 Si mostri che il quoziente di Rayleigh è costante sulle rette uscenti dall'origine, e che è invariante per trasformazioni di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{X}$ con $\mathbf{Q}$ ortogonale.

Soluzione. Consideriamo il quoziente di Rayleigh

$$R(\mathbf{x}) = \frac{q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

dove q è una forma quadratica. Si ricordi che anche il quadrato della norma di un vettore è una forma quadratica. Se $t \in \mathbb{R}$ non è nullo, dalla proposizione 3.1 abbiamo

$$R(t\mathbf{x}) = \frac{q(t\mathbf{x})}{\|t\mathbf{x}\|} = \frac{t^2 q(\mathbf{x})}{t^2 \|\mathbf{x}\|} = \frac{q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = R(\mathbf{x})$$

e dunque R è costante sulle rette uscenti dall'origine. Per provare l'indipendenza di R dai cambiamenti ortogonali di coordinate, supponiamo che q sia rappresentata dalla matrice $\mathbf{A}$ rispetto alla base canonica, cioè che sia

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

la rappresentazione del quoziente di Rayleigh rispetto alla base canonica. Se $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ è la matrice che rappresenta la forma quadratica q rispetto alla base formata dalle colonne di $\mathbf{Q}$, allora lo stesso quoziente di Rayleigh rispetto a questa base è

$$R'(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X}} = \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{X})}{(\mathbf{Q}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{X})} = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} = R(\mathbf{x}).$$

27 Trovare una formula per la curvatura Gaussiana della superficie $z = f(x, y)$ (il grafico della funzione $f(x, y)$).

Soluzione. Supponiamo che f sia almeno di classe C^2. La parametrizzazione della superficie e le sue derivate parziali sono date dai vettori

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix}.$$

La prima forma fondamentale ha dunque matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{bmatrix}.$$

Per determinare la seconda forma fondamentale occorre calcolare le derivate seconde e il *versore* normale

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|}.$$

Nota: nella formula per la seconda fondamentale occorre che $\mathbf{n}$ sia un *versore*. Troviamo

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{xx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{yy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{xy} \end{bmatrix}.$$

Dunque la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}.$$

La curvatura gaussiana della superficie è

$$K = \frac{\det(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{B})} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

28 Calcolare le curvature principali di una sfera e di un cilindro.

Soluzione. Possiamo assumere, a meno di un cambiamento del sistema di riferimento, che la sfera abbia equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$. La regione della sfera i cui punti hanno quota $z>0$ può essere descritta dall'equazione

$$z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}.$$

Se utilizziamo le formule dell'esercizio 27 per la prima e seconda forma fondamentale, troviamo

$$\mathbf{B} = \frac{1}{x^2+y^2-r^2}\begin{bmatrix} y^2-r^2 & -xy \\ -xy & x^2-r^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} = \frac{1}{r(x^2+y^2-r^2)}\begin{bmatrix} y^2-r^2 & -xy \\ -xy & x^2-r^2 \end{bmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\mathbf{I}$. Gli autovalori di questa matrice sono entrambi uguali a $1/r$ e sono le curvature principali. Un conto analogo va fatto per i punti con $z<0$ e va poi ripetuto per le altre variabili, in modo da coprire tutti i punti della sfera. Il risultato che si ottiene è comunque quello indicato.

Per il cilindro possiamo assumere, anche in questo caso a meno di un cambiamento del sistema di riferimento, che l'equazione sia $x^2+z^2=r^2$. Per i punti con $z>0$ otteniamo la parametrizzazione

$$z = \sqrt{r^2-x^2}.$$

Utilizzando ancora una volta le formule dell'esercizio 27, troviamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{r}{r^2-x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{r^2-x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e le curvature principali, che sono gli autovalori di questa matrice, sono $1/r$ e 0.

3. LA DECOMPOSIZIONE AI VALORI SINGOLARI

29 Sia $\mathbf{w} = [a, b, c]^{\mathrm{T}}$ un vettore arbitrario di $\mathbb{R}^3$. Si scrivano le matrici $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ e se ne calcolino gli autovalori. Quali sono i valori singolari di $\mathbf{A} = \mathbf{w}$? Mostrare che, se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{w}^+ = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = a^2 + b^2 + c^2, \qquad \mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ entrambe le matrici sono nulle e ammettono 0 come unico autovalore. Se invece $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora la prima matrice è diagonale, dunque il suo unico autovalore è $a^2 + b^2 + c^2$. La seconda matrice, per il lemma 4.1, deve ammettere $a^2 + b^2 + c^2$ come autovalore semplice e 0 come autovalore doppio. Il vettore $\mathbf{w}$ ha valori singolari solo se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$; in questo caso l'unico valore singolare è $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|\mathbf{w}\|$. Per calcolare $\mathbf{w}^+$ basta osservare che se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{w}$ ha rango 1 e dalla formula d) della proposizione 4.9 si ottiene

$$\mathbf{w}^+ = (\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w})^{-1}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}.$$

30 Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per determinare i valori singolari di $\mathbf{A}$ conviene calcolare $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ o $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$? Si determinino i valori singolari, una SVD e la matrice pseudoinversa di $\mathbf{A}$.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ha ordine 3 mentre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ha ordine 2. Utilizziamo dunque la seconda per calcolare i valori singolari. Abbiamo

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono 10 e 5. Dunque i valori singolari di $\mathbf{A}$ sono $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$. Nella decomposizione ai valori singolari $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ di $\mathbf{A}$ abbiamo allora che

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{U}$ utilizziamo l'osservazione di pagina 467 del testo. Le colonne della matrice ortogonale $\mathbf{U}$ sono autovettori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ corrispondenti agli autovalori 10 e 5. Abbiamo

$$\mathbf{V}_{10} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathbf{V}_5 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

e dunque possiamo prendere

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le prime due colonne di $\mathbf{V}$ si ottengono in modo simile a quanto descritto nella dimostrazione del teorema 4.4:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che, sempre per l'osservazione di pagina 467 questi vettori sono una base ortonormale di $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$ e possono, in alternativa, essere ottenuti a questo modo. Il vettore mancante è una base ortonormale di $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Poiché

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

abbiamo che

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la pseudoinversa di $\mathbf{A}$ usiamo la decomposizione ai valori singolari di $\mathbf{A}$. Più precisamente, dal secondo esempio di pagina 472 nel testo abbiamo che

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e dalla proposizione 4.7

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

31 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, n) e sia $\mathbf{B}$ una matrice di tipo (n, m). Mostrare che $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ hanno gli stessi autovalori non nulli. Dato un autovalore non nullo λ di $\mathbf{AB}$, siano $\mathbf{V}_\lambda$ e $\mathbf{W}_\lambda$ gli autospazi relativi a λ delle matrici $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$. Mostrare che l'applicazione lineare $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{Bv}$ da $\mathbf{V}_\lambda$ a $\mathbf{W}_\lambda$ è invertibile e che la sua inversa è l'applicazione $\mathbf{w} \mapsto \frac{1}{\lambda}\mathbf{Aw}$.

Soluzione. Sia $\lambda \neq 0$ un autovalore di $\mathbf{AB}$ e sia $\mathbf{v}$ un autovettore di $\mathbf{AB}$ relativo all'autovalore λ. Si osservi anzitutto che $\mathbf{Bv} \neq \mathbf{0}$. Se infatti fosse $\mathbf{Bv} = \mathbf{0}$, avremmo

$$\lambda\mathbf{v} = (\mathbf{AB})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{Bv}) = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$$

e questo è assurdo perché né λ né $\mathbf{v}$ sono nulli. Ma allora la formula

$$(\mathbf{BA})(\mathbf{Bv}) = \mathbf{B}((\mathbf{AB})\mathbf{v}) = \mathbf{B}\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{Bv}$$

mostra che $\mathbf{Bv}$ è un autovettore di $\mathbf{BA}$ relativo all'autovalore λ. In modo simile, scambiando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ nell'argomentazione precedente si vede che ogni autovalore non nullo di $\mathbf{BA}$ è anche un autovalore di $\mathbf{AB}$. Dunque le moltiplicazioni per $\mathbf{B}$ e per $\mathbf{A}$ definiscono funzioni lineari $\mathfrak{L}_{\mathbf{B}} : \mathbf{V}_\lambda \to \mathbf{W}_\lambda$ e $\mathfrak{L}_{\mathbf{A}} : \mathbf{W}_\lambda \to \mathbf{V}_\lambda$. Possiamo moltiplicare la seconda funzione per uno scalare per ottenere la funzione lineare $\mathfrak{L}_{\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}} : \mathbf{W}_\lambda \to \mathbf{V}_\lambda$. Proviamo che $\mathfrak{L}_{\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}}$ è un'inversa per $\mathfrak{L}_{\mathbf{B}}$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, allora

$$\mathfrak{L}_{\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}}(\mathfrak{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{AB})\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

In modo simile, se $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_\lambda$, allora

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{L}_{\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}}(\mathbf{w})) = \mathbf{B}(\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}\mathbf{w}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{BA})\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}\lambda\mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Si calcoli la matrice pseudoinversa della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ qual è la soluzione ottimale ai minimi quadrati di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica e semidefinita positiva perché il suo polinomio caratteristico è $P(x) = x(6-x)^2$. Come discusso nell'esempio a pagina 467 sul testo, la sua decomposizione ai valori singolari coincide con la sua decomposizione spettrale $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Sigma Q}^{\mathsf{T}}$, in cui

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è la matrice diagonale degli autovalori. Dal secondo esempio di pagina 472 nel testo abbiamo che

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\mathbf{\Sigma}$$

e dal corollario 4.8 otteniamo allora che

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q\Sigma}^+\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{36}\mathbf{Q\Sigma Q}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{36}\mathbf{A}.$$

Come spiegato nell'osservazione di pagina 476 sul testo, la soluzione ottimale ai minimi quadrati di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{36}\mathbf{Ab}.$$

Si definisca la *norma* di una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) nel modo seguente:

$$||\mathbf{A}|| = \mathrm{Sup}\,\{||\mathbf{Ax}|| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ ||\mathbf{x}|| = 1\} = \mathrm{Sup}\left\{\frac{||\mathbf{Ax}||}{||\mathbf{x}||} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq 0\right\}.$$

Mostrare che $||\mathbf{A}|| = \sigma_1$: la norma di una matrice (non nulla) coincide col massimo dei suoi valori singolari. Mostrare anche che l'estremo superiore che definisce la norma è un massimo, cioè che esiste un versore $\mathbf{x}$ tale che $||\mathbf{Ax}|| = ||\mathbf{A}||$. Dimostrare la disuguaglianza triangolare $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$.

Soluzione. Consideriamo il quoziente di Rayleigh

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{Ax}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}.$$

Dalla proposizione 3.4 sappiamo che R ammette massimo e che questo coincide con l'autovalore massimo della matrice simmetrica $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ che, per la definizione 4.2 di valore singolare, è esattamente il quadrato σ_1^2 del primo valore singolare di $\mathbf{A}$. Dalla definizione abbiamo che

$$\|\mathbf{A}\| = \operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \sqrt{R(\mathbf{x})} = \operatorname*{Max}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \sqrt{R(\mathbf{x})} = \sigma_1.$$

Per dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma di matrici basta osservare che dalla disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^n$ abbiamo, per ogni versore $\mathbf{x}$,

$$\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}\| \leq \|\mathbf{Ax}\| + \|\mathbf{Bx}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|.$$

Prendendo l'estremo superiore sulla sfera unitaria S^{n-1} troviamo

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| = \operatorname*{Sup}_{\mathbf{x}\in S^{n-1}} \|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|.$$

Il *numero di condizionamento* di una matrice quadrata invertibile $\mathbf{A}$ è

$$c = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Questo numero è di fondamentale importanza nelle applicazioni numeriche perché controlla la propagazione degli errori dai dati alla soluzione di un sistema lineare. Mostrare che c è uguale al rapporto tra il massimo e il minimo valore singolare della matrice $\mathbf{A}$.

Soluzione. Il punto fondamentale dell'esercizio è l'osservazione che se $\mathbf{A}$ è invertibile allora tutti i suoi valori singolari $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n$ sono strettamente positivi e i valori singolari dell'inversa $\mathbf{A}^{-1}$ sono i reciproci

$$\frac{1}{\sigma_n} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sigma_1}$$

dei valori singolari di $\mathbf{A}$. Infatti la matrice $\mathbf{A}$, essendo invertibile, deve avere nucleo ridotto a zero. Ma allora, dalla discussione fatta nella soluzione dell'esercizio 16, la matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ è definita positiva, dunque tutti i suoi autovalori sono positivi e positive sono pure le radici quadrate di questi autovalori, che sono i valori singolari di $\mathbf{A}$. In secondo luogo, la matrice $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^T$ è l'inversa di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, quindi gli autovalori di $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^T$, che sono gli stessi di $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^{-1}$, sono gli inversi degli autovalori di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$; ma questo significa, prendendo le radici quadrate, che i valori singolari di $\mathbf{A}^{-1}$ sono gli inversi dei valori singolari di $\mathbf{A}$.

Chiarito questo punto abbiamo allora dall'esercizio 33 che $\|\mathbf{A}\| = \sigma_1$, il massimo valore singolare di $\mathbf{A}$, mentre $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$, il massimo valore singolare di $\mathbf{A}^{-1}$. Dunque

$$c = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

☐ 4. IL CASO COMPLESSO

(35) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata complessa. Mostrare che $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ sono hermitiane.

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = (\overline{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}}$, dove $\overline{\mathbf{A}}$ è la matrice coniugata di $\mathbf{A}$, definita dalla formula $\overline{\mathbf{A}}_{ij} = \overline{\mathbf{A}_{ij}}$. Ricordiamo poi, come visto nella proposizione 5.2 del capitolo 3, che l'operazione di trasposizione soddisfa le formule

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{TT}} = \mathbf{A}.$$

L'operazione di coniugio soddisfa, in modo simile, le formule

$$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}, \quad \overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}, \quad \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}.$$

La prima di queste formule deriva dal fatto che $\overline{a_{ij}+b_{ij}} = \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}$, la seconda dal fatto che

$$\overline{\sum_k a_{ik}b_{kj}} = \sum_k \overline{a_{ik}b_{kj}} = \sum_k \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}},$$

la terza dal fatto che $\overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$. Infine resta da osservare che il coniugio commuta con la trasposizione e cioè che

$$\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}.$$

Da queste formule si ottiene che l'operazione di aggiunzione soddisfa le formule seguenti, analoghe a quelle per la trasposizione:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{B}^{\mathrm{H}}, \qquad (\mathbf{AB})^{\mathrm{H}} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{HH}} = \mathbf{A}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{H}} = (\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}})^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} + \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\\
&(\mathbf{AB})^{\mathrm{H}} = (\overline{\mathbf{AB}})^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}(\overline{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\\
&\mathbf{A}^{\mathrm{HH}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{TT}} = \mathbf{A}^{\mathrm{TT}} = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Possiamo ora facilmente dimostrare che le matrici $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ sono hermitiane dimostrando che coincidono con le loro aggiunte. Infatti

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{A}^{\mathrm{HH}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\\
&(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{HH}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

(36) Mostrare che una matrice quadrata $\mathbf{A}$ è normale se e solo se la sua parte hermitiana $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ e la sua parte antihermitiana $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ commutano.

Soluzione. Basta osservare che, posto per leggibilità

$$\mathbf{A}_h = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{H}}), \qquad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{H}}),$$

risulta

$$\mathbf{A}_h\mathbf{A}_a = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}2})$$
$$\mathbf{A}_a\mathbf{A}_h = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}2}).$$

Ma allora

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_h\mathbf{A}_a = \mathbf{A}_a\mathbf{A}_h &\Leftrightarrow -\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = +\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\\ &\Leftrightarrow 2\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

L'ultima condizione è esattamente la normalità di $\mathbf{A}$.

37 Sia $\mathbf{Q}$ la matrice di una rotazione del piano. Si trovi una matrice unitaria che diagonalizza $\mathbf{Q}$.

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che la matrice di una rotazione nel piano è della forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $\mathbf{Q}$ è una matrice normale, perché $\mathbf{Q}^{\mathrm{H}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, dal momento che tutti i coefficienti di $\mathbf{Q}$ sono reali; e poiché $\mathbf{Q}$ è ortogonale, risulta $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$. Dal teorema spettrale 5.3 sappiamo allora che $\mathbf{Q}$ è unitariamente diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{Q}$ è $P(x) = 1 - 2(\cos\theta)x + x^2$ e ammette due radici complesse: $x_1 = e^{i\theta}$ e $x_2 = e^{-i\theta}$. Queste radici coincidono solo quando $\theta \equiv 0 \mod \pi$ e che in questi due casi $\mathbf{Q}$ è già diagonale. In tutti gli altri casi i due zeri sono semplici e gli autospazi corrispondenti sono

$$\mathbf{V}_{e^{i\theta}} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right), \qquad \mathbf{V}_{e^{-i\theta}} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right).$$

I vettori trovati sono automaticamente ortogonali rispetto al prodotto hermitiano perché $\mathbf{Q}$ è normale, ma vanno comunque normalizzati per ottenere la matrice unitaria $\mathbf{U}$ che diagonalizza $\mathbf{Q}$. Normalizzando troviamo

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

38 Si trovi una matrice unitaria che diagonalizza la matrice

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Si osservi anzitutto che $\mathbf{E}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{E}$; dunque $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^{\mathrm{H}}\mathbf{E}$. La matrice $\mathbf{E}$ è dunque normale e può essere diagonalizzata unitariamente per il teorema spettrale 5.3. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{E}$ è $P(x) = 16 + x^2$ che ammette gli zeri semplici $\pm 4i$. Gli autospazi corrispondenti sono

$$\mathbf{V}_{4i} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right), \qquad \mathbf{V}_{-4i} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right).$$

La base ottenuta è già ortogonale rispetto al prodotto hermitiano. Normalizzando i vettori troviamo la matrice unitaria

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

che diagonalizza $\mathbf{E}$.

39 Si mostri che una matrice 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

è hermitiana se e solo se a e d sono reali e $c = \bar{b}$. Se questo è il caso, trovare gli autovalori di $\mathbf{A}$ e verificare che sono reali.

Soluzione. Basta osservare che

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix},$$

e dunque che la condizione $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$ che definisce una matrice hermitiana si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \bar{a} = a \\ \bar{c} = b \\ \bar{b} = c \\ \bar{d} = d. \end{cases}$$

La prima e la quarta equazione sono equivalenti alla condizione che $a, d \in \mathbb{R}$, mentre la seconda e la terza si equivalgono perché il coniugio è involutorio. Sotto queste ipotesi, il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$, che è

$$P_{\mathbf{A}}(x) = (ad - bc) - (a + d)x + x^2,$$

ha discriminante

$$D = (a + d)^2 - 4ad + 4bc = (a - d)^2 + 4|b|^2$$

che è somma di due quadrati reali. Dunque gli autovalori di $\mathbf{A}$, che sono gli zeri del polinomio, sono reali.

40 Mostrare che una matrice quadrata $\mathbf{N}$ di ordine n è normale se e solo se $\|\mathbf{N}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Dedurre che, se $\mathbf{N}$ è normale e $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{N}$ relativo all'autovalore λ, allora $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{N}^{\mathrm{H}}$ relativo all'autovalore $\bar{\lambda}$.

Soluzione. Si osservi anzitutto che per un qualunque vettore $\mathbf{v}$ risulta $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^{\mathrm{H}}\mathbf{v}$. Dunque

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{N}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{v}\| \text{ per tutti i } \mathbf{v} &\Leftrightarrow \|\mathbf{N}\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{v}\|^2 && \text{per tutti i } \mathbf{v}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{v}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{v} && \text{per tutti i } \mathbf{v}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{N}\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{v} && \text{per tutti i } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{N}^{\mathrm{H}}.
\end{aligned}$$

La terza equivalenza è conseguenza della formula di polarizzazione nella proposizione 8.4 nel capitolo 8. L'ultima equivalenza dipende semplicemente dal fatto che per una qualunque matrice quadrata $\mathbf{A}$ risulta $\mathbf{e}_i{}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$ e dunque l'uguaglianza di tutti i prodotti equivale all'uguaglianza delle matrici.

Supponiamo ora che $\mathbf{v}$ sia un autovettore di $\mathbf{N}$ relativo all'autovalore λ. Si osservi che, essendo $\mathbf{N}$ normale, la matrice $\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I}$ è normale e che $(\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I})^{\mathrm{H}} = \mathbf{N}^{\mathrm{H}} - \bar{\lambda}\mathbf{I}$. Per quanto appena dimostrato, abbiamo che

$$\|(\mathbf{N}^{\mathrm{H}} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I})^{\mathrm{H}}\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}\| = \|\mathbf{0}\| = 0.$$

Dunque $(\mathbf{N}^{\mathrm{H}} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e questo significa che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{N}^{\mathrm{H}}$ relativo all'autovalore $\bar{\lambda}$.

41. Dimostrare senza usare il teorema spettrale che autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice normale sono ortogonali.

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano autovettori di una matrice normale $\mathbf{N}$ relativi ad autovalori distinti λ e μ rispettivamente. Utilizzando i risultati dell'esercizio 40, abbiamo che

$$\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{N}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{N}^{\mathrm{H}}\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\bar{\mu}\mathbf{w}\rangle = \mu\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle.$$

Dunque $(\lambda - \mu)\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$ ed essendo $\lambda \neq \mu$ abbiamo $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$.

42. Dare un'altra dimostrazione del teorema spettrale complesso facendo vedere che tutti gli autovalori di una matrice normale sono regolari, e mostrando che autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali in $\mathbb{C}^n$.
[Suggerimento: se $\mathbf{N}$ è normale, allora anche $\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I}$ è normale. Per mostrare che gli autovalori sono regolari, cioè hanno indice uno, basta allora mostrare che $\operatorname{Ker}(\mathbf{B}) \cap \operatorname{Col}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$ per ogni matrice normale $\mathbf{B}$. Per questo si usi il trucco seguente: se $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B})$ e $\mathbf{B}$ è normale, allora $\mathbf{v}$ appartiene anche a $\operatorname{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}})$. Invece se $\mathbf{v} \in \operatorname{Col}(\mathbf{B})$, allora $\mathbf{v}$ è ortogonale a ogni vettore in $\operatorname{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}})$ (questo è vero anche se $\mathbf{B}$ non è normale).]

Soluzione. Dimostriamo anzitutto che, se $\mathbf{B}$ è normale, allora $\operatorname{Ker}(\mathbf{B}) \cap \operatorname{Col}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$. Supponiamo infatti che $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B}) \cap \operatorname{Col}(\mathbf{B})$. Dall'esercizio 40 sappiamo che $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}})$, perché

$$\|\mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{B}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$$

e dunque $\mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Inoltre $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}})^{\perp}$, perché se $\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ e $\mathbf{w} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}})$, allora

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{B}\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{0}\rangle = 0.$$

In particolare, $\mathbf{v}$ è ortogonale a se stesso e dunque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ora si osservi che se $\mathbf{N}$ è normale, allora è pure normale la matrice $\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Quanto abbiamo appena dimostrato, insieme all'esercizio 65 del capitolo 7 mostra che l'indice di ogni autovalore di $\mathbf{N}$ è 1. Per il teorema 6.13 del capitolo 7, la matrice $\mathbf{N}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Per completare la dimostrazione del teorema spettrale occorre dimostrare non solo che esiste una base di autovettori, ma che esiste una base ortonormale di autovettori. Sappiamo dall'esercizio 41 che autospazi relativi ad autovalori distinti sono automaticamente ortogonali. Per ortogonalizzare la base di ciascuno spazio basta applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt con il prodotto hermitiano.

□ 5. MATRICI NORMALI REALI

Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si spieghi perché $\mathbf{A}$ è la matrice di una rotazione di $\mathbb{R}^3$. Si determinino l'asse e l'angolo di rotazione. Si determinino gli autovalori di $\mathbf{A}$. La matrice è diagonalizzabile da una matrice complessa? E da una matrice reale? Si determini una matrice ortogonale reale $\mathbf{Q}$ tale che

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. Si veda l'esercizio 54 del capitolo 8.

Si mostri che ogni isometria lineare di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto di composizione di isometrie di questo tipo:

1. isometrie che ruotano attorno all'origine i vettori di un piano $\mathbf{H}$ per l'origine e che lasciano fissi i vettori di $\mathbf{H}^\perp$;
2. riflessioni ortogonali con asse un iperpiano.

Si mostri inoltre che un'isometria lineare con determinante 1 si può scrivere come prodotto di sole rotazioni di tipo 1; e che d'altra parte ogni rotazione di tipo 1 è il prodotto di due riflessioni, quindi ogni isometria lineare è un prodotto di sole riflessioni ortogonali di tipo 2.

Soluzione. La matrice rappresentativa di un'isometria è una matrice ortogonale. Dal corollario 6.2 sappiamo che possiamo scegliere una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ in modo che la matrice rappresentativa sia diagonale a blocchi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}$$

dove ogni $\mathbf{B}_i$ è o un blocco di ordine uno identificabile con uno degli scalari ± 1, oppure un blocco di ordine due della forma

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}.$$

Ora si osservi che

$$\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$$

dove $\mathbf{A}_i$ è la matrice che ha il blocco $\mathbf{B}_i$ nella stessa posizione della matrice $\mathbf{A}$, ma tutti gli altri blocchi diagonali uguali allo scalare 1. Tutte le matrici $\mathbf{A}_i$ sono ortogonali e dunque rappresentano isometrie. Se $\mathbf{B}_i = [1]$, allora $\mathbf{A}_i$ è la matrice identità e rappresenta la trasformazione identica di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{B}_i = [-1]$ e il blocco si trova in posizione (k, k), allora la trasformazione associata ad $\mathbf{A}_i$ manda il k-esimo vettore $\mathbf{v}_k$ della base nel suo opposto e lascia invariati tutti gli altri; dunque è la simmetria ortogonale che ha come asse l'iperpiano $\mathcal{L}(\mathbf{v}_k)^\perp$. Infine, se $\mathbf{B}_i$ è il blocco di ordine due descritto sopra e il suo primo elemento si trova in posizione (k, k), allora, posto $\mathbf{H} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})$, la trasformazione associata ad $\mathbf{A}_i$ lascia fissi tutti i vettori di $\mathbf{H}^\perp$, mentre in $\mathbf{H}$ si comporta come la rotazione di angolo θ_i, come mostrato nel secondo esempio di pagina 384 nel testo. Dal momento che $\mathbf{A}$ è il prodotto delle matrici $\mathbf{A}_i$, l'isometria corrispondente è il prodotto di composizione delle isometrie che corrispondono alle matrici $\mathbf{A}_i$.

Se $\det(\mathbf{A}) = 1$, allora i blocchi del tipo $\mathbf{B}_i = [-1]$ devono comparire in numero pari e possono essere sostituiti con blocchi del tipo

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se il primo elemento di questo nuovo blocco si trova in posizione (k, k) e $\mathbf{V}_i = \mathcal{L}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})$ allora la matrice $\mathbf{A}_i$ rappresenta il prodotto di due riflessioni ortogonali nel piano $\mathbf{V}_i$ e, come dimostrato nell'esercizio 20 del capitolo 8, è una rotazione; in effetti si tratta di una rotazione di un angolo $\theta = \pi$ nel piano $\mathcal{L}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})$. Dunque ogni isometria lineare reale con determinante 1 è prodotto di rotazioni del tipo 2.

Infine, il fatto che ogni rotazione in un piano è prodotto di due riflessioni è ancora una volta conseguenza dell'esercizio 20 del capitolo 8. Infatti, data una rotazione di un angolo θ, basta scegliere angoli θ_1 e θ_2 tali che $\theta = \theta_1 - \theta_2$ e considerare le riflessioni i cui assi formano angoli pari a $\frac{1}{2}\theta_1$ e a $\frac{1}{2}\theta_2$ col vettore $\mathbf{v}_k$.

□ 6. QUADRICHE

(15) Riconoscere la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0.$$

Soluzione. La matrice della conica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Per riconoscere il tipo di conica utilizziamo gli invarianti ortogonali descritti nell'esempio a pagina 494 del testo. Abbiamo

$$I_2 = 1 > 0, \qquad I_1 I_3 = -22 < 0$$

e dunque la conica è un'ellisse a punti reali.

46 Riconoscere la conica di equazione

$$x^2 + 6xy - 2x - 8y = 0.$$

Soluzione. La matrice della conica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $I_2 = -9 < 0$ e $I_3 = 8 \neq 0$, dunque la conica è un'iperbole che non è equilatera perché $I_1 = 1 \neq 0$.

47 Riconoscere la conica di equazione

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y = 0.$$

Soluzione. In questo caso

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque $I_2 = 0$, $I_3 = -1 \neq 0$. La conica è una parabola.

48 Riconoscere la conica di equazione

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

e trovarne (se esistono) il centro e gli assi di simmetria.

Soluzione. La matrice della conica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e $I_2 = -3 < 0$, $I_3 = 6 \neq 0$. Dunque la conica è un'iperbole. Il centro della conica è l'unica soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, perché per questo valore di $\mathbf{x}$ il termine lineare nell'equazione della conica si annulla. Troviamo $\mathbf{x} = [1, 0]^{\mathrm{T}}$, dunque il centro della conica è il punto $C = (1, 0)$. Le direzioni degli assi della conica sono quelle degli autovettori della matrice $\mathbf{A}$. Gli autovalori di questa matrice sono 3 e -1 e i corrispondenti autospazi sono generati dai vettori $\mathbf{v}_1 = [1, -1]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$. Gli assi della conica sono allora le rette passanti per C e aventi questi vettori come direzione:

$$\mathbf{r}_1 : x - y - 1 = 0, \qquad \mathbf{r}_2 : x + y - 1 = 0.$$

49 Ridurre a forma canonica la quadrica di equazione

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2x + 4y + 2z + 1 = 0.$$

Soluzione. La matrice della quadrica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $r(\mathbf{B}) = 3$ e $r(\mathbf{A}) = 2$, dunque sappiamo dal teorema 7.5 che la quadrica è del tipo $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0$. I coefficienti λ_1 e λ_2 sono gli autovalori non nulli di $\mathbf{A}$; dal polinomio caratteristico abbiamo che questi valgono $3 \pm \sqrt{3}$. Il coefficiente C può essere determinato dalla proposizione 7.4 in questo modo: se $\mathbf{v}$ è un vettore di traslazione che annulla i termini lineari della quadrica, e cioè per cui $\mathbf{Av} + \mathbf{b} = 0$, allora $C = q(\mathbf{v})$. Un vettore che risolve il sistema $\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ è $\mathbf{v} = [0, -1, 0]^{\mathrm{T}}$, dunque $C = -1$. In conclusione, la forma canonica della quadrica è

$$(3 + \sqrt{3})X^2 + (3 - \sqrt{3})Y^2 - 1 = 0.$$

Si tratta di un cilindro le cui sezioni trasversali sono delle ellissi.

50 Ridurre a forma canonica la quadrica di equazione

$$2x^2 + 3z^2 - 4xy + 3yz - x + 2y = 0.$$

Soluzione. In questo caso è conveniente moltiplicare per due l'equazione della quadrica, in modo da rendere interi i coefficienti della matrice. Si ottiene

$$4x^2 + 6z^2 - 8xy + 6yz - 2x + 4y = 0$$

che ha matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 3$ e $r(\mathbf{B}) = 4$, sappiamo dal teorema 7.5 che la quadrica ha forma canonica

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + C = 0,$$

dove i λ_i sono gli autovalori di $\mathbf{A}$. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è $P(x) = 132 - x - 10x^2 + x^3$ e non ha zeri razionali. Non è tuttavia difficile vedere che $P(x)$ ha due radici positive $\lambda_1 > \lambda_2$ e una radice negativa λ_3: in effetti, senza bisogno di una calcolatrice si verifica che $P(-4) < 0$, $P(-3) > 0$, $P(5) > 0$, $P(6) < 0$, per cui le radici di $P(x)$ soddisfano $\lambda_1 > 6 > \lambda_2 > 5$ e $-4 < \lambda_3 < -3$. Per determinare C basta invece ricordare che, sempre per il teorema 7.5, i determinanti di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono invarianti per rototraslazione. Nella forma canonica il determinante di $\mathbf{B}$ è il prodotto di C per gli autovalori di $\mathbf{A}$, il cui prodotto, a loro volta, è il determinante di $\mathbf{A}$. Dunque

$$C = \frac{\det(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{A})} = -\frac{3}{44}.$$

Se poniamo $c_i = |\lambda_i|$, abbiamo la forma canonica

$$c_1X^2 + c_2Y^2 - c_3Z^2 - \frac{3}{44} = 0.$$

Questo tipo di quadrica è noto come iperboloide a una falda. Le sezioni della quadrica coi piani orizzontali $Z = k$ sono delle ellissi, mentre le sezioni coi piani verticali $X = k$ e $Y = k$ sono delle iperboli.

51 Ridurre a forma canonica la quadrica di equazione

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xy + 2x + 2z - 1 = 0.$$

Soluzione. La matrice della quadrica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $r(\mathbf{A}) = 3$ e $r(\mathbf{B}) = 4$, dunque la quadrica ha forma canonica $\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3Z^2 + C = 0$. I λ_i sono gli autovalori di $\mathbf{A}$ e valgono 1 e $-1 \pm \sqrt{5}$. Per determinare C possiamo procedere come nell'esercizio 50:

$$C = \frac{\det(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{A})} = -\frac{11}{4}.$$

Dunque la forma canonica della quadrica è

$$X^2 + (\sqrt{5} - 1)Y^2 - (\sqrt{5} + 1)Z^2 - \frac{11}{4} = 0.$$

Si tratta di un iperboloide a una falda.

52 Ridurre a forma canonica la quadrica di equazione

$$9x^2 - 5y^2 - 4z^2 - 4yz + 18x - 8y + c = 0$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La matrice della quadrica è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ non dipende da c e ha sempre rango 3; i suoi autovalori sono 9 e $\frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{17})$. Invece $\det(\mathbf{B}) = 144(c-5)$, dunque $\mathbf{B}$ ha rango 3 quando $c = 5$ e rango 4 in tutti gli altri casi. Se $c = 5$ la forma canonica della quadrica è dunque

$$9X^2 - \frac{1}{2}(9 + \sqrt{17})Y^2 - \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17})Z^2 = 0.$$

Se invece $c \neq 5$ la forma canonica ha anche un termine noto

$$C = \frac{\det(\mathbf{B})}{\det(\mathbf{A})} = c - 5.$$

Dunque, in tutti i casi, la forma canonica è

$$9X^2 - \frac{1}{2}(9 + \sqrt{17})Y^2 - \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17})Z^2 + (c-5) = 0.$$

Se $c = 5$ si tratta di un cono le cui sezioni trasversali sono ellissi. Se $c > 5$ abbiamo un iperboloide a una falda, mentre se $c < 5$ abbiamo un iperboloide a due falde.

Ogni retta di $\mathbb{R}^n$ che non sia contenuta nella quadrica $q(\mathbf{x}) = 0$ interseca la quadrica in al più due punti distinti.

Soluzione. Una retta di $\mathbb{R}^n$ ha equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ con $t \in \mathbb{R}$. Per determinare le intersezioni di questa retta con la quadrica $q(\mathbf{x}) = 0$ occorre risolvere l'equazione $q(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = 0$ rispetto all'indeterminata t. Poiché q è una forma quadratica, questa equazione ha al massimo grado 2 in t. Quindi, si possono verificare solo due casi per il polinomio $p(t) = q(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$: o p è il polinomio nullo e allora ogni valore di t è soluzione, cioè la retta è contenuta nella quadrica; oppure p non è nullo e, avendo grado al massimo due, ha al massimo due zeri, quindi esistono al più due punti di intersezione fra retta e quadrica.

Mostrare che le quadriche di equazione $x^2 - y^2 = 1 - z^2$ (iperboloide iperbolico) e $x^2 - y^2 = z$ (paraboloide iperbolico) contengono infinite rette.

Soluzione. L'insieme dei punti dell'iperboloide iperbolico può essere pensato come l'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x + y = k(1+z) \\ x - y = \frac{1}{k}(1-z) \end{cases}$$

al variare di k in $\mathbb{R} \setminus 0$. Ma per ciascuno di questi k, il sistema rappresenta l'intersezione di due piani con direzioni normali $\mathbf{v}_1 = [1, 1, -k]^{\mathrm{T}}$ e $\mathbf{v}_2 = [1, -1, \frac{1}{k}]^{\mathrm{T}}$. Questi vettori non sono mai paralleli e dunque l'intersezione dei due piani è sempre una retta contenuta nell'iperboloide. Per vedere che tutte queste rette sono distinte si può, ad esempio, osservare che l'intersezione della retta corrispondente al parametro k con il piano $z = 0$ è il punto

$$P(k) = \left(\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right), \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right), 0\right)$$

e che $P(k_1) = P(k_2) \Leftrightarrow k_1 = k_2$. Poiché le intersezioni di queste rette con il medesimo piano sono distinte, sono pure distinte tutte le rette.

L'argomentazione per il paraboloide iperbolico è del tutto simile: basta utilizzare i sistemi

$$\begin{cases} x + y = kz \\ x - y = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

55 In $\mathbb{R}^n$ si consideri la quadrica Q di equazione

$$X_1^2 + \ldots + X_{n-1}^2 - X_n^2 = 0.$$

Mostrare che Q è un cono con vertice nell'origine: questo significa che, se un punto P appartiene alla quadrica, allora l'intera retta che congiunge P all'origine è contenuta nella quadrica.

Soluzione. Consideriamo la forma quadratica

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$$

e ricordiamo, dalla proposizione 3.1, che $q(t\mathbf{x}) = t^2 q(\mathbf{x})$. Se $\mathbf{x}_0 \in Q$, allora $q(\mathbf{x}_0) = 0$. La retta uscente dall'origine e passante per $\mathbf{x}_0$ ha equazione $\mathbf{x} = t\mathbf{x}_0$ e per tutti i suoi punti abbiamo

$$q(\mathbf{x}) = q(t\mathbf{x}_0) = t^2 q(\mathbf{x}_0) = t^2 \cdot 0 = 0.$$

Dunque tutti i punti della retta appartengono a Q.

56 Mostrare che, se $\mathbf{B}$ è definita positiva, la quadrica di equazione $\mathbf{z}^T\mathbf{B}\mathbf{z} = 0$ non ha punti reali.

Soluzione. Consideriamo la forma quadratica $q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{z}$. Il fatto che $\mathbf{B}$ sia definita positiva significa che per ogni $\mathbf{z} \neq 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ risulta $q(\mathbf{z}) > 0$. Ora si ricordi, dalla discussione che segue la proposizione 7.4 nel testo, che l'ultima coordinata del vettore $\mathbf{z}$ è sempre uguale a 1. In particolare $\mathbf{z}$ non è mai nullo e l'equazione $q(\mathbf{z}) = 0$ non ha soluzioni reali.

57 Dedurre dalla formula (7.7) nel testo che la *segnatura* di $\mathbf{B}$, cioè il numero di autovalori positivi, negativi e nulli di $\mathbf{B}$, è invariante per rototraslazioni. Mostrare con un esempio che gli autovalori di $\mathbf{B}$ possono invece variare.

Soluzione. Come mostrato nell'esempio di pagina 490 del testo, il cambiamento della matrice $\mathbf{B}$ a seguito di una rototraslazione è descritto dalla formula $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{F}$, dove

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S} & \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right],$$

$\mathbf{S}$ è la matrice della rotazione e $\mathbf{v}$ il vettore di traslazione. La matrice $\mathbf{S}$ è ortogonale speciale, dunque invertibile; la formula di Laplace applicata all'ultima riga mostra allora che anche $\mathbf{F}$ è invertibile. Di conseguenza, le matrici $\mathbf{B}$ e $\widetilde{\mathbf{B}}$ sono congruenti e dalla legge di inerzia di Sylvester, il teorema 3.9, risulta allora che hanno la stessa segnatura.

Per vedere che gli autovalori di $\mathbf{B}$ non sono invarianti, consideriamo la quadrica $x^2 = 0$ e applichiamo la traslazione $x = \widetilde{x} + 1$. Le matrici della quadrica prima e dopo la traslazione sono

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{B}$ ammette 0 come autovalore doppio e 1 come autovalore semplice, mentre $\widetilde{\mathbf{B}}$ ha ancora 0 come autovalore doppio ma ha 2 come autovalore semplice.

7. ESERCIZI SUPPLEMENTARI

58 Date le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se l'equazione $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ ammetta una soluzione $\mathbf{X}$ nell'insieme delle matrici 3×3 invertibili, e in caso affermativo determinare due matrici 3×3 invertibili $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ tali che $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}$ sia soluzione dell'equazione. L'equazione ammette una soluzione $\mathbf{X}$ nell'insieme delle matrici ortogonali? Ripetere l'esercizio lasciando $\mathbf{A}$ invariata ma sostituendo la matrice $\mathbf{B}$ con

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. La questione è se le matrici $\mathbf{B}$ sono simili alla matrice $\mathbf{A}$. Tutte e tre le matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico: un autovalore semplice $\lambda = 1$ e un autovalore doppio (molteplicità algebrica 2) $\lambda = 4$. La matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile perché il rango di $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ è 1, quindi $\lambda = 4$ ha molteplicità geometrica 2 e tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono regolari. La prima matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile perché è simmetrica, ed è simile ad $\mathbf{A}$ perché tanto $\mathbf{A}$ quanto $\mathbf{B}$ sono simili alla matrice diagonale $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(1, 4, 4)$. La seconda matrice $\mathbf{B}$ non è diagonalizzabile, perché per essa l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità geometrica 1, perciò non è simile ad $\mathbf{A}$. In conclusione l'equazione $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ ammette soluzione $\mathbf{X}$ nell'insieme delle matrici 3×3 invertibili solo per la prima matrice $\mathbf{B}$.

Per trovare $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ tali che X sia soluzione dell'equazione cercata, basta imporre

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \operatorname{diag}(1, 4, 4) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}.$$

La prima colonna di $\mathbf{S}$ dev'essere perciò un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo a $\lambda = 1$, mentre la seconda e terza colonna devono essere una base dell'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore $\lambda = 4$. Un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo a $\lambda = 1$ è $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ perché $\mathbf{A}$ è triangolare alta, mentre l'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore $\lambda = 4$ è il piano di equazione $-3x + 2y + 3z = 0$, una cui base è costituita, per esempio, dai vettori $[2, 3, 0]^{\mathrm{T}}$ e $[1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. Una matrice $\mathbf{T}$ con le proprietà desiderate si costruisce nello stesso modo sostituendo gli autovettori di $\mathbf{A}$ con quelli di $\mathbf{B}$. L'equazione dell'autospazio di $\mathbf{B}$ relativo a $\lambda = 4$ è $x - y + z = 0$, una cui base (non ortonormale) è costituita dai vettori $[1,1,0]^T$ e $[1,0,-1]$. L'autospazio di $\mathbf{B}$ relativo a $\lambda = 1$ è, siccome $\mathbf{B}$ è simmetrica, la retta perpendicolare al piano $x - y + z = 0$, che è la retta generata da $[1,-1,1]^T$. Quindi una soluzione è fornita dalle matrici

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nemmeno per la prima matrice $\mathbf{B}$ è possibile trovare una soluzione $\mathbf{X}$ dell'equazione che sia ortogonale: se esistesse $\mathbf{X}$ ortogonale tale che $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$, allora $\mathbf{A}$ sarebbe simmetrica perché $\mathbf{B}$ è simmetrica, ma evidentemente questo non è il caso.

59 Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_1) = 13\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$, $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 10\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, $\mathfrak{L}(\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 13\mathbf{b}_3$.

1. Scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Verificare che $\mathbf{A}$ è simmetrica e che $\lambda = 9$ è un autovalore di $\mathbf{A}$.
2. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$. (Suggerimento: $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} - 9\mathbf{I}$ hanno gli stessi autovettori.)
3. Determinare due matrici di proiezione ortogonale $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ e due numeri reali λ_1 e λ_2 tali che $\mathbf{I} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$.
4. Scrivere una matrice definita positiva $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^2 = \mathbf{A}$.

Soluzione. La matrice richiesta è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

che è simmetrica perché $a_{ij} = a_{ji}$. Sottraendo $9\mathbf{I}$ ad $\mathbf{A}$ otteniamo la matrice

$$\mathbf{A} - 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha rango 1. Perciò $\lambda = 9$ è un autovalore di $\mathbf{A}$ di molteplicità geometrica 2, e quindi di molteplicità algebrica almeno 2. Siccome la somma degli autovalori di $\mathbf{A}$ è $36 = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$, il terzo autovalore di $\mathbf{A}$ è $\lambda_3 = 36 - 2 \times 9 = 18$, che ha molteplicità algebrica 1. L'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore doppio $\lambda = 9$ è il piano $\mathbf{H}$ di equazione $2x + y + 2z = 0$, l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 18$ è la retta perpendicolare ad $\mathbf{H}$ (perché $\mathbf{A}$ è simmetrica): siccome $[2,1,2]^T$ è ortogonale ad $\mathbf{H}$, si tratta della retta generata dal versore $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{3}[2,1,2]^T$. Una base ortonormale di $\mathbf{H}$ si può trovare applicando Gram-Schmidt alla base di $\mathbf{H}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = [1,0,-1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1,-2,0]^T$:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si ottiene così la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

Per il teorema spettrale, le matrici $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono le matrici di proiezione sugli autospazi di $\mathbf{A}$. Siccome $\mathbf{P}_2$ ha rango 1, calcoliamo prima $\mathbf{P}_2 = \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^{\mathrm{T}}$ e poi $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_2$:

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}[2,1,2] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che $\mathbf{A} = 9\mathbf{P}_1 + 18\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$:

$$9\mathbf{P}_1 + 18\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 13 \end{bmatrix} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}[2,1,2]\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

60 Per quale valore di k esiste una matrice 3×3 simmetrica reale $\mathbf{A}$ con le seguenti proprietà: gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono 1, 2 e 3, inoltre $\mathbf{v} = [1,2,2]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore 1, e $\mathbf{w} = [k,-1,2]^{\mathrm{T}}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore 2? Per tale valore di k determinare una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ con le proprietà richieste.

Soluzione. Autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica reale $\mathbf{A}$ sono ortogonali. Quindi dev'essere

$$0 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = k - 2 + 4$$

cioè $k = -2$. Per $k = -2$ la matrice $\mathbf{A}$ con le proprietà richieste esiste ed è unica: l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$ è la retta ortogonale al piano generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cioè la retta generata dal vettore $\mathbf{z} = [2,-2,1]^{\mathrm{T}}$. Per il teorema spettrale ($\mathbf{P}_j$ matrice di proiezione sull'autospazio relativo a λ_j)

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \frac{2}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} + \frac{3}{\|\mathbf{z}\|^2}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

61 Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. si determinino gli autovalori di $\mathbf{A}$ e una base ortonormale per ogni autospazio di $\mathbf{A}$;
2. si scriva la decomposizione spettrale di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{A}^3$;
3. si scriva una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ con determinante uguale a uno che diagonalizzi la matrice $\mathbf{A}$ della pagina precedente. Per il teorema di Eulero, la matrice $\mathbf{Q}$ rappresenta una rotazione dello spazio: determinare il coseno dell'angolo di rotazione attorno all'asse, e gli autovalori di $\mathbf{Q}$.

62 Scrivere l'equazione della conica passante per i cinque punti

$$P_1 = (1,0), \quad P_2 = (1,1), \quad P_3 = (3,0), \quad P_4 = (3,3), \quad P_5 = (4,1).$$

Riconoscere la conica e determinarne gli eventuali assi di simmetria.

63 Scrivere l'equazione della conica passante per i cinque punti

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1), \quad P_3 = (1,2), \quad P_4 = (2,3), \quad P_5 = (-\frac{1}{2},0).$$

Riconoscere la conica e determinarne gli eventuali assi di simmetria.

64 Riconoscere la quadrica di equazione

$$2xy + 2yz + 2xz = 1.$$

UNA SCOMMESSA DI CIVILTÀ

La nuova legge italiana sulle fotocopie è chiara.

È possibile fotocopiare una parte di un libro (fino al 15%) pagando, tramite la SIAE, all'autore e all'editore un prezzo proporzionato alla parte riprodotta.

In questo modo, chi ha bisogno di leggere alcuni capitoli può evitare di acquistare l'opera intera.

Ma la fotocopia di tutto o di gran parte di un libro è illecita: induce al mancato acquisto, rendendo così vano il lavoro di chi il libro lo ha scritto, redatto, composto, impaginato e illustrato.

La legge si propone lo scopo di tenere vivo l'interesse a scrivere libri.

Se questo interesse venisse a mancare, ben pochi libri nuovi sarebbero pubblicati: saremmo tutti costretti a leggere fotocopie, ormai illeggibili, di libri vecchi e non aggiornati.

Fotocopiare tutto un libro è un po' come lasciare un'auto in seconda fila: i più non lo fanno, non solo per paura della multa, ma soprattutto perché si rendono conto che, se tutti si comportassero così, ne deriverebbe un danno generale.

Sta quindi ai lettori far sì che la legge funzioni e produca effetti positivi.

È una scommessa di civiltà: se la si vince, il premio non andrà solo ad autori ed editori, ma a tutto il sistema culturale e scientifico italiano.

- Nel sito **www.zanichelli.it/f_info_fotocopie.html** la normativa.

Nello stesso sito si darà comunicazione del giorno in cui la nuova normativa acquisterà piena efficacia.
La piena efficacia della nuova normativa infatti è subordinata alla stipulazione di accordi fra le categorie interessate.

ette a disposizione degli studenti non vedenti o con
roblemi di apprendimento una copia dei file, solitamente
df, in cui sono memorizzate le pagine di questo libro.
ei file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo.
responsabili educativi possono richiedere i file scrivendo a:
Direzione Generale - Via Irnerio 34 - 40126 Bologna

Luca Mauri   Enrico Schlesinger

Esercizi di algebra lineare e geometria

Gli autori

Luca Mauri è professore a contratto ed esercitatore presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.
Enrico Schlesinger è professore associato di Geometria presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.

L'opera

Questo volume raccoglie le soluzioni dettagliate di tutti gli esercizi proposti nel testo *Algebra lineare e geometria* (Zanichelli, 2011) scritto da Enrico Schlesinger. Contiene inoltre alcuni nuovi esercizi dei quali sono forniti il risultato o uno schema di risoluzione.
Gli argomenti trattati sono:

- calcolo vettoriale
- geometria analitica di rette e piani
- riduzione a forma canonica delle equazioni di coniche e quadriche
- sistemi lineari
- metodo di eliminazione di Gauss e fattorizzazione LU
- algebra delle matrici
- spazi vettoriali
- applicazioni lineari
- autovettori e autovalori
- forma canonica di Jordan
- spazi euclidei
- matrici ortogonali e unitarie
- teorema spettrale per matrici simmetriche e normali
- forme quadratiche reali
- decomposizione ai valori singolari.

Il sito web

All'indirizzo **www.online.universita.zanichelli.it/mauri** sono disponibili ulteriori esercizi da risolvere.

MAURI*ESER ALGEBRA LINEARE E GEOM
ISBN 978-88-08-19252-3
9 788808 192523
3 4 5 6 7 8 9 0 1 (60B)

ZAN

al