2) $\nabla g(0;0) = (0,0)$ → l'origine è un punto critico.

9-4-2020

- $(0,0)$ è un punto di SELLA perché la funzione cambia segno

$y \neq 0$

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \ln|y| , & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\nabla g(x,y) = \left(y \ln|y| \, ; \, x\left(1 + \ln|y|\right)\right)$$

NOTA:

$$(y \ln y)' = \ln y + y \frac{1}{y} = 1 + \ln y$$

$$(y \ln(-y))' = \ln(-y) + y \cdot \frac{1}{-y} \cdot (-1) = 1 + \ln(-y)$$

PUNTI CRITICI: $\nabla g = (0;0)$

$$\begin{cases} y \ln|y| = 0 \longrightarrow |y| = 1 \to y = \pm 1 \\ x(\ln|y| + 1) = 0 \longrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0;1) \qquad (0;-1)$$

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\ln|y| \\ 1+\ln|y| & \frac{x}{y} \end{bmatrix}$$

$$H_g(0;1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det H_g(0,1) = -1 < 0 \quad \text{SELLA}$$

Analogamente per $(0,-1) \to$ SELLA.

Eventuali altri punti di max/min relativo sono da ricercare tra tutti i punti di non differenziabilità, quindi tra i punti $y=0$ escluso l'origine. $g(x,y)$ cambia segno intorno all'asse e non ha altri punti estremi relativi.

TEOREMA DI DINI

ESERCIZIO 1. Dimostrare che l'equazione $3y^3 = 6xy - 3x^2$ definisce implicitamente in un intorno di $(1;1)$ una funzione $y=g(x)$. Stabilire poi se $x_0=1$ è un estremo locale di $g(x)$ e se la funzione $g(x)$ è invertibile in un intorno di $x_0 = 1$.

SOL. $3y^3 = 6xy - 3x^2$ $\underbrace{3y^3 - 6xy + 3x^2}_{g(x,y)} = 0$

$g(x,y)$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $(1,1)$ se:

1) $g(1,1) = 0$ $g(1,1) = 3 - 6 + 3 = 0$ VER. 1.

2) $g(x,y) \in C^1$ lo è perché è un polinomio
VER. 2.

3) $g_y(1,1) \neq 0$ $g_y(x,y) = 9y^2 - 6x$
VER. 3.
$g_y(1,1) = 9 - 6 = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \quad y = y(x) \quad e \quad y'(1) = \frac{-g_x(1,1)}{g_y(1,1)} = 0$$

$$g_x(x,y) = -6y + 6x \qquad g_x(1;1) = 0$$

NATURA DEL PUNTO $y_0 = y(x_0)$

Al momento sappiamo che $y(1) = 1$ e che $y'(1) = 0$.

- $3y^3 - 6xy + 3x^2 = 0 \qquad (\overset{1}{x_0}, \overset{1}{y(x_0)})$

$$3y^3(x) - 6x\,y(x) + 3x^2 = 0$$

$$\rightarrow 9y^2(x)\,y'(x) - 6y(x) - 6x\,y'(x) + 6x = 0 \qquad (*)$$

sostituisco $x_0 = 1$:

$$9\cdot 1\cdot y'(1) - \cancel{6\cdot 1} - 6\cdot y'(1) + \cancel{6} = 0$$

$$9y'(1) - 6y'(1) = 0 \xrightarrow[\text{confermo}]{} \boxed{\cancel{3}\,y'(1) = 0}$$

Derivo (*):

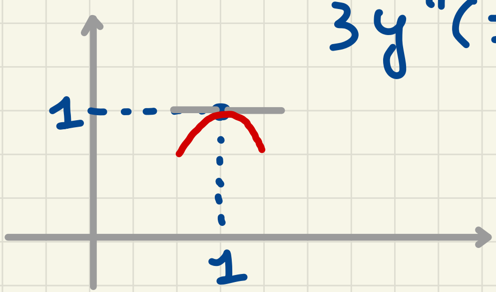
$$18yy'^2 + 9y^2y'' - 6y' - 6y' - 6xy'' + 6 = 0$$

sostituisco $x_0 = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$:

$$9y'' - 6y'' + 6 = 0$$

$$3y''(1) = -6 \longrightarrow \boxed{y''(1) = -2} < 0$$

NON CONVESSA



In $x_0 = 1$ $y = y(x)$ ammette un punto di minimo relativo e non è invertibile.

ESERCIZIO A CASA: verificare che l'eq.
$x e^y + y e^x = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.
Calcolare $g'(0)$, $g''(0)$ e scrivere lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine di g.
[RISP. $P_2(x) = 2x^2 - x$].

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

ESERCIZIO 2. Determinare i valori di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ al variare di (x,y) in

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{VINCOLO DI DISUGUAGLIANZA}} \}.$$

SOL.

A è chiuso e limitato $\Rightarrow$ f ammette max e min assoluti per il Teorema di Weierstrass.

$$\nabla f(x,y) = (2x+y \, ; \, x+2y) \qquad \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow (0;0)$$

Il punto critico $(0;0)$ è **INTERNO** ad A ($(0;0)$ è un candidato ad essere max o min assoluto).

All'interno di A non ci sono altri candidati (f è differenziabile dentro ad A)

Studio i candidati sul bordo di A:

è possibile parametrizzare il bordo di A:

$$\partial A = (\overset{x}{\cos t}, \overset{y}{\operatorname{sen} t}) \qquad t \in [0; 2\pi]$$

$$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t$$

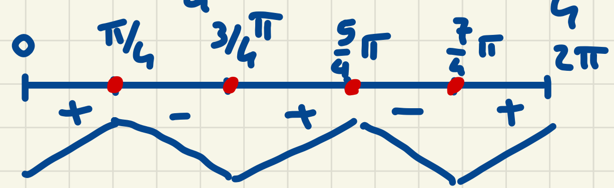
$$= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

$$g'(t) = \cos 2t \qquad \cos 2t = 0 \qquad 2t = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

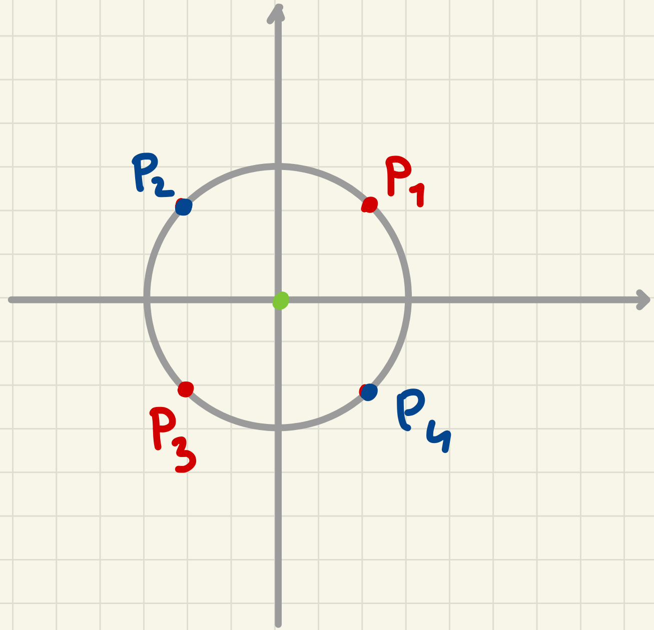
$$t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \qquad t_2 = \frac{5}{4}\pi \qquad t_3 = \frac{3}{4}\pi \qquad t_4 = \frac{7}{4}\pi$$

$\cos 2t > 0$



I candidati ad essere max/min assoluti sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



$$f(0;0)=0$$

$$f\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{P_1}=\frac{3}{2}$$

$$f\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{P_2}=\frac{1}{2}$$

$$f\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{P_3}=\frac{3}{2}$$

$$f\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{P_4}=\frac{1}{2}$$

- $\underset{A}{\mathrm{Max}}\, f=\frac{3}{2}$ in P_1 e P_3
- $\underset{A}{\min}\, f=0$ in $(0;0)$.

(ESAME 28/8/2018 ES. 1 DOM. D)

ESERCIZIO 3. Si determinino max e min assoluti della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x+y+2(x^2+y^2)-2=0}_{\text{VINCOLO DI UGUAGLIANZA}}\}$

SOL.

A è una circonferenza (chiuso e limitato), f continua $\underset{\text{T.W.}}{\Longrightarrow}$ f ammette max-min. assoluti.

Uso la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange

VINCOLO: $g(x,y) = x+y+2(x^2+y^2)-2 = 0$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) =$$
$$= x^2+y^2-\lambda(x+y+2x^2+2y^2-2)$$

$$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x - \lambda(1+4x)$$

$$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y - \lambda(1+4y)$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = -(x+y+2x^2+2y^2-2)$$

$$\nabla\mathcal{L} = (0;0;0)$$

$$-\begin{cases} 2x-\lambda-4\lambda x=0 \\ 2y-\lambda-4\lambda y=0 \\ x+y+2x^2+2y^2-2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x-\cancel{2}y-\overset{2}{\cancel{4}}\lambda x+\overset{2}{\cancel{4}}\lambda y=0 \\ '' \\ '' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)-2\lambda(x-y)=0 \\ '' \\ '' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-y)(1-2\lambda)=0 \quad \begin{matrix} x=y \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{matrix} \\ '' \\ '' \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \cancel{2y} - \frac{1}{2} - \cancel{2y} = 0 \to \text{IMP.} \\ // \end{cases}$$

$\lambda = 1/2$ non fornisce candidati

$$\bullet \begin{cases} y = x \\ // \\ 2x + 4x^2 - 2 = 0 \to 2x^2 + x - 1 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{matrix} -1 \\ 1/2 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -2 - \lambda + 4\lambda = 0 \to \lambda = 2/3 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow (-1, -1) \text{ è un candidato.}$$

$$\begin{cases} y = 1/2 \\ \lambda = 1/3 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (1/2 ; 1/2) \text{ è un candidato.}$$

$f(x,y) = x^2+y^2 \qquad \nabla f(2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Il punto $(0,0)$ non appartiene al vincolo e non è un candidato.

$$f(1/2 ; 1/2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \min_A f = 1/2 \text{ in } \left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right).$$

$$f(-1,-1) = 1+1 = 2 \qquad \max_A f = 2 \text{ in } (-1;-1).$$

ESERCIZIO 4. Trovare, quando esistono, i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2$

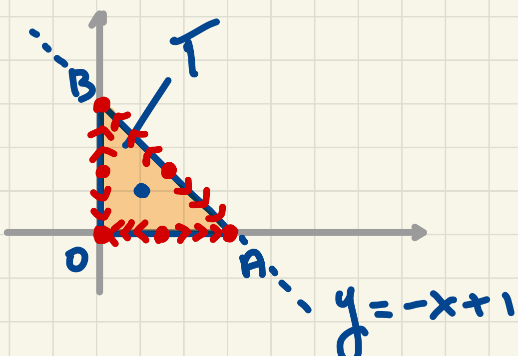
1) Nel triangolo chiuso T di vertici $(0;0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$

2) Sul ramo di iperbole $xy = 1$ contenuto nel primo quadrante

3) Cosa si può dire sugli estremi globali in tutto $\mathbb{R}^2$?

SOL.

1)



$$f(x,y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2$$

$$\nabla f(x,y) = (4x+2y-2;\ 2x+4y-2)$$

$$f_x(x,y) = 2x+2(1-x-y)(-1) =$$
$$= 2x-2+2x+2y =$$
$$= 4x+2y-2$$

$$f_y(x,y) = 2x+4y-2$$

$$\begin{cases} 4x+2y-2=0 \\ 2x+4y-2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$ è interno a T

$\Rightarrow (1/3; 1/3)$ è cand.

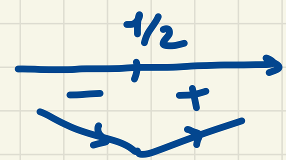
I punti O, A e B sono candidati ad essere max/min assoluti.

$$\overline{OA} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0 \,,\ 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$g_1(x) = f(x,0) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$g_1'(x) = 4x - 2 \Rightarrow g_1'(x) = 0 \iff x = 1/2$$

$$g_1'(x) > 0 \rightarrow x > 1/2$$



Il candidato è $(1/2 ; 0)$

$$\overline{AB} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = -x+1 \,,\ 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$g_2(x) = f(x; -x+1) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

come prima $g_2'(x)=0 \iff x = 1/2$

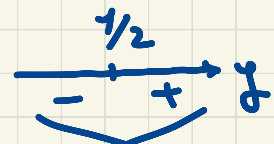
Il candidato è $(1/2; 1/2)$

$$\overline{OB} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x=0 \ , \ 0\le y\le 1\}$$

$h(y) = f(0;y) = 2y^2 - 2y + 1$ $\qquad h'(y) = 4y-2$

$h'(y)=0 \iff y = 1/2$

$h'(y)>0 \rightarrow y > 1/2$



Il candidato è $(0; 1/2)$

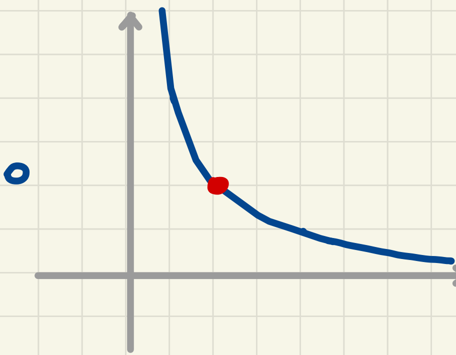
Rimanendo in T ci sono i seguenti punti candidati ad essere max/min assoluti:

$$\begin{array}{ccccccc} (0;0) & (\frac{1}{2};0) & (1,0) & (\frac{1}{2};\frac{1}{2}) & (0,1) & (0,\frac{1}{2}) & (\frac{1}{3};\frac{1}{3}) \\ \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \end{array}$$

$\max_T f = 1$ in $(0;0)$ $(1,0)$ e $(0,1)$

$\min_T f = \frac{1}{3}$ in $(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

2) $xy = 1$ VINCOLO: $g(x,y) = xy - 1 = 0$



$f(x,y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2 - \lambda(xy-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x: 4x+2y-2-\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_y: 4y+2x-2-\lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4x-4y+2y-2x-\lambda y+\lambda x = 0 \\ = \\ = \end{cases}$$

$$2x-2y+\lambda(x-y)=0 \qquad (x-y)(2+\lambda)=0$$

$$x=y \qquad \lambda=-2$$

$$\begin{cases} x=y \\ = \\ x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ \lambda = \ldots \text{c'è!} \\ x=\pm 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1;1) \\ \cancel{(-1;-1)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda=-2 \\ 4y+2x-2+2x=0 \longrightarrow y=-x+1/2 \\ x(-x+1/2)=1 \ldots \Delta<0 \text{! IMP.} \end{cases}$$

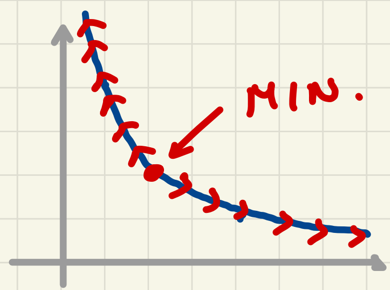
L'unico candidato è $(1;1)$

Restringo $f(x,y)$ al vincolo $y = \frac{1}{x}$ e scrivo la funzione

$$g(x) = f\left(x; \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \left(1 - x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \implies f$ è illimitata superiormente.

$\implies$ non ammette massimo



3) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ è il punto critico.

$\nabla f(x,y) = (4x+2y-2 \,;\, 2x+4y-2)$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det H_f(x,y) = 12 > 0$$

$\Rightarrow (1/3 \,;\, 1/3)$ è un minimo RELATIVO.

- f non ha massimo in $\mathbb{R}^2$ (visto prima)
- Il minimo è globale.

ESERCIZIO 5. Trovare max e min assoluti di $g(x,y,z) = x - y + 2z^2$ su $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

SOL.

- g cont., E ch. lim. $\overset{W}{\Longrightarrow}$ $\exists$ max - min assol.

- $\nabla g(x,y,z) = (1,-1,4z) \neq (0,0,0) \rightarrow$ no punti critici.

- BORDO:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x-y+2z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &: \\ \mathcal{L}_y &: \\ \mathcal{L}_z &: \\ \mathcal{L}_\lambda &: \end{aligned} \begin{cases} 1-2\lambda x = 0 \\ -1-2\lambda y = 0 \\ 4z-2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$4z-2\lambda z=0 \rightarrow 2z(2-\lambda)=0 \rightarrow z=0$ oppure $\lambda=2$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 1/4 \\ y = -1/4 \\ z^2 = 1-1/16-1/16 \rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{14}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 1/2\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2} = 1 \rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$C\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ $\quad A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$

$D\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ $\quad B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$

$g(A) = \sqrt{2} \qquad g(B) = -\sqrt{2} \qquad g(C) = \frac{9}{4} \qquad g(D) = 9/4$

$\max\limits_{E} g = \frac{9}{4}$ in C e D

$\min\limits_{E} g = -\sqrt{2}$ in B