ESERCIZIO 1. 23-4-2020

Trovare l'integrale generale dell'equazione (omogenea)

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

SOL.

N.B. Una eq. diff del primo ordine si dice omogenea se può essere scritta come

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \to z = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} = \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}y^2} + \frac{y^{\cancel{3}}}{x\cancel{y^2}} \Rightarrow y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

$$z = \frac{y}{x} \to y = zx \to y' = z'x + z$$

Sostituendo si ottiene che:

$$z'x + \cancel{z} = \frac{1}{z^2} + \cancel{z}$$

$$z'(x)\cdot x = \frac{1}{z^2(x)} \Rightarrow z' = \frac{1}{x\cdot z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z^2} \Rightarrow \int z^2\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{z^3}{3} = \ln|x| + c \Rightarrow z^3 = 3\ln|x| + 3c$$

$$z = \sqrt[3]{3\ln|x| + k}$$

$$y(x) = x\,z(x) = x\sqrt[3]{3\ln|x| + k}, \quad k \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

SOL.

$$\frac{y}{x} = z \rightarrow y = zx \rightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = z(1 + \ln z)$$

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + z \ln z$$

$$\int \frac{dz}{z \ln z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{z \ln z} dz = \int \frac{1/z}{\ln z} dz = \ln|\ln z| \; ; \; \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\ln|\ln z| = \ln|x| + c \qquad x>0$$

$$\ln|\ln z| = \ln x + c \longrightarrow |\ln z| = e^{\ln x}\, e^{c} = A$$

$$|\ln z| = Ax, \quad A>0$$

$$\ln z = kx, \quad k \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$z = e^{kx}$$

$$y = xz = xe^{kx} \qquad k \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Sol. p.d.C.:

$$5 = y(1) = e^{k} \longrightarrow k = \ln 5$$

$$y = xe^{x\ln 5} = xe^{\ln 5^{x}} = x5^{x}$$

$$y(x) = x\cdot 5^{x}$$

ESERCIZIO 3. Si consideri l'eq. differenziale

$$y' = \frac{2y^2}{y^2+1} \qquad (\text{con } y = y(t))$$

1) Applicando il teorema di esistenza e unicità globale, dimostrare che ogni soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2) Determinare le soluzioni che soddisfano

$$y(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(0) = -1$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

SOL.

1) **NOTA.** $y' = f(t,y)$ $(*)$

- $f, f_y \in C^0(\bar{S})$ $\qquad \bar{S} = [a,b] \times \mathbb{R}$

• esistono $h, k \in \mathbb{R}$: $|f(t,y)| < h + k|y|$
$\forall (t,y) \in \bar{S}$ allora ogni soluzione di $(*)$
è definita su tutto $[a;b]$.

$$y' = \underbrace{\frac{2y^2}{y^2+1}}_{f(t,y)}$$

(non dipende da t !)

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\bar{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|f(t,y)| = \left|\frac{2y^2}{y^2+1}\right| = 2\underbrace{\left|\frac{y^2}{y^2+1}\right|}_{<1} \leq \underset{h}{2} + \underset{k}{0}|y|$$

$\forall (t,y) \in \bar{S}$

$\Rightarrow$ la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

2) $y' = \frac{2y^2}{y^2+1}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y^2}{y^2+1}$$

$$dy \cdot \frac{y^2+1}{y^2} = 2\,dt$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = y - \frac{1}{y} = \int 2\,dt = 2t + c$$

$$y - \frac{1}{y} = 2t + c \qquad y \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- $y(0) = 1$ $\qquad y(0) - \frac{1}{y(0)} = \cancel{2 \cdot 0} + c$

$$1 - 1 = c \implies \boxed{c = 0}$$

- $y(0) = -1$ $\qquad -1 + 1 = c \implies \boxed{c = 0}$

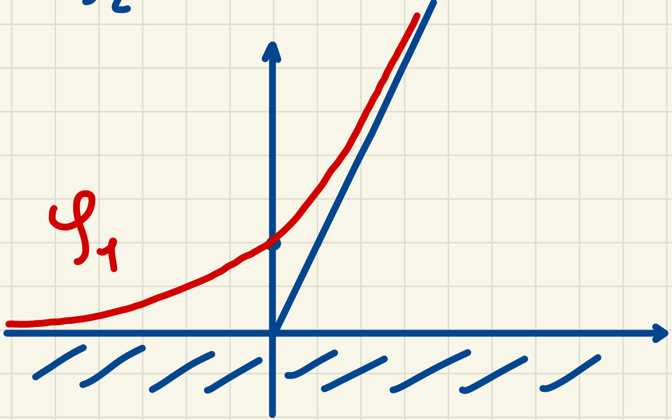
$c = 0 \implies y - \frac{1}{y} = 2t \qquad y^2 - 1 - 2ty = 0$

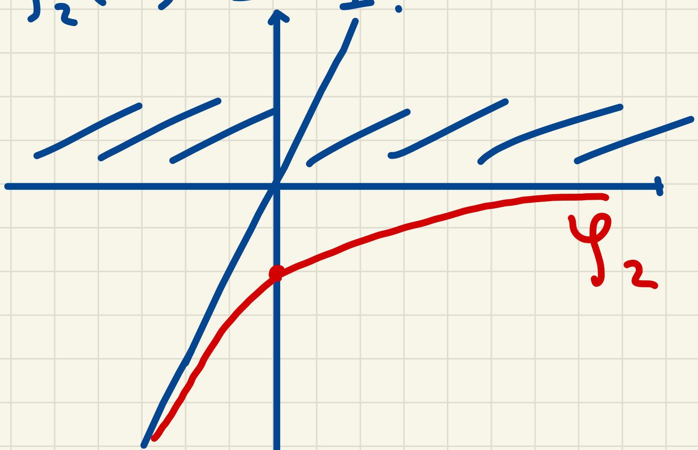
$$y^2 - 2ty - 1 = 0$$

$$y = t \pm \sqrt{t^2+1}$$

$\varphi_1(t) = t + \sqrt{t^2+1} \qquad \varphi_1(0) = 1$

$\varphi_2(t) = t - \sqrt{t^2+1} \qquad \varphi_2(0) = -1.$

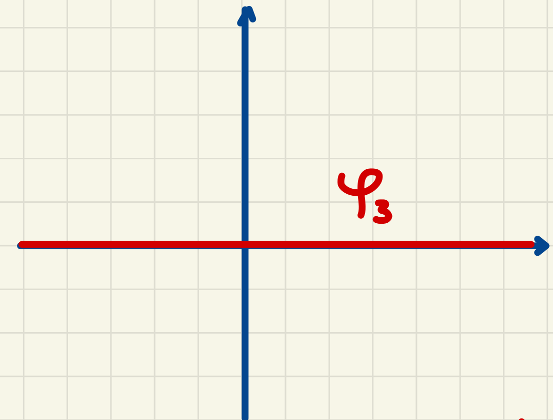




Cerco le sol. costanti di $(*)$:

$$y' = \frac{2y^2}{y^2+1}$$

$$\frac{2y^2}{y^2+1} = 0 \implies y = 0$$ che è la sol. richiesta, infatti $y(0) = 0$.



ESERCIZIO 4 (EQUAZIONI LINEARI DEL I ORDINE)

Determinare l'integrale generale dell'eq.

$$y' = \frac{2}{t} y + t$$

N.B.: $y' + a(t) y = f(t)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-A(t)}\left(c + \int f(t)\, e^{A(t)}\,dt\right)$$

con $\quad A(t) = \int a(t)\,dt.$

SOL.

$$y' - \frac{2}{t}\,y = t \qquad\qquad A(t) = \int -\frac{2}{t}\,dt = -2\ln|t|$$

$$y(t) = e^{+\cancel{2}\ln|t|^2}\left(c + \int t\, e^{-\cancel{2}\ln|t|^2}\,dt\right) =$$

$$= t^2\left(c + \int \cancel{t}\cdot\frac{1}{t^{\cancel{2}}}\,dt\right) =$$

$$= t^2\left(c + \ln|t|\right) = c\,t^2 + t^2\ln|t|, \; c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = c\,t^2 + t^2\ln|t|, \quad c \in \mathbb{R}$$

OSSERVAZIONE. $\left(y' = \frac{2}{t}y + t \rightarrow y' - \frac{2}{t}y = \underbrace{\cancel{t}}_{0} \right)$

EQ. OMOG.

$$y' = \frac{2}{t}y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{t}dt \Rightarrow \ln|y| = \cancel{2}\ln|t|^2 + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\ln t^2}e^c = \underset{k>0}{k}t^2 \Rightarrow y = At^2 \quad A \in \mathbb{R}$$

Cerco una sol. particolare del tipo

$$\varphi(t) = A(t) \cdot t^2$$

$$\varphi'(t) = A'(t)t^2 + A(t)2t$$

Sostituisco:

$$A't^2 + \cancel{A2t} - \cancel{\frac{2}{t}At^2} = t$$

$$A't^2 = t \qquad A't = 1 \qquad A'(t) = \frac{1}{t}$$

$A(t) = \ln|t|$

$$\Rightarrow \quad y(t) = At^2 + t^2 \ln|t|$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

ESERCIZIO 5. Determinare l'integrale generale dell'eq. $y'' - 4y' = t-1$ e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = t - 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

SOL. $y'' - 4y = 0$ $\qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 4 \quad (\Delta > 0)$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm 2.$

L'int. generale dell' eq. omogenea è:

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

Cerco una sol. particolare applicando il

METODO DI SOMIGLIANZA:

non essendo 0 sol. di $p(\lambda)$ allora cerco una sol. particolare del tipo

$$y_p(t) = at + b$$

$$y_p'(t) = a \qquad y''(t) = 0$$

e le sostituisco nell' eq, $y'' - 4y = t - 1$:

$$0 - 4(at + b) = t - 1$$

$$-4at - 4b = t - 1 \quad \Longrightarrow \begin{cases} +\cancel{4}a = -1/4 \\ +\cancel{4}b = +1/4 \end{cases}$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

L'integrale generale è: $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}} \qquad \boxed{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Soluzione del PdC:

$$1 = y(0) = c_1 + c_2 + 1/4$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}$$

$$0 = y'(0) = 2c_1 - 2c_2 - 1/4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ c_1 - c_2 = 1/8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3/4 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{16} \\ \cancel{2}c_1 = \frac{7}{16} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{7}{16} e^{2t} + \frac{5}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4} t + \frac{1}{4}}$$

ESERCIZIO 6. Si determini l'int. gen. dell'equazione $z'' - 10z' + 26z = 0$. Si determini poi l'int. gen. dell'eq.:

$$y'' - 10y' + 26y = -5e^{5x} + 26x$$

SOL.

1) $z'' - 10z' + 26z = 0$ $\qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 26$ $(\Delta < 0)$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 1 \cdot i$

$$z(x) = e^{5x}\left(c_1 \cos 1 \cdot x + c_2 \operatorname{sen} 1 \cdot x \right)$$

2) $y'' - 10y' + 26y = -5e^{5x} + 26x$

$$y_0(x) = e^{5x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \right) \quad (\text{già fatto})$$

Cerco una $y_p(x) = a e^{5x} + bx + c$

$$y_p'(x) = 5a e^{5x} + b$$

$$y_p''(x) = 25a e^{5x}$$

$$25ae^{5x}-10(5ae^{5x}+b)+26(ae^{5x}+bx+c)=-5e^{5x}+26x$$

$$25ae^{5x}-50ae^{5x}-10b+26ae^{5x}+26bx+26c=-5e^{5x}+26x$$

$$ae^{5x}+26bx-10b+26c=-5e^{5x}+26x+0$$

$$\begin{cases} a=-5 \\ b=1 \\ -10+26c=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=1 \\ c=5/13 \end{cases}$$

$$y(x)=e^{5x}(c_1\cos x+c_2\sin x)-5e^{5x}+x+\frac{5}{13}.$$

ESERCIZIO 7. Al variare di $k\in\mathbb{R}$ scrivere l'integrale generale dell'eq.:

$$y''+2ky'-3(2k+3)y=0$$

SOL. $p(\lambda)=\lambda^2+2k\lambda-3(2k+3)$

$$p(\lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2+6k+9} =$$

$$= -k \pm (k+3)$$

Se $k \neq -3$: $\lambda_{1,2} = -k \pm (k+3) \begin{cases} 3 \\ -2k-3 \end{cases}$

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{(-2k-3)t}$$

Se $k = -3$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\Delta = 0$

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$$

ESERCIZIO 8 (METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

Determinare l'int. generale dell'eq.

$$y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x}$$

SOL. $y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda+1)^2 = 0 \iff \lambda = -1 \quad (\Delta = 0)$

$$z_1(x) = e^{-x} \qquad z_2(x) = x e^{-x}$$

$$y(x) = c_1(x) z_1(x) + c_2(x) z_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1' z_1 + c_2' z_2 = 0 \\ c_1' z_1' + c_2' z_2' = f \quad \left(\frac{\log x}{e^x}\right) \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$\begin{cases} c_1' \cancel{e^{-x}} + c_2' x \cancel{e^{-x}} = 0 \\ -c_1' \cancel{e^{-x}} + c_2' \left(\overset{1}{\cancel{e^{-x}}} - x \cancel{e^{-x}} \right) = \log x \cdot \cancel{e^{-x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' = -x c_2' \\ -\cancel{c_1'} + c_2' - x \cancel{c_2'} = \log x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = -x \log x \\ c_2'(x) = \log x \end{cases}$$

$$c_2(x) = \int \log x \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + k_2$$

$$c_1(x) = \int -x\log x\,dx = -\left\{ \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + k_1 = -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + k_1$$

$$y(x) = c_1(x)\,e^{-x} + c_2(x)\,x e^{-x}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + k_1\right)e^{-x} + \left(x\log x - x + k_2\right)x e^{-x}.$$

EQUAZIONE DI EULERO

$$x^2y'' + axy' + by = f(x)$$

Si sostituisce $x = e^t$ se $x > 0$

$x = -e^t$ se $x < 0$

ESERCIZIO 9. Risolvere l'equazione:

$$x^2 y'' + x y' - y = 1$$

con $x > 0$.

SOL.

$x = e^t$

- $u(t) = \underline{y(e^t)}$ • $u'(t) = e^t y'(e^t) \implies$

$$\implies \underline{y'(e^t)} = \frac{u'(t)}{e^t}$$

- $u''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$

$$\implies e^{2t} y''(e^t) = u''(t) - e^t y'(e^t)$$

$$y''(e^t) e^{2t} = u''(t) - \cancel{e^t} \cdot \frac{u'(t)}{\cancel{e^t}}$$

$$y''(e^t) = \frac{u''(t)}{e^{2t}} - \frac{u'(t)}{e^{2t}}$$

Sostituisco in $x^2 y'' + x y' - y = 1$ $\quad (x = e^t \; !!)$

$$\cancel{e^{2t}} \cdot \frac{u''(t) - \cancel{u'(t)}}{\cancel{e^{2t}}} + \cancel{e^t} \cdot \frac{\cancel{u'(t)}}{\cancel{e^t}} - u(t) = 1$$

$$u''(t) - u(t) = 1$$

OMOGENEA: $\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$

$$u_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

SOL. PART: $u_p(t) = a \qquad u_p' = 0 \qquad u_p'' = 0$

$$-a = 1 \longrightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow u_p(t) = -1$$

L'int. generale è: $\quad u(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - 1$

$(x = e^{t})$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x} - 1$$

OSSERVAZIONE

Le soluzioni di una eq. di Eulero del secondo ordine sono combinazioni lin. di due potenze di x:

$$y = x^{\alpha_1} \qquad y = x^{\alpha_2}$$

con α_1 e α_2 da determinare.

ESERCIZIO 10. Risolvere l'eq.

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \qquad \text{con} \quad x > 0.$$

SOL.

$$x^2 y'' - 4x y' + y = 0$$

$$y = x^\alpha$$
$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$y'' = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}$$

$$x^2 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} - 4x\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) x^\alpha - 4\alpha x^\alpha + x^\alpha = 0$$

$$x^\alpha \left(\alpha(\alpha-1) - 4\alpha + 1 \right) = 0$$

$$\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2}$$