Analisi matematica 2		11 settembre 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di tre variabili :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}z^3$$

a) Scrivere le espressioni del *vettore gradiente* $\nabla f(x,y,z)$ e della *matrice hessiana* $H_f(x,y,z)$ nel generico punto (x,y,z).

b) Trovare i punti critici della funzione e classificarli.

c) Determinare gli *estremi globali* di f nell'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \right\}$$

d) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}z^3 = 2$$

nel punto $(1, -1, 0)$.

2.

a) Definire la nozione di punto di equilibrio (o punto critico) di un sistema autonomo. Trovare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + xy \\ y' = xy^2 + y \end{cases}$$

Studiare la natura dei punti di equilibrio con il metodo di linearizzazione.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = -t\,y + t^2 + 1$$

3.

a) Trovare per quale valore del parametro reale α la forma differenziale

$$\omega_\alpha = \left(\alpha\, y^3 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right) dx + xy^2\, dy$$

è esatta nel suo dominio di definizione (giustificare la risposta).

b) Determinare, per il valore di α trovato, un potenziale.

c) Calcolare $\oint_\gamma \omega_\alpha$ dove γ è la circonferenza di equazione

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

percorsa una volta in senso positivo.

4.

a) Trovare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}(x+1)^n$$

b) Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $\cos x^2$ e spiegare perchè converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Enunciare il teorema di integrazione per serie e verificare che lo si può utilizzare per esprimere l'integrale

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx$$

come somma di una serie numerica. Calcolare i primi 3 termini della serie.

c) Dimostrare che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(3nx)$$

è convergente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e che la sua somma definisce una funzione *continua e periodica*. Determinare il periodo T della funzione.

SOLUZIONI

1.

a) Vettore gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z(1-z)\,\mathbf{k}$$

Matrice Hessiana:

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4z \end{pmatrix}$$

b) Annullando il gradiente, si trovano due punti critici : $P_1(0,0,0)$ e $P_2(0,0,1)$. La matrice Hessiana ha tutti gli autovalori positivi in P_1 e due autovalori positivi e uno negativo in P_2. Dunque P_1 è un minimo locale e P_2 un colle.

c) L'insieme D è la palla di raggio 1 centrata nell'origine; l'unico punto critico di f *all'interno* di D è l'origine (minimo locale) dove $f(0,0,0) = 0$. Gli estremi sulla superficie sferica si possono cercare tra i punti critici vincolati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; in alternativa, si osservi che

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow f(x,y,z) = 1 - \frac{2}{3}z^3$$

per cui la *restrizione* di f sulla superficie assume il valore minimo in $(0,0,1)$ (con $f(0,0,1) = 1/3$) e il valore massimo in $(0,0,-1)$ (con $f(0,0,-1) = 5/3$). Confrontando tuti i valori ottenuti si ricava che il minimo globale di f sulla palla è nell'origine, mentre il massimo è in $(0,0,-1)$

d) Ponendo

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}z^3 - 2\,,$$

l'equazione del piano tangente in $(1,-1,0)$ alla superficie definita implicitamente da

$$g(x,y,z) = 0$$

si scrive nella forma

$$g_x(1,-1,0)\,(x-1) + g_y(1,-1,0)\,(y+1) + g_z(1,-1,0)\,z = 0$$

Poiché le derivate di g sono uguali alle derivate di f calcolate in precedenza, abbiamo subito

$$2(x-1) - 2(y+1) + 0 = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

Si tratta di un piano parallelo all'asse z.

2.

a) I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x + xy = 0 \\ xy^2 + y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(0,0)$ e $(-1,1)$. Per scrivere il sistema linearizzato si calcola la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ y^2 & 2xy+1 \end{pmatrix}$$

Nei punti critici:

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J}(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = v \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in $(1,-1)$ è

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u - v \end{cases}$$

Nel primo caso, la matrice dei coefficienti ha gli autovalori ± 1, quindi l'origine è un *colle* per il sistema linearizzato; nel secondo caso, gli autovalori sono $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, per cui l'origine è un *fuoco stabile* per il sistema linearizzato. In base alla teoria, anche per il sistema non lineare il punto $(0,0)$ è instabile, mentre il punto $(1,-1)$ è un fuoco stabile.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine; l'integrale generale si ottiene applicando la formula risolutiva. In alternativa, osservando che la funzione $\psi(t) = t$ è una soluzione particolare dell'equazione, si può scrivere ogni soluzione nella forma

$$y(t) = z(t) + t$$

dove $z(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea $z' = -tz$. Si ottiene allora

$$y(t) = Ce^{-t^2/2} + t, \qquad C \in \mathbb{R}$$

3.

a) La forma ω_α è definita e di classe $\mathcal{C}^1$ nel semipiano aperto

$$D = \{(x,y) \,|\, x > -1/2\}$$

che è semplicemente connesso. La condizione necessaria e sufficiente perchè sia esatta è allora

$$\partial_y\Big(\alpha\, y^3 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Big) = \partial_x\big(xy^2\big), \qquad \forall\,(x,y) \in D$$

da cui si ottiene

$$3\alpha\, y^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/3$$

b) La funzione

$$U(x,y) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}xy^3, \qquad (x,y) \in D,$$

soddisfa $dU = \omega_{1/3}$.

c) L'integrale richiesto è la circolazione lungo γ del campo vettoriale (piano)

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(\alpha\, y^3 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Big)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$$

Sia

$$B := \{(x,y) \,|\, (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$$

il cerchio racchiuso dalla curva γ. Osserviamo che $B \subset D$; applicando la formula di Gauss-Green abbiamo:

$$\oint_\gamma \omega_\alpha = \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (1 - 3\alpha) \int\!\!\int_B y^2\, dxdy$$

L'integrale si può calcolare con il cambio di variabili

$$x = 1 + \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$\int\!\!\int_B y^2\, dxdy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \rho^3 \sin^2\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Dunque

$$\oint_\gamma \omega_\alpha = (1 - 3\alpha)\frac{\pi}{4}$$

Si osservi che l'integrale si annulla per $\alpha = 1/3$ come previsto dalla teoria.

4.

a) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza $R = 2$, per cui converge (assolutamente) per $-2 < x + 1 < 2$, ovvero $-3 < x < 1$. Agli estremi $x = -3$ e $x = 1$, abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{2^n-1}\, 2^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}\, 2^n$$

che non convergono in quanto il loro termine generale non è infinitesimo.

b) Ponendo $x^2 = t$ e ricordando la serie di Mac Laurin

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

otteniamo

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

Poichè la serie del coseno converge per ogni t, la serie ottenuta converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ (raggio di convergenza $= \infty$). Possiamo allora integrare termine a termine nell'intervallo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \cos x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} - \ldots$$

c) Poiché

$$\frac{1}{n^2}|\cos(3nx)| \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \forall\, n \geq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

la serie converge *totalmente* in $\mathbb{R}$; tutti i termini della serie sono funzioni continue, per cui anche la somma $f(x)$ è una funzione continua per il teorema dello scambio dei limiti. Il periodo di $f(x)$ è uguale al periodo del primo termine della serie $\cos(3x)$, ovvero $T = 2\pi/3$.