- Def. e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue).

$p \in [1, +\infty)$

- Appartenenza a L^p:

$$f \in L^p(E) \overset{\text{per def}}{\Longleftrightarrow} \int_E |f|^p < +\infty.$$

- Convergenza in L^p:

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E), \quad f \in L^p(E), \quad \underbrace{\left(\int_E |f_n - f|^p\right)}_{\substack{\| f_n - f \| \\ \text{dist}(f_n, f)}} \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

Candidato lim: f limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p \overset{?}{=} \int_E \underbrace{\lim |f_n - f|^p}_{0}$$

$\rightsquigarrow$ teo di passaggio al limite sotto integrale.

$$L^\infty(E) :\overset{\text{def}}{=} \{ f : E \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \overbrace{\underset{x \in E}{\text{ess-sup}} |f(x)|}^{\|f\|_\infty} < +\infty \}_{/\sim}$$

$$\underset{x \in E}{\text{ess-sup}} |f(x)| := \min \{ M : |f(x)| \leq M \ \cancel{\forall x \in E} \text{ q.o. } x \in E \}$$

Teorema: $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach

- Appartenenza a L^∞:

$$f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \underset{x \in E}{\text{ess sup}} |f(x)| < +\infty$$

- Convergenza in L^∞:

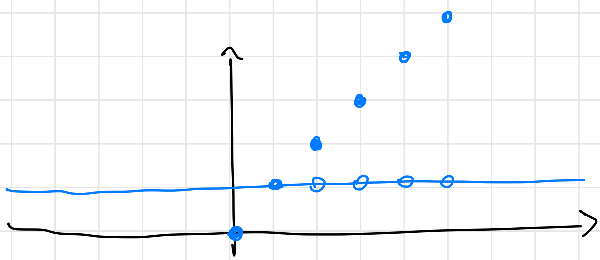
$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E), \ f \in L^\infty(E) : \quad \underset{x \in E}{\text{ess-sup}} |f_n(x) - f(x)| \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

($\Leftrightarrow$ convergente unif. a meno di un insieme di mis. nulla)

Esempi di funzioni in $L^\infty(\mathbb{R})$.

- $f(x) = 1$ $\qquad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ $\qquad (g \sim f)$ $g = f$ q.o.

- $g(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$



g non è limitata

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = +\infty$$

$$g(n) \to +\infty$$

g è essenzialmente limitata

$$\text{ess-}\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < +\infty.$$

$|g(x)| \leq 1$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$

falsa solo per $x \in \mathbb{N}$

$m(\mathbb{N}) = 0$

<u>Oss.</u> $f \in L^p(E)$ $\forall p \in [1, +\infty]$

$$\Rightarrow \lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

(analogo di: in $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \to +\infty} \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} = \max\{|x_1|, |x_2|\} = \|x\|_\infty \,)$$

es. An 1

Risultati di confronto (al variare di p)

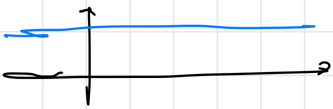
Q: $p \leq q \qquad p, q \in [1, +\infty] \overset{?}{\Longrightarrow} L^p(E) \not\subseteq L^q(E)$, $L^p(E) \not\supseteq L^q(E)$

In generale, la risposta è **NO**

Contraesempi: $L^1(0,+\infty)$, $L^2(0,+\infty)$, $L^\infty(0,+\infty)$

- $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$

$$f(x) \equiv 1, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{|f|}_{1} = \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{|f|^2}_{1} = +\infty$$



- $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty \;; \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |f|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$$

- $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| = +\infty \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty.$$

Disuguaglianza di Hölder

Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Siano $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$, con

$p' :=$ esponente coniugato di p definito da $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}$ (con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$)

(Oss: se $p < +\infty$ $\left[p' = \frac{p}{p-1}\right]$; se $p = +\infty$, $p' = 1$ // $\begin{cases} 1' = \infty \\ 2' = 2 \\ \infty' = 1 \end{cases}$)

Allora:

$$\boxed{\| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_p \, \| g \|_{p'}}$$

Esempi: $f, g \in L^2(E) \Rightarrow \| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_2 \, \| g \|_2$

$f \in L^1(E), \, g \in L^\infty(E) \Rightarrow \| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_1 \, \| g \|_\infty$

(Infatti: $\int_E |fg| \underset{\uparrow}{\leq} \int_E \left(\operatorname*{esssup}_{x \in E} |g(x)|\right) \cdot |f| = \| g \|_\infty \, \| f \|_1$.)

monotonia dell'integrale.

Conseguenze di Hölder sul confronto tra spazi L^p

PROPRIETÀ DI IMMERSIONE

(1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(E) < +\infty$ e sia $q \geq p$

Allora $L^q(E) \subseteq L^p(E)$, e

$$(*) \quad \|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E).$$

In particolare, se $q = +\infty$. ho che $\forall p \in [1, +\infty)$, $L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti:

$$\int_E |f|^p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia} \\ \text{dell'integrale}}}{\leq} \int_E \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f|)^p$$

elevando alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \leq (m(E))^{1/p} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Dim. (di $(*)$ a partire da Hölder) Suppongo $f \in L^q(E)$.

$$\int_E |f|^p = \int_E \underset{\substack{\uparrow \\ L^{q/p}}}{|f|^p} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ L^{(q/p)'}}}{\overset{1}{\chi_E}} \leq \| |f|^p \|_{L^{q/p}} \cdot \| \chi_E \|_{L^{(q/p)'}}$$

uso $q/p \geq 1$

- $f^p \in L^{q/p}$: Infatti $\int_E (|f|^p)^{q/p} = \int_E |f|^q < +\infty$
- $\chi_E \in L^{(q/p)'}$: Infatti $\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} \underset{\uparrow}{=} \int_E 1 = m(E) < +\infty$.

$$\left(\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q-p}{p}} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q-p} = \frac{q}{q-p}.\right)$$

- $\| |f|^p \|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^{\cancel{p}\, q/\cancel{p}} \right)^{\frac{p}{q}} = \left(\int_E |f|^q \right)^{p/q}$
- $\| \chi_E \|_{L^{(q/p)'}} = \left(\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} \right)^{\frac{1}{(q/p)'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$

  ↑ conto sopra per $\left(\frac{q}{p}\right)'$

Quindi:

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_E |f|^q \right)^{p/q}$$

Elevo tutto alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_{L^q(E)}.$$

PROPRIETÀ DI INTERPOLAZIONE

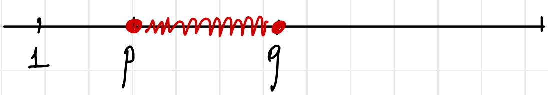
(2) Se $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, con $p \leq q$

$\Rightarrow f \in L^r(E) \quad \forall r \in [p, q]$ e

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)}^{\alpha} \cdot \|f\|_{L^q(E)}^{1-\alpha}$$

dove $\alpha \in (0,1)$ tale che $\quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}$

Es. $f \in L^1(E) \cap L^\infty(E) \Rightarrow f \in L^r(E) \quad \forall r \in [1, +\infty]$



Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E misurabile in $\mathbb{R}^n$)

$\underbrace{C_0^\infty(E)}_{\shortparallel}$ è un sottospazio DENSO in $L^p(E)$.

$\{ f : E \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e aventi supporto compatto in $E \}$

Ovvero:

- $\forall f \in L^p(E)$ $\exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E)$ tale che

  $$\| \varphi_n - f \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

- $\forall f \in L^p(E)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in C_0^\infty(E)$ tale che

  $$\| \varphi - f \|_{L^p} < \varepsilon$$

Oss. Falso nel caso $p = +\infty$.