Equazioni differenziali 2

Equazioni lineari del secondo ordine

Sono le equazioni della forma

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)\,,$$

dove $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) e $g(t)$ sono funzioni continue in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $g(t) = 0$, l'equazione si dice *omogenea*. In questo caso, si usa denotare con $z(t)$ la funzione incognita.

Se $a_2(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, l'equazione si può scrivere in forma normale,

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)\,.$$

Se a e b sono costanti l'equazione si dice a coefficienti costanti.

Per le equazioni del secondo ordine il problema di Cauchy consiste nell'assegnare ad un dato istante t_0 le condizioni iniziali

$$y(t_0) = y_0\,, \qquad y'(t_0) = y_1\,.$$

(Nel caso delle equazioni della dinamica, posizione e velocità iniziali).

Esempi.

L'equazione delle *oscillazioni forzate*

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = f(t)\,, \qquad \delta \geq 0\,, \quad \omega \geq 0\,,$$

modellizza le vibrazioni di un sistema meccanico o la corrente elettrica in un circuito RLC.

Le equazioni della forma

$$t^2 y'' + a\,t\,y' + b\,y = g(t)\,, \qquad a\,,\ b \quad \text{costanti}\,,$$

si scrivono in forma normale dividendo per t^2 nei due intervalli $t > 0$ e $t < 0$. Se $g = 0$, l'equazione omogenea

$$t^2 z'' + a\,t\,z' + b\,z = 0\,,$$

prende il nome di *Equazione di Eulero*.

Le soluzioni dell'equazione omogenea (Hermite)

$$z'' - 2t\,z' + 2n\,z = 0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

definiscono le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico.

Sulle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni lineari del secondo ordine abbiamo:

Teorema.

Siano $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, funzione continue in un intervallo I.
Per ogni $t_0 \in I$ e per ogni y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, il problema

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in $\mathcal{C}^2(I)$.

Osservazioni.

Si tratta di un risultato di carattere *globale* (analogo a quello per le equazioni lineari del primo ordine).

Il teorema seguirà da un risultato generale di esistenza e unicità (globale) per i *sistemi* di equazioni differenziali.

Struttura dell'integrale generale

Denotiamo con $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ l'*operatore differenziale* definito da

$$y(t) \mapsto Ly(t) := y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)\,.$$

La generica equazione del secondo ordine in forma normale si scrive allora $Ly(t) = f(t)$.

L'osservazione fondamentale è che L è un *operatore lineare* tra gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^2(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$. Da questa proprietà si ricava:

<u>Teorema</u>

i) L'insieme delle soluzioni dell'equazione *omogenea* $Lz(t) = 0$ è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$) ;

ii) Data una soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione *completa* ($L\bar{y}(t) = f(t)$) l'integrale generale si ottiene sommando a $\bar{y}(t)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Dimostrazione.
Se $z_1(t)$, $z_2(t)$ soddisfano $Lz_1(t) = Lz_2(t) = 0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$L\big[c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\big] = c_1 Lz_1(t) + c_2 Lz_2(t) = 0\,.$$

Quindi, qualunque *combinazione lineare* di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora soluzione dell'equazione. Questo dimostra i).

Se ora $\bar{y}$ risolve $L\bar{y}(t) = f(t)$ e $z(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea,

$$L\big[\bar{y}(t) + z(t)\big] = L\bar{y}(t) + Lz(t) = f(t) + 0 = f(t)\,.$$

Dunque, aggiungendo a una soluzione dell'equazione completa una soluzione dell'equazione omogenea si ottiene ancora una soluzione dell'equazione completa.
Viceversa, se $y(t) \neq \bar{y}(t)$ è *un'altra soluzione dell'equazione completa*,

$$L\big[y(t) - \bar{y}(t)\big] = Ly(t) - L\bar{y}(t) = f(t) - f(t) = 0\,.$$

Si conclude che *tutte* le soluzioni dell'equazione completa si possono scrivere nella forma $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$, dove $z(t)$ risolve $Lz(t) = 0$. $\diamond$

Teorema.

Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.

Dimostrazione.

Mostreremo che si possono sempre trovare due soluzioni *linearmente indipendenti* dell'equazione $Lz = 0$ tali che ogni altra soluzione è *combinazione lineare* di queste due.

Fissato $t_0 \in I$, siano $z_1(t)$, $z_2(t)$, le soluzioni in I rispettivamente dei problemi di Cauchy

$$Lz_1(t) = 0\,, \quad z_1(t_0) = 1\,,\ z_1'(t_0) = 0\,;$$

$$Lz_2(t) = 0\,, \quad z_2(t_0) = 0\,,\ z_2'(t_0) = 1\,.$$

L'esistenza di tali soluzioni è garantita dal teorema di esistenza e unicità. Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, avremmo $z_2(t) = \lambda z_1(t)$ per ogni $t \in I$; ma $z_1(t_0) = 1$ e $z_2(t_0) = 0$, per cui deve essere $\lambda = 0$; ma allora si avrebbe $z_2(t) = 0$ per ogni $t \in I$, impossibile.

Sia ora $z(t) \in \mathcal{C}^2(I)$ una soluzione dell'equazione omogenea e poniamo $c_1 := z(t_0)$, $c_2 := z'(t_0)$.
Definiamo la funzione

$$\bar{z}(t) := c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Dalla definizione delle soluzioni z_1 e z_2, si vede facilmente che $\bar{z}$ risolve il problema di Cauchy

$$L\bar{z}(t) = 0\,, \qquad \bar{z}(t_0) = c_1\,,\ \bar{z}'(t_0) = c_2\,,$$

cioè *con i medesimi valori iniziali di $z(t)$*.

Ancora per il teorema di esistenza e unicità si conclude che $\bar{z}(t) = z(t)$, ovvero che ogni soluzione di $Lz = 0$ è combinazione lineare di z_1 e z_2. $\diamond$

Dai precedenti teoremi si deduce che per scrivere l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine $Ly = f$ occorre:

a) trovare due soluzioni linearmente indipendenti z_1, z_2 dell'equazione omogenea $Lz = 0$;
b) procurarsi una (qualsiasi) soluzione $\bar{y}$ dell'equazione completa.

L'integrale generale sarà allora $y(t) = \bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$, con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Esempio.

Si consideri l'equazione

$$y''(t) + \frac{1}{t}\, y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = \frac{1}{t^2}\,.$$

L'equazione omogenea associata $z''(t) + \frac{1}{t}\, z'(t) - \frac{1}{t^2}\, z(t) = 0$ ha le due soluzioni indipendenti $z_1(t) = t\,,\ z_2(t) = 1/t,$ come si verifica facilmente. Inoltre la funzione costante $\bar{y} = -1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1\, t + c_2\, \frac{1}{t} - 1.$$

Equazioni a coefficienti costanti

Nel caso delle equazioni *omogenee* a coefficienti costanti

$$z''(t) + a\,z'(t) + b\,z(t) = 0\,, \qquad a,\ b\ \in \mathbb{R}\,,$$

è sempre possibile trovare l'integrale generale.

Cerchiamo una soluzione nella forma $z(t) = e^{\lambda\,t}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendo nell'equazione si trova:

$$e^{\lambda\,t}\big(\lambda^2 + a\,\lambda + b\big) = 0\,.$$

Dunque l'esponenziale è una soluzione (definita in $\mathbb{R}$) se λ è una radice dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0\,.$$

Si distinguono tre casi:

1. $a^2 > 4b \Rightarrow$ due radici reali e distinte λ_1, λ_2; $\big[(-a \pm \sqrt{\Delta})/2\ \big]$
2. $a^2 = 4b \Rightarrow$ una radice reale doppia $\lambda = -a/2$;
3. $a^2 < 4b \Rightarrow$ due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$; $\big[(-a \pm i\sqrt{-\Delta})/2\ \big]$

Nel primo caso abbiamo $z_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $z_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, linearmente indipendenti, per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}\,.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono $z_1(t) = e^{\lambda t}$, $z_2(t) = t\, e^{\lambda t}$, e quindi

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, t\, e^{\lambda t}$$

è l'integrale generale.

Nel terzo caso, le due soluzioni $e^{(\alpha+i\beta)t}$, $e^{(\alpha-i\beta)t}$, sono indipendenti, ma assumono valori complessi.
Ricordando le formule

$$e^{(\alpha\pm i\beta)t} = e^{\alpha t}\big(cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)\big)$$

e la *linearità dell'equazione*, possiamo definire le soluzioni *reali*:

$$z_1(t) = \tfrac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,$$
$$z_2(t) = \tfrac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,,$$

da cui l'integrale generale

$$z(t) = e^{\alpha t}\big(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\big)\,.$$

Esempio

Scriviamo l'integrale generale dell'equazione delle oscillazioni smorzate (libere)

$$z''(t) + 2\delta z'(t) + \omega^2 z(t) = 0 \,,$$

nei tre casi:

1. $\delta > \omega$,
$$z(t) = c_1\, e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2})\, t} + c_2\, e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})\, t}\,;$$
2. $\delta = \omega$,
$$z(t) = c_1\, e^{-\delta\, t} + c_2\, t\, e^{-\delta\, t}\,;$$
3. $\delta < \omega$,
$$z(t) = e^{-\delta\, t}\Big[c_1\, \cos\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\, t\big) + c_2\, \sin\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\, t\big)\Big]\,.$$

Verificare che nell'ultimo caso l'integrale generale si può scrivere

$$z(t) = A\, e^{-\delta\, t}\, \cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\, t + \phi)\,,$$

con A e ϕ costanti arbitrarie (oscillazioni smorzate di frequenza $\sqrt{\omega^2-\delta^2}/2\pi$).

Risoluzione dell'equazione completa

In accordo con la teoria svolta, per ottenere l'integrale generale dell'equazione completa

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)\,,$$

è ora sufficiente trovarne una soluzione particolare.

Se il termine $f(t)$ ha una forma speciale (per esempio un polinomio o un esponenziale) si può cercare una soluzione di forma simile (*metodo di somiglianza*).
Schematicamente (assumendo $b \neq 0$) si procede nel modo seguente:

Se $f(t) = p_r(t)$, polinomio di grado r, si cerca $\bar{y}(t) = q_r(t)$, polinomio dello stesso grado, con coefficienti da determinarsi.

Se $f(t) = f_0\, e^{\lambda t}$, si cerca $\bar{y}(t)$ nella forma

i) $A\, e^{\lambda t}$, se λ non è radice dell'equazione caratteristica;

ii) $A\, t\, e^{\lambda t}$, se λ è radice semplice dell'equazione caratteristica;

iii) $A\, t^2\, e^{\lambda t}$, se λ è radice doppia dell'equazione caratteristica,

con A coefficiente da determinarsi.

Esempi

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 2y = t^2 \, .$$

L'equazione omogenea associata $z'' + 2z' + 2z = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$; le radici sono $\lambda = -1 \pm i$.
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) \, .$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $\bar{y}(t) = At^2 + Bt + C$. Sostituendo $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, nell'equazione si trova

$$2A + 2(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2 \, .$$

Riordinando i termini:

$$(2A - 1)t^2 + (4A + 2B)t + 2(A + B + C) = 0 \, .$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} \, .$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{\alpha t}.$$

L'equazione omogenea associata $z'' - 2z' + 2z = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, con la radice doppia $\lambda = 1$.
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Se $\alpha \neq 1$, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $\bar{y}(t) = Ae^{\alpha t}$. Sostituendo nell'equazione si trova

$$A(\alpha^2 - 2\alpha + 1) e^{\alpha t} = e^{\alpha t}.$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se $A = 1/(\alpha - 1)^2$.
Se $\alpha = 1$ (radice doppia dell'equazione caratteristica) la soluzione va cercata nella forma $\bar{y}(t) = At^2 e^t$.

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$Ae^t \left[(t^2 + 4t + 2) - 2(t^2 + 2t) + t^2 \right] = e^t$$

da cui, semplificando, $A = 1/2$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive allora:

Se $\alpha \neq 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{(\alpha - 1)^2}\, e^{\alpha\, t}\,.$$

Se $\alpha = 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{2}\, t^2\, e^t\,. \quad \diamond$$

Nella ricerca di una soluzione dell'equazione completa, può essere utile il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, valido per le equazioni lineari:

Se $y_1(t)$, $y_2(t)$, risolvono rispettivamente le equazioni

$$y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1 = f_1(t), \qquad y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2 = f_2(t),$$

allora $\bar{y}(t) := k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ (k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$) soddisfa

$$\bar{y}'' + a(t)\bar{y}' + b(t)\bar{y} = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\,.$$

<u>Esercizio</u>

Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + y = t + e^{-t}$.

Equazioni di Eulero

Le equazioni omogenee

$$t^2 z'' + a\, t\, z' + b\, z = 0\,, \qquad a\,,\, b\ \in \mathbb{R}\,,$$

sono tra i pochi esempi di equazioni del secondo ordine a coefficienti *variabili* che si risolvono con metodi elementari.

Se $t > 0$, cerchiamo due soluzioni indipendenti nella forma $z(t) = t^\gamma$, con γ da determinarsi.
Calcolando $z'(t) = \gamma t^{\gamma-1}$, $z''(t) = \gamma(\gamma-1)t^{\gamma-2}$ e inserendo nell'equazione si ottiene

$$t^\gamma\big(\gamma(\gamma-1) + a\gamma + b\big) = 0\,, \qquad \forall\, t > 0\,,$$

da cui l'*equazione caratteristica*:

$$\gamma^2 + (a-1)\gamma + b = 0\,.$$

Ancora si distinguono i tre casi:

due radici reali e distinte γ_1, γ_2, una radice reale doppia γ, due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Nel primo caso abbiamo $z_1(t) = t^{\gamma_1}$, $z_2(t) = t^{\gamma_2}$, per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma_1} + c_2\, t^{\gamma_2}\,.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono $z_1(t) = t^{\gamma}$, $z_2(t) = t^{\gamma} \ln t$, e quindi

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma} + c_2\, t^{\gamma} \ln t$$

è l'integrale generale.

Nel terzo caso, si può ancora passare dalla coppia di soluzioni complesse $t^{(\alpha \pm i\beta)}$, alle soluzioni reali

$$z_1(t) = t^{\alpha} \cos(\beta \ln t)\,,\ z_2(t) = t^{\alpha} \sin(\beta \ln t)\,,$$

da cui l'integrale generale

$$z(t) = t^{\alpha}\big(c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \sin(\beta \ln t)\big)\,.$$

<u>Esercizio</u>

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$t^2 z'' + 3t\, z' + z = 0\,,$$

nell'intervallo $t > 0$.

Metodo di variazione delle costanti

Per le equazioni lineari, esiste un metodo generale per trovare una particolare soluzione dell'equazione *completa* se si conoscono due soluzioni indipendenti dell'equazione *omogenea*: il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

Ci limitiamo a descriverlo su un esempio di interesse fisico: le oscillazioni forzate in assenza di attrito. L'equazione del moto si scrive

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t)\,,$$

dove assumiamo $f(t)$ continua in $\mathbb{R}$, ma di forma qualsiasi.

L'equazione omogenea $z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$ (oscillazioni libere) ha equazione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, da cui le radici $\lambda = \pm i\omega$.
Le due soluzioni reali indipendenti sono: $z_1(t) = \cos(\omega t)$, $z_2(t) = \sin(\omega t)$.

Cercheremo una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = c_1(t)\,\cos(\omega t) + c_2(t)\,\sin(\omega t)\,,$$

dove ora $c_1(t)$, $c_2(t)$ sono *funzioni* incognite, che vanno determinate in modo che $\bar{y}(t)$ risolva l'equazione.

Poiché le incognite sono due, potremo anche imporre una condizione aggiuntiva: richiediamo che nell'espressione della derivata prima

$$\bar{y}'(t) = c_1'(t)\,\cos(\omega t) + c_2'(t)\,\sin(\omega t) - \omega\, c_1(t)\,\sin(\omega t) + \omega\, c_2(t)\,\cos(\omega t)\,,$$

sia

$$c_1'(t)\,\cos(\omega t) + c_2'(t)\,\sin(\omega t) = 0\,.$$

La derivata seconda si scrive allora:

$$\bar{y}''(t) = -\omega c_1'(t)\,\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\,\cos(\omega t) - \omega^2 \big(\, c_1(t)\,\cos(\omega t) + \, c_2(t)\,\sin(\omega t)\big)\,.$$

Osserviamo che l'ultimo termine tra parentesi è esattamente $\bar{y}(t)$. Inserendo nell'equazione, troviamo allora la condizione:

$$-\omega c_1'(t)\,\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\,\cos(\omega t) = f(t)\,.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} \cos(\omega t)\, c_1'(t) \ + \ \sin(\omega t)\, c_2'(t) \ = 0 \\ -\omega\sin(\omega t)\, c_1'(t) + \omega\cos(\omega t)\, c_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione poiché per ogni t il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a $\omega > 0$. Con semplici calcoli si ottiene

$$c_1'(t) = -\frac{1}{\omega} f(t) \sin(\omega t)\,; \qquad c_2'(t) = \frac{1}{\omega} f(t) \cos(\omega t)\,.$$

Possiamo ancora richiedere che $c_1(t)$, $c_2(t)$ si annullino in un punto assegnato, per esempio l'origine. Avremo allora

$$c_1(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega\tau)\, d\tau\,; \qquad c_2(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \cos(\omega\tau)\, d\tau\,.$$

La soluzione $\bar{y}(t) = c_1(t) \cos(\omega t) + c_2(t) \sin(\omega t)$ si scrive allora

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \Big[-\sin(\omega\tau) \cos(\omega t) + \cos(\omega\tau) \sin(\omega t) \Big]\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin[\omega(t-\tau)]\, d\tau\,.$$

<u>Esercizio</u>
Calcolare $\bar{y}(t)$ nel caso $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ (risonanza).