Politecnico di Milano - II Facoltà di Ingegneria - A. A. 2006/2007
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
II appello - Analisi Matematica D (13-7-07) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: __________________

I. QUESITI (fornire la risposta precisa senza scrivere il procedimento seguito)

1. Determinare le soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale:

$$u^{(vi)} + u = \chi_{[-2,2]} * e^{-2|x|} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

Applicando la trasformata di Fourier e utilizzando le note regole di trasformazione, si ottiene

$$(i\xi)^6 \hat{u} + \hat{u} = \frac{2\sin(2\xi)}{\xi} \cdot \frac{4}{4+\xi^2} \ ,$$

da cui

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2\sin(2\xi)}{\xi} \cdot \frac{4}{4+\xi^2} \cdot \frac{1}{1-\xi^6} \ .$$

Poiché tale funzione non appartiene a $C^0(\mathbb{R})$, l'equazione data non ammette soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$.

2. Determinare per quali valori dei parametri reali a, b, c la sequente equazione differenziale ammette una e una sola soluzione π-periodica su $\mathbb{R}$:

$$au'' + bu' + c = e^{\sin(2x)} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

L'equazione data ammette una e una sola soluzione π-periodica se e solo se

$$a(i2k)^2 + b(i2k) + c \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ ,$$

ovvero

$$(c - 4k^2 a) + i(2bk) \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ .$$

La condizione da imporre è quindi: $b \neq 0$ oppure $\frac{c}{4a} \neq k^2$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

3. Al variare di $k \in \mathbb{N}$, siano A_k e B_k gli intervalli di $\mathbb{R}$ definiti rispettivamente da $A_k = (-e^{-k}, 0)$ e $B_k = (0, \log k)$. Si consideri la successione di funzioni $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $u_k(x) = k\chi_{A_k} + k^{-1}\chi_{B_k}$.
(i) Determinare $u(x)$ tale che $u_k \to u$ quasi ovunque su $\mathbb{R}$.
(ii) Stabilire, <u>giustificando</u> la risposta, per quali $p \in [1, +\infty]$ la successione u_k converge a u in $L^p(\mathbb{R})$.

(i) Si ha $u(x) \equiv 0$.
(ii) La successione *non* converge a zero in $L^\infty(\mathbb{R})$ (poiché $\|u_k\|_\infty = k \to +\infty$), mentre converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ (poiché $\int_{\mathbb{R}} |u_k|^p \, dx = k^p e^{-k} + k^{-p} \log k \to 0$).

II. ESERCIZIO (svolgere motivando nel modo più esauriente possibile in tutti i passaggi)

Dato $a \in [0, +\infty)$, poniamo

$$I(a) = VP \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^3 - a^3}\, dx \ .$$

(i) Calcolare $I(0)$.
(ii) Calcolare $I(a)$ per ogni $a > 0$.
(iii) Stabilire se la funzione $a \mapsto I(a)$ è continua da destra nel punto $a = 0$.

(i) Poiché $x \mapsto x^{-3}$ è dispari, si ha $I(0) = 0$.

(ii) Per $a > 0$, $I(a)$ è un integrale soddisfacente le ipotesi di "tipo 4", seguendo la convenzione introdotta nel corso. Applicando il teorema dei residui si ottiene quindi, posto $z_1 = (-1 + i\sqrt{3})a/2$ e $z_2 = a$, e tenuto conto che sono entrambi poli semplici per la funzione integranda,

$$I(a) = 2\pi i \text{Res}\big(\frac{1}{z^3 - a^3}, z_1\big) + \pi i \text{Res}\big(\frac{1}{z^3 - a^3}, z_2\big) = 2\pi i(3z_1)^{-2} + \pi i(3z_2)^{-2} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3a^2} \ .$$

(iii) La funzione $I(a)$ non è continua da destra in $a = 0$ perché segue dai punti precedenti che

$$0 = I(0) \neq \lim_{a \to 0^+} I(a) = -\infty \ .$$