Analisi Matematica 2

Ingegneria Fisica - a.a. 2020/2021

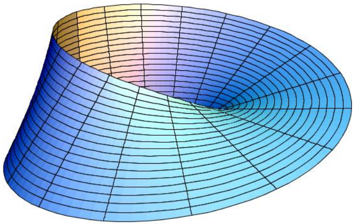
Politecnico di Milano (ITALY)

February 22, 2021

Introduzione al corso

Argomenti:

1. Funzioni di più variabili a valori vettoriali
2. Equazioni differenziali ordinarie
3. Integrali multipli, di linea, di superficie
4. Serie di funzioni



1. Calcolo in più variabili

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Applicazioni: Geometria, Fisica, Ingegneria, Economia,...

Casi di particolare interesse:

- $n = 1,\ m = 2, 3 \Rightarrow$ Curve parametriche
- $n > 1,\ m = 1 \Rightarrow$ Funzioni di più variabili
- $n = m\,(= 2, 3) \Rightarrow$ Trasformazioni di coordinate
- $n = 2,\ m = 3 \Rightarrow$ Superfici parametriche
- $n = 2, 3, 4,\ m = 2, 3 \Rightarrow$ Campi vettoriali

Esempi:

La pressione e la densità (di massa o di carica) in un fluido sono funzioni della posizione (e del tempo)

$$p(x, y, z), \quad \rho(x, y, z) \quad \big(p(x, y, z, t), \quad \rho(x, y, z, t)\big)$$

definite in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^4$) a valori reali.

Campi e.m.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t), \quad \mathbf{B}(x, y, z, t),$$

funzioni da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.

Sistemi di coordinate curvilinee:

- coordinate polari (trasformazioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$)
- coordinate sferiche (trasformazioni da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$)

2. Equazioni Differenziali e modelli deterministici

Modelli di crescita di popolazioni:

$t \mapsto y(t)$, numero di individui in funzione del tempo.

Ipotesi: *tasso di crescita relativa* costante $\beta > 0$ (decadimento se $\beta < 0$):

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \beta \qquad\qquad (y' = dy/dt).$$

Condizioni iniziali ($t = 0$): $y(0) = N_0$.

Per *prevedere* l'evoluzione futura della popolazione occorre risolvere il problema:

$$\begin{cases} y'(t) = \beta\, y(t) \\ y(0) = N_0. \end{cases}$$

Esiste un'unica soluzione ?

Equazioni del moto (Meccanica Classica)

Moto unidimensionale particella di massa m: *oscillazioni forzate*.

$t \mapsto x(t)$, posizione (sull'asse x) in funzione del tempo;
$x'(t)$, velocità, $x''(t)$ accelerazione.

Leggi della dinamica:

$$mx''(t) = f(t) - hx'(t) - kx(t)$$

$f(t)$ forzante esterna, $\quad h > 0$ (attrito), $\quad k > 0$ (elasticità).

Condizioni iniziali ($t = 0$): posizione x_0 e velocità v_0 assegnate. Quindi:

$$mx''(t) + hx'(t) + kx(t) = f(t); \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0\,.$$

Equazioni *lineari* a coefficienti costanti.

(Corso MOOC - Didattica innovativa)

Equazioni *non* lineari: modelli di diffusione delle epidemie.

$t \mapsto I(t) =$ infettivi di una popolazione di N individui.

$t \mapsto S(t) = N - I(t)$ numero di suscettibili al contagio.

Modello $S \to I \to S$, N costante, tasso di virulenza α costante, tasso di guarigione γ costante:

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = \alpha S(t) - \gamma = \alpha\big(N - I(t)\big) - \gamma\,.$$

Dunque:

$$I'(t) = \alpha\, I(t)\,\big(N - I(t)\big) - \gamma\, I(t)\,. \qquad \text{Equazione logistica}$$

Problema: a partire da un dato iniziale assegnato, risolvere per $I(t)$ e studiare il $\lim_{t\to\infty} I(t)$ (evoluzione dell'epidemia).

Modello semplice, esistono versioni più dettagliate (modello SIR).

Sistemi di equazioni: modelli di competizione tra popolazioni.

$t \mapsto x(t)$ numero di prede; $t \mapsto y(t)$ numero di predatori.

Ipotesi: il tasso (relativo) di crescita delle prede x'/x è positivo e costante $(= a)$ in assenza di predatori e decresce proporzionalmente al numero y di predatori.
Il tasso di crescita dei predatori y'/y è negativo $(= -c)$ in assenza di prede e aumenta propozionalmente al numero x di prede.

Si ricava il sistema:

$$\begin{cases} x' = a\,x - b\,xy \\ y' = -c\,y + d\,xy \end{cases} \qquad (\text{Lotka} - \text{Volterra})$$

con a, b, c, d, coefficienti positivi (b e d codificano l'interazione tra le due specie).

Esempio di *sistema autonomo*. Proprietà delle soluzioni dall'analisi delle traiettorie nel piano (x, y) (ritratto di fase).

3. Applicazioni dell'integrazione

Calcolo di:

- ▷ Lunghezze - Aree - Volumi (Geometria);
- ▷ Masse - Baricentri - Momenti di inerzia (Fisica).

Integrali dei campi vettoriali:

- ▷ *Lavoro* di un campo lungo un cammino;
- ▷ *Flusso* di un campo attraverso una superficie.

Relazioni tra integrali di linea, di superficie e di volume (teoremi della divergenza e del rotore).

$$\Downarrow$$

- Leggi di conservazione (massa, carica,...)
- Leggi dell'elettromagnetismo (Gauss, Ampère, Faraday,..)

4. Problemi di approssimazione

Approssimazione di funzioni *regolari* con polinomi di grado arbitrario:

$$\Downarrow$$

i) Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Approssimazione di funzioni periodiche (periodo T) con funzioni trigonometriche elementari:

$$\Downarrow$$

ii) Serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n\, x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n\, x\right)$$

i) Applicazioni al calcolo approssimato di integrali:

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt; \qquad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt\,.$$

Integrali di Fresnel (diffrazione della luce).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Funzione degli errori (Probabilità, Statistica).

ii) Studio di fenomeni oscillatori, decomposizione in 'armoniche elementari' (Acustica, Elettronica, Teoria dei segnali,...)

Impostazione didattica

- Data l'ampiezza del programma e il numero degli argomenti, non sarà possibile dimostrare tutti gli enunciati. Ci limiteremo a casi selezionati, che saranno indicati chiaramente nel programma d'esame.
- In tutti i casi, si cercherà comunque di mettere in luce le *idee principali* della dimostrazione (sovente di tipo fisico-geometrico) e di illustrare il significato del risultato, le sue conseguenze e applicazioni.

Prerequisiti:

Calcolo Differenziale per funzioni di una variabile, Algebra Lineare, Geometria.

Modalità di verifica:

Prove scritte ed eventuale prova orale integrativa. Per altre informazioni vedere il file *Informazioni sul corso* in 'Documenti e media' su BeeP, dove si trovano anche temi d'esame svolti.

Bibliografia:

vedere foglio informativo su BeeP, dove sono presenti anche esercizi svolti e temi d'esame.

Informazioni utili:

i) Il testo base di riferimento (Bramanti, Pagani, Salsa) copre tutto il programma del corso. Si farà riferimento a questo testo anche per le notazioni.

ii) Il testo usato per il corso di Analisi 1 (Pagani, Salsa vol.1) si può utilizzare per approfondimenti sul calcolo differenziale in più variabili.

iii) Il testo *Calcolo Differenziale 2* di Adams, Essex, *non* include alcuni argomenti di equazioni differenziali e serie, ma contiene alcune applicazioni del calcolo differenziale vettoriale che potrebbero essere discusse nel corso.