Politecnico di Milano - II Facoltà di Ingegneria - A. A. 2006/2007
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Preappello - Analisi Matematica D (5-2-07) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: __________________

I. QUESITI (fornire la risposta precisa senza scrivere il procedimento seguito)

1. Classificare le singolarità isolate della funzione di variabile complessa

$$e^{1/(z^2-1)} ,$$

e determinare il raggio di convergenza del suo sviluppo di Laurent di centro $z_0 = 1 + 2i$.

Le singolarità isolate si trovano nei punti $z = \pm 1$ e sono entrambe essenziali.

Il raggio di convergenza dello sviluppo di Laurent è la distanza di z_0 dall'insieme delle singolarità e pertanto è uguale a 2.

2. Si consideri la successione di funzioni definite, per $n \geq 1$, da

$$u_n(x) = e^{-nx} * \chi_{(-1,1)}(x) , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la successione di numeri reali $\{u_n(1)\}$ appartiene a $l^p(\mathbb{N})$.

Un calcolo immediato fornisce $u_n(x) = (1/n)\Big[e^{n(1-x)} - e^{n(-1-x)}\Big]$, da cui $u_n(1) = (1/n)\Big[1 - e^{-2n}\Big]$. Pertanto si ha $\{u_n(1)\} \in l^p(\mathbb{N})$ sse $p \in (1, +\infty]$.

3. Enunciare il teorema di congergenza monotona di Beppo Levi per una successione di funzioni $\{u_n\}$, e fornire un controesempio alla validità del teorema laddove venga meno la (sola) ipotesi $u_n \geq 0$.

Per l'enunciato si veda uno dei testi consigliati. Per il controesempio si può prendere ad esempio

$$u_n = -\chi_{(-\infty,-n)} .$$

II. ESERCIZIO (svolgere motivando nel modo più esauriente possibile in tutti i passaggi)

(i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) := \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \ .$$

(ii) Determinare, se esistono, tutte le soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$, dell'equazione integrale

$$f(x) * u(x) = x f(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

(dove f è la funzione definita al punto (i)).

(i) Si ha che f è la derivata seconda di $1/(1+x^2)$. Pertanto

$$\hat{f}(\xi) = -\pi \xi^2 e^{-|\xi|} \ .$$

(ii) Trasformando l'equazione si ottiene:

$$\hat{f}(\xi)\hat{u}(\xi) = i\Big(\hat{f}(\xi)\Big)' \ .$$

Usando quanto ottenuto al punto (i):

$$-\pi\xi^2 e^{-|\xi|}\hat{u}(\xi) = -\pi i\Big[2\xi e^{-|\xi|} - \xi^2 \mathrm{sign}(\xi) e^{-|\xi|}\Big] \ ,$$

da cui

$$\hat{u}(\xi) = i\Big[\frac{2}{\xi} - \mathrm{sign}(\xi)\Big] \ .$$

Poiché tale funzione non risulta inifinitesima per $\xi \to +\infty$, l'equazione assegnata non ammette soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$.