Esercizi di Algebra Lineare

Claretta Carrara

Indice

Avvertenze importanti.

- L'eserciziario è scaricabile gratuitamente dalla rete. Si tratta semplicemente di una raccolta di esercizi. Sicuramente contiene errori di conto e di scrittura (e forse anche altro).
- Quasi ogni capitolo è così strutturato:
  - Testo degli esercizi,
  - Suggerimenti e brevi spiegazioni sulle tecniche utilizzate per la risoluzione,
  - Soluzione di tutti gli esercizi proposti.
- L'eserciziario contiene sostanzialmente:
  - i *Fogli di esercizi* assegnati e parzialmente svolti nelle ore di esercitazione per i corsi:
    - *Geometria* , c.l. in Ingegneria Edile / Architettura, dall'a.a 2002/03 all'a.a. 2009/2010.
    - *Geometria e Algebra*, c.l. in Ingegneria e Scienze dell'Informazione e dell'Organizzazione - Rovereto, dall'a.a 2002/03, all'a.a. 2006/2007.
    - *Geometria e Algebra*, Ingegneria a-l, a.a. 2010/2011.

    I corsi sono tenuti dal Prof. Alessandro Perotti, ad eccezione di *Geometria e Algebra*, c.l. in Ingegneria e Scienze dell'Informazione e dell'Organizzazione - Rovereto, a.a. 2006/2007, tenuto dal Prof. Gianluca Occhetta.

    Alcuni esercizi (segnalati) sono presi dal libro di testo *M.P. Manara - A. Perotti - R. Scapellato*, Geometria e Algebra Lineare (Teoria ed esercizi), ed. Esculapio, 2002.
  - La maggior parte degli esercizi degli appelli d'esame e delle provette dei precedenti corsi.

CAPITOLO 1

Operazioni tra matrici e n-uple

Esercizio 1.1. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, *si calcoli* AB, BA, $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$.

Esercizio 1.2. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici* A, B *e scalari* λ, $\mu \in \mathbf{R}$, *calcolare* $A+B$, $B-A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2*:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Esercizio 1.3. *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ *per* $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 1.4. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 *e* I_4A^T.

Esercizio 1.5. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ *e* AB^T.

Esercizio 1.6. *Calcolare la potenza* A^3 *della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.7. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

Esercizio 1.8. *Date le seguenti matrici* A, *calcolare, se esiste, l'inversa di* A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Esercizio 1.10. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Esercizio 1.11. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Esercizio 1.12. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.13. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 1.14. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Esercizio 1.15. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 1.16. *Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:*

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \text{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i, j = 1, \dots 6$$

Esercizio 1.17. *Dimostrare che un numero complesso coincidente con il proprio coniugato è necessariamente reale.*

Esercizio 1.18. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.19. *Siano A e B matrici 3×3 tali che*

$$AB = BA \qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

Esercizio 1.20. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.21. *Si dica per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ammette soluzione. In caso positivo si determinino esplicitamente tali soluzioni.

---

1. Soluzioni

Esercizio 1.1. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, calcolare AB, BA, $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$.

Soluzione:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} \\
BA &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} \\
A + B &= \begin{bmatrix} 1 + 3 & 2 + 0 \\ 3 + (-1) & -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
B - A &= \begin{bmatrix} 3 - 1 & 0 - 2 \\ -1 - 3 & 4 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \\
5A + 2B &= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 1.2. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A, B e scalari λ, $\mu \in \mathbf{R}$, calcolare $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Soluzione:

Comiciamo dalla prima coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&3\\1&6\end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=\frac{1}{2}\cdot A+0\cdot B=\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}2&6\\4&12\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&7\\7&7\end{bmatrix} \qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$A+B=\begin{bmatrix}4&0&3\\2&3&4\\1&0&-1\end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-4&5&6\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B=2A-B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\7&-6&-7\\5&0&-2\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}2&0&2\\11&-4&1\\7&0&4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&0&1\\21&-4&-10\\-1&0&-1\end{bmatrix} \qquad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&0&0\\-2&1&5\\0&0&3\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.3. *Date le seguenti matrici:*

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&2&5&-3\\3&-1&0&2\\4&0&0&-2\end{bmatrix}; \qquad A_2=\begin{bmatrix}0&-2&5\\4&-3&2\end{bmatrix}; \qquad A_3=\begin{bmatrix}5&0\\-1&2\\4&5\\5&-1\end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix}3&5\\-1&10\\-2&0\end{bmatrix}; \qquad A_5=\begin{bmatrix}-2&4&1\\-4&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}; \qquad A_6=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-8&5&3\end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i\cdot A_j$ *per* $i,j=1,2,3,4,5,6$.

Soluzione:

Ricordiamo che una matrice è detta $n\times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n\times m$
- B è del tipo $m\times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n\times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1\cdot A_3=\begin{bmatrix}-2&32\\26&-4\\10&2\end{bmatrix}$$

$$A_2\cdot A_1=\begin{bmatrix}14&2&0&-14\\-5&11&20&-22\end{bmatrix} \qquad A_2\cdot A_4=\begin{bmatrix}-8&-20\\11&-10\end{bmatrix} \qquad A_2\cdot A_5=\begin{bmatrix}8&-8&8\\4&4&-8\end{bmatrix}$$

$$A_3\cdot A_2=\begin{bmatrix}0&-10&25\\8&-4&-1\\20&-23&30\\-4&-7&23\end{bmatrix} \qquad A_3\cdot A_6=\begin{bmatrix}-15&5&-5\\-13&9&7\\-52&29&11\\-7&0&-8\end{bmatrix}$$

$$A_4\cdot A_2=\begin{bmatrix}20&-21&25\\40&-28&15\\0&4&-10\end{bmatrix} \qquad A_4\cdot A_6=\begin{bmatrix}-49&28&12\\-77&49&31\\6&-2&2\end{bmatrix}$$

$$A_5\cdot A_1=\begin{bmatrix}18&-8&-10&12\\32&-12&-20&12\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad A_5\cdot A_4=\begin{bmatrix}-12&30\\-24&20\\0&0\end{bmatrix} \qquad A_5\cdot A_5=\begin{bmatrix}-12&8&14\\-8&0&12\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_6\cdot A_1=\begin{bmatrix}2&-7&-15&13\\35&-21&-40&28\end{bmatrix} \qquad A_6\cdot A_4=\begin{bmatrix}-8&-5\\-35&10\end{bmatrix} \qquad A_6\cdot A_5=\begin{bmatrix}2&-8&1\\-4&-12&12\end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 1.4. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 e I_4A^T.

Soluzione:
Notiamo che la matrice quadrata I_4 è detta *matrice identica* di ordine 4. In generale le matrici identiche (dei differenti ordini) vengono indicate I.

$$AI_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_4A^T = I_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A^T$$

$\square$

Esercizio 1.5. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ e AB^T.

Soluzione:

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è detta matrice scalare.

$\square$

Esercizio 1.6. *Calcolare la potenza A^3 della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 1.7. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Soluzione:
Sia B la matrice cercata. Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 e calcoliamo il prodotto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ -3(1-z)+2z=0 \\ -3(-w)+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{3}{5} \\ w=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Di conseguenza perché B verifichi la condizione $AB = I$deve essere

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata.

Metodi più efficaci per calcolare l'inversa di una matrice verranno introdotti successsivamente.

□

Esercizio 1.8. *Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - w = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ -3y + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ -3(1+z) + 2z = 0 \\ -3w + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1}.

□

Esercizio 1.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Soluzione:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$
$$BC = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad CB = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 1.10. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Soluzione:

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ 0 & c + z \end{bmatrix} \in I$$
$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione $2, 1$ si annulli.

□

Esercizio 1.11. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Soluzione:

Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 1.12. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

□

Esercizio 1.13. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Soluzione:

E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \ \Rightarrow \ -A + A + B = -A + C \ \Rightarrow \ B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 1.14. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:
Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite. Procedendo per sostituzione otteniamo

$$\begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ 3y+z=-1 \\ -6y+6z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ z=-3y-1 \\ -3y+3z=-1 \end{cases}$$

Anche senza procedere ulteriormente vediamo che la seconda e quarta equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 1.15. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k = 3$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = 1$ e $A + B = C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

□

Esercizio 1.16. *Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:*

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \textit{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i,j = 1, \dots 6$$

Soluzione:

- Cominciamo a calcolare le somme. Notiamo innazittutto che si possono sommare solo n-uple dello stesso tipo:

$$u_1 + u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}, 0 + (-2)\right) = \left(\frac{3}{2}, -2\right) = u_2 + u_1$$
$$u_3 + u_4 = \left(-3, -\frac{1}{4} - 7\right) = u_4 + u_3$$
$$u_5 + u_6 = \left(-1, 1, \frac{5}{3}, -5\right) = u_6 + u_5$$

Notiamo che la somma di due n-uple è ancora una n-upla, e che la somma gode della proprietà commutativa.

- Calcoliamo ora i prodotti. Notiamo che si può solo moltiplicare una n-upla per la trasposta di una n-upla dello stesso tipo:

$$u_1 \cdot u_2^T = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = u_2 \cdot u_1^T$$
$$u_3 \cdot u_4^T = \left(-3, \frac{1}{4} - 5\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{79}{8} = u_4 \cdot u_3^T$$
$$u_5 \cdot u_6^T = (-1, 1, 2, -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{3} = u_6 \cdot u_5^T$$

Notiamo che il prodotto tra una n-upla e la trasposta di una n-upla da come risultato un numero (uno scalare).

- Calcoliamo infine i prodotti per scalare.

$$0u_1 = 0u_2 = (0, 0), \qquad 0u_3 = 0u_4 = (0, 0, 0), \qquad 0u_5 = 0u_6 = (0, 0, 0, 0),$$
$$2u_1 = (2, 0), \qquad 2u_2 = (1, -4), \qquad 2u_3 = \left(-6, \frac{1}{2}, -10\right),$$
$$2u_4 = (0, -1, -4)\,, \qquad 2u_5 = (-2, 2, 4, -4)\,, \qquad 2u_6 = \left(0, 0, -\frac{2}{3}, -6\right)$$
$$-2u_1 = (-2, 0), \qquad -2u_2 = (-1, 4), \qquad -2u_3 = \left(6, -\frac{1}{2}, 10\right),$$
$$-2u_4 = (0, 1, 4)\,, \qquad -2u_5 = (2, -2, -4, 4)\,, \qquad -2u_6 = \left(0, 0, \frac{2}{3}, 6\right)$$

Notiamo che il prodotto tra uno scalare e una n-upla si può sempre calcolare e da come risultato una n-upla.

□

Esercizio 1.17. *Dimostrare (utilizzando le matrici) che un numero complesso coincidente con il proprio coniugato è necessariamente reale.*

Soluzione:

Sia $Z = aI_2 + bJ$ un generico complesso, dove

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Sappiamo che il suo coniugato è $\bar{Z} = aI_2 - bJ$. Notiamo che

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad \bar{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

Di conseguenza dall'uguaglianza $Z = \bar{Z}$ segue

$$\begin{cases} a = a \\ -b = b \\ b = -b \\ a = a \end{cases} \quad \Rightarrow \; 2b = 0 \; \Rightarrow \; b = 0$$

Quindi $Z = aI_2$ ed è un numero reale.

$\square$

Esercizio 1.18. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

$\square$

Esercizio 1.19. *Siano A e B matrici 3×3 tali che*

$$AB = BA \qquad\qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad\qquad \textit{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

Soluzione:

Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 3×3. Poichè $AB = BA$ per ogni matrice B, in particolare deve valere per

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{13} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Analogamente la relazione $AB = BA$ deve valere in particolare per

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow a_{32} = a_{23} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento con

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow a_{11} = a_{22}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizzando infine

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \qquad \Rightarrow a_{11} = a_{33}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 1.20. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 + 2 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio $x_3 = t$ (Potevamo equivalentemente porre $x_2 = t$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t + 4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzione: ogni valore assegnato a t permette di trovare una delle infinite soluzioni.

□

Esercizio 1.21. *Si dica per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ammette soluzione. In caso positivo si determinino esplicitamente tali soluzioni.

Soluzione:

Il sistema associato a A e b è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ (k+1)x_3 = -1 \end{cases}$$

Cercando le soluzioni dell'ultima equazione incontriamo subito una difficoltà: dovendo dividere per $(k+1)$ dobbiamo imporre la condizione $k + 1 \neq 0$. Dobbiamo quindi distinguere due casi:

- Se $k \neq -1$, otteniamo le soluzioni
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k+2}{k+1} + \frac{2}{k+1} = \frac{k+4}{k+1} \\ x_2 = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases}$$
Quindi per ogni $k \neq -1$ il sistema ammette la sola soluzione
$$\begin{cases} x_1 = \frac{k+4}{k+1} \\ x_2 = \frac{k+2}{k+1} \\ x_3 = -\frac{1}{k+1} \end{cases}$$
- Se $k = -1$, sostituendo tale valore nel sistema otteniamo
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$
Quindi in questo caso il sistema è impossibile.

$\square$

CAPITOLO 2

Rette e piani

Esercizio 2.1. *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta del piano*

(a) *Passante per i punti* $A(1,2)$ *e* $B(-1,3)$.
(b) *Passante per il punto* $C(2,3)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OP} = (-1,2)$.
(c) *Di equazione Cartesiana* $y = 2x+5$. *Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

Esercizio 2.2. *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.
(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 2.3.

a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano* π *passante per i punti* $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ *e* $C(0,1,1)$. *Il punto* $P(0,2,0)$ *appartiene a tale piano?*
b) *Determinare una equazione della retta passante per* A *ortogonale a* π.

Esercizio 2.4. *Sia* r *la retta di* $\mathbf{R}^3$ *passante per i punti* $A(1,-1,2)$ *e* $B(-2,0,1)$, *e sia* s *la retta contenente* $C(1,3,-3)$ *e parallela al vettore* $OD(2,-2,3)$.

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

Esercizio 2.5.

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette* r *e* r' *di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t+3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s+2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Esercizio 2.6. *Determinare la posizione reciproca (parallele, incidenti o sghembe) delle rette* r *e* r' *di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = 2s+1 \end{cases}$$

Esercizio 2.7.

a) *Determinare equazioni parametriche della retta* r *passante per i punti* $A = (2,3,1)$ *e* $B = (0,0,1)$ *e della retta* s *passante per i punti* $C = (0,0,0)$ *e* $D = (4,6,0)$.
b) *Stabilire se* r *e* s *sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente* r *e* s.

Esercizio 2.8. *Si considerino le rette* r_1 *e* r_2 *di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad\qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

a) *Si mostri che le due rette sono incidenti.*
b) *Si determini l'equazione della retta ortogonale a* r_1 *e* r_2 *e passante per il loro punto di intersezione.*

Esercizio 2.9. *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per* $P(1, 1, 1)$ *e incidente* r *e* s*.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per* $C(1, 2, -3)$ *e perpendicolare a* r*.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto* $P = (1, 1, 1)$ *e perpendicolare alle due rette* r *e* s*.*

Esercizio 2.10. *Sia* r *la retta nello spazio passante per i punti* $A = (0, 0, 1)$ *e* $B = (-2, -1, 0)$*. Sia* s *la retta passante per i punti* $C = (1, 1, 1)$ *e* $D = (-1, 0, 0)$*.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano* π *che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano* π *del punto* a)*.*

Esercizio 2.11.

a) *Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta* r *dello spazio passante per i punti* $A = (2, -1, 3)$ *e* $B = (3, 5, 4)$*.*
b) *Stabilire se la retta* r *interseca il piano di equazione cartesiana* $2x - y + z = 0$*.*

Esercizio 2.12. *Sia* r *la retta nello spazio di equazioni cartesiane* $x + z + 1 = 2x + 2y - z - 3 = 0$ *e sia* l *la retta di equazioni parametriche* $x = 2t,\ y = -t,\ z = 0$*.*

a) *Determinare una equazione cartesiana del piano* π *contenente il punto* $P(1, 2, 3)$ *e ortogonale alla retta* l*.*
b) *Stabilire se esiste una retta passante per* P*, contenuta in* π *ed incidente la retta* r*. In caso affermativo determinare equazioni di tale retta.*

Esercizio 2.13. *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per* $P = (1, 1, 1)$ *e perpendicolare ai piani* π *e* π'*.*

Esercizio 2.14.

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per i punti* $A = (2, 1, 3)$ *e* $B = (1, 2, 1)$*.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano* π *parallelo alla retta* r *e all'asse* z *e passante per l'origine.*

Esercizio 2.15.

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *passante per i punti* $A = (-1, 1, 1)$ *e* $B = (2, 0, 1)$ *e perpendicolare alla retta* r *di equazioni cartesiane* $x = y - 1 = 0$*.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano* π' *parallelo al piano* π *e passante per il punto* $C = (0, 1, 2)$*.*

Esercizio 2.16. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s : \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.*
c) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

Esercizio 2.17. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x = 3t + 1, \ y = -t, \ z = 3t + 1 \\ r_2 &: \ x = s, \ y = 2, \ z = s \\ r_3 &: \ x - 1 = z = 0 \end{aligned}$$

a) *Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.*
b) *Si stabilisca se il piano π contiene r_3.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1, 2, 0)$ sul piano π_1.*

Esercizio 2.18. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: \ x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: \ 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Esercizio 2.19. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ 3x + 3y - z = -9 \\ \pi_2 &: \ x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: \ x + y + z = 1 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Esercizio 2.20. *Si considerino la retta r di equazione*

$$r \ : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : \ 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.

a) *Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente calcolare la distanza tra π_k e r.*

Esercizio 2.21. *Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 \ : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 \ : \ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3.*

Esercizio 2.22. *Verificare che i quattro punti*

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (2, 1, 0), \quad P_3 = (-1, 0, -1), \quad P_4 = (0, 0, -1)$$

sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

Esercizio 2.23. *Siano π_1 il piano di equazioni parametriche:*

$$x = 1 + u + v, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 3 + u, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

e π_2 il piano di equazione cartesiana $x - y + z + 1 = 0$.

a) *Si scriva l'equazione cartesiana di π_1.*
b) *Si scrivano le equazioni parametriche della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Detta s la retta di equazioni parametriche: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$, si verifichi che r e s sono sghembe.*

Esercizio 2.24. *Siano r e s le rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano π_1 contenente r e s.*
b) *Si determini l'equazione cartesiana del piano π_2 perpendicolare a r e s e passante per il punto $C(0, 1, 1)$.*

Esercizio 2.25. *Si considerino i tre piani di equazioni*

$$\pi_1: \ x + y + z = 0, \qquad \pi_2: \ x - y - z + 1 = 0, \qquad \pi_3: \ 2x + kz = 1$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei tre piani (paralleli, incidenti in un punto o in una retta ...) al variare di k in $\mathbf{R}$.*
b) *Si determini l'equazione del piano per l'origine e perpendicolare alla retta $r: \pi_1 \cap \pi_2$.*

Esercizio 2.26. *Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni:*

$$r_1: \begin{cases} y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si verifichi che le due rette sono incidenti e se ne determini il punto P di intersezione.*
b) *Si trovi un'equazione parametrica della retta passante per P e ortogonale a r_1 e r_2.*

Esercizio 2.27. *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi: \ x + z = 4, \qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

Esercizio 2.28. *Nello spazio, si considerino le rette r_1, r_2 di equazioni*

$$r_1 \ : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 \ : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *Determinare la loro posizione reciproca.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente le due rette.*
c) *Determinare un'equazione parametrica della retta passante per $P = (-2, 5, 1)$ e perpendicolare alle rette r_1 e r_2.*

Esercizio 2.29. *Nello spazio, si considerino i piani π_1, π_2 di equazioni*

$$\pi_1 \ : \ 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2 \ : 2x + y = 0.$$

a) *Scrivere equazioni parametriche della retta r intersezione di π_1 e π_2.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ai due piani assegnati e passante per il punto $P = (2, 1, 0)$.*
c) *Trovare la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.*

Esercizio 2.30. *Siano r la retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle y e il piano contenente r e s.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (1, 3, 1)$.*

Esercizio 2.31. *Dati i punti i $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y) = (x', y')$ tale che $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.*

a) $O' = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right),\ A' = \left(-1,\ \frac{3}{2}\right),\ B' = \left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$.
b) $O' = (1,\ 0),\ A' = \left(\frac{5 - 2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1 + 4\sqrt{2}}{3}\right),\ B' = \left(\frac{4 - 6\sqrt{2}}{3},\ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right)$.
c) $O' = (0,\ 0),\ A' = \left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right),\ B' = \left(\frac{9}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.
d) $O' = (-2,\ 1),\ A' = \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right),\ B' = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

Esercizio 2.32. *Si considerino i punti del piano $A = (0, 0)$, $B = (2t, 0)$, $C = (0, 1)$ e $A' = (2, 2)$, $B' = \left(2 + \sqrt{3}, 3\right)$, $C' = \left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.*

a) *Per quali valori di t esiste un'isometria diretta che trasforma i punti A, B, C nei punti A', B', C' rispettivamente?*
b) *Per i valori di t determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria f in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che $f(P) = P$.*

---

1. Suggerimenti

- In $\mathbf{R}^2$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^2$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:

$$r : \quad ax + by + k = 0$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è:
$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$
- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :
$$\pi : \quad ax + by + cz = k$$
Il vettore (a, b, c) ha direzione perpendicolare al piano.

- Due rette r_1 e r_2 sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani π_1 e π_2 sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 :\ a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ e $\pi_2 :\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ sono paralleli se i vettori (a_1, b_1, c_1) e $(a_2, b_2.c_2)$ sono proporzionali.
- Una retta r è **perpendicolare** al piano $\pi :\ ax + by + cz = k$ se r ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto scalare** di u e v il **numero**:
$$(u, v) = u \cdot v^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$
- Date due rette r_1 parallela a un vettore u e r_2 parallela a un vettore v, l'**angolo** ϑ tra le due rette è dato da:
$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|},$$
dove $|u|$ =**norma** di u= **lunghezza** di u =$\sqrt{(u, u)} = \sqrt{u \cdot u^T}$.

Isometrie. Le isometrie sono trasformazioni del piano $f(x, y) = f(x', y')$ che mantengono le distanze. Un punto P tale che $P' = f(P) = P$ è detto **punto fisso**; una retta r tale che $r' = f(r) = r$ è detta **retta fissa**. Ci sono quattro tipi di isometrie:

- Isometrie **dirette**: mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:
$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$
Ci sono due tipi di isometrie dirette:
  - **Traslazioni**: $s = 0$. Non hanno punti fissi.
  - **Rotazioni**: $s \neq 0$. Hanno un punto fisso (il centro di rotazione) che si trova risolvendo il sistema
$$\begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases}$$
- Isometrie **inverse**: non mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:
$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$
Ci sono due tipi di isometrie inverse:

- **Riflessioni** o simmetrie rispetto ad una retta. Hanno una retta di punti fisi (l'asse di simmetria) e infinite rette fisse (le rette ortogonali all'asse).
- **Glissoriflessioni**: composizione di una rflessione e di una traslazione parallela all'asse di simmetria. Non hanno punti fissi.

---

2. Soluzioni

Esercizio 2.1. *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta del piano*

(a) *Passante per i punti* $A(1,2)$ *e* $B(-1,3)$.
(b) *Passante per il punto* $C(2,3)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OP} = (-1,2)$.
(c) *Di equazione Cartesiana* $y = 2x+5$. *Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (-2,1)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare t:

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1-2(y-2) \\ t = y-2 \end{cases} \quad \Rightarrow\ x+2y-5=0$$

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} t = 2-x \\ y = 3+2(2-x) \end{cases} \quad \Rightarrow\ 2x+y-7=0$$

(c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro t, ottenendo

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 5+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x,y) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow P(0,5).$$

□

Esercizio 2.2. *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.
(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y-x+z=0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -2)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-y) \\ t = -y \\ z = 2 - 2(-y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione Cartesiana di una retta nello spazio è data mediante l'intersezione di due piani.

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

E' immediato ricavare l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

(c) La cosa più semplice è porre la variabile x uguale al parametro t, ottenendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -(1 + 3t) + t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x, y, z) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow P(0, 1, -1).$$

$\square$

Esercizio 2.3.

a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$. Il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene a tale piano?*

b) *Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π.*

Soluzione:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 0)$$

otteniamo

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall\, t, s \in \mathbf{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana da quella parametrica basta ricavare s e t e procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + (1-z) - s \\ y = 3 - 3(1-z) - 2s \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 5z - 4 = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per i tre punti A, B e C in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} A: & a + 3b + c = d \\ B: & 2a = d \\ C: & b + c = d \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} + 3b + (d - b) = d \\ a = \frac{d}{2} \\ c = d - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{d}{4} \\ a = \frac{d}{2} \\ c = \frac{5}{4}d \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di d. Ponendo $d = 4$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - y + 5z = 4$$

Infine $P(0, 2, 0)$ appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione (Cartesiana o parametrica). Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 - 4 = 0 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione P non appartiene al piano.

Analogamente potevamo sostituire nell'equazione parametrica ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t - s \\ 2 = 3 - 3t - 2s \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - s \\ 2 = 3 - 3 - 2s \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e seconda equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e P non appartiene al piano.

b) Sappiamo che dato un generico piano $ax + by + cz = k$ il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano. Quindi dall'equazione cartesiana del piano ricaviamo che la retta cercata ha direzione $(2, -1, 5)$. Sappiamo inoltre che tale retta passa per $A = (1, 3, 1)$, quindi

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

□

Esercizio 2.4. *Sia r la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia s la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.*

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

Soluzione:

La retta r passante per B e parallela al vettore $\overrightarrow{BA} = (-3, 1, -1)$ ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

Analogamente

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \end{cases} \qquad \forall h \in R$$

a) Osserviamo subito che r e s non sono parallele in quanto i vettori direzione $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{OD}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap s$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, h:

$$\begin{cases} -2-3t = 1+2h \\ t = 3-2h \\ 1-t = -3+3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(3-2h)-2h = 3 \\ t = 3-2h \\ -(3-2h)-3h = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9+6h-2h = 3 \\ t = 3-2h \\ -3+2h-3h = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ t = 3-2h \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

In alternativa potevamo per esempio ricavare l'equazione cartesiana di una delle due rette

$$r: \begin{cases} x = -2-3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y = -2 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

e quindi rislovere il sistema

$$\begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ x+3y = -2 \\ y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ 1+2h+9-6h = -2 \\ 3-2h-3+3h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ -4h = -12 \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè le ultime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

□

Esercizio 2.5.

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t+3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s+2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Soluzione:

a) Osserviamo subito che r e r' non sono parallele in quanto r è parallela al vettore $(2,1,1)$ mentre r' è parallela al vettore $(1,0,1)$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap r'$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, s:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t+1 = 2 \\ t+3 = s+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \\ 1+3 = 2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r (o analogamente di r') il valore di t (o di s) determinato, troviamo che r e r' sono incidenti nel punto $P(2,2,4)$.

b) L'ngolo ϑ formato dalle rette r e r' corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione $u = (2,1,1)$ e $v = (1,0,1)$. Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|}$$

dove

$$|u| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$|v| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2+1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 30^\circ.$$

$\square$

Esercizio 2.6. *Determinare la posizione reciproca (parallele, incidenti o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = 2s+1 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Cominciamo a verificare se le rette sono incidenti risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t+1 = 1 \\ t = 2s+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Poichè il sistema non ammette soluzioni le rette non sono incidenti.

Inoltre la retta r è diretta come il vettore $(2,1,1)$ mentre la retta r' è diretta come il vettore $(1,0,2)$ quindi le due rette non sono parallele tra loro.

Di conseguenza r e r' sono sghembe.

$\square$

Esercizio 2.7.

a) *Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2,3,1)$ e $B = (0,0,1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0,0,0)$ e $D = (4,6,0)$.*

b) *Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.*

SOLUZIONE:

a) Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-3,0) \qquad \overrightarrow{CD} = (4,6,0)$$

Quindi:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4t \\ y = 6t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Poichè i due vettori direzione sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e in particolare le rette sono complanari.

Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,1)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + 2s \\ y = -3t + 3s \\ z = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} x = -2t + 2z \\ y = -3t + 3z \\ z = s \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per tre dei quattro punti, per esempio B, C e D in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} B: & c = d \\ C: & 0 = d \\ D: & 4a + 6b = d \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di b. Ponendo $b = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -3x + 2y = 0$$

□

Esercizio 2.8. *Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni*

$$r_1 \; : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad\qquad r_2 \; : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

a) *Si mostri che le due rette sono incidenti.*
b) *Si determini l'equazione della retta ortogonale a r_1 e r_2 e passante per il loro punto di intersezione.*

SOLUZIONE:

a) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 1 + t + 2t = 1 \\ 1 + t - 2t + 1 + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 3t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $P(1, 0, 1)$.

b) Determiniamo l'equazione parametrica di r_2:

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Quindi r_2 è parallela al vettore $(-1, 1, 2)$.

Per determinare la direzione ortogonale a r_1 e r_2 determiniamo la Il piano π passante per P e contenente r_1 e r_2. π ha direzioni parallele a r_1 e r_2 e quindi ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 0 + 2t + s \\ z = 1 + t + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 3t \\ 2x + z = 3 + 3t \end{cases} \quad x - y + z = 2$$

Di conseguenza la direzione ortogonale a π (e quindi a r_1 e r_2) è $(1, -1, 1)$. Infine la retta cercata ha equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Un metodo alternativo consisteva nel determinare il piano π_1 ortogonale a r_1 e il piano π_2 ortogonale a r_2 passanti per P. Il piano ortogonale a r_1 ha equazione del tipo $x+2y+z=d$. Imponendo il passaggio per P otteniamo $1+1=d$, quindi

$$\pi_1: \ x+2y+z=2$$

In maniera analoga

$$\pi_2: \ -x+y+2z=1$$

La retta cercata è data dall'intersezione di π_1 e π_2:

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ -x+y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Notiamo che anche se l'equazione parametrica è differente, si tratta ovviamente della stessa retta.

□

Esercizio 2.9. *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r: \begin{cases} x+2y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1,1,1)$ e incidente r e s.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1,2,-3)$ e perpendicolare a r.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P=(1,1,1)$ e perpendicolare alle due rette r e s.*

Soluzione:

a) Cominciamo con il determinare se le rette r e s sono incidenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ y-z=0 \\ 2x=0 \\ x+y+z=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \\ 0=0. \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $O(0,0,0)$. E' allora sufficiente determinare l'equazione della retta passante per $P(1,1,1)$ e $O(0,0,0)$. In questo modo tale retta interseca r e s. La direzione è data dal vettore $\overrightarrow{OP}(1,1,1)$, quindi la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

b) Il piano passante per $C(1,2,-3)$ e perpendicolare a r ha equazione del tipo

$$ax+by+cz=k$$

dove $a,\ b,\ c$ corrispondono alle componenti del vettore direzione di r (perpendicolare al piano), mentre il valore di k si determina imponendo il passaggio per C.

Determiniamo quindi l'equazione parametrica di r:

$$r: \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Quindi r è parallela al vettore $(-2,1,1)$, e il piano cercato è del tipo

$$-2x+y+z=k$$

Imponendo poi il passaggio per $C(1,2,-3)$ otteniamo:

$$-2\cdot 1+2+(-3)=k \qquad \Rightarrow \qquad k=-3$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$-2x+y+z=-3$$

c) Scriviamo l'equazione di r e s in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a r ha equazione

$$-2x + y + z = 0$$

Analogamente il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a s ha equazione

$$-y + z = 0$$

La retta cercata è data dall'intersezione dei due piani appena determinati:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che la retta coincide, casualmente, con quella determinata al punto precedente.

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare il piano π contenente r e s. Tale piano ha direzione parallela ai due vettori direzione di r e s e contiene il punto $O(0,0,0)$ di intersezione di r e s:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 0$$

La retta cercata è quindi la retta passante per P e perpendicolare a tale piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Notiamo che si tratta, ovviamente, della stessa retta determinata con l'altro metodo, scritta in maniera differente.

$\square$

Esercizio 2.10. *Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0,0,1)$ e $B = (-2,-1,0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1,1,1)$ e $D = (-1,0,0)$.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto* a).

Soluzione:

a) Due rette sono complanari se sono parallele o incidenti.

Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-1) \qquad \overrightarrow{CD} = (-2,-1,-1)$$

Poichè i due vettori sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e quindi in particolare sono complanari. Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + s \\ y = -t + s \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} t = 1 - z \\ x = -2 + 2z + s \\ y = -1 + z + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ s = x + 2 - 2z \\ y = -1 + z + x + 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

b) Un vettore perpendicolare al piano π ha componenti proporzionali ai cofficienti della x, y e z dell'equazione cartesiana di π, ovvero $(1, -1, -1)$ (o un suo multiplo). Di conseguenza l'equazione della retta cercata è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 2.11.

a) *Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r dello spazio passante per i punti $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, 5, 4)$.*
b) *Stabilire se la retta r interseca il piano di equazione cartesiana $2x - y + z = 0$.*

Soluzione:

a) Il vettore direzione $\overrightarrow{AB}$ é dato da $\overrightarrow{AB} = (-1, -6, -1)$, di conseguenza l'equazione parametrica di r é:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Per determinare l'equazione cartesiana ricaviamo il parametro t per esempio dalla prima equazione e lo sostituiamo nelle altre due ottenendo

$$r : \begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Per calcolare l'eventuale intersezione tra r e il piano assegnato possiamo mettere a sistema l'equazione cartesiana di r con quella del piano:

$$\begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

In questo caso risulta forse più semplice mettere a sistema l'equazione parametrica di r con quella del piano:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 2(2 - t) - (-1 - 6t) + (3 - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ t = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} \\ y = 15 \\ z = \dfrac{17}{3} \\ t = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza la retta r interseca il piano nel punto $P\left(\dfrac{14}{3},\ 15,\ \dfrac{17}{3}\right)$.

□

Esercizio 2.12. *Sia r la retta nello spazio di equazioni cartesiane $x + z + 1 = 2x + 2y - z - 3 = 0$ e sia l la retta di equazioni parametriche $x = 2t,\ y = -t,\ z = 0$.*

a) *Determinare una equazione cartesiana del piano π contenente il punto $P(1,2,3)$ e ortogonale alla retta l.*
b) *Stabilire se esiste una retta passante per P, contenuta in π ed incidente la retta r. In caso affermativo determinare equazioni di tale retta.*

Soluzione:

a) La retta l ha direzione $(2,-1,0)$, quindi il piano ortogonale a l ha equazione del tipo $2x - y = d$. Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene $2 - 2 = d$, quindi $d = 0$ e

$$\pi : \qquad 2x - y = 0$$

b) Il punto P appartiene a π; se la retta r interseca π in un punto A, la retta passante per A e P è la retta cercata. Determiniamo quindi l'eventuale intersezione tra r e π:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \\ 2x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + z = -1 \\ 6x - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + z = -1 \\ 7x = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$$

Determiniamo quindi il vettore direzione $\overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{30}{7}\right) \quad \text{parallelo a} \quad (1,2,6)$$

Infine la retta cercata ha equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - z = 3 \end{cases}$$

□

Esercizio 2.13. *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1,1,1)$ e perpendicolare ai piani π e π'.*

Soluzione:

a) Due piani o sono paralleli o la loro intersezione è una retta. In questo caso il piano π è perpendicolare al vettore $(1,-1,1)$, mentre π' è perpendicolare al vettore $(8,1,-1)$, quindi i piani non sono paralleli tra loro. Determiniamo la loro intersezione mettendo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 8x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi i piani si intersecano nella retta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) La direzione perpendicolare al piano π è data dal vettore $(1,-1,1)$, mentre la direzione perpendicolare a π' è $(8,1,-1)$. Di conseguenza il piano perpendicolare a π e π' passante per il punto $P(1,1,1)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 8s \\ y = 1 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases}$$

Ricavando i parametri s e t e sostituendo si ottiene una equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

In alternativa si può osservare che un piano pependicolare a π e π' è anche perpendicolare alla retta loro intersezione. Di conseguenza il piano cercato è perpendicolare al vettore $(0, 1, 1)$ (direzione della retta intersezione), ovvero ha equazione del tipo $y+z = k$. Imponendo il passaggio per P si ottiene direttamente l'equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

$\square$

Esercizio 2.14.

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti $A = (2, 1, 3)$ e $B = (1, 2, 1)$.*

b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano π parallelo alla retta r e all'asse z e passante per l'origine.*

SOLUZIONE:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$, quindi

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

b) L'asse delle z ha equazione

$$a_z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

quindi il piano π cercato ha come direzioni $(-1, 1, -2)$, $(0, 0, 1)$:

$$\pi : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + y = 0$$

$\square$

Esercizio 2.15.

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per i punti $A = (-1, 1, 1)$ e $B = (2, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta r di equazioni cartesiane $x = y - 1 = 0$.*

b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano π' parallelo al piano π e passante per il punto $C = (0, 1, 2)$.*

SOLUZIONE:

a) La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi r ha direzione $(0, 0, 1)$ e un piano ad essa perpendicolare ha equazione del tipo $z = k$. Imponendo il passaggio per A (o per B) si ottiene $k = 1$. Infine il piano π cercato ha equazione cartesiana $z = 1$. Una equazione parametrica di π è

$$\pi : \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

b) Un piano parallelo al piano π ha equazione del tipo $z = k$. Imponendo il passaggio per C si ottiene $k = 2$. Infine il piano π' cercato ha equazione $z = 2$.

$\square$

Esercizio 2.16. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.*
c) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

Soluzione:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano. L'equazione parametrica di s è:

$$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Quindi r ha direzione $(1, -1, 0)$ mentre s ha direzione $(-1, 1, 2)$ e le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 + t + 1 - t - 1 = 0 \\ 1 + t - 1 + t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 = 0 \\ 3 + 2t = 0 \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.

Di conseguenza r e s sono sghembe.

b) Sia π il piano cercato. Poiché π contiene r, deve essere parallelo a r e passare per un punto di r. Sia $A = (1, 1, 3)$ il punto di r, imponendo inoltre le condizioni di parallelismo alle due rette, otteniamo:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 3 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 2$$

c) Si può procedere in più modi. Forse il più semplice è calcolare il piano π' passante per s e parallelo a r in maniera analoga al punto precedente. Sia $B = (1, 0, -1)$ il punto di s:

$$\pi': \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -t + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Il piano cercato è parallelo a π e π', quindi ha una equazione del tipo $x + y = d$. Inoltre essendo equidistante da r e da s è anche equidistante da π e π', ovvero il valore di d è dato dalla media degli analoghi valori di π e π':

$$d = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infine il piano cercato è

$$x + y = \frac{3}{2}$$

□

Esercizio 2.17. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: x = 3t + 1, \ y = -t, \ z = 3t + 1 \\ r_2 &: x = s, \ y = 2, \ z = s \\ r_3 &: x - 1 = z = 0 \end{aligned}$$

a) *Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.*
b) *Si stabilisca se il piano π contiene r_3.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1, 2, 0)$ sul piano π_1.*

Soluzione:

a) Notiamo che r_1 ha direzione $(3,-1,3)$ e r_2 ha direzione $(1,0,1)$. Le due rette sono comunque complanari in quanto si intersecano:

$$\begin{cases} 3t+1=s \\ -t=2 \\ 3t+1=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-5 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = A(-5,2,-5)$$

Quindi il piano cercato ha equazioni:

$$\pi: \begin{cases} x=-5+3t+s \\ y=2-t \\ z=-5+3t+s \end{cases} \Rightarrow x-z=0$$

b) Un modo per verificare se π contiene r_3 è di controllare se π contiene due qualsiasi punti di r_3. Dall'equazione di r_3 otteniamo per esempio i punti $B(1,0,0)$ e $C(1,1,0)$ di r_3. Quindi π contiene B e C se:

$$\begin{aligned} 1-0=0 \\ 1-0=0 \end{aligned}$$

Siccome le condizioni non sono verificate B e C, e di conseguenza r_3, non sono contenuti in π.

c) Determiniamo la retta s per P ortogonale a π, cioè di direzione $(1,0,-1)$:

$$s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π è quindi l'intersezione di s con π:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ 1+t+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $D\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.

□

Esercizio 2.18. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z-3=0 \\ \pi_2 &: x+y+2=0 \\ \pi_3 &: 3x+3y-z+9=0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.*

b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.*

c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Soluzione:

Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} z-3=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-t-2 \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$$

a) Un modo per verificare se π_3 contiene r è di controllare se π_3 contiene due qualsiasi punti di r. Dall'equazione parametrica di r, assegnando per esempio i valori $t=0$ e $t=1$ otteniamo i punti $A(-2,0,3)$ e $B(-3,1,3)$ di r. Quindi π_3 contiene A e B se:

$$\begin{aligned} 3\cdot(-2)+3\cdot 0-3+9=0 \\ 3\cdot(-3)+3\cdot 1-3+9=0 \end{aligned}$$

Siccome le due condizioni sono verificate A e B, e di conseguenza r, sono contenuti in π_3.

b) Un piano π_4 contenente r contiene i suoi due punti A e B. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per A, B e l'origine. Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è probabilmente considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio pre i tre punti:

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3c = d \\ -3a + b + 3c = d \\ d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{3}{2}c \\ d = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di c. Ponendo $c = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poichè $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (-3, 1, 3)$, otteniamo le equazioni di π_4:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \quad \Rightarrow \ 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta s per l'origine ortogonale a π_1, cioè di direzione $(0, 0, 1)$:

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 è quindi l'intersezione di s con π_1:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P(0, 0, 3)$.

□

Esercizio 2.19. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ 3x + 3y - z = -9 \\ \pi_2 &: \ x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: \ x + y + z = 1 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Soluzione:
Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = -9 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ r : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Un modo per verificare se π_3 contiene r è di controllare se π_3 contiene due qualsiasi punti di r. Dall'equazione parametrica di r, assegnando per esempio i valori $t = 0$ e $t = 1$ otteniamo i punti $A(0, -2, 3)$ e $B(1, -3, 3)$ di r. Quindi π_3 contiene A e B se:

$$0 + (-2) + 3 = 1$$
$$1 + (-3) + 3 = 1$$

Siccome le due condizioni sono verificate A e B, e di conseguenza r, sono contenuti in π_3.

b) Un piano π_4 contenente r contiene i suoi due punti A e B. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per A, B e l'origine. Poichè $\overrightarrow{OA} = (0, -2, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (1, -3, 3)$, otteniamo le equazioni di π_4:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = s \\ y = -2t - 3s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \Rightarrow 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta s per l'origine ortogonale a π_1, cioè di direzione $(3, 3, -1)$:

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 è quindi l'intersezione di s con π_1:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ 3x + 3y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ 9t + 9t + t = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ t = -\frac{9}{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{27}{19} \\ y = -\frac{27}{19} \\ z = \frac{9}{19} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P\left(-\frac{27}{19}, -\frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$.

$\square$

Esercizio 2.20. *Si considerino la retta r di equazione*

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.

a) *Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente calcolare la distanza tra π_k e r.*

SOLUZIONE:

a) Un metodo consiste nel mettere a sistema retta e piano e stabilire per quali k il sistema non ammette soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ (2 - 2k)t = 3k - 2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, e quindi r e π sono paralleli, se $k = 1$.

Un altro metodo consiste nell'imporre l'ortogonalità tra il vettore direzione di r, $(1, -2, 0)$ e il vettore normale al piano, $(2, k, -1)$:

$$((1, -2, 0), (2, k, -1)) = 2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

b) Consideriamo un punto di r, per esempio il punto $A(2, -3, 1)$, e sia s la retta passante per A e perpendicolare a π. Poichè la direzione ortogonale a π è $(2, 1, -1)$, l'equazione parametrica di s è:

$$s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il punto $B = s \cap \pi$ è dato da:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 4 + 4t - 3 + t - 1 + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{6} \\ y = -\frac{17}{6} \\ z = \frac{5}{6} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Quindi $B = s \cap \pi = \left(\frac{14}{6},\ -\frac{17}{6},\ \frac{1}{6}\right)$.

Infine

$$d(\pi, r) = d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

In alternativa si può usare la formula della distanza punto-piano, considerando un qualsiasi punto di r, per esempio $(2, -3, 1)$ e l'equazione del piano $\pi : \ 2x + y - z - 1 = 0$:

$$d(\pi, r) = d(\pi, (2, -3, 1)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\square$

Esercizio 2.21. *Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 \ : \ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3.*

Soluzione:

a) Determiniamo $A = r_2 \cap r_3$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

La retta r è quindi la retta per A di direzione parallela al vettore $(-2, 2)$:

$$r : \begin{cases} x = \frac{3}{5} - 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione cartesiana di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \ x + y - 1 = 0 \Rightarrow \ y = -x + 1$$

Di conseguenza l'equazione cartesiana di r è:

$$y - \frac{4}{5} = -\left(x - \frac{3}{5}\right) \ \Rightarrow \ x + y - \frac{7}{5} = 0$$

b) Utilizzando l'equazione parametrica di s, una direzione perpendicolare a quella di r_1 è data dal vettore $(2, 2)$, quindi:

$$s : \begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

Utilizzando in alternativa l'equazione cartesiana di r_1, la retta s ha coefficiente angolare opposto del reciproco del coefficiente angolare di r_1, quindi 1:

$$s : \ y - \frac{4}{5} = \left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

c) Ricaviamo le equazioni parametriche delle tre rette per avere dei vettori direzione. Sappiamo già che r_1 è parallela a $v_1 = (-2, 2)$, inoltre

$$r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} \qquad\qquad r_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi r_2 è parallela a $v_2(2, 1)$ e r_3 è parallela a $v_3(1, -2)$. Infine

$$\cos(v_1 v_2) = \frac{-4 + 2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Notiamo che i vettori v_2 e v_3 sono ortogonali, quindi l'angolo tra r_2 e r_3 è $\frac{\pi}{2}$.

$\square$

Esercizio 2.22. *Verificare che i quattro punti*

$$P_1 = (1,2,1), \quad P_2 = (2,1,0), \quad P_3 = (-1,0,-1), \quad P_4 = (0,0,-1)$$

sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.

SOLUZIONE:
Sia $ax + by + cz + d = 0$ la generica equazione cartesiana di un piano. Determiniamo il piano π passante per P_2, P_3 e P_4 utilizzando la condizione di passaggio per un punto. Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b + d = 0 \\ -a - c + d = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a - d \\ a = -c + d \\ c = d \end{cases}$$

Ricordando inoltre che l'equazione cartesiana è determinata a meno di un multiplo, possiamo porre arbitrariamente $d = 1$, ottenendo:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi : \ -y + z + 1 = 0$$

A questo punto per stabilire se i quattro punti sono complanari è sufficiente verificare che P_1 passa per π, ovvero che ne soddisfa l'equazione: $-2 + 1 + 1 = 0$.

Notiamo che abbiamo inizialmente scelto P_2, P_3, P_4 solo perché il sistema risultante era più semplice. Era però del tutto equivalente scegliere un'altra terna di punti e verificare poi il passaggio per il quarto punto.

$\square$

Esercizio 2.23. *Siano π_1 il piano di equazioni parametriche:*

$$x = 1 + u + v, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 3 + u, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

e π_2 il piano di equazione cartesiana $x - y + z + 1 = 0$.

a) *Si scriva l'equazione cartesiana di π_1.*
b) *Si scrivano le equazioni parametriche della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Detta s la retta di equazioni parametriche: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$, si verifichi che r e s sono sghembe.*

SOLUZIONE:

a) Per trovare l'equazione cartesiana di π_1:

$$\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = 3 + u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + v \\ x + y = 3 + 2u \\ uz - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 : \quad x + y - 2z = -3.$$

c) Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \underset{II+I}{\Rightarrow} \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = s \\ y = 5 + 3s \\ z = 4 + 2s \end{cases} \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

c) r è parallela a $(1,3,2)$, mentre s è parallela a $(1,-1,2)$, quindi le due rette non sono parallele. Per stabilire se sono secanti o sghembe risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3s \\ 3 + 2t = 4 + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3 + 3t \\ 3 + 2t = 4 + 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 4t = -6 \\ 3 = 6 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione è impossibile il sistema non ha soluzione e le rette sono sghembe.

$\square$

Esercizio 2.24. *Siano r e s le rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano π_1 contenente r e s.*
b) *Si determini l'equazione cartesiana del piano π_2 perpendicolare a r e s e passante per il punto $C(0,1,1)$.*

Soluzione:

a) L'equazione parametrica di s è

$$s: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

quindi r e s hanno entrambe direzione $(2,3,0)$ e sono parallele, quindi complanari. Per determinare un'altra direzione di π_1 consideriamo due qualsiasi punti di r e s e la direzione da essi individuata:

$$A(1,0,1) \in r, \qquad B\left(-\frac{2}{3}, 0, 2\right) \in s \;\Rightarrow\; AB = \left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right) \;\Rightarrow\; (-5,0,3)$$

π_1 è quindi il piano di direzioni $(2,3,0)$ e $(-5,0,3)$ e passante per A:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 - 5t + 2s \\ y = 3s \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}, \;\Rightarrow\; 3x - 2y + 5z = 8$$

In alternativa potevamo osservare dall'inizio che r e s sono parallele in quanto dal testo è chiaro che non sono sghembe e nelle rispettive equazioni contengono rispettivamente le equazioni $z = 1$ e $z = 2$ in contraddizione. Di conseguenza il sistema $r \cap s$ non può avere soluzione e le rette sono parallele. Per determinare direttamente l'equazione cartesiana si può inoltre determinare tre qualsiasi punti, due su una retta e uno sull'altra e imporre al generico piano $ax + by + cz = d$ il pasaggio per i tre punti. Ponendo per esempio $t = 0$ e $t = 1$ nell'equazione di r troviamo i punti $A((1,0,1) \in r$ e $C(3,3,1) \in r$. Dall'equazione di s ponendo per esempio $x = 0$ troviamo il punto $D(0,1,2)$. Imponendo ora il passaggio per i tre punti otteniamo

$$\begin{cases} a + c = d \\ 3a + 3b + c = d \\ b + 2c = d \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = -c + d \\ 3(-c+d) + 3(-2c+d) + c = d \\ b = -2c + d \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -c + d \\ 3(-c+d) + 3(-2c+d) + c = d \\ b = -2c + d \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = -c + d \\ -8c + 5d = 0 \\ b = -2c + d \end{cases}$$

Ponendo per esempio $d = 8$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 3 \\ c = 5 \\ b = -2 \\ d = 8 \end{cases} \;\Rightarrow\; \pi_1: \; 3x - 2y + 5z = 8$$

b) Il piano π_2 cercato è ortogonale a r e s, quindi ha direzione ortogonale a $(2,3,0)$ (il vettore direzione di r e s) e equazione del tipo $2x + 3y = d$. Imponendo il passaggio per C otteniamo

$$\pi_2: \; 2x + 3y = 3$$

$\square$

Esercizio 2.25. *Si considerino i ter piani di equazioni*

$$\pi_1: \; x + y + z = 0, \qquad \pi_2: \; x - y - z + 1 = 0, \qquad \pi_3: \; 2x + kz = 1$$

a) *Si determini l'equazione del piano per l'origine e perpendicolare alla retta $r: \pi_1 \cap \pi_2$.*

b) *Stabilire la posizione reciproca dei tre piani (paralleli, incidenti in un punto o in una retta ...) al variare di k in* $\mathbf{R}$.

Soluzione:

a) Per determinare $r = \pi_1 \cap \pi_2$ mettiamo a sistema i due piani:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ -y-z-y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ 2y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=\frac{1}{2}-z \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \end{cases}$$

Quindi $r = \pi_1 \cap \pi_2$ è una retta di direzione $(0,-1,1)$ e il piano ortogonale cercato, passante per l'origine, ha equazione $-y+z=0$.

b) E' sufficiente stabilire la posizione della retta r trovata al punto precedente rispetto a π_3. Notiamo che una retta e un piano possono essere o incidenti o parallele. Mettiamo a sistema r e π_3:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ 2x+kz=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ -1+kt=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ kt=2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$, otteniamo la soluzione

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{2}{k}=\frac{k-4}{2k} \\ z=\frac{2}{k} \\ t=\frac{2}{k} \end{cases}$$

quindi i tre piani sono incidenti nel punto $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{k-4}{2k}, \frac{2}{k}\right)$.

– Se $k = 0$, il sistema contiene l'equazione $0 = 2$, quindi non ammette soluzione. Di conseguenza i tre piani non si intersecano in quanto π_3 è parallelo alla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

In alternativa per risolvere il punto b) potevamo osservare che una retta e un piano se non sono paralleli sono incidenti. La retta r è parallela al vettore $\overrightarrow{u} = (0,-1,1)$ mentre π_3 è ortogonale al vettore $\overrightarrow{v} = (2,0,k)$. Di conseguenza r e π_3 sono paralleli se e solo se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono ortogonali. Calcolando il prodotto scalare tra i due vettori: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k$, otteniamo che: se $k = 0$ i vettori sono ortogonali, quindi r e π_3 sono paralleli. Se $k \neq 0$ la retta e il piano non sono paralleli, quindi sono incidenti.

□

Esercizio 2.26. *Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni:*

$$r_1: \begin{cases} y+z=2 \\ x=1 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si verifichi che le due rette sono incidenti e se ne determini il punto P di intersezione.*
b) *Si trovi un'equazione parametrica della retta passante per P e ortogonale a r_1 e r_2.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema le due rette per determinarne il punto di intersezione:

$$r_1 \cap r_2: \begin{cases} y+z=2 \\ x=1 \\ x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+1+t=2 \\ 2-2t=1 \\ x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le rette si intersecano nel punto $P = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Per determinare la direzione ortogonale a r_1 e r_2 determiniamo la direzione ortogonale al piano che contiene r_1 e r_2. In realtà è sufficiente determinare un piano parallelo a quello che contiene r_1 e r_2, quindi per semplificare i conti determiniamo il piano π passante per l'origine parallelo a r_1 e r_2. La retta r_1 ha equazione parametrica

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi r_1 e r_2 sono rispettivamente parallele ai vettori $(0, 1, -1)$ e $(-2, 1, 1)$. Il piano π cercato ha quindi equazioni

$$\pi: \begin{cases} x = -2s \\ y = t + s \\ z = -t + s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad x + y + z = 0$$

La retta passante per P ortogonale a r_1 e r_2 ha quindi direzione parallela a $(1, 1, 1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 2.27. *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi: \ x + z = 4, \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

Soluzione:

a) Per trovare B determiniamo l'equazione della retta r passante per A e ortogonale a π, cioè di direzione $(1, 0, 1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto B è dato dall'intersezione tra r e π:

$$B: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s + 1 + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad B = (2, 2, 2)$$

Notiamo che la retta passante per A e B richiesta è la retta r precedentemente trovata.

b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ 1+s = 1+t \\ 2 = 2 \\ 1+s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0,2,0)$$

$$D = s \cap \pi : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x+z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1+t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (4,2,0)$$

c) La retta r è parallela al vettore $u = (1,0,1)$ e la retta CD è parallela al vettore $v = (4,0,0)$. Indicato con ϑ l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

□

Esercizio 2.28. *Nello spazio, si considerino le rette r_1, r_2 di equazioni*

$$r_1 \; : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad r_2 \; : \begin{cases} x+y-2 = 0 \\ z+y-3 = 0 \end{cases}$$

a) *Determinare la loro posizione reciproca.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente le due rette.*
c) *Determinare un'equazione parametrica della retta passante per $P = (-2,5,1)$ e perpendicolare alle rette r_1 e r_2.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema r_1 e r_2 per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \\ 3t+2-t-2 = 0 \\ 1+t+2-t-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile e le rette si intersecano nel punto $A(0,2,1)$.

b) Un'equazione cartesiana di r_1 è

$$\begin{cases} x+3y-6 = 0 \\ y+z-3 = 0 \end{cases}$$

Confrontando le equazioni cartesiane delle due rette si vede che il piano $y+z-3 = 0$ le contiene entrambe.

In alternativa si poteva ricavare l'equazione parametrica di r_2:

$$r_2 \; : \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}$$

Il piano cercato passa per $A = r_1 \cap r_2$ e ha direzioni parallele ai vettori giacitura delle due rette:

$$\begin{cases} x = 3t-s \\ y = 2-t+s \\ z = 1+t-s \end{cases} \Rightarrow y+z-3 = 0$$

c) Una retta ortogonale a r_1 e r_2 è ortogonale al piano trovato al punto precedente che le contiene entrambe, quindi ha direzione $(0, 1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

□

Esercizio 2.29. *Nello spazio, si considerino i piani π_1, π_2 di equazioni*

$$\pi_1 \ : \ 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2 \ : 2x + y = 0.$$

a) *Scrivere equazioni parametriche della retta r intersezione di π_1 e π_2.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ai due piani assegnati e passante per il punto $P = (2, 1, 0)$.*
c) *Trovare la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema π_1 e π_2 per calcolarne l'intersezione:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) Un piano ortogonale ai due piani assegnati è anche ortogonale alla retta r intersezione di π_1 e π_2, quindi ha equazione cartesiana del tipo

$$x - 2y - 5z = d$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $d = 0$, quindi il piano cercato è

$$x - 2y - 5z = 0$$

c) La proiezione ortogonale di un punto P su una retta r è data dall'intersezione tra r e il piano per P ortogonale a r. In questo caso sappiamo già che il piano per P ortogonale a r è il piano $x - 2y - 5z = 0$, quindi si tratta di trovare l'intersezione tra tale piano e r:

$$\begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 4t + 25t = 0 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è l'origina $O = (0, 0, 0)$.

□

Esercizio 2.30. *Siano r la retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e s la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a r e passante per il punto Q di intersezione tra l'asse delle y e il piano contenente r e s.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad r e s e passante per il punto $P = (1, 3, 1)$.*

Soluzione:

Notiamo che la retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e si tratta di una retta parallela ad s.

a) Si tratta di
   – Trovare il piano π passante per r e s,
   – determinare il punto Q intersecando l'asse delle y con il piano π trovato,
   – determinare un'equazione del piano ortogonale a r e passante per Q.

   Poiché r e s sono parallele sono complanari, ma per trovare il piano che le contiene dobbiamo procurarci un'altra direzione. Sia per esempio $C = (1, 1, 1)$ un punto di s, allora $\overrightarrow{CB} = (2, 0, 0)$ e il piano π contenente r e s ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2t + 2s \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad\qquad \pi : \quad y + z = 2$$

   L'asse delle y ha equazione $x = z = 0$, quindi il punto Q è dato da

$$Q : \begin{cases} y + z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = (0, 2, 0)$$

   Infine il piano cercato ha direzione ortogonale a r, quindi al vettore $(2, -1, 1)$ e passa per $Q = (0, 2, 0)$, quindi

$$\pi' : \quad 2x - y + z = -2$$

b) Una retta perpendicolare ad r e s è perpendicolare al piano π trovato al punto precedente che le contiene. Di conseguenza la retta cercata può essere parallela al vettore $(0, 1, 1)$. Equazioni di tale retta sono quindi:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

□

Esercizio 2.31. *Dati i punti i $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, determinare l'isometria $f(x, y) = (x', y')$ tale che $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.*

a) $O' = \left(-3, \ \frac{1}{2}\right), \ A' = \left(-1, \ \frac{3}{2}\right), \ B' = \left(-2, \ \frac{7}{2}\right).$
b) $O' = (1, \ 0), \ A' = \left(\frac{5 - 2\sqrt{2}}{3}, \ \frac{1 + 4\sqrt{2}}{3}\right), \ B' = \left(\frac{4 - 6\sqrt{2}}{3}, \ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right).$
c) $O' = (0, \ 0), \ A' = \left(-\frac{2}{5}, \ \frac{11}{5}\right), \ B' = \left(\frac{9}{5}, \ \frac{13}{5}\right).$
d) $O' = (-2, \ 1), \ A' = \left(\frac{1}{5}, \ \frac{7}{5}\right), \ B' = \left(\frac{3}{5}, \ -\frac{4}{5}\right).$

Soluzione:

a) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

   Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -3 = a \\ \frac{1}{2} = b \\ -1 = 2c - s + a \\ \frac{3}{2} = 2s + c + b \\ -2 = c - 3s + a \\ \frac{7}{2} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 2c - 2 \\ \frac{3}{2} = 4c - 4 + c + \frac{1}{2} \\ -2 = c - 3s + -3 \\ \frac{7}{2} = s + 3c + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 0 \\ c = 1 \\ -2 = -2 \\ \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(x-3,\ y+\frac{1}{2}\right)$$

che è una traslazione e non ha punti fissi. La mancanza di punti fissi si può anche verificare direttamente impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = x-3 \\ y = y+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

che non ha soluzione.

b) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O',\ f(A) = A',\ f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = 2c - s + a \\ \frac{1+4\sqrt{2}}{3} = 2s + c + b \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + a \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = -4s + \frac{2+8\sqrt{2}}{3} - s + 1 \\ c = -2s + \frac{1+4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ s = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} - 2\sqrt{2} + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}y + 1,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$$

che è una rotazione. Possiamo quindi trovare il punto fisso (centro di rotazione) impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y + 1 \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{1}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2\sqrt{2}y = 3 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Quindi il centro di rotazione è il punto fisso $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Notiamo che poiché $O = O'$, il punto O è fisso, quindi si tratta di una riflessione in quanto le glissoriflessioni non hanno punti fissi.

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O',\ f(A) = A',\ f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ \frac{9}{5} = c + 3s + a \\ \frac{13}{5} = s - 3c + b \\ -\frac{2}{5} = 2c + s + a \\ \frac{11}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{9}{5} - 3s \\ \frac{13}{5} = s - \frac{27}{5} - 9s \\ -\frac{2}{5} = 2c + s \\ \frac{11}{5} = 2s - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{5} \\ s = \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$$

che è una riflessione. Possiamo quindi trovare la retta di punti fissi (asse di simmetria) impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

Quindi tutti i punti della retta $y = 2x$ sono punti fissi e $y = 2x$ è l'asse di simmetria.

d) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Si tratta quindi di cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2 = a \\ 1 = b \\ \frac{3}{5} = c + 3s + a \\ -\frac{4}{5} = s - 3c + b \\ \frac{1}{5} = 2c + s + a \\ \frac{7}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{13}{5} - 3s \\ -\frac{4}{5} = s - \frac{39}{5} + 9s + 1 \\ \frac{1}{5} = 2c + s - 2 \\ \frac{7}{5} = 2s - c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{4}{5} \\ s = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} - 2 \\ \frac{7}{5} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2,\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1\right)$$

che è una glissoriflessione. Infatti impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \\ y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 10 \\ 9y = 9y - 25 \end{cases}$$

non otteniamo soluzioni.

□

Esercizio 2.32. *Si considerino i punti del piano* $A = (0,0)$, $B = (2t,0)$, $C = (0,1)$ *e* $A' = (2,2)$, $B' = \left(2+\sqrt{3}, 3\right)$, $C' = \left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) *Per quali valori di* t *esiste un'isometria diretta che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* A', B', C' *rispettivamente?*
b) *Per i valori di* t *determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria* f *in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che* $f(P) = P$.

Soluzione:

a) Un'isometria conserva le distanze, quindi:

$$\begin{aligned} |AB| = |A'B'| &\ \Rightarrow\ |2t| = 2 \ \Rightarrow\ t = \pm 1 \\ |AC| = |A'C'| &\ \Rightarrow\ 1 = 1 \\ |BC| = |B'C'| &\ \Rightarrow\ \sqrt{4t^2+1} = \sqrt{5} \ \Rightarrow\ t = \pm 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza perché esista un'isometria deve essere $t = \pm 1$. Inoltre rappresentando i punti si vede che l'isometria è diretta per $t > 0$, quindi esiste un'isometria diretta che trasforma i punti A, B, C nei punti A', B', C' rispettivamente, per $t = 1$.

In alternativa per rispondere alla domanda a) si poteva impostare il sistema relativo alla generica isometria diretta:

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \\ f(C) = C \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

b) Sia

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

la generica isometria diretta. Imponendo le condizioni $f(A) = A'$ e $f(C) = C'$ (con $t = 1$) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2 = a \\ 2 = b \\ \frac{3}{2} = -s + a \\ 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = c + b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ s = \frac{1}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi l'isometria f cercata è

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 2 \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta di una rotazione antioraria pari ad un angolo di 30°.

c) Imponendo al generico punto $P(x, y)$ la condizione $P' = f(P) = P$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = 4 \\ -x + (2 - \sqrt{3})y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - (2 - \sqrt{3})x \\ -x + 4(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Infine il punto fisso dell'isometria (centro di rotazione) è $P(-1 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

$\square$

CAPITOLO 3

Gruppi, spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme*

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R},\ a, b \neq 0 \right\}$$

forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.

Esercizio 3.2. *Sia* $\mathbf{R}[x]$ *l'insieme dei polinomi a coefficienti in* $\mathbf{R}$.

- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *non è un gruppo rispetto al prodotto di polinomi.*

Esercizio 3.3. *L'insieme*

$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$*? Perchè?*

Esercizio 3.4. *Ripetere lesercizio precedente con l'insieme*

$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

Esercizio 3.5. *Verificare che l'insieme delle matrici* 2×2 *a coefficienti in* $\mathbf{R}$ *è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 3.6. *Verificare che l'insieme* $\mathbf{R}_n[x]$ *è un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathbf{R}[x]$.

Esercizio 3.7. *Sia* S *l'insieme delle matrici* 3×3 *triangolari superiori:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R},\ i, j = 1, 2, 3 \right\}$$

Verificare che S *è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici* 3×3.

Esercizio 3.8. *Sia* G *l'insieme di polinomi*

$$G = \left\{ ax^2 + a \mid a \in \mathbf{Z} \text{ intero relativo } \right\}$$

a) *Mostrare che* G *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
b) *Dire se* G *è un sottospazio vettoriale dello spazio* $\mathbf{R}[x]$*, motivando la risposta.*

Esercizio 3.9. *Si consideri il seguente insieme*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Si verifichi che* I *è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di* I *anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di* I.
b) *L'insieme* I *forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?*
c) *Verificare che* I *non forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.*
d) *L'insieme*

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{N} \right\}$$

forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?

1. Suggerimenti

- **Gruppo.** Un insieme G forma un gruppo rispetto a una sua operazione $\circ$ se
  (1) L'operazione gode della proprietà associativa,
  (2) G è chiuso rispetto a $\circ$, ovvero
  $$x \circ y \in G \qquad\qquad \forall x, y \in G,$$
  (3) Esiste l'elemento neutro e, tale che:
  $$x \circ e = e \circ x = x \qquad\qquad \forall x \in G,$$
  (4) Esiste l'inverso (o opposto) di ogni elemento:
  $$\forall x \in G, \exists\, x^{-1} \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ x^{-1} = e.$$
  In notazione additiva:
  $$\forall x \in G, \exists\, -x \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ (-x) = e.$$
- **Spazio vettoriale**. Uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di due operazioni: la somma interna e il prodotto per scalari, e che gode delle seguenti proprietà:
  (1) V è gruppo commutativo rispetto alla somma, quindi
    - V é chiuso rispetto alla somma.
    - L'elemento neutro 0 appartiene a V.
    - Esiste l'opposto $-v$ di ogni elemento $v \in V$.
    - La somma é commutativa.

  (2) Il prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà:
    - $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$,
    - $k(u + v) = ku + kv$ qualsiasi $k \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u, v \in V$,
    - $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$
    - $1u = u$ qualsiasi $u \in V$.
- **Sottospazio vettoriale**. Un sottinsieme S di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se in S valgono le seguenti proprietá
  (1) Se $u, v \in S$, allora $u + v \in S$.
  (2) Se $u \in S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda u \in S$.
  Notiamo che S é un spazio vettoriale e le proprietá precedenti, unite a quelle ereditate da V, implicano tutte le proprietá di spazio vettoriale. In particolare S contiene lo 0 e l'opposto di ogni suo elemento.

---

2. Soluzioni

Esercizio 3.1. *Dimostrare che l'insieme*
$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R},\ a, b \neq 0 \right\}$$
forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.

SOLUZIONE:

Consideriamo il nostro insieme G e verifichiamo che gode delle proprietá di gruppo:

(1) Il prodotto tra elementi di G gode della proprietà associativa perchè in generale il prodotto tra matrici è associativo.

(2) Per dimostrare la chiusura consideriamo due generici elementi A_1 e A_2 di G e verifichiamo che il loro prodotto è ancora un elemento di G:
$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$
Notiamo che, essendo $a_i \neq 0$ e $b_i \neq 0$, anche $a_1a_2 \neq 0$ e $b_1b_2 \neq 0$. Di conseguenza $A_1A_2 \in G$.

(3) L'elemento
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
che è in generale elemento neutro per il prodotto tra matrici, appartiene a G.

(4) Verifichiamo che qualsiasi sia l'elemento A di G esiste il suo inverso in G. Come suggerisce il punto 2, verifichiamo che

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = I$$

Inoltre, poichè $a, b \neq 0$ ha senso definire $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Infine l'elemento

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

appartiene a G.

□

Esercizio 3.2. *Sia* $\mathbf{R}[x]$ *l'insieme dei polinomi (in una variabile) a coefficienti in* $\mathbf{R}$.

- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
- *Verificare che* $\mathbf{R}[x]$ *non è un gruppo rispetto al prodotto di polinomi.*

Soluzione:

- Consideriamo l'insieme $\mathbf{R}[x]$ con la somma.
  (1) La somma di polinomi gode della proprietà associativa.
  (2) La somma di due polinomi è ancora un polinomio.
  (3) Esiste l'elemento $0 \in \mathbf{R}[x]$, cioè il polinomio con tutti coefficienti nulli, tale che:
  $$p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x) \qquad \forall\, p(x) \in \mathbf{R}[x]$$
  (4) Qualsiasi sia
  $$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbf{R}[x]$$
  esiste l'elemento
  $$q(x) = -a_0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n \in \mathbf{R}[x]$$
  tale che $p(x) + q(x) = 0$
- Consideriamo l'insieme $\mathbf{R}[x]$ con il prodotto. E' sufficiente dimostrare che non verifica una delle proprietà dei gruppi. Notiamo che l'elemento neutro rispetto al prodotto è $p(x) = 1$, e che , per esempio, l'elemento $f(x) = x$ non ammette inverso. Infatti, non esiste $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ tale che
  $$x \cdot p(x) = 1$$

□

Esercizio 3.3. *L'insieme*

$$S = \left\{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$*? Perchè?*

Soluzione:

Verifichiamo le due proprietà dei sottospazi per il nostro insieme S

(1) Presi $u = (x_1, x_2, x_3),\ v = (y_1, y_2, y_3) \in S$ abbiamo che
$$u + v = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$$
e
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$$
Quindi $u + v \in S$.

(2) Qualsiasi sia $u = (x_1, x_2, x_3) \in S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo che
$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$
e
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
Quindi $\lambda u \in S$.

Abbiamo cosí dimostrato che S è sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

□

Esercizio 3.4. *Ripetere lesercizio precedente con l'insieme*
$$S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

SOLUZIONE:
In questo caso S non è sottospazio di $\mathbf{R}^3$ infatti non gode di nessuna delle due proprietà necessarie. Per esempio non è chiuso rispetto alla somma:
$$(1,0,0),\ (0,1,0) \ \in S, \quad \text{ma} \quad (1,0,0) + (0,1,0) \ \notin S$$
Notiamo che per dimostrare che una proprietà non è vera basta fornire un controesempio.

□

Esercizio 3.5. *Verificare che l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale.*

SOLUZIONE:
Verifichiamo le operazioni di spazio vettoriale per l'insieme V:

(1) Verifichiamo che $M_{2\times 2}$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma:
- La somma di matrici gode della proprietà associativa.
- La somma di due matrici 2×2 è ancora una matrice 2×2.
- L'elemento
$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
è tale che $M + O = O + M = M$ per ogni matrice M 2×2.
- Qualsiasi sia la matrice
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
esiste la matrice
$$B = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$
tale che $A + B = B + A = O$.
- La somma di matrici è commutativa:
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_2 \end{bmatrix} = B + A$$

(2) Il prodotto per elementi di $\mathbf{R}$ è tale che
- $(k_1 + k_2)M = k_1M + k_2M$ qualsiasi $k_i \ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi sia la matrice M,
- $k(M_1 + M_2) = kM_1 + kM_2$ qualsiasi $k \ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi siano le matrici M_i,
- $(k_1k_2)M = k_1(k_2M)$ qualsiasi $k_i \ \in \mathbf{R}$ e qualsiasi sia la matrice M,
- $1M = M$ qualsiasi sia la matrice M.

Notiamo che la verifica formale di tutte le proprietà è molto semplice, ma lunga. Notiamo anche come le domande *Verificare che l'insieme S è uno spazio vettoriale* e *Verificare che l'insieme S è un sottospazio vettoriale dello spazio V* appaiono simili, ma implicano una quantità di controlli notevolmente differenti. Nel secondo caso possiamo infatti sfruttare tutte le proprietà di V che continuano ovviamente a valere in S.

□

Esercizio 3.6. *Verificare che l'insieme $\mathbf{R}_n[x]$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$.*

SOLUZIONE:
Verifichiamo le due proprietà richieste ai sotospazi:

(1) Siano $f(x)$, $g(x)$ due elementi di $\mathbf{R}_n[x]$:
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbf{R}$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \qquad b_i \in \mathbf{R}$$
Di conseguenza
$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \qquad a_i, b_i \in \mathbf{R}$$

e $f(x)+g(x) \in \mathbf{R}_n[x]$.

(2) Sia $f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora
$$\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n, \qquad \lambda a_i \in \mathbf{R}$$
Quindi $\lambda f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$.

□

Esercizio 3.7. *Sia S l'insieme delle matrici 3×3 triangolari superiori:*
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R},\ i,j = 1,2,3 \right\}$$
Verificare che S è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici 3×3.

Soluzione:

(1) Siano $A,\ B\ \in\ S$, allora
$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \in S \end{aligned}$$

(2) Qualsiasi sia $A\ \in\ S$ e $k\ \in\ \mathbf{R}$:
$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ 0 & ka_{22} & ka_{23} \\ 0 & 0 & ka_{33} \end{bmatrix} \in S$$

Quindi S è sottospazio di $M_{3\times 3}$.

□

Esercizio 3.8. *Sia G l'insieme di polinomi*
$$G = \left\{ ax^2 + a \mid a \in \mathbf{Z} \text{ intero relativo } \right\}$$

a) *Mostrare che G è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
b) *Dire se G è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbf{R}[x]$, motivando la risposta.*

Soluzione:

a) Un insieme G é un gruppo rispetto a una operazione $+$ se:
   (1) L'operazione è interna, ovvero G è chiuso rispetto a $+$. In questo caso presi due elementi di G:
   $$p_1(x) = ax^2 + a, \qquad p_2(x) = bx^2 + b, \qquad\qquad \text{con } a, b \in \mathbf{Z}$$
   allora anche la loro somma $p_1(x) + p_2(x)$ appappartiene a G. Infatti
   $$p_1(x) + p_2(x) = (a+b)x^2 + (a+b) = cx^2 + c$$
   dove $c = a + b \in \mathbf{Z}$.
   (2) L'operazione gode della proprietà associativa. Infatti la somma di polinomi gode in generale della proprietà associativa, quindi anche la somma di elementi di G è associativa.
   (3) Esiste l'elemento neutro 0 appartenente a G. Infatti $0 = 0x^2 + 0 \in G$ e
   $$0 + ax^2 + a = ax^2 + a + 0 = ax^2 + a$$
   (4) Esiste l'opposto di ogni elemento. Infatti dato $ax^2 + a \in G$ esiste l'elemento $-ax^2 + (-a) \in G$ tale che
   $$\left(ax^2 + a\right) + \left(-ax^2 + (-a)\right) = \left(-a + (-a)x^2\right) + \left(ax^2 + a\right) = 0$$

b) L' insieme G è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$ se:
   (1) G è chiuso rispetto alla somma. Tale proprietà è già stata verificata al punto precedente.

(2) G è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Notiamo che il campo degli scalari di $\mathbf{R}[x]$ è $\mathbf{R}$ (notiamo anche che $\mathbf{Z}$ non è un campo!), quindi G non è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Infatti per esempio $x^2+1 \in G$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, ma
$$\frac{1}{2} \cdot (x^2+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \notin G$$

Di conseguenza G non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}[x]$

□

Esercizio 3.9. *Si consideri il seguente insieme*
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.*
b) *L'insieme I forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?*
c) *Verificare che I non forma un gruppo rispetto al prodotto tra matrici.*
d) *L'insieme*
$$J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{N} \right\}$$
forma un gruppo rispetto alla somma di matrici?

Soluzione:

a) Siano
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$
due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A+B$ e AB sono ancora elementi di I:
$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{bmatrix} \in I$$
$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$
b) I è un gruppo rispetto alla somma, infatti verifica le quattro proprità:
(1) Proprietà associativa. La somma tra matrice gode in generale di tale proprietà, quindi in particolare ne godono gli elementi di I.
(2) Chiusura. Abbiamo appena dimostrato che I è chiuso rispetto alla somma.
(3) Elemento neutro. La matrice nulla appartiene all'insieme I.
(4) Opposto. Presa una qualsiasi matrice
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in I$$
esiste la matrice
$$B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{bmatrix} \in I$$
tale che $A + B = 0$.

c) Le prima tre proprietà di gruppo rispetto al prodotto sono verificate dall'insieme I, quindi il problema deve venire dall'esistenza dell'inverso. E' quindi sufficiente dimostrare che esiste almeno una matrice in I che non ammette inverso. In particolare la matrice nulla
$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$
e qualsiasi sia la matrice A, $AO = OA = O$. Di conseguenza O non può ammettere inversa.

d) Anche per l'insieme J non è verificata la proprietà di esistenza dell'opposto. Per esempio l'opposto della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$
è la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che però non appartiene a J (in quanto $-1 \notin \mathbf{N}$).

$\square$

CAPITOLO 4

La riduzione a gradini e i sistemi lineari (senza il concetto di rango)

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 4.3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Esercizio 4.4. *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 4.5. *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z & = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z & = 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 4.6. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.7. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y+z=1-k \\ y+(1-k)z=1 \end{cases} \qquad \text{(}k\text{ parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Esercizio 4.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=k \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-kx_2+kx_3=k \end{cases} \qquad \text{(}k\text{ parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 4.9. *Sia*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y+(k+1)z=k, \quad 2x+y+z=0\right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.10. *Sia*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x-2y+kz=k-1,\ x-2y+z=0,\ -2x+4ky-2z=0\right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.11. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S=\left\{x\in\mathbf{R}^5 \mid x_1-x_2+2x_5=k,\ x_1+x_3+kx_4=0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

---

1. Suggerimenti

- A ogni sistema lineare associamo la matrice formata dai coefficienti delle incognite e dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x+2y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{bmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

- Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:
  - Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

– Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite.
– Sostituzione di una riga con un suo multiplo non nullo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

– Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

– Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione linare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -2 & -6 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Per evitare errori è necessario badare che:
  ∗ Se sto sostituendo l'n-esima riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, il coefficiente per cui viene moltiplicata l'n-esima riga deve essere non nullo. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ kII-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 0 & 3k-2 & | & k-4 \end{bmatrix} \text{è lecita solo se } k \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ k & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2-3k & | & 4-k \end{bmatrix} \text{è sempre lecita}$$

  Per questo diremo che è conveniente spostare i parametri verso il basso.
  ∗ Per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione, utilizzeremo per modificare una riga solo le righe che la precedono. Quindi
    · La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
    · La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
    · La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
    · ...

- Esempi di riduzione a gradini si possono vedere nei successivi capitoli.
- Le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è **omogeneo**.
- Molti esercizi possono risolti in maniera leggermente diversa utilizzando il teorema di Rouché-Capelli e il concetto di rango. A tale scopo si veda il Capitolo 7.

---

2. Soluzioni

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:
A ogni sistema lineare associamo la matrice $A|b$, dove A è la matrice formata dai coefficienti delle incognite e b è la matrice dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x+4y+4z=4 \\ x-z=1 \\ -x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{array}\right]$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} III \\ II \\ I \end{bmatrix}$$
- Sostituzione di una riga con un suo multiplo **non nullo**.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$
- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ II+I \\ III \end{bmatrix}$$
- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.
$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII+bI \\ III \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0$$
Notiamo in particolare la condizione $a \neq 0$, mentre non c'è nessuna condizione sul coefficiente b. In sostanza è necessario che il coefficiente della riga che stiamo sostituendo sia non nullo (in questo caso la seconda).
- Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite. Per tale ragione useremo questo scambio solo se realmente conveniente.

Procediamo ora alla riduzione. Notiamo che la prima riga è l'unica che rimarrà invariata nella riduzione. Inoltre è la più utilizzata nelle operazioni di riduzione. Per queste ragioni è generalmente conveniente avere come prima riga quella più semplice (cioè con più zeri e senza parametri nel caso di sistemi parametrici).

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/3III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III-II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A questo punto la matrice è ridotta a gradini, possiamo quindi ritornare al sistema:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
- ...

$\square$

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x+2y+w=0 \\ 2x+5y+4z+4w=0 \\ 3x+5y-6z+4w=0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:

$$\begin{cases} x+2y+w=0 \\ y+4z+2w=0 \\ -2z+3w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15t \\ y=-8t \\ z=\dfrac{3}{2}t \\ w=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

L'insieme delle soluzioni scritte in forma vettoriale è quindi dato da

$$S = \left\{ (x,y,z,w) = \left(15, -8, \frac{3}{2}, 1\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Notiamo che, come accade sempre per le soluzioni di un sistema omogeneo, l'insieme S è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in questo caso).

□

Esercizio 4.3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx+ky+k^2z & =4 \\ x+y+kz & =k \\ x+2y+3z & =2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{matrix} \\ kII-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \\ 0 & 1 & 3-k & | & k \end{bmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k=0$. Infatti per $k=0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{bmatrix} I \\ II \\ III \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ aII+bI \\ III \end{bmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) L'ultima equazione del sistema è $0 = 4 - k^2$ che non risulta impossibile solo se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$. In tali casi il sistema ammette soluzione.
   Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ -y-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ -y-5z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7t \\ y=-5t-2 \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.4. *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x+2w=1 \\ x+y+3z+2w=1 \\ 2x+y+(k+2)z+4w=2 \\ x+y+3z+(k^2-k+2)w=k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k+2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k^2-k+2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{bmatrix}$$

In conclusione abbiamo ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ (k-1)z = 0 \\ k(k-1)w = k-1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere il parametro.

- Se $k(k-1) \neq 0$, cioè se $k \neq 0,\ k \neq 1$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare il valore della w. Analogamente se $k \neq 1$ dalla terza equazione possiamo ricavare il valore della z. Quindi per $k \neq 0,\ k \neq 1$ otteniamo le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{k-2}{k} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = \frac{1}{k} \end{cases}$$

Di conseguenza se $k \neq 0,\ k \neq 1$ il sistema ammette una unica soluzione:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{k-2}{k}, 0, 0, \frac{1}{k}\right).$$

- Se invece $k = 0$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione è impossibile, per $k = 0$ il sistema non ha soluzioni.

- Infine se $k = 1$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo due sole equazioni (significative) e 4 incognite. Dobbiamo quindi introdurre 2 parametri:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza se $k = 1$ le soluzioni del sistema sono date dall'insieme

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, w) = (-2t + 1, -3s, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-2, 0, 0, 1) \cdot t + (0, -3, 1, 0) \cdot s + (1, 0, 0, 0) \mid s, t \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

In questo caso otteniamo perciò infinite soluzioni (e neanche in questo caso S è uno spazio vettoriale! Infatti non sono soluzioni di un sistema omogeneo)

$\square$

Esercizio 4.5. *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z &= 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z &= 1 + 2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & | & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & | & 1+2k \end{bmatrix}$$

Poichè la prima colonna contiene il parametro k la scambiamo con la terza colonna (scambiando così la posizione dell'incognita x con quella dell'incognita z):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & k+2 & | & 2 \\ 2 & 3 & 2k+1 & | & 1+2k \end{bmatrix}$$

Riduciamo ora la matrice a gradini:

$$\begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 2 & 2k & | & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2k & | & 2k \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema e ricordando lo scambio di x e z otteniamo:

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y+2kx=2k \\ kx=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} z = \dfrac{1-k}{2} \\ y = k \\ x = 0 \end{cases}$$

- Se $k = 0$ invece

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 4.6. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2-x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1+3x_2=2 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ (2t+1)x_3=5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow II+I \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1+3x_2=2 \\ 5x_2-x_3=3 \\ (2t+1)x_3=5 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare x_3 ottenendo quindi una unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, invece l'ultima equazione diventa

$$0 = 5$$

  Quindi l'equazione è impossibile e il sistema non è compatibile.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.7. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - (k-1)z = 1 \\ -k(k-2)z = -k \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere i valori del parametro distinguendo tre casi:

- Se $k \neq 0, 2$ otteniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{k-1}{k-2} \\ y = \frac{2k-3}{k-2} \\ z = \frac{1}{k-2} \end{cases}$$

  quindi il sistema ammette un'unica soluzione.

- Se $k = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

  Il sistema ammette soluzione, ma in questo caso ne ammette infinite in quanto abbiamo ottenuto un sistema in tre equazioni e due sole incognite. Anche se non era richiesto possiamo comunque ricavare le soluzioni

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

- Se $k = 2$ otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

quindi il sistema non ammette soluzioni.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 4.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

SOLUZIONE:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = k \\ y + 2z = k \\ (3k-1)z = k^2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k = \frac{1}{3}$ allora l'ultima riga diventa $0 = \frac{1}{9}$, quindi è impossibile e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite che ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} 2x_- x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

□

Esercizio 4.9. *Sia*

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

SOLUZIONE:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$

b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ \ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{ \ (0, -1, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\}$$

□

Esercizio 4.10. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \ x - 2y + z = 0, \ -2x + 4ky - 2z = 0 \ \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4ky - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \{ \ (2s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{ \ (2s, s, 0) + (-t, 0, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{ \ (2, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 1) \cdot t \mid s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.11. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k, \ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Soluzione:

a) S è uno spazio vettoriale se il sistema è omogeneo cioè se $k = 0$.

b) Risolviamo il sistema omogeneo, riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r + 2t \\ x_3 = r & \qquad \forall\, r, s, t \;\in\; \mathbf{R} \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-r, -r + 2t, r, s, t) \; | r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-r, -r, r, 0, 0) + (0, 0, 0, s, 0) + (0, 2t, 0, 0, t) \; | r, s, t \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(-1, -1, 1, 0, 0) \cdot r \;+\; (0, 0, 0, 1, 0) \cdot s \;+\; (0, 2, 0, 0, 1) \cdot t \; | r, s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

□

CAPITOLO 5

Dipendenza e indipendenza lineare (senza il concetto di rango)

Esercizio 5.1. *Scrivere un vettore* $w \in \mathbf{R}^3$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.

Esercizio 5.2. *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ *e* $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ *di* $\mathbf{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 5.3. *Scrivere un vettore* $w \in \mathbf{R}^4$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.

Esercizio 5.4. *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ -5,\ 700)$ *e* $v_2 \equiv (0,\ 0,\ 0)$ *di* $\mathbf{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 5.5. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (0,\ 0,\ 0)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Esercizio 5.6. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Esercizio 5.7. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1, -1, 2),\ v_2 \equiv (5, 2, 0),\ v_3 \equiv (3, 4, -4)$$

Esercizio 5.8. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1, 2, -2),\ v_2 \equiv (1, 1, -3),\ v_3 \equiv (3, 7, k-6)$$

discutendo i valori del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 5.9.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^5$ *sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$

b) *Per i valori di* k *determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Esercizio 5.10. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1, 1, 2),\ v_2 \equiv (2, 4, 6),\ v_3 \equiv (-1, 2, 5),\ v_4 \equiv (1, 1, 10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.11. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1),\ v_2 \equiv (-3,-2,-2),\ v_3 \equiv (2,2,k+4),\ v_4 \equiv (1,3,4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* $v_1,\ v_2$ *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.12. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$

Esercizio 5.13. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,2,1),\ v_2 \equiv (k-2,k-4,-k-2),\ v_3 \equiv (5,9,3)$$

determinare, se possibile, i valori del parametro k *per cui il vettore* v_3 *è combinazione lineare di* v_1*, e* v_2*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.14. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (2,5,7,5),$$
$$v_3 \equiv (-3,-2,k-5,k-2), \qquad v_4 \equiv (-1,-2k-1,-2k-2,-3)$$

determinare i valori del parametro reale k *per i quali* v_4 *è combinazione lineare di* $v_1,\ v_2$ *e* v_3*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.15. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k *le matrici* A, B, C *sono linearmente indipendenti nello spazio* $M_2(\mathbf{R})$*.*

Esercizio 5.16. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di* $k \in \mathbf{R}$ *le matrici* A*,* B *e* C *sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere* B *come combinazione lineare di* A *e* C*.*

Esercizio 5.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D *è combinazione lineare di* $A,\ B,\ C$*.*

Esercizio 5.18. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k *per cui* C *è combinazione lineare di* $A,\ B$*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.*

Esercizio 5.19. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1+x, \qquad p_2(x) = 1+2x+x^2, \qquad p_3(x) = x-x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$*.*

1. Suggerimenti

- n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ sono detti **linearmente indipendenti** se
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$
In caso contrario sono detti **linearmente dipendenti**.
- Un vettore w è combinazione di n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tali che:
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = w$$
- Se n vettori sono linearmente dipendenti, allora almeno uno è combinazione lineare degli altri.
- Se w è combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$, allora $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n,\ w$ sono linearmente dipendenti.
- Alcuni degli esercizi svolti in questo capitolo possono essere svolti in maniera leggermente semplificata utilizzando la nozione di rango (v. capitoli successivi).

---

2. Soluzioni

Esercizio 5.1. *Scrivere un vettore $w \in \mathbf{R}^3$ linearmente dipendente dal vettore $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.*

Soluzione:
Per esempio il vettore $w = 3v = (-3,\ 27,\ 0)$ è linearmente dipendente da v.

Potevamo anche considerare il vettore nullo $(0,\ 0,\ 0) = 0v$ che è sempre linearmente dipendente da qualsiasi altro vettore.

□

Esercizio 5.2. *Stabilire se i vettori $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ e $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente dipendenti.*

Soluzione:

Si tratta di verificare se l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = 0$ ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$. Nel caso particolare di due vettori (non nulli), notiamo che x e y o sono entrambi nulli o sono entrambi non nulli. Supponendo quindi che esistano soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$ ne segue che possiamo supporre $y \neq 0$ e possiamo dividere per y ottenendo $v_2 = -\dfrac{x}{y}\, v_1$.

Ovvero due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro. E' evidente che in questo caso v_1 non è multiplo di v_2, quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Lo stesso risultato si poteva ottenere risolvendo il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 = 0$
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \\ 7x + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ -5y + 3y = 0 \\ -7y + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
Poichè l'unica soluzione è quella nulla, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

□

Esercizio 5.3. *Scrivere un vettore $w \in \mathbf{R}^4$ linearmente dipendente dal vettore $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.*

Soluzione:
Per esempio il vettore $w = 2v = (2,\ 6,\ -8,\ 4)$ è linearmente dipendente da v.

□

Esercizio 5.4. *Stabilire se i vettori $v_1 \equiv (1,\ -5,\ 700)$ e $v_2 \equiv (0,\ 0,\ 0)$ di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente dipendenti.*

Soluzione:

Il vettore nullo è sempre linarmente dipendente da ogni altro insieme di vettori. Infatti l'equazione vettoriale:

$$xv_1 + yv_2 = 0$$

ammette (per esempio) la soluzione non nulla

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 5.5. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (0,\ 0,\ 0)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

Per quanto osservato nell'esercizio precedente possiamo giá affermare che i tre vettori sono linearmente dipendenti in quanto tra di essi vi é il vettore nullo.

Risolviamo comunque l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ che, in generale, ci permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y + 0z = 0 \\ -3x - y + 0z = 0 \\ 7x - y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 6y - y = 0 \\ -14y - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1 + 0v_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- v_2 non si può esprimere come combinazione lineare di v_1 e v_3.
- Ponendo per esempio $t = 1$, otteniamo che
$$v_3 = 0v_1 + 0v_2$$

□

Esercizio 5.6. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Sappiamo infatti che data l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$

- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente indipendenti** se l'equazione ammette solo la soluzione nulla: $x = y = z = 0$.
- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente dipendenti** se l'equazione ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$.

Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -3x-y+2z=0 \\ 7x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ 6y-12z-y+2z=0 \\ -14y+28z-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ 5y-10z=0 \\ -15y+30z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ y=2z \\ -30z+30z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1 + 2tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- Ponendo per esempio $t=1$, otteniamo $2v_2+v_3=0$ ovvero
$$v_2 = -\frac{1}{2}v_3$$
- Analogamente al punto precedente otteniamo
$$v_3 = -2v_2$$

□

Esercizio 5.7. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,-1,2),\ v_2 \equiv (5,2,0),\ v_3 \equiv (3,4,-4)$$

SOLUZIONE:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1+yv_2+zv_3=0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+5y+3z=0 \\ -x+2y+4z=0 \\ 2x+0y-4z=0 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ -1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 2 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 7 & 7 & | & 0 \\ 0 & -10 & -10 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ (1/7)II \\ (-1/10)III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x+5y+3z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5z+3z=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$2tv_1 - tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ponendo per esempio $t=1$ otteniamo $2v_1-v_2+v_3=0$ da cui segue

- $v_1 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$
- $v_2 = 2v_1 + v_3$
- $v_3 = -2v_1 + v_2$

□

Esercizio 5.8. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,2,-2),\ v_2 \equiv (1,1,-3),\ v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

discutendo i valori del parametro k.

SOLUZIONE:
Procediamo come nell'esercizio precedente risolvendo l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 7z = 0 \\ -2x - 3y + (k-6)z = 0 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & 7 & | & 0 \\ -2 & -3 & k-6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k+1 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che un sistema omogeneo ha sempre soluzione, infatti ha sempre almeno la soluzione nulla. Discutiamo i valori del parametro:

- Se $k = 1$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$-4tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-4v_1 + v_2 + v_3 = 0$ da cui segue
  - $v_1 = \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3$
  - $v_2 = 4v_1 - v_3$
  - $v_3 = 4v_1 - v_2$
- Se $k \neq 1$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = z = 0$ e $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente indipendenti. In particolare nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

□

Esercizio 5.9.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$ sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0,1,-1,0,1), \qquad v_2 = (1,0,1,0,k), \qquad v_3 = (-1,2,-3,0,0).$$

b) *Per i valori di k determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

SOLUZIONE:
Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 1 & 0 & 2 & | & 0\\ -1 & 1 & -3 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 1 & k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II\\ I\\ III+II\\ V-II\\ IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & k & -2 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II\\ IV-kII\\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & -2+k & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0\\ y-z=0\\ (k-2)z=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x=y=z=0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k=2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+2z=0\\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t\\ y=t\\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi per $k=2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k=2$ allora

$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

In particolare ponendo per esempio $t=1$ oteniamo

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3\\ v_2 &= 2v_1 - v_3\\ v_3 &= 2v_1 - v_2 \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.10. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+2y-z=1\\ x+4y+2z=1\\ 2x+6y+5z=10 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1\\ 1 & 4 & 2 & | & 1\\ 2 & 6 & 5 & | & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I\\ III-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1\\ 0 & 2 & 3 & | & 0\\ 0 & 2 & 7 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1\\ 0 & 2 & 3 & | & 0\\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1\\ 2y+3z=0\\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9\\ y=-3\\ z=2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

Notiamo che anzicchè fermarci alla matrice ridotta a gradini potevamo arrivare alla scrittura della matrice in forma normale, ovvero alla matrice che ha solo elementi sulla diagonale e questi sono tutti 1 o 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/4III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I+III \\ II-3III \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow 1/2II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I-2II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Ritornando al sistema in questo caso otteniamo direttamente

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

□

Esercizio 5.11. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1),\ v_2 \equiv (-3,-2,-2),\ v_3 \equiv (2,2,k+4),\ v_4 \equiv (1,3,4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ x - 2y + (k+4)z = 4 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & k+4 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y = 2 \\ (k+2)z = 1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora di distinguere due casi

- Se $k = -2$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Quindi il sistema non ammette soluzioni, e v_4 non si può esprimere come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$.

- Se $k \neq -2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7k+12}{k+2} \\ y = 2 \\ z = \dfrac{1}{k+2} \end{cases}$$

e

$$v_4 = \left(\frac{7k+12}{k+2}\right) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \left(\frac{1}{k+2}\right) \cdot v_3$$

□

Esercizio 5.12. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$

Soluzione:

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & k & k-1 & | & 15 \\ 1 & -1 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo la matrice equivalente

$$\begin{array}{c} \\ II-3I \\ III-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Facciamo a questo punto una importante osservazione. Se procediamo ancora con la riduzione a gradini, per ottenere uno zero nel secondo posto della terza riga siamo costretti a fare la seguente operazione

$$\begin{array}{c} \\ \\ (k-6)III+3II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{bmatrix}$$

Notiamo però che procedendo così abbiamo sostituito la terza riga con un suo multiplo *dipendente dal parametro*, sommato ad un multiplo non nullo della seconda. Dalla teoria sappiamo però che tale operazione è lecita solamente se il valore per cui moltiplichiamo la terza riga è diverso da zero, nel nostro caso cioè se $k \neq 6$. In caso contrario avremmo infatti sostituito la terza riga con un multiplo della seconda ottenendo perciò un sistema non più equivalente. Potremmo quindi procedere per poi controllare separatamente il caso $k = 6$, ritornando al sistema che avevamo prima della operazione non lecita. Questo modo di procedere, benchè corretto, risulta piuttosto lungo e macchinoso. E' invece decisamente più conveniente procedere nel seguente modo.

Ritorniamo alla matrice ottenuta al primo passaggio della riduzione a gradini e effettuiamo uno scambio di righe

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \\ 3III+(k-6)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi sostituito la terza riga con un suo multiplo *non nullo* sommato ad un multiplo della seconda dipendente dal parametro. Questa operazione è sempre lecita. Infatti anche per il valore critico $k = 6$ otteniamo un sistema ancora equivalente in cui la terza riga è stata sostituita con un suo multiplo non nullo. Possiamo perciò procedere senza dovere distinguere alcun caso.

Torniamo ora al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -3y + z = 6 \\ \qquad 4kz = 6k. \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni siamo costretti a distinguere due casi.

- Se $4k \neq 0$, ovvero se $k \neq 0$, l'ultima equazione si può dividere per $4k$ per cui otteniamo la seguente soluzione
$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$
Di conseguenza se $k \neq 0$ abbiamo ottenuto la seguente (unica) combinazione lineare:
$$v_4 = \frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{3}{2}v_3.$$
- Se $k = 0$ otteniamo il seguente sistema
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad - 3y + z = 6 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$
Ponendo $y = t$ otteniamo le soluzioni
$$\begin{cases} x = t + 7 \\ y = t \\ z = 3t + 6. \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
Quindi anche se $k = 0$ il vettore v_4 si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3:
$$v_4 = (t + 7) \cdot v_1 + t \cdot v_2 + (3t + 6) \cdot v_3 \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$
In questo caso le possibili combinazioni lineari sono infinite.

□

Osservazione importante. Abbiamo incontrato in questo esercizio una prima difficoltà nel ridurre a gradini un sistema parametrico. Abbiamo visto che è stato decisamente utile spostare in basso la riga contenente il parametro. Possiamo quindi dare una prima *regola* utile per ridurre a gradini i sistemi parametrici: è tendenzialmente conveniente spostare verso il basso le righe contenenti il parametro.

Esercizio 5.13. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*
$$v_1 \equiv (1, 2, 1), \ v_2 \equiv (k - 2, k - 4, -k - 2), \ v_3 \equiv (5, 9, 3)$$
determinare, se possibile, i valori del parametro k per cui il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1, e v_2. In caso positivo sprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Soluzione:
Si tratta di cercare (se esistono) le soluzioni dell'equazione vettoriale
$$xv_1 + yv_2 = v_3.$$
Consideriamo il sistema (non omogeneo) associato
$$\begin{cases} x + (k - 2)y = 5 \\ 2x + (k - 4)y = 9 \\ x + (-k - 2)y = 3 \end{cases}$$
Riduciamo a gradini la matrice associata
$$\begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 2 & k-4 & | & 9 \\ 1 & -k-2 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & -k & | & -1 \\ 0 & -2k & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -II \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Otteniamo quindi il sistema
$$\begin{cases} x + (k - 2)y = 5 \\ ky = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ otteniamo
$$\begin{cases} x = \dfrac{4k+2}{k} \\ y = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$
per cui
$$v_3 = \left(\frac{4k+2}{k}\right) \cdot v_1 + \frac{1}{k} \cdot v_2 \qquad \text{se } k \neq 0.$$
- Se $k = 0$:
$$\begin{cases} y & - & 2x & = & 5 \\ & & 0 & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$
Quindi il sistema è impossibile e in questo caso il vettore v_3 non è combinazione lineare di v_1 e v_2.

$\square$

Esercizio 5.14. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*
$$v_1 \equiv (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 \equiv (2, 5, 7, 5),$$
$$v_3 \equiv (-3, -2, k-5, k-2), \qquad v_4 \equiv (-1, -2k-1, -2k-2, -3)$$
determinare i valori del parametro reale k per i quali v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. In caso positivo sprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Soluzione:

Studiamo la seguente equazione vettoriale
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$
riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 1 & 5 & -2 & | & -2k-1 \\ 2 & 7 & k-5 & | & -2k-2 \\ 1 & 5 & k-2 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2k \\ 0 & 3 & k+1 & | & -2k \\ 0 & 3 & k+1 & | & -2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2k \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2k-2 \end{bmatrix}$$
Ritornando al sistema abbiamo ottenuto
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3y + z = -2k \\ kz = 0 \\ 0 = 2k - 2 \end{cases}$$
Notiamo subito che l'ultima equazione impone $2k = 2$, ovvero $k = 1$. Sostituendo quindi tale valore nel sistema oteniamo
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3y + z = -2 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = 0. \end{cases}$$
Quindi

- Per $k = 1$ abbiamo ottenuto la seguente combinazione lineare
$$v_4 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2$$

- Se $k \neq 1$ il sistema non ammette soluzioni per cui il vettore v_4 non si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

$\square$

Esercizio 5.15. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti nello spazio $M_2(\mathbf{R})$.

Soluzione:

Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y - 1z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y - 1z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti.

$\square$

Esercizio 5.16. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbf{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x + (k+1)y + z \\ 2x + 4y + (2k-2)z & -x + (k-3)y + (2k-1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + (k+1)y + z = 0 \\ 2x + 4y + (2k-2)z = 0 \\ -x + (k-3)y + (2k-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & | & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

– Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow -2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il sistema ha infinite soluzioni e quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$ abbiamo ottenuto al punto precedente $-2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$. Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

□

Esercizio 5.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:

Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV - 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 6 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \\ 3IV - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 4IV - 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema notiamo che l'ultima equazione è $0 = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 5.18. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:

Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k=3$ il sistema ammette la sola soluzione $x=y=1$ e $A+B=C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

□

Esercizio 5.19. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1+x, \qquad p_2(x) = 1+2x+x^2, \qquad p_3(x) = x-x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$.

Soluzione:
Si tratta di stabilire se l'equazione

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = f(x)$$

ammette soluzioni. Esplicitando l'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) &= a(1+x) + b(1+2x+x^2) + c(x-x^2) \\ &= (b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) \end{aligned}$$

Quindi

$$(b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) = x^2 - x + 2 \ \Rightarrow \begin{cases} b-c=1 \\ a+2b+c=-1 \\ a+b=2 \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_2+x_3=-3 \\ -2x_3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

L'esercizio poteva essere svolto in maniera leggermente semplificata osservando che a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dai suoi coefficienti dopo avere scelto un ordine per l'insieme $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. La giustificazione precisa di questo fatto verrà data dopo avere introdotto il concetto di base, ma possiamo intanto osservare che ogni vettore è univocamente determinato dai suoi coefficienti e che la somma e il prodotto per scalari sono definiti in maniera analoga tra vettori e tra polinomi. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned} p_1 &= (0,1,1) \\ p_2 &= (1,2,1) \\ p_3 &= (-1,1,0) \\ f &= (1,-1,2) \end{aligned}$$

Il polinomio $f(x)$ è combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ se il vettore f è combinazione lineare dei vettori p_1, p_2, p_3. Risolvendo l'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3$ otteniamo il sistema a cui è associata la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

che è infatti la stessa che abbiamo ottenuto con il precedente metodo.

$\square$

CAPITOLO 6

Determinante e inversa di una matrice

Esercizio 6.1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.3. *Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbf{R}$$

Esercizio 6.4. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici (invertibili) utilizzando il metodo della riduzione a gradini.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.5. *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Esercizio 6.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Esercizio 6.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

Esercizio 6.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 6.10. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 6.11. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Esercizio 6.12. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

---

1. Suggerimenti

Una matrice (quadrata) A è invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1}, tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$.

Per calcolare l'inversa di una matrice utilizzeremo due metodi:

- Si affianca alla matrice A la matrice identica e si riduce A a gradini in forma normale (cioè con tutti 1 sulla diagonale e 0 altrove). La matrice in cui è stata trasformata la matrice identica è l'inversa A^{-1}.
- Si utilizzano le formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [a'_{ij}]^T$$

dove

$$\begin{aligned} a'_{ij} = &\text{ complemento algebrico di } a_{ij} \\ = &(-1)^{i+j} \cdot \det(\text{matrice ottenuta da } A \text{ eliminando la riga } i \text{ e la colonna } j) \end{aligned}$$

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Talvolta per calcolare il rango di una matrice può essere utile utilizzare un metodo misto di riduzione e di calcolo dei determinanti. Infatti, sia A una matrice e A' la matrice ottenuta da A con qualche passo di riduzione a gradini. Allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$. In particolare se A è quadrata $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$, ovvero che $\text{rg}(A)$ sia massimo.

---

2. Soluzioni

Esercizio 6.1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -4 - 3 = -7 \\ \det(B) &= 0 - 2 \cdot 3 = -6 \end{aligned}$$

Per calcolare il determinante di C sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-7) = 2 - 14 = -12 \end{aligned}$$

Analogamente per calcolare il determinante di D sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\det(D) = -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -2 \cdot (7) = -14$$

Per calcolare il determinante di F sviluppiamo rispetto alla prima riga. Notiamo che il determinante di F risulta il prodotto degli elementi della diagonale:

$$\det(F) = 7 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot (-3) = -21$$

□

Esercizio 6.2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Cominciamo dalle matrici 2×2:

$$\det(A_1) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$
$$\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3$$
$$\det(A_3) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Consideriamo ora le matrici 3×3.

Per la matrice A_4 sviluppiamo il determinante rispetto alla prima colonna:

$$\det(A_4) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (10) = 10$$

Per la matrice A_5 possiamo sviluppare il determinante indifferentemente rispetto alla prima colonna o alla prima riga:

$$\det(A_5) = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

Per la matrice A_6 ci conviene sviluppare il determinante rispetto alla seconda colonna:

$$\det(A_6) = -(-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (7-4) + 1 \cdot (7-6) = 3 + 1 = 4$$

□

Esercizio 6.3. *Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbf{R}$$

Soluzione:

Per calcolare il rango di A utilizziamo la seguente proprietà.

Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con deteminante non nullo.

Cominciamo quindi a calcolare il determinante di A per stabilire quando $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna:

$$\det(A) = -(4-k) \cdot [2k - 3 - (k+2)] = (k-4)(k-5)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se $k = 4$ o $k = 5$.

Di conseguenza:

- Se $k \neq 4,\ 5$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 4$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

  Sappiamo già che $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = -15 \cdot 6 \neq 0$$

  quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

- Se $k=5$ la matrice A diventa:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo già che $\text{rg}(A) \le 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:
$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(C) = 7 \neq 0$$
quindi $\text{rg}(A) = 2$.

$\square$

Esercizio 6.4. *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

SOLUZIONE:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/5II \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$
Di conseguenza
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-3III \\ II+1/2III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I+II \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
Di conseguenza
$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n\times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\text{rg}(M) = n$, quindi:
una matrice $n \times n$ è **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

$\square$

Esercizio 6.5. *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Poichè $\det(A_1) = -1 - 4 = -5$ la matrice A_1 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_2. Poichè $\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, la matrice A_2 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}0 = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_3. Poichè $\det(A_3) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice A_3 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}1 = -1 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_4) = 10 \neq 0$, la matrice A_4 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{13} = (-1)^{1+3}1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \\ a'_{23} = (-1)^{2+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{32} = (-1)^{3+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \\ a'_{33} = (-1)^{3+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \end{cases} \Rightarrow A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_5) = -6 \neq 0$, la matrice A_5 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 3 & a'_{12} = 0 & a'_{13} = 0 \\ a'_{21} = 0 & a'_{22} = -6 & a'_{23} = 0 \\ a'_{31} = 0 & a'_{32} = 0 & a'_{33} = -2 \end{array}$$

Quindi

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_6) = 4 \neq 0$, la matrice A_6 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 7 & a'_{12} = -3 & a'_{13} = -2 \\ a'_{21} = 7 & a'_{22} = 1 & a'_{23} = -2 \\ a'_{31} = -5 & a'_{32} = 1 & a'_{33} = 2 \end{array}$$

Quindi

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Soluzione:

a)

$$\det(A) = (1-4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

b) Calcoliamo l'inversa di A dopo avere posto $k = 1$, nel quale caso $\det(A) = 2 - 3 = -1$.

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = -3 & a'_{12} = -1 & a'_{13} = 2 \\ a'_{21} = 2 & a'_{22} = 1 & a'_{23} = -2 \\ a'_{31} = -1 & a'_{32} = -1 & a'_{33} = 1 \end{array}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare l'inversa di A potevamo calcolare $rref(A)$ dopo avere affiancato a A, con $k = 1$, la matrice identica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} I + III \\ II + III \\ -III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2+k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$2k - 2 = 0 \;\Rightarrow\; k = 1$$
$$-k^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \text{ o } k = 1$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo dei complementi algebrici. Notiamo che per $k = -1$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 8$$

Inoltre

$$\begin{matrix} A'_{11} = -12 & A'_{21} = 8 & A'_{31} = -4 \\ A'_{12} = 0 & A'_{22} = -2 & A'_{32} = 0 \\ A'_{13} = 4 & A'_{23} = -4 & A'_{33} = 4 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

In alternativa possiamo calcolare l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} I-III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Abbiamo visto che se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\text{rg}(A) = 3$. Inoltre:
   – Se $k = 0$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} III \\ 1/2II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

   – Se $k = 1$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

□

Esercizio 6.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t é invertibile.

Soluzione:
A_t è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se il suo rango è 3. Riduciamo quindi A a gradini per stabilire se è invertibile.

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 0 & t-2 & 1-2t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & 1-2t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Scambiando ora la seconda e terza colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-2t & t-2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Quindi A_t ha rango 3, cioè A_t è invertibile, se $t \neq 0, \frac{1}{2}$.

In alternativa potevamo calcolare direttamente il determinante:

$$\det(A_t) = -t(1-2t)$$

e A_t è invertibile se $\det(A_t) \neq 0$, ovvero se $t \neq 0, \frac{1}{2}$.

□

Esercizio 6.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-3kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 6.10. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II+2kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 0 & 11k-2 \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \frac{1}{4}, \frac{2}{11}$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = \frac{1}{4}$ o $k = \frac{2}{11}$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \frac{1}{4}, \frac{2}{11}$.

□

Esercizio 6.11. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+kII \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2I \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I+III \\ \\ III+kII \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-\frac{1}{k}III \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□

Esercizio 6.12. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

Soluzione:

a) Ricordiamo che una matrice ha rango massimo, in questo caso 3, se ha determinante diverso da zero.

$$\det(A) = 2 \cdot 6k - 1 \cdot 6k = 6k$$

Quindi se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3. Per $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e per $k = 0$ la matrice ha rango 2.

b) Abbiamo visto che $\det(A) = 6k$, quindi A ha determinante 1 se $k = \dfrac{1}{6}$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = \dfrac{1}{6}$ con il metodo dei complementi algebrici. Notiamo che per $k = \dfrac{1}{6}$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{6} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 1$$

Inoltre

$$\begin{array}{ccc} A'_{11}=1 & A'_{21}=-1 & A'_{31}=-\frac{1}{3} \\ A'_{12}=-\frac{1}{2} & A'_{22}=1 & A'_{32}=\frac{1}{6} \\ A'_{13}=0 & A'_{23}=0 & A'_{33}=2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppure calcoliamo l'inversa con il metodo della riduzione:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{6} & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{12} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$II-I \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{12} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I-1/12III \\ II+1/12III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

CAPITOLO 7

Rango: Rouchè-Capelli, dimensione e basi di spazi vettoriali.

Esercizio 7.1. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.2. *Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$ vettori colonna. Dimostrare che la matrice $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha rango 0 oppure 1.*

Esercizio 7.3. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.4. *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Esercizio 7.5. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 7.6. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema é compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.7. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad \text{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Esercizio 7.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*
b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?*

Esercizio 7.9. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Esercizio 7.10. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

Esercizio 7.11. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.*
b) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.*

Esercizio 7.12. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} kx + y + z & = 1 \\ y + z & = k \\ 3x + ky + 2z & = 2 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Discutere l'esistenza e unicità di soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare di k.*

Esercizio 7.13. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1+k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Esercizio 7.14. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t-4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2-2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.15. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Esercizio 7.16. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.*

Esercizio 7.17. *Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:*

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

Esercizio 7.18. *Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
b) *Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.*

Esercizio 7.19. *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Esercizio 7.20. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Indicare basi per lo spazio delle righe e per lo spazio delle colonne di A.*
b) *Esistono valori $t \in \mathbf{R}$ per cui il sistema $Ax = b$, con $b = (1,1,t,t)$ ammetta soluzione?*

Esercizio 7.21. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*
b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Esercizio 7.22. *Siano dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*.*

Esercizio 7.23. *Siano dati i segunti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0,k^2+2,3), \qquad v_4 \equiv (1,k+3,k^2+2).$$

Stabilire se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *al variare del parametro* k*.*

Esercizio 7.24. *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori formano una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Esercizio 7.25.

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$*.*

b) *Esprimere il vettore* $v = (2,1,2)$ *come combinazione lineare di* v_1, v_2, v_3*.*

Esercizio 7.26. *In* $\mathbf{R}^3$ *siano*

$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2,1,2)$ *rispetto a tale base.*

Esercizio 7.27. *Si consideri il sottospazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *di* $\mathbf{R}^5$ *generato dai vettori*

$$v_1 = (-1,1,2,1,0), \; v_2 = (0,2,1,1,0), \; v_3 = (1,1,-1,0,0).$$

a) *Trovare una base di* V*.*

b) *Determinare le coordinate del vettore* $v = (-2,6,6,4,0) \in V$ *rispetto alla base trovata al punto* a)*.*

Esercizio 7.28. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Determinare una base di V*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 7.29. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (6,7,8,5)$$
$$v_3 \equiv (2k,k+8,3k+3,2), \qquad v_4 \equiv (0,2k,2k,1).$$

Determinare una base di V *al variare del parametro* k*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 7.30. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (0,k-1,k^2-1,3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V *al variare del parametro reale* k*.*

Esercizio 7.31. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*:*

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

Si calcoli la dimensione di W *al variare di* $k \in \mathbf{R}$*.*

Esercizio 7.32. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (3,-1,2,0), \quad v_2 = (-6,2,-4,0), \quad v_3 = (-3,k,k-3,0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2\rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.*

Esercizio 7.33. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k - 6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2\rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.*

Esercizio 7.34. *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ con*

$$v_1 = (3, 7, k + 1, 2k + 2),\ v_2 = (2, 2k + 2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si determini una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.35. *Determinare una base dei seguenti sottospazi W di $\mathbf{R}^3$:*
(1) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15)\rangle$
(2) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15), (2, 1, 0)\rangle$
(3) $W = \langle(-1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, -1, 2)\rangle$

Esercizio 7.36. *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ con*

$$v_1 = (k + 3,\ k + 3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k + 2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.37. *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\rangle$.*

Esercizio 7.38. *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k + 3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.
a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k + 6, -3)$ appartiene a V.*

Esercizio 7.39. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k - 1, k - 1), \quad v_3 = (2, 1, k + 5)$$

dove k è un parametro reale.
a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Esercizio 7.40. *Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v_1 = (1, 0, 3, 1), \quad v_2 = (-3, -3, -3, 0), \quad v_3 = (0, k + 1, k + 1, 0), \quad v_4 = (k - 1, 1, 3k - 5, 2k - 5),$$

dove k è un parametro reale, e sia $V = \langle v_1, v_2, v_2, v_4\rangle$.
a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^4$.*
b) *Si determini la dimensione e una base di V al variare di k.*

Esercizio 7.41. *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k + 1, k + 1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Esercizio 7.42. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (k, 0, 1, 1).$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*
b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.43. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad \text{(k parametro reale).}$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Esercizio 7.44. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{\ (-2, 0, 0),\ (1, k, -1),\ (1, -1, k)\ \}$$

a) *Trovare i valori del parametro k per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3, 2, 1)$ e $w = (0, 1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 7.45. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.*

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.*
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.*

Esercizio 7.46. *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 0, 1) \rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 7.47. *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:*

$$U = \{(0, 1, 1, 0)a + (0, 0, 0, 1)b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$
$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
c) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 7.48. *In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare canonico sia U il sottospazio dei vettori ortogonali al vettore $(1, 0, -1, 0)$ e sia V il sottospazio generato dai vettori $(1, 0, -2, 3)$, $(-1, 1, 1, -4)$, $(1, 1, -3, 2)$.*
Si trovino la dimensione e una base di U, V, $U \cap V$, $U + V$.

Esercizio 7.49. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, -1) \rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi U e V.*
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.*

Esercizio 7.50. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2, -1, -2),\ (-3, 4, 3) \rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 7.51. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.52. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.53. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.54. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 7.55. *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 1, 1, -2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Esercizio 7.56. *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k + 1)z = k, \quad 2x + y + z = 0\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Esercizio 7.57. *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Esercizio 7.58. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S ée un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a)*, trovare una base di S.*

Esercizio 7.59. *Sia W il sottinsieme di $\mathbf{R}^5$ definito da*

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 - x_3 + kx_4 + x_5 = 0,\ x_2 - 3x_4 = k,\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0\}$$

Stabilire per quali valori di k l'insieme W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ e calcolarne una base e la dimensione.

Esercizio 7.60.

a) *Trovare una base del sottospazio V di $\mathbf{R}^5$ così definito:*

$$V = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\}.$$

b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^5$ contenente la base di V trovata in* a).

Esercizio 7.61. *Sia*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k+1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k+2,\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Esercizio 7.62. *Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (k+1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (2-2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + 4x_2 + (2k-2)x_3 + (1-k)x_4 = 2-k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Stabilire per quali k l'insieme S è uno spazio vettoriale e in tali casi determinarne una base.*
b) *Esplicitare S al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 7.63. *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*
b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Esercizio 7.64.

a) *Sia*

$$V = \langle\ (1,2,1),\ (-1,3,0),\ (3,1,2)\ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0,\ 2x + 3y + z = 0,\ x + 2z = 0\ \}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Esercizio 7.65. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori:*

$$v_1 = (0,1,2,0,1), \quad v_2 = (k,1,2,0,2), \quad v_3 = (0,0,0,k,1)$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*
b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^5$.*

Esercizio 7.66. *Dati i vettori linearmente indipendenti $v_1 = (3,0,1)$ e $v_2 = (1,4,-2)$ completare l'insieme $S = \{v_1, v_2\}$ in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^3$.*

Esercizio 7.67. *Siano*

$$v_1 = (1,-1,-1,1),\ v_2 = (k,1,1,-1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro k per i quali v_1 e v_2 sono indipendenti.*
b) *Per $k = 2$, si estenda l'insieme $\{v_1, v_2\}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.68. *Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1,2,2,1), \qquad v_2 = (2,1,2,1), \qquad v_3 = (0,1,2,1)$$

a) *E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.*

Esercizio 7.69. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (2,1,-1,3), \quad v_2 = (1,0,5,1), \quad v_3 = (2,-1,3,1).$$

a) *Stabilire se il vettore $v = (0,0,1,0)$ è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
b) *Completare l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Esercizio 7.70. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0\ \}$$

a) *Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare una base di V.*

Esercizio 7.71. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.*

Esercizio 7.72. *Si considerino i polinomi $p_1 = x^2+ax+b+c,\ p_2 = x^2+bx+a+c,\ p_3 = x^2+cx+a+b$.*
a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri a, b, c i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[x]$.*
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio $\langle p_1, p_2, p_3\rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ al variare di a, b, c.*

Esercizio 7.73. *Sia S il sottoinsieme dello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ così definito:*

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare la dimensione di S.*

Esercizio 7.74. *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Esercizio 7.75. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.*

Esercizio 7.76. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Esercizio 7.77. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2, \qquad p_2(x) = 3x + 4, \qquad p_3(x) = -x^2 + 6x + 6$$

e sia $W = \langle p_1, p_2, p_3\rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ generato da p_1, p_2 e p_3.
a) *Si determini la dimensione e una base di W.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(x) = (k + 1)x^2 + 3kx + 4$ appartiene a W.*

Esercizio 7.78. *Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 7.79. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*
a) *Si mostri che $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di V.*

Esercizio 7.80. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 2 - x, \qquad p_2(x) = -x + x^2, \qquad p_3(x) = 3 + x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = 1 + 2x + 2x^2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 7.81. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = 2x + x^2 - x^3,\ p_2(x) = 1 - x + x^2,\ p_3(x) = 3 + x - x^3,\ p_4(x) = x^2 + x^3$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = (x+1)^3$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$.

Esercizio 7.82. *Dati i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2x,\ p_2(x) = x^2 - x,\ p_3(x) = 2x + 1$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$
b) *Esprimere* $f(x) = 3x^2 - 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Esercizio 7.83. *Sia* W *il sottoinsieme dello spazio di polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' *è la derivata terza di* p*)*

a) *Mostrare che* W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Trovare una base e la dimensione di* W.
c) *Determinare le coordinate del polinomio* $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Esercizio 7.84. *Sia* S *l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$*).*

a) *Verificare che* S *è un sottospazio di* $M_{2\times 2}$.
b) *Determinare una base di* S.

Esercizio 7.85. *Sia* S *il sottinsieme dello spazio delle matrici* $M_{3,2}(\mathbf{R})$ *così definito:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Mostrare che* S *è un sottospazio vettoriale di* $M_{3,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare un insieme generatore di* S.

Esercizio 7.86.

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare una base di* W.

Esercizio 7.87. *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a + b + 3c & 2b - 6c \\ a + 3b - 7c & 4a + 8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) *Determinare una base di* S.
b) *Stabilire se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ *(ed in caso positivo esprimere* A *come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Esercizio 7.88. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice* $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Esercizio 7.89. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$. Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 7.90. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.*
b) *Mostrare che il sottoinsieme $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ non è un sottospazio vettoriale di U.*

Esercizio 7.91. *Sia $W = \langle A,\ B,\ C \rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Esercizio 7.92. *Sia $V = \langle A, B, C \rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si esprima* $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Esercizio 7.93. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se A, B e C sono linearmente indipendenti in $M_2(\mathbf{R})$.*
b) *Si determini una base del sottospazio $\langle A, B, C \rangle$.*

Esercizio 7.94. *Sia $V = \langle A,\ B,\ C \rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k-2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si stabilisca per quali k la matrice D appartiene a V. In tali casi si esprima D come combianzione lineare della base trovata al punto precedente.*

Esercizio 7.95. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base.*

a) *Mostrare che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ è una sua base di V.*
b) *Calcolare le coordinate del vettore $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Esercizio 7.96. *Si consideri l'insieme S di matrici 3×3*

$$S = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbf{R}) \ : \ a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0\}.$$

a) *Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbf{R})$. In caso affermativo, trovarne la dimensione.*
b) *Sia $Sim_3(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Trovare una base dello spazio intersezione $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$.*

Esercizio 7.97. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A + A^T = 0\right\}.$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che ogni elemento di W ha rango minore di 3.*

Esercizio 7.98. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0\right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Calcolare le coordinate di* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Esercizio 7.99. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per } i \geq j\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che per ogni matrice A in W, la matrice A^2 ha rango minore di 2.*

---

1. Suggerimenti

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Osservazioni

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice $n \times m$, allora $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
- Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice.

Rouchè-Capelli.
Un sistema di equazioni $Ax = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

Inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite.
- Ammette infinite soluzioni se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <$ numero delle incognite.

Dipendenza lineare.
Sia V uno spazio lineare e $v,\ v_i$ vettori di V.

- v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = v$$

ammette soluzione.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|b$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$ e b è data dal vettore v. In tale caso:

v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ sse $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

- $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** se l'equazione:
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$$
ammette la **sola** soluzione nulla $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$.
Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|0$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$. In tale caso:
$v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** sse $\text{rg}(A) = n$

Basi e dimensione.

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sottinsieme di V. Diciamo che S è una **base** di V se:

(1) S è un insieme generatore di V: $V = \langle S \rangle$, cioè ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S.
(2) Gli elementi di S sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base.

Nel caso particolare in cui $V = \mathbf{R}^n$ sappiamo che S per essere una base deve essere formato da n elementi, ed è sufficiente verificare che gli n elementi di S siano linearmente indipendenti. Ragionando sui ranghi, n **vettori di $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se la matrice associata ha rango n.**

Spazi vettoriali

- Nel caso particolare di
$$V = \langle\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n \rangle,$$
se indichiamo con A la matrice formata dai vettori colonna $v_1, \dots, v_n$, allora:
$$\begin{aligned} &\dim(V) = \text{rg}(A) \\ &\mathcal{B}(V) = \text{base di } V \quad = \{\text{vettori linearmente indipendenti tra } v_1, \dots, v_n\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \{\text{vettori tra } v_1, \dots, v_n \text{ corrispondenti ai pivot di } A\ \} \end{aligned}$$
- Nel caso particolare di
$$V = \{\ \text{soluzioni di un sistema omogeneo}\ \},$$
se indichiamo con A la matrice associata al sistema e con n il numero delle incognite, allora:
$$\begin{aligned} &\dim(V) = n - \text{rg}(A) \\ &\mathcal{B}(V) = \text{base di } V = \{\text{generatori delle soluzioni una volta scritte in forma vettoriale}\ \} \end{aligned}$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 7.1. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.

- Se $t=-1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&0&-1\\0&0&-4\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{c}\\ \\ III-4II\end{array}\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$
Quindi se $t=-1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1)=2$.
- Se $t=3$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&4&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$
Quindi se $t=3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1)=2$.

Analogamente potevamo calcolare il rango di A_1 ragionando sui determinanti.
$$\det(A_1)=(t+1)(t-3)$$
Quindi:
- Se $t\neq -1,3$, la matrice ha determinante non nullo, quindi A_1 ha rango 3.
- Se $t=-1$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1)\leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
$$\begin{bmatrix}-4&2\\0&-1\end{bmatrix}$$
con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_1)=2$
- Se $t=3$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1)\leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
$$\begin{bmatrix}1&-4\\0&4\end{bmatrix}$$
con determinante non nullo. Quindi anche in questo caso $\text{rg}(A_1)=2$.

- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  - Se $t\neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2)=3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t=3$ e $t=0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    * Se $t=3$:
$$A_2=\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&4&-1\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{c}\\ \\ IV\\ III\end{array}\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&4&-1\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$
Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
    * Se $t=0$:
$$A_2=\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&1&-1\\0&0&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$$
Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
  - Se $t=-1$ otteniamo la matrice
$$A_2=\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&0&-1\\0&0&-4\\0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{c}\\ \\ III+4II\\ IV-II\end{array}\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
Quindi se $t=-1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2)=2$.

Calcoliamo ora il rango di A_2 ragionando sui determinanti. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3
$$B=\begin{bmatrix}1&-4&2\\0&t+1&-1\\0&0&t-3\end{bmatrix}$$
il cui determinante vale
$$\det(B)=(t+1)(t-3)$$

Quindi:
- Se $t \neq -1, 3$, la matrice B ha determinante non nullo, quindi A_2 ha rango 3.
- Se $t = -1$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza per $t = -1$ ogni sottomatrice 3×3 di A_2 ha determinante nullo, mentre

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

Di conseguenza $\text{rg}(A_2) = 2$
- Se $t = 3$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In A_2 troviamo quindi la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_2) = 3$.

- Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
- Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.
- Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

Ragionando invece sui determinanti notiamo che A_3 contiene la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & t \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $-2t$.

Di conseguenza
- Se $t \neq 0$ la matrice A_3 ha rango 3.
- Se $t = 0$ otteniamo la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha una riga nulla, quindi tutte le sottomatrici 3×3 di A_3 hanno determinante nullo e $\text{rg}(A_3) \leq 2$. Inoltre in A_3 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi in questo caso $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 7.2. *Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$ vettori colonna. Dimostrare che la matrice $A = vw^T \in M_n(\mathbf{R})$ ha rango* 0 *oppure* 1.

Soluzione:
Siano $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w^T = (w_1, w_2, \dots w_n)$, allora vw^T è una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_n \\ v_2w_1 & v_2w_2 & \dots & v_2w_n \\ \dots \\ v_nw_1 & v_nw_2 & \dots & v_nw_n \end{bmatrix}$$

In sostanza ogni riga di A è un multiplo della riga formata da w^T. Se $v = 0$ o $w = 0$, allora anche la matrice A è nulla e $\text{rg}(A) = 0$, altrimenti A può essere ridotta nella matrice

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove la riga ottenuta è non nulla, quindi se $v \neq 0$ e $w \neq 0$ la matrice $A = vw^T$ ha rango 1.

□

Esercizio 7.3. *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Notiamo che il numero delle incognite del sistema corrisponde al numero delle colonne di A.

Riduciamo quindi $A|b$ a gradini per calcolarne il rango:

$$\begin{matrix} \\ II + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni.

□

Esercizio 7.4. *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Soluzione:
Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + 1/2I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k-1$ e $k+2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$ quando, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

□

Esercizio 7.5. *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

ammette un'unica soluzione.

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + (k-1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa sono entrambi tre. Dalla matrice ridotta questo avviene per $k \neq 0, 2$.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che per $k = 2$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k = 0$ ne ammette infinite.

In alternativa potevamo calcolare il rango della matrice ragionando sui determinanti:

$$\det(A) = 1 - k - 1 - k(1-k) = k^2 - 2k$$

Quindi se $k \neq 0, 2$, la matrice A ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.

□

Esercizio 7.6. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema é compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere due casi:
   – Se $k = \frac{1}{3}$ allora $\text{rg}(A) = 2$ mentre $\text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzioni.
   – Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette una unica soluzione.

   Per rispondere alla domanda a) potevamo anche ragionare sul determinante:

$$\det(A) = 2(-k-k) + (k+1) = -3k + 1$$

   Quindi
   – Se $k \neq \dfrac{1}{3}$, la matrice A ha detereminante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.
   – Per $k = \dfrac{1}{3}$ otteniamo la matrice (numerica, quindi facilissima da ridurre a gradini, se preferiamo utilizzare la riduzione a questo punto)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

   Poiché $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 2$. In $A|b$ troviamo la sottomatrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & | & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & | & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è non nullo, quindi $\text{rg}(A|b) = 3$. Quindi se $k = \dfrac{1}{3}$ si ha $\text{rg}(A) \leq 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Risolviamo il sistema per $k \neq \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 2x_{-}x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 7.7. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = k + 3 \\ -2x + 6y + (k+7)z = 2k + 9 \\ x - 4y - 2z = k - 2 \\ 3x - 6y + (k-7)z = k^2 - k - 9 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione e per quali k ne ammette infinite.*

b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ -2 & 6 & k+7 & | & 2k+9 \\ 1 & -4 & -2 & | & k-2 \\ 3 & -6 & k-7 & | & k^2-k-9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 1 & | & 2k+1 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & k+2 & | & k^2+2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & | & k+3 \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 2k+4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2-4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2 - 4 = 0$ se $k = \pm 2$, e che $k + 2 = 0$ se $k = -2$. Di conseguenza:
   - Se $k \neq \pm 2$ allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ quindi il sistema non ammette soluzione.
   - Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette una unica soluzione.
   - Se $k = -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideriamo il caso $k = -2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8t - 10 \\ y = t \\ z = 2t - 3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

$\square$

Esercizio 7.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} kx + ky + k^2 z & = 4 \\ x + y + kz & = k \\ x + 2y + 3z & = 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*

b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni?*

Soluzione:

Poichè non ci sono richieste esplicitamente le soluzioni, ma solo la loro esistenza, utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Ricordiamo inoltre che:

Il **rango** *di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.* In seguito vedremo altri metodi per calcolare il rango di una matrice.

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Il sistema è compatibile se il rango della matrice completa e incompleta coincidono. Per determinare il rango riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k-3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice incompleta ha due pivot, quindi ha rango 2. La matrice completa ha rango 2 solamente se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$.

Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Per $k = \pm 2$ il rango della matrice è 2, mentre le incognite sono 3, quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 7.9. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*

b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

– Se $k \neq 1, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbf{R}$.

– Se $k = 1$ si ha $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+1) \cdot \dfrac{1}{3} + (k-2) \cdot 1 = 1 \\ (k-2) \cdot 1 = k-2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2$$

Oppure si poteva sostituire nel sistema iniziale, ottenendo le condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} - 2 + \dfrac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} + 2 + \dfrac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\dfrac{7}{3} + \dfrac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

Quindi $v \in \text{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 7.10. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x + kz = 1 \\ x + (k-1)y + (k+1)z = 1 \\ x + (k-1)y + (k^2 + 4k + 3)z = k + 3 \end{cases}$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. In tali casi stabilire anche se ne ammette una o infinite.

SOLUZIONE:

Utilizziamo il Teorma di Rouchè-Capelli per stabilire quando il sistema ha soluzione. A tale scopo consideriamo la matrice $A|b$ associata al sistema e la riduciamo a gradini per stabilirne il rango.

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 1 & k-1 & k+1 & | & 1 \\ 1 & k-1 & k^2+4k+3 & | & k+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & | & k+2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora i pivot di A osservando che $k^2 + 3k + 2 = 0$ quando $k = -1$ o $k = -2$. Dobbiamo quindi distinguere tre casi.

- Se $k \neq 1, -1, -2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 =$ numero delle incognite del sistema. Quindi in questi casi il sistema ammette una unica soluzione.

- Se $k = 1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 6II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k = -1$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.
- Infine se $k = -2$ la matrice $A|b$ diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema ammette soluzione. Poichè inoltre il rango è inferiore al numero delle incognite, in questo caso il sistema ammette infinite soluzioni.

□

Esercizio 7.11. *Si consideri il sistema lineare*
$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ kx + y + z = 5 \\ x + y + kz = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile.*
b) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione.*

Soluzione:

Dal teorema di Rouchè Capelli sappiamo che il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, e ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|b$ associata a tale sistema per calcolarne il rango:
$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 2k-1 \\ k & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & k & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ I \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 1 & k & 1 & | & 2k-1 \\ k & 1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ II - I \\ III - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 2k-1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 2k-1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & | & 2k+4 \end{bmatrix}$$
Notiamo che $-k^2 - k + 2 = 0$ se $k = 1$ o $k = -2$, di conseguenza:

- Se $k \neq 1, -2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema è risolubile.
- Se $k = 1$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non è risolubile.
- Se $k = -2$ otteniamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ ke il sistema è risolubile, con infinite soluzioni.

In conclusione:

a) Il sistema ammette soluzione se $k \neq 1$.
b) Il sistema ammette una unica soluzione soluzione se $k \neq 1, -2$ (Per $k = -2$ il sistema ammette infinite soluzioni).

.

□

Esercizio 7.12. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} kx + y + z & = 1 \\ y + z & = k \\ 3x + ky + 2z & = 2 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Discutere l'esistenza e unicità di soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare le eventuali soluzioni del sistema al variare di k.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 3 & k & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ k & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 3-k^2 & 3-2k & | & 3-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - (3-k^2)II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & k & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & k^2-2k & | & k^3-5k+3 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $k^2 - 2k = 0$ se $k = 0$ o $k = 2$, di conseguenza:
   – Se $k \neq 0, 2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema è risolubile e ammette una unica soluzione.
   – Se $k = 0$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è risolubile.
   – Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è risolubile.

   Per rispondere alla domanda a) potevamo anche utilizzare il determinante:

$$\det(A) = k(2-k) + 3(1-1) = k(2-k)$$

   Quindi
   – Se $k \neq 0, 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette una unica soluzione.
   – Se $k = 0$ allora $\text{rg}(A) \leq 2$ e la matrice $A|b$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

   A questo punto per calcolare $\text{rg}(A|b)$ possiamo ridurre la matrice a gradini, oppure osservare che $A|b$ contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

   con determinante non nullo. Quindi per $k = 0$ è $\text{rg}(A) \leq 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema non ammette soluzioni.
   – Se $k = 2$ allora $\text{rg}(A) \leq 2$ e la matrice $A|b$ diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

   A questo punto per calcolare $\text{rg}(A|b)$ possiamo ridurre la matrice a gradini, oppure osservare che $A|b$ contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

   con determinante non nullo. Quindi anche per $k = 2$ è $\text{rg}(A) \leq 2 < 3 = \text{rg}(A|b)$ e il sistema non ammette soluzioni.

b) Risolviamo il sistema nei casi $k \neq 0, 2$:

$$\begin{cases} 3x + ky + 2z = 2 \\ y + z = k \\ (k^2 - 2k)z = k^3 - 5k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-k^2 + 3k - 2}{k^2 - 2k} = \dfrac{1-k}{k} \\ y = \dfrac{-2k^2 + 5k - 3}{k^2 - 2k} \\ z = \dfrac{k^3 - 5k + 3}{k^2 - 2k} \end{cases}$$

.

$\square$

Esercizio 7.13. *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} (1 + k)x = 0 \\ ky + z + w = 2 \\ x + kz + 2w = k \\ x + kw = 0 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette una unica soluzione.*
b) *Si determinino tutte le soluzioni del sistema per $k = 0$.*

Soluzione:

La matrice associata a al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 & | & k \\ 1 & 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il sistema ammette una unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$. Utilizzando il determinante, ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = (1 + k) \cdot \det \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = (1 + k)k^3$$

Quindi il sistema ammette una unica soluzione quando $k \neq 0, -1$.

b) Torniamo al sistema nel caso $k = 0$ (senza la necessità di ridurre la matrice associata):

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 2 \\ x + 2w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$\square$

Esercizio 7.14. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = t - 2 \\ tx_1 + (t - 4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (2 - 2t)x_2 = 2t - 4 \end{cases} \qquad (t \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di t il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di t che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ t & t-4 & | & 0 \\ 2 & 2-2t & | & 2t-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - tI \\ III - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 4-2t & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & t-2 \\ 0 & 2t-4 & | & -t^2+2t \\ 0 & 0 & | & -t^2+2t \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che $-t^2+2t=0$ se $t=0$ o $t=2$, e che $2t-4=0$ se $t=2$. Di conseguenza:
   - Se $t \neq 0,2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è compatibile.
   - Se $t=0$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   - Se $t=2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $t=0$:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$
Se $t=2$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1 - x_2 = 0$ le cui soluzioni sono
$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 7.15. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*
$$\begin{cases} x_1 - (k+1)x_2 = k \\ 2x_1 - 2x_2 = 2k \\ (k+2)x_1 + (k-2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{(t parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

SOLUZIONE:
Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema
$$\begin{bmatrix} 1 & -k-1 & | & k \\ 2 & -2 & | & 2k \\ k+2 & k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2II \\ I \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 1 & -k-1 & | & k \\ k+2 & k-2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-(k+2)I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2k & | & -k(k+2) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & k \\ 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 0 & | & -k(k+2) \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi:
   - Se $k \neq 0, -2$ allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema non è compatibile.
   - Se $k=-2$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$ quindi il sistema è compatibile, e ammette una soluzione.
   - Se $k=0$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ quindi il sistema è compatibile, e ammette infinite soluzioni.

b) Consideriamo il caso $k=-2$:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$
Se $k=0$ il sistema si riduce alla sola equazione $x_1 - x_2 = 0$ le cui soluzioni sono
$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

.

□

Esercizio 7.16. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*
$$\begin{cases} kx_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k-1 \\ kx_1 + kx_2 = 2k \end{cases} \qquad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema ammette soluzione, specificando se e quando ne ammette una o infinite.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, si determinino le sue soluzioni.*

Soluzione:
La matrice associata al sistema è

$$A|b = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

a) Utilizziamo il determinante per calcolare $\text{rg}(A)$ e $\text{rg}(A|b)$.

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [k(k-1) - k(k-1)] = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

Poiché $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 3$ per ogni k. Viceversa in $A|b$ troviamo la sottomatrice quadrata

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & | & k-1 \\ k & 0 & 0 & | & 2k \end{bmatrix}$$

che ha determinante

$$\det = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k-1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2k \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2)[2k(k-1) - k(k-1)] = -2(k^2 - k)$$

Tale determinante si annulla per $k = 0, 1$, quindi sicuramente se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A|b) = 4$.

Abbiamo così ottenuto che se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) \leq 3$, mentre $\text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

Si tratta ora di considerare i due casi $k = 0$ e $k = 1$.

Se $k = 0$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi anche se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni.

b) Abbiamo visto che il sistema ha soluzione solo se $k \neq 0, 1$. Inoltre se $k = 0$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = -1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Analogamente nel caso $k = 1$ abbiamo ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t + 2 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t + 1 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 7.17. *Al variare del parametro reale k, si risolva il sistema di equazioni lineari omogenee:*

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \textit{(t parametro reale)}$$

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice dei coefficienti associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & k \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k-1 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro in corrispondenza dei pivot.

- Se $k = 0$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \quad S = \{(0, t, 0, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

  Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|0) = 3$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con un solo parametro libero (dato da $4 - \text{rg}(A)$).

- Se $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$S = \left\{ \left(t - s, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s, t, s \right) \mid s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|0) = 2$. Poiché si tratta di un sistema in quattro incognite, nell'insieme delle soluzioni ci sono infinite soluzioni con due parametri libero (dato da $4 - \text{rg}(A)$).

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice dei coefficienti ha rango $3 < 4 =$ numero delle incognite, quindi il sistema ammette comunque infinite soluzioni con un solo parametro libero

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2(k-1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + kx_4 = 0 \\ 2kx_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4k}{3}(1+k)t \\ x_2 = t \\ x_3 = -\frac{2k}{3}t \\ x_4 = \frac{4k}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \ S = \left\{ \left(-\frac{4k}{3}(1+k)t, \ t, \ -\frac{2k}{3}t, \ \frac{4k}{3}t \right) \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

  Notiamo che abbiamo scelto x_2 come variabile libera in modo da non dovere dividere per k per determinare la soluzione. Inoltre con tale scelta non è in realtà necessario distinguere il caso $k = 0$ precedentemente discusso.

.

$\square$

Esercizio 7.18. *Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

a) *Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzione.*
b) *Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il sistema ha soluzione unica.*

Soluzione:
La matrice $A|b$ associata al sistema è:

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ k & 0 & 0 & k & | & 1 \end{bmatrix}$$

Per ridurre a gradini la matrice scambiamo la prima e terza colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k & k & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-2k & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & k & k & | & 1 \end{bmatrix}$$

a) Se $k \neq \frac{1}{2}$, 0, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (infinite) soluzioni. Se $k = \frac{1}{2}$ o $k = 0$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ha soluzione.
b) La matrice A è 3×4, quindi A ha sempre rango minore o uguale a tre, cioè minore del numero delle incognite e il sistema non può ammettere soluzione unica.

□

Esercizio 7.19. *Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \qquad k \text{ parametro reale.}$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.*
b) *Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2 \cdot [2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) : \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(-4,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 31II - 8I \\ \\ 2IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 31IV + 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A) : \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(0,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

□

Esercizio 7.20. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Indicare basi per lo spazio delle righe e per lo spazio delle colonne di A.*
b) *Esistono valori $t \in \mathbf{R}$ per cui il sistema $Ax = b$, con $b = (1,1,t,t)$ ammetta soluzione?*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & t \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t-2 \\ 0 & 1 & 1 & | & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & t-4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

A questo punto della riduzione siamo già in grado di rispondere alle domande.

a) La matrice A ha rango due, inoltre

$$\mathcal{B}(\text{spazio delle colonne}) = \{(1,-1,2,0),\ (0,1,1,1)\}$$
$$\mathcal{B}(\text{spazio delle righe}) = \{(1,0,-2),\ (-1,1,3)\}$$

b) La matrice $A|b$ ha rango 3 per ogni valore di t, quindi il sistema $Ax = b$ non ammette mai soluzione.

□

Esercizio 7.21. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) *Si calcoli il rango di A.*

b) *Si stabilsca per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k+2 \\ 3 & k+11 & 5k+7 \\ -1 & -3 & k^2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II-3/2I \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k+1 \\ 0 & k+2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice A ha rango 3 se $k \neq 1, -2$, ha rango 2 se $k = 1$ e ha rango 1 se $k = -2$.

b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbf{R}^3$ se la matrice dei coefficienti ha rango 3 nel qual caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ per ogni $b \in \mathbf{R}^3$, ovvero se $k \neq 1, -2$.

□

Esercizio 7.22. *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Notiamo che il vettore $xv_1 + yv_2 + zv_3$ è dato da:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = (2x - y + 3z,\ x + y - 2z,\ x + 2y - z)$$

quindi all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ associamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta del sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 1 & 1 & -2 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

dove A è la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, e b è dato dal vettore v_4. In generale passeremo direttamente dall'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ al sistema $A|b$ associato.

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Riduciamo quindi la matrice a gradini:

$$\begin{array}{l} \\ 2II - I \\ III - II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ 3III - II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ammette (una unica) soluzione e v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

□

Esercizio 7.23. *Siano dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0,k^2+2,3), \qquad v_4 \equiv (1,k+3,k^2+2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.

Soluzione:

Si tratta di stabilire se il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione. Consideriamo la matrice associata a tale sistema

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 7 & k^2+2 & | & k+3 \\ 1 & 7 & 3 & | & k^2+2 \end{bmatrix}$$

Per Rouchè - Capelli il sistema ammette soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Riduciamo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{l} \\ II - I \\ III - II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & k^2+2 & | & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & | & k^2-k-1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il pivot della terza riga e distinguiamo i casi necessari.

- Se $k \neq \pm 1$ sia la matrice completa che quella incompleta hanno 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette (una unica) soluzione. Di conseguenza v_4 è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = 1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
- Se $k = -1$ la matrice diventa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$
Quindi A ha 2 pivot, mentre $A|b$ ne ha 3. Dal momento che $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$ il sitema non ammette soluzioni e v_4 non è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

□

Esercizio 7.24. *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di* $\mathbf{R}^3$*.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Soluzione:

Sappiamo che tre vettori di $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & k-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III + II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ III - 2II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

Ragionando sui ranghi:

- Se $k \neq 1$ la matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3 e $v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.
- Se $k = 1$ la matrice ha 2 pivot, quindi ha rango 2 e $v_1,\ v_2$ e v_3 non formano una base di $\mathbf{R}^3$.

In alternativa potevamo calcolare il rango utilizzando il determinante:

$$\det(A) = (k - 6 + 21) - (2k - 12 + 14) + 3(-6 + 2) = -k + 1$$

$v_1,\ v_2$ e v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$ se la matrice associata ha rango 3, ovvero se ha determinante non nullo, cioè $k \neq 1$.

$\square$

Esercizio 7.25.

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0, 1, 1), \quad v_2 = (-1, k, 0), \quad v_3 = (1, 1, k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$.

b) *Esprimere il vettore* $v = (2, 1, 2)$ *come combinazione lineare di* v_1, v_2, v_3.

Soluzione:

Per rispondere alla domanda a) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette **solo** la soluzione nulla, ovvero che la matrice A associata ai tre vettori ha sempre rango 3.

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo verificare che l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ ammette soluzione (e non ha importanza se ne ammette una oppure infinite), ovvero che $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$, dove $A|b$ è la matrice associata all'equazione.

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo quindi direttamente a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & k & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & k & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & k & 1-k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III + kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1+2k \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda ci interessa solo la matrice A dei cofficienti. La matrice dei coefficienti ha sempre rango 3, quindi l'equazionine $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ ammette la sola soluzione nulla e v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti per ogni valore di k.

b) Risolviamo il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + kz = 2 \\ -y + z = 2 \\ z = 2k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k^2 + k + 2 \\ y = 2k - 3 \\ z = 2k - 1 \end{cases}$$

Quindi

$$v = (-2k^2 + k + 2)v_1 + (2k - 3)v_2 + (2k - 1)v_3$$

è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

$\square$

Esercizio 7.26. *In* $\mathbf{R}^3$ *siano*

$$v_1 = (k, 2, 1), \quad v_2 = (-2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbf{R}^3$.

b) *Per i valori trovati al punto* a), *si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2, 1, 2)$ *rispetto a tale base.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 e dal vettore v come colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} k & -2 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ k & -2 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-2I \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & -2 & -k & | & -2-2k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -k-2 & | & -2k-8 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti ha rango 3 se $k \neq -2$, quindi v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ se $k \neq -2$.
b) Risolviamo, per $k \neq -2$, il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ di cui abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -3 \\ (k+2)z = 2k + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{k+2} \\ y = \frac{-k+2}{k+2} \\ z = \frac{2k+8}{k+2} \end{cases}$$

Infine v ha coordinate $\left(-\dfrac{4}{k+2}, \dfrac{-k+2}{k+2}, \dfrac{2k+8}{k+2}\right)$ rispetto a $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

□

Esercizio 7.27. *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di V.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice associata dai tre vettori v_1, v_2, v_3 affiancata dal vettore v per rispondere a entrambe le domande.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II+I \\ III+2I \\ IV+I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/2II \\ 2III-II \\ IV-III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Il rango di A è 2 e una base di V è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.
b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 = v$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale equazione (basta ignorare la terza colonna relativa a v_3). quindi

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow\ v = 2v_1 + 2v_2, \qquad v = (2, 2)_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 7.28. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2, 1, 1), \qquad v_2 \equiv (-1, 1, 2), \qquad v_3 \equiv (3, -2, -1), \qquad v_4 \equiv (4, -1, -2).$$

Determinare una base di V. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Soluzione:
Dalla teoria sappiamo che m vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$ generano un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $m \leq n$. E' evidente che trattandosi di 4 vettori di $\mathbf{R}^3$ i vettori sono sicuramente linearmente dipendenti.

Per rispondere a entrambe le domande calcoliamo comunque il rango della matrice A associata ai quattro vettori riducendola a gradini, in modo da individuare quale (o quali) vettore dipende linearmente dagli altri.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo le matrici equivalenti

$$\begin{array}{r} \\ 2II - I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 3III - II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che $\text{rg}(A) = 3$, quindi tre dei quattro vettori di partenza sono linearmente indipendenti. In particolare anche la matrice formata dalle prime tre colonne, ovvero da $v_1,\ v_2$ e v_3 ha rango 3. Quindi può essere presa come base di V l'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

Si tratta ora di esprimere v_4 come combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3, ovvero di risolvere l'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Notiamo che la riduzione a gradini della matrice associata a tale equazione vettoriale l'abbiamo già effettuata per determinare il rango della matrice associata ai quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -7 & | & -6 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3y - 7z = -6 \\ 10z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = -\frac{13}{10} \\ z = \frac{3}{10} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$v_4 = \frac{9}{10}v_1 - \frac{13}{10}v_2 + \frac{3}{10}v_3.$$

Inoltre si ha banalmente:

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3, \qquad v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, \qquad v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

$\square$

Esercizio 7.29. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2, 1, 2, 1), \qquad v_2 \equiv (6, 7, 8, 5)$$
$$v_3 \equiv (2k, k + 8, 3k + 3, 2), \qquad v_4 \equiv (0, 2k, 2k, 1).$$

Determinare una base di V al variare del parametro k. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

SOLUZIONE:

Riduciamo a gradini la matrice A associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2k & 0 \\ 1 & 7 & k+8 & 2k \\ 2 & 8 & 3k+3 & 2k \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 1/2I \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 1 & 7 & k+8 & 2k \\ 2 & 8 & 3k+3 & 2k \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2k \\ 0 & 2 & k+3 & 2k \\ 0 & 2 & 2-k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/2II \\ III - 1/2II \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 2 & 4 & k \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & -2k-1 & 1-2k \end{bmatrix} = A'$$

Conviene non completare la riduzione e discutere a questo punto i valori del parametro. Infatti in generale durante le operazioni di riduzione non si ottiene necessariamente $\det(A) = \det(A')$, ma, poiché $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$, si ha che $\det(A) = 0$ sse $\det(A') = 0$. Possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A' per calcolare il rango di A:

$$\det(A') = 1 \cdot 2 \cdot [(k - 1)(1 - 2k) - (-2k - 1)k] = 2(4k - 1)$$

Di conseguenza:

- Se $k \neq \dfrac{1}{4}$, si ha $\det(A') \neq 0$, quindi $\det(A) \neq 0$ e $\text{rg}(A) = 4$. Di conseguenza i quattro vettori sono linearmente indipendenti:
$$\dim(V) = 4, , \qquad \mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}\,.$$
Per esprimere ogni vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo la soluzione banale:
$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \qquad v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$$
$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \qquad v_4 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$$

- Se $k = \frac{1}{4}$ si ha $\det(A) = \det(A') = 0$ e la matrice ha rango sicuramente minore di 4. Possiamo ora procedere con la riduzione
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 4II \\ 4III \\ 2IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$ e $v_1,\ v_2$ e v_3 (oppure $v_1,\ v_2$ e v_4) sono linearmente indipendenti.
$$\dim(V) = 3, , \qquad \mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\ \}\,.$$
Per esprimere v_4 in funzione degli elementi di tale base risolviamo l'equazione $xv_2 + yv_2 + zv_3 = v_4$ la cui matrice associata si riduce a
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & | & 0 \\ 0 & 8 & 16 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Tornando al sistema associato otteniamo
$$\begin{cases} x + 3y + \dfrac{1}{4}z = 0 \\ 8y + 16z = 1 \\ -3z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{55}{24} \\ y = +\frac{19}{24} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
ovvero
$$v_4 = -\frac{55}{24} \cdot v_1 + \frac{19}{24} \cdot v_2 - \frac{1}{3} \cdot v_3$$

Inoltre:
$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3, \qquad v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3, \qquad v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

□

Esercizio 7.30. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori:*
$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1, 3, 0, 3), \qquad v_3 \equiv (-1, -2, 1, -1).$$
Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice A associata a tale insieme di vettori per stabilire se, o quali vettori sono linearmente indipendenti.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \\ 3k-2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Utilizziamo il determinante. Consideriamo la sottomatrice B formata dalle prime 3 righe:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k-1 & 3 & -2 \\ k^2-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -(k - 1 + 2k^2 - 2) - (-3k^2 + 3) = k^2 - k$$
il cui determinante si annulla per $k = 0, 1$. Quindi:

- Se $k \neq 0, 1$ la matrice associata ai tre vettori ha rango 3. Di conseguenza $\dim(V) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \left\{(0, k-1, k^2-1, 3k-2),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\right\}.$$
- Se $k = 0$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ IV - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\mathrm{rg}(A) = \dim(V) = 2$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{\ v_1,\ v_2\} = \{(0,-1,-1,-2),\ (1,3,0,3)\}$$
- Se $k = 1$ la matrice A diventa:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
Notiamo che A contiene la sottomatrice C:
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(C) = 1 \cdot 3 \neq 0$$
Quindi anche per $k = 1$, $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} = \{(0,0,0,1),\ (1,3,0,3),\ (-1,-2,1,-1)\}.$$

□

Esercizio 7.31. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:*
$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$
Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai 4 vettori:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 3 & k & 1 \\ 1 & 4 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \\ III - I \\ IV + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & k \end{bmatrix}$$

Chiamiamo A' la matrice ridotta così ottenuta. Sappiamo che $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A)$. Sappiamo inoltre che il rango di una matrice corrisponde, oltre che al numero di pivot, al massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo. Senza proseguire ulteriormente nella riduzione possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A' per calcolarne il rango:
$$\det(A') = -1 \cdot (k+1) \cdot [(k-1)k - 2] = -(k+1)(k^2 - k - 2)$$
e $\det(A') = 0$ se $k = -1$ o $k = 2$. Di conseguenza

- Se $k \neq -1, 2$, $\det(A') \neq 0$, quindi la matrice A ha rango 4, e $\dim(W) = 4$.
- Se $k = -1$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\mathrm{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione A diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-1(-2-5) \neq 0$.
Quindi A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

- Se $k = 2$ la matrice A' ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A) < 4$, e dopo un ulteriore passo di riduzione diventa
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
Questa contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
di determinante $-3 \neq 0$.
Quindi anche in questo caso A ha rango 3 e $\dim(W) = 3$.

In alternativa tutto l'esercizio poteva essere svolto completando la riduzione a gradini di A.

□

Esercizio 7.32. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$
$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k-3, 0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & k \\ 2 & -4 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - 2/3I \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Infine
 - Se $k \neq 1$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
 - Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La matrice ha rango 2, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.
Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:
 - Se $k = 1$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi se $k = 1$, $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$.
 - Se $k \neq 1$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$.

□

Esercizio 7.33. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$
$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k-6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Soluzione:

a) Si tratta di stabilire quando il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2, ovvero quando il sistema associato all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = v_3$ ammette soluzione. Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 2 & -4 & | & 6 \\ -1 & 2 & | & k-6 \\ 3 & -6 & | & 3k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+I \\ 1/3IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & k-3 \\ 0 & 0 & | & k-3 \end{bmatrix}$$

Infine
- Se $k \neq 3$, $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A|b) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Di conseguenza v_3 non appartiene a W.
- Se $k = 3$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1$ e il sitema ammette (infinite) soluzioni. Di conseguenza v_3 appartiene a W.

b) Per determinare una base di W dobbiamo calcolare il rango della matrice associata a v_1 e v_2. Abbiamo già ridotto a gradini tale matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 1, quindi v_1 e v_2 non formano una base, sono infatti linearmente dipendenti. Di conseguenza uno solo dei vettori è sufficiente a generare tutto lo spazio e una base di W è data per esempio da $\{v_1\}$.

Determiniamo ora una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Dobbiamo distinguere due casi:
- Se $k = 3$, v_3 appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi se $k = 3$, $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = W$ e una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ è la stessa di W, quindi $\{v_1\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k = 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 1 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1\}$$

- Se $k \neq 3$, v_3 non appartiene a $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Quindi per ottenere una base di $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ dobbiamo aggiungere alla base di W il vettore v_3, ottenendo quindi la base $\{v_1, v_3\}$. Analogamente la matrice, già ridotta, associata a v_1, v_2 e v_3 nel caso $k \neq 3$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = \dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = 2 \text{ e } \mathcal{B}(\langle v_1, v_2, v_3\rangle) = \{v_1,\ v_3\}$$

□

Esercizio 7.34. *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (3, 7, k+1, 2k+2),\ v_2 = (2, 2k+2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.
b) *Si determini una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice A associata ai quattro vettori:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 7 & 2k+2 & 1 & -7 \\ k+1 & 0 & 0 & -1 \\ 2k+2 & 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo v_3 con v_1, ricordando poi tale scambio per rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2k+2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II-I \\ \\ IV-2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2k & 4 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k+2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 0, -1$, allora $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Inoltre $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Se $k = 0$, la matrice diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow III-4II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3, v_4\} = \{(3,7,1,2),\ (1,1,0,0),\ (-3,-7,-1,0)\}.$$
- Se $k = -1$, la matrice diventa
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi $\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Inoltre
$$\mathcal{B}(V) = \{v_2, v_3, v_4\} = \{(2,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (-3,-7,-1,-2)\}.$$

□

Esercizio 7.35. *Determinare una base dei seguenti sottospazi W di $\mathbf{R}^3$:*

(1) $W = \langle (1,2,5), (-3,-6,-15) \rangle$
(2) $W = \langle (1,2,5), (-3,-6,-15), (2,1,0) \rangle$
(3) $W = \langle (-1,2,0), (0,1,-1), (1,-1,2) \rangle$

Soluzione:

(1) Determiniamo se i due vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II-2I \\ III-5I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza $\mathrm{rg}(A) = 1$ e
$$\dim(W) = 1, \qquad \mathcal{B} = \{(1,2,5)\}$$

(2) Determiniamo se i tre vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & -15 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II-2I \\ III-5I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow 3III-10II \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza $\mathrm{rg}(A) = 2$ e
$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B} = \{(1,2,5),\ (2,1,0)\}$$

(3) Determiniamo se i tre vettori sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice associata:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II+2I \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow III+II \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(W) = 3, \qquad \mathcal{B} = \{(-1, 2-0),\ (0, 1, -1),\ (1, -1, 2)\}$$

$\square$

Esercizio 7.36. *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbf{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^3$.
b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione:
Consideriamo la matrice A associata ai tre vettori:

$$A = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+3 & 3 & 3k \\ 0 & k+2 & k \end{bmatrix}$$

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^3$ se $\dim(V) = 3$, cioè se $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$. Calcoliamo quindi il determinante di A che è immediato sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det(A) = (k+3)[3k - 3k(k+2)] = 3k(k+3)(-k-1)$$

Quindi se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti e $V = \mathbf{R}^3$.
b) Abbiamo già osservato che se $k \neq 0, -1, -3$, i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Inoltre:
   – Se $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -1$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e una possibile base è $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$.
   – Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

   Quindi $\dim(V) = 2$ e $\mathcal{B}(V) = \{v_2,\ v_3\}$.

$\square$

Esercizio 7.37. *Sia* V *lo spazio vettoriale generato dai vettori* $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ *e* $v_3 = (0, -1, 3, 0)$*:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale* V.
(2) *Determinare se il vettore* $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ *appartiene a* V*. In caso positivo esprimere* v_4 *come combinazione lineare di* v_1, v_2 *e* v_3.
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale* $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.

Soluzione:
Per potere rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ -2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 4 & -1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \\ III-4I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 7 & -1 & | & 7 \\ 0 & -9 & 3 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ IV \\ 1/3III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 7 & -1 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+3II \\ IV-7II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora risponedere alle domande.

(1) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale V calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$.

.

(2) Per determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V consideriamo la matrice completa e torniamo al sistema associato:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza il vettore v_4 appartiene a V:

$$v_4 = v_1 + v_2$$

(3) Per determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$ consideriamo la matrice completa B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice ha 3 pivot, quindi

$$\dim(W) = \text{rg}(B) = 3$$

Notiamo che potevamo risponedere a questa domanda semplicemente osservando che dal punto predente sappiamo che $v \in V$, quindi $W = V$ e $\dim(W) = \dim(V) = 3$.

□

Esercizio 7.38. *Sia*

$$V = \langle\ (1, 1, 2, -1),\ (2, k+3, 4, -2),\ (0, 1, 1, k^2 - 1)\ \rangle$$

con k parametro reale.

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_4 = (3, 3, k+6, -3)$ appartiene a V.*

SOLUZIONE:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori v_1, v_2 e v_3, affiancata dalla colonna dei termini noti formata dal vettore v_4 (in modo da risolvere anche l'equazione

$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & k+3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & k+6 \\ -1 & -2 & k^2-1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - (k^2-1)III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & -k(k^2-1) \end{array}\right]$$

a) Consideriamo la matrice A.
   – Se $k \neq -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 3 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

   – Se $k = -1$ allora

$$\text{rg}(A) = 2 = \dim(V), \qquad \mathcal{B}(V) = \{v_1, v_3\}.$$

b) v_4 appartiene a V se il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$ ammette soluzione, ovvero se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.
   Notiamo che $-k(k^2-1) = 0$ se $k = 0, \pm 1$. Quindi
   – Se $k \neq 0, \pm 1$, allora $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$ e v_4 non appartiene a V.
   – Se $k = 0$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
   – Se $k = 1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Quindi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 appartiene a V.
   – Se $k = -1$, la matrice $A|b$ diventa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Quindi $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e v_4 non appartiene a V.

□

Esercizio 7.39. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti vettori:*

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (0, k-1, k-1), \quad v_3 = (2, 1, k+5)$$

dove k è un parametro reale.

a) *Determinare una base e la dimensione di V al variare del parametro k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (1, 3, 4)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & k-1 & 1 & | & 3 \\ 2 & k-1 & k+5 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & k-1 & k+1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Per rispondere alla prima domanda calcoliamo il rango della matrice A dei coefficienti. Dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 3$ e una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$
   – Se $k = 1$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$$
   Notiamo che per $k = 1$ il vettore v_2 è il vettore nullo, quindi è ovviamente dipendente dagli altri due.
   – Se $k = -2$, allora $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre la matrice formata dalla prima e dalla seconda colonna ha rango 2. Quindi una base di V è data dall'insieme
   $$\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2\}$$
   In questo caso anche la matrice formata dalla prima e dalla terza colonna ha rango 2, quindi poteva essere preso come base di V anche l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_3\}$

b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere tre casi:
   – Se $k \neq 1, -2$ dalla matrice ridotta a gradini torniamo al sistema:
   $$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ (k-1)y - z = 2 \\ (k+2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{2}{k-1} \\ z = 0 \end{cases}$$
   Quindi $v_4 \in V$:
   $$v_4 = v_1 + \frac{2}{k-1} v_2$$
   Notiamo che se $k \neq 1, -2$, $\dim(V) = 3$, quindi $V = \mathbf{R}^3$ e necessariamente $v_4 \in V$.
   – Se $k = 1$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -z = 2 \\ 0 = -6 \end{cases}$$
   L'ultima equazione risulta impossibile, quindi in questo caso $v_4 \notin V$:
   – Se $k = -2$ otteniamo la matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -3y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 5 \\ y = t \\ z = -3t - 2 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
   Anche in questo caso $v_4 \in V$:
   $$v_4 = (6t+5)\, v_1 + t \cdot v_2 + (-3t-2)\, v_3 \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$
   In particolare, ponendo per esempio $t = 0$, otteniamo la combinazione $v_4 = 5v_1 - 2v_3$.

□

Esercizio 7.40. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1, 0, 3, 1), \quad v_2 = (-3, -3, -3, 0), \quad v_3 = (0, k+1, k+1, 0), \quad v_4 = (k-1, 1, 3k-5, 2k-5),$$

dove k *è un parametro reale, e sia* $V = \langle v_1, v_2, v_2, v_4 \rangle$*.*

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *lo spazio* V *coincide con* $\mathbf{R}^4$*.*
b) *Si determini la dimensione e una base di* V *al variare di* k*.*

Soluzione:

a) Lo spazio V coincide con $\mathbf{R}^4$ se $\dim(V) = 4$, cioè se il rango della matrice associata a v_1, v_2, v_3, v_4 è 4. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 3 & -3 & k+1 & 3k-5 \\ 1 & 0 & 0 & 2k-5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-3I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 6 & k+1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & k-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III+2II \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 1/3III \\ IV-1/3III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti e quindi $V = \mathbf{R}^4$ se $k \neq -1, 3$

b) Dalla matrice ridotta otteniamo direttamente:
- Se $k \neq -1, 3$, $\dim(V) = 4$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (o anche la base canonica di R^4 per esempio).
- Se $k = -1$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_4\}$.
- Se $k = 3$, $\dim(V) = 3$ e una base di V è $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 7.41. *Si consideri l'insieme*

$$S = \{\ (k+1, k+1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbf{R}^4$.*

b) *Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il determinante della matrice associata ai quattro vettori

$$\det \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ k+1 & 2k & 3k & 5k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & 1 & k \end{bmatrix} = 2k \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= 2k \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} = -2k(-k+1)$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante diverso da zero, quindi rango 4 e i vettori formano una base di $\mathbf{R}^4$.

b) Riduciamo a gradini la matrice associata all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = v$ dove v_1, v_2, v_3, v_4 sono i vettori della base dopo avere posto $k = -1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} IV \\ \\ I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + z - w = 1 \\ -2y - 3z - 5w = 1 \\ z + w = 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Infine le coordinate di v rispetto alla base trovata sono

$$v = (0, -2, 1, 0)_S$$

□

Esercizio 7.42. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (k, 0, 1, 1).$$

a) *Al variare del parametro k, trovare una base di W.*

b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di $\mathbf{R}^4$.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A formata dai tre vettori affiancata dalla matrice identica:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-kI \\ IV-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Dalla riduzione vediamo che $\text{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2\} \qquad (\text{oppure } \mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_3\}).$$

b) La matrice formata dalla prima, seconda, quarta e quinta colonna ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2\}$$

□

Esercizio 7.43. *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbf{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Soluzione:

a) Per rispondere anche alla domanda c) riduciamo a gradini la matrice $A|b$ in cui A ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la colonna corrispondente al vettore w.

$$\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-kI \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3-k \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice A:
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2\}$.

c) Dalla matrice ridotta notiamo che
- Se $k \neq 0$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Per $k = 0$ abbiamo preso come base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Si tratta quindi di aggiungere a questi due vettori altri due vettori in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^4$. A tale scopo possiamo ridurre a gradini la matrice ottenuta affiancando a v_1 e v_2 i vettori della base canonica, in modo da individuare tra questi i vettori da aggiungere. Notiamo però che per $k = 0$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 0, 0)$, quindi evidentemente i vettori della base canonica da aggiungere per ottenere una base di $\mathbf{R}^4$ sono $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Infine la base cercata può essere

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \{v_1, v_2, e_2, e_3\}$$

□

Esercizio 7.44. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{\ (-2, 0, 0),\ (1, k, -1),\ (1, -1, k)\ \}$$

a) *Trovare i valori del parametro k per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3, 2, 1)$ e $w = (0, 1, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) Pochè si tratta di 3 vettori di $\mathbf{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}$ è una base sse i tre vettori che lo costituiscono sono linearmente indipendenti, cioè se la matrice associata ha rango 3. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + kII \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & -1+k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3 se $k \neq \pm 1$, quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ per $k \neq \pm 1$.

In alternativa potevamo calcolare il determinante della matrice A

$$\det(A) = -2(k^2 - 1)$$

Poichè il determinante di A si annulla per $k = 1$ e per $k = -1$, la matrice A ha rango 3, cioè $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, per $k \neq \pm 1$.

b) Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i 3 vettori di $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (-2, 0, 0), \quad v_2 = (1, k, -1), \quad v_3 = (1, -1, k)$$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ _2, \ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, le coordinate di un vettore v di $\mathbf{R}^3$ rispetto a $\mathcal{B}$ corrispondono ai coefficienti della combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 con cui esprimiamo v:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v \ \Rightarrow \ v = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$$

Si tratta quindi di esprimere v e w come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere le due equazioni vettoriali

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v \qquad \text{e} \qquad xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Per comodità riduciamo a gradini la matrice A affiancata dalle due colonne dei termini noti formate dalle componenti di v e w rispettivamente.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Per determinare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ risolviamo il sistema relativo alla prima delle due colonne dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 8 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -3 \\ 3y - z = 2 \\ 8z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{7}{8} \\ z = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Quindi v ha coordinate $\left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{5}{8}\right)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Per determinare le coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$ risolviamo il sistema relativo alla seconda delle due colonne dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - z = 1 \\ 8z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{8} \\ z = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Quindi w ha coordinate $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{8}\right)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$\square$

Esercizio 7.45. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:* $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione* $V \cap W$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini le matrici A e B associate ai vettori v_i e w_i rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \operatorname{rg}(A) = 3$$
$$\dim(W) = \operatorname{rg}(B) = 2$$

b) Dai risultati del punto precedente osserviamo che V e W sono sottospazi di $\mathbf{R}^3$ e che in particolare V ha dimensione 3, quindi $V = \mathbf{R}^3$. Di conseguenza:

$$V \cap W = \mathbf{R}^3 \cap W = W$$

Dai calcoli eseguinti nel punto precedente, tenendo conto che nello scrivere B abbiamo scambiato la naturale posizione di w_1 e w_3, otteniamo che:

$$\mathcal{B}(V \cap W) = \mathcal{B}(W) = \{w_3,\ w_2\}.$$

□

Esercizio 7.46. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 0, 1) \rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Soluzione:

a) Esplicitiamo U:

$$x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(2s - t,\ s,\ t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (2, 1, 0),\ u_2 = (-1, 0, 1)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente esplicitiamo una base di V stabilendo quali tra i generatori sono linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \operatorname{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 2, 1)\}$$

c) Conviene forse prima dimensione e base dello spazio $U+V$ in quanto si tratta dello spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U + V = \langle v_1,\ v_2,\ u_1,\ u_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U + V) = \operatorname{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U + V) = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 2, 1),\ u_1 = (2, 1, 0)\}$$

b) Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

Per determinare una base di $U \cap V$ possiamo procedere in due modi.

– MODO 1. Abbiamo visto che $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2\}$, quindi

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a + b,\ 2b,\ a + b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Ora si tratta di vedere quali di questi vettori appartengono a U. Poiché

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

possiamo imporre la condizione sul generico vettore v di V:

$$(a + b) - 2(2b) + (a + b) = 0 \ \Rightarrow\ 2a - 2b = 0 \ \Rightarrow\ a = b$$

Quindi $v \in U$ sse $a = b$, ovvero i vettori di V che appartengono anche a U sono del tipo:

$$(2b,\ 2b,\ 2b) = (2, 2, 2)b \quad b \in \mathbf{R}$$

Infine

$$U \cap V = \langle (2, 2, 2) \rangle \qquad \mathcal{B}(U \cap V) = \{(2, 2, 2)\}$$

Notiamo che $\dim(U \cap V) = 1$ come ci aspettavamo.

– MODO 2. Il seguente modo è più standard, ma i calcoli possono essere più complicati. Abbiamo già osservato che

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a + b,\ 2b,\ a + b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Analogamente $\mathcal{B}(U) = \{u_1, u_2\}$, quindi

$$U = \{u = (cu_1 + du_2) \mid c, d \in \mathbf{R}\} = \{u = (2c - d,\ c,\ d) \mid c, d \in \mathbf{R}\}$$

Quindi un vettore $w \in U \cap V$ se può essere scritto in entrambi i modi:

$$w = av_1 + bv_2 = cu_1 + du_2$$

per opportuni $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Si tratta di risolvere il sistema associato a $av_1 + bv_2 = cu_1 + du_2$, dove le incognite sono a, b, c, d:

$$\begin{cases} a + b = 2c - d \\ 2b = c \\ a + b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2c + d = 0 \\ 2b - c = 0 \\ a + b - d = 0 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & |0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & |0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & |0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b - 2c + d = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 2c - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}t \\ b = \frac{1}{2}t \\ c = t \\ d = t \end{cases}$$

Ponendo per esempio $t = 1$ e sostituendo in $w = cu_1 + du_2$ (o analogamente in $w = av_1 + bv_2$) otteniamo che $w = (1, 1, 1) \in U \cap V$. Infine

$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(1, 1, 1)\}$$

□

Esercizio 7.47. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$U = \{(0, 1, 1, 0)a + (0, 0, 0, 1)b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
c) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Soluzione:

a) Dalla definizione $U = \langle (0,1,1,0),\ (0,0,0,1)\rangle$, determinamo quindi se i due vettori sono linearmente indipendenti:

$$\text{rg}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix} = 2, \quad \text{quindi } v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono lin. indip.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(U) = \{u_1 = (0,1,1,0),\ u_2 = (0,0,0,1)\}, \qquad \dim(U) = 2$$

Esplicitiamo ora V risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=s \\ y=-s \\ z=2s \\ w=t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1,-1,2,0),\ v_2 = (0,0,0,1)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

c) Lo spazio $U+V$ è lo spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U+V = \langle v_1,\ v_2,\ u_1,\ u_2\rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&-1&0\\1&0&2&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ IV \\ \\ I \end{array}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\1&0&2&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&3&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ 3IV-III \end{array}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U+V) = \text{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U+V) = \{v_1 = (0,1,1,0),\ v_2 = (0,0,0,1),\ u_1 = (1,-1,2,0)\}$$

b) Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

In questo caso senza eseguire calcoli possiamo osservare che il vettore $v_2 = (0,0,0,1) = u_2$ appartiene a entrambi gli spazi, quindi

$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(0,0,0,1)\}$$

□

Esercizio 7.48. *In* $\mathbf{R}^4$ *con il prodotto scalare canonico sia* U *il sottospazio dei vettori ortogonali al vettore* $(1,0,-1,0)$ *e sia* V *il sottospazio generato dai vettori* $(1,0,-2,3),\ (-1,1,1,-4),\ (1,1,-3,2)$.
Si trovino la dimensione e una base di $U,\ V,\ U\cap V,\ U+V$.

Soluzione:

Esplicitiamo U:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid x - z = 0\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=t \\ z=r \end{cases} \Rightarrow U = \{(t,\ s,\ t,\ r) \mid r,s,t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (1,0,1,0),\ u_2 = (0,1,0,0),\ u_3 = (0,0,0,1)\} \qquad \dim(U) = 3$$

Analogamente determiniamo una base di W stabilendo quali tra i generatori sono linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\-2&1&-3\\3&-4&2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+2I \\ IV-3I \end{array}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV+II \end{array}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(V) = \text{rg}(A) = 2$ e

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, 0, -2, 3),\ v_2 = (-1, 1, 1, -4)\}$$

Conviene prima determinare dimensione e base dello spazio $U + V$ in quanto si tratta dello spazio generato dai generatori dei due spazi

$$U + V = \langle U \cup V \rangle = \langle u_1,\ u_2,\ u_3,\ v_1,\ v_2 \rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai cinque vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U + V) = \text{rg}(A) = 4$ e una base è

$$\mathcal{B}(U + V) = \{u_1 = (1, 0, 1, 0),\ u_2 = (0, 1, 0, 0),\ u_3 = (0, 0, 0, 1),\ v_1 = (1, 0, -2, 3)\}$$

Notiamo che $\dim(U + V) = 4$ e $U + V = \mathbf{R}^4$.

Usando la formula di Grassman otteniamo

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

Sappiamo che il generico vettore v di V è del tipo

$$v = xv_1 + yv_2 = (1, 0, -2, 3) \cdot x + (-1, 1, 1, -4) \cdot y = (x - y,\ y,\ -2x + y,\ 3x - 4y)$$

Inoltre un tale vettore appartiene anche a U se è ortogonale a $(1, 0, -1, 0)$. Imponendo quindi la condizione di ortogonalità otteniamo:

$$v \in U \cap V \quad \text{se} \quad (x - y) \cdot 1 + (-2x + y) \cdot (-1) = 0 \ \Rightarrow\ 3x - 2y = 0 \ \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$$

Infine

$$v \in U \cap V \quad \text{se} \quad v = (2t - 3t,\ 3t,\ -4t + 3t,\ 6t - 12t) = (-1, 3, -1, -6)t$$
$$\mathcal{B}(U \cap V) = \{(-1, 3, -1, -6)\}$$

□

Esercizio 7.49. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, -1) \rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi U e V.*
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.*

Soluzione:

a) Esplicitiamo U:

$$x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$
$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1, 0, 1),\ u_2 = (0, 1, 0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (1, -1, 1)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

b) Lo spazio $U+V$ è lo spazio generato dai generatori (linearmente indipendenti) dei due spazi

$$U+V = \langle u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2\rangle$$

Consideriamo quindi la matrice associata ai quattro vettori

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\dim(U+V) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e

$$\mathcal{B}(U+V) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0),\ v_1 = (1,-1,0)\}$$

Usando la formula di Grassman otteniamo che

$$\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

Per determinare una base di $U\cap V$, ricordando che $\mathcal{B}(V) = \{v_1,\ v_2\}$, possiamo scrivere

$$V = \{v = (av_1 + bv_2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{v = (a+b,\ -a-b,\ b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Ora si tratta di vedere quali di questi vettori appartengono a U. Poiché

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z=0\}$$

possiamo imporre la condizione $x+z=0$ al generico vettore v di V:

$$a+b+b = 0 \ \Rightarrow\ a = -2b$$

Quindi $v \in U$ sse $a=-2b$, ovvero i vettori di V che appartengono anche a U sono del tipo:

$$(-b,\ b,\ b) = (-1,1,1)b, \qquad a \in \mathbf{R}$$

Infine

$$U\cap V = \langle(-1,1,1)\rangle \qquad \mathcal{B}(U\cap V) = \{(-1,1,1)\}$$

Notiamo che $\dim(U\cap V) = 1$ come ci aspettavamo.

$\square$

Esercizio 7.50. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z=0\right\}$$
$$V = \langle(2,-1,-2),\ (-3,4,3)\rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Soluzione:

U e V sono due sottospazi di $\mathbf{R}^3$. Per dimostrare che $U=V$, dobbiamo dimostrare che $\dim(U) = \dim(V)$ e che $U \subseteq V$ oppure che $V \subseteq U$.

Cominciamo ad esplicitare U:

$$x+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \Rightarrow U = \{(-t,\ s,\ t) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathcal{B}(U) = \{u_1 = (-1,0,1),\ u_2 = (0,1,0)\} \qquad \dim(U) = 2$$

Analogamente determiniamo una base di V stabilendo se i due generatori sono linearmente indipendenti. Senza la necessità di fare calcoli notiamo che i due generatori non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(V) = \{v_1 = (2,-1,-2),\ v_2 = (-3,4,3)\}, \qquad \dim(V) = 2$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\dim(U) = \dim(V) = 2$.

In questo caso è probabilmente più semplice verificare che $V \subseteq U$. Infatti abbiamo per U una doppia definizione:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+z=0\right\} = \langle\ (-1,0,1),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Utilzzando la prima definizione è immediato verificare che i due generatori v_1 e v_2 di V appartengono a U, infatti entrambi sono vettori di $\mathbf{R}^3$ che verificano la condizione $x+z=0$. Otteniamo quindi:

$$v_1 \in U \quad \text{e} \quad v_2 \in U \ \Rightarrow\ V = \langle v_1,\ v_2\rangle \subseteq U.$$

Infine abbiamo dimostrato che V è un sottospazio di U della stessa dimensione di U, quindi U e V coincidono.

In alternativa per dimostrare che $U \subseteq V$ avremmo dovuto considerare la matrice formata da v_1, v_2, u_1, u_2 come colonne. Tale matrice ha rango 2, quindi u_1 e u_2 sono linearmente dipendenti da v_1 e v_2 e $U \subseteq V$.

$\square$

Esercizio 7.51. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1, 1, 2, 1) + a_2(0, -1, -1, 3) + a_3(0, 2, 0, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$$

Siano

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (0, -1, -1, 3), \qquad v_3 = (0, 2, 0, 0), \qquad v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).
b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

In alternativa si può utilizzare il determinante, sviluppato rispetto alla quarta colonna:

$$\det(A) = 1 \cdot [-2(-1)] = 2 \neq 0$$

Poiché il deteminante della matrice A associata ai 4 vettori ha determinante non nullo, $\mathrm{rg}(A) = 4$, quindi i 4 vettori sono linearmenti indipendenti e una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$\square$

Esercizio 7.52. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(1, 1, 2, 1) + a_2(-1, 0, -1, 3) + a_3(2, 0, 0, 0) + a_4(0, 0, 0, 1)$$

Siano

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (-1, 0, -1, 3), \qquad v_3 = (2, 0, 0, 0), \qquad v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Esercizio 7.53. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:

Notiamo che

$$v = a_1(1, 1, 2, 1) + a_2(-1, 0, -1, 3) + a_3(2, 0, 0, 0) + a_4(1, 0, 0, 0)$$

Siano

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (-1, 0, -1, 3), \qquad v_3 = (2, 0, 0, 0), \qquad v_4 = (1, 0, 0, 0)$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 e v_4, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^4$).

b) Consideriamo la matrice associata a v_1, v_2, v_3 e v_4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 3 e una base di S è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti tra loro, quindi una base può contenerne solo uno dei due; di conseguenza nella ricerca della base potevamo considerare dall'inizio solo i vettori v_1, v_2 e v_3 per verificare se sono linearmente indipendenti.

In alternativa si può utilizzare il determinante. $\det(A) = 0$, quindi i quattro vettori sono linearmente dipendenti e non possono formare una base di S. Osservando che v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti consideriamo la matrice formata da v_1, v_2 e v_3:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice quadrata B' formata dalle prime tre righe è

$$\det(B') = -2 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$

quindi $\text{rg}(B') = 3$ e v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Di conseguenza una base di S è l'insieme $\mathcal{B}(S) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Esercizio 7.54. *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 - 3a_3,\ a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_2)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Soluzione:
Notiamo che

$$v = a_1(2,1,1,1,0) + a_2(1,-1,-1,3,1) + a_3(0,-3,0,1,0).$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,1,1,1,0), \quad v_2 = (1,-1,-1,3,0), \quad v_3 = (0,-3,0,1,0).$$

a) S è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

e si tratta di uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^5$).
b) Si tratta di stabilire quali vettori tra $v_1,\ v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la matrice associata a v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \\ IV - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 3IV + 4II \\ 3V + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Anche senza ridurre completamente la matrice si vede che questa ha rango tre, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e formano una base di S:

$$\mathcal{B}(S) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

□

Esercizio 7.55. *Si consideri il sottospazio W di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori w della forma*

$$w = (2a_1 - a_2 - a_3,\ 2a_1 - a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_1 - 4a_2 + a_3)$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono parametri reali.

a) *Trovare una base di W.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (0,1,1,1,-2) \in W$ rispetto alla base trovata al punto* a).

Soluzione:
Notiamo che

$$w = a_1(2,2,1,0,1) + a_2(-1,0,0,1,-4) + a_3(-1,-1,0,0,1)$$

Chiamiamo v_1, v_2 e v_3 i seguenti vettori

$$v_1 = (2,2,1,0,1), \qquad v_2 = (-1,0,0,1,-4), \qquad v_3 = (-1,-1,0,0,1)$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 e v_3, quindi per rispondere alla prima domanda dobbiamo stabilire se i tre vettori, o eventualmente quali, sono linearmente indipendenti. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, o di una parte di essi. Per rispondere a entrambe le domande dobbiamo quindi ridurre a gradini la matrice associata ai tre vettori

v_1, v_2 e v_3, e al vettore v.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & -4 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 2III - II \\ \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - II \\ V + 4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ V - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata a v_1, v_2 e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$.
b) Si tratta di esprimere v come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$$

Infine le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1)$.

□

Esercizio 7.56. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:

Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = k \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k = 0$
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{ (0, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

E' ora evidente che ogni elemento di S si può scrivere nella forma

$$(0, -1, 1) \cdot t$$

quindi una base di S è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1)\}$$

□

Esercizio 7.57. *Sia*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.*

Soluzione:
Gli elementi dell'insieme S sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x-2y+kz=k-1 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+4ky-2z=0 \end{cases}$$

a) Sappiamo che le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo. Quindi S è uno spazio vettoriale se $k=1$.
b) Scriviamo esplicitamente gli elementi di S cercando le soluzioni del sistema nel caso $k=1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x-2y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2s-t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$S = \{\ (2s-t,s,t) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

Separiamo le variabili nella scrittura del generico elemento di S:

$$(2s,s,0)+(-t,0,t) = (2,1,0)\cdot s + (-1,0,1)\cdot t$$

Quindi S è generato dall'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2,1,0),\ (-1,0,1)\}$$

Per come è stato calcolato, e comunque sarebbe immediato verificarlo, l'insieme $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, quindi si tratta effettivamente di una base di S.

□

Esercizio 7.58. *Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^5$*

$$S = \left\{x \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0\right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a)*, trovare una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema lineare formano un sottospazio sse si tratta di un sistema omogeneo. Di conseguenza deve essere $k=0$.
b) Risolviamo il sistema omogeneo ottentuto per $k=0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

riducendo la matrice associata a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -r \\ x_2 = -r+2t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \forall\ r,s,t\ \in\ \mathbf{R}$$

Infine

$$\begin{aligned} S &= \{(-r,-r+2t,r,s,t) \mid r,s,t \in \mathbf{R}\ \} \\ &= \{(-1,-1,1,0,0)\cdot r\ +\ (0,0,0,1,0)\cdot s\ +\ (0,2,0,0,1)\cdot t \mid r,s,t \in \mathbf{R}\ \} \end{aligned}$$

e una base di S è

$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-1,-1,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,2,0,0,1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 7.59. *Sia W il sottinsieme di $\mathbf{R}^5$ definito da*

$$W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 - x_3 + kx_4 + x_5 = 0,\ x_2 - 3x_4 = k,\\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0\ \}$$

Stabilire per quali valori di k l'insieme W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ e calcolarne una base e la dimensione.

Soluzione:

Sappiamo che le soluzioni di un sistema di equazioni lineari formano un sottospazio solamente se si tratta di un sistema omogeneo, di conseguenza W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ se $k = 0$.

Per determinare la dimensione di W (per $k = 0$) calcoliamo esplicitamente le soluzioni riducendo a gradini la matrice associata al sistema lineare.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 3h \\ x_3 = s \\ x_4 = h \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \forall s, t, h \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} W &= \{(1,0,1,0,0)s + (-1,0,0,0,1)t + (0,3,0,1,0)h\ :\ s,t,h \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle\ (1,0,1,0,0),\ (-1,0,0,0,1),\ (0,3,0,1,0)\ \rangle \end{aligned}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W) = \{\ (1,0,1,0,0),\ (-1,0,0,0,1),\ (0,3,0,1,0)\ \} \quad \text{e} \quad \dim(W) = 3$$

Notiamo che anche senza calcolare esplicitamente le soluzioni potevamo ottenere

$$\dim(W) = n - \text{rg}(A) = 5 - \text{rg}(A) = 3$$

$\square$

Esercizio 7.60.

a) *Trovare una base del sottospazio V di $\mathbf{R}^5$ così definito:*

$$V = \{x \in \mathbf{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\}.$$

b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^5$ contenente la base di V trovata in* a).

Soluzione:

Determiniamo le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 2II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = r + 2s - 2t \\ x_2 = 3r + 3s - 4t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle (1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1) \rangle$$

a) Dalla risoluzione del sistema omogeneo segue che

$$\mathcal{B}(V) = \{(1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1)\}$$

b) Per completare la base $\mathcal{B}$ basta osservare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 5, quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^5) = \{(1,3,1,0,0),\ (2,3,0,1,0),\ (-2,4,0,0,1),\ (1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0)\}$$

□

Esercizio 7.61. *Sia*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 - 4x_2 - x_3 + 2kx_4 = k+1,\ 2x_1 - kx_3 + kx_4 = 2k+2,\ 3x_1 - 4kx_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0\ \}$$

a) *Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Le soluzioni di un sistema formano uno spazio vettoriale sse il sistema è omogeneo:

$$\begin{cases} k+1=0 \\ 2k+2=0 \end{cases} \Rightarrow\ k=-1$$

b) Cerchiamo le soluzioni del sistema nel caso $k=-1$ riducendo a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 16 & 12 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{3}{8}t \\ x_3 = t \\ x_4 = -2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, 1, -2\right) \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Infine

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, -2, 1\right) \right\}, \qquad \dim(S) = 1$$

□

Esercizio 7.62. *Sia S l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (k+1)x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + (2-2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + 4x_2 + (2k-2)x_3 + (1-k)x_4 = 2-k \end{cases} \qquad (k \textit{ parametro reale})$$

a) *Stabilire per quali k l'insieme S è uno spazio vettoriale e in tali casi determinarne una base.*
b) *Esplicitare S al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Soluzione:

L'insieme S è uno spazio vettoriale quando si tratta delle soluzioni di un sistema omogeneo, quindi per $k = 2$. Per rispondere ad entrambe le domande effettuiamo comunque la riduzione a gradini per ogni valore di k.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & k-1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2-2k & | & k-2 \\ 1 & 4 & 2k+2 & 1-k & | & 2-k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+2I \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & k-2 \\ 0 & 4 & 2k+2 & 0 & | & 2-k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-2II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2-k \end{bmatrix}$$

a) Abbiamo già osservato che S è uno spazio vettoriale se $k = 2$, nel quale caso le soluzioni sono

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \quad S = \langle (1,0,0,1) \rangle$$

Infine per $k = 2$ una base di S è $\mathcal{B}(S) = \{(1,0,0,1)\}$.

b) Dalla matrice ridotta vediamo che il sistema ammette soluzione quando $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$, cioè quando $k = 2$. In tale caso abbiamo già trovato S al punto precedente: $S = \langle (1,0,0,1) \rangle$. Per $k \neq 2$ il sistema non ammette soluzioni, quindi $S = \emptyset$.

□

Esercizio 7.63. *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*

b) *Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & -1-k \end{bmatrix}$$

Quindi

- Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
- Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$N(A) = \{\ (-1,0,1,-1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\ \}$$

e una base del nucleo è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(N(A)) = \{\ (-1,0,1,-1)\ \}$$

□

Esercizio 7.64.

a) *Sia*
$$V = \langle\ (1,2,1),\ (-1,3,0),\ (3,1,2)\ \rangle$$
Si determini la dimensione e una base di V.

b) *Sia*
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x-y+3z=0,\ 2x+3y+z=0,\ x+2z=0\ \right\}$$
Si determini la dimensione e una base di S.

c) *Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango della matrice A associata ai tre vettori riducendola a gradini:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/5II \\ III-5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi
$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A) = 2$$
$$\mathcal{B}(V) = \{\ (1,2,1),\ (-1,3,0)\ \}$$

b) Associamo al sistema omogeneo
$$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$
la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Notiamo che i conti sono già stati eseguiti al punto precedente. Quindi
$$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
e
$$\dim(S) = 1$$
$$\mathcal{B}(S) = \{\ (-2,1,1)\ \}$$

c) Notiamo che con la stessa matrice abbaimo risolto due esercizi differenti tra cui in genere è facile confondersi. La relazione tra i due esercizi, oltre alla medesima riduzione della matrice, è solo legata alle dimensioni:
$$\dim(V) = \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(S) = \text{numero delle incognite} - \mathrm{rg}(A)$$
$$\dim(V) + \dim(S) = \text{numero delle incognite}$$

□

Esercizio 7.65. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^5$ *generato dai vettori:*
$$v_1 = (0,1,2,0,1), \quad v_2 = (k,1,2,0,2), \quad v_3 = (0,0,0,k,1)$$

a) *Al variare del parametro* k, *trovare una base di* W.

b) *Si completi la base trovata in* a) *ad una base di* $\mathbf{R}^5$.

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matriceformata dai tre vettori affiancata dalla matrice identica I_5.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} II\\ III\\ V\\ I\\ IV \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ II-2I\\ III-I\\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ III\\ IV\\ V\\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \Rightarrow III-kII\\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -k & 0 & k & 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV+III\\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -k & 0 & k & 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 0 & 1 & k & 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Se $k \neq 0$, $\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, mentre se $k = 0$, $\mathcal{B}(W) = \{v_1,\ v_2\}$
b) Se $k \neq 0$ possiamo prendere come base di $\mathbf{R}^5$ l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_1,\ e_2\}$, mentre se $k = 0$ possiamo prendere l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2,\ e_4\}$

□

Esercizio 7.66. *Dati i vettori linearmente indipendenti* $v_1 = (3,0,1)$ *e* $v_2 = (1,4,-2)$ *completare l'insieme* $S = \{v_1, v_2\}$ *in modo da ottenere una base di* $\mathbf{R}^3$.

Soluzione:

Si può completare la base utilizzando uno dei vettori canonici. Si tratta quindi di affiancare a v_1 e v_2 i tre vettori canonici di $\mathbf{R}^3$, per verificare quale di questi forma assieme a v_1 e v_2 un insieme linearmente indipendente. Riduciamo quindi a gradini la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3III-I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 4III+7II \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza qualsiasi dei vettori della base canonica forma con v_1 e v_2 una matrice di rango 3, ovvero un insieme linearmente indipendente. Possiamo prendere per esempio

$$\mathcal{B} = \{(3,0,1),\ (1,4,2),\ (1,0,0)\}$$

□

Esercizio 7.67. *Siano*

$$v_1 = (1,-1,-1,1),\ v_2 = (k,1,1,-1)\ \in \mathbf{R}^4$$

a) *Si trovino i valori del parametro* k *per i quali* v_1 *e* v_2 *sono indipendenti.*
b) *Per* $k = 2$, *si estenda l'insieme* $\{v_1, v_2\}$ *a una base di* $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice costituita da v_1 e v_2 e dai quattro vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+I \\ III-II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) I due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti quando la matrice ad essi associata ha rango 2. Di conseguenza v_1 e v_2 sono indipendenti se $k \neq -1$.

b) Ponendo $k = 2$ nella matrice ridotta otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base di $\mathbf{R}^4$ deve essere formata da quattro vettori. Dalla matrice notiamo che se aggiungiamo alle prime due colonne, corrispondenti a v_1 e v_2, la quarta e quinta colonna (per esempio) otteniamo una matrice di rango quattro. Quindi i quattro vettori corrispondenti sono linearmente indipendenti e una base di $\mathbf{R}^4$ è data dall'insieme:

$$\{ \ v_1, \ v_2, \ (0,1,0,0), \ (0,0,1,0) \ \}$$

$\square$

Esercizio 7.68. *Si consideri l'insieme S costituito dai seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (1,2,2,1), \qquad v_2 = (2,1,2,1), \qquad v_3 = (0,1,2,1)$$

a) *E' possibile estendere S a una base di $\mathbf{R}^4$?*

b) *In caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S.*

---

3. Soluzioni

Per rispondere ad entrambi i quesiti riduciamo a gradini la matrice ottenuta dalla matrice associata ai 3 vettori, affiancata dalla matrice associata ai vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-II \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III+II \\ IV+III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 2IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai vettori $v_1, \ v_2$ e v_3 ha rango 3, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e S può essere esteso a una base di $\mathbf{R}^4$.

b) Dalla matrice completa vediamo che la prima, seconda, terza e sesta colonna sono linearmente indipendenti, quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$ contenente S è data da

$$\mathcal{B} = \{ \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ e_3 = (0,0,1,0) \ \}$$

$\square$

Esercizio 7.1. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (2,1,-1,3), \quad v_2 = (1,0,5,1), \quad v_3 = (2,-1,3,1).$$

a) *Stabilire se il vettore $v = (0,0,1,0)$ è combinazione lineare di $v_1, \ v_2$ e v_3.*

b) *Completare l'insieme* $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ *ad una base di* $\mathbf{R}^4$.

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ affiancati dai quattro vettori della base canonica $e_1,\ e_2,\ e_3 = v$ e e_4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III + II \\ IV - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 5II \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & | & -5 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo la matrice formata dalle prime tre colonne e dalla sesta, corrisponedente all'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -18 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice completa e incompleta hanno rango uguale, quindi il sistema ammette soluzione e v è combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.

b) La matrice formata dalle prime quattro colonne ha rango quattro, quindi l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_1\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$.

□

Esercizio 7.2. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0\ \}$$

a) *Verificare che l'insieme* V *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Determinare una base di* V.

Soluzione:

Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,\quad a_i \in \mathbf{R}$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. A $p(x)$ possiamo associare le sue componenti $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$ formata dai polinomi $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$. Quindi a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$ possiamo associare il vettore $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4$.

Nel nostro caso la condizione $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbf{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

a) L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
b) Per trovare una base di V determiniamo una base di W per poi tornare ai polinomi.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases} \qquad \forall r, s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi il generico elemento di W ha la forma

$$(-1, 1, 0, 0) \cdot r + (-1, 0, 1, 0) \cdot s + (-1, 0, 0, 1) \cdot t$$

e una base di W è data dall'insieme

$$\mathcal{B}(W) = \{(-1, 1, 0, 0),\ (-1, 0, 1, 0),\ (-1, 0, 0, 1)\}$$

Associamo ora ai vettori determinati i corrispondenti polinomi:

$$\begin{aligned}
(-1,1,0,0) &\Rightarrow p_1(x) = -1 + x \\
(-1,0,1,0) &\Rightarrow p_2(x) = -1 + x^2 \\
(-1,0,0,1) &\Rightarrow p_3(x) = -1 + x^3
\end{aligned}$$

Infine l'insieme

$$\mathcal{B}(V) = \left\{p_1(x) = -1 + x,\ p_2(x) = -1 + x^2,\ p_3(x) = -1 + x^3\right\}$$

è una base di V.

□

Esercizio 7.3. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned}
p_1 &= (0,1,1) \\
p_2 &= (1,2,1) \\
p_3 &= (-1,1,0)
\end{aligned}$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio $f(x)$ associamo il vettore $f(1,-1,2)$

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 7.4. *Si considerino i polinomi* $p_1 = x^2 + ax + b + c,\ p_2 = x^2 + bx + a + c,\ p_3 = x^2 + cx + a + b$.

a) *Mostrare che per ogni valore dei parametri* a, b, c *i tre polinomi sono dipendenti nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[x]$.
b) *Calcolare la dimensione e una base dello spazio* $\langle p_1, p_2, p_3\rangle \subseteq \mathbf{R}[x]$ *al variare di* a, b, c.

Soluzione:
Associamo ad ogni polinomio il vattore che esprime le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}[x]$:

$$p_1 = (1, a, b+c), \qquad p_2 = (1, b, a+c), \qquad p_3 = (1, c, a+b)$$

Possiamo quindi svolgere l'esercizio lavorando sui tre vettori.

Consideriamo la matrice associata ai tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - aI \\ III - (b+c)I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata ai tre vettori ha sempre rango minore di tre, quindi i tre vettori e i tre polinomi sono linearmente dipendenti.
b) Dal punto a) sappiamo che $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha sicuramente dimensione minore di tre. Inoltre
   - Se $a = b = c$, allora la matrice ha rango 1 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 1. Una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1\}$ (o da $\{p_2\}$ o da $\{p_3\}$).
   - Se $a \neq b$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalle prime due colonne ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_2\}$.
   - Se $a \neq c$, allora la matrice ha rango 2 e $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ha dimensione 2. Inoltre la matrice formata dalla prima e terza colonna ha sicuramente rango 2, quindi una base di $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ è data da $\{p_1,\ p_3\}$.

□

Esercizio 7.5. *Sia S il sottoinsieme dello spazio dei polinomi $\mathbf{R}_3[x]$ così definito:*

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_3[x]$.*
b) *Determinare la dimensione di S.*

Soluzione:

a) Si tratta di dimostrare che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   - S è chiuso rispetto a $+$, infatti presi due elementi di S anche la loro somma sta in S:
   $$(p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0$$
   - S è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di S e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in S:
   $$(\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) = \lambda \cdot 0 = 0$$
b) Per calcolare la dimensione di S osserviamo innanzitutto che imponendo la condizione $p(0) = 0$ otteniamo:
   $$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx \mid a, b, c \in \mathbf{R}\ \}$$
   Vogliamo dimostrare che il polinomi $p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x$ costituiscono una base di S. Infatti
   - $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ sono linearmente indipendenti: se
   $$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0 \ \Rightarrow\ ax^3 + bx^2 + cx = 0 \text{ (polinomio nullo)}$$
   allora $a = b = c = 0$.
   - Per come abbiamo esplicitato S è evidente che ogni elemento di S si può scrivere come combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$.

   Di conseguenza $p_1(x),\ p_2(x)$ e $p_3(x)$ formano una base di S e S ha dimensione 3.

□

Esercizio 7.6. *Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbf{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.*

Soluzione:

Come negli esercizi precedenti associamo a $p(x)$ le sue componenti rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$, $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad p = (d, c, b, a)$$

Imponiamo le due condizioni al generico polinomio di grado al più 3:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \\ p(1) = 0 \Rightarrow a+b+c+d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$$

Quindi a W corrisponde il sottospazio V formato dagli elementi di $\mathbf{R}^4$ soluzioni del sistema omogeneo:

$$V = \{(d,c,b,a) \in \mathbf{R}^4 \mid d = 0,\ a+b+c = 0\}$$

Scriviamo ora le soluzioni di tale sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a = -s-t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \end{cases} \qquad \forall s,t, \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$V = \langle\ (0,0,1,-1),\ (0,1,0,-1)\rangle$$

Infine

$$W = \langle p_1(x) = x^2 - x^3,\ p_2(x) = x - x^3\ \rangle$$

□

Esercizio 7.7. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbf{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad un'insieme generatore di $\mathbf{R}_2[x]$.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. In particolare ai polinomi $p_1,\ p_2,\ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1,1,0)$$
$$p_2 = (k,0,-1)$$
$$p_3 = (1,2,k)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$.In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Per rispondere a entrambe le domande dell'esercizio riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & | & -1 & 1 & -k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la prima parte della matrice: se $k \neq \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$ ha rango 3, quindi i tre vettor isono linearmente indipendenti. Analogamente i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Se $k = \pm 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e dalla matrice ridotta ricaviamo che p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre considerando tutta la matrice possiamo notare che la prima, la seconda e la quarta colonna (per esempio) sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che la quarta colonna corrisponde al vettore $(1,0,0)$ ovvero al polinomio $q = x^2$. Quindi:
   – Se $k = 1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad q = x^2\right\}$$

– Se $k = -1$ una possibile base di $\mathbf{R}_2[x]$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = -x^2 - 1, \quad q = x^2\right\}$$

□

Esercizio 7.8. *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. Di conseguenza p_1, p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti sse lo sono i tre vettori

$$p_1 = (1, 1, 0), \; p_2 = (k, 0, -1), \; p_3 = (1, 2, k)$$

a) Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1 - k^2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi

– Se $k^2 - 1 \neq 0$, ovvero $k \neq \pm 1$ la matrice ha rango 3, quindi $p_1, \; p_2$ e p_3 sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ o $k = -1$ la matrice ha rango 2, quindi $p_1, \; p_2$ e p_3 sono linearmente dipendenti.

b) Risolviamo l'equazione $xp_1 + yp_2 + zp_3 = 0$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale sistema (senza la colonna nulla dei termini noti). Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 + t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 - p_2$.

– Se $k = -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 - t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 + p_2$.

□

Esercizio 7.9. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2, \qquad p_2(x) = 3x + 4, \qquad p_3(x) = -x^2 + 6x + 6$$

e sia $W = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ generato da p_1, p_2 e p_3.

a) *Si determini la dimensione e una base di W.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(x) = (k+1)x^2 + 3kx + 4$ appartiene a W.*

Soluzione:
A ogni polinomio $a_2x^2+a_1x+a_0$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare il vettore (a_2, a_1, a_0) formato dalle coordinate del polinomio rispetto alla base canonica $\{x^2, x, 1\}$. In questo caso otteniamo quindi i vettori

$$p_1 = (1,0,2), \quad p_2 = (0,3,4), \quad p_3 = (-1,6,6), \quad f_k = (k+1, 3k, 4)$$

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo calcolare la dimensione di $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$, mentre per rispondere alla seconda domanda dobbiamo verificare se l'equazione $xp_1 + yp_2 + zp_3 = f_k$ ammette soluzione. Consideriamo quindi direttamente la matrice $A|b$ che ci permette di rispondere anche alla seconda domanda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3k \\ 2 & 4 & 6 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/3II \\ 1/2III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 2 & 4 & | & -k+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -3k+1 \end{bmatrix}$$

a) $\dim(W) = \text{rg}(A) = 2$. Inoltre
$$\mathcal{B}(W) = \{p_1(x),\ p_2(x)\} = \{x^2+2, \quad 3x+4\}.$$
b) $f_k(x)$ appartiene a W se il sistema $A|b$ ammette soluzione. Per Rouché Capelli questo succede solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$, cioè se $k = \dfrac{1}{3}$.

□

Esercizio 7.10. *Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio $a_0x^2 + a_1x + a_2 \in \mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 associamo i tre vettori

$$p_1 = (0,1,-1), \quad p_2 = (0,1,1), \quad p_3 = (1,-1,0)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio costante 1 associamo il vettore $f = (0,0,1)$, e le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo il sistema $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = f$.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II + I \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{2} \cdot p_1(x) + \frac{1}{2} \cdot p_2(x)$$

□

Esercizio 7.11. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*

a) *Si mostri che* $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* V *e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di* V*.*

Soluzione:

Sia $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ il generico elemento di V. Le due condizioni $f(1) = f(2) = 0$ si esplicitano in

$$a + b + c + d = 0, \qquad 8a + 4b + 2c + d = 0$$

Inoltre a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dalle sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$. In particolare al generico polinomio $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ associamo il vettore (a, b, c, d) di $\mathbf{R}^4$, e all'insieme U possiamo associare l'insieme

$$U' = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + c + d = 0, \quad 8a + 4b + 2c + d = 0\right\}$$

a) L'insieme U' è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzione di un sistema omogeneo. Analogamente l'insieme U è uno spazio vettoriale.

Per determinare una base di U', e quindi di U, risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-8I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}s + \frac{3}{4}t \\ b = -\frac{3}{2}s - \frac{7}{4}t \\ c = s \\ d = t \end{cases}$$

Quindi una base di U' è

$$\mathcal{B}(U') = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right),\ \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right)\right\} \text{ ovvero } \mathcal{B}(U') = \{(1, -3, 2, 0),\ (3, -7, 0, 2)\}$$

e la corrisponedente base di U è

$$\mathcal{B}(U) = \left\{x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

b) Basta notare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (1, -3, 2, 0),\ (3, -7, 0, 2)\}$$

è una base di $\mathbf{R}^4$, e la corrisponedente base di V, completamento della base di U, è

$$\mathcal{B}(V) = \left\{x^3, \quad x^2, \quad x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

□

Esercizio 7.12. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 2 - x, \qquad p_2(x) = -x + x^2, \qquad p_3(x) = 3 + x - x^2.$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = 1 + 2x + 2x^2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{1,\ x,\ x^2\right\}$. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ e $f(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (2, -1, 0) \qquad p_2 = (0, -1, 1) \qquad p_3 = (3, 1, -1) \qquad f = (1, 2, 2)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare $\mathbf{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre per esprimere il polinomio $f(x)$ come combinazione lineare di $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ equivale a esprimere il vettore f come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3, ovvero a risolvere l'equazione $ap_1+bp_2+cp_3 = f$.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ -1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2II+I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & 5 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III+II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & 5 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & | & 9 \end{bmatrix}$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente idipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Torniamo al sistema associato all'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3 = f$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3c = 1 \\ -2b+5c = 5 \\ 3c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = -4 \cdot p_1(x) + 5 \cdot p_2(x) + 3 \cdot p_3(x)$$

□

Esercizio 7.13. *Si considerino i polinomi*

$$p_1(x) = 2x + x^2 - x^3,\ p_2(x) = 1 - x + x^2,\ p_3(x) = 3 + x - x^3,\ p_4(x) = x^2 + x^3$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_3[x]$.
b) *Esprimere* $f(x) = (x+1)^3$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$.

Soluzione:

A ogni polinomio associamo il vettore formato dalle sue coordinate rispetto alla base canonica $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$p_1(x) \ \rightarrow\ p_1 = (0,2,1,-1) \qquad p_2(x) \ \rightarrow\ p_2 = (1,-1,1,0)$$
$$p_3(x) \ \rightarrow\ p_3 = (3,1,0,-1) \qquad p_4(x) \ \rightarrow\ p_4 = (0,0,1,1)$$

I quattro polinomi formano una base di $\mathbf{R}_3[x]$ sse i quattro vettori $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ formano una base di $\mathbf{R}^4$. Inoltre associamo al polinomio $f(x)$ il corrispondente vettore:

$$f(x) = (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \ \rightarrow\ f = (1,3,3,1)$$

Per rispondere alla domanda b) dobbiamo quindi risolvere l'equazione $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = f$.

Per rispondere a entrambe le domande consideriamo quindi la matrice associata ai cinque vettori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+3II \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \\ 5IV+2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 15 \end{bmatrix}$$

a) Il rango della matrice associata a p_1, p_2, p_3, p_4 è quattro, quindi i quattro vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)\}$ è una base di $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Tornando al sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x) + \frac{1}{2}p_3(x) + \frac{5}{2}p_4(x)$$

□

Esercizio 7.14. *Dati i polinomi*

$$p_1(x) = x^2 + 2x,\ p_2(x) = x^2 - x,\ p_3(x) = 2x + 1$$

a) *Verificare che l'insieme* $\{p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}_2[x]$
b) *Esprimere* $f(x) = 3x^2 - 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Associamo a ogni polinomio il vettore dato dalle sue coordinate rispetto alla base canonica $\{x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai tre polinomi $p_i(x)$ e la polinomio $f(x)$ associamo i vettori

$$p_1 = (1, 2, 0), \quad p_2 = (1, -1, 0), \quad p_3 = (0, 2, 1), \quad f(3, 0, -2)$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo direttamente la matrice necessaria per il punto b):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 2II \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & -3 & 2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la matrice dei coefficienti. I tre polinomi formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$ sse i tre vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$. Poiché $\text{rg}(A) = 3$ i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}_2[x]$.
b) Dalla matrice ridotta otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y + 2z = -6 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{3} p_1(x) + \frac{2}{3} p_2(x) - 2 p_3(x)$$

□

Esercizio 7.15. *Sia* W *il sottoinsieme dello spazio di polinomi* $\mathbf{R}_3[x]$ *definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che* W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}_2[x]$.
b) *Trovare una base e la dimensione di* W.
c) *Determinare le coordinate del polinomio* $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

Soluzione:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbf{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbf{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto come

$$W = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbf{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:

$$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0$$

- W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, anche il loro prodotto sta in W:

$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(1) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbf{R}_2[x]$ otteniamo $b + c + d = 0$, ovvero $d = -b - c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - b - c = b(x^2 - 1) + c(x - 1)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 1$ e $p_2(x) = x - 1$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 1,\ p_2(x) = x - 1\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^2, \quad x, \quad 1\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -1), \quad p_2 = (0, 1, -1), \quad p = (2, -1, -1)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Infine $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$, ovvero $p(x)$ ha coordinate $(2, -1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

□

Esercizio 7.16. *Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).

a) *Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.*
b) *Determinare una base di S.*

Soluzione:

a) Notiamo che la condizione percé una matrice 2×2 appartenga a S è che gli elementi di posto $1, 2$ e $2, 1$ siano uguali.

Verifichiamo le due proprietà richieste per uno spazio vettoriale.

– SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

due generici elementi di S. Allora

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$$

– PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix} \in S$$

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di S. Infatti:

– Abbiamo appena visto che il generico elemento di S si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

– Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 7.17. *Sia S il sotinsieme dello spazio delle matrici $M_{3,2}(\mathbf{R})$ così definito:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_{3,2}(\mathbf{R})$.*
b) *Determinare un insieme generatore di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – Siano A e B due generici elementi di S:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   La loro somma $A + B$ è la matrice

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ b + d & a + c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   che è ancora un elemento di S
   – Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e $A \in S$ allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   che è ancora un elemento di S.
b) Un possibile insieme generatore è

$$I = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   Infatti ogni matrice $A \in S$ si può scrivere nella forma:

$$A = aM_1 + bM_2$$

□

Esercizio 7.18.

a) *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & -a + b \\ a & -2a + b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

   è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
b) *Determinare una base di W.*

Soluzione:

a) Verifichiamo le due proprietà richieste per un sottospazio vettoriale.

– SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3a_1 & -a_1+b_1 \\ a_1 & -2a_1+b_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3a_2 & -a_2+b_2 \\ a_2 & -2a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

due generici elementi di W. Allora

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \begin{bmatrix} 3a_1+3a_2 & -a_1+b_1-a_2+b_2 \\ a_1+a_2 & -2a_1+b_1-2a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(a_1+a_2) & -(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2) & -2(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix} \quad \text{con } \begin{cases} a = a_1+a_2 \\ b = b_1+b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $A_1 + A_2 \in W$.

– PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{bmatrix}$$

un generico elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 3(\lambda a) & -\lambda a + \lambda b \\ \lambda a & -2(\lambda a) + \lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a' & -a'+b' \\ a' & -2a'+b' \end{bmatrix} \quad \text{con } \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases}$$

Quindi $\lambda A \in W$.

b) Separiamo i parametri nella generica scrittura di A:

$$A = \begin{bmatrix} 3a & -a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme generatore di W. Dobbiamo ora verificare se A e B sono linearmente indipendenti, ovvero se l'equazione $xA + yB = 0$ ha la sola soluzione nulla $x = y = 0$:

$$xA + yB = \begin{bmatrix} 3x & -x+y \\ x & -2x+y \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $xA + yB = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -x+y = 0 \\ x = 0 \\ -2x+y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Quindi A e B sono linearmente indipendenti e una base di W è data da

$$\mathcal{B} = \{A, \ B\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 7.19. *Si consideri il sottospazio*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3a+b+3c & 2b-6c \\ a+3b-7c & 4a+8c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbf{R})$.

a) *Determinare una base di* S.

b) *Stabilire se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \in S$ *(ed in caso positivo esprimere* A *come combinazione lineare della base trovata in* a)*).*

Soluzione:

a) La generica matrice di S la possiamo scrivere nella forma

$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Quindi se

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

lo spazio S è $S = \langle A_1,\ A_2,\ A_3 \rangle$. Per determinare una base di S dobbiamo stabilire quante e quali di tali matrici sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$. La matrice dei coefficienti associata a a tale sistema è

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I \\ \\ III \\ 1/4IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-3I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 24 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1/8III \\ 1/3IV \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \\ IV+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2 quindi il sistema ammette infinite soluzioni, le tre matrici sono linearmente dipendenti e $\dim(S) < 3$. Inoltre la matrice dei coefficienti associata all'equazione $xA_1 + yA_2 = 0$, una volta ridotto diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso l'equazione ammette solo la soluzione nulla, quindi A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(S) = 2$ e una base di S è data da

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\quad A_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Si tratta di risolvere l'equazione $xA_1 + yA_2 = A$ ovvero il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y = 0 \\ x + 3y = \frac{2}{3} \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ 4x = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Infine

$$A = \frac{2}{3} A_1$$

□

Esercizio 7.20. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

a) *Mostrare che S è un sottospazio di V.*
b) *Calcolare la dimensione e una base di S.*

Soluzione:

a) Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

   Quindi anche la matrice $M_1 + M_2$ commuta con A e appartiene a S.

– **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

b) Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$AM = \begin{bmatrix} -8a-7c & -8b-7d \\ a & b \end{bmatrix}$$
$$MA = \begin{bmatrix} -8a+b & -7a \\ -8c+d & -7c \end{bmatrix}$$

Quindi

$$MA = AM \quad \Rightarrow \begin{cases} -8a-7c = -8a+b \\ -8b-7d = -7a \\ a = -8b+d \\ b = -7c \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b+7c = 0 \\ 7a-8b-7d = 0 \\ a+8b-d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-7I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-8II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -8t+s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{bmatrix} -8t+s & -7t \\ t & s \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \mid \forall s,t \in \mathbf{R} \right\}$$

Di conseguenza S ha dimensione 2 e una sua base è data dall'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Esercizio 7.21. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid AM = MA = 0\}$*. Dimostrare che* S *è un sottospazio di* $M_2(\mathbf{R})$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -2x+2z & -2y+2w \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$MA = \begin{bmatrix} x-2y & -x+2y \\ z-2w & -z+2w \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Chiamiamo B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi

$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \ \in \ S$$

- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora

$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \ \in \ S$$

In particolare S è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla matrice B.

□

Esercizio 7.22. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini una base del sottospazio* $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}$.
b) *Mostrare che il sottoinsieme* $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ *non è un sottospazio vettoriale di* U.

Soluzione:
Sia

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbf{R})$.

$$AX = \begin{bmatrix} x+kz & y+kw \\ 2x+3z & 2y+3w \end{bmatrix} \qquad XA = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ z+2w & kz+3w \end{bmatrix}$$

Da $AX = XA$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+kz = x+2y \\ y+kw = kx+3y \\ 2x+3z = z+2w \\ 2y+3w = kz+3w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+kz = 0 \\ kx+2y-kw = 0 \\ 2x+2z-2w = 0 \\ 2y-kz = 0 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2III \\ I \\ II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ k & 2 & 0 & -k & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - kI \\ IV + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z - w = 0 \\ -2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s + t \\ y = \frac{k}{2}s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

a) Abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{B}(U) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{k}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) W non è un sottospazio in quanto, per esempio, non contiene l'elemento nullo. Infatti la matrice nulla

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è invertibile.

$\square$

Esercizio 7.23. *Sia $W = \langle A,\ B\ , C \rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Cominciamo a stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolvento l'equazione matriciale $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y + (k-1)z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y + (k-1)z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti:

$$\dim(W) = 3$$
$$\mathcal{B}(W) = \{A,\ B,\ C\}$$

- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti. In particolare A è la matrice nulla e $A = 0 \cdot B + 0 \cdot C$ dipende linearmente da B e C. Se studiamo invece la dipendenza di B e C risolvendo l'equazione $yB + zC = 0$ otteniamo la sola soluzione $y = z = 0$ quindi B e C sono linearmente indipendenti (Infatti B e C non sono una multiplo dell'altra). Di conseguenza

$$\begin{aligned} \dim(W) &= 2 \\ \mathcal{B}(W) &= \{B,\ C\} \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 7.24. *Sia $V = \langle A, B, C\rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*
b) *Si esprima $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare della base trovata al punto* a).

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione di V cominciamo a verificare se A, B e C sono linearmente indipendenti risolvendo il sistema $xA + yB + zC = 0$:

$$x\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+2y+2z & y+3z \\ x+3y+7z & 2x+4y+8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y+2z = 0 \\ y+3z = 0 \\ x+3y+7z = 0 \\ 2x+4y+8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & 7 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III-1/2I \\ IV-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi il sistema $xA + yB + zC = 0$ ammette infinite soluzioni. Di conseguenza le tre matrici A, B, C sono linearmente dipendenti e $\dim(V) < 3$. Dai conti appena svolti si vede inoltre che risolvendo l'equazione $xA + yB = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 0 \\ y = 0 \\ x+3y = 0 \\ 2x+4y = 0 \end{cases}$$

che ammette la sola soluzione $x = y = 0$, quindi le matrici A e B sono linearmente indipendenti. Infine $\dim(V) = 2$ e una base di V è data dall'insieme $\{A, B\}$.

b) Dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Procedendo come nel punto precedente otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+2y = 2 \\ y = 2 \\ x+3y = 5 \\ 2x+4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad D = -A + 2B$$

$\square$

Esercizio 7.25. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca se A, B e C sono linearmente indipendenti in $M_2(\mathbf{R})$.*
b) *Si determini una base del sottospazio $\langle A, B, C\rangle$.*

Soluzione:

a) Le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti se l'equazione $xA + yB + zC = 0$ ha la sola soluzione $x = y = z = 0$. La matrice $xA + yB + zC$ è:

$$xA + yB + zC = \begin{bmatrix} x + 2z & 2x + 3y + 7z \\ -3x - 6z & y + z \end{bmatrix},$$

quindi l'equazione $xA + yB + zC = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \\ -3x - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & 7 & | & 0 \\ -3 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + 3I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni, quindi A, B e C sono linearmente dipendenti. Notiamo che $2tA + tB - tC = 0 \ \ \forall t \in \mathbf{R}$, quindi in particolare $C = 2A + B$.

b) Abbiamo appena osservato che C è linaremente dipendente da A e B. Viceversa le matrici A e B sono linearmente indipendenti in quanto non sono una multiplo dell'altra, quindi una base del sottospazio $\langle A, B, C\rangle$ è $\{A, B\}$.

□

Esercizio 7.26. *Sia $V = \langle A,\ B,\ C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$ generato dalle matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & k - 2 \\ 2 & k + 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la dimensione e una base di V.*

b) *Si stabilisca per quali k la matrice D appartiene a V. In tali casi si esprima D come combianzione lineare della base trovata al punto precedente.*

Soluzione:

a) Per determinare la dimensione e una base di V bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B e C sono linearmente indipendenti, ovvero risolvere l'equazione $xA + yB + zC = 0$. Tale equazione si traduce nel seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + 4y + 9z = 0 \\ 2x + 4y + 10z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 4 & 9 & | & 0 \\ 2 & 4 & 10 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ 1/4II \\ III - II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Il sistema $xA + yB + zC = 0$ ammette infinite soluzioni, quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti. Viceversa, risolvendo il sistema $xA + yB = 0$ otteniamo ol sistema equivalente

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

quindi A e B sono linearmente indipendenti. Infine

$$\dim(V) = 2, \qquad \mathcal{B}(V) = \{A, B\}.$$

b) Per esprimere D come combinazione lineare della base trovata dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$. Ripercorrendo i conti fatti precedentemente, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x + 4y = k - 2 \\ 2x + 4y = 2 \\ x = k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 6 \\ 1 & 4 & | & k - 2 \\ 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 0 & | & k + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - I \\ IV - 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 4 & | & k - 5 \\ 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 0 & | & k - 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione solo se $k = 1$, quando otteniamo

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D = 3A - B \quad \text{se } k = 1.$$

Se $k \neq 1$ la matrice D non appartiene a V.

□

Esercizio 7.27. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base.*

a) *Mostrare che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ è una sua base di V.*
b) *Calcolare le coordinate del vettore $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

a) Essendo V di dimensione 4 è sufficiente verificare che i quattro vettori di $\mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti. Calcoliamo le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_2 + v_3 &= (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_3 + v_4 &= (0, -0, 1, 1)_{\mathcal{B}} \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

I quattro vettori sono linearmente indipendenti se la matrice associata ha rango 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4, quindi anche $\mathcal{B}'$ è una base di V.

b) Le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ in quanto $v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4$. A questo punto per trovare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}'$ è sufficiente risolvere l'equazione: $x(v_1 + v_2) + y(v_2 + v_3) + z(v_3 + v_4) + wv_4 = v$, dove tutti i vettori sono espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow II - I \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$III - II \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Infine $v = (1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}'}$.

□

Esercizio 7.28. *Si consideri l'insieme S di matrici 3×3*

$$S = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbf{R}) \ : \ a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0\}.$$

a) *Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbf{R})$. In caso affermativo, trovarne la dimensione.*
b) *Sia $Sim_3(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Trovare una base dello spazio intersezione $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$.*

Soluzione:

a) Imponendo le condizioni $a_{11} + a_{12} = a_{32} + a_{33} = 0$ alla generica matrice di $M_3(\mathbf{R})$ otteniamo che la generica matrice di S è del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_1 + a_{13}A_2 + a_{21}A_3 + a_{22}A_4 + a_{23}A_5 + a_{31}A_6 + a_{33}A_7$$

dove

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$S = \langle\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7\ \rangle$$

è lo spazio vettoriale generato dalle 7 matrici A_i. Inoltre le 7 matrici sono linearmente indipendenti, quindi una base di S è

$$\mathcal{B}(S) = \{\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7\ \}$$

e $\dim(S) = 7$.

b) La generica matrice A di S appartiene a $Sim_3(\mathbf{R})$ se $a_{21} = -a_{11},\ a_{31} = a_{13},\ a_{23} = -a_{33}$, quindi la generica matrice di $S \cap Sim_3(\mathbf{R})$ ha la forma:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{13} \\ -a_{11} & a_{22} & -a_{33} \\ a_{13} & -a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}B_1 + a_{13}B_2 + a_{22}B_3 + a_{33}B_4$$

dove

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1 - A_3 \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_2 + A_6$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_4 \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A_7 - A_5$$

Notiamo che le 4 matrici B_i sono linearmente indipendenti, quindi

$$\mathcal{B}(S \cap Sim_3(\mathbf{R})) = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4\}$$

□

Esercizio 7.29. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A + A^T = 0\right\}.$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che ogni elemento di W ha rango minore di 3.*

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = -A$ ci dice che le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
   – SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -x-a & 0 & z+c \\ -y-b & -z-c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ -(x+a) & 0 & z+c \\ -(y+b) & -(z+c) & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ -\lambda x & 0 & \lambda z \\ -\lambda y & -\lambda z & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo il determinante della generica matrice A di W:

$$\det(A) = -x \cdot (yz) + y \cdot (xz) = -xyz + xyz = 0$$

Poiché il determinante di A è zero, il rango di A è minore di 3.

□

Esercizio 7.30. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{ A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0 \right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*

b) *Trovare una base di W.*

c) *Calcolare le coordinate di $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ rispetto alla base trovata al punto* b).

Soluzione:

Notiamo che la condizione $A^T = A$ implica che le matrici di W siano simmetriche. Inoltre la condizione $tr(A) = 0$ implica che la somma degli elementi della diagonale principale sia 0. Di conseguenza le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \qquad \text{con } a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & w & t \\ z & t & -x-w \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, w, t, a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+y & d+w & e+t \\ c+z & e+t & -a-x-d-w \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d & \lambda e \\ \lambda c & \lambda e & -\lambda a - \lambda d \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$.

c) È immediato verificare che $B = 2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_4 + 3A_5$, di conseguenza le coordinate di B rispetto alla base trovata al punto precedente sono $(2, 1, 1, -1, 3)_{\mathcal{B}}$.

□

Esercizio 7.31. *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \{A \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per } i \geq j\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Mostrare che per ogni matrice A in W, la matrice A^2 ha rango minore di 2.*

SOLUZIONE:

L'insieme W è formato dalle matrici triangolari superiori

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z \in \mathbf{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbf{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

– SOMMA. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x, y, z, a, b, c \in \mathbf{R}$$

due qualsiasi matrici di W. Allora

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ 0 & 0 & z+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+a & y+b \\ 0 & 0 & z+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

– PRODOTTO per SCALARI. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un elemento di W e $\lambda \in \mathbf{R}$ uno scalare. Allora

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda x & \lambda y \\ 0 & 0 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}$.

c) Calcoliamo A^2

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza se $x = 0$ o $z = 0$ otteniamo la matrice nulla di rango zero, altrimenti $\text{rg}(A^2) = 1$. In ogni caso $\text{rg}(A^2) \leq 1$.

$\square$

CAPITOLO 8

Applicazioni lineari

Esercizio 8.1. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.*

Esercizio 8.2. *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2\times 2}$ avalori in $\mathbf{R}$ non è lineare.*

Esercizio 8.3. *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Esercizio 8.4. *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Esercizio 8.5. *Determinare una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Esercizio 8.6. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.*

a) *Verificare che T è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
c) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare $T(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice A.*

Esercizio 8.7. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.*

a) *Esplicitare $T(x,y)$.*
b) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Esercizio 8.8. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T(v) = Av$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di T.*
b) *Stabilire se $(-3,2,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Esercizio 8.9. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Esercizio 8.10. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare tale che*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbf{R}$ un parametro reale.

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare una base degli spazi vettoriali $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{N}(T)$ al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Esercizio 8.11. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Esercizio 8.12. *Sia $T :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T.*

Esercizio 8.13. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Stabilire per quale valore di k il vettore $v_k = (k, k, k)$ appartiene all'immagine di T.*

Esercizio 8.14. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 3x_3, -2x_3 + x_4, 0, x_1 - x_2 + x_4)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva*
b) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Esercizio 8.16. *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$*

$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Esercizio 8.17.

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.
b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*
c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Esercizio 8.18. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

(1) *Dato il vettore $w = (2, -1, 1)$, calcolare $T(w)$.*
(2) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(3) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.*
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$.
(5) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
(6) *Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e alla base canonica $\mathcal{C}$ dello spazio di arrivo.*
(7) *Determinare le componenti del vettore $w = (2, -1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

(8) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Esercizio 8.19. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

(1) *Verificare che* T *è un'applicazione lineare.*
(2) *Dato il vettore* $w = (1, 1, 1)$, *calcolare* $T(w)$.
(3) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(4) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* A.
(5) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ *e* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(6) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *con* $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
(7) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *e alla base canonica di* $\mathbf{R}^2$.
(8) *Determinare la matrice* P *di cambiamento di base dalla base canonica* $\mathcal{C}$ *alla base* $\mathcal{B}$.
(9) *Determinare le componenti del vettore* $w = (1, 1, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *utilizzando la matrice* P *(o meglio* P^{-1}*).*
(10) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Esercizio 8.20. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ x + y,\ y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (3, -1, -5)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Esercizio 8.21. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (x + y,\ kx + y + z,\ kx + y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (0, 1, -1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Esercizio 8.22. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ *è un parametro reale.*

Stabilire se T *è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro* k.

Esercizio 8.23. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare del parametro reale* k.
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di* T *al variare di* k.

Esercizio 8.24. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w,\ -x + 2y - z,\ -x + y + 3z - 3w)$$

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^4$

Esercizio 8.25. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + 3z,\ x - y + (k+3)z + 2w,\ 2x - 3y + (k+6)z + (k+1)w)$$

dove k *è un parametro reale.*
Stabilire se esistono valori di k *per cui* T *è iniettiva e/o suriettiva.*

Esercizio 8.26. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) *Dire se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* T.

Esercizio 8.27. *Sia* k *un parametro reale e sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$ *definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, -kx_1 + x_3, x_3 + kx_4)$$

a) *Determinare basi del nucleo e dell'immagine di* T *al variare del parametro* k.
b) *Si dica se* T *è iniettivo e/o suriettivo.*

Esercizio 8.28. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *la funzione lineare*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2ax_2 + x_3, bx_1 + 2bx_2 + x_3).$$

a) *Si determinino gli eventuali valori reali di* a *e* b *per i quali* T *è suriettiva.*
b) *Si trovi una base del nucleo di* T *al variare di* a *e* b.

Esercizio 8.29. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare definita da* $T(x) = Ax$, *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se* T *è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* T.

Esercizio 8.30. *Sia* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *la funzione lineare definita da* $T(x) = Ax$, *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se* T *invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di* T.

Esercizio 8.31. *Detto* k *un paramtro reale, sia*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) *Si trovino, al variare di* k, *nucleo e immagine dell'endomorfismo* T_A *di* $\mathbf{R}^3$ *associato alla matrice* A.
b) *Stabilire per quali valori* $k \in \mathbf{R}$ *la funzione lineare* T_A *è invertibile.*

Esercizio 8.32. *Si consideri la funzione lineare* $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.*

Esercizio 8.33. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base del nucleo di T e una base dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*

Esercizio 8.34. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 8.35. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x + y,\ 2x - y - z,\ 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1, 2, -4),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, -7)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettivo e/o suriettiva.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$*

Esercizio 8.36. *Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.*
b) *Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori*

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 8.37. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x, y, z) = (3x - 2y,\ x + y + z,\ 2x - 3y - z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.*
c) *Trovare la distanza euclidea tra il punto $P = (1, 1, 1)$ e il nucleo $N(T)$.*

Esercizio 8.38. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 0, 2)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si stabilisca se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Esercizio 8.39. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base costituita dai vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T.*

Esercizio 8.40. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$*, e siano* $\mathcal{B} = \{(1, 0),\ (1, 1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ *due basi di* $\mathbf{R}^2$ *e* $\mathbf{R}^3$ *rispettivamente. Determinare la matrice* $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$.

Esercizio 8.41. *Sia* $V = \mathbf{R}^3$ *e siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ *rispettivamente la base canonica e un'altra base di* V.

a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{B}'$.
b) *Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice* P.

Esercizio 8.42. *Sia* $T\ :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x - z, 2x + y, x - 3y)$$

a) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.
b) *Si trovi una base dell'immagine di* T.
c) *Il determinante di una matrice associata a* T *può essere nullo?*

Esercizio 8.43. *Sia* $S\ :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita da*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1, x_2 - 3x_3).$$

a) *Sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$ *e sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^4$. *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S.
b) *Si trovi la dimensione del nucleo di* S.

Esercizio 8.44. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 3)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a* S *rispetto alle basi canoniche.*
b) *Determinare basi dell'immagine* $Im(S)$ *e del nucleo* $N(S)$.

Esercizio 8.45. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 3x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S.
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (0, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S.

Esercizio 8.46. *Sia* $V = \mathbf{R}^2$ *e siano* $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\ (1, 0),\ (0, 1)\ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 1),\ (1, 0)\ \}$ *due basi di* V.

a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$.
b) *Determinare le coordinate di* $v = (2, 1)$ *utilizzando la matrice* P.

Esercizio 8.47. *Sia* $V = \mathbf{R}^3$ *e siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ *rispettivamente la base canonica e un'altra base di* V.

a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{B}'$.
b) *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$. *Utilizzando la matrice* P *determinare la matrice* $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ *associata a* T *rispetto alle basi* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{B}'$.

Esercizio 8.48. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *così definita:* $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ 3y + z,\ 4z)$.

a) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (5, 3, 3)\}.$$

Esercizio 8.49. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (-1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 2)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.

b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 8.50. *Sia*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$
una base di $\mathbf{R}^3$ e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:
$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di T.*
c) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k+1,0,k)$ appartiene all'Immagine di T.*

Esercizio 8.51. *Dati i vettori di $\mathbf{R}^3$*
$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,2,2), \quad v_3 = (1,1,0),$$
si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da
$$T(v_1) = (2,0,0), \quad T(v_2) = (4,4,4), \quad T(v_3) = (0,6,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di T.*

Esercizio 8.52. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ che associa ai vettori*
$$(1,1,0), \qquad (1,-1,2), \qquad (0,0,1)$$
rispettivamente i vettori
$$(1,1,0,1), \qquad (1,2,-1,0), \qquad (0,0,1,1)$$

a) *Stabilire se T è iniettiva, suriettiva, biunivoca.*
b) *Qual è l'immagine di $v = (2,0,3)$?*

Esercizio 8.53. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*
$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.*

Esercizio 8.54. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*
$$T(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad T(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_1 + e_3.$$

a) *Si mostri che T è invertibile.*
b) *Si scriva la matrice associata a T^{-1} rispetto ad $\mathcal{E}$.*
c) *Sia $W = \{x \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Si trovi una base del sottospazio immagine $T(W)$.*

Esercizio 8.55. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*
$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 8.56. *Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0)\}$ di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare con matrice associata*
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
con k parametro reale.

a) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto $k = 1$, si trovi una base del sottospazio $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, con $W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,1) \rangle$.*

Esercizio 8.57. *Dati i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,2,0)$ e $v_3 = (0,1,1)$, sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ e $T(v_3) = v_1$.*
a) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.*
b) *Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica.*
c) *Determinare il nucleo di T e trovare (se esiste) una controimmagine di $(5,1,-11)$.*

Esercizio 8.58. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Esercizio 8.59. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A + A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Esercizio 8.60. *Si $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + a - c$$

a) *Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ x^2 + 2,\ x - 1,\ x + 1 \right\}$$

b) *Si trovi la dimensione e una base di $\mathrm{N}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.*

---

1. Suggerimenti

Una **Applicazione lineare** $T : V \to W$ è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

In particolare se $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$$

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice** $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi della base di V, espresse rispetto alla base di W. Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(V) = A \cdot v \qquad \forall v \in V$$

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(e_1) = (1, 2, 1)$$
$$T(e_2) = (1, 0, -1)$$

- La matrice associata rispetto a una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

L'**Immagine** $\mathrm{Im}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \ \dots, \ v_n\}$ di V:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \subseteq W$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$ associata:

- $\mathrm{Im}(T)$ = spazio generato dalle colonne di A (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{$ colonne linearmente indipendenti di A $\}$ (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche).
- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$

Il **Nucleo** $\mathrm{N}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $\mathrm{N}(T) = \{$ soluzioni del sistema omogeneo associato a A $\}$ (Prestare attenzione se le basi di U e di V non sono quelle canoniche.
- $\dim(\mathrm{N}(T)) = n - \mathrm{rg}(A)$, dove $n = \dim(V)$ = numero delle incognite del sistema lineare.

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se $T : V \to W$ allora:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n = \dim(V)$$

- Una applicazione è detta **Iniettiva** se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, cioè se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.
- Una applicazione è detta **Suriettiva** se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$, cioè se $\mathrm{Im}(T) = W$.
- Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è **invertibile** sse è biiettiva.

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.

Matrici di transizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' =$

$\{v'_1, \dots, v'_n\}$ due basi di V. Ogni vettore w di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi delle due basi:

$$\begin{aligned} &w = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = x'_1v'_1 + \cdots + x'_nv'_n \Rightarrow \\ &w = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B} \\ &w = (x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{B}'} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B}' \end{aligned}$$

- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, indicata con $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$:
$$(x'_1, \dots, x'_n) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$$
- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, indicata con $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}'$ epressi rispetto a $\mathcal{B}$:
$$(x_1, \dots, x_n) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T$$

Osservzioni
- Le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ sono una l'inversa dell'altra.
- Se $T : V \to V$ è un endomorfismo e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora
$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(T) \cdot P \qquad \text{con} \quad P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 8.1. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.*

Soluzione:
Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(2v) = 2T(v)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$. Sia per esempio $v = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &T(v) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \;\Rightarrow\; 2T(v) = (2, 0, 0) \\ &T(2v) = T(2, 0, 0) = (4, 0, 0) \end{aligned}$$

Quindi $T(2v) \neq 2T(v)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 8.2. *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2\times 2}$ avalori in $\mathbf{R}$ non è lineare.*

Soluzione:
Sia T la funzione determinante: $T(A) = \det(A)$. Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(A) + T(B) = T(A + B)$ per ogni $A,\ B \in M_{2\times 2}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} &T(A) = T(B) = 0 \;\Rightarrow\; T(A) + T(B) = 0 \\ &T(A + B) = 1 \end{aligned}$$

Quindi $T(A) + T(B) \neq T(A + B)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 8.3. *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che*

$$T(1, 2) = (3, 0), \qquad T(2, 7) = (4, 5), \qquad T(1, 5) = (1, 4)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$T(1,2) + T(1,5) = T((1,2) + (1,5)) = T(1+1, 2+5) = T(2,7),$$

mentre

$$\begin{aligned} &T(1,2) + T(1,5) = (3,0) + (1,4) = (4,4) \\ &T(2,7) = (4,5) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

$\square$

Esercizio 8.4. *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$2T(1,2) = T(2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = T(2,4),$$

mentre

$$\begin{aligned} &2T(1,2) = 2(3,0) = (6,0) \\ &T(2,4) = (5,0) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

$\square$

Esercizio 8.5. *Determinare una applicazione lineare* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Soluzione:
Possiamo procedere in due modi.

(1) Ricaviamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^2$ imponendo la linearità di T:

$$\begin{aligned} &2T(0,1) = T(0,2) = (4,4) \;\Rightarrow\; T(0,1) = (2,2) \\ &T(1,0) = T(1,1) - T(0,1) = (1,2) - (2,2) = (-1,0) \end{aligned}$$

Di conseguenza, preso il generico elemento $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \mathbf{R}^2$, per la linearità di T deve essere

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(-1,0) + y(2,2) = (-x+2y, 2y)$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

(2) Alternativamente possiamo scrivire il generico elemento $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di cui conosciamo l'immagine (che formano una base di $\mathbf{R}^2$): $(1,1)$ e $(0,2)$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = x \\ a + 2b = y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{-x+y}{2}(0,2)$$

Essendo T lineare deve quindi essere

$$\begin{aligned} T(x,y) =& x\,T(1,1) + \frac{-x+y}{2}\,T(0,2) = x(1,2) + \frac{-x+y}{2}(4,4) \\ =& (x,2x) + (-2x+2y, -2x+2y) = (-x+2y, 2y) \end{aligned}$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

$\square$

Esercizio 8.6. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

a) *Verificare che T è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
c) *Determinare la matrice A associata a T (rispetto alle basi canoniche).*
d) *Determinare $T(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice A.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che
$$\begin{aligned} &T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbf{R}^2 \\ &T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \end{aligned}$$
Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora
$$\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \\ T(v_1)+T(v_2) &= (x_1+y_1, 2x_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, 2x_2, x_2-y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \end{aligned}$$
Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente
$$\begin{aligned} &T(\lambda v) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ &\lambda T(v) = \lambda(x+y, 2x, x-y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$
Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione
$$\mathrm{N}(T) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid T(v) = 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+y, 2x, x-y) = (0,0,0) \right\} \subseteq \mathbf{R}^2$$
Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:
$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$
Analogamente
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \left\{ T(v) \mid v \in \mathbf{R}^2 \right\} \subseteq \mathbf{R}^3 \\ &= \{(x+y, 2x, x-y) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x,y \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle \end{aligned}$$
A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}.$$

c) La matrice A ha per colonne le immagini dei vettori della base di $\mathbf{R}^2$ espressi come combianzione lineare degli elementi della base di $\mathbf{R}^3$. Nel caso in cui le basi siano quelle canoniche la cosa è immediata:
$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = T(0,1) = (1,0,-1)$$
Quindi
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
Notiamo che al punto b) abbiamo in sostanza trovato:

– Nucleo di T: corrisponde alle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
– Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.

---

d) Con la definizione di T:

$$T(1,2) = (1+2, 2\cdot 1, 1-2) = (3, 2, -1)$$

Con la matrice A

$$T(1,2) = A \cdot (1,2)^T = (3,2,-1)$$

$\square$

Esercizio 8.7. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita sulla base canonica di* $\mathbf{R}^2$ *nel seguente modo:* $T(e_1) = (1,2,1),\ T(e_2) = (1,0,-1)$.

a) *Esplicitare* $T(x,y)$.
b) *Determinare la matrice* A *associata a* T *(rispetto alle basi canoniche).*
c) *Stabilire se* $(3,4,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x,y) \in \mathbf{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1,2,1) + y \cdot (1,0,-1) = (x+y,\ 2x,\ x-y)$$

b) La matrice associata a A è la matrice che ha per colonne le immagini della base canonica di $\mathbf{R}^2$ (espresse rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Avendo già $T(e_1)$ e $T(e_2)$ è immediato ricavare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Il vettore $w = (3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tale che $T(x,y) = w$, ovvero se $(x+y, 2x, x-y) = (3,4,1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=4 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow (3,4,1) = T(2,1) \in \mathrm{Im}(T)$$

Utilizzando la matrice associata al sistema, w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

In generale w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|w$ ammette soluzione cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

$\square$

Esercizio 8.8. *Sia* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che* $T(v) = Av$ *con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base di Nucleo e Immagine di* T.
b) *Stabilire se* $(-3,2,1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

a)

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ A \cdot v \mid v \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Sia quindi $v = (x,y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, l'immmagine di T è formata dai vettori

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{bmatrix} = (1,2,1) \cdot x + (1,0,-1)y$$

In sostanza $\mathrm{Im}(T)$ è lo spazio generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1,2,1),\ (1,0,-1) \rangle$$

Riduciamo perciò A a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango 2 e le due colonne sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (1,0,-1)\}$$

Analogamente il nucleo di T è

$$\mathrm{N}(T)) = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \mid A \cdot v = 0 \right\}$$

Sia quindi $v = (x, y)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^2$, il nucleo di T è formato dalle soluzioni di

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

In sostanza il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A. Usando la matrice ridotta è immediato vedere che l'unica soluzione è il vettore nullo $(0,0)$, quindi $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$.

b) Il vettore $w = (-3,2,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se appartiene allo spazio generato dalle colonne di A, ovvero se ammette soluzione il sistema $Ax = w$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & -3 \\ 2 & 0 & | & 2 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & -2 & | & 10 \\ 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & -2 & | & 10 \\ 0 & 0 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Il sistema non ammette soluzione, quindi $w = (-3,2,1)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Notiamo che

- Nucleo di T: corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato a A.
- Immagine di T: corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.
- w appartiene all'immagine di T se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|w)$.

□

Esercizio 8.9. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi :\quad x + 2y = 0$.

Soluzione:

Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi = \{(x,y,z) = (-2t, t, s) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x,y,z) = (-2t,t,s)$ di π è quindi data da

$$T(x,y,z) = A \cdot (x,y,z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t + s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t + s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \\ z = 2t + s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \qquad \Rightarrow \qquad T(\pi): \quad 5x + 7y = 0$$

$\square$

Esercizio 8.10. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare tale che*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

dove $k \in \mathbf{R}$ un parametro reale.

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare di $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Determinare una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$ *al variare di $k \in \mathbf{R}$.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1, 1, 2, -1) \\ T(e_2) &= (1, 2, 2, -2) \\ T(e_3) &= (2, 4, 4, k-4) \\ T(e_4) &= (1, 1, 3, 2) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & k-4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Sappiamo che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T))$, quindi
   - Se $k \neq 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$, e T è sia suriettiva che iniettiva.
   - Se $k = 0$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3$ e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$, e T non è né suriettiva né iniettiva.
b) Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi
   - Se $k \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4)\} \\ &\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

   - Se $k = 0$, allora

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_4)\}$$

   Inoltre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

   Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, -2, 1, 0)\}$$

$\square$

Esercizio 8.11. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*

c) *Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\mathrm{Im}(T)$ è generata da

$$T(e_1) = (1, 1, 0, 0, -1), \qquad T(e_2) = (-1, 1, 1, 1, -1)$$
$$T(e_3) = (0, 0, 0, 3, 0), \qquad T(e_4) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

Quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$ equivale al rango della matrice associata a tali vettori.

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$.

Per rispondere a tutte le tre domande riduciamo a gradini la matrice associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - III \\ V + II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2III - II \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1, 1, 0, 0, -2),\ (-1, 1, 1, 1, 0),\ (0, 0, 0, 3, 0)\} \end{aligned}$$

Inoltre dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T))$ notiamo che

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathrm{N}(T)$$
$$\text{sse}$$
$$T(v) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + x_4T(e_4) = 0$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato a $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ e $T(e_4)$.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0, 0, 0, 1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbf{R}^5) \ \Rightarrow\ T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow\ T \text{ non è iniettiva}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema impostato all'inizio è compatibile. Dalla terza riga della matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1,1,1,t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 8.12. *Sia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.*
b) *Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3,3,1,0)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per rispondere alla domanda a) dobbiamo in sostanza calcolare il rango di A, mentre per rispondere alla domanda b) dobbiamo stabilire quando il sistema $A|v$ ammette soluzione. Riduciamo quindi a gradini la matrice $A|v$:

$$\begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ III \\ II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 2k & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - 2kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 0 & -1+2k & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III - II \\ 2IV - (2k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix}$$

Conviene forse interrompere la riduzione a questo punto.

a) $2k+1$ e $2k-1$ non possono essre contemporaneamente nulli, quindi la matrice A ha sempre rango 3:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}$$

b) Il sistema $A|v$ ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k+1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & -2k+7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot [(2k+1)(-2k+7) - (2k-1) \cdot 5]$$
$$= 2 \cdot (-4k^2 + 2k + 12)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado vediamo che il determinante si annulla per $k = -3, 4$.

Infine v appartiene all'immagine di T quando $k = -3, 4$.

In alternativa si poteva completare la riduzione a gradini di $A|v$.

□

Esercizio 8.13. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Stabilire per quale valore di k il vettore $v_k = (k, k, k)$ appartiene all'immagine di T.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A affiancata dalla dal vettore v_k.:

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & 1 & | & k \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -2k \end{bmatrix}$$

a) Considerando solo la matrice dei coeficienti otteniamo

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{(2, 0, 2),\ (0, 1, 2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a A otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = (1, -2, 2)$$

b) Il sistema associato a $A|v_k$ diventa

$$\begin{cases} 2x + y = k \\ -y + z = k \\ 0 = -2k \end{cases} \Rightarrow$$

e ammette soluzione solamente se $k = 0$. Quindi v_k appartiene a $Im(T)$ se $k = 0$.

□

Esercizio 8.14. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 3x_3, -2x_3 + x_4, 0, x_1 - x_2 + x_4)$$

rispetto alle basi canoniche.

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva*
b) *Trovare una base del nucleo* $\mathrm{N}(T)$ *e una base dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione:

La matrice associata a T è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ II \\ III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \Rightarrow T \text{ non è suriettiva}$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(0, 0, 0, 1),\ (1, 0, 0, -1),\ (3, -2, 0, 0)\}$$

Inoltre

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow T \text{ non è iniettiva}$$

Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \ \Rightarrow \ T \text{ non è iniettiva}$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-5, -3, 1, 2)\}$$

□

Esercizio 8.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per risponedere alla domanda b) dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot (x, y, z)^T = (3, 3, k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gardini la matrice A affiancata dalla colonna $(3, 3, k)^T$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ -2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow II + I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & k-6 \end{bmatrix}$$

a) Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2, -2, 0),\ (0, 1, 1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) \right\}$$

b) T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.
Risolviamo il sistema $Ax = (3, 3, k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3, 3, k)$ appartiene all'imangine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0 \right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) t,\ \forall t \in\ R.$

Notiamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1 \right) t$ sono gli elementi del nucleo. Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0 \right)$ e $w \in \mathrm{N}(T)$, poiché $T(v_0) = (3, 3, 6)$, allora $T(v_0 + w) = T(v_0) + T(w) = (3, 3, 6) + (0, 0, 0) = (3, 3, 6)$.

□

Esercizio 8.16. *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$*

$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A) = 2 \neq 0$, quindi T è invertibile.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ \\ III + I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I - III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4 - \text{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.

b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x,y,z,w) = \left(-2x - z,\ \frac{1}{2}y,\ -x - z,\ w\right)$$

□

Esercizio 8.17.

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$.

b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*

c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1,2,3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2) \\ T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0) \\ &= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$II - 2I \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1, -2),\ T(e_2) = (3, 3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1 \right) \right\}$$

□

Esercizio 8.18. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (2x, y, 0)$$

(1) *Dato il vettore* $w = (2, -1, 1)$, *calcolare* $T(w)$.
(2) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(3) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* A.
(4) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T)$ *e* $\mathrm{N}(T)$.
(5) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *con* $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
(6) *Determinare la matrice* B *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *dello spazio di partenza e alla base canonica* $\mathcal{E}$ *dello spazio di arrivo, cioè* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$.
(7) *Determinare le componenti del vettore* $w = (2, -1, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.
(8) *Calcolare* $T(w)$ *utilizzando la matrice* B.

Soluzione:

(1) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:

$$T(2, -1, 1) = (2 \cdot 2, -1, 0) = (4, -1, 0)$$

(2) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$
$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

La matrice A ha come colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Utilizzando la matrice A si ottiene

$$T(w) = A \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1).

(4) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2, 0, 0),\ (0, 1, 0)\ \rangle$$

Dalla matrice A, già ridotta a gradini, notiamo che solamente $T(e_1)$ e $T(e_2)$ sono linearmente indipendenti, di conseguenza l'immagine è uno spazio vettoriale generato da due vettori:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}$$

Il nucleo di T è formato da quei vettori dello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ la cui immagine attraverso T è il vettore nullo:

$$\mathrm{N}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(v) = (0, 0, 0)\right\}$$

Il $\mathrm{N}(T)$ è quindi formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 1) \cdot t \mid t \in \mathbf{R}\} = \langle\ (0, 0, 1)\ \rangle \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

(5) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(6) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dello spazio di partenza e rispetto alla base $\mathcal{E}$ dello spazio di arrivo, come al punto (2), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1, 0, 1) = (2, 0, 0) \\ T(v_2) &= T(0, 1, -1) = (0, 1, 0) \\ T(v_3) &= T(1, 1, -1) = (2, 1, 0) \end{aligned}$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica. La matrice B ha quindi come colonne $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Per determinare le componenti (x, y, z) di w rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo esprimere w come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi risolvere l'eaquazione

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$$

Consideriamo la matrice associata:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Come metodo alternativo possiamo calcolare la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, ovvero la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ dobbiamo prima calcolare $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, la matrice di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0, -3, 2)\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$:

$$w = 0v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

(8) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (1) e del punto (3).

□

Esercizio 8.19. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

(1) *Verificare che T è un'applicazione lineare.*
(2) *Dato il vettore $w = (1, 1, 1)$, calcolare $T(w)$.*
(3) *Determinare la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
(4) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice A.*
(5) *Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$ *e* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$.
(6) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ con $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
(7) *Determinare la matrice $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$.*
(8) *Determinare la matrice P di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.*
(9) *Determinare le componenti del vettore $w = (1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice P (o meglio P^{-1}).*
(10) *Calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B.*

Soluzione:

(1) Si tratta di verificare che:
- $T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \forall x_i, y_i, z_i \in \mathbf{R}$. Infatti:

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (2x_1, y_1 + z_1) + (2x_2, y_2 + z_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \\ T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) &= (2(x_1 + x_2), y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \end{aligned}$$

- $T(\lambda(x, y, z)) = \lambda T(x, y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R},\ \forall \lambda \in \mathbf{R}$ Infatti:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x, y, z)) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x, \lambda y + \lambda z) \\ \lambda T(x, y, z) &= \lambda(2x, y + z) = (2\lambda x, \lambda y + \lambda z) \end{aligned}$$

(2) Per calcolare $T(w)$ basta applicare la definizione:

$$T(1, 1, 1) = (2 \cdot 1, 1 + 1) = (2, 2)$$

(3) Per calcolare A dobbiamo calcolare l'immagine dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (2, 0), \qquad T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1), \qquad T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 1)$$

La matrice A ha come colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Utilizzando la matrice A si ottiene

$$T(w) = A \cdot w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ovviamente abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto 2.

(5) L'immagine di T è generata dai vettori colonna di A:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle\ T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\ \rangle = \langle\ (2,0),\ (0,1),\ (0,1)\ \rangle$$

Dalla matrice A si vede che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,0),\ (0,1)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall\ t\ \in\ \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(0,-1,1)\cdot t \mid t\ \in\ \mathbf{R}\} = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,-1,1)\} \end{aligned}$$

(6) Per verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ con $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ calcoliamo il rango della matrice che ha per colonne i tre vettori:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, quindi ha rango 3, e l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

(7) Per determinare la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di R^3 e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, come al punto (3), calcoliamo l'immagine di v_1, v_2 e v_3 attraverso T:

$$T(v_1) = T(2,1,0) = (4,1), \qquad T(v_2) = T(0,1,0) = (0,1), \qquad T(v_3) = T(1,0,1) = (2,1)$$

Notiamo che tali immagini (appartenenti allo spazio di arrivo) sono espresse come richiesto rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$. La matrice B ha come colonne $T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3)$:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(8) La matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa di P

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(9) Per esprimere w rispetto a $\mathcal{B}$ basta calcolare $P^{-1} \cdot w$:

$$w_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot w^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e w ha componenti $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$:

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3$$

In alternativa possiamo esprimere w come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ risolvendo l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$ la cui matrice associata è:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad w = (0,\ 1,\ 1)_{\mathcal{B}}$$

(10) Avendo espresso w in termini della base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ possiamo ora calcolare $T(w)$ utilizzando la matrice B:

$$T(w) = B \cdot w = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto lo stesso risultato del punto (2) e del punto (4), in quanto $T(w) \in \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^2$, e anche lavorando con la matrice B abbiamo mantenuto come base di $\mathbf{R}^2$ la base canonica.

□

Esercizio 8.20. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ x + y,\ y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(1) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro k.*
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro k.*
(4) *Stabilre se il vettore $v = (3, -1, -5)$ appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro k. In caso positivo esprimere v come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Soluzione:

(1) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base canonica:

$$T(1, 0, 0) = (2, 1, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, k)$$

Di conseguenza

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

(2) Per determinare la dimensione e una base dell'immagine di T riduciamo la matrice A a gradini.

$$\Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Si tratta ora di distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3, di conseguenza i tre vettori sono linearmente indipendenti

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3,$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ k)\}$$

Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, infatti $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3 che quindi coincide necessariamente con lo spazio stesso.

- Se $k = 0$ la matrice ha rango 2. In particolare risultano linearmente indipendenti la prima e seconda colonna della matrice ridotta, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}$$

(3) Per il teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:

- Se $k \neq 0$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$$

ovvero

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$$

- Se $k = 0$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1$$

In questo caso per determinare $\mathrm{N}(T)$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendendo la matrice ridotta e sostituendo $k = 0$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in R$$

Di conseguenza

$$\mathrm{N}(T) = \{(x,y,z) = (0,0,1)t \mid t \in R\}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,0,1)\}$$

(4) Il vettore w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se w è combinazione lineare di $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$. Si tratta perciò di risolvere il sistema lineare a cui è associata la matrice A, con il vettore w come colonna dei termini noti. In questo caso dobbiamo ripetere la riduzione a gradini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & k & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & k & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow III - II \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ abbiamo già osservato che $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, quindi w appartiene necessariamente a $\mathrm{Im}(T)$. Inoltre risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -5 \\ kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$

ovvero $w \in \mathrm{Im}(T)$:

$$w = 4(2,1,0) - 5(1,1,1)$$

- Se $k = 0$ abbiamo scelto come base di $\mathrm{Im}(T)$ i vettori $T(e_1)$ e $T(e_2)$ corrispondenti alle prime due colonne di A. Quindi è sufficiente risolvere il sistema lineare $x\,T(e_1) + y\,T(e_2) = w$ ovvero il sistema a cui è associata la matrice formata dalle prime due colonne di A dopo avere sostituito $k = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -5 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

ovvero $w \in \mathrm{Im}(T)$:

$$w = 4(2,1,0) - 5(1,1,1)$$

□

Esercizio 8.21. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z) = (x + y,\ kx + y + z,\ kx + y + kz)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

(1) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ al variare del parametro k.*

(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ *al variare del parametro* k.
(4) *Stabilre se il vettore* $v = (0, 1, -1)$ *appartiene a* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare del parametro* k. *In caso positivo esprimere* v *come combinazione lineare degli elementi della base di* $\mathrm{Im}(T)$ *trovata.*

Soluzione:

(1) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base canonica:
$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,k,k)\\ T(0,1,0) &= (1,1,1)\\ T(0,0,1) &= (0,1,k)\end{aligned}$$
Di conseguenza
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{bmatrix}$$
(2) Per determinare la dimensione e una base dell'immagine di T riduciamo la matrice a gradini:
$$\begin{array}{c} \\ II - kI \\ III - II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$
Si tratta ora di distinguere due casi
- Se $k \neq 1$ la matrice ha rango 3, di conseguenza i tre vettori sono linearmente indipendenti
$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3,\\ &\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,\ k,\ k),\ (1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ k)\}\end{aligned}$$
Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, infatti $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3 che quindi coincide necessariamente con lo spazio stesso.
- Se $k = 1$ la matrice ha rango 2. In particolare risultano linearmente indipendenti la prima e terza colonna della matrice. Quindi
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2, \qquad \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$$
Notiamo che per $k = 1$ $(1, k, k) = (1, 1, 1)$.

(3) Per il teorema di nullità più rango:
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(T))$$
Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:
- Se $k \neq 1$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, quindi
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0$$
ovvero
$$\mathrm{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$$
- Se $k = 1$ abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, quindi
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1$$
In questo caso per determinare $\mathrm{N}(T)$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendendo la matrice ridotta:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in\ R$$
Di conseguenza
$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(T) = \{(x, y, z) = (-1, 1, 0)t \mid t \in\ R\}\\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1\\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-1, 1, 0)\}\end{aligned}$$

(4) Il vettore w appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se w è combinazione lineare di $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$. Si tratta perciò di risolvere il sistema lineare a cui è associata la matrice A, con il vettore w come colonna dei termini noti. In questo caso dobbiamo ripetere la riduzione a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ k & 1 & 1 & | & 1 \\ k & 1 & k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - kI \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi.

- Se $k \neq 1$ abbiamo già osservato che $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, quindi w appartiene necessariamente a $\mathrm{Im}(T)$. Inoltre risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (1-k)y + z = 1 \\ (k-1)z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k+1}{(k-1)^2} \\ y = -\dfrac{k+1}{(k-1)^2} \\ z = \dfrac{-2}{k-1} \end{cases}$$

ovvero $w \in \mathrm{Im}(T)$:

$$w = \frac{k+1}{(k-1)^2} \cdot (1, k, k) - \frac{k+1}{(k-1)^2} \cdot (1, 1, 1) - \frac{2}{k-1} \cdot (0, 1, k)$$

- Se $k = 1$ abbiamo scelto come base di $\mathrm{Im}(T)$ i vettori $T(e_1) = T(e_2)$ e $T(e_3)$. Quindi è sufficiente risolvere il sistema lineare $y\,T(e_2) + z\,T(e_3) = w$ ovvero il sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

In questo caso il sistema contiene l'equazione $0 = -2$ impossibile, quindi non ammette soluzioni e w non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

$\square$

Esercizio 8.22. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k.

SOLUZIONE:

Notiamo innanzittutto che

- T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$.
- T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, ovvero se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T.

Calcoliamo $T(e_1)$ e $T(e_2)$ per determinare la matrice associata a T:

$$T(e_1) = (k, 1, 0)$$
$$T(e_2) = (4, k, 1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\Rightarrow \begin{matrix} II \\ III \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ k & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 - k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - (4 - k^2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ T \ \text{ non è suriettiva}$$

Notiamo che lo stesso risultato lo potevamo ottenere osservando che

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(e_1),\ T(e_2)\rangle$$

quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$. In nessun caso infatti una applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ può essere suriettiva.

Per il teorema di nullità più rango

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathbf{R}^2) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 - 2 = 0$$

Quindi

$$\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\} \ \Rightarrow\ T \ \text{è iniettiva}$$

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + ky = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$$

□

Esercizio 8.23. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k.*
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k.*

Soluzione:

a) T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^4$, cioè se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Inoltre T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0,0)\}$, cioè se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0$. Si tratta perciò di calcolare il rango di A. Utilizziamo il calcolo del determinante, che sviluppiamo rispetto alla quarta colonna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1 \cdot (k+3) \cdot \det \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 2k^2 & 0 & k \end{bmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) \cdot (k+3) \cdot (k+1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3k+4 \\ 0 & k \end{bmatrix} = (k+3) \cdot (k+1) \cdot k \end{aligned}$$

– Se $k \neq -3, -1, 0$, allora $\det(A) \neq 0$ e $\mathrm{rg}(A) = 4$. Quindi

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è suriettiva} \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva} \end{aligned}$$

– Se $k = -3, -1$ o 0, allora

$$\begin{aligned} &\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) \leq 3 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è suriettiva} \\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è iniettiva} \end{aligned}$$

b) Abbiamo già visto la dimensione di immagine e nucleo per $k \neq -3, -1, 0$. Consideriamo ora gli altri casi.

– Se $k = -3$ allora $\det(A) = 0$ e $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2(1+10) = 22 \neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1$$

– Se $k=-1$ allora $\det(A)=0$ e $\mathrm{rg}(A)\leq 3$. Inoltre A diventa

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=2\neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A)=3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{rg}(A)=3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T))=4-\mathrm{rg}(A)=1$$

– Se $k=0$ allora $\det(A)=0$ e $\mathrm{rg}(A)\leq 3$. Inoltre A diventa

$$A=M(T)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}=1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix}=1-20=-19\neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A)=3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{rg}(A)=3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T))=4-\mathrm{rg}(A)=1$$

□

Esercizio 8.24. *Sia $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z,w)=(-x-y+z+w,\ -x+2y-z,\ -x+y+3z-3w)$$

a) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T)\subseteq\mathbf{R}^3$.
c) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T)\subseteq\mathbf{R}^4$

Soluzione:

a) Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$T(e_1)=(-1,\ -1,\ -1) \qquad T(e_2)=(-1,\ 2,\ 1)$$
$$T(e_3)=(1,\ -1,\ 3) \qquad T(e_4)=(1,\ 0,\ -3)$$

Quindi

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

b) Poichè

$$\mathrm{Im}(T)=\langle T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4)\rangle$$

ovvero $\mathrm{Im}(T)$ è generato dai vettori colonna di A, per determinarne dimensione e base riduciamo la matrice A a gradini:

$$\begin{array}{c}\\ II-I\\ III-I\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 2 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}\\ 1/2III\\ II\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\\ \\ III-3II\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -5 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c}\\ \\ 1/5III\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

LA matrice A ha rango 3, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T))=3$$

Inoltre le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti quindi possiamo prendere come base di $\mathrm{Im}(T)$ i tre vettori $T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)\}\\ &= \{(-1,-1,-1),\ (-1,2,1),\ (1,-1,3)\}\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 3, quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ (e T è suriettiva).

c) Gli elementi di $\mathrm{N}(T)$ sono i vettori di $\mathbf{R}^4$, soluzione del sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendiamo la matrice già ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y+z+w=0\\ y+z-2w=0\\ -z+w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=t\\ w=t\end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}(T) = \{(1,1,1,1)t \mid t \in \mathbf{R}\}\\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1\\ &\mathcal{B}(\mathrm{N}((T)) = \{(1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

Notiamo che, come ci aspettavamo dal teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$$

□

Esercizio 8.25. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x,y,z,w) = (x-2y+3z,\ x-y+(k+3)z+2w,\ 2x-3y+(k+6)z+(k+1)w)$$

dove k è un parametro reale.

Stabilire se esistono valori di k per cui T è iniettiva e/o suriettiva.

SOLUZIONE:

Ricordiamo che

- T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0,0)\}$, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$
- T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$, ovvero se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T.

Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica per determinare la matrice associata a T:

$$\begin{aligned} &T(e_1) = (1,1,2), && T(e_2) = (-2,-1,-3)\\ &T(e_3) = (3,k+3,k+6), && T(e_4) = (0,2,k+1)\end{aligned}$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & k+3 & 2\\ 2 & -3 & k+6 & k+1\end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I\end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & k & 2\\ 0 & 1 & k & k+1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II\end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & k & 2\\ 0 & 0 & 0 & k-1\end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 1$, allora $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ T \text{ è suriettiva}$$
- Se $k = 1$, allora $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ T \text{ non è suriettiva}$$

Per il teorema di nullità più rango

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Quindi

- Se $k \neq 1$ allora
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 3 = 1$$
- Se $k = 1$ allora
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 2 = 2$$

In nessuno dei due casi si ha $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, quindi T non è mai iniettiva.

Notiamo che $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbf{R}^3$, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 3$ e

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 4 - 3 = 1$$

quindi sicuramente $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ non è iniettiva.

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere senza utilizzare il teorema di nullità più rango, ma risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + kz + 2w = 0 \\ (k-1)w = 0 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k \neq 1$:
$$\begin{cases} x = (-2k-3)t \\ y = -kt \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(T) = \{(-2k-3,\ -k,\ 1,\ 0)t \mid t \in\ R\}$$
e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$.
- Se $k = 1$:
$$\begin{cases} x = -5s - 4t \\ y = -s - 2t \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(T) = \{(-5,\ -1,\ 1,\ 0)s + (-4,\ -2,\ 0,\ 1)t \mid s, t \in\ R\}$$
e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 2$.

□

Esercizio 8.26. *Sia $T\ :\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

Ricaviamo la matrice A associata all'applicazione T calcolando le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (-1, -3)$$
$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rispondiamo ad entrambi i quesiti contemporaneamente ricordando che un'applicazione è iniettiva se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, ed è suriettiva se la sua immagine è tutto lo spazio di arrivo, ovvero in questo caso se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Poichè la matrice A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

di determinante $-1 \neq 0$, la matrice A ha rango 2. Quindi

- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \;\Rightarrow\; T$ è suriettiva.
- Per il teorema di nullità più rango: $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1 \;\Rightarrow\; T$ non è iniettiva.

$\square$

Esercizio 8.27. *Sia k un parametro reale e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, -kx_1 + x_3, x_3 + kx_4)$$

a) *Determinare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Si dica se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T calcolando $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$ e $T(e_4)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{l} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + k/2I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Il nucleo di T è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + 3w = 0 \\ z = 0 \\ kw = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; \mathrm{N}(T) = \{\ (0,0,0,0)\ \}$$

– Se $k = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \; \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0,-3,0,1)\ \}$$

Una base dell'Immagine di T è data dai vettori linearmente indipendenti di A. Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$ la matrice A ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,1,-k,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,1,1),\ (0,3,0,k)\ \}$$

– Se $k = 0$ la matrice A ha rango 3 e in particolare risultano linearmente indipendenti i primi tre vettori:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{\ (2,1,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,1,1)\ \}$$

b) Se $k \neq 0$ il nucleo contiene solo il vettore nullo, quindi T è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 4, quindi T è suriettiva.
Se $k = 0$ il nucleo ha dimensione 1, quindi T non è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 3, quindi T non è suriettiva.

□

Esercizio 8.28. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2ax_2 + x_3, bx_1 + 2bx_2 + x_3).$$

a) *Si determinino gli eventuali valori reali di a e b per i quali T è suriettiva.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T al variare di a e b.*

Soluzione:
Determiniamo la matrice A associata a T calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{l} T(e_1) = T(1,0,0) = (a,b) \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (2a,2b) \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (1,1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & 2a & 1 \\ b & 2b & 1 \end{bmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice A scambiando prima e terza colonna (ricordando poi tale scambio nella parte b)).
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 2b & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & 2(b-a) & b-a \end{bmatrix}$$

a) La funzione lineare T è suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 2$, ovvero se $a \neq b$.
b) Per determinare il nucleo di T dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A, ricordando che lo scambio di colonne corrisponde allo scambio delle incognite x e z:

$$\begin{cases} z + 2ay + ax = 0 \\ 2(b-a)y + (b-a)x = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.
– Se $a \neq b$, allora dividendo la seconda equazione per $b - a$ otteniamo

$$\begin{cases} z + 2ay + ax = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{ \ (-2,1,0) \ \}$$

– Se $a = b$ allora resta solo la prima equazione:

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -2at - as \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{ \ (1,0,-a), \ (0,1,-2a) \ \}$$

□

Esercizio 8.29. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{matrix} \\ II + I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

b)
$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3\\ \dim(\mathrm{N}(T)) &= 4 - 3 = 1\end{aligned}$$

a) Inoltre
$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3) \;\Rightarrow\; T \text{ è suriettiva}\\ &\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \Rightarrow\; T \text{ non è iniettiva}\end{aligned}$$

□

Esercizio 8.30. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se T invertibile.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

a) T invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A.
Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{array}{c}\\ 1/2II + I\\ III + 1/2II\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c}\\ III\\ II\\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c}\\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\mathrm{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.
Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,-2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,0,0,-1)\}$$
Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{cases} x - z + w = 0\\ y = 0\\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0\\ y = 0\\ z = t\\ w = t \end{cases}$$
Quindi
$$\mathcal{B}(N(T)) = \{\ (0,0,1,1)\ \}$$

□

Esercizio 8.31. *Detto k un paramtro reale, sia*
$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 10\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

a) *Si trovino, al variare di k, nucleo e immagine dell'endomorfismo T_A di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice A.*
b) *Stabilire per quali valori $k \in \mathbf{R}$ la funzione lineare T_A è invertibile.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A:
$$\begin{array}{c}\\ \\ 2III - kII \end{array}\begin{bmatrix} k & 1 & 10\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

– Se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3, quindi $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^3$ e $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$.
– Se $k = 0$ una base dell'immagine di T è data dall'insieme $\{(1,2,0),\ (10,0,0)\}$. Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} y + 10z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo di T è $\{(1,0,0)\}$.

b) T è invertibile se A ha rango 3, quindi se $k \neq 0$.

□

Esercizio 8.32. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine* $\mathrm{Im}(T)$ *al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 8.33. *Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$ con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare una base del nucleo di T e una base dell'immagine di T al variare del parametro k.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*

Soluzione:

Riduciamo A a gradini scambiando opportunamente le righe:

$$\begin{array}{c} II \\ III \\ IV \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + 2I \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV + (k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

a) Il nucleo di T è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x + 2w = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ -z - w = 0 \\ (-k+1)w = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(T) = \{ \ (0,0,0,0) \ \}$$

– Se $k = 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = -t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{ \ (-1,-1,-1,1) \ \}$$

Una base dell'Immagine di T è data dai vettori linearmente indipendenti di A. Anche in questo caso dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 1$ la matrice A ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{ \ (0,1,0,-2), \ (1,1,1,0), \ (k,0,1,1), \ (2,2,2,-1) \ \}$$

In realtà $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^4$.

– Se $k = 1$ la matrice A ha rango 3 e in particolare risultano linearmente indipendenti i primi tre vettori:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{ \ (0,1,0,-2), \ (1,1,1,0), \ (1,0,1,1) \ \}$$

b) Se $k \neq 1$ il nucleo contiene solo il vettore nullo, quindi T è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 4, quindi T è suriettiva.

Se $k = 1$ il nucleo ha dimensione 1, quindi T non è iniettiva, e l'immagine ha dimensione 3, quindi T non è suriettiva.

□

Esercizio 8.34. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (x + y - 2z, \ 3x - z, \ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo*

$$g(x,y,z) = (x + z, \ x - y + z, \ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ *e* $f \circ g$.

Soluzione:

Calcoliamo le matrici associate a f e g (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$):

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le matrici associate a f e g possiamo calcolare direttamente la matrice associata alle due funzioni composte. Infatti la matrice associata a $g \circ f$ è $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ e la matrice associata a $f \circ g$ è $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$. Quindi

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione dei nuclei basta calcolare il rango delle matrici. Riducendo a gradini:

$$M(g\circ f) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(f\circ g) \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-3I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\dim(\mathrm{N}(g\circ f)) = 3 - \mathrm{rg}\,(M(g\circ f)) = 3-1 = 2$$
$$\dim(\mathrm{N}(f\circ g)) = 3 - \mathrm{rg}\,(M(f\circ g)) = 3-2 = 1$$

□

Esercizio 8.35. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x+y,\ 2x-y-z,\ 2y+z)$$

e sia $\mathcal{B} = \{(1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7)\}$ *una base di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Stabilire se* T *è iniettivo e/o suriettiva.*
b) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$

Soluzione:

Per rispondere alla domanda a) possiamo comunque calcolare prima la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$.

b) Siano $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-7)$. Il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

$$T(v_1) = (3,4,0), \quad T(v_2) = (1,-2,3), \quad T(v_3) = (1,9,-7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \\ III+4I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 12 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 14 & 11 & -10 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1): \begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=-2 \\ -z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=-30 \\ z=14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (-17,-30,14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=-4 \\ -z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-26 \\ z=-11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (12,-26,-11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=7 \\ -z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=27 \\ z=10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (-9,27,10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{B}}(T)$. In alternativa risulta forse più semplice calcolare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica e calcolare poi il rango di questa:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III + 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Im(T)) = \text{rg}(M(T)) = 3 \;\Rightarrow\; T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(N(T)) = 3 - \text{rg}(M(T)) = 0 \;\Rightarrow\; T \text{ è iniettiva}$$

□

Esercizio 8.36. *Sia $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\; 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\; x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.*
b) *Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori*

$$v_1 = (1, 0, 1),\; v_2 = (1, 0, 0),\; v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S rispetto alle basi canoniche calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{c} S(e_1) = (3, 4, 1) \\ S(e_2) = (0, -2, 0) \\ S(e_3) = (-2, 2, 2) \\ S(e_4) = (1, 3, 2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = M(S) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 4I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\; S(e_2),\; S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 0 \\ -2y - 6z - 5w = 0 \\ -8z - 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5}t \\ y = t \\ z = t \\ w = -\frac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(6, 5, 5, -8)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S rispetto alla basecanonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ ha per colonne la immagini $S(e_1)$, $S(e_2)$, $S(e_3)$ espresse però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Avendo già calcolato tali immagini, si tratta ora di esprimere $S(e_1)$, $S(e_2)$, $S(e_3)$, $S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1 + yv_2 + zv_3 = S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III - I \\ II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1)=(-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2)=(2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3)=(0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4)=(-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.37. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ definita da*

$$T(x,y,z)=(3x-2y,\ x+y+z,\ 2x-3y-z)$$

a) *Determinare basi dell'immagine $Im(T)$ e del nucleo $N(T)$.*
b) *Si scriva la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$.*
c) *Trovare la distanza euclidea tra il punto $P=(1,1,1)$ e il nucleo $N(T)$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II-I \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(Im(T))=\{T(e_1),\ T(e_2)\}=\{(3,1,2),\ (-2,1,-3)\}$$

Il nucleo di T è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}t \\ y=t \\ z=-\frac{5}{3}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T))=\left\{\left(\frac{2}{3},1,-\frac{5}{3}\right)\right\}, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{B}(N(T))=\{(2,3,-5)\}$$

b) Notiamo che $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, quindi è sottinteso che la stessa base $\mathcal{B}$ va considerata sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo, e $M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse ancora rispetto a $\mathcal{B}$.

Chiamiamo $v_1,\ v_2$ e v_3 i tre vettori di $\mathcal{B}$. Dalla definizione di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(v_1)&=T(2,1,0)=(4,3,1), \\ T(v_2)&=T(1,1,0)=(1,2,-1), \\ T(v_3)&=T(0,1,1)=(-2,2,-4) \end{aligned}$$

Qui però le immagini $T(v_i)$ sono espresse rispetto alla base canonica. Per esprimere $T(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Se (x_i, y_i, z_i) è la soluzione di tale equazione, allora le coordinate di $T(v_i)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $T(v_i) = (x_i, y_i, z_i)_{\mathcal{B}}$.

Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora il sistema associato alle prime 4 colonne:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$T(v_1) = (4, 3, 1) = 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla quinta:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$T(v_2) = (1, 2, -1) = -2v_1 + 5v_2 - 1v_3 = (-2, 5, -1)_{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema associato alle prime 3 colonne e alla sesta:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 2z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 14 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$T(v_3) = (-2, 2, -4) = -8v_1 + 14v_2 - 4v_3 = (-8, 14, -4)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consisteva nell'utilizzare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di cambiamento di base, di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Sia

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

c) Abbiamo visto al punto a) che il nucleo di T è la retta

$$N(T) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -5t \end{cases}$$

Il piano π perpendicolare a N(T) e passante per P è $\pi : \; 2x + 3y - 5z = 0$. Inoltre $\pi \cap N(T) = A(0, 0, 0)$. Infine

$$d(N(T), P) = d(A, P) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$\square$

Esercizio 8.38. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 3), \; v_2 = (1, 0, -1), \; v_3 = (0, 0, 2)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla matrice*

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Si stabilisca se T è iniettivo e/o suriettivo.*

Soluzione:

a) Per utilizzare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ dobbiamo esprimere gli elementi della base canonica rispetto a $\mathcal{B}$. Si ricava facilmente che

$$\begin{aligned} e_1 &= v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} \\ e_2 &= \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)_{\mathcal{B}} \\ e_3 &= \frac{1}{2}v_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = (5, 0, 10)_{\mathcal{B}} = 5v_1 + 10v_3 = (5, 10, 35)$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4, 3, -8)_{\mathcal{B}} = -4v_1 + 3v_2 - 8v_3 = (-1, -8, -31)$$

$$T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1, 0, 2)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_3 = (1, 2, 7)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & -8 & 2 \\ 35 & -31 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Possiamo usare indifferentemente la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ o la matrice A. Per comodità di calcoli usiamo la matrice iniziale. $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha due righe uno multiplo dell'altra e $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}(T)) = 2$. Quindi $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ e T non è suriettivo, e $\dim(\text{N}(T)) = 1$ e T non è iniettivo.

□

Esercizio 8.39. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini la matrice associata a T rispetto alla base costituita dai vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.*
b) *Si trovi una base del nucleo di T.*

Soluzione:

a) Il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$:

$$T(v_1) = (3, 2, 1), \qquad T(v_2) = (1, 0, 1), \qquad T(v_3) = (1, 1, 0)$$

e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$. Notiamo che essendo $v_1,\ v_2$ e v_3 particolarmente semplici la risoluzione delle equazioni che danno le coordinate è immediata:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \;\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (2, 1, -1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \;\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \;\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}$$

Dunque la matrice B associata a T rispetto a $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo usa il cambiamento di base: la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Per calcolare l'inversa usiamo il metodo della riduzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è quindi

$$P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Infatti se indichiamo con $v_{\mathcal{B}}$ le coordinate di un vettore v rispetto a $\mathcal{B}$ e analogamente indichiamo con $T(v)_{\mathcal{B}}$ le coordinate del vettore $T(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$, allora:

$$B \cdot v_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP \cdot v_{\mathcal{B}} = P^{-1}A \cdot v = P^{-1} \cdot T(v) = T(v)_{\mathcal{B}}$$

b) Per trovare una base del nucleo ci conviene lavorare sulla matrice A in modo da ottenere i vettori direttamente espressi rispetto alla base canonica. Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo di T è data dall'insieme

$$\{\ (0, -1, 1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 8.40. *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1, 0),\ (1, 1)\ \}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2)\ \}$ due basi di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di $\mathcal{B}$, espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Cominciamo a calcolare la immagini:

$$T(1, 0) = (2, 1, 0), \qquad T(1, 1) = (2, 0, 2)$$

I vettori cosí ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u_1' = (1,1,0),\ u_2' = (0,1,1),\ u_3' = (0,0,2)$$

gli elementi della base $\mathcal{B}'$. Esprimere $(2,1,0)$ e $(2,0,2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,1,0)$ e $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,0,2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II-I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,1,0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,0) = (2,1,0) = 2u_1' - u_2' + \frac{1}{2}u_3' = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu_1'+yu_2'+zu_3' = (2,0,2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,1) = (2,0,2) = 2u_1' - 2u_2' + 2u_3' = (2,-2,2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 8.41. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.*

a) *Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.*
b) *Svolgere l'esercizio precedente utilizzando la matrice P.*

Soluzione:

a) La matrice P cercata ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Esprimere gli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le tre equazioni vettoriali $x\cdot(1,1,0)+y\cdot(0,1,1)+z\cdot(0,0,2) = e_i$, $i = 1,2,3$. Riduciamo perciò a gradini la matrice formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ con le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II-I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere e_1 otteniamo il sistema relativo alla prima colonna:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_2 otteniamo il sistema relativo alla seconda colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_3 otteniamo il sistema relativo alla terza colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ potevamo in alternativa calcolare e poi invertire la matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$. Infatti $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$ ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}'$ espressi rispetto a $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice P cercata è l'inversa di tale matrice:

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Nell'esercizio precedente avevamo calcolato

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(1,1) = (2,0,2)$$

e dovevamo esprimerli rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Avendo ora calcolato la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, possiamo utilizzare P per calcolare le coordinate cercate:

$$P \cdot (2,1,0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2,1,0) = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

$$P \cdot (2,0,2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2,0,2) = (2, -2, 2)_{\mathcal{B}'}$$

La matrice cercata è quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.42. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x - z, 2x + y, x - 3y)$$

a) *Si determini la matrice* $M_{\mathcal{B}}(T)$ *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *costituita dai vettori* $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (0,1,1)$.
b) *Si trovi una base dell'immagine di* T.
c) *Il determinante di una matrice associata a* T *può essere nullo?*

SOLUZIONE:

a) Cominciamo con il calcolare le immagini di v_1, v_2, v_3 attraverso T:

$$T(v_1) = (1,2,1)$$
$$T(v_2) = (2,2,1)$$
$$T(v_3) = (-1,1,-3).$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini in funzione della base $\mathcal{B}$, ovvero di risolvere i tre sistemi associati a $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1)$, $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2)$ e $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3)$. Riduciamo quindi a gradini la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando quindi la differenti colonne di termini noti otteniamo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (0,\ 1,\ 2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (1,\ 1,\ 2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x + y = - \\ -y + z = -3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = -5 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (-5\ 4,\ 1)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cominciamo con il calcolare il rango di $M_{\mathcal{B}}(T)$ riducendola a gradini:

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Quindi $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha rango 3 e una base dell'immaginie di T è formata dai tre vettori che la generano (espressi rispetto alla base canonica):

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1,2,1),\ (2,2,1),\ (-1,1,-3)\}$$

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare la matrice associata a T rispetto alla base canonica e ricavare da questa un'altra base di $\mathrm{Im}(T)$.

c) Poichè la matrice associata a T ha rango 3, ogni altra matrice associata a T rispetto a basi differenti avrà il medesimo rango e quindi determinante non nullo.

□

Esercizio 8.43. *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1, x_2 - 3x_3).$$

a) *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ associata a S.*

b) *Si trovi la dimensione del nucleo di S.*

Soluzione:

a) Si tratta di calcolare le immagini di $v_1,\ v_2,\ v_3$ attraverso S. Non è poi necessario effettuare altre trasformazioni in quanto la base dello spazio di arrivo $\mathbf{R}^4$ è la base canonica $\mathcal{E}$.

$$S(v_1) = (2,1,1,-2)$$
$$S(v_2) = (2,1,1,1)$$
$$S(v_3) = (1,0,1,0).$$

Infine

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo M a gradini per calcolarne il rango

$$\begin{array}{c} \\ 2II-I \\ III-II \\ IV+I \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ IV \\ \\ II \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha rango 3 e

$$\dim(N(S)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 0$$

□

Esercizio 8.44. *Sia $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) La matrice cercata ha per colonne $S(e_1),\ S(e_2)$ e $S(e_3)$. Per determinare tali immagini possiamo procedere in due modi.

Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,2)$ e $v_3 = (0,0,3)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In realtà la matrice è già ridotta (triangolare superiore), quindi possiamo risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}}$$

Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned}
S(e_1) &= M_{\mathcal{B}}(S)\cdot e_1 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\
&= (0,0,0)_{\mathcal{B}} = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (0,0,0)\\
S(e_2) &= M_{\mathcal{B}}(S)\cdot e_2 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\\
&= \left(0,-\frac{1}{3},0\right)_{\mathcal{B}} = 0\cdot v_1 - \frac{1}{3}\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = \left(0,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\\
S(e_3) &= M_{\mathcal{B}}(S)\cdot e_3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}\\
&= \left(0,\frac{1}{3},1\right)_{\mathcal{B}} = 0\cdot v_1 + \frac{1}{3}\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = \left(0,\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

Infine

$$A = M(S) = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2}{3}&\frac{11}{3}\end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo consiste nel ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$, sfruttando la linearità di S. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi

$$\begin{aligned}
S(v_1) &= S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (0,0,3)\\
S(v_2) &= S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 = (0,0,6)\\
S(v_3) &= S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 1v_2 + 3v_3 = (0,2,11)
\end{aligned}$$

Abbiamo precedentemente espresso e_1, e_2 e e_3 come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
e_3 &= (0,0,1) = \frac{1}{3}(0,0,3)\\
e_2 &= (0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,2) - \frac{1}{3}(0,0,3)\\
e_1 &= (1,0,0) = (1,1,1) - \frac{1}{2}(0,2,2)
\end{aligned}$$

Per la linearità di S otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
S(e_1) &= S(v_1) - \frac{1}{2}S(v_2) = (0,0,3) - \frac{1}{2}(0,0,6) = (0,0,0)\\
S(e_2) &= \frac{1}{2}S(v_2) - \frac{1}{3}S(v_3) = \frac{1}{2}(0,0,6) - \frac{1}{3}(0,2,11) = \left(0,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\\
S(e_3) &= \frac{1}{3}S(v_3) = \left(0,\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

Infine la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = M(S) = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2}{3}&\frac{11}{3}\end{bmatrix}$$

b) Conviene utilizare la matrice A in modo da ottenere vettori già espressi rispetto alla base canonica.
In questo caso non è necessario procedere con la riduzione a gradini. Infatti è evidente che la sottomatrice formata dalle ultime due colonne ha rango 2, quindi una base dell'immagine di S è quella formata da $S(e_2)$ e $S(e_3)$, oppure da un loro multiplo:

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,2,11),\ (0,2,2)\ \}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo che il nucleo ha dimensione uno e avendo trovato che $S(e_1) = 0$, quindi e_1 appartiene al nucleo, possiamo concludere che una base del nucleo di S

è

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{ \ (1,0,0) \ \}$$

$\square$

Esercizio 8.45. *Sia* $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - 3x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S*.*
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,1,0), \ v_2 = (1,0,1), \ v_3 = (0,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ *associata a* S*.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a S calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{array}{r} S(e_1) = (2,-2,-2) \\ S(e_2) = (-2,2,2) \\ S(e_3) = (1,-3,1) \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{r} \\ II + I \\ III + I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -1/2 II \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data dai vettori corrispondenti alle colonne che contengono i pivot,cioè alla prima e terza colonna:

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1), \ S(e_3)\} \, \{(2,-2,-2), \ ((1,-3,1)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S)) = \{(1,1,0)\}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S)$ associata a S ha per colonne le immagini di $\mathcal{B}$ espresse rispetto a $\mathcal{E}$, cioè in sostanza le immagini di $\mathcal{B}$:

$$S(v_1) = (0,0,0), \qquad S(v_2) = (3,5,-1), \qquad S(v_3) = (-1,-1,3)$$

quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 8.46. *Sia* $V = \mathbf{R}^2$ *e siano* $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{ \ (1,0), \ (0,1) \ \}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1), \ (1,0) \ \}$ *due basi di* V*.*

a) *Determinare la matrice* $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *di transizione da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$*.*
b) *Determinare le coordinate di* $v = (2,1)$ *utilizzando la matrice* P*.*

Soluzione:

a) La matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Anche se in questo caso i conti per fare ciò sono piuttosto semplici, può risultare più conveniente determinare la matrice inversa $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}'$ espressi rispetto a $\mathcal{B}$. Infatti $\mathcal{B}$ è la base canonica, quindi i vettori di $\mathcal{B}'$ sono già espressi rispetto a $\mathcal{B}$, quindi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare P basta ora invertire P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} II \\ I \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Infine

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Per esprimere v rispetto a $\mathcal{B}'$ basta calcolare:

$$P \cdot v^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $v = (1,1)_{\mathcal{B}'}$, ovvero $v = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0)$.

□

Esercizio 8.47. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ rispettivamente la base canonica e un'altra base di V.*

a) *Determinare la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$.*
b) *Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$. Utilizzando la matrice P determinare la matrice $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

a) La matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$ ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Anzicché procedere come nell'esercizio precedente invertendo la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}$ formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ (espressi automaticamente rispetto a $\mathcal{C}$), questa volta calcoliamo direttamente P.

Esprimere gli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le tre equazioni vettoriali $x \cdot (1,1,0) + y \cdot (0,1,1) + z \cdot (0,0,2) = e_i$, $i = 1,2,3$. Riduciamo perciò a gradini la matrice formata dagli elementi di $\mathcal{B}'$ con le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per esprimere e_1 otteniamo il sistema relativo alla prima colonna:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_2 otteniamo il sistema relativo alla seconda colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Per esprimere e_3 otteniamo il sistema relativo alla terza colonna:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) La matrice $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{C}$ espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Calcoliamo quindi

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(0,1) = (0,-1,2),$$

espressi rispetto alla base canonica. Conoscendo la matrice $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$ di transizione da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$, possiamo utilizzare P per calcolare le coordinate cercate dei vettori trovati rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$P\cdot(2,1,0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2,1,0) = \left(2,-1,\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

$$P\cdot(0,-1,2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (0,-1,2) = \left(0,-1,\frac{3}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

La matrice cercata è quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.48. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ così definita: $T(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 3y+z,\ 4z)$.*

a) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare la matrice B associata a T rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (5,3,3)\}.$$

Soluzione:

a)

$$\begin{array}{l} T(e_1) = (1,0,0) \\ T(e_2) = (2,3,0) \\ T(e_3) = (3,1,4) \end{array} \Rightarrow A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Per risolvere la seconda parte possiamo procedere in due modi.

– Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$T(v_1) = (1,0,0), \qquad T(v_2) = (3,3,0), \qquad T(v_3) = (20,12,12)$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base $\mathcal{B}$ risolvendo le tre equazioni:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x+y+5z = 1 \\ y+3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x+y+5z = 3 \\ y+3z = 3 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}}$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x+y+5z = 20 \\ y+3z = 12 \\ 3z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (0,0,4)_{\mathcal{B}}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

– Un altro metodo consiste nel cercare le matrici di cambiamento di base: la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Per calcolare l'inversa usiamo il metodo della riduzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - III \\ \frac{1}{3}III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I - II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - 5III \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è quindi

$$P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.49. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,1,2)\}$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.

Soluzione:

a) Basta verificare che la matrice formata dai tre vettori ha rango 3, ovvero determinante diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 2 \neq 0$$

Quindi v_1, v_2 e v_3 sono lineramente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Come nell'esercizio precedente si può procedere in due modi. Utilizziamo il primo.
Calcoliamo le immagini dei vettori v_i della nuova base:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= A \cdot v_1 = (-2,-2,0) \\ T(v_2) &= A \cdot v_2 = (2,0,-2) \\ T(v_3) &= A \cdot v_3 = (4,4,8) \end{aligned}$$

Si tratta ora di esprimere i vettori trovati rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo però come la cosa è immediata:

$$\begin{aligned} &T(v_1) = T(1,1,0) = (-2,-2,0) = -2v_1 && \Rightarrow T(v_1) = (-2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ &T(v_2) = T(-1,0,1) = (2,0,-2) = -2v_2 && \Rightarrow T(v_2) = (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ &T(v_3) = T(1,1,2) = (4,4,8) = 4v_3 && \Rightarrow T(v_3) = (0,0,4)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che volendo utilizzare il secondo metodo la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice B associata a T rispetto alla nuova base è $P^{-1}AP$:

$$B = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ottenuta è diagonale, la matrice di transizione P tale che $P^{-1}AP = M_{\mathcal{B}}(T)$ è detta diagonalizzante.

□

Esercizio 8.50. *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

una base di $\mathbf{R}^3$ e sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di T.*
c) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k+1,0,k)$ appartiene all'Immagine di T.*

Soluzione:

a) Per determinare $T(e_i)$, dobbiamo ricavare le coordinate di e_i rispetto alla base $\mathcal{B}$. Non è però necessario risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ in quanto seplicemente:

$$e_1 = \frac{1}{2}v_3, \qquad e_2 = -v_2, \qquad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \frac{1}{2}T(v_3) = (3,2,3) \\ T(e_2) &= -T(v_2) = (0,-1,-1) \\ T(e_3) &= T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_3) = (3,1,2) - (3,2,3) = (0,-1,-1) \end{aligned}$$

e

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini

$$\begin{matrix} 1/3I \\ II - 2/3I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(M(T)) = 2 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{(3,2,3),\ (0,-1,-1)\} \end{aligned}$$

Sappiamo già che $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M(T)) = 1$. Per determinarne una base risolviamo il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,-1,1)\}$$

c) Il vettore $v_k = (k+1,0,k)$ appartiene all'Immagine di T se è combinazione lineare dei vettori della base in $\mathrm{Im}(T)$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & | & k+1 \\ 2 & -1 & | & 0 \\ 3 & -1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & | & k+1 \\ 0 & -3 & | & -2k-2 \\ 0 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - 3III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -2k+1 \end{bmatrix}$$

Infine, se $k = \frac{1}{2}$ la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, quindi il sistema ammette soluzione e v_k appartiene a $\mathrm{Im}(T)$, mentre se $k \neq \frac{1}{2}$, allora $\mathrm{rg}(A|b) = 3 > \mathrm{rg}(A) = 2$, quindi il sistema non ammette soluzione e v_k non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

$\square$

Esercizio 8.51. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (0,2,2), \quad v_3 = (1,1,0),$$

si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da*

$$T(v_1) = (2,0,0), \quad T(v_2) = (4,4,4), \quad T(v_3) = (0,6,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini una base del nucleo e dell'immagine di* T*.*

Soluzione:

a) Per determinare la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica. A tale scopo dobbiamo prima esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$. Risolviamo le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$, $i = 1,2,3$, riducendo a gradini contemporaneamente le matrici associate ai tre sistemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 1 \\ -2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

Sfruttando la linearità di T possiamo ora ricavare le immagini degli elementi della base canonica:

$$T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_1) - \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0,2,2)$$
$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) + \frac{1}{2}T(v_3) = (0,4,4)$$
$$T(e_3) = \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{4}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3) = (2,-2,-2)$$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

In alternativa si poteva untilizzare la matrice di cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine

$$M(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini:

$$\begin{array}{c} 1/2II \\ 1/2I \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $M(T)$ ha rango 2 e una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(0,2,2),\ (2,-2,-2)\}$$

Risolvendo il sistema omogeneo associato a T otteniamo

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base del nucleo di T è

$$\mathcal{B}(\text{N}(T)) = \{(-2,1,0)\}$$

□

Esercizio 8.52. *Sia T la funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ che associa ai vettori*

$$(1,1,0), \qquad (1,-1,2), \qquad (0,0,1)$$

rispettivamente i vettori

$$(1,1,0,1), \qquad (1,2,-1,0), \qquad (0,0,1,1)$$

a) *Stabilire se T è iniettiva, suriettiva, biunivoca.*
b) *Qual è l'immagine di $v = (2,0,3)$?*

Soluzione:

a) L'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,-1,2),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

forma una base di $\mathbf{R}^3$. La matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^4$ è

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché A è 3×4, $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) \leq 3$ e T non può essere suriettiva e quindi neanche biunivoca. Calcoliamo comunque esplicitamente il rango di A per stabilire se T è iniettiva. Notiamo che A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cha ha determinante non nullo. Di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$, $\dim(\text{N}(T)) = 3-3 = 0$ e T è iniettiva.

b) Per detereminare l'immagine di v, dobbiamo esprimerlo rispetto alla base $\mathcal{B}$ risolvendo l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$ a cui è associata la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow II-I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/2II \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow v = v_1 + v_2 + v_3$$

Per calcolare $T(v)$ possiamo usare direttamente la definizione

$$T(v) = T(v_1 + v_2 + v_3) = T(v_1) + T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0,1) + (1,2,-1,0) + (0,0,1,1) = (2,3,0,2).$$

□

Esercizio 8.53. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.*

Soluzione:
Dalla definizione otteniamo

$$\begin{aligned} &T(e_1) = (3,-1,1) \\ &T(e_2) = (0,1,-1) \\ &T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2) = (6,-2,2) + (0,1,-1) = (6,-1,1) \end{aligned}$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo T a gradini

$$\begin{array}{c} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza una base dell'immagine di T è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(3,-1,1),\ (0,1,-1)\}$.
Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeno associato a T:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

e una base del nucle di T è $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-2,-1,1)\}$.

b) Dai conti svolti nel punto precedente vediamo che A ha rango 2, quindi non è invertibile. Altrettanto l'endomorfismo T non è invertibile.

□

Esercizio 8.54. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad T(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad T(e_3) = e_1 + e_3.$$

a) *Si mostri che T è invertibile.*
b) *Si scriva la matrice associata a T^{-1} rispetto ad $\mathcal{E}$.*
c) *Sia $W = \{x \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Si trovi una base del sottospazio immagine $T(W)$.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile sse lo è la matrice A. Poiché $\det(A) = 2 \neq 0$ la matrice e T sono invertibili.
b) La matrice associata a T^{-1} è la matrice A^{-1}:

$$A^{-1} = M(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c) Scriviamo esplicitamente gli elementi di W:

$$\begin{cases} x_1 = -2s + t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi $W = \langle w_1 = (-2, 1, 0),\ w_2 = (1, 0, 1)\rangle$ e $T(W) = \langle T(w_1),\ T(w_2)\rangle$:

$$T(w_1) = A \cdot w_1 = (-2, 6, -3)$$
$$T(w_2) = A \cdot w_2 = (2, -2, 2)$$

I due vettori trovati sono linearmente indipendenti in quanto non sono uno multiplo dell'altro, quindi una base di $T(W)$ è

$$\mathcal{B}(T(W)) = \{(-2, 6, -3),\ (2, -2, 2)\}.$$

$\square$

Esercizio 8.55. *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base canonica. Calcoliamo quindi le immagini dei vettori v_i, utilizzando la matrice $M(T)$:

$$M(T) \cdot v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_1) = (1, 0, 4)$$
$$M(T) \cdot v_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_2) = (4, 1, 5)$$
$$M(T) \cdot v_3^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T(v_3) = (4, 0, 3)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

b) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, espresse rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dobbiamo quindi esprimere rispetto alla base $\mathcal{B}$ i vettori $T(v_i)$, trovati al punto precedente. Si tratta di risolvere i tre sistemi $xv_i + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Per comodità riduciamo a gradini i tre sistemi contemporaneamente, affiancando direttamente le tre colonne dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I - III \\ II - I \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_1) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$T(v_1) = -3v_1 + 3v_2 + v_3 = (-3, 3, 1)_{\mathcal{B}}$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -z = -3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$T(v_2) = -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = (-1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -z = -4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$T(v_3) = v_1 - v_2 + 4v_3 = (1, -1, 4)_{\mathcal{B}}$

Infine la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che per calcolare $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ potevamo anche utilizzare le matrici di cambiamento di base. Sia infatti $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$; P ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ espressi rispetto a $\mathcal{E}$:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre la matrice di transizione dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{C}$ è l'inversa di P:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = P^{-1} \cdot M(T) \cdot P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.56. *Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0)\}$ di $\mathbf{R}^4$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare con matrice associata*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Stabilire per quali valori di k la funzione T è un isomorfismo (cioè iniettiva e suriettiva).*
b) *Posto $k = 1$, si trovi una base del sottospazio $T^{-1}(W) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid T(v) \in W\}$, con $W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,1) \rangle$.*

Soluzione:

a) T è un isomorfismo se il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ è 4, infatti in tale caso $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M) = 4$ e T è suriettiva, e $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - 4 = 0$ e T è iniettiva. In questo caso è probabilmente più rapido calcolare il determinante di M, sviluppando rispeto alla terza colonna:

$$\det\left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right) = 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

Quindi T è un isomorfismo se $k \neq 0$ quando il rango di M è 4.

b) La matrice associata a T per $k=1$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Possiamo procedere in due modi:

– MODO 1. Esprimiamo i due vettori $w_1=(1,0,0,1)$ e $w_2=(0,1,0,1)$ come combinazione lineare delle immagini della base $\mathcal{B}$ risolvendo i due sistemi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_1$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)|w_2$. Riduciamo a gradini le due matrici contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\1&1&0&0&|&0&1\\0&1&1&1&|&0&0\\1&0&0&1&|&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\\II-I\\\\IV-I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\0&1&0&0&|&-1&1\\0&1&1&1&|&0&0\\0&0&0&1&|&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow III-II\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&1&0\\0&1&0&0&|&-1&1\\0&0&1&1&|&1&-1\\0&0&0&1&|&0&1\end{bmatrix}$$

Risolviamo il primo sistema $xT(v_1)+yT(v_2)+zT(v_3)+wT(v_4)=w_1$:

$$\begin{cases}x=1\\y=-1\\z+w=1\\w=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\\w=0\end{cases}\Rightarrow T^{-1}(w_1)=(1,-1,1,0)_{\mathcal{B}}=(1,0,0,1)$$

Risolviamo il secondo sistema $xT(v_1)+yT(v_2)+zT(v_3)+wT(v_4)=w_2$:

$$\begin{cases}x=0\\y=1\\z+w=-1\\w=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=-2\\w=1\end{cases}\Rightarrow T^{-1}(w_2)=(0,1,-2,1)_{\mathcal{B}}=(1,1,0,-2)$$

– MODO 2.Essendo T un isomorfismo possiamo calcolare l'inversa di $M(T)$:

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)\right)^{-1}=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&-1&1&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Quindi

$$T^{-1}(w_1)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})\cdot w_1^T=(1,-1,1,0)_{\mathcal{B}}=(1,0,0,1)$$
$$T^{-1}(w_2)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T^{-1})\cdot w_2^T=(0,1,-2,1)_{\mathcal{B}}=(1,1,0,-2)$$

□

Esercizio 8.57. *Dati i vettori* $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,2,0)$ *e* $v_3=(0,1,1)$, *sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $T(v_1)=v_2$, $T(v_2)=v_3$ *e* $T(v_3)=v_1$.

a) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.
b) *Determinare la matrice associata a* T *rispetto alla base canonica.*
c) *Determinare il nucleo di* T *e trovare (se esiste) una controimmagine di* $(5,1,-11)$.

SOLUZIONE:

a) Dalla defінzione di T si ha

$$T(v_1)=v_2=0\cdot v_1+1\cdot v_2+0\cdot v_3=(0,1,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2)=v_3=0\cdot v_1+0\cdot v_2+1\cdot v_3=(0,0,1)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3)=v_1=1\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3=(1,0,0)_{\mathcal{B}}$$

quindi la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

b) Senza la necessità di impostare un sistema è facile scrivere gli elementi della base canonica come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$ e quindi trovarne l'immagine attraverso a T:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 - \frac{1}{2}v_2 &&\Rightarrow && T(e_1) = T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_2) = v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\\
e_2 &= \frac{1}{2}v_2 &&\Rightarrow && T(e_2) = \frac{1}{2}T(v_2) = \frac{1}{2}v_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\\
e_3 &= v_3 - \frac{1}{2}v_2 &&\Rightarrow && T(e_3) = T(v_3) - \frac{1}{2}T(v_2) = v_1 - \frac{1}{2}v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) È immediato verificare che $\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = 1$, quindi $\operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)\right) = \operatorname{rg}(M(T)) = 3$. Di conseguenza $\dim(N(T)) = 0$ e $N(T) = \{\ (0,0,0)\ \}$.

T è suriettiva, quindi esiste una controimmagine per ogni elemento di $\mathbf{R}^3$. Per trovare una controimmagine di $v = (3, 7, -14)$ ci conviene forse usare la matrice $M(T)$ risolvendo il sistema $M(T)|v$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -14 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 2III \\ 2II \\ I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -28 \\ 3 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow II + 3I \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -28 \\ 0 & 4 & -2 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = -28 \\ 2y - z = -35 \\ z = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -16 \\ z = 3 \end{cases}$$

Quindi $T(9, -16, 3) = (3, 7, -14)$ e la controimmagine di v è $(9, -16, 3)$.

□

Esercizio 8.58. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A - A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Per definizione

$$N(S) = \left\{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T\right\} = \{\text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$

Provando a calcolare $S(A)$ per qualche A si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno necessariamente tutti zero sulla diagonale e hanno $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$. Quindi:

$$\operatorname{Im}(S) = \left\{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = -A^T\right\} = \{\text{ matrici antisimmetriche di } M_n(\mathbf{R})\}$$

b) Sia

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata a S rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
S(A_1) &= A_1 - A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_2) &= A_2 - A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2 - A_3 = (0,1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_3) &= A_3 - A_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A_2 + A_3 = (0,-1,1,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_4) &= A_4 - A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3(\lambda - 2)$$

M ha due autovalori $\lambda = -2$, singolo, e $\lambda = 0$ di molteplicità algebrica 3, quindi è diagonalizzabile se l'autospazio $E(0)$ è di dimensione 3.

$$E(0) = N(M) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \\ w = r \end{cases} \quad \Rightarrow \ \dim(E(0)) = 3$$

quindi S è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 8.59. *Sia $S : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ la funzione lineare così definita:*

$$S(A) = A + A^T$$

a) *Si determini il nucleo e l'immagine di S.*
b) *Posto $n = 2$, si determini la matrice associata a S rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Per $n = 2$, la funzione lineare S è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Per definizione

$$N(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = -A^T \right\} = \{ \text{ matrici antisimmetriche di } M_n(\mathbf{R}) \}$$

Notiamo che una matrice $B = [b_{i,j}]$ è antisimmetrica se ha tutti zero sulla diagonale e $b_{i,j} = -b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$.

Provando a calcolare $S(A)$ per qualche A si vede che le matrici $S(A) = B = [b_{i,j}]$ ottenute hanno o $b_{i,j} = b_{j,i}$ per ogni $i \neq j$, mentre non si ha nessuna condizione su $b_{i,i}$. Quindi:

$$\mathrm{Im}(S) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A = A^T \right\} = \{ \text{ matrici simmetriche di } M_n(\mathbf{R}) \}$$

b) Sia

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata a S rispetto a $\mathcal{B}$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$, espresse rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
S(A_1) &= A_1 + A_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_2) &= A_2 + A_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_3) &= A_3 + A_3^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2A_3 = (0,0,2,0)_{\mathcal{B}} \\
S(A_4) &= A_4 + A_4^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A_4 = (0,0,0,2)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^3$$

M ha due autovalori $\lambda = 0$, singolo, e $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica 3, quindi è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ è di dimensione 3.

$$E(2) = N(M - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \\ w = r \end{cases} \Rightarrow \dim(E(2)) = 3$$

quindi S è diagonalizzabile.

□

Esercizio 8.60. *Si* $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ *l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + a - c$$

a) *Si trovi la matrice rappresentativa di tale applicazione rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \left\{x^2 + 2,\ x - 1,\ x + 1\right\}$$

b) *Si trovi la dimensione e una base di* $\mathrm{N}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio ax^2+bx+c di $\mathbf{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a,b,c) rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$, ovvero a ogni polinomio di $\mathbf{R}_2[x]$ associamo un vettore di $\mathbf{R}^3$. Di conseguenza ai polinomi di $\mathcal{B}$ possiamo associamo i tre vettori

$$p_1 = (1,0,2), \quad p_2 = (0,1,-1), \quad p_3 = (0,1,1)$$

che formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Analogamente possiamo considerare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f(a,b,c) = (a-b,\ b-c,\ a-c)$$

a) Calcoliamo l'immagine di $p_1,\ p_2,\ p_3$ che poi dovremo esprimere come combinazione lineare di $p_1,\ p_2,\ p_3$.

$$\begin{aligned}
f(p_1) &= f(1,0,2) = (1,-2,-1) \\
f(p_2) &= f(0,1,-1) = (-1,2,1) \\
f(p_3) &= f(0,1,1) = (-1,0,-1)
\end{aligned}$$

Si tratta ora di risolvere le tre equazioni $xp_1 + yp_2 + zp_3 = f(p_i)$ per $i = 1, 2, 3$, per esprimere $f(p_i)$ come combinazione lineare di $p_1,\ p_2,\ p_3$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a ognuna di tale equazioni, scrivendo le tre colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i tre sistemi, considerando separatamente le tre colonne dei termini noti.

$$f(p_1): \quad \begin{cases} x = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$f(p_2): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 2 \\ 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_2) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

$$f(p_3): \quad \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice cercata è la matrice che ha $f(p_i)_{\mathcal{B}}$ come colonne:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che avevamo ottenuto $f(p_2) = -f(p_1)$, quindi alcuni calcoli potevano essere evitati.

b) Per rispondere alla seconda domanda possiamo procedere in due modi
   - Lavorare sulla matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ trovata, ricordando poi di trasformare rispetto alla base canonica i vettori trovati.
   - Determinare la matrice $M(f)$ associata a f rispetto alla base canonica

In ogni caso possiamo osservare che $f(p_2) = -f(p_1)$ (la matrice ha due colonne linearmente dipendenti), quindi sicuramente $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$ e $\dim(\mathrm{N}(f)) \geq 1$.

Consideriamo entrambi i modi.

- Riduciamo a gradini la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{array}{c} \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III+5I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'immagine di f è generata da $f(p_i),\ i = 1, 2, 3$, ovvero dalle colonne di $M_{\mathcal{B}}(f)$, mentre il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 2, \qquad \dim(\mathrm{N}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 1$$

Per scrivere esplicitamente immagine e nucleo dobbiamo tornare a esprimerei vettori rispetto alla base canonica. L'immagine di f è generata dai vettori linearmente indipendenti corrispondenti alla prima e terza colonna di $M_{\mathcal{B}}(f)$. Quindi

$$f(p_1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (1, -2, -1) = x^2 - 2x - 1$$
$$f(p_3) = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} = (-1, 0, -1) = -x^2 - 1$$

e una base di $\mathrm{Im}(f)$ è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \left\{x^2 - 2x - 1, x^2 - 1\right\}$$

Analogamente per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a $M_{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1,0)_{\mathcal{B}} \cdot t$$

Poiché

$$(1,1,0)_{\mathcal{B}} = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = (1,1,1) = x^2 + x + 1$$

una base del nucleo di f è

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(f)) = \left\{x^2 + x + 1\right\}$$

– In alternativa potevamo determinare la matrice $M(f)$ associata a f rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned} f(x^2) &= f(1,0,0) = (1,0,1) \\ f(x) &= f(0,1,0) = (-1,1,0) \\ f(1) &= f(0,0,1) = (0,-1,-1) \end{aligned}$$

quindi

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi una base dell'immagine è data dai vettori corrispondenti alla prima e seconda colonna:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(f)) = \{(1,0,1),\ (-1,1,0)\} = \left\{x^2 + 1,\ -x^2 + x\right\}$$

Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a $M(f)$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(f)) = \{(1,1,1)\} = \left\{x^2 + x + 1\right\}$$

$\square$

CAPITOLO 9

Diagonalizzazione di matrici e applicazioni lineari

Esercizio 9.1. *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Esercizio 9.2. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).*

Esercizio 9.3. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

Esercizio 9.4. [Esercizio 4) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Quali sono gli autovalori di una matrice diagonale? E di una matrice triangolare?*

Esercizio 9.5. [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.6. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Esercizio 9.7. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*

c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Esercizio 9.8. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di A.*
b) *Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.9. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

Esercizio 9.10. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e gli autovalori di A.*
b) *Si determini l'autospazio $E(\lambda)$ relativo ad ogni autovalore λ trovato.*
c) *Si verifichi che A è diagonalizzabile.*
d) *Si trovi la matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale (una tale matrice P è detta diagonalizzante ed ha per colonne gli autovalori di P).*
e) *Si trovi la matrice diagonale B simile alla matrice A.*

Esercizio 9.11. *Si ripeta l'esercizio precedente con le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.12. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di T.*
b) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice P diagonalizzante.*
c) *Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.*

Esercizio 9.13. [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]
Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.14. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di S.*
b) *Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

Esercizio 9.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di T.*
b) *T diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*

Esercizio 9.16. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ 1, 1, 0),\ (0, 3, 0),\ (0, 1, 1)\ \}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T.*
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di T.*
c) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.17. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di S.*
b) *Trovare gli autovettori di S e stabilire se S è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.18. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 9.19. *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori della matrice data.*
b) *Stabilire se la matrice data diagonalizzabile.*

Esercizio 9.20. *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Fissato a piacere un valore di k per cui M è diagonalizzabile, determinare per tale k la matrice P diagonalizzante.*

Esercizio 9.21. *Sia A la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di A al variare di k.*
b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di A per un valore opportuno di k.*

Esercizio 9.22. *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.*

Esercizio 9.23. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.*
b) *Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.*

Esercizio 9.24. *Siano A e B le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per cui A e B sono simili.

Esercizio 9.25. *Considerare le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori e gli autovettori di A e di B.*
b) *Stabilire se A e B sono simili.*
c) *Esistono valori di t per cui C e B sono simili?*

Esercizio 9.26. *Siano A e B le matrici seguenti*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Dire per quali valori del parametro reale k la matrice B è diagonalizzabile.*
b) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

Esercizio 9.27. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.*
b) *La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*
c) *Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Esercizio 9.28. *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori della matrice A.*

b) *Stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice data è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.29. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & b & b-3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di S.*
b) *Trovare i valori di b per i quali S è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.30. *Sia A la matrice reale dipendente dal parametro k*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare per quali k la matrice A è diagonalizzabile.*
b) *Per i valori determinati in* a), *trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A*

Esercizio 9.31. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare gli autovalori di A.*
b) *Stabilire per quali valori reali di k la matrice A diagonalizzabile.*

Esercizio 9.32. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di k per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

può essere associata al medesimo endomorfismo T.

Esercizio 9.33. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T.*

---

1. Suggerimenti

Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una applicazione lineare (endomorfismo) e M la matrice associata rispetto a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^n$. Parleremo quindi indifferentemente di T e M.

Il **Polinomio caratteristico** di M é il polinomio

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

Notiamo che $p_M(\lambda)$ è un polinomio di grado n nell'incognita λ.

Un **Autovalore** di M è un numero λ per cui esiste un vettore $v \in \mathbf{R}^n$ **non nullo** tale che

$$Mv = \lambda v$$

OSSERVAZIONI:

- Se λ é un autovalore di M allora per qualche $v \neq 0$:
$$Mv = \lambda v \ \Rightarrow\ (M - \lambda I)\, v = 0 \ \Rightarrow\ \det(M - \lambda I) = 0$$
quindi gli autovalori di M sono gli **zeri del polinomio caratteristico**, ovvero si determinano risolvendo
$$\det(M - \lambda I) = 0$$
- La molteplicità di λ come zero del polinomio caratteristico è detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ.

Un **Autovettore** relativo a un autovalore λ è un vettore v (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che

$$Mv = \lambda v \ \Rightarrow\ (M - \lambda I)\, v = 0$$

Quindi v è **soluzione del sistema omogeneo associato a** $M - \lambda I$.

OSSERVAZIONI:

- L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ formano uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^n$), detto **Autospazio** relativo all'autovalore λ:
$$E(\lambda) = \{ \text{ autovettori relativi a } \lambda \ \}$$
- Chiamiamo **Molteplicità geometrica** di λ la dimensione di $E(\lambda)$.
- Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ formano il nucleo di M, ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato a M.
- Per quanto riguarda la dimensione di $E(\lambda)$ abbiamo che
$$1 \leq \dim(E(\lambda)) \leq \text{molteplicità algebrica di } \lambda$$
In particolare se un autovalore é singolo, allora il relativo autospazio ha sicuramente dimensione 1.
- Autovettori di autospazi distiniti sono linearmente indipendenti.
- Poichè gli endomorfismi sono applicazioni di uno spazio in se stesso, la base dello spazio di arrivo e di partenza è sempre la stessa (a differenza di quanto poteva accadere negli esercizi del capitolo precedente).

Diagonalizzabilità.

Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se è **simile a una matrice diagonale** D, ovvero esiste una matrice P, detta **matrice diagonalizzante**, tale che $P^{-1}MP = D$ è una matrice diagonale.

OSSERVAZIONI:

- Poiché $P^{-1}MP = D$, le matrici M e D sono simili.
- La matrice diagonalizzante P ha per colonne autovettori linearmente indipendenti di M.
- $P^{-1}MP = D$ ha sulla diagonale gli autovalori di M.
- Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è n, ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è n, ovvero se ha n autovettori linearmente indipendenti.
- Condizione necessaria perchè una matrice sia diagonalizzabile è che **la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano**.

- Se M ha n autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente n autospazi di dimensione 1).
- Se una matrice M è diagonalizzabile allora esiste una **base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di** M. La diagonalizzazione sottintende infatti un cambiamento di base in $\mathbf{R}^n$.
- Due matrici diagonalizzabili sono associate allo stesso endomorfismo (rispetto a basi differenti) se sono simili alla stessa matrice diagonale (ovvero hanno gli stessi autovalori). Analogamente se solamente una delle due matrici è diagonalizzabile allora non possono essere associate allo stesso endomorfismo.
- Le matrici e gli endomorfismi simmetrici godono di particolari proprietà.

---

2. Soluzioni

Esercizio 9.1. *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Soluzione:
Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2 \cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2.

$\square$

Esercizio 9.2. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x,\ y+3z,\ x+y-z)$$

a) *Verificare che i vettori $v_1 = (0,3,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ sono autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.*
c) *Determinare la matrice (diagonale) D associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*
d) *Determinare la matrice diagonalizzante P (cioé la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

a) Calcoliamo le immagini dei vettori v_i:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0,3,1) = (0,6,2) = 2v_1, \\ T(v_2) &= T(0,-1,1) = (0,2,-2) = -2v_2, \\ T(v_3) &= T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v_3 \end{aligned}$$

quindi v_1 è autovettore rispetto all'autovalore 2, v_2 è autovettore rispetto all'autovalore -2, v_3 è autovettore rispetto all'autovalore 1.

b) Verifichiamo che la matrice associata ai tre vettori $v_1,\ v_2$ e v_3 ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot (3+1) \neq 0$$

I tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$.

c) Abbiamo già visto che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono autovettori, quindi:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2v_1 = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_1) &= (2,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= -2v_2 = 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_2) &= (0,-2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \quad \Rightarrow \quad & T(v_3) &= (0,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

e la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

d) Utilizzando il metodo della matrice di transizione per determinare la matrice D, sappiamo che la matrice $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$).

La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di transizione dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$ è quindi la matrice inversa: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$. Di conseguenza la matrice D associata a T rispetto alla nuova base è $D = P^{-1}AP$. La matrice

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quindi la matrice diagonalizzante cercata.

□

Esercizio 9.3. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione $v \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo trovato ha soluzione non nulla. Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 3, 2$$

Consideriamo i tre casi

– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 1:

$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 1:

$$E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 3:

$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 3:

$$E(3) = \langle (1, 2, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(0, 0, t),\ t \in \mathbf{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 2:

$$T(0, 0, t) = A \cdot (0, 0, t) = (0, 0, 2t) = 2 \cdot (0, 0, t).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 2:

$$E(2) = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

b) T è diagonalizzabile se rispetto a una opportuna base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 2, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile. In realtà autovettori relativi ad autovalori differenti sono sempre linearmente indipendenti.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_1 \ \Rightarrow\ T(v_1) = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \ \Rightarrow\ T(v_2) = (0, 3, 0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \ \Rightarrow\ T(v_3) = (0, 0, 2)_{\mathcal{B}} \end{array} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

□

Esercizio 9.4. [Esercizio 4) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Quali sono gli autovalori di una matrice diagonale? E di una matrice triangolare?*

Soluzione:
Un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di una matrice M se esiste $v \neq 0$ tale che $Mv = \lambda v$, ovvero $(M-\lambda I)v = 0$. Il metodo più semplice per verificare tale condizione è determinare per quali valori di λ si ha

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Se M è una matrice triangolare o diagonale resta tale anche la matrice $M - \lambda I$. Inoltre se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & & \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & \dots & & \\ 0 & a_{22-\lambda} & a_{23} & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} - \lambda & \dots & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(M - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

Di conseguenza λ è un autovalore di M se è verificata una delle condizioni

$$\lambda = a_{11}, \qquad \lambda = a_{22}, \ \dots \ , \ \lambda = a_{nn},$$

ovvero gli autovalori di una matrice M triangolare o diagonale sono gli elementi della diagonale di M:

$$\lambda = a_{11}, \ a_{22}, \dots, \ a_{nn},$$

□

Esercizio 9.5. [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]
Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \ \Rightarrow \ A \cdot v = \lambda v \ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = \lambda x \\ 3y + z = \lambda y \\ 4z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 3z = 0 \\ (3-\lambda)y + z = 0 \\ (4-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che la matrice ottenuta è quella associata al sistema omogeneo $(M - \lambda I)v = 0$. Quindi $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$ se e solo se v è soluzione non nulla del sistema omogeneo associato $M - \lambda I$ Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \ \Rightarrow \ \text{autovalori di } M\text{: } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A questo punto possiamo già affermare che la matrice M è diagonalizzabile, in quanto ha 3 autovalori distinti, e di conseguenza 3 autovettori linearmente indipendenti. Per determinare la matrice P diagonalizzante dobbiamo trovare gli autospazi $E(\lambda_i)$ relativi ad ogni autovalore λ_i.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (1, 0, 0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0)$ e $E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ (x, y, z) = (1, 1, 0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 1, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0)$ e $E(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 4$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 4I$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, 1, 1\right) t,$$

Quindi $T(5, 3, 3) = \lambda \cdot (5, 3, 3) = 4 \cdot (5, 3, 3)$ e $E(4) = \langle (5, 3, 3) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (5, 3, 3)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = T(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) = v_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2) = T(1, 1, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0) = 3v_2 = (0, 3, 0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = T(5, 3, 3) = 4 \cdot (5, 3, 3) = 4v_3 = (0, 0, 4)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dai tre autovalori.

Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z, w)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Come nel caso precedente otteniamo che le soluzioni dell'equazione $T(v) = \lambda v$ sono le stesse soluzioni del sistema omogeneo associato a $M - \lambda I$; quindi $T(v) = \lambda v$ per qualche $v \neq 0$ se la matrice $M - \lambda I$ ha rango minore di 4 ovvero determinante nullo:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; \text{autovalori di } M\text{:} \begin{cases} \lambda_1 = 2 & \text{(doppio)} \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

A questo punto non possiamo concludere nulla circa la diagonalizzabilità di M in quanto abbiamo trovato un autovalore doppio. In particolare se $E(2)$ ha dimensione 2 allora M è diagonalizzabile. Viceversa se $E(2)$ ha dimensione 1 allora M non è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 2I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)t + (0, 0, 0, 1)s \quad \forall t, s \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 0, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0, 0)$, $\quad T(0, 0, 0, 1) = \lambda \cdot (0, 0, 0, 1) = 2 \cdot (0, 0, 0, 1)$ e $E(2) = \langle (1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Abbiamo così trovato che l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 2, uguale alla sua molteplicità algebrica. Di conseguenza M è diagonalizzabile in quanto ha sicuramente 4 autovettori linearmente indipendenti.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ 2x = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0)t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 1, 0, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0, 0)$ e $E(3) = \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 5$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 5I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 2, 1, 0)\, t, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $T(1, 2, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 2, 1, 0) = 5 \cdot (1, 2, 1, 0)$ e $E(5) = \langle (1, 2, 1, 0) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (1, 2, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$

(espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = 2v_1 = (2, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_2) = 2v_2 = (0, 2, 0, 0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = 3v_3 = (0, 0, 3, 0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_4) = 5v_4 = (0, 0, 0, 5)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori.

□

Esercizio 9.6. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$=(-1-\lambda)(-1-\lambda) = (-1-\lambda)^2$$

b) Gli autovalori di A sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico, quindi A ha un solo autovalore (doppio):

$$\lambda = -1$$

Inoltre il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, 0) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-1) = \langle (1, 0) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con un solo autovalore linearmente indipendente.

Consideriamo la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$=(-1-\lambda)(1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5$$

b) Poichè il polinomio caratteristico di B non ha zeri reali B non ha autovalori.
c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 priva di autovalori.

Consideriamo la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$=(-3-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

b) Gli autovalori di C sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \ \to \ \lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 1$$

Quindi C ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

Consideriamo prima $\lambda_1 = -4$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-4t, t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-4) = \langle(-4, 1)\rangle$$

Consideriamo ora $\lambda_2 = 1$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 4II + I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(1) = \langle(1, 1)\rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con due autovalori distinti (di molteplicità algebrica 1), quindi C ha due autovettori linearmente indipendenti.

□

Esercizio 9.7. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \ \Rightarrow \ (2-\lambda) = 0 \text{ oppure } (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$
$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 3$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - 1[-7(-\lambda-2)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1) - 1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2 - 4\lambda - 4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda-4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 4 \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio} \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ 1/6III \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 6 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 7 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 7I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda + 2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0),\ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -12 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

□

Esercizio 9.8. *Sia T l'endomorfismo definito dalla matrice associata rispetto alla base canonica:*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
b) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
c) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
d) *Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A, e in caso positivo determinarla.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\text{rg}(A) = 2$, di conseguenza:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 2, \qquad \dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(A) = 1$$

Inoltre una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1),\ T(e_2)\} = \{(0, 1, 1),\ (6, 0, 0)\}$$

Per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-1, 0, 1)\}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di T:

$$p_A(\lambda) = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)] - 6[1 - \lambda - 1] = \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 6)$$

Quindi gli autovalori di T sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{singolo} \\ &\lambda_3 = 3 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

c) Possiamo già rispondere alla seconda domanda in quanto gli autovalori sono tutti singoli, quindi la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(-2) = \langle (-3, 1, 1) \rangle$$

Infine calcoliamo l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow E(3) = \langle (2, 1, 1) \rangle$$

d) Poichè T è diagonalizzabile esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \{(1, 0, -1),\ (-3, 1, 1),\ (2, 1, 1)\ \}$$

□

Esercizio 9.9. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*

b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

SOLUZIONE:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(-2-\lambda)(5-\lambda)+12] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{doppio} \\ \lambda_2 &= 1 \quad \text{singolo} \end{aligned}$$

T è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/2II \\ 2III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2y + 3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(s, -\frac{3}{2}t, t\right) \quad \forall s,t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(2) = \langle (1,0,0),\ (0,-3,2) \rangle$$

Poiché $E(1)$ ha sicuramente dimensione 1, la somma delle dimensioni degli autospazi è $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ e T è diagonalizzabile.

b) Per determinare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori dobbiamo determinare anche l'autospazio $E(1)$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/3II \\ 3III + 2II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-2t,t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow E(1) = \langle (0,-2,1) \rangle$$

Infine la base di $\mathbf{R}^3$ cercata è

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,-3,2),\ (0,-2,1)\}$$

□

Esercizio 9.10. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e gli autovalori di A.*
b) *Si determini l'autospazio $E(\lambda)$ relativo ad ogni autovalore λ trovato.*
c) *Si verifichi che A è diagonalizzabile.*
d) *Si trovi la matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale (una tale matrice P è detta diagonalizzante ed ha per colonne gli autovalori di P).*
e) *Si trovi la matrice diagonale B simile alla matrice A.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora i valori di λ per cui $p_A(\lambda) = 0$, trovando che gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 1 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(1) = \langle (-2, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 2II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(4) = \langle (1, 1) \rangle$$

c) La somma delle dimensioni degli autospazi è 2, quindi A è diagonalizzabile. In realtà essendo i due autovalori singoli eravamo già certi della diagonalizzabilità anche senza calcolare gli autospazi.

d) La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(-2, 1),\ (1, 1)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base di partenza $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) La matrice B si trova immediatamente utilizzando la matrice P determinata al punto precedente. Infatti $B = P^{-1}AP$. Ora

$$P^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice B è, come ci aspettavamo, la matrice diagonale con gli autovettori sulla diagonale.

□

Esercizio 9.11. *Si ripeta l'esercizio precedente con le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 12 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora i valori di λ per cui $p_A(\lambda) = 0$, trovando che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 6$$

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 3II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad \Rightarrow (x, y) = (t, -t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(2) = \langle (1, -1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 6$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 6 \cdot I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow (x, y) = (3t, t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza

$$E(6) = \langle (3, 1) \rangle$$

c) Come nell'esercizio precedente A è diagonalizzabile perché la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 (o perché i due autovalori sono singoli).

d) La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(1, -1),\ (3, 1)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Già sappiamo che la matrice B è la matrice diagonale formata dagli autovalori di A. Lo stesso risulato lo troviamo utilizzando la matrice P determinata al punto precedente. Infatti $B = P^{-1}AP$. Ora

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det &\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}&(\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda+8)=0\\ &\Rightarrow\ (\lambda+2)=0 \text{ oppure } (-\lambda^2+2\lambda+8)=0\\ &\Rightarrow\ \lambda_1=-2,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=4\end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned}&\lambda_1=-2 \quad \text{doppio}\\ &\lambda_2=4\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso non possiamo affermare che A è diagonalizzabile in quanto dipende dalla diemsione dell'autospazio $E(-2)$.

b) Consideriamo prima l'autovalore $\lambda=-2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A-\lambda I$, con $\lambda=-2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-3&3&0\\3&-3&3&0\\6&-6&6&0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c}1/3I\\ II-I\\ III-2I\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x-y+z=0\\0=0\\0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t-s\\y=t\\z=s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z)=(t-s,t,s)=(t,t,0)+(-s,0,s) \quad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2)=\langle(1,1,0),\ (-1,0,1)\rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che A è diagonalizzabile in quanto $\lambda=4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda=-2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda=4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A-\lambda I$, con $\lambda=4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-3&-3&3&0\\3&-9&3&0\\6&-6&0&0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c}1/3I\\ II+I\\ III+2II\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&0\\0&-12&6&0\\0&0&6&0\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-x-y+z=0\\-2y+z=0\\0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\y=t\\z=2t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (x,y,z)=(t,t,2t) \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4)=\langle(1,1,2)\rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni degli autospazi è 3.

d) La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B}=\{(1,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,2)\}$$

Tale matrice ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

e) Già sappiamo che la matrice B è la matrice diagonale formata dagli autovalori di A. Lo stesso risulato lo troviamo utilizzando la matrice P determinata al punto precedente.

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.12. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Si determinino gli autovalori, autovettori e autospazi di T.*
b) *Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso positivo si determini la matrice P diagonalizzante.*
c) *Si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale e si determini esplicitamente tale matrice diagonale.*

Soluzione:
Determiniamo innanzitutto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica, ovvero la matrice che ha per colonne $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Per calcolare gli autovalori di T (cioè di A) determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] \\ =& (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

Risolvendo $p_A(\lambda) = 0$ troviamo che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 1$$

b) Avendo 3 autovalori distinti la matrice A, e quindi T, è sicuramente diagonalizzabile. Per calcolare la matrice diagonalizzante dobbiamo determinare gli autospazi.

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ (x, y, z) = (0, 3, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(2) = \langle (0, 3, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 1/3I \\ \\ III - 1/3I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow\ (x, y, z) = (0, -1, 1) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad E(-2) = \langle (0, -1, 1) \rangle$$

Consideriamo infine l'autovalore $\lambda = 1$, e risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow\ (x, y, z) = (-1, 1, 0) \cdot t \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle (-1, 1, 0) \rangle$.

La matrice P cercata è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{B}$ indica la nuova base formata dagli autovettori

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 1),\ (0, -1, 1),\ (-1, 1, 0)\}$$

Di conseguenza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La base cercata è la base $\mathcal{B}$ di autovettori trovata al punto precedente. Inoltre la matrice D diagonale associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice $D = P^{-1}AP$ che ha sulla diagonale gli autovalori.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.13. [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice A e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora A ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 2$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e A non è diagonalizzabile.

- Se $k = 2$ la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{doppio}$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e A è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice B e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$

Gli autovalori di B sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè B ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e B non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice C e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_C(\lambda) = (3-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$$

Gli autovalori di C sono

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 3$, allora C ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice C diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 3$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:

  $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,-2,0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.
- Se $k = 3$ la matrice C diventa

  $$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ed ha come autovalori

  $$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3 \quad \text{doppio}$$

  Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

  Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice D e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$

Gli autovalori di D sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè D ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi D è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi D non è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 9.14. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di S.*
b) *Stabilire se S è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 0 \\ &\lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 1$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III + 2I \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z + 2w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -t \\ z = -t \\ w = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0,0),\ (0,-1,-1,1)\ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che A è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 0$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle\ (-2,0,1,0)\ \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z + 4w = 0 \\ y = 0 \\ y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$$

$\Rightarrow \ E(2) = \langle \ (2, 0, -1, 1) \ \rangle$

b) Abbiamo già osservato che T è diagonalizzabile in quanto la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, inoltre la matrice diagonalizzante P è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 9.15. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di T.*
b) *T diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*

Soluzione:
Calcoliamo la matrice A associata a T, che ha per colonne $T(e_1), T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Quindi A ha un solo autovalore reale $\lambda = 1$.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right) \rangle = \langle (3, 2, 2) \rangle$.

b) T non è daigonalizzabile in quanto ha un solo autovalore (singolo), quindi la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $1 < 3$.

c) Se consideriamo il campo dei numeri complessi, T ha tre autovalori distinti:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,i.$$

Essendo 3 autovalori singoli la somma degli autospazi è sicuramente 3 e l'endomorfismo T in questo caso risulta diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 9.16. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = \{\ 1,1,0),\ (0,3,0),\ (0,1,1)\ \}$$

a) *Si determinino gli autovalori di* T.
b) *Si determinino gli autovettori e gli autospazi di* T.
c) *Si stabilisca se* T *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)-3\right] = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$$

e gli autovalori di T sono

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2$$

b) Calcoliamo ora gli autovettori.
   – Consideriamo $\lambda = 1$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (-1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(-1,1,0)_{\mathcal{B}} = -1\cdot(1,1,0) + 1\cdot(0,3,0) + 0\cdot(0,1,1) = (-1,2,0)$$

e

$$E(1) = \langle\ (-1,2,0)\ \rangle$$

   – Consideriamo $\lambda = 2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y+3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,3,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,3,1)_{\mathcal{B}} = 0\cdot(1,1,0) + 3\cdot(0,3,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,10,1)$$

e

$$E(2) = \langle\ (0,10,1)\ \rangle$$

   – Consideriamo $\lambda = -2$ e risolviamo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ 1/3II \\ III-1/3I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -2$ sono del tipo

$$(x,y,z) = (0,-1,1)t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che queste sono le componenti degli autovettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica otteniamo perciò:

$$(0,-1,1)_{\mathcal{B}} = 0 \cdot (1,1,0) + -1 \cdot (0,3,0) + 1 \cdot (0,1,1) = (0,-2,1)$$

e

$$E(-2) = \langle\ (0,-2,1)\ \rangle$$

c) La matrice A, e quindi l'applicazione T, è diagonalizzabile perchè ha tre autovalori distinti.

$\square$

Esercizio 9.17. *Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*

$$A = M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Trovare gli autovalori (reali) di S.*
b) *Trovare gli autovettori di S e stabilire se S è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Gli autovalori di T non dipendono dalla base, quindi possiamo lavorare sulla matrice A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49)$$

Quindi S ha due autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$.

b) Trovare gli autovettori di S possiamo comunque lavorare sulla matrice A ricordando però che i vettori trovati saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$E(1) = N(A - I): \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 5 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - 1/2I \\ 1/3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 9 & -9 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ 1/6III + 1/9II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E(1)$ è generato dal vettore $(0,1,1)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_2 + v_3 = (2,2,1)$. Infine $E(1) = \langle (2,2,1) \rangle$.

Analogamente:

$$E(7) = N(A - 7I): \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -5 & | & 0 \\ 3 & -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + 1/2I \\ 1/3III + 1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E(7)$ è generato dal vettore $(1,1,0)_{\mathcal{B}}$, cioè dal vettore $v_1 + v_2 = (2,1,0)$. Infine $E(7) = \langle (2,1,0) \rangle$.

S non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 7$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

$\square$

Esercizio 9.18. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se T è diagonalizzabile.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, sviluppando rispetto alla seconda colonna:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di B sono

- $\lambda = 1$ doppio,
- $\lambda = 2$ doppio.

Per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di entrambi gli autospazi $E(1)$ e $E(2)$.

Determiniamo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+I \\ IV-I \\ III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t - s \\ z = t \\ w = s \end{cases} \quad \Rightarrow E(1) = \langle\ (2,1,1,0),\ (0,-1,0,1)\ \rangle$$

Determiniamo ora $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ IV+II \\ \\ I-2III \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + z + w = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,0,0,1),\ (0,1,0,0)\ \rangle$$

Quindi entrambi gli autospazi hanno dimensione due e l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

□

Esercizio 9.19. *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori della matrice data.*
b) *Stabilire se la matrice data diagonalizzabile.*

SOLUZIONE:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 2 \quad \text{doppio}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 3y + 5z + 7w = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{7}{3}t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(-1) = \langle (0,-7,0,3) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ 5z + 7w = 0 \\ -3z = 0 \\ 8z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(2) = \langle (1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0) \rangle$

b) A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

$\square$

Esercizio 9.20. *Data la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.*
b) *Fissato a piacere un valore di k per cui M è diagonalizzabile, determinare per tale k la matrice P diagonalizzante.*

Soluzione:

Sviluppando rispetto alla seconda colonna, il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k-\lambda)$$

quindi gli autovalori di M sono $\lambda = 1,\ 2,\ k$.

Calcoliamo ora gli autospazi $E(1)$ e $E(2)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(M - I): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\dim(E(1)) = \dim(\mathrm{N}(M - I)) = 4 - \mathrm{rg}(M - I) = 4 - 2 = 2$$

$$E(2) = \mathrm{N}(M - 2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k-2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ III - II \\ I \\ IV + I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & k-1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\dim(E(2)) = \dim(\mathrm{N}(M - 2I)) = 4 - \mathrm{rg}(M - 2I) = 4 - 3 = 1$$

a) Dobbiamo distinguere tre casi
- Se $k \neq 1,\ 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono
$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \\ &\lambda = k \text{ singolo}, && \Rightarrow \dim(E(k)) = 1 \end{aligned}$$
quindi M è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono
$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ triplo}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ singolo}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$
quindi M non è diagonalizzabile.
- Se $k = 2$, allora gli autovalori e le dimensioni degli autospazi sono
$$\begin{aligned} &\lambda = 1 \text{ doppio}, && \dim(E(1)) = 2 \\ &\lambda = 2 \text{ doppio}, && \dim(E(2)) = 1 \end{aligned}$$
quindi M non è diagonalizzabile.

b) Fissiamo per esempio $k = 0$. Dai calcoli svolti precedentemente, sostituendo $k = 0$, ottenaimo

$$E(1) = \langle\ (-1, 0, 3, 1),\ (0, 1, 0, 0)\ \rangle, \qquad E(2) = \langle\ (2, 1, 1, 0)\ \rangle$$

Calcoliamo inoltre $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(M): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(0) = \langle\ (0, 1, 1, 0)\ \rangle$$

Infine la matrice diagonalizzante è

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.21. *Sia A la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di A al variare di k.*
b) *Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di A per un valore opportuno di k.*

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, sviluppando rispetto a opportune righe

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-k-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ k & 0 & k+2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2[(2-k-\lambda)(k+2-\lambda) + k^2] = (1-\lambda)^2[(2-\lambda)^2 - k^2 + k^2] \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2,\ 1$, entrambi di molteplicità algebrica due.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ (k-3)x - ky - kw = 0 \\ -z = 0 \\ (2-k)x + ky + kw = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -ky - kw = 0 \\ z = 0 \\ ky + kw = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 0 \\ w = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ \dim(E(2)) = 1 \Rightarrow \ A \text{ non è diagonalizzabile}$$

- Se $k=0$ otteniamo

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=0 \\ w=t \end{cases} \Rightarrow \dim(E(2))=2 \text{ e } E(2)=\langle (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)\rangle.$$

A questo punto A può essere diagonalizzabile solo se $k=0$. Si tratta di verificare se per $k=0$ anche $\dim(E(1))=2$.

$$E(1)=N(M-I) \text{ con } k=0: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=s \\ w=-2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim(E(1))=2 \text{ e } E(1)=\langle (1,3,0,-2),\ (0,0,1,0)\rangle \text{ con } k=0.$$

a) Abbiamo verificato che A è diagonalizzabile solo per $k=0$.
b) Per $k=0$ una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A è data da

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4)=\{\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1),\ (1,3,0,-2),\ (0,0,1,0)\ \}$$

□

Esercizio 9.22. *Data la matrice*

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k\in\mathbf{R}$.*
b) *Per $k=2$, si determini una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di M.*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di M è

$$p_M(\lambda)=(1-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda=1,\ 2,\ 3,\ k$ e dobbiamo discutere i valori di k.

– Se $k\neq 1,2,3$ i quattro autovalori sono distinti e singoli, quindi M è diagonalizzabile.
– Se $k=1$ l'autovalore $\lambda=1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1)=N(M-I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M-I)=3$, $\dim(E(1))=1$ e M non è diagonalizzabile.

– Se $k=2$ l'autovalore $\lambda=2$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(2)=N(M-2I): \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ \\ IV+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2y+4z-w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=s \\ z=t \\ w=2s+4t \end{cases} \Rightarrow E(2)=\langle (-1,0,1,4),\ (0,1,0,2)\rangle$$

Poiché $\lambda=2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e gli altri autovalori sono singoli, per $k=2$ la matrice M è diagonalizzabile.

– Se $k=3$ l'autovalore $\lambda=3$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(3)=N(M-3I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè $\text{rg}(M-3I)=3$, $\dim(E(3))=1$ e M non è diagonalizzabile.

b) Per $k=2$ abbiamo già determinato $E(2)$. Calcoliamo gli altri due autospazi:

$$E(1)=N(M-I):\begin{bmatrix}2&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\-1&2&3&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\w=t\end{cases}\Rightarrow E(1)=\langle(0,0,0,1)\rangle$$

$$E(3)=N(M-3I):\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&-1&0\\-1&2&3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\\ \\ III+I\\ IV+II\end{matrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&4&-2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}z=0\\x-y+z=0\\y+4z-2w=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=0\\w=t\end{cases}\Rightarrow E(3)=\langle(2,2,0,1)\rangle$$

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B}=\{\ (-1,0,1,4),\ (0,1,0,2),\ (0,0,0,1),\ (2,2,0,1)\}$$

□

Esercizio 9.23. *Si considerino le matrici*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad e\qquad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\k&1&0\\5&k-2&1\end{bmatrix}.$$

a) *Determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.*

b) *Stabilire per quali valori di k le due matrici A e B sono simili.*

Soluzione:

a) Abbiamo che

$$p_B(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi B ha due autovalori: $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=1$, doppio, ed è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $B-I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\k&0&0&0\\5&k-2&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=0\\kx=0\\5x+(k-2)y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\(k-2)y=0\end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi.

– Se $k\neq 2$ otteniamo

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 1 e B non è diagonalizzabile.

– Se $k=2$ otteniamo

$$\begin{cases}x=0\\y=s\\z=t\end{cases}$$

quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e B è diagonalizzabile.

b) Due matrici diagonalizzabili sono simili sse hanno gli stessi autovalori (contati on le rispettiva molteplicità). Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A.

$$p_A(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Come la matrice B, anche A è diagonalizzabile sse l'autospazio $E(1)$ ha dimensione 2. Per determinare $E(1)$ risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $E(1)$ ha dimensione 2 e A è diagonalizzabile.

In conclusione A e B sono simili quando sono entrambe diagonalizzabili, ovvero se $k = 2$

□

Esercizio 9.24. *Siano A e B le matrici reali*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per cui A e B sono simili.

Soluzione:

Due matrici diagonalizzabili sono simili se sono simili alla stessa matrice diagonale, ovvero se hanno gli stessi autovalori. Inoltre se una delle due matrici è diagonalizzabile mentre l'altra non lo è, allora le due matrici non sono simili. Studiamo quindi la diagonalizzabilità di A e B.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, doppio, e $\lambda_2 = 3$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile calcoliamo la dimensione del suo autospazio $E_A(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(E_A(1)) = 3 - \text{rg}(A - I) = 3 - 1 = 2$$

e la matrice A è diagonalizzabile.

A questo punto possiamo affermare che A e B sono simili se e solo se anche B è diagonalizzabile. Calcoliamo quindi la dimensione del suo autospazio $E_B(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-1)y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $E_B(1)$ ha dimensione 2 se e solo se $k = 1$.

Infine A e B sono simili solamente se $k = 1$, quando sono entrambe simili alla matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.25. *Considerare le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori e gli autovettori di A e di B.*
b) *Stabilire se A e B sono simili.*
c) *Esistono valori di t per cui C e B sono simili?*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_A(1) = N(A-I): \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E_A(1) = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$E_A(2) = N(A-2I): \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_A(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo gli autovalori e gli autovettori di B:

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di B sono $\lambda = 2$ doppio e $\lambda = 1$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E_B(1) = N(B-I): \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_B(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E_B(2) = N(B-2I): \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_B(2) = \langle (1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$$

b) A e B non sono simili poiché A non è diagonalizzabile mentre B lo è.

c) Studiamo gli autovalori e la diagonalizzabilità di C:

$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)(t-\lambda)(2-\lambda)$$

Condizione necessaria perché B e C siano simili è che abbiano gli stessi autovalori con la stessa molteplicità, quindi deve essere $t = 2$. Verifichiamo se per tale valore anche C è diagonalizzabile.

$$E_C(2) = N(C-2I): \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t+s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E_C(2) = \langle (1,1,0),\ (1,0,1) \rangle$$

Infine per $t = 2$ le matrici B e C sono simili in quanto sono entrambe simili alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 9.26. *Siano A e B le matrici seguenti*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Dire per quali valori del parametro reale k la matrice B è diagonalizzabile.*

b) *Per $k = 3$ le due matrici possono essere associate allo stesso endomorfismo?*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di B sono
- $\lambda = 1$ doppio
- $\lambda = 2$

Poichè l'autovalore $\lambda = 2$ è singolo sappiamo che il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione 1. Si tratta quindi di controllare solamente la dimensione dell'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ k & 0 & 0 & | & 0 \\ 5 & k-2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ kx = 0 \\ 5x + (k-2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (k-2)y = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi

– Se $k = 2$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (0,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi se $k = 2$ la matrice B è diagonalizzabile.

– Se $k \neq 2$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi se $k \neq 2$ la matrice B non è diagonalizzabile.

b) Dal punto precedente sappiamo che per $k = 3$ la matrice B non è diagonalizzabile. Studiamo ora la matrice A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi gli autovalori di A sono

– $\lambda = 1$ doppio
– $\lambda = 2$

Quindi A ha effettivamente gli stessi autovalori di B.

Come per la matrice B, per stabilire sa A è diagonalizzabile dobbiamo solamente controllare la dimensione dell'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Quindi A è diagonalizzabile, ovvero è associata ad un endomorfismo diagonalizzabile, mentre per $k = 3$ la matrice B non lo è. Di conseguenza le matrici A e B non possono essere associate allo stesso endomorfismo.

□

Esercizio 9.27. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se 4 è autovalore di A. Calcolare gli autovalori e autovettori di A.*
b) *La matrice A è diagonalizzabile per similitudine? In caso affermativo, indicare una matrice diagonalizzante.*
c) *Sia C la matrice dipendente da $t \in \mathbf{R}$:*

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Esistono valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui A e C siano simili?

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} &= (6-\lambda)\left[(7-\lambda)(3-\lambda)+3\right] - 3\left[6-2\lambda+2\right] + \left[6-14+2\lambda\right] = \\ &= (6-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24) - 3(8-2\lambda) - (2\lambda-8) = \\ &= (6-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 6(\lambda-4) - 2(\lambda-4) = \\ &= (\lambda-4)\left[(6-\lambda)(\lambda-6)+6-2\right] = -(\lambda-4)(\lambda^2-12\lambda+32) \end{aligned}$$

a) Gli autovalori di A sono $\lambda = 4$ (doppio) e $\lambda = 8$. Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(4) = N(A-4I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+3y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(4) = \langle\ (-3,2,0),\ (1,0,2)\ \rangle$

$$E(8) = N(A-8I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$$

$E(8) = \langle\ (1,1,1)\ \rangle$

b) A è diagonalizzabile perché la molteplicitá algebrica e geometrica dei sui autovalori coincidono. La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Poichè A è diagonalizzabile, A e C sono simili se anche C ha gli stessi autovalori di A ed è anch'essa diagonalizzabile (cioè sono simili alla stessa matrice diagonale). Perchè A e C abbiano gli stessi autovalori ($\lambda = 4$ doppio, e $\lambda = 8$) deve essere $t = 8$. Inoltre per tale valore l'autospazio $E(4)$ di C è

$$E_C(4) = N(C-4I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_C(4) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle \Rightarrow \dim(E_C(4)) = 1$$

Di conseguenza C non è diagonalizzabile e A e C non sono mai simili.

□

Esercizio 9.28. *Si consideri la matrice ad elementi reali*

$$A = \begin{bmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{bmatrix}$$

a) *Determinare gli autovalori della matrice A.*
b) *Stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice data è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& (3-k-\lambda)\cdot\left[(2-\lambda)(3-k-\lambda)-k\right] + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) - k(3-k-\lambda) + k(3-k-\lambda) \\ &= (3-k-\lambda)(2-\lambda)(3-k-\lambda) = (3-k-\lambda)^2(2-\lambda) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2 \\ &\lambda_2 = 3-k \quad \text{almeno doppio} \end{aligned}$$

Notiamo che possiamo solo dire che λ_2 è almeno doppio, in quanto se $k = 1$ avremmo un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, triplo.

b) Per stabilire se la matrice è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(-k+3)$, che deve essere almeno 2 (la dimensione deve essere 3 nel caso $k=1$ quando si ha un unico autovalore $\lambda_1=\lambda_2=2$ triplo).

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(3-k)$ relativo all'autovalore λ_2 risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-(3-k)I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ -I \\ III+I \end{matrix} \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} kx+(k-1)y+kz=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx+kz=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema dobbiamo distinguere due casi

– Se $k=0$, allora il sistema si riduce alla sola equazione $y=0$, quindi ha soluzione

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$$

e $E(-k+3)=E(3)=\langle(1,0,0),\ (0,0,1)\rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 2 uguale alla molteplicità algebrica di λ_2 (Notiamo che per $k=0$, $\lambda_1=2$ è singolo e $\lambda_2=3$ è doppio). Di conseguenza se $k=0$ la matrice è diagonalizzabile.

– Se $k\neq 0$ possiamo dividere la prima equazione per k ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$$

Quindi in questo caso $E(-k+3)=\langle(1,0,-1)\rangle$. In particolare $E(-k+3)$ ha dimensione 1 minore della molteplicità algebrica di λ_2. Di conseguenza se $k\neq 0$ la matrice non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 9.29. *Sia S l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con matrice associata*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & b & b-3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di S.*
b) *Trovare i valori di b per i quali S è diagonalizzabile.*

Soluzione:

a) Il polinomio carateristico di A è:

$$p_A(\lambda)=(2-\lambda)(b-\lambda)[(3-\lambda)^2-1]=(2-\lambda)(b-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Per determinare esattamente gli autovalori dobbiamo distinguere 3 casi

– Se $b\neq 2,4$: $\lambda=2$ doppio, $\lambda=4$, $\lambda=b$
– Se $b=2$,: $\lambda=2$ triplo, $\lambda=4$
– Se $b=4$: $\lambda=2$ doppio, $\lambda=4$ doppio

Determiniamo l'autospazio $E(2)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & b-2 & b-3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow III-II \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $b \neq 2$, $E(2) = \langle \left(-\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right), \ (0,0,0,1) \rangle$
- Se $b = 2$, $E(2) = \langle \left(-\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right), \ (0,1,0,0), \ (0,0,0,1) \rangle$

  Determiniamo l'autospazio $E(4)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -2 & b-4 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & b-4 & b-4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $b \neq 4$, $E(4) = \langle \left(\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right) \rangle$
- Se $b = 4$, $E(4) = \langle \left(\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right), \ (0,1,0,0) \rangle$

  Determiniamo l'autospazio $E(b)$ nei casi $b \neq 2, 4$:

$$\begin{bmatrix} 3-b & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 3-b & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III+II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 3-b & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II+(3-b)I \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & b-3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -b^2+6b-8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & | & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo supposto $b \neq 2, 4$ si ha $2 - b \neq 0$ e $-b^2 + 6b - 8 \neq 0$, quindi
- Se $b \neq 2, 4$, $E(b) = \langle (0, 1, 0, 0) \rangle$

b) Abbiamo trovato che:
- Se $b \neq 2, 4$, allora $\dim(E(2)) = 2, \ \dim(E(4)) = 1, \ \dim(E(b)) = 1$, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $b = 2$, allora $\dim(E(2)) = 3, \ \dim(E(4)) = 1$, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $b = 4$, allora $\dim(E(2)) = 2, \ \dim(E(4)) = 2$, quindi T è diagonalizzabile.

Infine T è sempre diagonalizzabile.

□

Esercizio 9.30. *Sia A la matrice reale dipendente dal parametro k*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare per quali k la matrice A è diagonalizzabile.*

b) *Per i valori determinati in* a)*, trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A*

Soluzione:

a) Il polinomio caratterestico di A è

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - k^2] = (k - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1 - k^2]$$

Quindi gli autovalori, non necessariamente distinti, sono $\lambda = k, \ 1 + k, \ 1 - k$. Distinguiamo i casi in cui gli autovalori possono essere doppi:
- Se $k = 0$, allora $k + 1 = -k + 1 = 1$ è un autovalore doppio,
- Se $k = \frac{1}{2}$, allora $k = -k + 1 = \frac{1}{2}$ è un autovalore doppio,
- Se $k \neq 0, \frac{1}{2}$ i tre autovalori sono distinti.

Di conseguenza dobbiamo distinguere tre casi per studiare la diagonalizzazione.
- Se $k = 0$ l'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Poichè $\mathrm{rg}(A - I) = 2$, $\dim(E(1)) = 1$ e A non è diagonalizzabile.

– Se $k = \frac{1}{2}$ l'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$ è doppio, quindi dobbiamo stabilirne la molteplicità geometrica.

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = N\left(A - \frac{1}{2}I\right) : \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 4I \\ \\ 2III - 4I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}\right) = \langle (1,0,-2),\ (0,1,0) \rangle$$

Poiché $\lambda = \frac{1}{2}$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 e l'altro autovalore $\lambda = k + 1 = \frac{3}{2}$ è singolo, per $k = \frac{1}{2}$ la matrice A è diagonalizzabile.

– Se $k \neq 0, \frac{1}{2}$ i tre autovalori sono distinti e singoli, quindi A è diagonalizzabile.

b) Calcoliamo gli autospazi:

$$E(k) = N(A - kI) : \begin{bmatrix} 1-k & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ 1-k & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$II - (1-k)I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + (1-k)z = 0 \\ (2k-1)z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq \frac{1}{2}$, $E(k) = \langle (0,1,0) \rangle$.

– Se $k = \frac{1}{2}$, $E(k) = E\left(\frac{1}{2}\right) = \langle (1,0,-2),\ (0,1,0) \rangle$. Notiamo che avevamo già calcolato tale autospazio al punto precedente.

$$E(k+1) = N(A - (k+1)I) : \begin{bmatrix} -k & 0 & k^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ -II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - kz = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = kt \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(k+1) = \langle (k,0,1) \rangle$$

$$E(1-k) = N(A - (1-k)I) : \begin{bmatrix} k & 0 & k^2 \\ 0 & 2k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ -II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2k-1 & 0 \\ k & 0 & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso bisogna distinguere due casi:

– Se $k \neq \frac{1}{2}$, $E(-k+1) = \langle (-k,0,1) \rangle$.

– Se $k = \frac{1}{2}$, $E(-k+1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = \langle \left(-\frac{1}{2},0,1\right),\ (0,1,0) \rangle$. Notiamo che avevamo già calcolato tale autospazio sia al punto precedente che calcolando $E(k)$ nel caso $k = \frac{1}{2}$.

Infine una delle basi cercate è

$$\mathcal{B} = \{\ (0,1,0),\ (k,0,1),\ (-k,0,1) \}, \qquad \text{se } k \neq 0, \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{B} = \{\ (0,1,0),\ (1,0,-2),\ (1,0,2) \}, \qquad \text{se } k = \frac{1}{2},$$

Notiamo che in realtà non è necessario distinguere i due casi, anche se le basi sono ottenute da autospazi differenti, in quanto ponendo $k = \frac{1}{2}$ nella prima base si ottiene comunque la seconda base.

□

Esercizio 9.31. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare gli autovalori di A.*
b) *Stabilire per quali valori reali di k la matrice A diagonalizzabile.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)(2k-\lambda)-4k] = (1-\lambda)\left[\lambda^2-(2k+2)\lambda\right] \\ &= \lambda(1-\lambda)\left[\lambda-(2k+2)\right] \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2k+2$$

Dobbiamo ora distinguere tre casi:

- Se $2k+2 \neq 0, 1$, allora A ha tre autovalori distinti ed è diagonalizzabile.
- Se $2k+2=0$, cioè $k=-1$ allora l'autovalore $\lambda=0$ è doppio (mentre $\lambda=1$ è singolo), quindi per stabilire se A è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di $E(0)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II+1/2I \\ III+1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2,-1,1)\rangle$$

  Quindi per $k=-1$ l'autovalore $\lambda=0$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1 e A non è diagonalizzabile.
- Se $2k+2=1$, cioè $k=-\frac{1}{2}$ allora l'autovalore $\lambda=1$ è doppio (mentre $\lambda=0$ è singolo), quindi per stabilire se A è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione di $E(1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(0,1,0)\rangle$$

  Quindi per $k=-\frac{1}{2}$ l'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1 e A non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 9.32. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*
b) *Determinare, se esistono, i valori di k per cui la matrice*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

può essere associata al medesimo endomorfismo T.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, quindi T ha l'autovalore $\lambda=2$, doppio, e $\lambda=1$, singolo.

   Per stabilire se T è diagonalizzabile cominciamo a calcolare l'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ -6 & -1 & 3 \\ -12 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6x-y+3z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-6t+3s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(2) = \langle\ (1,-6,0),\ (0,3,1)\rangle$$

   A questo punto possiamo già dire che T è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio $E(1)$:

$$E(1) = \mathrm{N}(A - I) : \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1/3II \\ I \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II + 5III \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 1, 2)\rangle$$

Infine la matrice P diagonalizzante (formata da una base di autovettori) è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Dal momento che A è diagonalizzabile con autovalori $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 1$, singolo, A e B sono associate allo stesso endomorfismo T se anche B ha le stesse caratteristiche. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(k - \lambda)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori se $k = 2$. Dobbiamo ora verificare che, per $k = 2$, anche B sia diagonalizzabile, ovvero che $\lambda = 2$ abbia molteplicità geometrica 2:

$$E_B(2) = \mathrm{N}(B - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1, quindi B non è diagonalizzabile e A e B non sono associate al medesimo endomorfismo T per nessun valore di k.

$\square$

Esercizio 9.33. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T.*

Soluzione:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti (a, b, c) rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre T può essere vista come applicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$\begin{aligned} T(x^2) &= T(1, 0, 0) = (1, k, 0) = x^2 + kx \\ T(x) &= T(0, 1, 0) = (k, 1, 0) = kx^2 + x \\ T(1) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, k) = k \end{aligned}$$

Di conseguenza la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - k^2\right] = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1 - k, \qquad \lambda = 1 + k$$

$\square$

CAPITOLO 10

Prodotto scalare, ortogonalitá e basi ortonormali

Esercizio 10.1. *Dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^2$ *si calcoli il prodotto scalare* (v_i, v_j) *per* $i, j = 1, 2, \dots, 6$*:*

$$v_1 = (6, 3) \qquad v_2 = (-1, 0) \qquad v_3 = (1, -2)$$
$$v_4 = (-2, 0) \qquad v_5 = (-2, 10) \qquad v_6 = (1, \sqrt{2})$$

Esercizio 10.2. *Si dica quali tra i vettori dell'esercizio precedente sono ortogonali tra loro.*

Esercizio 10.3. *Dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$ *si calcoli il prodotto scalare* (v_i, v_j) *per* $i, j = 1, 2, \dots, 6$*, e dica quali vettori sono ortogonali tra loro.*

$$v_1 = (1, 3, 4) \qquad v_2 = (0, -1, 2) \qquad v_3 = (1, 2, 1)$$
$$v_4 = (-2, 3, 0) \qquad v_5 = (1, 1, 1) \qquad v_6 = (1, -3, 2)$$

Esercizio 10.4. *Si calcoli la norma dei seguenti vettori*

$$v_1 = (-2, 5, 1) \qquad v_2 = (1, 0, -2) \qquad v_3 = (7, 1, 1)$$
$$v_4 = (4, 1) \qquad v_5 = (10, 1) \qquad v_6 = (-1, -3)$$

Esercizio 10.5. *Si calcoli la distanza tra i vettori* v_1 *e* v_2*, e tra i vettori* v_5 *e* v_6 *dell'esercizio precedente.*

Esercizio 10.6. *Determinare il valore del parametro* $k \in \mathbf{R}$ *tale che i vettori*

$$v = (1, 3, 7, -1), \qquad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

Esercizio 10.7. *Siano assegnati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di* v *su* w*.*
c) *Si scriva* v *come somma di un vettore* v_1 *multiplo di* w *e di un vettore* v_2 *ortogonale a* w*.*

Esercizio 10.8. *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \qquad w = (2, 1, -1)$$

Esercizio 10.9. *Siano* $u = (4, 2, -2)$ *e* $v = (3, -3, 2)$ *vettori di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Calcolare le lunghezze di* u *e di* v *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*).*
b) *Trovare tutti i vettori* w *di lunghezza 1 ortogonali a* u *e a* v*.*

Esercizio 10.10. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (0, -2, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di* v_1 *e di* v_2 *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^4$*).*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di* v_1 *su* v_2*.*

Esercizio 10.11. *Data la base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1,0,1),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (1,0,1)\}$$

di $\mathbf{R}^3$*, si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da* $\mathcal{B}$.

Esercizio 10.12. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

Esercizio 10.13. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2,0,0),\ v_2 = (1,2,0),\ v_3 = (0,-1,-1)\}$$

Esercizio 10.14. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *(con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*

$$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (1,-2,0,0),\ v_3 = (1,0,-1,2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di* W.
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di* W.

Esercizio 10.15. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,1,1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di* v_1 *e di* v_2.
b) *Determinare la proiezione ortogonale di* v_1 *su* v_2.
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* v_1 *e* v_2.

Esercizio 10.16. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai vettori* (x_1, x_2, x_3) *tali che* $2x_1 + x_2 = 0$. *Si determini una base ortonormale di* U *rispetto al prodotto scalare ordinario di* $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 10.17. *Sia* V *il seguente sottospazio di* $\mathbf{R}^4$

$$V = \langle\ v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (1,2,-1,3)\ \rangle$$

Si determini il complemento ortogonale $V^\perp$ *di* V.

Esercizio 10.18.

a) *Partendo dalla base* $\{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (2,1,-3),\ v_3 = (-1,1,0)\}$, *costruire una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* v_1 *e* v_2. *Determinare una base del complemento ortogonale di* U.

Esercizio 10.19. *Siano* $v_1 = (2,1,1,0)$ *e* $v_2 = (-1,1,2,0)$ *e sia* $V = \langle v_1,\ v_2\rangle \subset \mathbf{R}^4$.

a) *Calcolare l'angolo tra* v_1 *e* v_2.
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di* V.

Esercizio 10.20. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *di base* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (2,4,-1)\}$.

a) *Si trovi una base ortonormale di* V *a partire da* $\mathcal{B}$.
b) *Si trovi una base ortonormale del complemento ortogonale* $V^\perp$ *di* V.

Esercizio 10.21. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *la funzione lineare tale che*

$$T(1,-2,1) = (2,1),\ T(1,0,0) = (-1,2),\ T(0,1,0) = (-1,0).$$

a) *Che dimensione ha l'immagine di* T*?*
b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*) del nucleo di* T.

Esercizio 10.22. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai vettori* (x_1, x_2, x_3) *tali che* $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. *Si determini una base ortonormale di* W *rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 10.23. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1,0,-1,0), \quad v_2 = (2,2,-1,t) \quad \textit{(t parametro reale).}$$

a) *Si determini il valore di* t *tale che* v_1 *e* v_2 *formino un angolo di* $45°$.
b) *Posto* $t = 0$ *si determini la proiezione di* v_2 *su* v_1.

c) *Posto $t = 0$ e dato $v_3 = (0, 0, 1, 1)$, si determini una base ortonormale dello spazio $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.*

---

1. Suggerimenti

Prodotto scalare: Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare di V è una applicazione

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) : V \times V \to \quad & \mathbf{R}\\ (u, v) \ \mapsto \ & (u, v)\end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- proprietà simmetrica: $(u, v) = (v, u) \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{R}$,
- bilinearità: $(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\,(u, w) + \beta\,(v, w) \quad \forall\, u, v \in \mathbf{R} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
- definita positiva: $(u, u) \geq 0\ \forall u \in V$ e $(u, u) = 0$ sse $u = 0$.

(Notiamo che si usa la stessa notazione per la coppia (u, v) e per il loro prodotto scalare (u, v), ma il primo è una coppia di vettori mentre il secondo è un numero)

Il **prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$** (che noi considereremo salvo diversa indicazione) è: dati $u = (x_i)_{i=1,..,n}$ e $v = (y_i)_{i=1,..,n}$:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = u \cdot v^T$$

Norma o lunghezza: definiamo norma o lunghezza di un vettore v il numero

$$\| v \| = \sqrt{(v, v)}$$

Notiamo che

$$(v, v) = \| v \|^2$$

Angolo tra due vettori. Dati due vettori $u, v \in V$ e indicato con ϑ l'angolo convesso tra essi, si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{\| u \| \cdot \| v \|}$$

Ortogonalità. Due vettori $u, v \in V$ sono ortogonali se $(u, v) = 0$.

Proiezione ortogonale su un vettore. Dati due vettori $u, v \in V$ si chiama proiezione ortogonale di u su v il vettore

$$pr_v(u) = \frac{(u, v)}{\| v \|^2} \cdot v = \frac{(u, v)}{(v, v)} \cdot v$$

- $pr_v(u)$ è un vettore parallelo a v,
- $u - pr_v(u)$ è un vettore ortogonale a v,
- $u = (u - pr_v(u)) + pr_v(u)$, ovvero ogni vettore u può sempre essere scritto come somma di di un vettore ortogonale e di uno parallelo ad un altro vettore v.

Complemento ortogonale. Dato uno spazio vettoriale $W \subseteq \mathbf{R}^n$, chiamiamo complemento ortogonale di W lo spazio vettoriale

$$W^{\perp} = \{u \in \mathbf{R}^n \mid (u, w) = 0\ \forall w \in W\}$$

$W^{\perp}$ è uno spazio vettoriale.

Insieme ortonormale è un insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ di vettori:

- a due a due ortogonali: $(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j = 1, \ldots, n$,
- di norma 1: $\| v_i \| = 1 = (v_i, v_i)$ per $i = 1, \ldots, n$

Gram-Schmidt. Permette di individuare una base ortonormale

$$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

a partire da una base qualsiasi

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

nel seguente modo.

Determiniamo innanzitutto a partire da $\mathcal{B}$ una base

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1). Notiamo che siccome dei vettori w_i ci interessa solo l'ortogonalità, possiamo sostituire un vettore w_i ottenuto con un qualsiasi suo multiplo. In particolare per ottenere la base $\mathcal{B}'$ cercata è sufficiente rendere i vettori w_i di norma 1, dividendoli per la loro norma.

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1$
- $w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \dfrac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \dfrac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$
- $\ldots$
- $w_n = v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} pr_{w_i}(v_n) = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v_n, w_i)}{(w_i, w_i)} \cdot w_i$

Quindi

$$u_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|}, \qquad u_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|}, \qquad u_3 = \frac{w_3}{\| w_3 \|}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \frac{w_n}{\| w_n \|}$$

La base canonica è una base ortonormale.

Proiezione ortogonale su uno spazio vettoriale. Siano V e W due spazi vettoriali tali che $W \subseteq V$, e sia $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ una base **ortonormale** di W. L'applicazione

$$\begin{aligned} P_W : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow w = \sum_{i=1}^{m} (v, e_i) \cdot e_i \end{aligned}$$

è detta **proiezione su** W.

- P_W è una **applicazione lineare** (endomorfismo di V).
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ appartiene a W.
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ è l'unico vettore di W tale che il vettore $v - w$ appartiene a $W^\perp$.

---

2. Soluzioni

Esercizio 10.1. *Dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^2$ *si calcoli il prodotto scalare* (v_i, v_j) *per* $i, j = 1, 2, \ldots, 6$*:*

$$v_1 = (6, 3) \qquad v_2 = (-1, 0) \qquad v_3 = (1, -2)$$
$$v_4 = (-2, 0) \qquad v_5 = (-2, 10) \qquad v_6 = (1, \sqrt{2})$$

Soluzione:

Notiamo che per le proprietà del prodotto scalare $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, calcoleremo quindi tali prodotti una sola volta.

$$
\begin{aligned}
&(v_1, v_1) = 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 45 & & \\
&(v_1, v_2) = 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -6 & &(v_1, v_3) = 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 0 \\
&(v_1, v_4) = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -12 & &(v_1, v_5) = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 10 = 18 \\
&(v_1, v_6) = 6 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2} & &(v_2, v_2) = -1 \cdot (-1)1 + 0 \cdot 0 = 1 \\
&(v_2, v_3) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = -1 & &(v_2, v_4) = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2 \\
&(v_2, v_5) = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 10 = 2 & &(v_2, v_6) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = -1 \\
&(v_3, v_3) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5 & &(v_3, v_4) = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 = -2 \\
&(v_3, v_5) = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 10 = -22 & &(v_3, v_6) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot \sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} \\
&(v_4, v_4) = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 4 & &(v_4, v_5) = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 10 = 4 \\
&(v_4, v_6) = -2 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = -2 & &(v_5, v_5) = -2 \cdot (-2) + 10 \cdot 10 = 104 \\
&(v_5, v_6) = -2 \cdot 1 + 10 \cdot \sqrt{2} = -2 + 10\sqrt{2} & &(v_6, v_6) = 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 10.2. *Si dica quali tra i vettori dell'esercizio precedente sono ortogonali tra loro.*

Soluzione:

Due vettori sono ortogonali tra loro se il loro prodotto scalare è zero, quindi gli unici vettori dell'esercizio precedente ortogonali tra loro sono v_1 e v_3.

□

Esercizio 10.3. *Dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$ si calcoli il prodotto scalare (v_i, v_j) per $i, j = 1, 2, \dots, 6$, e si dica quali vettori sono ortogonali tra loro.*

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (1, 3, 4) \qquad & &v_2 = (0, -1, 2) \qquad & &v_3 = (1, 2, 1) \\
&v_4 = (-2, 3, 0) & &v_5 = (1, 1, 1) & &v_6 = (1, -3, 2)
\end{aligned}
$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
&(v_1, v_1) = 26 & &(v_1, v_2) = 6 & &(v_1, v_3) = 11 & &(v_1, v_4) = 9 \\
&(v_1, v_5) = 8 & &(v_1, v_6) = 0 & &(v_2, v_2) = 5 & &(v_2, v_3) = 0 \\
&(v_2, v_4) = -3 & &(v_2, v_5) = 1 & &(v_2, v_6) = 7 & &(v_3, v_3) = 6 \\
&(v_3, v_4) = 4 & &(v_3, v_5) = 4 & &(v_3, v_6) = -3 & &(v_4, v_4) = 13 \\
&(v_4, v_5) = 1 & &(v_4, v_6) = -11 & &(v_5, v_5) = 3 & &(v_5, v_6) = 0 \\
&(v_6, v_6) = 14 & & & & & &
\end{aligned}
$$

I vettori ortogonali tra loro sono:

$$v_1 \text{ e } v_6, \qquad v_2 \text{ e } v_3, \qquad v_5 \text{ e } v_6$$

□

Esercizio 10.4. *Si calcoli la norma dei seguenti vettori*

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (-2, 5, 1) \qquad & &v_2 = (1, 0, -2) \qquad & &v_3 = (7, 1, 1) \\
&v_4 = (4, 1) & &v_5 = (10, 1) & &v_6 = (-1, -3)
\end{aligned}
$$

Soluzione:

La norma di un vettore è data dalla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Di conseguenza

$$\|v_1\| = \sqrt{30}, \qquad \|v_2\| = \sqrt{5}, \qquad \|v_3\| = \sqrt{51},$$
$$\|v_4\| = \sqrt{17}, \qquad \|v_5\| = \sqrt{101}, \qquad \|v_6\| = \sqrt{10}.$$

□

Esercizio 10.5. *Si calcoli la distanza tra i vettori v_1 e v_2, e tra i vettori v_5 e v_6 dell'esercizio precedente.*

Soluzione:

La distanza tra due vettori è data dalla norma della loro differenza.

$$\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$$

Di conseguenza

$$\mathrm{d}(v_1, v_2) = \|(3, -5, -3)\| = \sqrt{43}$$
$$\mathrm{d}(v_5, v_6) = \|(-11, -4)\| = \sqrt{137}$$

□

Esercizio 10.6. *Determinare il valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori*

$$v = (1, 3, 7, -1), \qquad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

Soluzione:

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero.

$$(v, w) = 3 + 15 + 7 - k = 25 - k \quad \Rightarrow \quad (v, w) = 0 \text{ se } k = 25$$

Quindi v e w sono ortogonali se $k = 25$

□

Esercizio 10.7. *Siano assegnati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w.*
c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.*

Soluzione:

a) Se indichiamo con ϑ l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\| v \| \cdot \| w \|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \| v \| = \sqrt{6}, \quad \| w \| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \le \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.

Sappiamo già che $(v,w)=-2$, inoltre $(w,w)=\parallel w\parallel^2=3^2=9$, quindi

$$pr_w(v)=\frac{-2}{9}\cdot w=\left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore $v-pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned}&v_1=pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w\\&v_2=v-pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w\\&v_1+v_2=v\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}v_1&=\left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right)\\v_2&=\left(\frac{16}{9},\ -\frac{5}{9},\ 0,\ \frac{13}{9}\right)\end{aligned}$$

□

Esercizio 10.8. *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v=(3,4,-2),\qquad w=(2,1,-1)$$

SOLUZIONE:

- La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v)=\frac{(v,w)}{\parallel w\parallel^2}\cdot w=\frac{(v,w)}{(w,w)}\cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.

$$\begin{aligned}(v,w)&=12\\(w,w)&=6\end{aligned}$$

quindi

$$pr_w(v)=\frac{12}{6}\cdot w=(4,\ 2,\ -2)$$

- Dalla teoria sappiamo che il vettore $v-pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w , quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned}&v_1=pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w\\&v_2=v-pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w\\&v_1+v_2=v\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}v_1&=(4,\ 2,\ -2)\\v_2&=(-1,\ 2,\ 0)\end{aligned}$$

□

Esercizio 10.9. *Siano* $u=(4,2,-2)$ *e* $v=(3,-3,2)$ *vettori di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Calcolare le lunghezze di* u *e di* v *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*).*
b) *Trovare tutti i vettori* w *di lunghezza 1 ortogonali a* u *e a* v.

SOLUZIONE:

a) Ricordiamo che $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$, quindi:

$$\begin{aligned}\|u\|&=\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\\\|v\|&=\sqrt{3^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{22}\end{aligned}$$

b) Si $w = (x, y, z)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^3$ e imponiamo la condizione che sia ortogonale a u e a v, ovvero $(u, w) = (v, w) = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema considerando la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 3 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 7 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 2t + 7t = 9t \end{cases}$$

Quindi il generico vettore w ortogonale a u e v è del tipo

$$(t, 7t, 9t)$$

Imponiamo ora la condizione che w abbia norma 1:

$$\sqrt{t^2 + (7t)^2 + (9t)^2} = 1 \ \Rightarrow \sqrt{131t^2} = 1 \ \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{131}}$$

Quindi abbiamo due possibili scelte per w:

$$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{131}}, \frac{7}{\sqrt{131}}, \frac{9}{\sqrt{131}}\right)$$

$\square$

Esercizio 10.10. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (0, -2, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2 (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^4$).*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.*

Soluzione:

a) La lunghezza di un vettore corrisponde alla sua norma:

$$\| v_1 \| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$
$$\| v_2 \| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

b) Utilizzando la formula per calcolare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 otteniamo:

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \ 0, \ 0, \ \frac{1}{2}\right)$$

$\square$

Esercizio 10.11. *Data la base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1), \ v_2 = (0, 1, 0), \ v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di $\mathbf{R}^3$, si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da $\mathcal{B}$.

Soluzione:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1, \ u_2, \ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1, \ w_2, \ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (-1, 0, 1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 0) - 0 \cdot w_1 = (0, 1, 0) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1, 0, 1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 &= w_2 = (0,1,0) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

Esercizio 10.12. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

Soluzione:
Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Per facilitare i conti scambiamo innanzitutto l'ordine di v_1, v_2 e v_3 in $\mathcal{B}$ (cambiando i nomi per evitare confusioni):

$$\mathcal{B} = \{v_1' = (0,0,1),\ v_2' = (0,1,1),\ v_3' = (1,1,1)\}$$

Come nell'esercizio precedente costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1' = (0,0,1) \\ w_2 &= v_2' - pr_{w_1}(v_2') = v_2' - \frac{(v_2', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) = (0,1,0) \\ w_3 &= v_3' - pr_{w_1}(v_3') - pr_{w_2}(v_3') = v_3' - \frac{(v_3', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3', w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,1,0) = (1,0,0) \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso i vettori ottenuti hanno già norma 1, quindi

$$u_1 = w_1 = (0,0,1), \qquad u_2 = w_2 = (0,1,0), \qquad u_3 = w_3 = (1,0,0)$$

Infine

$$\mathcal{B}' = \{(0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 10.13. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2,0,0),\ v_2 = (1,2,0),\ v_3 = (0,-1,-1)\}$$

Soluzione:
Sia

$$\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$$

la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

- Il vettore u_1 lo otteniamo normalizzando v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(2,0,0)}{2} = (1,0,0)$$

- Per calcolare il vettore u_2 cominciamo con il calcolare il vettore w_2 ortogonale a u_1:

$$w_2 = v_2 - (v_2, u_1)\, u_1 = (1,2,0) - 1 \cdot (1,0,0) = (0,2,0)$$

Quindi

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(0,2,0)}{2} = (0,1,0)$$

- Anche per calcolare il vettore u_3 calcoliamo prima il vettore w_3 ortogonale a u_1 e u_2.

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - (v_3, u_1)\, u_1 - (v_3, u_2)\, u_2 = (0, -1, -1) - 0 - (-1) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

Notiamo che w_3 è già normale, quindi $u_3 = w_3 = (0, 0, -1)$.

$\square$

Esercizio 10.14. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*

$$v_1 = (1, 1, 0, 1), \;\; v_2 = (1, -2, 0, 0), \;\; v_3 = (1, 0, -1, 2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di W.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di W.*

Soluzione:

a) Notiamo che l'insieme $\{v_1, \; v_2, \; v_3\}$ è una base di W in quanto i vettori sono linearmente indipendenti (la matrice associata ha rango 3). Per determinare una base ortonormale $\{u_1, \; u_2, \; u_3\}$ dobbiamo utilizzare il metodo di Gram-Schmidt, costruendo prima una base $\{w_1, \; w_2, \; w_3\}$ di vettori a due a due artogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1, 1, 0, 1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (1, -2, 0, 0) - \frac{-1}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) = \\ &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Prima di procedere notiamo che dei vettori w_i ci interessa solo la direzione (in modo che siamo tra loro ortogonali), ma non la lunghezza. Quindi ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$\begin{aligned} w_2 &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = (4, -5, 0, 1) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1, 0, -1, 2) - \frac{3}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) - \frac{6}{42} \cdot (4, -5, 0, 1) = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) \end{aligned}$$

Anche in questo caso ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$w_3 = -7 \cdot \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) = (4, 2, 7, -6)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \end{aligned}$$

Infine una base ortonormale di W è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \right\}$$

b) Il complemento ortogonale $W^\perp$ è formato dai vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali ai vettori di W, ovvero ortogonali agli elementi di una sua base, quindi

$$W^\perp = \{(x, y, z, w) \mid x + y + w = 0, \; x - 2y = 0, \; x - z + 2w = 0\}$$

Risolviamo quindi il sistema omogeneo ottenuto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 3III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{1}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W^{\perp}) = \{\ (-2, -1, 4, 3)\ \}$$

□

Esercizio 10.15. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di* v_1 *e di* v_2.
b) *Determinare la proiezione ortogonale di* v_1 *su* v_2.
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* v_1 *e* v_2.

SOLUZIONE:

a)

$$\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$\| v_2 \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

c) Sia $\{u_1, u_2\}$ la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare

$$u_1 = \frac{v_2}{\| v_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Quindi

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Notiamo che w_2 è parallelo a $(-1, 2, -1)$, quindi

$$u_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\| (-1, 2, -1) \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 10.16. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai vettori* (x_1, x_2, x_3) *tali che* $2x_1 + x_2 = 0$. *Si determini una base ortonormale di* U *rispetto al prodotto scalare ordinario di* $\mathbf{R}^3$.

SOLUZIONE:

Gli elementi di U sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$U = \langle\ (1,-2,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ (0,\ 0,\ 1)\ \right\}$$

$\square$

Esercizio 10.17. *Sia V il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$*

$$V = \langle\ v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (1,2,-1,3)\ \rangle$$

Si determini il complemento ortogonale $V^\perp$ di V.

Soluzione:

Sia $u = (x,y,z,w)$ il generico elemento di $V^\perp$. Per la condizione di ortogonalità deve essere

$$(u,v_1) = (u,v_2) = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-z+3w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t+3s \\ w=s \end{cases} \qquad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{(-1,1,1,0)\cdot t + (0,0,3,1)\cdot s \mid \forall s,t\in\mathbf{R}\} \\ &= \langle\ (-1,1,1,0),\ (0,0,3,1)\ \rangle \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 10.18.

a) *Partendo dalla base $\{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (2,1,-3),\ v_3 = (-1,1,0)\}$, costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da v_1 e v_2. Determinare una base del complemento ortogonale di U.*

Soluzione:

a) Sia $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dai tre vettori. Cominciamo a costruire una base ortogonale $\mathcal{B}' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$.

$w_1 = v_1 = (1,0,1)$

$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) == (2,1,-3) - \dfrac{-1}{2}\cdot(1,0,1) = \left(\dfrac{5}{2},1,-\dfrac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow w_2 = (5,2,-5)$

$w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = (-1,1,0) - \dfrac{-1}{2}\cdot(1,0,1) - \dfrac{-3}{34}(5,2,-5) = \left(-\dfrac{4}{18},\dfrac{20}{18},\dfrac{4}{18}\right)$

$\Rightarrow w_3 = (-1,5,1)$

Ora basta normalizzare i vettori trovati:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(5,2,-5)}{\sqrt{54}} = \left(\frac{5}{3\sqrt{6}},\frac{2}{3\sqrt{6}},-\frac{5}{3\sqrt{6}}\right) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(-1,5,1)}{\sqrt{27}} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{5}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

La base ortonormale cercata è $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$.

b) Sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e sia $w = (x, y, z) \in U^\perp$. Imponiamo quindi a w l'ortogonalità agli elementi di U, ovvero agli elementi di una base di U:

$$(w, v_1) = 0 \Rightarrow x + z = 0$$
$$(w, v_2) = 0 \Rightarrow 2x + y - 3z = 0$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{B}\left(U^\perp\right) = \{(-1, 5, 1)\}.$$

□

Esercizio 10.19. *Siano* $v_1 = (2, 1, 1, 0)$ *e* $v_2 = (-1, 1, 2, 0)$ *e sia* $V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subset \mathbf{R}^4$.

a) *Calcolare l'angolo tra* v_1 *e* v_2.
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di* V.

SOLUZIONE:

a) Indichiamo con ϑ l'angolo tra v_1 e v_2. Sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

b) Il complemento ortogonale di V è lo spazio

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{v = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0\right\} \\ &= \left\{v = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, \quad -x + y + 2z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow_{2II+I} \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Infine una base di $V^\perp$ è

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = = \{\ (1, -5, 3, 0),\ (0, 0, 0, 1)\ \}$$

□

Esercizio 10.20. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *di base* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (2, 4, -1)\}$.

a) *Si trovi una base ortonormale di* V *a partire da* $\mathcal{B}$.
b) *Si trovi una base ortonormale del complemento ortogonale* $V^\perp$ *di* V.

SOLUZIONE:

a) Costruiamo prima una base $\{w_1,\ w_2\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$w_1 = v_1 = (1, 2, 0)$$
$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (2, 4, -1) - \frac{10}{5}(1, 2, 0) = (0, 0, -1)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \qquad u_2 = w_2 = (0, 0, -1)$$

Infine una base ortonormale cercata è

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ (0, 0, -1)\right\}$$

b) Il complemento ortogonale di V è l'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali ai vettori di V, e quindi ai vettori di una base di V:

$$V^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+2y=0,\ 2x+4y-z=0\right\}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V^\perp = \langle(-2,1,0)\rangle$$

Per trovare una base ortonormale è sufficiente prendere il generatore di norma 1:

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right\}$$

□

Esercizio 10.21. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *la funzione lineare tale che*

$$T(1,-2,1) = (2,1),\ T(1,0,0) = (-1,2),\ T(0,1,0) = (-1,0).$$

a) *Che dimensione ha l'immagine di* T*?*

b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*) del nucleo di* T.

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

(1) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,-2,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\ \}$$

di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(2) Ricavare l'azione di T sugli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e determinare quindi la matrice $B = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.

(1) Con il primo metodo consideriamo la matrice A associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di A. Poichè A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

di determinante $2 \neq 0$, la matrice A ha rango 2, quindi

$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=2(-2t)-t=-5t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $N(T))$ è generato dal vettore $(-2,1,-5)_{\mathcal{B}}$, espresso però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore

$$-2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 - 5\cdot v_3 = (-1,-1,-2)$$

Infine

$$N(T) = \langle\ (-1,-1,-2)\ \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

(2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$, calcolando le immagini di $e_1,\ e_2,\ e_3$. Poichè conosciamo già $T(e_1) = (-1, 2)$ e $T(e_2) = (-1, 0)$, dobbiamo solo ricavare $T(e_3)$. Sfruttando la linearità di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,-2,1) - T(1,0,0) + 2T(0,1,0) \\ &= (2,1) - (-1,2) + 2(-1,0) = (1,-1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice B associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di B, quindi

$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a B

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle\ (1, 1, 2)\ \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 10.22. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Si determini una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Gli elementi di W sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$W = \langle\ (-1, 0, 1),\ (2, 1, 0)\ \rangle$$

Per ottenere una base ortonormale di W utilizziamo il metodo di Gram-Schmidt.
Sia $v_1 = (-1, 0, 1)$, calcoliamo il vettore u_1 normalizzando v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Sia ora $v_2 = (2, 1, 0)$. Per calcolare il vettore u_2 cominciamo con il calcolare il vettore w_2 ortogonale a u_1:

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - (v_2, u_1)\, u_1 = (2,1,0) - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (2,1,0) + (-1,0,1) = (1,1,1) \end{aligned}$$

Per ottenere il vettore u_2 cercato normalizziamo w_2:

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La base ortonormale di W cercata è quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 10.23. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1,0,-1,0), \quad v_2 = (2,2,-1,t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

a) *Si determini il valore di* t *tale che* v_1 *e* v_2 *formino un angolo di* $45°$.
b) *Posto* $t = 0$ *si determini la proiezione di* v_2 *su* v_1.
c) *Posto* $t = 0$ *e dato* $v_3 = (0,0,1,1)$*, si determini una base ortonormale dello spazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo formato da v_1 e v_2. Si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9+t^2}}$$

Poiché $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{\sqrt{2}\,\sqrt{9+t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{\sqrt{9+t^2}} = 1 \quad\Rightarrow\quad 3 = \sqrt{9+t^2} \quad\Rightarrow\quad 9 = 9+t^2 \quad\Rightarrow\quad t = 0$$

Quindi v_1 e v_2 formano un angolo di $45°$ se $t = 0$.

b) La proiezione di v_2 su v_1 è

$$\mathrm{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_1, v_1)}\cdot v_1 = \frac{3}{2}\cdot(1,0,-1,0) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

c) Cerchiamo prima una base ortogonale w_1, w_2, w_3.

$w_1 = v_1 = (1,0,-1,0)$

$w_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) = (2,2,-1,0) - \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow w_2 = (1,4,1,0)$

$w_3 = v_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(v_3) = (0,0,1,1) - \frac{-1}{2}(1,0,-1,0) - \frac{1}{18}(1,4,1,0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 1\right) \Rightarrow$

$w_3 = (4,-2,4,9)$

Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di V si tratta ora di determinare i generatori di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,4,1,0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,1,0)$$

$$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{1}{\sqrt{117}}(4,-2,4,9)$$

□

CAPITOLO 11

Endomorfismi e matrici simmetriche

Esercizio 11.1. [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.2. *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche* A *si determini una matrice ortogonale* P *per la quale* P^TAP *sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11.3. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo* T *é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di* T *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*).*
c) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* T*.*

Esercizio 11.4. *Sia* A *la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il polinomio caratteristico di* A*.*
b) *Si può affermare che* A *è diagonalizzabile anche senza conoscere gli autovalori?*
c) *Trovare una base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* A*.*

Esercizio 11.5. *Sia* A *la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* A*.*

Esercizio 11.6. *Sia* A *la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* A*.*

Esercizio 11.7. *Si consideri la matrice reale simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* A.
b) *Determinare una matrice ortogonale* P *tale che* P^TAP *sia diagonale.*

Esercizio 11.8. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^4$ *definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di* T.
b) *Determinare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^4$ *formata da autovettori di* T.

Esercizio 11.9. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x,y,z) = (ax,\ bx+y+z,\ y+z)$$

con a *e* b *parametri reali.*

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di* T *al variare di* a *e* b *in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto* $a = b = 0$ *si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* T.

Esercizio 11.10. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}$. T *è un endomorfismo simmetrico?*

Esercizio 11.11. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) T *è un endomorfismo simmetrico?*
b) T *è diagonalizzabile?*

Esercizio 11.12. *Sia* T *l'endomorfismo do* $\mathbf{R}^4$ *cosí definito:*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1, x_3, x_4, -3x_2+x_3+3x_4)$$

a) *Mostrare che* 1 *è autovalore di* T.
b) *Stabilire se* T *è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base rispetto a cui* T *ha matrice diagonale.*
c) *L'endomorfismo* T *è simmetrico?*

Esercizio 11.13. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *così definito:*

$$T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1,\ 2x_2+\sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se* T *è invertibile.*
b) *Mostrare che* T *è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *che diagonalizza* T.

Esercizio 11.14. *Si consideri la funzione lineare (endomorfismo)* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *così definita:*

$$T(x,y,z) = (2x+4z, 6y, 4x+2z).$$

a) *Stabilire se* T *è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$.
b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori di* T.

Esercizio 11.15. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo avente come autovettori i vettori* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, *rispetto agli autovalori* $1, 1, 2$.

a) *Calcolare la matrice* A *che rappresenta* T *rispetto alla base canonica.*
b) T *è invertibile?*
c) T *è un endomorfismo simmetrico?*

Esercizio 11.16. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.*
b) *Calcolare gli autovalori di T e stabilire se T è diagonalizzabile.*

---

1. Suggerimenti

Endomorfismo simmetrico: $T : V \to V$ tale che:

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

Proprietà :
Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una **base ortonormale**, allora:
- T è simmetrico $\Leftrightarrow$ A è simmetrica (cioè $A = A^T$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicità).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Matrice ortogonale: P è una matrice ortogonale se

$$P \cdot P^T = I \quad \text{ovvero} \quad P^{-1} = P^T$$

Notiamo che $\det(P) = \pm 1$, e P è detta ortogonale speciale se $\det(P) = 1$.

Teorema spettrale
- Se T è un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T. In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile a una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 11.1. [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Calcolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice A calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)-4] \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono i valori di λ per cui $p_A(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{(doppio)}, \qquad \lambda_2 = 3$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = -1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A+I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow\ 2x+2y=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=s \end{cases} \quad \forall s,t\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\quad E(-1) = \langle(-1,1,0),\ (0,0,1)\rangle$$

  Poichè dalla teoria sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, ci aspettavamo che l'autovalore $\lambda=-1$ avesse molteplicità geometrica 2.

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A-3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\quad E(3) = \langle(1,1,0)\rangle$$

Siano

$$v_1 = (-1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,1), \qquad v_3 = (1,1,0)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo A una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Inoltre, in questo caso, anche i due autovettori relativi allo stesso autovalore $\lambda=-1$ risultano ortogonali: $(v_1,v_2)=0$. Per determinare la base ortonormale richiesta è quindi sufficiente normalizzare i tre vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0,0,1) \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \end{aligned}$$

Ripetiamo ora l'esercizio con la matrice B. Cominciamo a determinare gli autovalori della matrice B calcolandone il polinomio caratteristico, ovvero il determinante della matrice

$$B-\lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1] - 3\cdot 3(1-\lambda) = (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda)-1-9] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono i valori di λ per cui $p_B(\lambda)=0$, quindi

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -4$$

Possiamo ora trovare gli autovettori:

- $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B-I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y=0 \\ 3x-3y-z=0 \\ -y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=3t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ E(1) = \langle(1,0,3)\rangle$$

- $\lambda = 3$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo asociato a $B - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -5 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II + 3I \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle (-3, -2, 1) \rangle$$

- $\lambda = -4$. Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $B + 4I$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 5II + -3I \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle$$

Siano

$$v_1 = (1, 0, 3), \qquad v_2 = (-3, -2, 1), \qquad v_3 = (-3, 5, 1)$$

i tre autovettori linearmente indipendenti determinati. Essendo B una matrice simmetrica sappiamo dalla teoria che i suoi autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. Per determinare la base ortonormale richiesta si tratta quindi di normalizzare i tre vettori v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \ 0, \ \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \ -\frac{2}{\sqrt{14}}, \ \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \qquad \Rightarrow \quad \text{la base cercata è} \quad \mathcal{B} = \{u_1, \ u_2, \ u_3\} \\ u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}, \ \frac{5}{\sqrt{35}}, \ \frac{1}{\sqrt{35}} \right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 11.2. *Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale $P^T AP$ sia diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Poichè entrambe le matrici A sono simmetriche, sappiamo dalla teoria che sono sicuramente diagonatizzabili. Si tratta di

(1) Determinare gli autovettori di A,
(2) Determinare una base ortonormale a partire dagli autovettori (linearmente indipendenti) di A,
(3) Scrivere la matrice P che ha per colonne gli elementi della base trovata.

La matrice P cosí determinata è diagonalizzante e ortogonale.

Consideriamo prima la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \ \Rightarrow$ autovalori: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$
- $\lambda = 2$. Consideriamo $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \langle \ (2, 1) \ \rangle$$

- $\lambda = -3$. Consideriamo $A + 3I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad E(-3) = \langle \ (1, -2) \ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$v_1 = (2,1), \qquad v_2 = (1,-2) \qquad \Rightarrow$$
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \;\Rightarrow\;$ autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

- $\lambda = 1$. Consideriamo $A - I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad E(1) = \langle\ (1,1,0)\ \rangle$$

- $\lambda = 3$. Consideriamo $A - 3I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(3) = \langle\ (-1,1,-2)\ \rangle$$

- $\lambda = 0$. Consideriamo $A - 0I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(0) = \langle\ (-1,1,1)\ \rangle$$

(2) Dalla teoria sappiamo già che autovettori relativi a autovalori distini sono ortogonali. E' quindi sufficiente normalizzare gli autovettori linearmente indipendenti trovati:

$$\begin{array}{lcl} v_1 = (1,1,0) & & u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \\ v_2 = (-1,1,-2) & \Rightarrow & u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ v_3 = (-1,1,1) & & u_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array}$$

(3) Infine

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 11.3. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con matrice associata*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.*
b) *Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

SOLUZIONE:

a) L'endomorfismo T é sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrico.
b) Calcoliamo gli autovalori di T:
$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] = (4-\lambda)^2(6-\lambda)$$
Quindi gli autovalori sono:
$$\lambda_1 = 4 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 6$$
Calcoliamo ora gli autospazi.
Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow y - z = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,1)\ \rangle$$
Notiamo che, anche senza avere osservato che T è simmetrico, a questo punto possiamo concludere che T è diagonalizzabile in quanto la molteplicità geometrica del suo unico autovalore doppio è 2.
Inoltre i due vettori presi come generatori sono tra loro ortogonali, è perciò sufficiente normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $E(4)$:
$$\mathcal{B}(E(4)) = \left\{\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$
Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a $A - 6I$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle\ (0,-1,1)\ \rangle$$
Una base ortonormale di $E(6)$ è:
$$\mathcal{B}(E(6)) = \left\{\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$
c) L'insieme
$$\mathcal{B} = \left\{\ (1,0,0)\,,\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \right\}$$
è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

□

Esercizio 11.4. *Sia A la matrice reale*
$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
b) *Si può affermare che A è diagonalizzabile anche senza conoscere gli autovalori?*
c) *Trovare una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (8-\lambda)\cdot[(5-\lambda)^2-16]+2[-2(5-\lambda)-8]+2[-8-2(5-\lambda)] \\ &= (8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+9)+2(2\lambda-18)+2(-18+2\lambda) \\ &= (8-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-9)+8(\lambda-9) \\ &= (\lambda-9)(\lambda^2-9\lambda+8-8) \\ &= -\lambda(\lambda-9)^2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono $\lambda=0$ e $\lambda=9$ (doppio).

b) A è sicuramente diagonnalizzabile perchè è simmetrica.

c) Calcoliamo i due autospazi.

$E(0)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II+1/2I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 9 & 9 & | & 0 \\ 0 & 9 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/9II \\ III-2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}t \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad E(0)=\langle\ (-1,-2,2)\ \rangle$$

$E(9)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-9I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ -2 & -4 & 4 & | & 0 \\ 2 & 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-2s+2t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \qquad \forall s,t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(9)=\langle\ (-2,1,0),\ (2,0,1)\ \rangle$$

Infine una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (-1,-2,2),\ (-2,1,0),\ (2,0,1)\ \}.$$

$\square$

Esercizio 11.5. *Sia A la matrice reale*

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (6-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda)-2\cdot 2(5-\lambda)=(5-\lambda)(\lambda^2-15\lambda+54-4) \\ &= -(\lambda-5)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\lambda=10, \qquad\qquad \lambda=5 \quad \text{(doppio)}$$

Calcoliamo i due autospazi.

$E(10)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-10I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ III-1/2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -58 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-2t \end{cases} \quad \forall t\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(10)=\langle\ (1,0,-2)\ \rangle$$

$E(5)$. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-5I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \quad E(5) = \langle\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \rangle$$

Una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T è data dall'insieme

$$\{\ (1,0,-2),\ (2,0,1),\ (0,1,0)\ \}.$$

Notiamo che tali vettori sono già tra loro ortogonali, è quindi sufficiente normalizzarli. Una base ortonormale è quindi data dall'insieme

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ (0,1,0) \right\}.$$

□

Esercizio 11.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Soluzione:

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \quad \text{singolo} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{doppio} \end{aligned}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad II-I \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle (1,-1,0) \rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad II+I \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $E(2) = \langle (1,1,0),\ (0,0,1) \rangle$.

Gli autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro, quindi per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ è sufficiente normalizzarli:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ (0,0,1) \right\}$$

□

Esercizio 11.7. *Si consideri la matrice reale simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di A.*
b) *Determinare una matrice ortogonale P tale che P^TAP sia diagonale.*

Soluzione:
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3 \quad \text{singoli}$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \qquad E(0) = \langle (1,-1,-1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad E(1) = \langle (1,0,1) \rangle$$

Calcoliamo infine l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{2II+I}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow E(3) = \langle (-1,-2,1) \rangle$$

a) Gli autovettori trovati sono tutti ortogonali tra loro (anche perchè appartengono a autospazi ditinti), quindi per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ è sufficiente normalizzarli:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \right), \right\}$$

b) La matrice P cercata ha per colonne i vettori della base di $\mathbf{R}^3$ trovata:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 11.8. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ definito dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
b) *Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:
Notiamo che la matrice A è simmetrica, quindi è sicuramente diagonalizzabile.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:

$$p_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda)[(5-\lambda)^2-1]$$
$$= (4-\lambda)^2(6-\lambda)^2$$

quindi gli autovalori di M sono $\lambda = 4,\ 6$, entrambi di molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo ora gli autospazi:

$$E(4) = \mathrm{N}(M-4I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \\ w = s \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle \ (1,0,0,0), \ (0,1,0,1) \ \rangle$$

$$E(6) = \mathrm{N}(M-6I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = s \\ w = -t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle \ (0,0,1,0), \ (0,1,0,-1) \ \rangle$$

b) Notiamo che i due generatori di $E(4)$ e i due generatori di $E(6)$ determinati sono ortogonali tra loro, quindi per trovare un base ortonormale di R^4 basta renderli di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^4) = \left\{ (1,0,0,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ (0,0,1,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.9. *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$

$$T(x,y,z) = (ax, \ bx + y + z, \ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) *Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in* $\mathbf{R}$.
b) *Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.*

Soluzione:
Determiniamo la matrice $A = M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda = a, 0, 2$.

a) Se $a \neq 0, 2$, T ha tre autovalori singoli, quindi è sicuramente diagonalizzabile.
Se $a = 0$, l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(0)$:

$$E(0) = \mathrm{N}(A): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow II - III \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo distinguere due casi
- Se $a = 0$ e $b = 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(0)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Analogamente se $a = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, quindi per stabilire se T è diagonalizzabile dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio $E(2)$:

$$E(2) = \mathrm{N}(A-2I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo quindi distinguere due casi
- Se $a = 2$ e $b = 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2, quindi T è diagonalizzabile.
- Se $a = 2$ e $b \neq 0$ l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1, quindi T non è diagonalizzabile.

Infine T è daigonalizzabile se $a \neq 0, 2$ per ogni valore di b, oppure se $a = 0$ o $a = 2$ e $b = 0$.

b) Per $a = b = 0$ abbiamo già in sostanza calcolato l'autospazio

$$E(0) = \langle (0,1,-1), \ (1,0,0) \rangle$$

Notiamo che i due generatori trovati sono già tra loro ortogonali, quindi si tratterà solamente di renderli di norma 1.

Analogamente per $a = b = 0$ otteniamo:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I): \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (0,1,1) \rangle$$

Infine la base ortonormale cercata è

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.10. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}$. T è un endomorfismo simmetrico?

Soluzione:

Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per comodità assegnamo un nome ai tre vettori della base $\mathcal{B}$:

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,1,0), \qquad v_3 = (1,0,1)$$

Dalla matrice A ricaviamo le immagini degli elementi della base $\mathcal{B}$, ricordando però che tali elementi sono ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,1) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (2,3,-1)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) &= T(1,0,1) = (1,0,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Per calcolare le immagini della base canonica dobbiamo prima esprimere $e_1,\ e_2,\ e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Notiamo che data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare e risolvere i tre sistemi associati alle equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$. E' infatti immediato ricavare che

$$\begin{aligned} e_3 &= (1,1,1) - (1,1,0) = v_1 - v_2 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\ e_2 &= (1,1,1) - (1,0,1) = v_1 - v_3 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}} \\ e_1 &= (1,1,0) - e_2 = v_2 - v_1 + v_3 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Quindi sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_1) - T(v_2) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (2,3,-1)_{\mathcal{B}} = (0,-1,1)_{\mathcal{B}} = -v_2 + v_3 = (0,-1,1) \\ T(e_2) &= T(v_1) - T(v_3) = (2,2,0)_{\mathcal{B}} - (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)_{\mathcal{B}} = v_1 + 2v_2 - v_3 = (2,3,0) \\ T(e_1) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = (2,3,-1_{\mathcal{B}}) - (2,2,0)_{\mathcal{B}} + (1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,1,0)_{\mathcal{B}} = v_1 + v_2 = (2,2,1) \end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poichè B non è simmetrica, anche non T è un endomorfismo simmetrico.

Notiamo che per calcolare B potevamo in alternativa usare la matrice di cambiamento di base. Indichiamo con P è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$, cioè $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori v_1, v_2 e v_3 (espressi rispetto alla base canonica).La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice inversa di P: $P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Poiché $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $B = M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$ abbiamo la seguente relazione:

$$M(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \qquad \Rightarrow \qquad B = PAP^{-1}$$

□

Esercizio 11.11. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\ \}.$$

a) *T è un endomorfismo simmetrico?*
b) *T è diagonalizzabile?*

Soluzione:

a) Notiamo che la base $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale, quindi il fatto che A non sia simmetrica non implica che non lo sia T. Per potere utilizzare questa implicazione dobbiamo scrivere la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, in particolare rispetto alla base canonica. Per fare questo possiamo procedere in due modi
   (1) Ricavare le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 utlizzando la matrice A, dopo avere espresso e_i rispetto a $\mathcal{B}$ e ricordando che i risultati ottenuti saranno ancora espressi rispetto a $\mathcal{B}$.
   (2) Ricavare direttamente le immagini di $e_1,\ e_2$ e e_3 sfruttando la linearità di T.

   Consideriamo entrambi i metodi
   (1) Se vogliamo utilizzare direttamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(S)$ dobbiamo scrivere $e_1,\ e_2$ e e_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$. Chiamiamo $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$ i tre vettori di $\mathcal{B}$; si tratta quindi di risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ con $i = 1,2,3$. Riduciamo a gradini la matrice associata alle tre equazioni contemporaneamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -III \\ -II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

   Possiamo ora risolvere i tre sistemi.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_1 \ \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow\ e_1 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$$
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_2 \ \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow\ e_2 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}}$$
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_3 \ \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow\ e_3 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}}$$

   Possiamo usare ora la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ per calcolare le imamgini di e_i, ricordando però che il risultato ottenuto è ancora espresso rispetto rispetto a $\mathcal{B}$, mentre noi dobbiamo esprimerlo rispetto alla base canonica:

$$\begin{aligned}
T(e_1) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_1 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (-2, 2, 1)_{\mathcal{B}} = -2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1, 0, -1) \\
T(e_2) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_2 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= (3, -1, -2)_{\mathcal{B}} = 3 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (0, 2, 1) \\
T(e_3) = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot e_3 &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= (5, -4, -2)_{\mathcal{B}} = 5 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = (-1, 1, 3)
\end{aligned}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) In alternativa possiamo ricavare direttamente le immagini di e_1 dalla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, sfruttando la linearità di T. Sappiamo infatti che una matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ ha per colonne le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ espressi ancora rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi:

$$\begin{aligned}
T(1,1,1) &= (6, -3, -3)_{\mathcal{B}} \\
T(1,1,0) &= (1, 1, -1)_{\mathcal{B}} \\
T(1,0,1) &= (3, -2, -1)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Sfruttando la linearità di T:

$$\begin{aligned}
T(0,0,1) &= T(1,1,1) - T(1,1,0) = (6, -3, -3)_{\mathcal{B}} + (-1, -1, 1)_{\mathcal{B}} = (5, -4, -2)_{\mathcal{B}} \\
&= 5 \cdot (1,1,1) - 4 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (-1, 1, 3) \\
T(1,0,0) &= T(1,0,1) - T(0,0,1) = (3, -2, -1)_{\mathcal{B}} + (-5, 4, 2)_{\mathcal{B}} = (-2, 2, 1)_{\mathcal{B}} \\
&= -2 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,1) = (1, 0, -1) \\
T(0,1,0) &= T(1,1,0) - T(1,0,0) = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}} + (2, -2, -1)_{\mathcal{B}} = (3, -1, -2)_{\mathcal{B}} \\
&= 3 \cdot (1,1,1) - 1 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (1,0,1) = (0, 2, 1)
\end{aligned}$$

La matrice B associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica è quindi:

$$B = M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poichè B è simmetrica, anche T è un endomorfismo simmetrico.

b) T è sicuramente diagonalizzabile perchè è simmetrica.

□

Esercizio 11.12. *Sia T l'endomorfismo do $\mathbf{R}^4$ cosí definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, x_3, x_4, -3x_2 + x_3 + 3x_4)$$

a) *Mostrare che 1 è autovalore di T.*
b) *Stabilire se T è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base rispetto a cui T ha matrice diagonale.*
c) *L'endomorfismo T è simmetrico?*

Soluzione:

Determiniamo la matrice associata a T rispetto alla base canonica calcolando:

$$T(e_1) = (3, 0, 0, 0), \quad T(e_2) = (0, 0, 0, -3), \quad T(e_3) = (0, 1, 0, 1), \quad T(e_4) = (0, 0, 1, 3)$$

Quindi la matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)\left[-\lambda(-3\lambda + \lambda^2 - 1) - 3\right] = (3-\lambda)\left[-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\right] \\ &= (3-\lambda)\left[\lambda^2(-\lambda+3) - (-\lambda+3)\right] = (3-\lambda)^2\left[\lambda^2 - 1\right] \end{aligned}$$

a) Gli autovalori A sono

$$\lambda = 3 \text{ doppio}, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = -1$$

In particolare $\lambda = 1$ è autovalore.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(3)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 3I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = 9t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(3) = \langle\ (0,1,3,9),\ (1,0,0,0)\ \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che T è diagonalizzabile in quanto $E(3)$ ha dimensione 2 e gli altri due autovalori sono singoli.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(1) = \langle\ (0,1,1,1)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(-1) = \langle\ (0,1,-1,1)\ \rangle$$

Infine T ha una matrice diagonale rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,0,0,0),\ (0,1,3,9),\ (0,1,1,1),\ (0,1,-1,1)\ \}$$

c) T non è simmetrico in quanto la matrice A associata a T rispetto alla base canonica (che è ortogonale) non è simmetrica.

$\square$

Esercizio 11.13. *Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ così definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) *Stabilire se T è invertibile.*
b) *Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.*
c) *Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizza T.*

Soluzione:

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a) T è invertibile se è invertibile la matrice A, cioè se A ha determinante non nullo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) = -6 \neq 0$$

b) La matrice associata a T rispetto alla base canonica (che è ortonormale) è simmetrica: $A^T = A$, quindi T è un endomorfismo simmetrico.

c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2,\ -1,\ 3$.

Calcoliamo ora gli autospazi.

$$E(2) = N(A-2I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = 0 \\ \sqrt{3}y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(2) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(-1) = N(A+I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\sqrt{3}III - II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -\frac{3}{\sqrt{3}}t = -\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow \quad E(-1) = \langle (0, 1, -\sqrt{3}) \rangle$$

$$E(3) = N(A-3I): \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{III + \sqrt{3}II} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad E(3) = \langle (0, \sqrt{3}, 1) \rangle$$

Essendo tre autospazi distinti i tre autovalori generatori trovati sono tra loro ortogonali. Per ottenere la base ortonormale cercata basta quindi prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^3) = \left\{ (1,0,0), \ \left(0, \frac{1}{2}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right) \right\}$$

□

Esercizio 11.14. *Si consideri la funzione lineare (endomorfismo) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ così definita:*

$$T(x,y,z) = (2x + 4z, 6y, 4x + 2z).$$

a) *Stabilire se T è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.*

b) *Se esiste, trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di T.*

Soluzione:

Determiniamo la matrice A associata a T rispetto alla base canonica:

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è simmetrica, quindi anche T è simmetrica.

b) Calcoliamo gli autovalori di T:

$$p_A(\lambda) = (6-\lambda) \cdot \left[(2-\lambda)^2 - 16\right] = (6-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 6$ (doppio) e $\lambda = -2$.

Calcoliamo ora gli autospazi:

$$E(6) = N(A-6I): \quad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(6) = \langle (1,0,1), \ (0,1,0) \rangle$$

$$E(-2) = N(A+2I): \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(-2) = \langle (-1,0,1) \rangle$$

Notiamo che gli autovettori trovati sono già ortogonali tra loro, quindi per trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori basta prendere i generatori di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 11.15. *Sia* $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo avente come autovettori i vettori* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$, *rispetto agli autovalori* $1, 1, 2$.

a) *Calcolare la matrice* A *che rappresenta* T *rispetto alla base canonica.*
b) T *è invertibile?*
c) T *è un endomorfismo simmetrico?*

Soluzione:

Poiché v_1 è autovettore rispetto a $\lambda = 1$, otteniamo che $T(v_1) = v_1$. Analogamente $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$. Di conseguenza

$$T(v_1) = (1,1,0), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (0,0,2)$$

a) Dobbiamo trovare le immagini della base canonica. Notiamo che

$$\begin{aligned} e_3 &= v_3 \\ e_2 &= v_2 - v_3 \\ e_1 &= v_1 - e_2 = v_1 - v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Per la linearità di T otteniamo che

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T(v_3) = (0,0,2) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_3) = (0,1,1) - (0,0,2) = (0,1,-1) \\ T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) + T(v_3) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,2) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare A si poteva utilizzare la matrice diagonalizzante P che ha per colonne gli autovettori, e la matrice diagonale D che ha gli autovalori sulla diagonale. Dalla relazione $P^{-1}AP = D$ si ricava $A = PDP^{-1}$.

b) T è invertibile se lo è A. Poiché $\det(A) = -2 \neq 0$, A e T sono invertibili.
c) T non è simmetrico perché A, che è associata a T rispetto alla base (ortonormale) canonica, non lo è.

□

Esercizio 11.16. *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}_2[x]$ *che associa al polinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ *il polinomio*

$$T(p(x)) = (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc.$$

a) *Trovare la matrice associata a* T *rispetto alla base* $\{x^2, x, 1\}$.
b) *Calcolare gli autovalori di* T *e stabilire se* T *è diagonalizzabile.*

Soluzione:

Notiamo che il generico polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}_2[x]$ ha componenti (a, b, c) rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$. In particolare $p(x) = x^2$ ha componenti $(1, 0, 0)$, $p(x) = x$ ha componenti $(0, 1, 0)$ e $p(x) = 1$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In sostanza la base $\{x^2, x, 1\}$ corrisponde quindi alla base canonica. Inoltre T può essere vista come apllicazione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$T(a, b, c) = (a + kb,\ ka + b,\ kc).$$

a) Calcoliamo la immagini degli elementi della base:

$$\begin{aligned} T(x^2) &= T(1, 0, 0) = (1, k, 0) = x^2 + kx \\ T(x) &= T(0, 1, 0) = (k, 1, 0) = kx^2 + x \\ T(1) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, k) = k \end{aligned}$$

Di conseguenza la matrice associata a T rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (k - \lambda)\left[(1 - \lambda)^2 - k^2\right] = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k)$$

Di conseguenza gli autovalori (non sempre distinti) sono

$$\lambda = k, \qquad \lambda = 1 - k, \qquad \lambda = 1 + k$$

Notiamo che la matrice A è diagonalizzabile, senza la necessità di calcolare molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori, in quanto è simmetrica.

□

CAPITOLO 12

Rette e piani con le matrici e i determinanti

Esercizio 12.1. *Stabilire se i punti $A(1,3)$, $B(-2,-1)$ e $C(3,1)$ sono allineati.*

Esercizio 12.2. *Stabilire se i punti $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(3,2,-1)$ e $D(4,1,0)$ sono complanari.*

Esercizio 12.3. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A(2,1)$ e $B(-2,3)$.*

Esercizio 12.4. *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$ e $C(3,2,-1)$.*

Esercizio 12.5. *Stabilire se i punti $A(1,2,3)$, $B(-1,2,4)$, $C(2,2,1)$ sono allineati.*

Esercizio 12.6. *Stabilire per quali valori di k i punti $A(1,2,1)$, $B(1,3,4)$ e $C(0,1,k)$ sono allineati.*

Esercizio 12.7. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A(3,1,2)$ e $B(1,-1,0)$).*

Esercizio 12.8. *Si determini la distanza del punto $P(2,1)$ dalla retta di equazione $2x-y+5=0$.*

Esercizio 12.9. *Si determini la distanza del punto $P(3,1,2)$ dalla retta di equazione parametrica*

$$\begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$$

Esercizio 12.10. *Si determini la distanza del punto $P(-1,0,2)$ dal piano di equazione $x-2y+3z=-9$.*

Esercizio 12.11. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4+t \\ y = t \\ z = -2-t \end{cases}$$

Esercizio 12.12. *Si determini la distanza tra i piani π_1 e π_2 di equazioni $\pi: \ x-2y+z=12$ e $\pi_2: \ x-2y+z=6$.*

Esercizio 12.13. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+3t \\ z = -t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Esercizio 12.14. *Nello spazio $\mathbf{R}^3$ si considerino i piani*

$$\pi_1 \ : \ 2x+y=1 \qquad e \qquad \pi_2 \ : \ x=2y.$$

a) *Determinare la mutua posizione dei due piani.*
b) *Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela a π_1, perpendicolare a π_2 e passante per l'origine.*

Esercizio 12.15. *Calcolare l'area del triangolo di vertici $A_1(3,1)$, $A_2(2,6)$ e $A_3(4,4)$.*

Esercizio 12.16. *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ e $A_3(1,k)$ ha area 5.*

Esercizio 12.17. *Calcolare l'area del poligono di vertici* $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(2,1)$, $A_4(1,3)$ *e* $A_5(0,2)$.

Esercizio 12.18. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $A_1(1,1,1)$, $A_2(1,3,1)$, $A_3(-1,0,0)$.

Esercizio 12.19. *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1,0,0)$, $v(-3,1,1)$ *e* $w(-2,2,5)$.

Esercizio 12.20. *Siano* $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (1,0,-1), P_3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1,2,1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Esercizio 12.21. *Si considerino le rette* r_1, r_2, r_3 *di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: \ 3x+y-1 = 4x+y-z-1 = 0 \\ r_2 &: \ 2x-y+z = x-y+2z = 0 \\ r_3 &: \ x-z = y+z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

Esercizio 12.22. *Si considerino i piani* π_1, π_2, π_3 *di equazioni:*

$$\pi_1: \ 2x-y=1, \qquad \pi_2: \ x+y+z=0, \qquad \pi_3: \ x-2z=1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano* π_4 *passante per l'origine e perpendicolare alla retta* $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici* A, B, C, *con* $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.

Esercizio 12.23. *Siano* $A = (0,-1,0)$, $B = (-2,0,-3)$, $C = (-1,0,-1)$ *punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici* A, B, C.
b) *Stabilire se il punto* $D = (2,2,2)$ *appartiene al piano contenente* A, B, C.
c) *Eseiste un'isometria che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,2)$ *e* $Q = (1,1,1)$ *rispettivamente?*

Esercizio 12.24. *Siano* $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1,0,1)$.

a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x+y=0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

---

1. Suggerimenti

- Tre punti $P_i(x_i, y_i)$ del piano sono **allineati** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Quattro punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dello spazio sono **complanari** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) del piano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana del piano** passante per tre punti (non allineati) $P_i(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Tre punti dello spazio $P_i(x_i, y_i, z_i)$ sono **allineati** se e solo se:

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \leq 2$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) dello spazio $P_1(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Questo, per Kronecker, implica che due opportune sottomatrici 3×3 abbiano determinante nullo. Le due equazioni in x, y, z così ottenute costituiscono l'equazione cartesiana della retta.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^2$, di lati $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2)$ è:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^3$, di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|u \times v|$ del vettore $u \times v$ prodotto vettoriale di u e v:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u \times v|$$

- Il **volume del parallelepipedo** di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(u,\ v \times w)$:

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u,\ v \times w)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 12.1. *Stabilire se i punti $A(1,3)$, $B(-2,-1)$ e $C(3,1)$ sono allineati.*

SOLUZIONE:

Sia A la matrice associata ai tre punti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo stabilire se $\det(A) = 0$.

Come osservato nell'Esercizio 5.1, dal momento che ci interessa solo se il determinante è o non è nullo, possiamo effettuare alcuni passi della riduzione prima di calcolarne il determinante. Inoltre poichè l'ultima colonna contiene tutti 1 risulta semplice ottenere gli zeri sull'ultima colonna anzicchè sulla prima.

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A':

$$\det(A') = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14 \neq 0$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e i tre punti non sono allineati.

□

Esercizio 12.2. *Stabilire se i punti $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(3,2,-1)$ e $D(4,1,0)$ sono complanari.*

SOLUZIONE:

Come nell'esercizio precedente riduciamo parzialmente a gradini la matrice associata ai quattro punti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia A' la matrice così ottenuta. Ne calcoliamo il determinante rispetto alla quarta colonna.

$$\det(A') = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -1\left[-3(-4) + 1(-6+12)\right] = -18 \neq 0$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e i quattro punti non sono complanari.

□

Esercizio 12.3. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A(2,1)$ e $B(-2,3)$.*

SOLUZIONE:

Imponiamo che la matrice associata al generico punto della retta $P(x,y)$, ad A e B abbia determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$= x(1-3) - y(2+2) + 1(6+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - 4y + 8 = 0$$

Infine la retta AB ha equazione

$$x + 2y - 4 = 0$$

□

Esercizio 12.4. *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$ e $C(3,2,-1)$.*

Soluzione:

Imponiamo che la matrice associata al generico punto del piano $P(x,y,z)$, ad A, B e C abbia determinante nullo:

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Anche in questo caso conviene forse effettuare qualche passo di riduzione per semplificare i calcoli. Notiamo che non conviene utlizzare la prima riga:

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = M'$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\det(M') = 0 = \det(M) \qquad \Rightarrow \\ &-1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 0 \\ &-(1 \cdot 4 - 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2) + (x \cdot 4 - y \cdot 12 + z \cdot 2) = 0 \\ &4x - 12y + 2z + 14 = 0 \end{aligned}$$

Infine il piano ABC ha equazione

$$2x - 6y + z + 7 = 0$$

□

Esercizio 12.5. *Stabilire se i punti $A(1,2,3)$, $B(-1,2,4)$, $C(2,2,1)$ sono allineati.*

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice Massociata ai tre punti riducendola a gradini (secondo la prima colonna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi M ha tre pivot, $\text{rg}(M) = 3$ e i tre punti non sono allineati.

□

Esercizio 12.6. *Stabilire per quali valori di k i punti $A(1,2,1)$, $B(1,3,4)$ e $C(0,1,k)$ sono allineati.*

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice Massociata ai tre punti riducendola a gradini (secondo la prima colonna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in ogni caso la matrice M ha tre pivot, quindi ha rango tre e i tre punti non sono mai allineati.

□

Esercizio 12.7. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A(3,1,2)$ e $B(1,-1,0)$).*

Soluzione:

Sia Mla matrice associata al generico punto $P(x, y, z)$ della retta, ad A e B:

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che M contiene la sottomatrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Affinchè M abbia rango due è quindi necessario che

$$\det \begin{bmatrix} x & z & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Quindi

$$\begin{cases} 2x - 2z - 2 = 0 \\ 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Semplificando le equazioni si ottiene l'equazione cartesiana della retta AB:

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 12.8. *Si determini la distanza del punto $P(2, 1)$ dalla retta di equazione $2x - y + 7 = 0$.*

Soluzione:

Utilizziamo un metodo che non è sicuramente il più breve (anche rispetto ad altri concetti noti dalle superiori), ma che si può generalizzare a situazioni analoghe in $\mathbf{R}^3$ e che non richiede la conoscenza di formule.

Ricaviamo l'equazione parametrica di r:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$$

Quindi r è parallela al vettore $u = (1, 2)$.

Sia s la retta per P e perpendicolare a r e sia s parallela al vettore $v = (a, b)$. Per la condizione di perpendicolarità u e v devono essere ortogonali, quindi

$$(u, v) = a + 2b = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} a = -2t \\ b = t \end{cases}$$

La retta s è quindi parallela al vettore $v = (-2, 1)$. Imponendo inoltre il passaggio per P otteniamo

$$s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Calcoliamo ora il punto A di intersezione tra r e s:

$$\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4t - 1 - t + 7 = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 3)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \| AP \| = \| (4, -2) \| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

□

Esercizio 12.9. *Si determini la distanza del punto $P(3, 1, 2)$ dalla retta r di equazione parametrica*

$$r : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Soluzione:

La retta r è parallela al vettore $u = (1, 2, -3)$.

Sia π il piano perpendicolare a r passante per P. La prima condizione implica che π sia del tipo

$$x + 2y - 3z = k$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $3 + 2 - 6 = k$, ovvero $k = -1$. Infine

$$\pi: \quad x + 2y - 3z = -1$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + t + 4 + 4t + 3 + 9t = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Quindi $A = (5, 0, 2)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \parallel AP \parallel = \parallel (2, -1, 0) \parallel = \sqrt{5}$$

□

Esercizio 12.10. *Si determini la distanza del punto $P(-1, 0, 2)$ dal piano π di equazione $\pi: \ x - 2y + 3z = -9$.*

Soluzione:

Si può applicare la formula: $d(\Pi, P) = \dfrac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14}$.

L'esercizio può essere svolto, in caso di oblio della formula, come è illustrato di seguito. Il piano π è perpendicolare al vettore $u = (1, -2, 3)$.

Sia r la retta perpendicolare a π passante per P:

$$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t + 6 + 9t = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 2, -1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi, P) = d(A, P) = \parallel AP \parallel = \parallel (1, -2, 3) \parallel = \sqrt{14}$$

Notiamo che l'esercizio poteva anche essere risolto utilizzando la formula della distanza punto-piano.

□

Esercizio 12.11. *Si determini la distanza tra le rette r e s di equazioni*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Soluzione:

Notiamo che le due rette sono parallele. Consideriamo un qualsiasi punto della retta r, per esempio $P = (0, 1, 4)$. A questo punto è sufficiente calcolare la distanza di s da P come abbiamo fatto nell'Esercizio 12.2.

Sia π il piano perpendicolare a s passante per P:

$$x + y - z = -3$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di s con π:

$$\begin{cases} x+y-z=-3 \\ x=4+t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+t+t+2+t=-3 \\ x=4+t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=1 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$$

Quindi $A=(1,-3,1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r,s)=d(A,P)=\parallel AP \parallel=\parallel (-1,4,3) \parallel=\sqrt{26}$$

□

Esercizio 12.12. *Si determini la distanza tra i piani π_1 e π_2 di equazioni $\pi_1: \ x-2y+z=12$ e $\pi_2: \ x-2y+z=6$.*

Soluzione:

Notiamo che i due piani sono paralleli. Consideriamo un qualsiasi punto del piano π_1, per esempio $P=(12,0,0)$. A questo punto è sufficiente calcolare la distanza di π_2 da P come abbiamo fatto nell'Esercizio 12.3.

Sia r la retta perpendicolare a π_2 passante per P:

$$r: \begin{cases} x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π_2:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+t+4t+t=6x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=11 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

Quindi $A=(11,2,-1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi,\pi_2)=d(A,P)=\parallel AP \parallel=\parallel (1,-2,1) \parallel=\sqrt{6}$$

□

□

Esercizio 12.13. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+3t \\ z=-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Soluzione:

Si verifica facilmente che le due rette sono sghembe, infatti non sono parallele e non si intersecano.

Sia π il piano contenente s e parallelo a r. Questo in particolare implica che π sia parallelo a entrambe le rette, ovvero ai vettori $u=(-1,3,-1)$ e $v=(1,1,-1)$. Inoltre, una volta impostata la condizione che π sia parallelo a s, in particolare conterrà s se ne contiene un suo qualsiasi punto. Scegliamo quindi un qualsiasi punto P di s, per esempio $P=(2,0,1)$. Infine

$$\pi: \begin{cases} x=2-t+s \\ y=3t+s \\ z=1-t-s \end{cases} \Rightarrow x+y+2z-4=0$$

Abbiamo così ottenuto un piano contenente s e parallelo alle due rette. A questo punto la distanza tra le due rette è uguale alla distanza di π da r. Inoltre, essendo r e π paralleli la loro distanza è uguale alla distanza di un qualsiasi punto B di r da π (o viceversa). Sia $B=(1,-1,0)$ il punto scelto su r. Possiamo ora utilizzare la formula della distanza punto-piano:

$$d(r,s)=d(B,\pi)=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

In alternativa, non utilizzando la formula, per calcolare la distanza tra B e π potevamo calcolare il punto A di intersezione tra la retta l per B perpendicolare a π, e calcolare poi la distanza tra A e B. La retta passante per B e perpendicolare a π è la retta

$$l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Sia A il punto di intersezione tre l e π:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Infine

$$d(r, s) = d(B, \pi) = d(B, A) = \| AB \| = \| \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \| = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

□

Esercizio 12.14. *Nello spazio* $\mathbf{R}^3$ *si considerino i piani*

$$\pi_1 \ : \ 2x + y = 1 \qquad e \qquad \pi_2 \ : \ x = 2y.$$

a) *Determinare la mutua posizione dei due piani.*
b) *Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela a* π_1*, perpendicolare a* π_2 *e passante per l'origine.*

Soluzione:

a) Il piano π_1 è perpendicolare al vettore $u_1 = (2, 1, 0)$ mentre il piano π_2 è perpendicolare al vettore $u_2 = (1, -2, 0)$. Poichè u_1 e u_2 sono ortogonali, lo sono anche i piani π_1 e π_2.

   In particolare i piani π_1 e π_2 sono incidenti e hanno per intersezione la retta ottenuta risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = t. \end{cases}$$

b) La retta perpendicolare a π_2 e passante per l'origine è la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

In effetti tale retta è parallela a π_1. Questo si può verificare in due modi:

– MODO 1. Cerchiamo l'intersezione tra r e π_1:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - 2t = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Poichè il sistema è impossibile, retta e piano non si intersecano quindi sono paralleli.

– MODO 2: La retta r è parallela al vettore $v = (1, -2, 0)$, mentre il piano π è ortogonale al vettore $u_1 = (2, 1, 0)$. I due vettori v e u_1 sono ortogonali in quanto

$$(u_1, v) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0$$

quindi r è parallela a π_1.

□

Esercizio 12.15. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $A_1(3, 1)$, $A_2(2, 6)$ *e* $A_3(4, 4)$.

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici $A_1(3,1)$, $A_2(2,6)$ e $A_3(4,4)$ è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1,3), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (-1,5)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2}\left|(1\cdot 5 - (-1\cdot 3))\right| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\\ &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\end{aligned}$$

□

Esercizio 12.16. *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ e $A_3(1,k)$ ha area 5.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1,k), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (4,2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & k\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(2-4k)\right| = |1-2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo $1-2k = \pm 5$, quindi $k=-2$ o $k=3$.

Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k=-2$ ovvero $A_3 = (1,-2)$.
- $k=3$ ovvero $A_3 = (1,3)$.

□

Esercizio 12.17. *Calcolare l'area del poligono di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(2,1)$, $A_4(1,3)$ e $A_5(0,2)$.*

Soluzione:

Rappresentando i punti nel piano si vede che l'area del poligono corrisponde alla somma delle aree dei triangoli $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ e $A_1A_4A_5$. Ora

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,0), \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (2,1), \qquad \overrightarrow{A_1A_4} = (1,3), \qquad \overrightarrow{A_1A_5} = (0,2)$$

quindi

$$\begin{aligned}\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\\ \text{Area(triangolo } A_1A_3A_4) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right| = \frac{5}{2}\\ \text{Area(triangolo } A_1A_4A_5) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right| = 1\end{aligned}$$

Infine

$$\text{Area(poligono } A_1A_2A_3A_4A_5) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 4$$

□

Esercizio 12.18. *Calcolare l'area del triangolo di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(1,3,1)$, $A_3(-1,0,0)$.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici $A_1A_2A_3$ è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$, dove

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0,2,0), \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (-2,-1,-1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} &= (2\cdot(-1),\ 0,\ -(-2)\cdot 2) = (-2,\ 0,\ 4)\\ &= \det\begin{bmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix} = -2i+0j+4k = (-2,0,4)\end{aligned}$$

Infine

$$\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}|(-2,0,4)| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Attenzione a non confondere il valore assoluto di un numero: $|a|$ con la lunghezza di un vettore: $|\overrightarrow{v}|$, entrambi indicati con le sbarre verticali.

□

Esercizio 12.19. *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1,0,0)$, $v(-3,1,1)$ *e* $w(-2,2,5)$.

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di v e w:

$$v \times w = (3,\ 13,\ -4)$$

Quindi

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u,(v\times w))| = |u\cdot v\times w| = |((1,0,0),\ (3,\ 13,\ -4))| = |3| = 3$$

Analogamente

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left|\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{bmatrix}\right| = |1\cdot(5-2)| = 3$$

□

Esercizio 12.20. *Siano* $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (1,0,-1), P_3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1,2,1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}|\cdot|\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,-1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

b) Il volume del prisma é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$. Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0,3,1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}V &= \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\left(\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right)\right|\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left|\left((0,1,-1),\left(4+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Analogamente

$$V = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Esercizio 12.21. *Si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x + y - 1 = 4x + y - z - 1 = 0 \\ r_2 &: 2x - y + z = x - y + 2z = 0 \\ r_3 &: x - z = y + z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

Soluzione:

a) Tenendo anche conto del punto b) dell'esercizio per verificare che le tre rette sono complanari determiniamo i loro punti di intersezione a due a due.

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$r_2 \cap r_3 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0, 0)$$

Il piano passante per A, B e C contiene le tre rette che sono quindi complanari.

b) Calcoliamo i due vettori che formano due lati del triangolo: $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ e $\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} i - \frac{1}{3} k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

□

Esercizio 12.22. *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:*

$$\pi_1 : \ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 : \ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 : \ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini il sistema associato ai tre piani

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -7 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y + 2z = -1 \\ -7z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

La retta ha direzione $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ cioè $(1, 2, -3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x + 2y - 3z = d$. Imponendo il pasaggio per l'origine otteniamo $d = 0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4 : \ x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettiamo a sistema π_1, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

Mettendo a sistema π_2, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = -i + 2k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} |\,(-1,\ 0,\ 2)\,| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

□

Esercizio 12.23. *Siano* $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ *punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici* A, B, C.
b) *Stabilire se il punto* $D = (2, 2, 2)$ *appartiene al piano contenente* A, B, C.
c) *Eseiste un'isometria che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 2)$ *e* $Q = (1, 1, 1)$ *rispettivamente?*

Soluzione:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB \times AC$. Poiché $AB = (-2, 1, -3)$ e $AC = (-1, 1, -1)$, otteniamo

$$AB \times AC = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2i + j - k = (2, 1, -1) \quad \Rightarrow \quad |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti $A,\ B,\ C$ il quale ha equazione

$$\pi : \begin{cases} x = -2t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = -3t - s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z = -1$$

Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $4 + 2 - 2 \neq -1$, quindi D non appartiene al piano contenente A, B, C.

c) Un'isometria conserva le distanze, quindi in particolare deve essere $|AB| = |OP|$. Nel nostro caso

$$|AB| = \sqrt{14} \neq |OP| = \sqrt{5}$$

quindi non può esistere un'isometria che trasforma i punti A e B nei punti O e P.

□

Esercizio 12.24. *Siano* $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1,0,1)$.

a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x + y = 0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2,1,0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2,0,-1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1, 2, -2)$$

Infine

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:

$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)}v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$

Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot |\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi

$$A = P^T C - (P \cdot C) I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$M \cdot A = (-1,1,3,3) \quad \Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$N \cdot A = (-2,2,6,6) \quad \Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$L \cdot A = (-2,2,5,4) \quad \Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4},\right)$$

Quindi il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare la matrice A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta

$$CM: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:

$$M': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Analogamente si potevano ottenere gli altri punti.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

□

CAPITOLO 13

Coniche

Esercizio 13.1. *Stabilire il tipo di conica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una conica a centro determinare inoltre le coordinate del centro della conica.*

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

c) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

e) $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

g) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

h) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

i) $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$

l) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

m) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 13.2. *Ridurre in forma canonica le coniche* f), g) *dell'esercizio precedente e le coniche*

n) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

p) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

Esercizio 13.3. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Determinare la matrice di rotazione R (ortogonale speciale) tale che $R^T AR = D$, con D matrice diagonale.*
c) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
d) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi.*

Esercizio 13.4. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica asociata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Esercizio 13.5. *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 13.6. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 13.7. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 13.8. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

a) *Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
b) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
c) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Esercizio 13.9. *Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Esercizio 13.10. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.*

Esercizio 13.11. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Esercizio 13.12. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = \frac{1}{3}$.*

Esercizio 13.13. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

Esercizio 13.14. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Esercizio 13.15. *Si consideri la conica di equazione*

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi l'eventuale centro della conica.*
c) *Si trovino gli assi di simmetria e la forma canonica della conica.*

Esercizio 13.16. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}: \ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Esercizio 13.17. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Esercizio 13.18. *Sia* $\mathbf{C}$ *la conica di equazione*

$$\mathbf{C} \ : \ 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 5x + 10y = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di* $\mathbf{C}$.
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di* $\mathbf{C}$.

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni conica $f(x,y) = 0$, possiamo associare due matrici quadrate simmetriche: la matrice $A \in M_{2\times 2}$ relativa alla forma quadratica associata alla conica, e la matrice $A' \in M_{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della conica è

$$f(x,y) = [x,y,1] \cdot A' \cdot [x,y,1]^T = [x,y] \cdot A \cdot [x,y]^T + 2\left(h^T \cdot [x,y]^T\right) + k = 0$$

Possiamo inoltre definire gli **invarianti ortogonali** dell'equazione della conica.

- **Invariante cubico**: $I_3 = \det(A')$,
- **Invariante quadratico**: $I_2 = \det(A)$,
- **Invariante lineare**: $I_1 =$ traccia di $A =$ somma degli elementi della diagonale di $A =$ somma degli autovalori di A.

Classificazione.

- Una conica è **non degenere** se $I_3 = \det(A') \neq 0$. Inoltre è:
  - **Ellisse**: se gli autovalori sono concordi, ovvero se $I_2 = \det(A) > 0$.
  - **Iperbole**: se gli autovalori sono discordi, ovvero se $I_2 = \det(A) < 0$.
  - **Parabola**: se ha un autovalore nullo, ovvero se $I_2 = \det(A) = 0$.
- Una conica è **degenere** se $I_3 = \det(A') = 0$. Inoltre:
  - Se $\text{rg}(A') = 2$ è **semplicemente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette distinte (reali o immaginarie).
  - Se $\text{rg}(A') = 1$ è **doppiamente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette coincidenti.

Centro e assi o vertice e asse.

- **Centro**
  - Iperbole e ellisse sono coniche a centro. Il centro si determina risolvendo il sistema:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

  - Se la conica è degenere e si tratta di una coppia di rette incidenti, si tratta di una conica a centro. Il centro è il punto di intersezione delle due rette e può anche essere determinato come per le coniche a centro non degeneri.
- **Assi**
  - Gli assi di iperbole e ellisse sono le rette passanti per il centro, aventi direzioni parallele agli autovettori di A.
  - L'asse della parabola è una retta di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo passante per il vertice. Il **vertice** è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola. Non avendo in generale il vertice, per determinare l'asse si può:
    * Determinare la direzione dell'asse.
    * Determinare la generica equazione di una retta r perpendicolare all'asse.
    * Determinare i punti di intersezione D e E di r con la parabola.
    * Determinare il punto medio M del segmento DE.
    * L'asse è la retta per M di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
    * Una volta nota l'equazione dell'asse si può ricavare il vertice.
  - In alternativa assi, centro e vertice si possono ricavare dalla forma canonica se si è a conoscenza delle trasformazioni che permettono di passare dall'equazione alla forma canonica e viceversa.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T A R = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forma canonica con equazioni della trasformazione.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere, ovvero una delle forme:

- $ax^2 + by^2 - 1 = 0$, ellisse reale,
- $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, ellisse immaginaria,
- $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, iperbole,
- $x^2 - 2py = 0$, parabola,

con $a, b > 0$, dobbiamo eseguire due trasformazioni:

(1) **Rotazione**. Lo scopo è ruotare la conica in modo che gli assi (o l'asse) siano paralleli agli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza del termine xy.

(2) **Traslazione**. Lo scopo è traslare la conica in modo che il centro (nel caso di ellisse o iperbole) o il vertice (nel caso della parabola), coincida con l'origine degli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza dei termini x e y.

Vediamo come procedere.

(1) **Rotazione**.
   i) Si determinano gli autovalori e autovettori di A, in modo da ottenere la matrice R ortonormale speciale tale che $R^TAR = D$, matrice diagonale. Questo corrisponde a effettuare il cambiamento di base:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
   ii) Si sostituiscono al posto di x e y le nuove coordinate X e Y ottenendo così una equazione priva del termine XY. Notiamo che la forma quadratica associata alla conica nelle nuove coordinate sarà del tipo:
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$
   dove λ_i sono gli autovalori di A. E' quindi opportuno prendere gli autovalori nell'ordine desiderato (e non è necesario sostituire X e Y nella parte quadratica perché sappiamo già il risultato che otterremo).

(2) **Traslazione** Possiamo distinguere due casi.
   - **Coniche a centro**. Si può procedere in due modi:
     i) Completamento dei quadrati, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del centro della conica (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare.
   - **Parabole**.
     i) Completamento del quadrato e contemporaneamente eliminazione del termine noto, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del vertice della parabola (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare. Poiché la ricerca del vertice della parabola è piuttosto laboriosa, in genere conviene utilizzare il primo metodo.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $I_3 = \det(A')$ per verificare che la conica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$ di A e stabiliamo di quale conica si tratta.
- Se si tratta di un'**ellisse** o un'**iperbole** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori di } A$$
  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica.

- Se si tratta di una **parabola** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $x^2 - 2py = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \text{ autovalore non nullo di } A$$

Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per λ si ottiene la forma canonica.

Equazioni della trasformazione. Passando da un'equazione $f(x, y) =$ alla corrispondente forma canonica $f(X, Y) = 0$ abbiamo effettuato un cambiamento di base corrispondente a una rotazione R (definita dagli autovettori di A) e una traslazione definita dal centro $C(x_0, y_0)$ o dal vertice $V(x_0, y_0)$ della conica. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove R è la matrice di rotazione, ovvero la matrice diagonalizzante ortogonale speciale associata a A.

Coniche degeneri.

Per determinare le equazioni delle rette che formano che le coniche degeneri si deve risolvere una equazione di secondo grado in cui si considera la x come variabile e la y come parametro, o viceversa.

- Se la conica è semplicemente degenere ($\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette distinte.
- Se la conica è doppiamente degenere ($\text{rg}(A') = 1$) si ottiene una sola retta.
- Se la conica è a centro ($\det(A) \neq 0$, quindi $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette incidenti nel centro.
- Se è una parabola degenere ($\det(A) = 0$, ma $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette parallele.

---

2. Soluzioni

Esercizio 13.1. *Stabilire il tipo di conica corrispondente alla seguente equazione. Se si tratta di una conica a centro determinare inoltre le coordinate del centro della conica.*

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

c) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

e) $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

g) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

h) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

i) $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$

l) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

m) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$. La matrice A' associata a tale equazione è

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta

$$[x, y, 1] \cdot A' \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Analogamente la matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta

$$[x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2h^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + k = 0$$

con

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k = -10$$

Per stabilire se si tratta di una conica degenere o nondegenere determiniamo il rango di A' comiciando a calcolare il determinante di A':

$$I_3 = \det(A') = -540 + 40 = -500 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}(A') = 3$$

Quindi si tratta di una conica *non degenere*.

Per stabilire se si tratta di un'ellisse, di una parabola o di una iperbole calcoliamo il determinante di A:

$$I_2 = \det(A) = 54 - 4 = 50 > 0$$

Quindi si tratta di un'*ellisse*.

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 9 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 9I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0, 0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y.

b) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$ e le matrici A' e A associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

L'equazione della conica risulta

$$[x, y, 1] \cdot A' \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ovvero

$$[x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2h^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + k = 0$$

con

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$I_3 = \det(A') = \frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere}$$
$$I_2 = \det(A) = 1 - 9 = -8 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 6I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ e le matrici A e A' associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad k = 2$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = -8 - 24 - 4 = -36 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -2 - 9 = -11 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & -2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 3I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -11 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{11} \\ y = -\frac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}\right)$$

d) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$ e le matrici A' e A associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = 0$$

Poichè A' ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$ e $\text{rg}(A') < 3$. Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0 \;\Rightarrow$$
$$\text{rg}(A') = 2 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{semplicemente degenere.}$$

Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro:

$$x^2 + (2y+3)x + (y^2+3y) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2y-3 \pm \sqrt{(2y+3)^2 - 4(y^2+3y)}}{2} = \frac{-2y-3\pm\sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-2y-3\pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = -y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y-3 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x + y = 0 \\ r_2 &: \ x + y + 3 = 0 \end{aligned}$$

e) Consideriamo l'equazione $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k = 1$$

Si ha

$$\begin{aligned} & I_3 = \det(A') = 5 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{rg}(A') = 3 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.} \\ & I_2 = \det(A) = 5 > 0 \ \Rightarrow \ \textit{ellisse.} \end{aligned}$$

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ C = (0,0)$$

f) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Si ha

$$\begin{aligned} & I_3 = \det(A') = -32 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.} \\ & I_2 = \det(A) = 25 - 9 = 16 > 0 \ \Rightarrow \ \textit{ellisse.} \end{aligned}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \ \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \ C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

g) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere}.$$
$$I_2 = \det(A) = -175 < 0 \ \Rightarrow \ \textit{iperbole}.$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \ \frac{24}{7}\right)$$

h) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto A' ha due righe uguali. Inoltre riducendo la matrice a gradini otteniamo:

$$\begin{array}{c} \\ II + 3I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A') = 1$ e si tratta di una conica *doppiamente degenere*, ovvero di due rette coincidenti.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa):

$$x^2 - 2(3y - 1) + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \ \Rightarrow$$
$$x_{1,2} = (3y - 1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1$$

Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$.

i) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad k = -2$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = -1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere}.$$
$$I_2 = \det(A) = -1 < 0 \ \Rightarrow \ \textit{iperbole}.$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-1, \ \frac{1}{2}\right)$$

l) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Si ha

$$\begin{aligned} &I_3 = \det(A') = -36 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.} \\ &I_2 = \det(A) = 0 \ \Rightarrow \ \textit{parabola.} \end{aligned}$$

m) Consideriamo l'equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{degenere.}$$

Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio:

$$\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = -2 - \frac{1}{4} \neq 0 \ \Rightarrow \\ &\operatorname{rg}(A') = 2 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{semplicemente degenere.} \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa):

$$x^2 + xy + (-2y^2 + 3y - 1) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y - 2)}{2} \\ &\Rightarrow \quad x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x - y + 1 = 0 \\ r_2 &: \ x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo quindi anche ricavare, come nei casi precedenti, risolvendo il sistema $A \cdot [x\ y]^T = -h$.

□

Esercizio 13.2. *Ridurre in forma canonica le coniche* f), g), l) *dell'esercizio precedente e le coniche*

n) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

p) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

Soluzione:

f) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Sappiamo già che si tratta di un'ellisse di centro $C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Sappiamo inoltre che gli autospazi della matrice A sono:

$$E(8) = \langle(-1,1)\rangle$$
$$E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

Per determinare la forma canonica dobbiamo effettuare due trasformazioni:
- **Rotazione**
- **Traslazione**

- **Rotazione.** Per determinare una matrice di cambiamento di base ortonormale e speciale, corrispondente a una rotazione, dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori, imponendo inoltre che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$.
Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (anche per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli e eventualmente cambiarli di segno in modo che P abbia determinante $+1$:

$$E(8) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \qquad E(2) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x+y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x'+y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x'+y') \end{cases}$$

In questo momento ci serve il secondo cambio di coordinate. Sostituendo infatti le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{5}{2}(x'+y')^2 + \frac{5}{2}(-x'+y')^2 - 6\cdot\frac{1}{2}(x'+y')(-x'+y') + \\ + 16(x'+y') + 38 = 0$$
$$8(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' + 16y' + 38 = 0$$

Abbiamo così effettuato la rotazione.
- **Traslazione** Si tratta ora di effettuare la traslazione. Possiamo procedere in due modi.
MODO 1: completamento del quadrato.

$$8\left((x')^2 + 2x'\right) + 2\left((y')^2 + 8y'\right) + 38 = 0$$
$$8\left((x')^2 + 2x' + 1\right) - 8\cdot 1 + 2\left((y')^2 + 8y' + 4^2\right) - 2\cdot 4^2 + 38 = 0$$
$$8\left(x'+1\right)^2 + 2\left(y'+4\right)^2 - 2 = 0$$

Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' + 4 \end{cases}$$

ottenendo l'equazione

$$8X^2 + 2Y^2 = 2 \Rightarrow 4X^2 + Y^2 = 1$$

Notiamo che il cambiamento di base da (x, y) a (X, Y) è

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y) + 1 \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) + 4 \end{cases}$$

MODO 2: utilizziamo il centro. Sappiamo che il centro ha coordinate

$$C : \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate (x', y') il centro ha coordinate:

$$C : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \right) = -1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \right) = -4 \end{cases}$$

Quindi le coordinate rispetto alle quali il centro si trova nell'origine degli assi sono

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = X - 1 \\ y' = Y - 4 \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione

$$8(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' + 16y' + 38 = 0$$

otteniamo, ovviamente come nel caso precedente, l'equazione canonica

$$4X^2 + Y^2 = 1$$

g) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. Sappiamo già che si tratta di una iperbole di centro $C\left(0, \dfrac{24}{7}\right)$. Inoltre gli autospazi di A sono

$$E(25) = \langle (1, 0) \rangle$$
$$E(-7) = \langle (0, 1) \rangle$$

- **Rotazione** Notiamo che la matrice A è già diagonale, quindi non dobbiamo effettuare questa operazione. In effetti la matrice P di cambiamento di base sarebbe la matrice identica.
- **Traslazione**
  Si tratta ora di effettuare la traslazione. Possiamo procedere in due modi.
  MODO 1: completamento del quadrato.

$$25x^2 - 7\left(y^2 - \frac{48}{7}y\right) + 7 = 0$$

$$25x^2 - 7\left[y^2 - \frac{48}{7}y + \left(\frac{24}{7}\right)^2\right] + 7 \cdot \left(\frac{24}{7}\right)^2 + 7 = 0$$

$$25x^2 - 7\left(y - \frac{24}{7}\right)^2 + \frac{625}{7} = 0$$

Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

ottenendo l'equazione

$$25X^2 - 7Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{7}{25}X^2 + \frac{49}{625}Y^2 = 1$$

Per ottenere la forma canonica dobbiamo in effetti effettuare la rotazione che scambi gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x'' = Y \\ y'' = -X \end{cases}$$

ottenendo

$$\frac{49}{625}(x'')^2 - \frac{7}{25}(y'')^2 = 1$$

MODO 2: utilizziamo il centro. Sappiamo che il centro ha coordinate

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

Non avendo effettuato il cambiamento di coordinate corrispondente alla rotazione possiamo immediatamente individuare le coordinate (X, Y) rispetto alle quali il centro si trova nell'origine degli assi:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \dfrac{24}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X \\ y = Y + \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione

$$25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$$

otteniamo, ovviamente come nel caso precedente, l'equazione canonica

$$-\frac{7}{25}X^2 + \frac{49}{625}Y^2 = 1$$

ovvero

$$\frac{49}{625}(x'')^2 - \frac{7}{25}(y'')^2 = 1$$

l) Consideriamo l'equazione $x^2+4xy+4y^2-6x+1 = 0$. Sappiamo già che si tratta di una parabola, ma in questo caso, non trattandosi di una conica a centro, non abbiamo determinato gli autospazi.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 5$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II - 2I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II + I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad \Rightarrow E(5) = \langle(1, 2)\rangle$$

Possiamo ora procedere come negli esercizi precedenti.

– **Rotazione** Per determinare una matrice di cambiamento di base ortonormale e speciale, corrispondente a una rotazione, dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori, imponendo inoltre che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$.
Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (anche per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli e eventualmente cambiarli di segno in modo che P abbia determinante $+1$:

$$E(0) = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle \qquad E(5) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle$$

La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') la nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x + 2y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-x' + 2y') \end{cases}$$

In questo momento ci serve il secondo cambio di coordinate. Sostituendo infatti le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{1}{5}(2x' + y')^2 + \frac{4}{5}(2x' + y')(-x' + 2y') + \frac{4}{5}(-x' + 2y')^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 1 = 0$$

$$5(y')^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0$$

Abbiamo così effettuato la rotazione.

– **Traslazione**
Si tratta ora di effettuare la traslazione. Non essendo una conica a centro dobbiamo procedere nel
MODO 1: completamento del quadrato e eliminazione del termine noto.

$$5\left[(y')^2 - \frac{6}{5\sqrt{5}}y'\right] - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 1 = 0$$

$$5\left[(y')^2 - \frac{6}{5\sqrt{5}}y' + \left(\frac{3}{5\sqrt{5}}\right)^2\right] - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 1 - \frac{9}{25} = 0$$

$$5\left[y' - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{25} = 0$$

$$5\left[y' - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}\left[x' - \frac{4\sqrt{5}}{75}\right] = 0$$

Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x' - \frac{4\sqrt{5}}{75} \\ Y = y' - \frac{3}{5\sqrt{5}} \end{cases}$$

ottenendo l'equazione

$$5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}X = 0 \Rightarrow Y^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}X = 0$$

Per ottenere la forma canonica dobbiamo in effetti effettuare la rotazione che scambi gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x'' = Y \\ y'' = -X \end{cases}$$

ottenendo

$$(x'')^2 + \frac{12}{5\sqrt{5}} y'' = 0$$

- Scriviamo la conica in forma normale:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$$

Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che

$$I_3 = \det(A') \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = 50 > 0 \;\Rightarrow\; \textit{ellisse.}$$

  - **Rotazione**
    Come prima cosa dobbiamo individuare un cambiamento di base ortogonale che trasformi A in matrice diagonale (rotazione). A tale scopo cerchiamo gli autovalori e autovettori di A per trovare una nuova base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Quindi

$$p_A(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 10$.
Calcoliamo lo spazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 10I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + 2I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(10) = \langle (2,1) \rangle$$

Calcoliamo lo spazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 5I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ 2II - I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 08 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(5) = \langle (1,-2) \rangle$$

Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (per il teorema spettrale). E' quindi suffinciente normalizzarli cambiandoli di segno in modo che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-x + 2y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x' + 2y') \end{cases}$$

Sostituendo ora le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{9}{5}(2x' - y')^2 + \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{6}{5}(x' + 2y')^2 - 10 = 0$$
$$10(x')^2 + 5(y')^2 - 10 = 0$$
$$2(x')^2 + (y')^2 - 2 = 0$$

Traslazione
Come si vede dal fatto che mancano i termini in x e y in questo caso non è necessario effettuare il secondo cambiamento di base corrispondente alla traslazione per ottenere la forma canonica. In effetti se ricerchiamo il centro otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{9II - 2I} \begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 0 & 50 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0)$$

La forma canonica della conica è quindi

$$(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - 1 = 0$$

- Consideriamo la conica $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che

$$I_3 = \det(A') \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -9 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

  - **Rotazione** Come prima cosa dobbiamo individuare un cambiamento di base ortogonale che trasformi A in matrice diagonale (rotazione). A tale scopo cerchiamo gli autovalori e autovettori di A per trovare una nuova base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Quindi

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$.
Calcoliamo lo spazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1) \rangle$$

Calcoliamo lo spazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, -1) \rangle$$

Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli:

$$E(4) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \qquad E(-2) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale speciale

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x' + y') \end{cases}$$

Sostituendo ora le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 + \frac{6}{2}(x' + y')(-x' + y') + \frac{1}{2}(-x' + y')^2 + \\ + \frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2(x')^2 + 4(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{2} = 0$$

– **Traslazione**
  Possiamo ora completare il quadrato:

$$-2\left((x')^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x'\right) + 4\left((y')^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}y'\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2\left[(x')^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2 \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \\ 4\left[(y')^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}y' + \left(\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2\right] - 4 \cdot \left(\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2\left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{32} = 0$$

  Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ Y = y + \dfrac{3}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

  ottenendo l'equazione

$$-2X^2 + 4Y^2 + \frac{9}{32} = 0$$

$$\frac{64}{9}X^2 - \frac{128}{9}Y^2 = 1$$

□

Esercizio 13.3. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$
(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$
(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica asociata alla conica.*
b) *Determinare la matrice di rotazione R (ortogonale speciale) tale che $R^TAR = D$, con D matrice diagonale.*
c) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
d) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$.

a) La matrice associata alla forma quadratica è
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Determiniamo gli autovalori e autovettori di A:
$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$
Quindi A ha due autovalori: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$
Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 10I$:
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+2I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x+2y=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(10) = \langle (2,1) \rangle$$
Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-5I$:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ 2II-I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x+y=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow E(5) = \langle (1,-2) \rangle$$
La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi
$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori concordi (ovvero $\det(A) > 0$), quindi si tratta di un'ellisse.

d) Per determinare il centro risolviamo il sistema
$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$
dove
$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$
ovvero il sistema associato alla matrice
$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2II \\ I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-9I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0,0)$$
Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y.
Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di A, quindi
$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$$
$$a_2 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -2$$

Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle (1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow E(-2) = \langle (1,-1) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori discordi (ovvero $\det(A) < 0$), quindi si tratta di un'iperbole.

d) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

dove

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow 2II \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 6I \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{16} \\ y = -\dfrac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16} \right)$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} + t \end{cases} \Rightarrow 4x - 4y - 1 = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} - t \end{cases} \Rightarrow 8x + 8y + 3 = 0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 8$$
$$\lambda_2 = 2$$

Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II - I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x - y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(8) = \langle(-1, 1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(2) = \langle(1, 1)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori concordi (ovvero $\det(A) > 0$), quindi si tratta di un'ellisse.

d) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 5II + 3I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 16 & -24\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Infine

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:
$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$
Quindi A ha due autovalori: $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = -7$.
Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -32 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$
Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:
$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle$$
E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in xy, ovvero A è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
La matrice di rotazione cercata è quindi la matrice identica
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
c) La matrice A ha due autovalori discordi (ovvero $\det(A) < 0$), quindi si tratta di un'iperbole.
d) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema
$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0,\ \frac{24}{7}\right)$$
Infine
$$a_1: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$
$$a_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.
a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
Inoltre
$$h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$
b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$
Quindi A ha due autovalori:
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 5$$
Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II - 2I} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II+I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x+y=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases} \Rightarrow E(5)=\langle(1,2)\rangle$$

La matrice R di cambiamento di base (rotazione) è quindi la matrice ortogonale speciale

$$R=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha un autovalore nullo (ovvero $\det(A)=0$), quindi si tratta di una parabola.

□

Esercizio 13.4. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x,y)=0$:*

(1) $9x^2+4xy+6y^2-10=0$

(2) $x^2+6xy+y^2+2x+y+\dfrac{1}{2}=0$

(3) $5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt2x+38=0$

(4) $25x^2-7y^2+48y+7=0$

(5) $x^2+4xy+4y^2-6x+1=0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2+4xy+6y^2=10$.

a) La matrice associata alla conica sono

$$A'=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3=\det(A')\neq 0$, quindi la conica è non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2=\det(A)=50>0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'ellisse}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}=(9-\lambda)(6-\lambda)-4=\lambda^2-15\lambda+50$$

Quindi A ha due autovalori concordi($\lambda_1=10,\ \lambda_2=5$), $I_2=10\cdot5>0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Per determinare il centro risolviamo il sistema

$$A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+h=0 \ \Rightarrow\ A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=-h$$

dove

$$h=\begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 9 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-9I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C=(0,0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y che indicano la traslazione.
Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di A. Dobbiamo quindi prima determinare gli autovettori: Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-10I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+2y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(10) = \langle (2,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-5I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,-2) \rangle$$

Infine:

$$a_1 : \begin{cases} x = 0+2t \\ y = 0+t \end{cases} \Rightarrow x-2y=0$$
$$a_2 : \begin{cases} x = 0+t \\ y = 0-2t \end{cases} \Rightarrow 2x+y=0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2+6xy+y^2+2x+y+\dfrac{1}{2}=0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2 = \det(A) = -80 < 0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'iperbole}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori di A. Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(4) = \langle (1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A+2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-2) = \langle(1,-1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{16}+t \\ y = -\frac{5}{16}+t \end{cases} \Rightarrow 4x-4y-1=0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{16}+t \\ y = -\frac{5}{16}-t \end{cases} \Rightarrow 8x+8y+3=0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt{2}x+38=0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k=38$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi ($\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$), $I_2 = det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II+3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare gli assi calcoliamo gli autospazi.
Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle(-1,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2}-t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2}+t \end{cases} \Rightarrow x+y+4\sqrt{2}=0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2}+t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2}+t \end{cases} \Rightarrow x-y+\sqrt{2}=0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2-7y^2+48y+7=0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0,\ \frac{24}{7}\right)$$

Per determinare gli assi cerchiamo gli autovettori di A.
Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -32 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle$$

E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in xy, ovvero A è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
Infine gli assi sono le rette per il centro parallele agli autovettori (in questo caso parallele agli assi cartesiani):

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Poiché ha un autovalore nullo, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{II - 2I}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.
Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ottenuta ha soluzioni in $\mathbf{C}$, ma non in $\mathbf{R}$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 25}}{25} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{25}$$

A noi però interessa in realtà il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento DE e

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{-16}}{25} + \frac{3 - \sqrt{-16}}{25}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{-16} + 3 - \sqrt{-16}}{25} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Quindi indipendentemente dal Δ, il valore di x_M viene comunque reale (e corretto).
In alternativa potevamo anche utilizzare le relazioni tra le radici e i coefficienti di una equazione di secondo grado. Infatti data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sappiamo che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Quindi data l'equazione

$$25x^2 - 6x + 1 = 0$$

otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{6}{25} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

$\square$

Esercizio 13.5. *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x,y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$ e le matrici A' e A associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = 0$$

Poichè A' ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$, quindi si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi si tratta conica degenere non a centro. Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro:

$$x^2 + (2y+3)x + (y^2 + 3y) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2y - 3 \pm \sqrt{(2y+3)^2 - 4(y^2+3y)}}{2} = \frac{-2y - 3 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-2y-3\pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = -y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y-3 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x + y = 0 \\ r_2 &: \ x + y + 3 = 0 \end{aligned}$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto A' ha due righe uguali, quindi si tratta di una conica degenere.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa):

$$\begin{aligned} & x^2 - 2(3y-1)x + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \ \Rightarrow \\ & x_{1,2} = (3y-1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1 \end{aligned}$$

Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$ (conica doppiamente degenere, infatti $\text{rg}(A') = 1$).

(3) Consideriamo l'equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = 0$ si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) \neq 0$ quindi si tratta di una conica degenere a centro.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa):

$$x^2 + xy + (-2y^2 + 3y - 1) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y-2)}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x - y + 1 = 0 \\ r_2 &: \ x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo anche ricavare, come nei casi di coniche a centro non degeneri, risolvendo il sistema $A \cdot [x\ y]^T = -h$.

□

Esercizio 13.6. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 8\sqrt{2}(-40\sqrt{2}) + 38(25-9) = -640 + 608 = -32$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (5-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 2y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$8x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) = -25 \cdot 625 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.

- $p_A(\lambda) = (25-\lambda)(-7-\lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$, disconcordi, e si tratta di un'iperbole.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 - 7y^2 + t = 0$$
a cui è associata la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$
Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:
$$-25 \cdot 625 = -25 \cdot 7t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{625}{7}$$
Infine possiamo ricavare la forma canonica:
$$25x^2 - 7y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{25}x^2 - \frac{49}{625}y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{25}x^2 + \frac{49}{625}y^2 - 1 = 0$$
Per ottenere la forma canonica in questo caso dobbiamo effettuare la rotazione che manda x in y e y in $-x$::
$$\frac{49}{625}x^2 - \frac{7}{25}y^2 - 1 = 0$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. La matrice associata è
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = -3 \cdot 12 = -36 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, e si tratta di una parabola.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo
$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$
a cui è associata la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$
Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:
$$-36 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{36}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$
Infine possiamo ricavare la forma canonica:
$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}y = 0$$

□

Esercizio 13.7. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Poiché $I_3 = \det(A') \neq 0$ è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, $I_2 > 0$ e si tratta di un'ellisse la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine la forma canonica cercata è:

$$8X^2 + 2Y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \; -\frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autovettori di A. Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; -x - y = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(8) = \langle (-1, 1) \rangle = \langle (1, -1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; x - y = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(2) = \langle (1, 1) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; R^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove (x_0, y_0) è il centro C della conica. Quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) - \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x, y) a (X, Y), nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.
Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

$I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25 - \lambda & 0 \\ 0 & -7 - \lambda \end{bmatrix} = (25 - \lambda)(-7 - \lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi: $\lambda = 25$ e $\lambda = -7$, $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \dfrac{625}{7}$, per cui la forma canonica cercata è:

$$-7X^2 + 25Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{49}{625}X^2 - \frac{7}{25}Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \frac{24}{7}\right)$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle(0, 1)\rangle = \langle(0, -1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle(1, 0)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in effetti abbiamo solo effettuato la rotazione che scambia x e y in quando la conica di partenza non presentava il termine xy, quindi era già ruotata con gli assi paralleli agli assi cartesiani.

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -X + \frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \frac{24}{7} \\ x \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x, y) a (X, Y) nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

c) Consideriamo l'equazione $x^2+4xy+4y^2-6x+1=0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k=1$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \lambda(\lambda-5)$$

Quindi A ha due autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

Calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II+I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,2) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II-2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sfruttando l'invariante I_3 per cui $\det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ Infine possiamo la forma canonica cercata è:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} \right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}} y = 0$$

Dagli autovettori ricaviamo inoltre la matrice ortogonale speciale R di cambiamento di base:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per determinare la traslazione dobbiamo trovare il vertice, dato dal punto di intersezione tra l'asse e la parabola. Sappiamo che l'asse è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo e che $E(0) = (-2,1)$. Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1,2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In raltà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2+4xy+4y^2-6x+1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2+8x^2+16x^2-6x+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2-6x+1=0 \end{cases}$$

Dalle relazione tra i coefficienti e le soluzioni di una equazione di secondo grado otteniamo

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

Infine le trasformazioni cercate sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{17}{75} \\ y - \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x + 2y - \frac{3}{5}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2x + y + \frac{4}{15}\right) \end{bmatrix}$$

In realtà con la parabola ci può essere un problema: effettuando il cambio di variabile indicato non otteniamo l'equazione canonica determinata. Questo è dovuto al fatto che in realtà la rotazione corretta è:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

data dalla composizione della rotazione R precedentemente trovata con la rotazione

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che manda X in $-X$ e Y in $-Y$. Infatti la scelta della matrice di rotazione (ortogonale speciale) è sempre a meno del segno.

La trasformazione corretta che permette di passare dall'equazione iniziale alla forma canonica è:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 13.8. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

(1) *Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
(2) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
(3) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -k \end{bmatrix}$$

(1) Per stabilire se la conica è degenere calcoliamo il determinante di A':

$$I_3 = \det(A') = -\left(-k - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = k + \frac{3}{2}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è degenere se $k = -\dfrac{3}{2}$.

(2) Posto $k = 0$ calcoliamo il determinante della sottomatrice A

$$I_2 = \det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

(3) Per determinare il centro di $\mathcal{C}$ risolviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare gli assi dobbiamo inoltre individuare la rotazione da effettuare per passare alla forma canonica. Calcoliamo quindi gli autospazi di A.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Quindi A ha due autovalori distinti: $\lambda = \pm 1$. Inoltre

$$E(1) = \langle\ (1,1)\ \rangle$$
$$E(-1) = \langle\ (-1,1)\ \rangle$$

I due autovettori indicano le direzioni degli assi della conica, quindi gli assi sono le due rette passanti per il centro C della conica e parallele a tali vettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ricavando le equazioni in forma cartesiana otteniamo:

$$a_1 :\ x - y = 1$$
$$a_2 :\ x + y = 2$$

□

Esercizio 13.9. *Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ :\ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Soluzione:

Consideriamo le matrici associate a $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 2k & k-2 & 1 \\ k-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2k & k-2 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = k^2 + 4k + 8 \neq 0$ per ogni valore di k, quindi non esistono coniche degeneri nella famiglia.
b) $I_2 = \det(A) = -(k+2)^2$, quindi
   - Se $k = -2$, $I_2 = \det(A) = 0$ e $\mathcal{C}_{-2}$ è una parabola.
   - Se $k \neq -2$, $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}_k$ è una iperbole.

c) Calcoliamo il centro C_k delle coniche $\mathcal{C}_k$ nel caso $k \neq -2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2k & k-2 & -1 \\ k-2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Scambiando prima e seconda riga e prima e seconda colonna otteniamo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & k-2 & 0 \\ k-2 & 2k & -1 \end{array}\right] \Rightarrow_{4II+(k-2)I} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & k-2 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4y+(k-2)x=0 \\ (k+2)^2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{(k+2)^2} \\ y=-\dfrac{k-2}{(k+2)^2} \end{cases}$$

□

Esercizio 13.10. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \quad : \quad x^2+(k-2)xy+y^2-4=0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.*

Soluzione:

Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} & 0 \\ \frac{k-2}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$\det(A') = -4\left(1-\left(\frac{k-2}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A')=0$ se $\left(\dfrac{k-2}{2}\right)^2=1$, cioè

$$\frac{k-2}{2}=1 \Rightarrow k-2=2 \Rightarrow k_1=4$$

$$\frac{k-2}{2}=-1 \Rightarrow k-2=-2 \Rightarrow k_2=0$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq 4$ e $k \neq 0$. Inoltre:

$$\det(A) = 1-\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4k}{4}$$

Quindi
- Se $0<k<4$, si ha $\det(A)>0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k<0$ o $k>4$, si ha $\det(A)<0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k=0$ o $k=4$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k=0$ o $k=4$, inoltre:
- Se $k=0$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2-2xy+y^2-4=0$. Anche senza risolvere l'equazione con l'uso della formula otteniamo:

$$(x-y)^2=4 \Rightarrow x-y=\pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1: \ x-y=2, \qquad r_2: \ x-y=-2$$

- Se $k=4$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2+2xy+y^2-4=0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2=4 \Rightarrow x+y=\pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1: \ x+y=2, \qquad r_2: \ x+y=-2$$

c) Calcoliamo il centro delle coniche limitandoci a considerare $k \neq 0, 4$, in quanto in questi casi abbiamo già visto che si tratta di una coppia di rette parallele (e quindi prive di centro). Notiamo inoltre che nell'equazione non compaiono i termini lineari, quindi il centro si trova già nell'origine: $C = (0, 0)$.

Per trovare gli assi delle coniche calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Quindi $p_A(\lambda) = 0$ se $1 - \lambda = \pm\dfrac{k-1}{2}$ e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-k+4}{2}$$

Calcoliamo l'autospazio $E\left(\frac{k}{2}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{2-k}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II+I} \begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k \neq 2$ si ha $E\left(\frac{k}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$. Tratteremo il caso $k = 2$ successivamente separatamente.

Analogamente calcoliamo $E\left(\frac{-k+4}{2}\right)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-I} \begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, sempre supponendo $k \neq 2$, si ha $E\left(\frac{-k+4}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$.

Infine per $k \neq 0, 4, 2$ gli assi delle coniche sono le rette

$$a_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow x - y = 0$$

Notiamo che tali rette sono assi di simmetria anche per le coppie di rette che costituiscono la conica nei casi degeneri.

Infine se $k = 2$ la conica è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ centrata nell'origine che ha come assi di simmetria qualsiasi retta per l'origine. In particolare quindi anche a_1 e a_2 sono suoi assi di simmetria.

□

Esercizio 13.11. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \quad : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Soluzione:

Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$I_3 = \det(A') = -4\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A') = 0$ se $\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 1$, cioè

$$\frac{k}{2} = 1 \;\Rightarrow\; k = 2$$
$$\frac{k}{2} = -1 \;\Rightarrow\; k = -2$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq \pm 2$. Inoltre:

$$I_2 = \det(A) = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4}{4}$$

Quindi
- Se $-2 < k < 2$, si ha $I_2 = \det(A) > 0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k < -2$ o $k > 2$, si ha $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k = \pm 2$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k = \pm 2$, inoltre:
- Se $k = -2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$. Anche senza utilizzare la formula per risolvere l'equazione otteniamo:

$$(x-y)^2 = 4 \;\Rightarrow\; x - y = \pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \; x - y = 2, \qquad r_2 : \; x - y = -2$$

- Se $k = 2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2 = 4 \;\Rightarrow\; x + y = \pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \; x + y = 2, \qquad r_2 : \; x + y = -2$$

c) Abbiamo visto che $\mathcal{C}$ è un'ellisse se $-2 < k < 2$. Inoltre se per esempio $x = 0$ dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $y = \pm 2$, quindi i punti $A(0, 2)$ e $B(0, -2)$ appartengono ad ogni conica. Se una conica (non degenere) contiene un punto reale è necessariamente tutta reale. Quindi in particolare tutte le ellissi sono reali.

$\square$

Esercizio 13.12. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \;:\; (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = \frac{1}{3}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2t-1 & 3t & 1 \\ 3t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = -7t^2 - t$, quindi:
- Se $t < -\frac{1}{7}$ o $t > 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
- Se $-\frac{1}{7} < t < 0$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
- Se $t = -\frac{1}{7}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
- Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $-x^2 + 2x = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette parallele (infatti $\det(A) = 0$): $x = 0$ e $x = 2$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t = \dfrac{1}{3}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{10}{9}$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + k = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = \dfrac{1}{3}$ otteniamo $-\dfrac{10}{9}k = -\dfrac{1}{3}$, cioè $k = \dfrac{3}{10}$. Quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ è

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow -\frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 + \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

Effettuando infine la rotazione che manda x in y e y in $-x$ otteniamo la forma canonica

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{3}} : \quad \frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 - \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.13. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = t^2 + 2t - 1$, quindi:
   - Se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
   - Se $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ con $t \neq 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
   - Se $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
   - Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $2xy + 2y^2 - 2y = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti (infatti $\det(A) \neq 0$): $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t = -1$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = \pm\sqrt{2}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + k = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = 1$ otteniamo $-2k = 1$, quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{-1}$ è

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{-1} : \quad 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.14. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = -1, 1, 3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = N(M - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$E(-1) = N(M + I) : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(-1) = \langle (0,-1,1) \rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) $\det(A) = -3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda = 1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + t = 0$ a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

□

Esercizio 13.15. *Si consideri la conica di equazione*

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi l'eventuale centro della conica.*
c) *Si trovino gli assi di simmetria e la forma canonica della conica.*

Soluzione:

a) La matrice associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det(A) = -5 \neq 0$$

e si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

quindi si tratta di una conica a centro. Per stabilire se si tratta di un'ellisse o un'iperbole calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1, 6$. Poiché gli autovalori sono concordi si tratta di un'ellisse.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 2 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-I} \begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(-\frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

c) Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(1) = N(A - I): \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(-2, 1)\rangle$$

$$E(6) = N(A - 6I): \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle(1, 2)\rangle$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro, di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{7}{6} - 2t \\ y = \frac{2}{3} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{1}{6}$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{7}{6} + t \\ y = \frac{2}{3} + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x - y = -3$$

Inoltre si tratta di un'ellisse con autovalori $\lambda = 1, 6$. La forma canonica cercata è quindi del tipo $x^2 + 6y^2 + t = 0$, a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{5}{6}$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + 6y^2 - \frac{5}{6} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6}{5}x^2 + \frac{36}{5}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.16. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}: \ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

La matrice A' ha determinante non nullo, quindi si tratta di una conica non degenere; inoltre $\det(A) = -64 < 0$, quindi si tratta di un'iperbole.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 5 \\ 7 & -5 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow_{3II-7I} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 5 \\ 0 & -64 & -56 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro, di direzione parallela ai punti all'infinito della conica. L'equazione della conica in coordinate omogenee è $3X^2 + 14XY - 5Y^2 - 10XZ + 14YZ = 0$. Ponendo $Z = 0$ otteniamo l'equazione $3X^2 + 14XY - 5Y^2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\frac{X}{Y} = \frac{-7 \pm 8}{3}$$

cioè le due rette $x + 5y = 0$ e $3x - y = 0$. Infine gli asintoti (passanti per il centro) sono le rette

$$a_1: \ x + 5y - 4 = 0 \qquad a_2: \ 3x - y + 2 = 0$$

□

Esercizio 13.17. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') = -4 \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi è una parabola.

b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. La forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-4 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}} y = 0$$

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{II-2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.

Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad D = (0,0), \quad E = \left(-\frac{8}{25}, -\frac{16}{25}\right)$$

Infine il punto medio M del segmento DE è $M = \left(-\dfrac{4}{25}, -\dfrac{8}{25}\right)$.

L'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{25} - 2t \\ y = -\frac{8}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = -\frac{4}{5} \Rightarrow 5x + 10y = -4$$

□

Esercizio 13.18. *Sia* $\mathbf{C}$ *la conica di equazione*

$$\mathbf{C} \ : \ 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 5x + 10y = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di* $\mathbf{C}$.
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di* $\mathbf{C}$.

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 9 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(\tilde{A}) = -\dfrac{1025}{4}$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (6 - \lambda)(9 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2+by^2\pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(\tilde{A})$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(\tilde{A}) = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-\frac{1025}{4} = 50t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{41}{8}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$10x^2 + 5y^2 - \frac{41}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{41}x^2 + \frac{40}{41}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta di un ellisse reale.

b) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & | & \frac{5}{2} \\ 2 & 9 & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & | & \frac{5}{2} \\ 0 & 25 & | & -\frac{35}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{20} \\ y = -\frac{7}{10} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{13}{20}, -\frac{7}{10}\right)$$

Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(10) = N(A - 10I) : \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$E(5) = N(A - 5I) : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$$

Infine gli assi hanno la direzione degli autovettori e passano per il centro C:

$$a_1: \ 2x - y = 2 \qquad\qquad a_2: \ x + 2y = -\frac{3}{4}$$

$\square$

CAPITOLO 14

Quadriche

Alcuni esercizi di questo capitolo sono ripetuti in quanto risolti in maniera differente.

Esercizio 14.1. *Stabilire il tipo di quadrica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una quadrica a centro determinare inoltre le coordinate del centro.*

a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$

b) $xy + xz - yz - x = 0$

c) $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$

f) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$

g) $4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2yz + 8x + 8y + 8z + 1 = 0$

h) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xz + 4y - 4z = 0$

i) $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$

l) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Esercizio 14.2. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche. Se si tratta di una quadrica a centro determinarne il centro e gli assi di simmetria.*

a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$
b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$
d) $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$

Esercizio 14.3. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

a) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$
b) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Esercizio 14.4. *Determinare la forma canonica della seguente quadrica, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$$

Esercizio 14.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \quad 3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 4z = 0.$$

a) *Stabilire se $\mathcal{Q}$ é degenere o meno, e di quale tipo di quadrica si tratti. Se é una quadrica a centro determinare le coordinate del centro.*
a) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{Q}$ e determinare coordinate omogenee dei punti all'infinito degli assi di simmetria.*

Esercizio 14.6. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ xz - y^2 - 4z^2 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*

c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Esercizio 14.7. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ x^2 - 2y^2 + yz = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*
c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Esercizio 14.8. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ x^2 + z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z + 2y + 4 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica.*
b) *Studiare la conica che si ottiene intersecando la quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ (tipo, forma canonica,...).*

Esercizio 14.9. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ (1 + 2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Esercizio 14.10. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ x^2 + (1 + 2k)y^2 + z^2 + 2kxz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni quadrica $f(x, y, z) = 0$, possiamo associare due matrici quadrate: la matrice $A \in M_{3\times 3}$ relativa alla forma quadratica associata alla quadrica, e la matrice $A' \in M_{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy & 1/2 \text{ coeff. di } xz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 & 1/2 \text{ coeff. di } yz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xz & 1/2 \text{ coeff. di } yz & \text{coeff. di } z^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \\ 1/2 \text{ coeff. della } z \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della quadrica è

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] \cdot A' \cdot [x, y, z, 1]^T = 0$$

Invarianti.

Il polinomio caratteristico di A è così formato

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

con

$$I_1 = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$
$$I_3 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad I_4 = \det(A')$$

$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ sono invarianti. Mentre $I_1,\ I_3,\ I_4$ possono essere calcolati direttamente da A e A', I_2 può essere calcolato solo da $p_A(\lambda)$.

Classificazione: quadriche non degeneri

Una quadrica è **non degenere** se $\det(A') \neq 0$, ovvero $\text{rg}(A') = 4$. Inoltre è

- **Ellissoide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A concordi (oppure $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 > 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: ELLISSOIDE IMMAGINARIO: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$
  - $I_4 = \det(A') < 0$: ELLISSOIDE REALE: $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$

- **Iperboloide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A discordi (oppure $I_3 \neq 0$ e $I_2 \leq 0$ o $I_1 I_3 \leq 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: IPERBOLOIDE IPERBOLICO(a 1 falda): $ax^2 + by^2 - cz^2 - 1 = 0$.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: IPERBOLOIDE ELLITTICO (a 2 falde): $ax^2 - by^2 - cz^2 - 1 = 0$.

- **Paraboloide**: $\text{rg}(A) \leq 2$, cioè $\det(A) = 0$, cioè un autovalore nullo (oppure $I_3 = 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: PARABOLOIDE IPERBOLICO: $ax^2 - by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide iperbolico se i due autovalori non nulli di A sono discordi.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: PARABOLODE ELLITTICO: $ax^2 + by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide ellittico se i due autovalori non nulli di A sono concordi.

Classificazione: quadriche degeneri

Una quadrica è **degenere** se $\det(A') = 0$. Inoltre:

- Se $\text{rg}(A') = 3$, allora è degenere **irriducibile**.
- Se $\text{rg}(A') \leq 2$, allora è degenere **riducibile**.

In particolare:

- **Cono** (quindi irriducibile): $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_4 = 0$ e $I_3 \neq 0$). Inoltre:
  - Auotovalori di A concordi (oppure $I_2 > 0$): cono a un unico punto reale $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$,
  - Auotovalori di A discordi (oppure $I_2 \leq 0$): cono reale $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$

- **Cilindro** (quindi irriducibile): Se $\text{rg}(A) = 2$, ma $\text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_3 = 0$ e $\text{rg}(A') = 3$). Inoltre:
  - $I_2 > 0$: cilindro ellittico: $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$,
  - $I_2 < 0$: cilindro iperbolico: $ax^2 - by^2 - 1 = 0$,
  - $I_2 = 0$: Cilindro parabolico: $x^2 - 2py = 0$.

Se $\text{rg}(A') \leq 2$ allora è una quadrica degenere **riducibile**. Inoltre

- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 2$: due piani incidenti (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 1$: due piani distinti e paralleli (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 1$: un piano doppio.

Centro e assi

- Ellissoide e iperboloide sono quadriche a centro. Come per le coniche il **centro** si trova risolvendo il sistema $A| - h$.

- Come per le coniche gli **assi** di una quadrica non degenere a centro sono le rette passanti per il centro e di direzione corrispondente agli autovettori della matrice A della quadrica.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T AR = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forme canonica con equazioni della trasformazione delle quadriche **non degeneri**:

Per ottenere la forma canonica si procede esattamente come per le coniche:

(1) **Rotazione**: utilizzando una matrice ortonormale R di rotazione,
(2) **Traslazioine**.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una quadrica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $\det(A')$ per verificare che la quadrica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ di A e stabiliamo di quale quadrica si tratta.
- Consideriamo i diversi casi:
  - Se si tratta di un **ellissoide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è reale o immaginaria.
  - Se si tratta di un **iperboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - cz^2 - 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è un iperboloide a una o a due falde.
  - Se si tratta di un **paraboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - z = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2tz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori non nulli di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t (negativo). Dividendo infine per t si ottiene la forma canonica.

Quadriche degeneri riducibili.
Se $\text{rg}(A') \leq 2$ si possono trovare i piani risolvendo una equazione di secondo grado in una incognita (le altre due incognite vengono considerate parametri), oppure in generale scomponendo il polinomio $f(x, y, z)$ nel prodotto di due polinomi di primo grado.

---

2. Soluzioni

Esercizio 14.1. *Stabilire il tipo di quadrica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una quadrica a centro determinare inoltre le coordinate del centro.*

a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$

b) $xy + xz - yz - x = 0$

c) $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$

f) $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$

g) $4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2yz + 8x + 8y + 8z + 1 = 0$

h) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xz + 4y - 4z = 0$

i) $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$

l) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cominciamo a stabilire se è degenere calcolando il determinante di A'. Poiché ci interessa solo stabilire se il determinante si annulla (ovvero se $\text{rg}(A') < 4$ possiamo in alternativa ridurre la matrice (parzialmente) a gradini per semplificare i conti. Inoltre la riduzione a gradini è utile quando successivamente calcoliamo il rango di A. Per tale ragione è conveniente non scambiare le righe di A' o almeno non scambiare la IV riga con le precedenti, in modo da tenere la matrice A, formata dalle prime tre righe, distinta. Inoltre il metodo introdotto nelle prime lezioni, che consiste nell'utilizzare solo le righe precedenti una riga per modificare quest'ultima, ci garantisce che la matrice A non sia modificata con l'uso della IV riga.

$$\begin{array}{c} \\ 2II + I \\ \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rg}(A') = 3 \;\Rightarrow\; \det(A') = 0 \;\Rightarrow\; \text{quadrica degenere}$$

In particolare $\text{rg}(A') = 3$ quindi si tratta o di un cono o di un cilindro.
Dalla riduzione si nota che

$$\text{rg}(A) = 2 \;\Rightarrow\; \text{cilindro (non parabolico)}.$$

Per stabilire il tipo di cilindro dobbiamo calcolare I_2:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \;\Rightarrow\; I_1 = 5,\; I_2 = 6,\; I_3 = 0$$

Poichè $I_3 = 0$ si tratta in effetti di un cilindro; inoltre $I_2 > 0$ quindi è un cilindro ellittico.

---

b) Consideriamo l'equazione $xy + xz - yz - x = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso è immediato calcolare il determinante sviluppando rispetto all'ultima riga:

$$\det(A') = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{quadrica non degenere}$$

Inoltre

$$\det(A) = -\frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \;\Rightarrow\; \text{ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda\right) \\ &= -\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(2\lambda^2 + \lambda - 1\right) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -1 \quad \Rightarrow \text{discordi} \quad \Rightarrow \text{iperboloide}$$

Inotre $\det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; I_1 = 0,\; I_2 = -\frac{3}{4},\; I_3 = -\frac{1}{4},.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 < 0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2III \\ 2II \\ 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

c) Consideriamo l'equazione $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x+4y+8z+2=0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ 2III-I \\ 4IV-3I \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+4II \\ IV-8II \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A')=4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

$\text{rg}(A)=2 \Rightarrow$ paraboloide

Inoltre

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-4\right]-4(2-\lambda) \\ &= -\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda = -\lambda(\lambda^2-9\lambda+18) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori (oltre a $\lambda_1=0$) sono

$$\lambda_2=3, \quad \lambda_3=6 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ paraboloide ellittico}$$

---

d) Consideriamo l'equazione $5x^2-4y^2-11z^2-24yz-10x-15=0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -11 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' riducendo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 1/4II \\ III-3II \\ IV+I \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rg}(A')=4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

Inoltre

$$\text{rg}(A)=3 \Rightarrow \text{ ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (5-\lambda)\left[(-4-\lambda)(-11-\lambda)-144\right] \\ &= (5-\lambda)\left[\lambda^2-15\lambda-100\right] \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1=\lambda_2=5, \quad \lambda_3=-20 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda)=-\lambda^3+20\lambda^2+25\lambda-500 \Rightarrow I_1=20,\ I_2=-25,\ I_3=-500.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2<0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4=\det(A')>0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & \vert & 5 \\ 0 & -4 & -12 & \vert & 0 \\ 0 & -12 & -11 & \vert & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1/4II \\ III-3II \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & \vert & 5 \\ 0 & -1 & -3 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 25 & \vert & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C\,(1,\ 0,\ 0)$$

Notiamo che potevamo considerare direttamente la matrice ridotta a gradini, pur di cambiare il segno ai termini della colonna dei termini noti.

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

e) Consideriamo l'equazione $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' riducendo la matrice a gradini:

$$\begin{array}{r} \\ 1/2III \\ III \\ IV+3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-3II \\ IV-4II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\text{rg}(A') = 4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

$\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow$ ellissoide o iperboloide.

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda - 4\right]$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

Inoltre $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 \ \Rightarrow\ I_1 = 4,\ I_2 = -1,\ I_3 = -4.$$

Poichè $I_3 \neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2 < 0$, quindi è un iperboloide. Infine $I_4 = \det(A') > 0$, quindi è un iperboloide iperbolico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vert & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow C\,(3,\ 0,\ -2)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

f) Consideriamo l'equazione $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{r}III\\ \\ I\\ 2IV-3III\end{array}\begin{bmatrix}-2&0&-1&1\\2&1&0&2\\0&2&-2&-3\\0&4&5&13\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}\\ II+I\\ \\ IV-2III\end{array}\begin{bmatrix}-2&0&-1&1\\0&1&-1&3\\0&2&-2&-3\\0&0&9&19\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}\\ \\ III-2II\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}-2&0&-1&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&-9\\0&0&9&19\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rg}(A')=4 \Rightarrow$ quadrica non degenere, e $\text{rg}(A)=2 \Rightarrow$ paraboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda)=-\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda)-2\cdot 2(-1-\lambda)-2\cdot 2(1-\lambda)=-\lambda(-1+\lambda^2)+8\lambda=-\lambda(\lambda^2-9)$$

Quindi gli autovalori (oltre a $\lambda_1=0$) sono

$$\lambda_2=3,\quad \lambda_3=-3 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ paraboloide iperbolico}$$

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda)=-\lambda^3+9\lambda \ \Rightarrow\ I_1=0,\ I_2=9,\ I_3=0.$$

Poichè $I_3=0$ è un paraboloide; inoltre $I_4=\det(A')>0$, quindi è un paraboloide iperbolico.

---

g) Consideriamo l'equazione $4x^2+5y^2+5z^2-2yz+8x+8y+8z+1=0$ e la matrice A' associata:

$$A'=\begin{bmatrix}4&0&0&4\\0&5&-1&4\\0&-1&5&4\\4&4&4&1\end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{r}1/4I\\ \\ 5III+II\\ IV-I\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&5&-1&4\\0&0&24&24\\0&4&4&-3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}\\ \\ \\ 5IV-4II\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&5&-1&4\\0&0&24&24\\0&0&24&-31\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{r}\\ \\ 1/24III\\ IV-III\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&5&-1&4\\0&0&1&1\\0&0&0&-55\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$\text{rg}(A')=4 \Rightarrow$ quadrica non degenere, e $\text{rg}(A)=3 \Rightarrow$ ellissoide o iperboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda)=(4-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1=\lambda_2=4,\quad \lambda_3=6 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide}$$

Inoltre $I_1=\det(A')<0$, quindi è un ellissoide reale.

In alternativa potevamo usare gli invarianti:

$$p_A(\lambda)=-\lambda^3+14\lambda^2-64\lambda+96 \ \Rightarrow\ I_1=14,\ I_2=64,\ I_3=96.$$

Poichè $I_3\neq 0$ è una quadrica a centro; inoltre $I_2>0$, quindi è un ellissoide. Infine $I_4=\det(A')<0$, quindi è un ellissoide reale.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax=-h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&5&-1&-4\\0&0&1&-1\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow C\,(-1,\ -1,\ -1)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

---

h) Consideriamo l'equazione $x^2+2y^2-z^2-2xz+4y-4z=0$ e la matrice A' associata:

$$A'=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&2&0&2\\-1&0&-1&-2\\0&2&-2&0\end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III+I \\ IV-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A') = 3 \Rightarrow$ quadrica degenere, $\text{erg}(A) = 3 \Rightarrow$ cono

Anche il cono è una conica a centro, quindi risolviamo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ -1 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -1, -1)$$

---

i) Consideriamo l'equazione $-x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-I \\ IV-2III \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A') = 2 \Rightarrow$ quadrica degenere

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 2 \Rightarrow$ due piani incidenti

Infatti:

$$\begin{aligned} & -x^2 + y^2 - 2xz + 2yz - 4x + 4y = 0 \\ & x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 4x - 4y = 0 \\ & (x - y)(x + y) + 2z(x - y) + 4(x - y) = 0 \\ & (x - y)(x + y + 2z + 4) = 0 \end{aligned}$$

Quindi la quadrica corrisponde alla coppia di piani

$$x - y = 0, \qquad\qquad x + y + 2z + 4 = 0$$

---

l) Consideriamo l'equazione $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A' e A riducendo A' a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3III-II \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/4III \\ 2IV+III \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\text{rg}(A') = 4 \Rightarrow$ quadrica non degenere

$\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow$ ellissoide o iperboloide

Inoltre

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide}$$

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$ e considerando direttamente la matrice ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

Anche se non è richiesto dall'esercizio notiamo che gli assi della quadrica sono le rette per C di direzione parallela agli autovettori di A.

□

Esercizio 14.2. *Determinare la forma canonica delle seguente quadriche. Se si tratta di una quadrica a centro determinarne il centro e gli assi di simmetria.*

a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$
b) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$
d) $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo la quadrica $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = -\dfrac{1}{2} \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.
– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:

$$p_A(\lambda) = \lambda\,(2-\lambda)(\lambda-2)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2$, doppio, e $\lambda = 0$. Poiché A ha un autovalore nullo si tratta di un paraboloide; inoltre gli autovalori non nulli sono concordi, quindi si tratta di un paraboloide ellittico.
– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 - z = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2tz = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2tz = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-4t^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}y^2 - z = 0$$

b) Consideriamo la quadrica $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 6xz - 8 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = -8 \cdot 128 \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.

– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:
$$p_A(\lambda) = (8-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$$
Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 8$, doppio, e $\lambda = 2$. Poiché A ha 3 autovalori concordi si tratta di un ellissoide. Per stabilire se è reale dobbiamo trovare la forma canonica.

– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 8y^2 + 2z^2 + t = 0$$
a cui è associata la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$
Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:
$$64 \cdot 2t = -8 \cdot 128 \quad \Rightarrow \quad t = -8$$
Infine possiamo ricavare la forma canonica:
$$8x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 1 = 0$$
Si tratta quindi di un ellissoide reale.

Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.
Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:
$$\begin{cases} 5x + 3z = 0 \\ 8y = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow C(0,0,0)$$
Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:
$$E(8) = N(A - 8I): \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad E(8) = \langle (1,0,1), \ (0,1,0) \rangle$$
$$E(2) = N(A - 2I): \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad E(2) = \langle (1,0,-1) \rangle$$
Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:
$$a_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad a_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_3: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

c) Consideriamo la quadrica $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$ le cui matrici associate sono:
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = 12 \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.
– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione. Notiamo che A è diagonale, quindi non è necessario effettuare la rotazione. Inoltre gli autovalori di A sono gli elementi della diagonale: $\lambda = 1$, doppio, e $\lambda = -2$. Poiché A ha autovalori disconcordi si tratta di un iperboloide. Per stabilire se è a una o a due falde dobbiamo ricavare la forma canonica.

– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-2t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = -6$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{3}z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide iperbolico, o a una falda.
Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.
Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; C(2, 0, 0)$$

Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:

$$E(1) = N(A - I) : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -3z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(1) = \langle (1,0,0), \; (0,1,0) \rangle$$

$$E(-2) = N(A + 2I) : \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(-2) = \langle (0,0,1) \rangle$$

In realtà, non avendo effettuato alcuna rotazione, sapevamo già che gli autovettori sono i vettori della base canonica.

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

d) Consideriamo la quadrica $5x^2 - y^2 + 8xy + 5z^2 - 5z - 2 = 0$ le cui matrici associate sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

– Poiché $\det(A') = \dfrac{21 \cdot 65}{4} \neq 0$ si tratta di una quadrica non degenere.
– Calcoliamo gli autovalori di A per stabilire la rotazione:

$$p_A(\lambda) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21)$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 5$,$\lambda = 7$ e $\lambda = -3$. Poiché A ha autovalori disconcordi si tratta di un iperboloide. Per stabilire se è a una o a due falde dobbiamo trovare la forma canonica.
– Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 7y^2 - 3z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-105t = \frac{21 \cdot 65}{4} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{13}{4}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 7y^2 - 3z^2 + \frac{13}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{13}x^2 + \frac{28}{13}y^2 - \frac{12}{13}z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$-\frac{20}{13}x^2 - \frac{28}{13}y^2 + \frac{12}{13}z^2 - 1 = 0$$

Effettuando infine la rotazione che lascia fisso y, manda x in z e z in $-x$ otteniamo:

$$\frac{12}{13}x^2 - \frac{28}{13}y^2 - \frac{20}{13}z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide ellittico, o a due falde.
Poichè è una conica a centro possiamo determinare centro e assi.
Il centro è dato dalla soluzione del sistema $A| - h$:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 5z = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Per trovare gli assi dobbiamo prima determinare gli autospazi:

$$E(5) = N(A - 5I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow \ E(5) = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$$E(7) = N(A - 7I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ E(7) = \langle (2, 1, 0) \rangle$

$$E(-3) = N(A + 3I): \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ E(-3) = \langle (1, -2, 0) \rangle$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} + t \end{cases} \qquad a_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad a_3: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 14.3. *Determinare la forma canonica delle seguenti quadriche, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

a) $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$
b) $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo la conica $5x^2 - 4y^2 - 11z^2 - 24yz - 10x - 15 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -11 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -12 & -11 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A' (che ci servirà per trovare la forma canonica):

$$\det(A') = 5(-15)(44 - 144) + 5(-5)(44 - 144) = 10000$$

Quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = 5(44 - 144) \neq 0 \Rightarrow \text{ ellissoide o iperboloide.}$$

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare se gli autovalori di A sono concordi o discordi.

$$p_A(\lambda) = (5 - \lambda)\left[(-4 - \lambda)(-11 - \lambda) - 144\right] = (5 - \lambda)\left[\lambda^2 - 15\lambda - 100\right]$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -20 \quad \Rightarrow \text{ discordi } \quad \Rightarrow \text{ iperboloide}$$

Sappiamo che la forma canonica della quadrica è del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 - 20z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-500t = 10000 \quad \Rightarrow \quad t = -20$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5X^2 + 5Y^2 - 20Z^2 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - Z^2 - 1 = 0$$

Si tratta quindi di un iperboloide iperbolico, o a una falda.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -4 & -12 & | & 0 \\ 0 & -12 & -11 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/4II \\ III - 3II \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 25 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C\,(1,\ 0,\ 0)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autospazi:

$$E(5) = \mathrm{N}(A - 5I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -12 \\ 0 & -12 & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/3II \\ -1/4III \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4s \\ z = -3s \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,0,0),\ \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \rangle$$

$$E(-20) = \mathrm{N}(A + 20I) : \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -12 \\ 0 & -12 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 1/4II \\ 1/3III + 1/4II \end{matrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-20) = \langle \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \rangle$$

La matrice di rotazione ortonormale speciale è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Le rototraslazioni per passare dalla forma iniziale a quella canonica e viceversa sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+1 \\ \frac{1}{5}(4Y+3Z) \\ \frac{1}{5}(-3Y+4Z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \cdot \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ \frac{1}{5}(4y-3z) \\ \frac{1}{5}(3y-4z) \end{bmatrix}$$

---

b) Consideriamo la quadrica $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz + 2y - 2z - 4 = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A' (che ci servirà per trovare la forma canonica):

$$\det(A') = 2 \cdot [3(-13) - (-3) + (-4)] = -80$$

quindi $I_4 \neq 0$ e si tratta di una quadrica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = 2 \cdot 8 = -16 \qquad \Rightarrow \text{ ellissoide o iperboloide}$$

Calcoliamo gli autovalori di A

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \text{ concordi } \quad \Rightarrow \text{ ellissoide (reale)}$$

Possiamo ora ricavare la forma canonica. Sappiamo infatti che la forma canonica della quadrica è del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $\det(A')$ è un invariante, quindi $\det(B) = \det(A')$:

$$-16t = 80 \quad \Rightarrow \quad t = -5$$

Infine la forma canonica è:

$$2X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}X^2 + \frac{2}{5}Y^2 + \frac{4}{5}Z^2 - 1 = 0$$

Si tratta in effetti di ellissoide reale.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{3III - II}{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 8 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(0, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autospazi:

$$E(2) = \mathrm{N}(A - 2I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle (1,0,0), \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

$$E(4) = \mathrm{N}(A - 4I) : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

La matrice di rotazione ortonormale speciale è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Le rototraslazioni per passare dalla forma iniziale a quella canonica e viceversa sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y+Z) + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \cdot \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z + 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 14.4. *Determinare la forma canonica della seguente quadrica, ricavando le relazioni che permettono di passare dalle coordinate della forma iniziale alle coordinate della forma canonica e viceversa:*

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$$

Soluzione:

Consideriamo l'equazione $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4y + 3z + 1 = 0$ e la matrice A' associata:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che $\det(A') \neq 0$ e $\text{rg}(A) = 2$, quindi si tratta di un paraboloide.

Per determinare la forma canonica dobbiamo effettuare le due operazioni di ROTAZIONE e TRASLAZIONE.

- ROTAZIONE.

Dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0$$

Calcoliamo ora l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -s \end{cases}$$

$$E(2) = \langle\ (1,0,0),\ (0,1,-1)\ \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$E(0) = \langle\ (0,1,1)\ \rangle$$

Notiamo che i vettori presi come generatori degli autospazi sono già tra loro ortogonali, quindi per ottenere una base ortonormale è sufficienti renderli di norma 1:

$$E(2) = \langle\ (1,0,0),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

$$E(0) = \langle\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \rangle$$

La matrice R di cambiamento di base, di determinante 1, ovvero la matrice di rotazione, è la matrice che ha tali vettori come colonne:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Introducendo delle nuove coordinate X, Y e Z si ha che

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Da quest'ultimo cambio di coordinate otteniamo:

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y + Z) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z) \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione della quadrica e semplificando otteniamo l'equazione:

$$2X^2 + 2Y^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 = 0$$

- TRASLAZIONE. Dobbiamo ora effettuare la traslazione. Completiamo i quadrati:

$$2X^2 + 2\left(Y^2 - \frac{7}{2\sqrt{2}}Y\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y^2 - \frac{7}{2\sqrt{2}}Y - \left(\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + 1 - \frac{49}{16} = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{33}{16} = 0$$

$$2X^2 + 2\left(Y - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z - \frac{33\sqrt{2}}{16}\right) = 0$$

Infine il cambiamento di coordinate è

$$\begin{cases} x' = X \\ y' = Y - \dfrac{7}{4\sqrt{2}} \\ z' = Z - \dfrac{33\sqrt{2}}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y - z - \dfrac{7}{6}\right) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y + z - \dfrac{33}{8}\right) \end{cases}$$

L'equazione della quadrica (parabolide ellittico) diventa quindi:

$$2x'^2 + 2y'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z' = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 - z' = 0$$

Notiamo che il cambio inverso di coordinate è

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') + \dfrac{47}{16} \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-y' + z') + \dfrac{19}{16} \end{cases}$$

□

Esercizio 14.5. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} : \quad 3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 4z = 0.$$

a) *Stabilire se $\mathcal{Q}$ é degenere o meno, e di quale tipo di quadrica si tratti. Se é una quadrica a centro determinare le coordinate del centro.*
a) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{Q}$ e determinare coordinate omogenee dei punti all'infinito degli assi di simmetria.*

SOLUZIONE:

a) Consideriamo le matrici associate alla quadrica:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Riducendo A' a gradini otteniamo:

$$\begin{array}{c} \\ 3II + I \\ \\ IV - 2III \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi $\text{rg}(A') = 4$ e $\text{rg}(A) = 3$, e si tratta di una quadrica non degenere a centro.

Per stabilire se si tratta di un ellissoide o di un iperboloide dobbiamo determinare gli autovalori di A.

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-2)$$

Quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2 \quad \Rightarrow \text{discordi} \quad \Rightarrow \text{iperboloide}$$

Notiamo inoltre che $\det(A') = -8 < 0$, quindi si tratta di iperboloide a 2 falde o ellittico.

Determiniamo le coordinate del centro risolvendo il sistema associato a $A| - h$ e considerando la matrice giá ridotta

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow C = (0, 0, -2)$$

b) Gli assi della quadrica sono le rette per il centro con direzione data dagli autovettori della matrice A.

Calcoliamo l'autospazio $E(-1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \; E(-1) = \langle\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; E(2) = \langle\ (1, 1, 0)\ \rangle$$

Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; E(4) = \langle\ (1, -1, 0)\ \rangle$$

Gli assi sono quindi:

$$a_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases} \qquad a_3 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2 \end{cases}$$

Inoltre i punti all'infinito degli assi sono:

$$P_1 = (0, 0, 1, 0), \qquad P_2 = (1, 1, 0, 0), \qquad P_3 = (1, -1, 0, 0)$$

□

Esercizio 14.6. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \; : \; xz - y^2 - 4z^2 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*

c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Poiché $\det(A') = 0$ la quadrica è degenere. Inoltre $\det(A) = \frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\text{rg}(A) = 3$ e si tratta di un cono.

b) Risolviamo il sistema $A| - h$ per determinare il centro della quadrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}z = 0 \\ -y = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per determinare gli assi dobbiamo prima trovare gli autospazi di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(-4-\lambda) - \frac{1}{4}(-1-\lambda) \\ &= (-1-\lambda)\left(4\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = -1, \qquad \lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

Inoltre

$$E(-1) = N(A+I): \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2I \\ \\ 2II - I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(-1) = \langle\ (0,1,0)\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right): \begin{bmatrix} \frac{4-\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4-\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4-\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (4-\sqrt{17})III - I \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (\sqrt{17}-4)t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right) = \langle\ (1,\ 0,\ \sqrt{17}-4)\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) : \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{17}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-4+\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 2I \\ 2II \\ 2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 1 & 0 & -4+\sqrt{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ (4+\sqrt{17})III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{17} & 0 & 1 \\ 0 & 2+\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases} \quad \Rightarrow E\left(\frac{-4-\sqrt{17}}{2}\right) = \langle\ (1,\ 0,\ -\sqrt{17}-4)\ \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (\sqrt{17}-4)t \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = (-\sqrt{17}-4)t \end{cases}$$

c) Intersechiamo $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $y = 1$, ottenendo la conica $-4z^2 + xz - 1 = 0$. La matrice B' associata a tale conica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(B') \neq 0$ è una conica non degenere. Inoltre

$$p_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - \frac{1}{4}$$

Quindi B ha autovalori

$$\lambda = \frac{-4+\sqrt{17}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$$

discordi e si tratta di un'iperbole.

□

Esercizio 14.7. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ x^2 - 2y^2 + yz = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica*
b) *Se la quadrica è a centro, determinare coordinate del centro di simmetria ed equazioni degli assi di simmetria.*
c) *L'intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$ è una conica del piano π. Stabilire il tipo di conica.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Poiché $\det(A') = 0$ la quadrica è degenere. Inoltre $\det(A) = -\frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e si tratta di un cono.
b) Risolviamo il sistema $A| - h$ per determinare il centro della quadrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow C(0,0,0)$$

Per determinare gli assi dobbiamo prima trovare gli autospazi di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[-\lambda(-2-\lambda) - \frac{1}{4}\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-2-\sqrt{5}}{2}$$

Inoltre

$$E(1) = N(A-I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-2+\sqrt{5}}{2} I\right) : \begin{bmatrix} \frac{4-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (2+\sqrt{5})III + II \end{array} \begin{bmatrix} 4-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2+\sqrt{5})t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) = \langle\ (0,\ 1,\ 2+\sqrt{5})\ \rangle$$

$$E\left(\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right) = N\left(A - \frac{-2-\sqrt{5}}{2} I\right) : \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2+\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2I \\ 2II \\ 2III \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (2-\sqrt{5})III + II \end{array} \begin{bmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2-\sqrt{5})t \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right) == \langle\ (0,\ 1,\ 2-\sqrt{5})\ \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2+\sqrt{5})t \end{cases} \qquad a_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = (2-\sqrt{5})t \end{cases}$$

c) Intersechiamo $\mathcal{Q}$ con il piano π di equazione $x = 0$, ottenendo la conica $-2y^2 + yz = 0$. Anche senza determinare la matrice associata a tale conica è immediato verificare che è una conica degenere che si spezza nelle due rette $y = 0$ e $-2y + z = 0$, ovvero nelle rette di $\mathbf{R}^3$

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel centro C della quadrica.

□

Esercizio 14.8. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q}\ :\ x^2 + z^2 + 2xz + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}z + 2y + 4 = 0$$

a) *Riconoscere la quadrica.*

b) *Studiare la conica che si ottiene intersecando la quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ (tipo, forma canonica,...).*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

a) Notiamo che A' ha due righe uguali, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una quadrica degenere. Calcoliamo il rango di A':

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ IV - \sqrt{2}I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi $\text{rg}(A') = 3$ e si tratta di una quadrica degenere irriducibile. Inoltre $\det(A) = 0$, quindi si tratta di un cilindro.

Per stabilire il tipo di cilindro dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(1-\lambda)$$

Quindi A ha autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ e

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$$

Si tratta infine di un cilindro parabolico.

b) Intersecando la quadrica con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C} \ : \ x^2 + 2\sqrt{2}x + 2y + 4 = 0$$

Notiamo che l'equazione può essere riscritta nella forma (nota dalle superiori)

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x - 2$$

Si tratta quindi di una parabola con asse verticale di vertice $V(-\sqrt{2}, -1)$ e asse $x = -\sqrt{2}$.

In alternativa per calcolare asse e vertice possiamo studiare (complicando un po' le cose) le matrici associate alla conica.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(A') = -1 \neq 0$ si tratta di una conica non degenere. Inoltre $\det(A) = 0$ quindi si tratta di una parabola. Per calcolare asse e vertice dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 0, 1$. L'asse ha direzione parallela all'autovalore relativo a $\lambda = 0$. Calcoliamo quindi $E(0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \ E(0) = \langle (0, 1) \rangle$$

La direzione ortogonale all'asse è quindi $(1, 0)$ e una retta ortogonale all'asse è

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ y = 0$$

Calcoliamo i punti D e E di intersezione di tale retta con la parabola e quindi il loro punto medio M:

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}$$

Quindi $x_M = -\sqrt{2}$ e $y_M = 0$. L'asse è quindi la retta di direzione $(0,1)$ passante per M:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{2}$$

Infine il vertice è dato dall'intersezione tra asse e parabola: $V(-\sqrt{2}, -1)$.

Sappiamo che la forma canonica di una parabola è del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi una equazione del tipo $\lambda_1 x^2 + 2ty = 0$. Sapendo che $\lambda_1 = 1$ la matrice associata a tale equazione è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \pm 1$. Infine la forma canonica è $x^2 - 2y = 0$.

□

Esercizio 14.9. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ (1+2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1+2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & -1-k \end{bmatrix}$$

a,b) $\mathcal{Q}$ è un paraboliode se è non degenere e $\det(A) = 0$. Cominciamo a calcolare il determinante di A:

$$\det(A) = (1+2k)\cdot(1-k^2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2},\ 1,\ -1$$

Consideriamo i tre casi

- Se $k = -\dfrac{1}{2}$ una riga di A' si annulla, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una conica degenere.
- Se $k = 1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = -\frac{1}{2}$$

  In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

  quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = 3,\ 2$. Poiché sono concordi si tratta di un paraboloide ellittico.
- Se $k = -1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = \frac{1}{4}$$

  In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

  quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = -1,\ 2$. Poiché sono discordi si tratta di un paraboloide iperbolico.

c) Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ (1+2k)x^2 + y^2 = 1 + k$$

Consideriamo ora i due valori di k trovati ai punti precedenti.

– Se $k = 1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ 3x^2 + y^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

In questo caso otteniamo quindi un'ellisse.

– Se $k = -1$ otteniamo la conica

$$\mathcal{C}: \ -x^2 + y^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-x+y)(x+y) = 0$$

Si tratta quindi di una conica degenere data dalle due rette

$$r_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad r_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 14.10. *Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione*

$$\mathcal{Q} \ : \ x^2 + (1+2k)y^2 + z^2 + 2kxz - kz = 1 + k$$

a) *Per quali valori del parametro reale k la quadrica $\mathcal{Q}$ è un paraboloide?*
b) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di paraboloide (ellittico o iperbolico).*
c) *Per i valori di k determinati al punto* a)*, stabilire il tipo di coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$.*

SOLUZIONE:

La matrice A' associata alla quadrica è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1+2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & -1-k \end{bmatrix}$$

a,b) $\mathcal{Q}$ è un paraboliode se è non degenere e $\det(A) = 0$. Cominciamo a calcolare il determinante di A:

$$\det(A) = (1+2k) \cdot \left[1 - k^2\right] = 0 \qquad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}, \ -1, \ 1$$

Consideriamo i tre casi

– Se $k = -\frac{1}{2}$ una riga di A' si annulla, quindi $\det(A') = 0$ e si tratta di una conica degenere.

– Se $k = 1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = -\frac{3}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = 3, \ 2$. Poiché sono concordi si tratta di un paraboloide ellittico.

– Se $k = -1$, la matrice A' diventa

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A') = \frac{1}{4}$$

In questo caso si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

quindi gli autovalori non nulli di A sono $\lambda = -1, \ 2$. Poiché sono discordi si tratta di un paraboloide iperbolico.

c) Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ otteniamo la conica
$$\mathcal{C}: \; x^2 + (1+2k)y^2 = 1 + k$$
Consideriamo ora i due valori di k trovati ai punti precedenti.
- Se $k = -1$ otteniamo la conica
$$\mathcal{C}: \; x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)(x+y) = 0$$
Si tratta quindi di una conica degenere data dalle due rette
$$r_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad r_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
- Se $k = 1$ otteniamo la conica
$$\mathcal{C}: \; x^2 + 3y^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1 = 0$$
In questo caso otteniamo quindi un'ellisse.

$\square$

CAPITOLO 15

Coordiante omogenee e proiezioni

Esercizio 15.1. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione della retta r passante per i punti $A(2,3)$ e $B(-1,0)$ e della retta s passante per A e di direzione $\overrightarrow{v}(1,2)$. Determinare inoltre il punto improprio di r e s.*

Esercizio 15.2. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione del piano π_1 passante per i punti $A(2,3,0)$, $B(3,1,-1)$ e $C(0,0,1)$ e del piano π_2 passante per A e B e parallelo alla retta $x+y=x-z=0$.*

Esercizio 15.3. *Stabilire se il piano di coordinate omogenee $N=(1,-2,0,-3)$ passa per il punto $P(1,-1,2)$.*

Esercizio 15.4. *Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per i punti $A(1,2,-5)$ e $B(-1,0,3)$, e trovarne il punto all'infinito.*

Esercizio 15.5. *Si consideri la proiezione centrale T sul piano $x+y=1$ dal centro $C(1,2,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa vengono trasformati i punti $A(1,5,0)$ e $B(1,0,0)$.*

Esercizio 15.6. *Determinare la matrice della proiezione parallela T sul piano $x-y+2z=0$ di direzione $\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa viene trasformata la retta $r:\ x+y=z=0$.*

Esercizio 15.7. *Sia π il piano di equazione $x+2y-z=0$ e C il punto di coordinate $(0,1,-1)$.*

a) *Si determini la matrice della proiezione dal centro C sul piano di vista π.*
b) *Si trovino equazioni delle proiezioni delle rette*

$$r:\quad x+y=x+z-1=0 \qquad\qquad s:\quad x=y=z+1$$

Esercizio 15.8. *Sia π il piano di equazione $3x-y+z=1$ e $\overrightarrow{v}$ il vettore $(1,1,1)$.*

a) *Si determini la matrice della proiezione parallela nella direzione di $\overrightarrow{v}$ sul piano di vista π.*
b) *Stabilire se si tratta di una proiezione ortogonale o obliqua.*

Esercizio 15.9. *Siano $M=(1,1,1)$, $N=(3,2,1)$, $L=(1,2,2)$ punti dello spazio $\mathbf{R}^3$. Sia $C=(-1,0,1)$.*

a) *Si calcoli l'area del triangolo MNL.*
b) *Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x+y=0$.*
c) *Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.*

Esercizio 15.10. *Sia r la retta dello spazio di equazioni cartesiane $r\ :\ 2x-y+1=x-z=0$.*

(a) *Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r' ottenuta proiettando r sul piano $x+y+z=0$ dal centro $C=(2,1,1)$.*
(b) *Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta r' e stabilire se r e r' sono parallele.*

Esercizio 15.11. *Sia π il piano dello spazio di equazione cartesiana*

$$\pi\ :\ x-y+z+1=0.$$

a) *Si calcoli la matrice della proiezione sul piano π dal centro di proiezione $C=(1,1,1)$.*
b) *Si calcoli il punto improprio P_∞ della retta $r\ :\ x-y=z=0$ e la proiezione di P_∞ sul piano π (dal centro C). Cosa si può dire della posizione reciproca di r e π?*

1. Suggerimenti

- **Proiezioni**. Un piano $ax+by+cz+d=0$ ha coordinate omogenee $N(a,b,c,d)$. Un punto $P(a,b,c)$ ha coordinate omogenee $P(a,b,c,1)$. Un direzione $\overrightarrow{v}(a,b,c)$ corrisponde al punto improprio $P_\infty(a,b,c,0)$.

  La matrice della proiezione T su un piano π da un punto P o di direzione $\overrightarrow{v}$ si ottiene nel seguente modo. Indicate con N le coordinate omogenee del piano e con C le coordinate omogenee del centro o della direzione della proiezione si ha

$$M = N^tC - (NC)I_4 \qquad \Rightarrow \quad T(A) = AM$$

2. Soluzioni

Esercizio 15.1. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione della retta r passante per i punti $A(2,3)$ e $B(-1,0)$ e della retta s passante per A e di direzione $\overrightarrow{v}(1,2)$. Determinare inoltre il punto improprio di r e s.*

Soluzione:
Consideriamo la retta r. I punti A e B hanno coordinate omogenee $A(2,3,1)$ e $B(-1,0,1)$, quindi r ha equazione

$$r: \quad \det\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3X - 3Y + 3Z = 0 \quad \Rightarrow \quad r: \ X - Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di r è quindi $x - y + 1 = 0$. Per trovare il punto improrio di r la cosa più semplice è porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $X = Y$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1,1,0)$. Notiamo che il punto improprio corrisponde alla direzione $\overrightarrow{v}(1,1)$ della retta.

Consideriamo la retta s. La direzione $\overrightarrow{v}$ corrisponde al punto improrpio $P_\infty(1,2,0)$. Utilizzando la stessa formula precedente otteniamo

$$s: \quad \det\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad s: \ -2X + Y + Z = 0$$

Un'equazione cartesiana di s è quindi $-2x + y + 1 = 0$. In questo caso abbiamo già determinato il punto improrpio $P_\infty(1,2,0)$. In ogni caso per determinarlo, come nel caso precedente era sufficiente porre $Z = 0$ nell'equazione omogenea ottenendo $Y = 2X$. Di conseguenza il punto improprio è $P_\infty(1,2,0)$.

□

Esercizio 15.2. *Utilizzando le coordinate omogenee, determinare l'equazione del piano π_1 passante per i punti $A(2,3,0)$, $B(3,1,-1)$ e $C(0,0,1)$ e del piano π_2 passante per A e B e parallelo alla retta $x + y = x - z = 0$.*

Soluzione:
I punti A, B e C hanno coordinate omogenee $A(2,3,0,1)$, $B(3,1,-1,1)$ e $C(0,0,1,1)$, quindi π ha equazione

$$\pi_1: \quad \det\begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1: \ -5X + Y - 7Z + 7W = 0$$

Un'equazione cartesiana di π_1 è quindi $5x - y + 7z - 7 = 0$.

La retta $x+y=x-z=0$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \qquad \forall t \in \mathbf{R} \\ z=t \end{cases}$$

quindi ha direzione $\overrightarrow{v}(1,-1,1)$ a cui corrisponde il punto improprio $P_\infty(1,-1,1,0)$. Utilizzando la formula precedente si ottiene:

$$\pi_2: \quad \det\begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2: \ -3X-2Y+Z+12W=0$$

Un'equazione cartesiana di π_2 è quindi $3x+2y-z=12$.

Notiamo che per semplificare i conti nel calcolo del determinante è possibile effettuare alcune operazioni di riduzione sulla matrice in modo da ottenere alcuni termini nulli. Le operazioni di riduzione non alterano infatti il rango della matrice, quindi se A' è la matrice ridotta, si ha $\det(A)=0$ se e solo se $\det(A')=0$. Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV+III \end{array}\begin{bmatrix} X & Y & Z & W \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Ora, imponendo $\det(A')=0$ si ottiene la medesima equazione $\pi_2: \ -3X-2Y+Z+12W=0$.

□

Esercizio 15.3. *Stabilire se il piano di coordinate omogenee $N=(1,-2,0,-3)$ passa per il punto $P(1,-1,2)$.*

Soluzione:

Il piano di coordinate omogenee $N=(1,-2,0,-3)$ è il piano $X-2Y-3W=0$, cioè $x-2y-3=0$. Il punto P appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione. Poichè $1-2(-1)-3=0$ il punto appartiene al piano.

In alternativa si potevano calcolare le coordinate omogenee di $P(1,-1,2,1)$ e P appartiene al piano se $N\cdot P=0$. Infatti $N\cdot P = 1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+0\cdot 2+(-3)\cdot 1=0$.

□

Esercizio 15.4. *Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per i punti $A(1,2,-5)$ e $B(-1,0,3)$, e trovarne il punto all'infinito.*

Soluzione:

La retta r ha direzione $AB=(-2,-2,8)$ cioè $\overrightarrow{v}=(1,1,-4)$. Un'equazione parametrica di r è

$$r: \begin{cases} x=-1+t \\ y=t \qquad \forall t\in\mathbf{R} \\ z=3-4t \end{cases}$$

Il punto improprio di r corrisponde alla sua direzione ed è $P_\infty(1,1,-4,0)$.

In alternativa si potevano utilizzare la coordinate omogenee $A(1,2,-5,1)$ e $B(-1,0,3,1)$ dei suoi due punti. r è data dall'insieme dei punti $\alpha A+\beta B$ al variare di α e β in $\mathbf{R}$:

$$r: (\alpha-\beta,\ 2\alpha,\ -5\alpha+3\beta,\ \alpha+\beta)$$

Il suo punto improrio si ottiene quando $\alpha+\beta=0$ ed è $(2\alpha,2\alpha,-8\alpha,0)=(2,2,-8,0)=(1,1,-4,0)=P_\infty$. Per ottenere un'equazione parametrica cartesiana basta dividere per $\alpha+\beta$:

$$r: \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\ \frac{2\alpha}{\alpha+\beta},\ \frac{-5\alpha+3\beta}{\alpha+\beta}\right) \Rightarrow r: \begin{cases} x=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \\ y=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathbf{R} \\ z=\dfrac{-5\alpha+3\beta}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

Notiamo che benchè l'equazione ottenuta appaia notevolmente differente è abbastanza facile ricondurci da questa equazione a quella precedente ponendo $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = t$.

$\square$

Una **proiezione centrale** T da un punto C su un piano π di coordinate omogeneee N, o una **proiezione parallela** T da un punto improprio C (corrispondente alla direzione della proiezione) su un piano π di coordinate omogeneee N ha matrice

$$M = N^tC - (N \cdot C)\, I_4$$

Inoltre la proiezione T trasforma il generico punto P nel punto $P' = T(P)$, appartenente a π, nel seguente modo:

$$P' = T(P) = P \cdot M$$

Il piano π è detto piano di vista.

Una proiezione parallela è detta ortogonale se ha direzione ortogonale al piano di vista, mentre è detta obliqua in caso contrario.

Esercizio 15.5. *Si consideri la proiezione centrale T sul piano $x+y=1$ dal centro $C(1,2,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa vengono trasformati i punti $A(1,5,0)$ e $B(1,0,0)$.*

Soluzione:

Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,1,0,-1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1,2,-1,1)$, quindi

$$N^tC = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N \cdot C = 1\cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 + (-1)\cdot 1 = 2$$

Quindi

$$M = N^tC - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(1,5,0,1)$ viene trasformato nel punto

$$A' = T(A) = A \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = (3,0,-5,3) = \left(1, 0, -\frac{5}{3}, 1\right)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è trasformato nel punto $A'\left(1,0,-\dfrac{5}{3}\right)$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1,0,0,1)$ viene trasformato nel punto

$$B' = T(B) = B \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B' = (-2,0,0,-2) = (1,0,0,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(1,0,0) = B$. Potevamo osservare dall'inizio che, poiché B appartiene al piano di vista, viene trasformato in se stesso dalla proiezione.

$\square$

Esercizio 15.6. *Determinare la matrice della proiezione parallela T sul piano $x - y + 2z = 0$ di direzione $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$. Dopo avere determinato la matrice di T, stabilire in cosa viene trasformata la retta $r:\ x+y=z=0$.*

Soluzione:
Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,-1,2,0)$ e la direzione $\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$ corrisponde al punto improrio $C=C_\infty(1,0,-1,0)$, quindi

$$N^tC=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\-1&0&1&0\\2&0&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\text{e}\qquad N\cdot C=-1$$

Quindi

$$M=N^tC+I_4=\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\-1&1&1&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

La retta r viene proiettata in una retta r'. Per trovare un'equazione di r' la cosa più semplice è forse trovarne due suoi punti. Prendiamo quindi due qualsiasi punti A e B di r e deteminiamo i punti A' e B' in cui questi vengono proiettati. La retta r' è la retta passante per A' e B'.

Prendiamo ad esempio i punti $A(0,0,0)$ e $B(1,-1,0)$ appartenenti a r. Passando alle coordinate omogenee, il punto $A(0,0,0,1)$ viene proiettato nel punto

$$A'=T(A)=A\cdot M=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad A'=(0,0,0,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, A è proiettatoo nel punto $A'\,(0,0,0)$. Notiamo che, osservando che A è un punto del piano di vista, potevamo scrivere direttamente $A'=A$.

Analogamente il punto B di coordinate omogenee $B(1,-1,0,1)$ viene proiettato nel punto

$$B'=T(B)=B\cdot M=\begin{bmatrix}3&-1&-2&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad B'=(3,-1,-2,1)$$

Infine, tornando alle coordinate cartesiane, B è trasformato nel punto $B'(3,-1,-2)$.

Infine la retta r' in cui è trasformata r è la retta passante per $A'(0,0,0)$ e $B'(3,-1,-2)$:

$$r':\begin{cases}x=3t\\y=-t\\z=-2t\end{cases}\qquad\forall t\in\mathbf{R}$$

□

Esercizio 15.7. *Sia π il piano di equazione $x+2y-z=0$ e C il punto di coordinate $(0,1,-1)$.*

a) *Si determini la matrice della proiezione dal centro C sul piano di vista π.*
b) *Si trovino equazioni delle proiezioni delle rette*

$$r:\quad x+y=x+z-1=0\qquad\qquad s:\quad x=y=z+1$$

Soluzione:

a) Il centro C e il piano π hanno rispettivamente coordinate omogenee $C(0,1,-1,1)$ e $N(1,2,-1,0)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M=N^tC-(N\cdot C)I_4=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\0&2&-2&2\\0&-1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}-3I_4=\begin{bmatrix}-3&1&-1&1\\0&-1&-2&2\\0&-1&-2&-1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

b) Consideriamo la retta r e siano $A(1,-1,0)$ e $B(0,0,1)$ due suoi punti. Passando alle coordinate omogenee $A(1,-1,0,1)$ e $B(0,0,1,1)$ vengono proiettati nei punti

$$A'=A\cdot M=(-3,2,1,-4)=\left(\frac34,-\frac12,-\frac14,1\right)\qquad\Rightarrow\qquad A'=\left(\frac34,-\frac12,-\frac14\right)$$

$$B'=B\cdot M=(0,-1,-2,-4)=\left(0,\frac14,\frac12,1\right)\qquad\Rightarrow\qquad B'=\left(0,\frac14,\frac12\right)$$

Quindi la retta r è proiettata nella retta r' passante per A' e B':

$$r':\begin{cases}x=-t\\y=\frac14+t\\z=\frac12+t\end{cases}\qquad\forall t\in\mathbf{R}$$

Analogamente consideriami i punti $P(1,1,0)$ e $Q(2,2,1)$ di s. Passando alle coordinate omogenee $P(1,1,0,1)$ e $Q(2,2,1,1)$ vengono proiettati nei punti

$$P' = P \cdot M = (-3,0,-3,0)$$

Notiamo che P' è un punto improrio e corrisponde alla direzione $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$. Inoltre

$$Q' = Q \cdot M = (-6,-1,-8,2) = \left(-3,-\frac{1}{2},-4,1\right) \qquad \Rightarrow \qquad Q' = \left(-3,-\frac{1}{2},-4\right)$$

Quindi la retta s è proiettata nella retta s' passante per Q' e di direzione $(1,0,1)$:

$$s' : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -4 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$\square$

Esercizio 15.8. *Sia π il piano di equazione $3x - y + z = 1$ e $\overrightarrow{v}$ il vettore $(1,1,1)$.*

a) *Si determini la matrice della proiezione parallela nella direzione di $\overrightarrow{v}$ sul piano di vista π.*
b) *Stabilire se si tratta di una proiezione ortogonale o obliqua.*

Soluzione:

a) π ha coordinate omogenee $N(3,-1,1,-1)$ e la direzione $\overrightarrow{v}$ corrisponde al punto improprio $C(1,1,1,0)$. Di conseguenza la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - (N \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 3I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) La direzione ortogonale a π è $(3,-1,1)$ (Notiamo che è il vettore corrispondente alle prime tre componenti delle coordinate omogenee N di π); la proiezione è parallela a $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. Poichè i vettori $(3,-1,1)$ e $(1,1,1)$ non sono proporzionali rappresentano direzioni differenti e si tratta quindi di una proiezione obliqua. (Ricordiamo che una proiezione ortogonale è una proiezione parallela di direzione ortogonale al piano di vista).

$\square$

Esercizio 15.9. *Siano $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ punti dello spazio $\mathbf{R}^3$. Sia $C = (-1,0,1)$.*

a) *Si calcoli l'area del triangolo MNL.*
b) *Si determini l'insieme $M'N'L'$ che si ottiene proiettando il triangolo MNL dal centro C sul piano $x + y = 0$.*
c) *Si calcoli l'area del triangolo $M'N'L'$.*

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove

$$u = \overrightarrow{MN} = (2,1,0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2,0,-1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1,2,-2)$$

Infine

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$

In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:

$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)}v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$

Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi

$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot |\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi

$$A = P^T C - (P \cdot C)I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} M' &= M \cdot A = (-1,1,3,3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \quad &\Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\ N' &= N \cdot A = (-2,2,6,6) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1\right) \quad &\Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\ L' &= L \cdot A = (-2,2,5,4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right) \quad &\Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

Infine il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare le coordinate omogenee e la matrice di proiezione A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta

$$CM : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:

$$M' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Analogamente si potevano ottenere gli altri punti. Questo procedimento è naturalmente più lungo.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

□

Esercizio 15.10. *Sia r la retta dello spazio di equazioni cartesiane $r \; : \; 2x - y + 1 = x - z = 0$.*

(a) *Si trovino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta r' ottenuta proiettando r sul piano $x + y + z = 0$ dal centro $C = (2,1,1)$.*

(b) *Trovare coordinate omogenee del punto all'infinito della retta r' e stabilire se r e r' sono parallele.*

Soluzione:

La retta r ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,1,1,0)$ e C ha coordinate omogenee $C(2,1,1,1)$, quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - (N \cdot C)I_4 = N^tC - 4I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo due qualsiasi punti di r, in coordinate omogenee, per esempio $A = (0,1,0,1)$ e $P_\infty = (1,2,1,0)$, e calcoliamone la proiezione:

$$A' = A \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = (2,-3,1,-3) = \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 1\right) \quad \Rightarrow \quad A'\left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$P'_\infty = P_\infty \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P'_\infty = (4,-4,0,4) = (1,-1,0,1) \quad \Rightarrow \quad P'_\infty = (1,-1,0)$$

Infine la retta r' è la retta passante per A' e P'_∞:

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -1 - 6t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad x - 5z - 1 = y + 6z + 1 = 0$$

b) La retta r' ha direzione $(5,-6,1)$, quindi punto all'infinito $P_\infty = (5,-6,1,0)$. r e r' non sono parallele perchè le rispettive direzioni non sono proporzionali, ovvero non hanno lo stesso punto all'infinito.

$\square$

Esercizio 15.11. *Sia π il piano dello spazio di equazione cartesiana*

$$\pi \ : \ x - y + z + 1 = 0.$$

a) *Si calcoli la matrice della proiezione sul piano π dal centro di proiezione $C = (1,1,1)$.*
b) *Si calcoli il punto improprio P_∞ della retta $r \ : \ x - y = z = 0$ e la proiezione di P_∞ sul piano π (dal centro C). Cosa si può dire della posizione reciproca di r e π?*

Soluzione:

a) Il piano di vista ha coordinate omogenee $N(1,-1,1,1)$ e C ha coordinate omogenee $C(1,1,1,1)$, quindi

$$N^tC = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N \cdot C = 1 - 1 + 1 + 1 = 2$$

Quindi la matrice della proiezione è

$$M = N^tC - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) La retta r ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi il suo punto improprio è $P_\infty = (1,1,0,0)$ che viene proiettato nel punto

$$P' = P_\infty \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P' = (-2,-2,0,0) = (1,1,0,0)$$

Notiamo che P_∞ è trasformato in se stesso, infatti r e π sono tra loro ortogonali.

□