Analisi matematica 2		27 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione :

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - 2xy + z^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Trovare i punti stazionari di g e determinare eventuali punti di estremo libero.

b) Determinare eventuali estremi globali della funzione.

c) Verificare che l'equazione

$$g(x, y, z) = 1$$

definisce implicitamente una superficie regolare in un intorno del punto $P(1, 0, 0)$. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in P.

2. Si consideri il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x' = \alpha\, x \\ y' = -x + y \end{cases}$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale del sistema.

b) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + e^{-t} \\ y' = -x + y \end{cases}$$

con la condizione iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

3. Sia D la regione del piano definita da

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi/2, \quad 0 < y < \pi - 2x\}$$

a) Spiegare perchè la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin(2x + y)}{2x + y}$$

è integrabile su D.

b) Calcolare

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy$$

4. Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

nella regione

$$\Omega = \{(x,y,z) : x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad x + y + z < 1\}$$

Dimostrare che il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è conservativo e trovare un potenziale.
Esiste un potenziale vettore per $\mathbf{F}$?

SOLUZIONI

1.

a) La funzione g è di classe $\mathcal{C}^1$ in tutto $\mathbb{R}^3$; calcolo del gradiente:

$$\nabla g(x,y,z) = \big(4x(x^2+y^2)-2y\big)\,\mathbf{i} + \big(4y(x^2+y^2)-2x\big)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(x^2+y^2) = y \\ 2y(x^2+y^2) = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, si trovano i tre punti $P_0(0,0,0)$, $P_1(1/2,1/2,0)$ e $P_2(-1/2,-1/2,0)$
Matrice Hessiana:

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2+4y^2 & 8xy-2 & 0 \\ 8xy-2 & 12y^2+4x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nei punti critici si trova

$$H_g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad H_g(1/2,1/2,0) = H_g(-1/2,-1/2,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice $H_g(0,0,0)$ ha autovalori di segno opposto ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$) il punto P_0 è punto di sella, mentre i punti P_1 e P_2 sono di minimo locale (autovalori di $H_g(\pm 1/2, \pm 1/2, 0)$ positivi) con $g(\pm 1/2, \pm 1/2, 0) = -1/2$.

b) La funzione g è limitata inferiormente, ma non superiormente. Infatti, usando le coordinate cilindriche (r,θ,z), si osserva che

$$(x^2+y^2)^2 - 2xy + z^2 = r^4 - 2r^2\sin\theta\cos\theta + z^2 \ge r^4 - r^2 + z^2 \ge r^4 - r^2$$

L'ultima espressione è positiva per $r > 1$ e tende a $+\infty$ per $r \to +\infty$. Dalla disuguaglianza e dal teorema di Weierstrass segue anche che il minimo assoluto di g è raggiunto nel cerchio unitario sul piano $z = 0$. Quindi, i punti $(\pm 1/2, \pm 1/2, 0)$ sono anche i punti di minimo globale.

c) La funzione

$$\tilde{g}(x,y,z) \equiv g(x,y,z) - 1$$

è di classe $\mathcal{C}^1$ in tutto $\mathbb{R}^3$; abbiamo inoltre

$$\tilde{g}(1,0,0) = 0$$

e

$$\nabla\tilde{g}(1,0,0) = \nabla g(1,0,0) = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$$

Applicando il teorema del Dini, possiamo ricavare $x = x(y,z)$ in un intorno di $(0,0)$ oppure $y = y(x,z)$ in un intorno di $(1,0)$; in entrambi i casi si ottengono parametrizzazioni di una superficie regolare. Il piano tangente passa per P ed è ortogonale a $\nabla g(1,0,0)$; si trova allora l'equazione

$$4(x-1) - 2y = 0,$$

$$2x - y - 2 = 0$$

Si tratta di un piano parallelo all'asse z.

2.

a) La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = (\lambda - \alpha)(\lambda - 1) = 0$$

Se $\alpha \neq 1$ si trovano due autovalori reali distinti $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1$. I corrispondenti autovettori sono (a meno di una costante moltiplicativa)

$$\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque, se $\alpha \neq 1$ l'integrale generale si scrive

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t}\, \mathbf{h_1} + c_2 e^t\, \mathbf{h_2}$$

Se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con autovalore (di molteplicità 2) $\lambda = 1$. Cerchiamo le soluzioni nella forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = te^t\, \mathbf{h} + e^t\, \mathbf{k}$$

Inserendo nel sistema, troviamo le equazioni

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{h} = 0, \qquad (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{h}$$

Poiché

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ricava

$$\mathbf{h} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione alternativa : La prima equazione non contiene la funzione incognita $y(t)$; integrando, si trova

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t}$$

con C_1 costante arbitraria. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$y' = y - C_1 e^{\alpha t}$$

ovvero una equazione lineare del primo ordine *non* omogenea per la y; la soluzione si ottiene applicando la formula risolutiva.

b) In base al principio di sovrapposizione, l'integrale generale si ottiene sommando all'integrale generale del sistema omogeneo, una soluzione particolare del sistema completo. Usando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, cerchiamo una soluzione della prima equazione nella forma $\bar{x}(t) = c(t)e^{-t}$; sostituendo, si ottiene

$$\bar{x}(t) = te^{-t}$$

Inserendo $\bar{x}(t)$ nella seconda equazione e cercando una soluzione nella forma $\bar{y}(t) = c(t)e^{t}$, si ricava

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{4}(2t+1)e^{-t}$$

Sommando all'integrale generale del sistema omogeneo (con $\alpha = -1$) si ottiene la soluzione

$$x(t) = 2c_1e^{-t} + te^{-t}; \qquad y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{t} + \frac{1}{4}(2t+1)e^{-t}$$

Ponendo $t = 0$ si ricavano dalla condizione iniziale i valori delle costanti

$$c_1 = 0; \qquad c_2 = -\frac{1}{4}$$

3.

a) L'insieme D è aperto e la funzione f è continua e *limitata* su D in quanto

$$0 < \frac{\sin(2x+y)}{2x+y} < 1, \qquad \forall\,(x,y) \in D$$

Dunque f è integrabile su D_0. Per calcolare l'integrale usiamo la formula

b) per calcolare l'integrale conviene effettuare la trasformazione:

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = y \end{cases}$$

La traformazione inversa T è

$$\begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = v \end{cases}$$

Determinante matrice Jacobiana:

$$\det J_T(u,v) = \frac{1}{2}$$

La regione D si trasforma nella regione

$$\tilde{D} = \{(u,v) \mid 0 < u < \pi, \quad 0 < v < u\}$$

Abbiamo allora

$$\int\int_D \frac{\sin(2x+y)}{2x+y}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int\int_{\tilde{D}} \frac{\sin u}{u}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^u \frac{\sin u}{u}\, dv\, du = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin u = 1$$

4. La regione Ω è il tetraedro con vertici nell'origine e nei punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, che ha volume $|\Omega| = 1/6$. Dunque

$$\int\int\int_{\Omega} \text{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = 2\int\int\int_{\Omega} dx\, dy\, dz = 2|\Omega| = 1/3$$

Il flusso del campo attraverso $\partial\Omega$ si calcola sommando i flussi attraverso le 4 facce con la normale orientata verso l'esterno. Indicando con Σ_1, Σ_2, Σ_3 le facce giacenti sui piani xy, xz, yz e con Σ_4 la faccia appartenente al piano di equazione $x + y + z = 1$, abbiamo rispettivamente

$$\int\int_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, d\sigma = -\int_0^1 \int_0^{1-x} x\, dy\, dx = -\frac{1}{6}$$

$$\int\int_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, d\sigma = 0$$

$$\int\int_{\Sigma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, d\sigma = -\int_0^1 \int_0^{1-z} z\, dy\, dz = -\frac{1}{6}$$

$$\int\int_{\Sigma_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 - x - y + 2y + x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1 + y)\, dx\, dy = \frac{2}{3}$$

Dunque:

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, d\sigma = \frac{1}{3}$$

Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$ ed ha rotore nullo. dunque è conservativo. Un potenziale per $\mathbf{F}$ è

$$U(x, y, z) = xz + y^2$$

Il campo non ammette potenziale vettore poiché div $\mathbf{F} = 2 \neq 0$ e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria.