Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2009/2010
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Prova parziale sul modulo di Metodi Analitici (26-1-10) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: __________________

I. ANALISI COMPLESSA

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2(z-1)} \ .$$

1. Determinare il dominio di olomorfia di f.
2. Classificare le singolarità isolate di f.
3. Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza del piano complesso di centro 1 e raggio $1/2$, percorsa una volta in senso orario.
4. Determinare la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f di centro $z = 0$.

1. Il dominio di olomorfia è $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

2. $z = 1$ è un polo semplice, mentre $z = 0$ è un polo doppio.

3. Per il teorema rei residui l'integrale dato è uguale a $-2\pi i \ \mathrm{Res}(f, 1) = -2\pi i e$.

4. Si ha

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}\Big(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3)\Big)\Big(1 + z + z^2 + z^3 + o(z^3)\Big) = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \frac{5}{2} + o(1) \ .$$

   La parte singolare dello sviluppo di Laurent è quindi

$$-\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

1. Dare la definizione di prodotto di convoluzione in $L^1(\mathbb{R})$.
2. Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia f_n definita come $f * f * \ldots * f$, dove il prodotto di convoluzione è fatto n volte. Dire se è possibile trovare una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, non identicamente nulla, tale che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}) \ .$$

(in caso di risposta affermativa, fornire un esempio; in caso di risposta negativa, motivarla).

1. Si veda un testo o gli appunti del corso.

2. Non è possibile trovare una funzione come richiesto. Infatti in tal caso, poiché la trasformata di Fourier di f_n è uguale a $(\hat{f})^n$, e poiché l'operatore trasformata di Fourier è continuo da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$, si avrebbe $\lim_{n\to+\infty}(\hat{f})^n = \hat{f}$ in Ł$^\infty(\mathbb{R})$. Questo in particolare implica che $\lim_{n\to+\infty}(\hat{f})^n = \hat{f}$ puntualmente q.o. su $\mathbb{R}$. Quindi, al di fuori di un insieme di misura nulla, $\hat{f}$ può prendere solo i valori 0 e 1, e pertanto non può essere una funzione continua nulla all'infinito.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Applicando il metodo delle serie di Fourier, discutere al variare di $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esistenza (ed unicità) di soluzioni $2\pi-$periodiche per l'equazione:

$$u''(x) + 16u(x) = \cos(kx) + \sin(2x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Giustificare i passaggi effettuati e, nel caso di esistenza, fornire la soluzione.

In primo luogo osserviamo che il dato $\cos(kx) + \sin(2x)$ è una funzione $2\pi-$periodica e coincide con il suo sviluppo in serie di Fourier. Procedendo formalmente, supponiamo u sia soluzione $2\pi-$periodica dell'equazione, allora essa ammette sviluppo in serie di Fourier:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Imponendo ad u di soddisfare l'equazione, si ottiene l'identità

$$8a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (16 - n^2)\, (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \cos(kx) + \sin(2x).$$

Essendo $\cos(-kx) = \cos(kx)$, senza perdita di generalità possiamo supporre $k > 0$. Ora, per l'unicità dei coefficienti nello sviluppo di Fourier, se ne deduce il seguente sistema di infinite equazioni disaccoppiate:

$$8a_0 = 0$$

$$(16 - n^2)\, a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ 1 & \text{se } n = k \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 1$$

$$(16 - n^2)\, b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 1 & \text{se } n = 2 \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 1$$

Se $k = 4$, si vede subito che l'equazione corrispondente ad a_4 risulta essere indeterminata e dunque il sistema non ammette soluzioni. Da cui, l'equazione non ammette soluzioni $2\pi-$periodiche.
Se $k \neq 4$, risolvendo il sistema si conclude che $a_0 = 0$, $a_k = 1/(16 - k^2)$, a_4 arbitrario, $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $n \neq k, 4$. Analogamente, $b_2 = 1/12$, b_4 arbitrario, $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $n \neq 2, 4$. Dunque l'equazione ammette infinite soluzioni $2\pi-$periodiche:

$$u(x) = \frac{1}{(16 - k^2)} \cos(kx) + \frac{1}{12} \sin(2x) + a_4 \cos(4x) + b_4 \sin(4x), \quad a_4, b_4 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione trovata è chiaramente di classe C^2, ciò giustifica i passaggi formali effettuati.

Alle stesse conclusioni si poteva giungere anche osservando che il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 16$ è tale che $P(ik) = -k^2 + 16$ si annulla in $k = \pm 4$, e cercando soluzioni scritte sotto forma di serie di Fourier a coeff. complessi.