Equazioni differenziali del II ordine

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 5y' + 6y = f(x)$, con a) $f(x) = 7$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = e^{2x}$.

3. Sia y la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

si calcoli $y'(1)$.

4. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

5. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 3y = 0$.

6. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 3y = x + 2\cos x$.

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

8. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$.

9. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$.

10. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' - 2y' + y = f(x)$, con a) $f(x) = x^3 - 6x^2$, b) $f(x) = e^x + e^{2x}$.

11. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' + y = \sin x$.

12. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' + 5y' + 6y = f(x)$, con a) $f(x) = 2e^{-2x}$, b) $f(x) = \cos x$.

13. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 4y = 4\cos 2x$.

14. Sia y la soluzione dell'equazione differenziale: $y'' + 4y' + 4y = 0$, tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)e^{2x} = 2$. Si determini $y(0)$.

15. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

16. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

17. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

18. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{16}, \end{cases}$$

e tracciare il grafico della soluzione in un intorno di $x = 0$.

19. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$.

20. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 4y' + 13y = \sin 3x$.

21. a) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $y = xe^{-5x}$ sia soluzione di $y'' + ay' + by = 0$. b) Scrivere l'integrale generale dell'equazione coi valori di a e b trovati. c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 2$, e calcolarne l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$.

22. Determinare $f(x)$ tale che la funzione $y(x) = 1 + \cos 4x$ sia soluzione dell'equazione $y'' + 4y = f(x)$. Determinare l'integrale generale dell'equazione avente come termine noto la funzione $f(x)$ trovata.

23. Assegnata l'equazione differenziale $y'' - ay' = 0$, con $a \neq 0$, dire come deve essere scelto il parametro reale a affinché tutte le soluzioni siano limitate per $x > 0$. Determinare poi l'integrale generale dell'equazione $y'' - ay' = x$, e stabilirne il comportamento asintotico per $x \to +\infty$.

24. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 4y' = x$ che passa per l'origine ed è tangente nell'origine alla retta $y = \dfrac{1}{16}x$. Tracciare inoltre un grafico locale nell'intorno di $x = 0$ e scrivere la formula di Mac-Laurin arrestata al IV ordine.

Soluzioni.

1. $y = -e^{2x} + e^{3x}$.

2. a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \dfrac{7}{6}$, b) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \dfrac{1}{2}e^x$, c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - xe^{2x}$.

3. $y = -\dfrac{3}{2}e^{2x} + \dfrac{5}{2} + 3x$, $y'(1) = 3 - 3e^2$.

4. a) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$.

5. a) $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x$.

6. $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x + \dfrac{1}{3}x + \cos x$.

7. $y = e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x\right).$

8. $y = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{9}e^{3x}.$

9. $\bar{y} = -e^{-x} - \frac{8}{65}\cos x + \frac{1}{65}\sin x.$

10. a) $\bar{y} = x^3 - 6x - 12$, b) $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2e^x + e^{2x}.$

11. $y = -\frac{1}{2}x\cos x.$

12. a) $\bar{y} = 2xe^{-2x}$, b) $\bar{y} = \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$

13. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + x\sin 2x.$

14. $y = -e^{-2x}$, $y(0) = -1.$

15. $y = xe^{2x}.$

16. $y = -\cos\frac{1}{2}x + 6\sin\frac{1}{2}x + 1.$

17. $y = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x.$

18. $y = \frac{1}{32}\left(1 - e^{-4x} + 4x^2 - 2x\right)$, $y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{16}, y''(0) = -4y'(0) = -\frac{1}{4} < 0$, quindi la soluzione passa per l'origine, è tangente alla retta $y = \frac{1}{16}x$ e ha la concavità verso il basso.

19. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^3 + 4x^2 + 9x + 10.$

20. $y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) - \frac{3}{40}\cos 3x + \frac{1}{40}\sin 3x.$

21. a) $a = 10, b = 25$. b) $y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$. c) $y = 2xe^{-5x} \sim 2x$ per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo è 1.

22. $f(x) = 4(1 - 3\cos 4x)$. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 1 + \cos 4x.$

23. L'integrale generale del'equazione omogenea è $y(x) = c_1 e^{ax} + c_2$, le soluzioni sono limitate se $a < 0$. L'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 - \frac{1}{2a}x^2 - \frac{1}{a^2}x$. Per $x \to +\infty$, $y \sim -\frac{1}{2a}x^2$ se $a < 0$, $y \sim c_1 e^{ax}$ se $a > 0$.

24. $y(x) = \frac{1}{32}(1 - e^{-4x} + 4x^2 - 2x)$, $y''(0) = -4y'(0) = -\frac{1}{4}$, quindi la soluzione in un intorno di $x = 0$ è crescente e concava. Derivando l'equazione si ottiene $y'''(0) = 2, y^{(4)}(0) = -8$, quindi $y(x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.