## Funzioni a valori vettoriali e curve

Chiunque sa cos' è una curva, fino a che non ha studiato abbastanza matematica da confondersi attraverso il numero infinito di possibili eccezioni

*Felix Klein*

**1)** Sia $\gamma$ una curva regolare di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione biunivoca di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\varphi'(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$.
Definita la nuova parametrizzazione $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(\varphi(\tau))$, verificare che

$$\int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_\alpha^\beta \left| \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \right| d\tau$$

(Curve equivalenti e curve opposte hanno la stessa lunghezza)

**2)** Data una curva cartesiana di equazione

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}, \quad t \in [a, b]$$

dove $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, scrivere l'espressione del *versore tangente* $\mathbf{T}$, della sua derivata $\mathbf{T}'$ e del vettore $\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ (vettore curvatura). Verificare che in ogni punto in cui $f'' \neq 0$ il verso della normale principale è determinato dalla concavità della curva.

**3)** Dimostrare che in ogni punto $P$ della *spirale logaritmica* di equazione polare

$$\rho = e^\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

il raggio vettore $\overrightarrow{OP}$ ed il vettore tangente formano un angolo di $\pi/4$.

**4)** Calcolare la lunghezza della curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = \cosh t \cos t\,\mathbf{i} + \cosh t \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 1]$$

**5)** Si consideri la curva $\gamma$ ottenuta dall'intersezione del *cilindro* di equazione

$$x^2 + y^2 = 4$$

con il piano

$$z = x - y + 2$$

Definire una parametrizzazione $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ di $\gamma$ e calcolare il versore tangente in ogni punto.

Soluzioni.

**1)** Se $\varphi'(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau$, deve essere $\varphi'(\tau) > 0$ o $\varphi'(\tau) < 0$ per ogni $\tau$; nel primo caso $\varphi$ è strettamente crescente e $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Operando la sostituzione $t = \varphi(\tau)$ nel primo integrale, abbiamo

$$\int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau))\right|\varphi'(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\right| d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}\right| d\tau$$

Nell'ultimo passaggio si usa il teorema di derivazione delle funzioni composte (le tre componenti del vettore $\mathbf{r}(\varphi(\tau))$).
Nel caso $\varphi'(\tau) < 0$, $\varphi$ è strettamente decrescente e vale $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$. Con la stessa sostituzione, si ottiene

$$\int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_\beta^\alpha \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau))\right|\varphi'(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau))\right|(-\varphi'(\tau))\, d\tau =$$

$$\int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\right| d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}\right| d\tau$$

**2)**

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}, \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

Versore tangente:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}}\,\mathbf{i} + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}}\,\mathbf{j}$$

Derivata del versore tangente:

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{f'(t)f''(t)}{[1+f'(t)^2]^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{f''(t)}{[1+f'(t)^2]^{3/2}}\,\mathbf{j}$$

Il vettore curvatura è dato da

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\frac{f'(t)f''(t)}{[1+f'(t)^2]^{2}}\,\mathbf{i} + \frac{f''(t)}{[1+f'(t)^2]^{2}}\,\mathbf{j}$$

La normale principale è il *versore* diretto come il vettore curvatura. Si vede allora che il segno della componente lungo $\mathbf{j}$ della normale principale è determinato dal segno della derivata seconda $f''$ e quindi dalla concavità del grafico della funzione $f$.

**3)** Ponendo $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(\theta)$ si ricava l'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(\theta) = e^\theta \cos\theta\,\mathbf{i} + e^\theta \sin\theta\,\mathbf{j}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Il vettore tangente è

$$\mathbf{r}'(\theta) = e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)\,\mathbf{i} + e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)\,\mathbf{j}$$

Abbiamo allora

$$|\mathbf{r}(\theta)| = e^{\theta}; \qquad |\mathbf{r}'(\theta)| = \sqrt{2}\,e^{\theta}$$

e

$$\mathbf{r}(\theta)\cdot\mathbf{r}'(\theta) = e^{2\theta}$$

Detto $\alpha$ l'angolo tra $\mathbf{r}(\theta)$ e $\mathbf{r}'(\theta)$, si ottiene :

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}(\theta)\cdot\mathbf{r}'(\theta)}{|\mathbf{r}(\theta)|\,|\mathbf{r}'(\theta)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dunque $\alpha = \pi/4$, qualunque sia $\theta$.

**4)** Vettore tangente:

$$\mathbf{r}'(t) = (\sinh t\cos t - \cosh t\sin t)\,\mathbf{i} + (\sinh t\sin t + \cosh t\cos t)\,\mathbf{j} + \,\mathbf{k}$$

Lunghezza:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1}\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 \cosh t\,dt = \sqrt{2}\sinh 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$

**5)** La *proiezione sul piano xy* del sostegno della curva è la circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine, che si può parametrizzare con le equazioni

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Sostituendo nell'equazione del piano abbiamo allora

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 2(\cos t - \sin t + 1)\,\mathbf{k}$$

Vettore tangente

$$\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} - 2(\sin t + \cos t)\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8 + 8\sin t\cos t} = 2\sqrt{2 + \sin 2t}$$

Versore tangente

$$\mathbf{T}(t) = -\frac{\sin t}{\sqrt{2+\sin 2t}}\,\mathbf{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2+\sin 2t}}\,\mathbf{j} - \frac{\sin t\cos t}{\sqrt{2+\sin 2t}}\,\mathbf{k}$$