Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale	

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 20/11/2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_a(z) = \frac{\overline{z} + 1 - ia}{z+1}.$$

- (punti 6) Determinare l'insieme $A_a := \{z \in \mathbb{C} : f_a(z) \in \mathbb{R}\}$. Disegnare A_a nel piano complesso.
- (punti 3) Determinare l'insieme $B_a := \{w \in \mathbb{C} : w = 1 - 2iz, z \in A_a\}$. Disegnare B_a nel piano complesso, specificando le operazioni geometriche svolte.

Soluzione. Si ha, posto $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}+1-ia}{z+1} &= \frac{[x+1-i(a+y)](x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{(x+1)^2 - y(a+y) - i(x+1)(2y+a)}{(x+1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

L'esercizio richiede di trovare i valori di $z \in \mathbb{C}$ per cui $\operatorname{Im} f_a(z) = 0$, il che accade, per i calcoli precedenti, se e solo se $x = -1$ (eccettuato il punto $z = -1$) oppure $y = -a/2$. L'insieme richiesto è dunque l'unione delle due rette appena scritte, eccetto il punto $z = -1$.

Circa la seconda parte, si noti che la trasformazione assegnata risulta dalla composizione delle seguenti operazioni, nell'ordine: dilatazione di un fattore 2 ($z \mapsto 2z$), rotazione in senso orario di angolo $\pi/2$ con centro nell'origine ($2z \mapsto -2iz$), traslazione di un'unità nel verso positivo dell'asse reale ($-2iz \mapsto 1-2iz$). Effettuando tali operazioni sulle rette di cui sopra si ottengono le rette $y = 2$ (eccetto il punto $z = 1 + 2i$) e $x = 1 - a$.

2. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} x'_1 = k^2 x_1 + x_3 - x_4 \\ x'_2 = 2x_1 + (k-1)x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x'_3 = 3x_1 + (k-1)x_2 + 3x_3 + (k^2-4)x_4 \end{cases}$$

(a) (punti 6) Determinare le dimensioni di $\mathrm{Ker}\,(f_k)$ e $\mathrm{Im}\,(f_k)$ al variare del parametro k.

(b) (punti 3) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (2,1,1)$, $P_2 = (0,1,3)$ e $P_3 = (-1,-1,-2)$. Si verifichi che π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(c) (punti 3) Posto $k = -1$, determinare l'insieme delle controimmagini di π attraverso f_{-1}.

Soluzione

- La matrice che rappresenta la funzione è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & k-1 & 2 & -2 \\ 3 & k-1 & 3 & k^2-4 \end{pmatrix}$$

Le colonne indipendenti di A_k formano una base dell'immagine di f_k ed il loro numero coincide con il rango della matrice. Per determinare il rango di A_k analizziamo, per esempio, il determinante formato dalle prime tre colonne:

$$\det \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 3 & k-1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (k-1)(k^2-1) = (k-1)^2(k+1)$$

Per semplificare i calcoli si è sottratto la seconda riga dalla terza. Il rango di A_k è tre se $k \neq 1$ e $k \neq -1$.
Se $k = 1$, la matrice diventa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Tutte le righe (colonne) sono uguali e/o proporzionali, pertanto il rango vale 1.
Se $k = -1$, la matrice diventa:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Nelle prime due colonne esiste un minore di ordine due con determinante diverso da zero, mentre la terza e la quarta colonna sono proporzionali alla prima. In questo caso il rango vale 2.
Per il teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo vale $4 - Rk(A_k)$. Ricapitolando:

$$\begin{aligned} k \neq \pm 1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_k)) = 3, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_k)) = 1 \\ k = -1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_{-1})) = 2, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_{-1})) = 2 \\ k = +1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_1)) = 1, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_1)) = 3 \end{aligned}$$

- L'equazione cartesiana di un piano passante per i punti P_1, P_2 e P_3 (non allineati) è:

$$(\boldsymbol{P_1P_2} \times \boldsymbol{P_1P_3}) \cdot \boldsymbol{PP_1} = 0.$$

Posto $P = (x,y,z)$ si ha:

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P_1P_2} \times \boldsymbol{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'equazione del piano π è quindi: $x - 3y + z = 0$. Poiché il piano contiene l'origine, esso è necessariamente un autospazio.

- Occorre trovare le soluzioni x_1 , x_2 , x_3 e x_4 del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

con il vincolo: $x'_1 - 3x'_2 + x'_3 = 0$. Pertanto deve valere:

$$x_1 + x_3 - x_4 - 3(2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4) + 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0$$

che implica: $x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4$, avendo scelto x_2 , x_3 e x_4 parametri liberi della soluzione. L'insieme delle controimmagini è un sottospazio tridimensionale generato dai vettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

.

3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} h & 1 & h+2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

- (punti 6) Stabilire se la matrice A sia diagonalizzabile.
- (punti 5) Stabilire per quale valore del parametro reale h vi sia relazione di similitudine tra le matrici A e B_h .

Soluzione

- Cerchiamo dapprima gli autovalori della matrice A . Conviene sottrarre la prima riga alla terza:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(-\lambda^2 - \lambda) = -\lambda(\lambda+1)^2$$

Gli autovalori di A sono 0 (semplice) e -1 con molteplicità algebrica 2. Una matrice è diagonalizzabile se e soltanto se la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con la molteplicità geometrica del relativo autospazio. È noto che se un autovalore è semplice (dimensione algebrica 1), allora anche l'autospazio relativo è monodimensionale. Occorre determinare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = -1$. Calcoliamo il rango della matrice:

$$A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché le righe (colonne) sono proporzionali tra loro il rango vale 1, pertanto A è diagonalizzabile e si ha: $A \sim \Lambda$, dove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Condizione necessaria affinché due matrici siano simili è che abbiano gli stessi autovalori. Gli autovalori della matrice triangolare superiore B_h sono h (semplice) e $h-1$ (doppio) pertanto gli autovalori delle due matrici coincidono se e solo se $h = 0$. Tale condizione non è sufficiente: occorre mostrare che anche B_0 sia diagonalizzabile e simile a Λ . La matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è triangolare superiore ed ha gli stessi autovalori di A . L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ ha dimensione due, infatti la matrice

$$B_0 + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Dunque B_0 è diagonalizzabile e $B_0 \sim \Lambda \sim A$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale	

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 20/11/2015
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_a(z) = \frac{1 - \overline{z} - ia}{1 - z}.$$

- (punti 6) Determinare l'insieme $A_a := \{z \in \mathbb{C} : f_a(z) \in \mathbb{R}\}$. Disegnare A_a nel piano complesso.
- (punti 3) Determinare l'insieme $B_a := \{w \in \mathbb{C} : w = -i(2z+1), z \in A_a\}$. Disegnare B_a nel piano complesso, specificando le operazioni geometriche svolte.

Soluzione. Si procede come nella versione A. Risultano, per quanto riguarda il primo punto, le rette $x = 1$ (eccetto il punto $z = 1$) e $y = a/2$. Circa il secondo punto, le operazioni sono le seguenti: dilatazione di un fattore due, traslazione di un'unità nel verso positivo dell'asse reale, rotazione in senso orario di angolo $\pi/2$, centrata nell'origine. Ne risultano le rette $y = -3$ (eccetto il punto $z = -3i$) e $x = a$.

2. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - k^2 x_4 \\ x'_2 = 2x_1 + (k^2+3)x_2 + (k+1)x_3 - 2x_4 \\ x'_3 = 3x_1 + 6x_2 + (k+1)x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

(a) (punti 6) Determinare le dimensioni di $\mathrm{Ker}\,(f_k)$ e $\mathrm{Im}\,(f_k)$ al variare del parametro k.

(b) (punti 3) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (1,1,2)$, $P_2 = (0,1,1)$ e $P_3 = (3,-1,2)$. Si verifichi che π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(c) (punti 3) Posto $k = 1$, determinare l'insieme delle controimmagini di π attraverso f_1.

Soluzione

- La matrice che rappresenta la funzione è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -k^2 \\ 2 & k^2+3 & k+1 & -2 \\ 3 & 6 & k+1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ragionando come nell'esercizio 2 della versione A si ottiene:

$$\begin{aligned} k \neq \pm 1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_k)) = 3, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_k)) = 1 \\ k = -1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_{-1})) = 1, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_{-1})) = 3 \\ k = 1 &\implies \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_1)) = 2, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_1)) = 2 \end{aligned}$$

- Ragionanando come nell'esercizio 2 della versione A si ricava l'equazione del piano π:

$$x + y - z = 0$$

- Occorre trovare le soluzioni x_1, x_2, x_3 e x_4 del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

con il vincolo: $x'_1 + x'_2 - x'_3 = 0$. Pertanto deve valere:

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + (2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4) - (3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4) = 0$$

cioè: $0 = 0$, pertanto l'insieme delle controimmagini coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^4$.

3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} h & 0 & 3 \\ 0 & 2h-1 & 4h-3 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

- (punti 6) Stabilire se la matrice A sia diagonalizzabile.
- (punti 5) Stabilire per quale valore del parametro reale h vi sia relazione di similitudine tra le matrici A e B_h .

Soluzione

- Si cercano innanzitutto gli autovalori di A . Dal polinomio caratteristico si ha:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda = 0$ (semplice) e $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 1$. Calcoliamo il rango della matrice:

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché le righe (colonne) sono proporzionali tra loro il rango vale 1, pertanto A è diagonalizzabile e si ha: $A \sim \Lambda$, dove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Condizione necessaria affinché due matrici siano simili è che abbiano gli stessi autovalori. Gli autovalori della matrice triangolare superiore B_h sono h , $2h-1$ e $1-h$, pertanto gli autovalori delle due matrici coincidono se e solo se $h = 1$. Tale condizione non è sufficiente: occorre mostrare che anche B_1 sia diagonalizzabile e simile a Λ . La matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha gli stessi autovalori di A . L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ ha dimensione due, infatti la matrice

$$B_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Dunque B_1 è diagonalizzabile e $B_1 \sim \Lambda \sim A$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale	

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione C		**Prova scritta del 20/11/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_a(z) = \frac{z + 1 - ia}{\overline{z} + 1}.$$

- (punti 6) Determinare l'insieme $A_a := \{z \in \mathbb{C} : f_a(z) \in \mathbb{R}\}$. Disegnare A_a nel piano complesso.
- (punti 3) Determinare l'insieme $B_a := \{w \in \mathbb{C} : w = 2iz - 4, z \in A_a\}$. Disegnare B_a nel piano complesso, specificando le operazioni geometriche svolte.

Soluzione. Si procede come nella versione A. Risultano, per quanto riguarda il primo punto, le rette $x = -1$ (eccetto il punto $z = -1$)e $y = a/2$. Circa il secondo punto, le operazioni sono le seguenti: dilatazione di un fattore due, rotazione in senso antiorario di angolo $\pi/2$, centrata nell'origine, traslazione di quattro unità nel verso negativo dell'asse reale. Ne risultano le rette $y = -2$ (eccetto il punto $z = -2i - 4$) e $x = -a - 4$.

2. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} x_1' = k^2 x_1 + x_3 - x_4 \\ x_2' = 3x_1 + (k-1)x_2 + 3x_3 - 3x_4 \\ x_3' = -2x_1 + (1-k)x_2 - 2x_3 - (k^2+1)x_4 \end{cases}$$

(a) (punti 6) Determinare le dimensioni di $\mathrm{Ker}\,(f_k)$ e $\mathrm{Im}\,(f_k)$ al variare del parametro k.

(b) (punti 3) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (2,1,1)$, $P_2 = (0,1,-1)$ e $P_3 = (3,4,-1)$. Si verifichi che π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(c) (punti 3) Posto $k = -1$, determinare l'insieme delle controimmagini di π attraverso f_{-1}.

Soluzione

- La matrice che rappresenta la funzione è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & k-1 & 3 & -3 \\ -2 & 1-k & -2 & -(k^2+1) \end{pmatrix}$$

Ragionando come nell'esercizio 2 della versione A si ottiene:

$$\begin{aligned} k \neq 1 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_k)) = 3, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_k)) = 1 \\ k = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f_1)) = 2, \quad \mathrm{Dim}\,(\mathrm{Ker}\,(f_1)) = 2 \end{aligned}$$

- Ragionanando come nell'esercizio 2 della versione A si ricava l'equazione del piano π:

$$x - y - z = 0$$

- Occorre trovare le soluzioni x_1, x_2, x_3 e x_4 del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

con il vincolo: $x_1' - x_2' - x_3' = 0$. Pertanto deve valere:

$$x_1 + x_3 - x_4 - (3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4) - (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4) = 0$$

che implica: $x_4 = 0$, e x_1, x_2, x_3 parametri liberi della soluzione.
L'insieme delle controimmagini è un sottospazio tridimensionale generato dai vettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

.

3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ -1 & 2-h & 0 \\ -1-h & 0 & 2-h \end{pmatrix}$$

- (punti 6) Stabilire se la matrice A sia diagonalizzabile.
- (punti 5) Stabilire per quale valore del parametro reale h vi sia relazione di similitudine tra le matrici A e B_h .

Soluzione

- Si cercano innanzitutto gli autovalori di A . Dal polinomio caratteristico si ha:

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda = 0$ (semplice) e $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 1$. Calcoliamo il rango della matrice:

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché le righe (colonne) sono proporzionali tra loro il rango vale 1, pertanto A è diagonalizzabile e si ha: $A \sim \Lambda$, dove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Condizione necessaria affinché due matrici siano simili è che abbiano gli stessi autovalori. Gli autovalori della matrice triangolare inferiore B_h sono $1-h$ (semplice) e $2-h$ (doppio) pertanto gli autovalori delle due matrici coincidono se e solo se $h = 1$. Tale condizione non è sufficiente: occorre mostrare che anche B_1 sia diagonalizzabile e simile a Λ . La matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha gli stessi autovalori di A . L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ ha dimensione due, infatti la matrice

$$B_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Dunque B_1 è diagonalizzabile e $B_1 \sim \Lambda \sim A$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale	

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione D		**Prova scritta del 20/11/2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_a(z) = \frac{1 - z - ia}{1 - \overline{z}}.$$

- (punti 6) Determinare l'insieme $A_a := \{z \in \mathbb{C} : f_a(z) \in \mathbb{R}\}$. Disegnare A_a nel piano complesso.
- (punti 3) Determinare l'insieme $B_a := \{w \in \mathbb{C} : w = 3i(z-2), z \in A_a\}$. Disegnare B_a nel piano complesso, specificando le operazioni geometriche svolte.

Soluzione. Si procede come nella versione A. Risultano, per quanto riguarda il primo punto, le rette $x = 1$ (eccetto il punto $z = 1$) e $y = -a/2$. Circa il secondo punto, le operazioni sono le seguenti: traslazione di due unità nel verso negativo dell'asse reale dilatazione di un fattore tre, rotazione in senso antiorario di angolo $\pi/2$, centrata nell'origine. Ne risultano le rette $y = -3$ (eccetto il punto $z = -3i$) e $x = 3a/2$.

2. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - k^2 x_4 \\ x_2' = (k^2-4)x_1 - 6x_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + (k+1)x_3 + x_4 \end{cases}$$

(a) (punti 6) Determinare le dimensioni di Ker (f_k) e Im (f_k) al variare del parametro k.

(b) (punti 3) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (1,1,3)$, $P_2 = (1,0,2)$ e $P_3 = (0,1,1)$. Si verifichi che π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(c) (punti 3) Posto $k = 1$, determinare l'insieme delle controimmagini di π attraverso f_1.

Soluzione

- La matrice che rappresenta la funzione è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -k^2 \\ k^2-4 & -6 & k+1 & 3 \\ -1 & -2 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ragionando come nell'esercizio 2 della versione A si ottiene:

$$\begin{array}{lcl} k \neq \pm 1 & \Longrightarrow & \text{Dim (Im } (f_k)) = 3, \quad \text{Dim (Ker } (f_k)) = 1 \\ k = -1 & \Longrightarrow & \text{Dim (Im } (f_{-1})) = 1, \quad \text{Dim (Ker } (f_{-1})) = 3 \\ k = 1 & \Longrightarrow & \text{Dim (Im } (f_1)) = 2, \quad \text{Dim (Ker } (f_1)) = 2 \end{array}$$

- Ragionando come nell'esercizio 2 della versione A si ricava l'equazione del piano π:

$$2x + y - z = 0$$

- Occorre trovare le soluzioni x_1, x_2, x_3 e x_4 del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -6 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

con il vincolo: $2x_1' + x_2' - x_3' = 0$. Pertanto deve valere:

$$2(x_1 + 2x_2 - x_4) + (-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4) - (-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4) = 0$$

cioè $0 = 0$, pertanto l'insieme delle controimmagini coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^4$.

3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2h-1 & 0 \\ h-3 & 4h-1 & -h \end{pmatrix}$$

- (punti 6) Stabilire se la matrice A sia diagonalizzabile.
- (punti 5) Stabilire per quale valore del parametro reale h vi sia relazione di similitudine tra le matrici A e B_h .

Soluzione

- Si cercano innanzitutto gli autovalori di A . Dal polinomio caratteristico si ha:

  $$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda(\lambda+1)^2 = 0$$

  Gli autovalori sono $\lambda = 0$ (semplice) e $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = -1$. Calcoliamo il rango della matrice:

  $$A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Poiché le righe (colonne) sono proporzionali tra loro il rango vale 1, pertanto A è diagonalizzabile e si ha: $A \sim \Lambda$, dove:

  $$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Condizione necessaria affinché due matrici siano simili è che abbiano gli stessi autovalori. Gli autovalori della matrice triangolare inferiore B_h sono $h-1$, $2h-1$, $-h$, pertanto gli autovalori delle due matrici coincidono se e solo se $h = 0$. Tale condizione non è sufficiente: occorre mostrare che anche B_0 sia diagonalizzabile e simile a Λ . La matrice

  $$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  è triangolare inferiore ed ha gli stessi autovalori di A . L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ ha dimensione due, infatti la matrice

  $$B_0 + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  ha rango 1. Dunque B_0 è diagonalizzabile e $B_0 \sim \Lambda \sim A$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 12/2/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9+2)

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor centrato in $x = 0$ per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cos(1-\cos x)} - \frac{1}{\cos(\sin x^2)}.$$

- Si ponga, per $k = 2, 3, \ldots,$ $f_k(x) := \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k \text{ volte}}(x)$. Determinare k in modo che esista $c \neq 0$ tale che $f_k(x) \sim c\, x^{1024}$ per $x \to 0$.

Soluzione. Si ha, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(1-\cos x)} &= \frac{1}{\cos\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]^2 + o(x^4)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^4}{8} + o(x^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(\sin x^2)} &= \frac{1}{\cos\left[x^2 + o(x^4)\right]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left[x^2 + o(x^4)\right]^2 + o(x^4)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi, sempre per $x \to 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - \left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = -\frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Riguardo alla seconda domanda, il fatto che f non si annulli in un intorno di $x = 0$ privato dell'origine (come appena dimostrato) implica che f_k è ben definita per ogni k (procedere per induzione). Inoltre, per $x \to 0$:

$$f_2(x) = f\left(-\frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\right) = -\frac{3}{8}\left(-\frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\right)^4 + o(x^{16}) = \left(-\frac{3}{8}\right)^5 x^{16} + o(x^{16}).$$

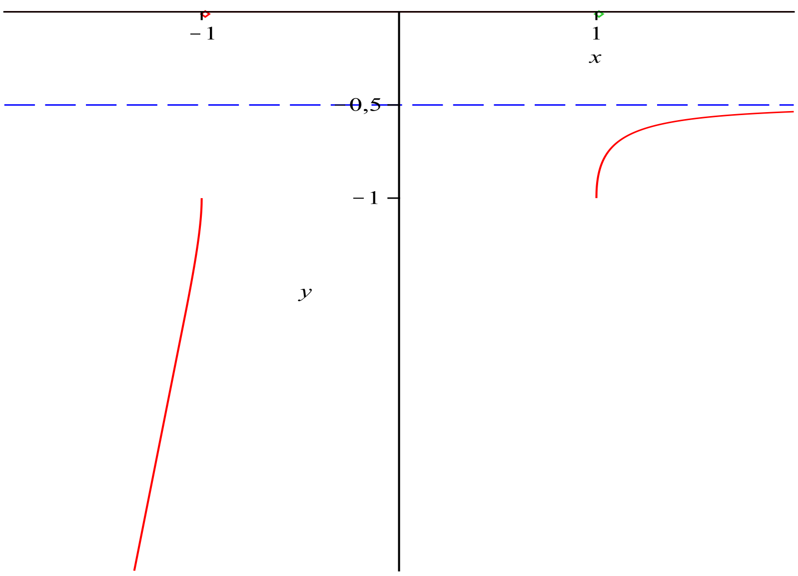
Procedendo analogamente per induzione si ottiene, per un opportuno $c_k \neq 0$, $f_k(x) = c_k x^{4^k} + o(x^{4^k})$, dunque occorre scegliere k in modo che $4^k = 1024$, cioè $k = 5$.

2. (punti 12) Studiare la funzione
$$f(x) = x\sqrt{x^2-1} - x^2.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata al bordo del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita su $D := (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Non vi sono simmetrie. Chiaramente $f(\pm 1) = -1$. Inoltre, per $x \geq 1$:
$$f(x) = x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1\right) = x^2\left[-\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \to -\frac{1}{2} \text{ per } x \to +\infty,$$
così che la retta $y = -1/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$. Invece per $x \leq -1$:
$$f(x) = -x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1\right) \to -\infty \text{ per } x \to -\infty.$$
L'ultimo calcolo mostra anche che $f(x) \sim -2x^2$ per $x \to -\infty$, dunque non vi sono asintoti obliqui in tale limite.

Lo studio del segno è immediato e mostra che $f(x) < 0 \quad \forall x \in D$. La funzione è derivabile per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e, ivi, vale:
$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} - 2x.$$
Ciò mostra immediatamente che $f'(x) > 0$ se $x < -1$. Risolvendo esplicitamente la corrispondente disequazione si vede anche che la stessa conclusione vale per $x > 1$. Dunque f è crescente sia in $(-\infty, -1]$ che in $[1, +\infty)$. Si noti infine che
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty,$$
dunque la tangente al grafico di f tende a diventare verticale in tali limiti. Si noti che, malgrado ciò non sia richiesto, questo fatto e l'informazione sul comportamento per $x \to -\infty$ di f implicano l'esistenza di almeno un flesso per $x < -1$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



3. (punti 7+2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+2)}{x^2}.$$

- Calcolare la primitiva di f che passa per il punto $(1,0)$;
- stabilire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_{-2}^{+\infty} x^a\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Integriamo per parti. Vale:

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x+2)}{x^2}\, \mathrm{d}x &= -\frac{\log(x+2)}{x} + \int \frac{1}{x(x+2)}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(x+2)}{x} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(x+2)}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+2}\right| + c\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. La richiesta che la primitiva passi per il punto (1,0) è soddisfatta se e solo se $c = \frac{3}{2}\log 3$. Riguardo al secondo punto, l'integrale richiesto non è finito per alcun valore di a . Infatti, la funzione integranda si comporta come const. x^{a-2} per $x \to 0$, dunque in un intorno di tale punto occorre che valga $a > 1$ affinché l'integrale converga in un intorno dell'origine. Per $x \to +\infty$ la funzione integranda si comporta come $x^{a-2}\log x$, dunque c'è convergenza in un intorno dell'infinito se e solo se $a < 1$. Dunque per nessun valore di a c'è convergenza sia in un intorno di zero che in un intorno di $+\infty$ (vi è invece sempre convergenza in un intorno di -2 , ma ciò non cambia la conclusione precedente).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 12/2/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9+2)

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor centrato in $x = 0$ per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cos(1-\cos(2x))} - \frac{1}{\cos(\sin(4x^2))}.$$

- Si ponga, per $k = 2, 3, \ldots,$ $f_k(x) := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ volte}}(x)$. Determinare k in modo che esista $c \neq 0$ tale che $f_k(x) \sim c\, x^{256}$ per $x \to 0$.

Soluzione. Si ha, per $x \to 0$:

$$\frac{1}{\cos(1-\cos(2x))} = \frac{1}{\cos\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right]^2 + o(x^4)}$$
$$= \frac{1}{1 - 2x^4 + o(x^4)} = 1 + 2x^4 + o(x^4);$$

$$\frac{1}{\cos(\sin(4x^2))} = \frac{1}{\cos\left[4x^2 + o(x^4)\right]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left[4x^2 + o(x^4)\right]^2 + o(x^4)}$$
$$= \frac{1}{1 - 8x^4 + o(x^4)} = 1 + 8x^4 + o(x^4).$$

Quindi, sempre per $x \to 0$:

$$f(x) = 1 + 2x^4 + o(x^4) - \left(1 + 8x^4 + o(x^4)\right) = -6x^4 + o(x^4).$$

Riguardo alla seconda domanda, il fatto che f non si annulli in un intorno di $x = 0$ privato dell'origine (come appena dimostrato) implica che f_k è ben definita per ogni k (procedere per induzione). Inoltre, per $x \to 0$:

$$f_2(x) = f\left(-6x^4 + o(x^4)\right) = -6\left(-6x^4 + o(x^4)\right)^4 + o(x^{16}) = (-6)^5\, x^{16} + o(x^{16}).$$

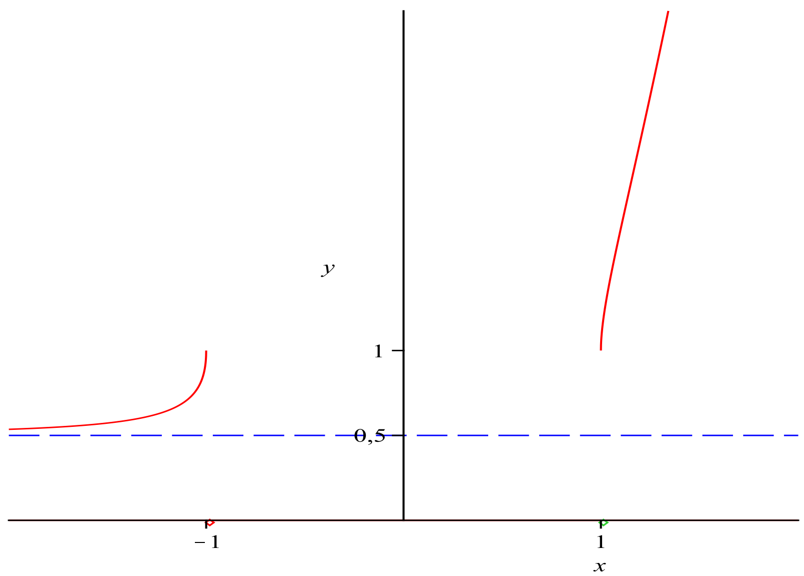
Procedendo analogamente per induzione si ottiene, per un opportuno $c_k \neq 0$, $f_k(x) = c_k x^{4^k} + o(x^{4^k})$, dunque occorre scegliere k in modo che $4^k = 256$, cioè $k = 4$.

2. (punti 12) Studiare la funzione
$$f(x) = x\sqrt{x^2-1} + x^2.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata al bordo del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita su $D := (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Non vi sono simmetrie. Chiaramente $f(\pm 1) = +1$. Inoltre, per $x \leq -1$:
$$f(x) = x^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = x^2\left[\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \to \frac{1}{2} \text{ per } x \to -\infty,$$
così che la retta $y = 1/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to -\infty$. Invece per $x \geq 1$:
$$f(x) = x^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right) \to +\infty \text{ per } x \to +\infty.$$
L'ultimo calcolo mostra anche che $f(x) \sim 2x^2$ per $x \to +\infty$, dunque non vi sono asintoti obliqui in tale limite.

Lo studio del segno è immediato e mostra che $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$. La funzione è derivabile per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e, ivi, vale:
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2-1}} + 2x.$$
Ciò mostra immediatamente che $f'(x) > 0$ se $x > 1$. Risolvendo esplicitamente la corrispondente disequazione si vede anche che la stessa conclusione vale per $x < -1$. Dunque f è crescente sia in $(-\infty, -1]$ che in $[1, +\infty)$. Si noti infine che
$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty,$$
dunque la tangente al grafico di f tende a diventare verticale in tali limiti. Si noti che, malgrado ciò non sia richiesto, questo fatto e l'informazione sul comportamento per $x \to +\infty$ di f implicano l'esistenza di almeno un flesso per $x > 1$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



3. (punti 7+2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+3)}{x^2}.$$

- Calcolare la primitiva di f che passa per il punto $(1,0)$;
- stabilire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_{-3}^{+\infty} x^a \, f(x) \, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Integriamo per parti. Vale:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x+3)}{x^2} \, \mathrm{d}x &= -\frac{\log(x+3)}{x} + \int \frac{1}{x(x+3)} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(x+3)}{x} + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(x+3)}{x} + \frac{1}{3} \log \left| \frac{x}{x+3} \right| + c \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. La richiesta che la primitiva passi per il punto (1,0) è soddisfatta se e solo se $c = \frac{4}{3} \log 4$. Riguardo al secondo punto, l'integrale richiesto non è finito per alcun valore di a . Infatti, la funzione integranda si comporta come const. x^{a-2} per $x \to 0$, dunque in un intorno di tale punto occorre che valga $a > 1$ affinché l'integrale converga in un intorno dell'origine. Per $x \to +\infty$ la funzione integranda si comporta come $x^{a-2} \log x$, dunque c'è convergenza in un intorno dell'infinito se e solo se $a < 1$. Dunque per nessun valore di a c'è convergenza sia in un intorno di zero che in un intorno di $+\infty$ (vi è invece sempre convergenza in un intorno di -3 , ma ciò non cambia la conclusione precedente).

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 29/2/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 4+4) Sia A_α la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & \alpha-4 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 2-\alpha & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix}$$

e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = A_\alpha \boldsymbol{v}$, dove $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

- Determinare il nucleo di f_α, esibendone una base, al variare del parametro α.
- Discutere la diagonalizzabilità di A_α limitatamente al caso $\alpha = 0$.

Soluzione. Il rango della matrice A_α è 3 se il suo determinante è non nullo. Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha & \alpha-4 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 2-\alpha & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 2-\alpha & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \alpha^2(2-\alpha).$$

Pertanto, se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$, l'immagine di f_α ha dimensione tre e, per il teorema di nullità più rango, il nucleo è banale: $\ker(f_\alpha) = \mathbf{0}$.

Discutiamo i restanti casi:

Se $\alpha = 2$ la matrice diventa:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_2 vale evidentemente 2, pertanto il nucleo è monodimensionale.
Per determinare una base del nucleo di f_2 si risolve il sistema omogeneo $A_2\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ha: $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ e $z = 0$.
Come base per il nucleo si può scegliere il vettore $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)^t$.

Se $\alpha = 0$ la matrice diventa:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_0 vale 1 (due righe tra loro opposte e una nulla), pertanto il nucleo è bidimensionale.
Per determinare una base del nucleo di f_0 si risolve il sistema omogeneo $A_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Si ha: $x = -2z$, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.
Come base per il nucleo si può scegliere la coppia di vettori $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)^t$ e $(-2, 0, 1)^t$.

Per rispondere al secondo quesito determiniamo gli autovalori della matrice A_0:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(2-\lambda),$$

da cui $\mathrm{Sp}(A) = \{0^2, 2^1\}$.
Abbiamo già visto che il nucleo, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore 0, è bidimensionale, perciò la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica, quindi la matrice è diagonalizzabile.

2. (punti 6) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ vale la diseguaglianza:

$$|\mathrm{Re}\,[(z+1)(z-3)]| \geq |(z+1)|\,|(z-3)|$$

Soluzione. Dato che $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si ponga $w := (z+1)(z-3)$ e si risolva dapprima la disequazione $|\mathrm{Re}\, w| \geq |w|$. È immediato verificare che tale disequazione è risolta, posto, $w = x + iy$, se e solo se $y = 0$, cioè se e solo se w è reale. Dobbiamo quindi porre $\mathrm{Im}\,[(z+1)(z-3)] = 0$. Si vede subito che, posto $z = a + ib$, si ha

$$\mathrm{Im}\,[(z+1)(z-3)] = 2b(a-1).$$

Quindi la disequazione è soddisfatta se $b = 0$ (cioè sull'asse reale) oppure se $a = 1$ (cioè se $z = 1 + ib$ con $b \in \mathbb{R}$).

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^2-1) - \frac{x-2}{x-1}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità (questi ultimi in modo qualitativo). Lo studio dettagliato del segno della funzione non è richiesto, si indichino solo le informazioni qualitative immediatamente disponibili su tale argomento dallo studio dei restanti punti. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita se $|x| > 1$. Essa non è né pari né dispari. Vale:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La crescita di f all'infinito è logaritmica, dunque, non vi sono asintoti obliqui ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$). La funzione è derivabile nel proprio insieme di definizione. Calcoli elementari mostrano che, se $|x| > 1$,

$$f'(x) = \frac{2x^2-3x-1}{(x-1)^2(x+1)} \quad \text{se } |x| > 1.$$

Il numeratore di tale espressione si annulla se $x = (3 \pm \sqrt{17})/4$, ma solo la soluzione corrispondente al segno più appartiene all'insieme di definizione di f, dunque $x_1 := (3+\sqrt{17})/4$ è un punto stazionario per f. Lo studio del segno di f' è immediato e dà:

$$f'(x) < 0 \text{ se } x \in (-\infty,-1) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right), \; f'(x) > 0 \text{ se } x \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right).$$

La funzione è dunque decrescente in $(-\infty,-1)$ e in $\left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, crescente in $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$. Il punto x_1 è di minimo relativo. Ovviamente non vi sono estremi assoluti.

Riguardo al segno di f, le considerazioni precedenti mostrano che esiste un solo punto $x_2 < -1$ in cui f si annulla e che f è positiva per $x < x_2$, negativa per $x \in (x_2,-1)$. Non è invece del tutto immediato stabilire se vi sono zeri di f nella regione $x > 1$. Notiamo tuttavia, *sebbene non richiesto*, che la funzione $\log(x^2-1)$ è crescente per $x > 1$ e che evidentemente $x_1 \in (7/4, 2)$. Quindi, essendo $(x_1-2)/(x_1-1) < 0$, si ha:

$$f(x_1) > \log\left(\frac{49}{16} - 1\right) = \log\left(\frac{33}{16}\right) > 0.$$

Quindi la funzione è positiva in x_1 e dunque non ci sono zeri di f per $x > 1$.

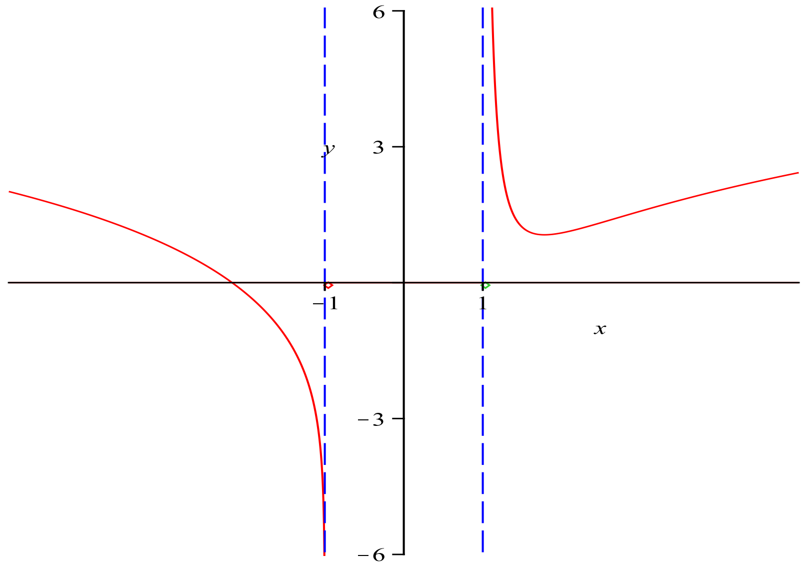
La funzione è due volte derivabile nel suo dominio. Calcoli elementari mostrano che

$$f''(x) = -2\frac{x^3-2x^2-x-2}{(x-1)^3(x+1)^2}.$$

Il polinomio $P(x) := x^3-2x^2-x-2$ non ha radici immediatamente visibili. Tuttavia $P'(x) = 3x^2-4x-1$ si annulla se e solo se $x = x_3 := (2-\sqrt{7})/3$ (punto di massimo relativo per P) oppure $x = x_4 := (2+\sqrt{7})/3$ (punto di minimo relativo per P). Siccome $P(0) = -2 < 0$ e $x_4 > 1$, ne segue che esiste uno e un solo punto $x_5 > 1$ in cui P, e dunque f'', si annullano. Lo studio del segno di f'' è a questo punto immediato per $x > 1$ e mostra che f è convessa se $x \in (1, x_5)$ (per costruzione $x_1 < x_5$ mentre f è concava se $x \in (x_5, +\infty)$. Il punto $x = x_5$ è di flesso.

Per $x < -1$ si procede come segue. Chiaramente x_3, punto di massimo relativo per P, soddisfa $x_3 \in (-1, 0)$. Tale proprietà e il fatto che $P(-1) < 0$ implicano che $P(x) < 0$ se $x < -1$. Dunque f è concava in $(-\infty,-1)$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



6
3
y
−1
1
x
−3
−6

4. (punti 7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \arctan\sqrt{1+2|x-1|}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Chiaramente vale ($t = x-1$)

$$\int_0^2 \arctan\sqrt{1+2|x-1|}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \arctan\sqrt{1+2|t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \arctan\sqrt{1+2t}\,\mathrm{d}t$$

essendo la funzione integranda nel secondo integrale pari. Calcoliamo una primitiva. Con la sostituzione $\sqrt{1+2t} = s$, da cui $1+2t = s^2$ e $\mathrm{d}t = s\,\mathrm{d}s$, si ha, integrando poi per parti e infine ritornando alla variabile t (poniamo la costante arbitraria ad esempio uguale a zero):

$$\begin{aligned}
2\int \arctan\sqrt{1+2t}\,\mathrm{d}t &= 2\int s\arctan s\,\mathrm{d}s \\
&= s^2\,\arctan s - \int \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= s^2\,\arctan s - \int \left(1 - \frac{1}{1+s^2}\right)\,\mathrm{d}s \\
&= -s + (s^2+1)\,\arctan s \\
&= -\sqrt{1+2t} + (2+2t)\arctan\sqrt{1+2t}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \arctan\sqrt{1+2|x-1|}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \arctan\sqrt{1+2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\sqrt{1+2t} + (2+2t)\arctan\sqrt{1+2t}\right]_0^1 \\
&= -\sqrt{3} + 4\arctan\sqrt{3} - (-1 + 2\arctan 1) \\
&= -\sqrt{3} + 4\,\frac{\pi}{3} + 1 - 2\,\frac{\pi}{4} \\
&= 1 + \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 29/2/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 4+4) Sia A_α la matrice così definita:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-3 & -\alpha & 6-\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha-3 & 0 & 6-\alpha \end{pmatrix}$$

e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = A_\alpha \boldsymbol{v}$, dove $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

- Determinare il nucleo di f_α, esibendone una base, al variare del parametro α.
- Discutere la diagonalizzabilità di A_α limitatamente al caso $\alpha = 0$.

Soluzione. Il rango della matrice A_α è 3 se il suo determinante è non nullo. Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha-3 & -\alpha & 6-\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha-3 & 0 & 6-\alpha \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha-3 & 0 & 6-\alpha \end{pmatrix} = \alpha^2(3-\alpha).$$

Pertanto, se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$, l'immagine di f_α ha dimensione tre e, per il teorema di nullità più rango, il nucleo è banale: $\ker(f_\alpha) = \mathbf{0}$.

Discutiamo i restanti casi:

Se $\alpha = 3$ la matrice diventa:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_3 vale evidentemente 2, pertanto il nucleo è monodimensionale.
Per determinare una base del nucleo di f_3 si risolve il sistema omogeneo $A_3\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ha: $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ e $z = 0$.
Come base per il nucleo si può scegliere il vettore $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)^t$.

Se $\alpha = 0$ la matrice diventa:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_0 vale 1 (due righe uguali e una nulla), pertanto il nucleo è bidimensionale.
Per determinare una base del nucleo di f_0 si risolve il sistema omogeneo $A_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Si ha: $x = 2z$, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.
Come base per il nucleo si può scegliere la coppia di vettori $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)^t$ e $(2, 0, 1)^t$.

Per rispondere al secondo quesito determiniamo gli autovalori della matrice A_0:

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(3-\lambda),$$

da cui $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0^2, 3^1\right\}$.
Abbiamo già visto che il nucleo, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore 0, è bidimensionale, perciò la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica, quindi la matrice è diagonalizzabile.

2. (punti 6) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ vale la diseguaglianza:

$$|\mathrm{Re}\,[(1-z)(z-3)]| \geq |(1-z)|\,|(z-3)|$$

Soluzione. Dato che $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si ponga $w := (z+1)(z-3)$ e si risolva dapprima la disequazione $|\mathrm{Re}\, w| \geq |w|$. È immediato verificare che tale disequazione è risolta, posto, $w = x + iy$, se e solo se $y = 0$, cioè se e solo se w è reale. Dobbiamo quindi porre $\mathrm{Im}\,[(1-z)(z-3)] = 0$. Si vede subito che, posto $z = a + ib$, si ha

$$\mathrm{Im}\,[(z+1)(z-3)] = 2b(2-a).$$

Quindi la disequazione è soddisfatta se $b = 0$ (cioè sull'asse reale) oppure se $a = 2$ (cioè se $z = 2 + ib$ con $b \in \mathbb{R}$).

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^2-1) - \frac{x+2}{x+1}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità (questi ultimi in modo qualitativo). Lo studio dettagliato del segno della funzione non è richiesto, si indichino solo le informazioni qualitative immediatamente disponibili su tale argomento dallo studio dei restanti punti. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita se $|x| > 1$. Essa non è né pari né dispari. Vale:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La crescita di f all'infinito è logaritmica, dunque, non vi sono asintoti obliqui ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$). La funzione è derivabile nel proprio insieme di definizione. Calcoli elementari mostrano che, se $|x| > 1$,

$$f'(x) = \frac{2x^2+3x-1}{(x+1)^2(x-1)} \quad \text{se } |x| > 1.$$

Il numeratore di tale espressione si annulla se $x = (-3 \pm \sqrt{17})/4$, ma solo la soluzione corrispondente al segno meno appartiene all'insieme di definizione di f, dunque $x_1 := -(3+\sqrt{17})/4$ è un punto stazionario per f. Lo studio del segno di f' è immediato e dà:

$$f'(x) < 0 \text{ se } x \left(-\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right), \ f'(x) > 0 \text{ se } x \in \left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}, -1\right) \cup (1, +\infty).$$

La funzione è dunque decrescente in $\left(-\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, crescente in $\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4}, -1\right)$ e in $(1, +\infty)$. Il punto x_1 è di minimo relativo. Ovviamente non vi sono estremi assoluti.

Riguardo al segno di f, le considerazioni precedenti mostrano che esiste un solo punto $x_2 > 1$ in cui f si annulla e che f è positiva per $x > x_2$, negativa per $x \in (1, x_2)$. Non è invece del tutto immediato stabilire se vi sono zeri di f nella regione $x < -1$. Notiamo tuttavia, *sebbene non richiesto*, che la funzione $\log(x^2-1)$ è decrescente per $x > 1$ e che evidentemente $x_1 \in (-2, -7/4)$. Quindi, essendo $(x_1+2)/(x_1+1) < 0$, si ha:

$$f(x_1) > \log\left(\frac{49}{16} - 1\right) = \log\left(\frac{33}{16}\right) > 0.$$

Quindi la funzione è positiva in x_1 e dunque non ci sono zeri di f per $x < -1$.

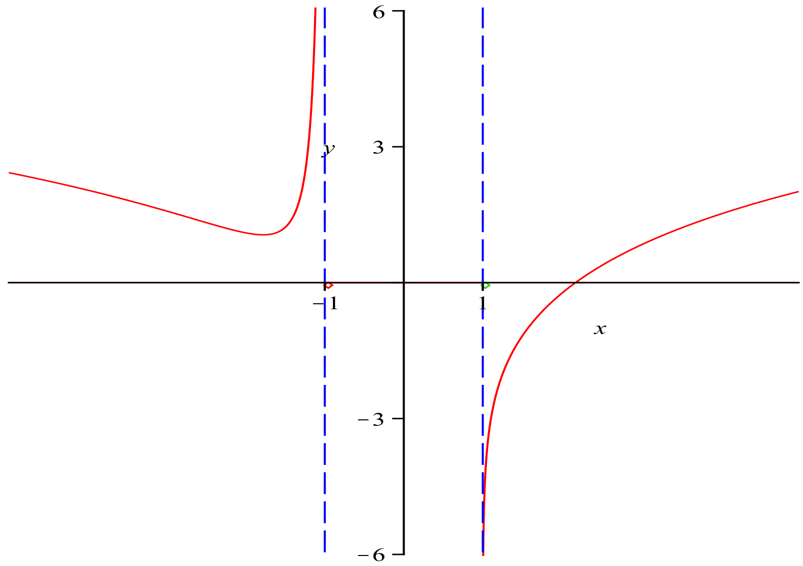
La funzione è due volte derivabile nel suo dominio. Calcoli elementari mostrano che

$$f''(x) = -2\frac{x^3+2x^2-x+2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Il polinomio $P(x) := x^3 + 2x^2 - x - 2$ non ha radici immediatamente visibili. Tuttavia $P'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ si annulla se e solo se $x = x_3 := (-2-\sqrt{7})/3$ (punto di massimo relativo per P) oppure $x = x_4 := (-2+\sqrt{7})/3$ (punto di minimo relativo per P). Siccome $P(0) = 2 > 0$ e $x_3 < -1$, ne segue che esiste uno e un solo punto $x_5 < -1$ in cui P, e dunque f'', si annullano. Lo studio del segno di f'' è a questo punto immediato per $x < -1$ e mostra che f è convessa se $x \in (x_5, -1)$ (per costruzione $x_5 < x_1$) mentre f è concava se $x \in (-\infty, x_5)$. Il punto $x = x_5$ è di flesso.

Per $x > 1$ si procede come segue. Chiaramente x_4, punto di minimo relativo per P, soddisfa $x_4 \in (0, 1)$. Tale proprietà e il fatto che $P(1) > 0$ implicano che $P(x) > 0$ se $x > 1$. Dunque f è concava in $(1, \infty)$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



6
3
y
−1
1
x
−3
−6

4. (punti 7) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^3 \arctan\sqrt{1+2|x-2|}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Chiaramente vale ($t = x - 2$)

$$\int_1^3 \arctan\sqrt{1+2|x-2|}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \arctan\sqrt{1+2|t|}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \arctan\sqrt{1+2t}\,\mathrm{d}t$$

essendo la funzione integranda nel secondo integrale pari. Si procede quindi come nella versione A.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 30/6/2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. Data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2h+1 & 3h+3 & h \end{pmatrix},$$

(a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare del parametro reale h;

(b) determinare, se esistono, soluzioni non banali del sistema omogeneo $A_h \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dove $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione. Cerchiamo gli autovalori della matrice ponendo il polinomio caratteristico uguale a zero:

$$\det(A_h - \lambda \mathbb{I}) = (h - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

da cui si ricavano tre soluzioni: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = h$.
Se $h \neq \pm 1$ gli autovalori sono tutti semplici, quindi la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica doppia. Una matrice è diagonalizzabile se per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica, ovvero con la dimensione dell'autospazio relativo. Per calcolarla si deve determinare il rango della matrice $A_h - \lambda \mathbb{I}$. In questo caso:

$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

il rango vale 1, infatti la matrice ha le prime due colonne proporzionali tra loro e la terza nulla. Quindi l'autopspazio relativo all'autovalore 1 è bidimensionale e la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = -1$ è l'autovalore $\lambda = -1$ ad avere molteplicità algebrica doppia. In questo caso:

$$A_{-1} + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il rango vale 2, infatti la sottomatrice quadrata formata dalle prime due righe, dalla seconda e dalla terza colonna ha determinante diverso da zero. Pertanto la matrice non è diagonalizzabile.
Relativamente al secondo punto si ricorda che l'equazione $A_h \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali se e solo se l'autovalore nullo appartiene allo spettro della matrice A_h. Questo accade se e solo se $h = 0$.
Il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

da cui $x = y = 0$ e z qualsiasi, ovvero $\boldsymbol{v} = (0, 0, t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. (punti 6) Calcolare le soluzioni della seguente equazione nel campo complesso:

$$\frac{z}{\overline{z}^2} = 4ie^{-i}\overline{z}$$

Soluzione. Posto, affinché l'equazione abbia senso, $z \neq 0$, si ponga $z = \varrho\, e^{i\vartheta}$ con $\varrho \neq 0$ e si riscriva l'equazione come:

$$\frac{\varrho\, e^{i\vartheta}}{\varrho^2\, e^{-2i\vartheta}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}-i}\varrho\, e^{-i\vartheta},$$

cioè

$$4\varrho^2 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-1-4\vartheta\right)} = 1.$$

Affinché ciò accada occorre in primo luogo che $\varrho = 1/2$, e inoltre che, per qualche $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} - 1 - 4\vartheta = 2k\pi$, cioè $\vartheta = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1 - 2k\pi\right)$. Le quattro soluzioni distinte che si ottengono in corrispondenza di tali ϑ corrispondono per esempio a $k = 0, 1, 2, 3$. Tali soluzioni appartengono dunque alla circonferenza di raggio $1/2$ centrata nell'origine e danno luogo ai vertici di un quadrato, uno dei quali è il punto $e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)}$.

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2+2}{|x+3|}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -3$. Non vi sono simmetrie. La funzione è ovviamente sempre positiva e si ha $f(0) = \sqrt{2/3}$. Vale:

$$\lim_{x\to -3^{\pm}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

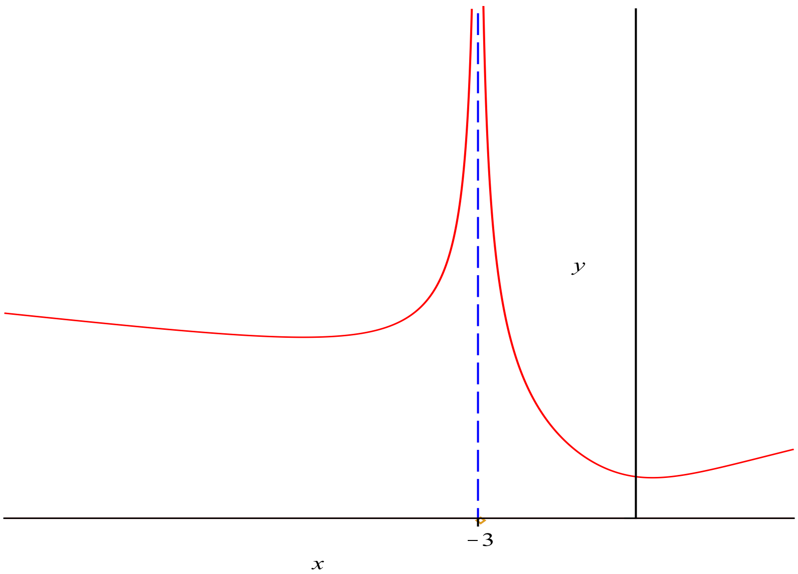
Dunque vi è l'asintoto verticale bilatero $x = -3$. Non vi sono asintoti obliqui, perche $f(x) \sim \sqrt{|x|}$ per $x \to \pm\infty$. Semplici calcoli mostrano che la derivata prima è definita per $x \neq 3$ e vale:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x-2}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+2}}, & \text{se } x > -3 \\ \\ -\frac{x^2+6x-2}{2(-x-3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+2}}, & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

La derivata si annulla per $x = -3 \pm \sqrt{11}$. Lo studio del segno della derivata è immediato e si vede che f è crescente in $[-3-\sqrt{11}, -3)$ e in $[-3-\sqrt{11}, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, -3-\sqrt{11}]$ e in $(-3, -3+\sqrt{11}]$. I punti $x_1 = -3-\sqrt{11}$ e $x_2 = -3+\sqrt{11}$ sono dunque entrambi punti di minimo relativo. È inoltre facile vedere che $f(x_1) > f(x_2)$, dunque dalle informazioni precedentemente dimostrate ne segue che x_2 è punto di minimo assoluto per f.

Sebbene non sia richiesto, si noti che le informazioni finora dedotte implicano l'esistenza di almeno due punti di flesso, uno per $x > x_2$ e un altro per $x < x_1$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



4. (punti 7) Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e diverso da zero e, per tale valore, calcolarlo:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\log(1+\cos x) - \cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}.$$

Soluzione. Si noti che, per esempio usando le formule di somma per il coseno,

$$\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Posto allora $x - \frac{\pi}{2} =: t$ il limite cercato coincide con

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\log(1-\sin t) + \sin t}{t^\alpha}.$$

Sviluppiamo il numeratore. Si ha, per $t \to 0$ (si noti che è inutile, sebbene ovviamente non scorretto, sviluppare il seno fino al terzo ordine);

$$\log(1-\sin t) + \sin t = \log(1 - t + o(t^2)) + t + o(t^2) = -t - \frac{t^2}{2} + t + o(t^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Quindi il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = 2$, e in tal caso esso vale $-1/2$.

Ovviamente il limite poteva essere svolto usando lo sviluppo di $\cos x$ centrato in $x_0 = \pi/2$, che in base alla formula di Taylor generale vale $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ per $x \to \frac{\pi}{2}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 30/6/2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. Data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 3h & 2h-1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

(a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare del parametro reale h;

(b) determinare, se esistono, soluzioni non banali del sistema omogeneo $A_h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dove $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione. Cerchiamo gli autovalori della matrice ponendo il polinomio caratteristico uguale a zero:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (h-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0,$$

da cui si ricavano tre soluzioni: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = h$.
Se $h \neq \pm 2$ gli autovalori sono tutti semplici, quindi la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica doppia. Una matrice è diagonalizzabile se per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica, ovvero con la dimensione dell'autospazio relativo. Per calcolarla si deve determinare il rango della matrice $A_h - \lambda\mathbb{I}$. In questo caso:

$$A_2 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

il rango vale 1, infatti la matrice ha la prima colonna nulla e la seconda proporzionale alla terza. Quindi l'autopspazio relativo all'autovalore 1 è bidimensionale e la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = -2$ è l'autovalore $\lambda = -2$ ad avere molteplicità algebrica doppia. In questo caso:

$$A_{-2} + 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

il rango vale 2, infatti la sottomatrice quadrata formata dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero. Pertanto la matrice non è diagonalizzabile.
Relativamente al secondo punto si ricorda che l'equazione $A_h\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ ha soluzioni non banali se e solo se l'autovalore nullo appartiene allo spettro della matrice A_h. Questo accade se e solo se $h = 0$.
Il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

da cui $y = z = 0$ e x qualsiasi, ovvero $\boldsymbol{v} = (t, 0, 0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. (punti 6) Calcolare le soluzioni della seguente equazione nel campo complesso:

$$\frac{\overline{z}}{z^2} = 4ie^{-i}z$$

Soluzione. Posto, affinché l'equazione abbia senso, $z \neq 0$, si ponga $z = \varrho\, e^{i\vartheta}$ con $\varrho \neq 0$ e si riscriva l'equazione come:

$$\frac{\varrho\, e^{-i\vartheta}}{\varrho^2\, e^{2i\vartheta}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}-i}\varrho\, e^{i\vartheta},$$

cioè

$$4\varrho^2 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-1+4\vartheta\right)} = 1.$$

Affinché ciò accada occorre in primo luogo che $\varrho = 1/2$, e inoltre che, per qualche $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} - 1 + 4\vartheta = 2k\pi$, cioè $\vartheta = \frac{1}{4}\left(1 + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$. Le quattro soluzioni distinte che si ottengono in corrispondenza di tali ϑ corrispondono per esempio a $k = 0, 1, 2, 3$. Tali soluzioni appartengono dunque alla circonferenza di raggio $1/2$ centrata nell'origine e danno luogo ai vertici di un quadrato, uno dei quali è il punto $e^{i\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}$.

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2+2}{|3-x|}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 3$. Non vi sono simmetrie. La funzione è ovviamente sempre positiva e si ha $f(0) = \sqrt{2/3}$. Vale:

$$\lim_{x \to 3^{\pm}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

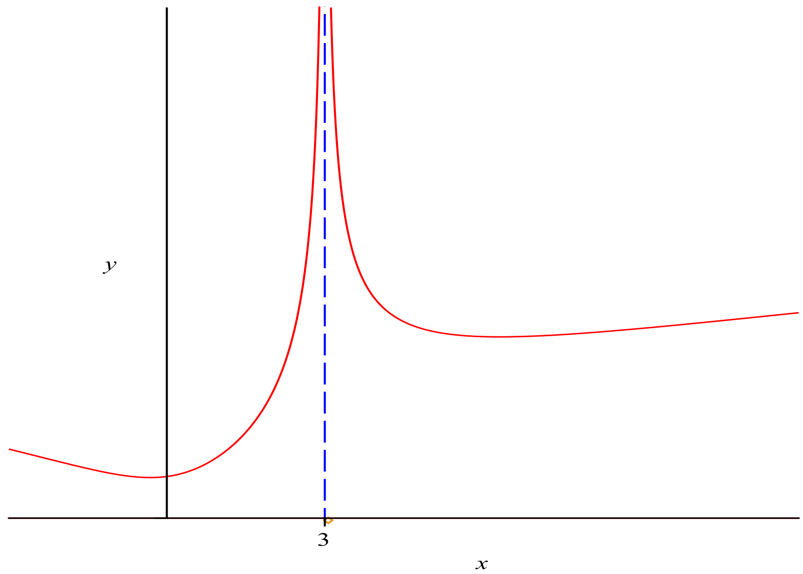
Dunque vi è l'asintoto verticale bilatero $x = 3$. Non vi sono asintoti obliqui, perche $f(x) \sim \sqrt{|x|}$ per $x \to \pm\infty$. Semplici calcoli mostrano che la derivata prima è definita per $x \neq 3$ e vale:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2-6x-2}{2(3-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+2}}, & \text{se } x < 3 \\ \\ \frac{x^2-6x-2}{2(x-3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+2}}, & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

La derivata si annulla per $x = 3 \pm \sqrt{11}$. Lo studio del segno della derivata è immediato e si vede che f è crescente in $[3-\sqrt{11}, 3)$ e in $[3+\sqrt{11}, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 3-\sqrt{11}]$ e in $(3, 3+\sqrt{11}]$. I punti $x_1 = 3-\sqrt{11}$ e $x_2 = 3+\sqrt{11}$ sono dunque entrambi punti di minimo relativo. È inoltre facile vedere, scrivendo esplicitamente i valori coinvolti, che $f(x_1) < f(x_2)$, dunque dalle informazioni precedentemente dimostrate ne segue che x_1 è punto di minimo assoluto per f.

Sebbene non sia richiesto, si noti che le informazioni finora dedotte implicano l'esistenza di almeno due punti di flesso, uno per $x > x_2$ e un altro per $x < x_1$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



4. (punti 7) Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e diverso da zero e, per tale valore, calcolarlo:

$$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\log(1 + \cos x) - \cos x}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}$$

Soluzione. Si noti che, per esempio usando le formule di somma per il coseno,

$$\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Posto allora $x + \frac{\pi}{2} =: t$ il limite cercato coincide con

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\log(1 + \sin t) - \sin t}{t^\alpha}.$$

Sviluppiamo il numeratore. Si ha, per $t \to 0$ (si noti che è inutile, sebbene ovviamente non scorretto, sviluppare il seno fino al terzo ordine);

$$\log(1 + \sin t) - \sin t = \log(1 + t + o(t^2)) - t + o(t^2) = t - \frac{t^2}{2} - t + o(t^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Quindi il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = 2$, e in tal caso esso vale $-1/2$.

Ovviamente il limite poteva essere svolto usando lo sviluppo di $\cos x$ centrato in $x_0 = -\pi/2$, che in base alla formula di Taylor generale vale $\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + o\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ per $x \to -\frac{\pi}{2}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 15/9/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Determinare per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} (\alpha-1)x - y + (2-\alpha)z = 3 \\ \alpha x - \alpha y = \alpha + 4 \\ -x + y + (\alpha-2)z = -3 \end{cases}$$

ammette come soluzione un insieme bidimensionale di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, si determini l'equazione cartesiana della retta ortogonale a tale insieme passante per il punto $P = (3, 5, 1)$.

Soluzione.

Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e $A|b$ la matrice completa. Il calcolo del determinante diventa immediato se si sommano la prima e la terza riga. Si ha: $\det A = -\alpha(\alpha-2)^2$. Esso si annulla per $\alpha = 0 \vee \alpha = 2$. Se $\alpha = 0$, allora: $2 = \mathrm{Rk}(A) \neq \mathrm{Rk}(A|b) = 3$. Si noti infatti che la matrice A contiene una riga nulla e minori di ordine due non nulli, mentre il minore di $A|b$ di ordine tre, formato dalla prima, dalla seconda e dalla quarta colonna è anch'esso non nullo. Pertanto, se $\alpha = 0$ il sistema non ammette soluzioni.

Se $\alpha = 2$, $\mathrm{Rk}(A) = \mathrm{Rk}(A|b) = 1$, infatti tutte le righe (colonne) sono tra loro proporzionali. Per il teorema di *Rouché-Capelli* esistono ∞^{3-1} soluzioni, vale a dire un sottoinsieme bidimensionale di $\mathbb{R}^3$.

Per rispondere al secondo quesito si osservi che il piano $\pi : x - y = 3$ è l'insieme soluzione nel caso $\alpha = 2$ e che il vettore $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)^{\mathrm{t}}$ è ortogonale al piano π. Dunque la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - t \\ z = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

altrimenti, in forma cartesiana: $y = 8 - x$ e $z = 1$.

2. (punti 8) Stabilire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^a \left[4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right]$$

esiste finito e diverso da zero, e per tale valore di a calcolarlo.

Soluzione. Consideriamo dapprima la funzione $4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ e, posto $t = 1/x$ (dunque $t \to 0^+$) studiamo il comportamento nell'intorno dell'origine della funzione

$$g(t) := 4 + \frac{\cos(3t)}{t^2} + \frac{t-1}{t^2}\, e^t.$$

Si ha, per $t \to 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4 + \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{9}{2}t^2 + o(t^3)\right) + \frac{t-1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\ &= \frac{t}{3} + o(t). \end{aligned}$$

Tornando alla variabile originaria abbiamo quindi, per $x \to +\infty$:

$$x^a \left[4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right] = x^a \left[\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Quindi il limite assegnato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 1$, e in tal caso tale limite vale $\frac{1}{3}$.

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -1$. Non è né pari né dispari. Si annulla se e solo se $x = 1$ e vale $f(0) = 1$. Lo studio del segno è immediato e mostra che f è positiva per $x \in (-1, 1)$, negativa in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Vale inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Dunque $x = -1$ è asintoto verticale bilatero, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non vi è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ perché la crescita della funzione in tale limite è esponenziale.

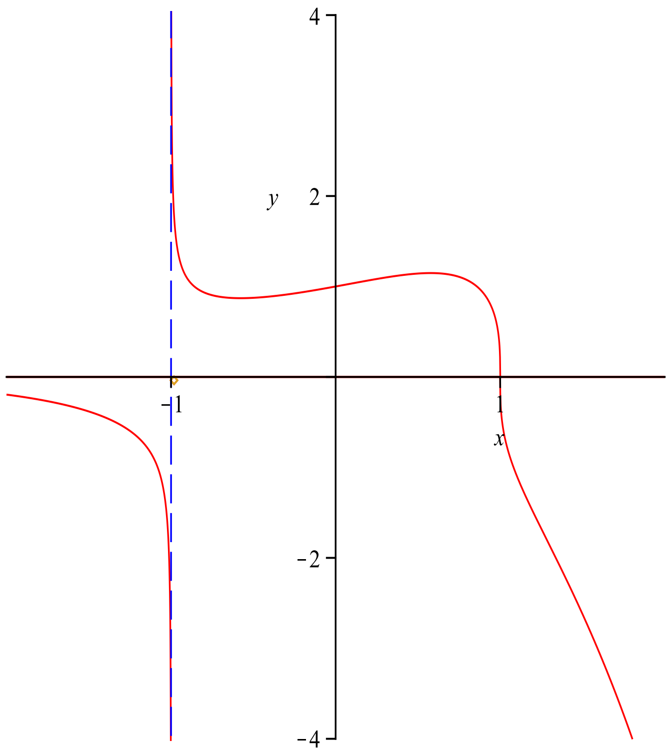
La funzione è derivabile su tutto il dominio di definizione *tranne che nel punto* $x = 1$ (la funzione $t^{1/3}$ non è derivabile in $t = 0$). Calcoli elementari mostrano che, per $x \neq \pm1$,

$$f'(x) = \frac{1-3x^2}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}}\, e^x.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to1^\pm} f'(x) = -\infty,$$

quindi la retta tangente alla curva tende a diventare verticale quando $x \to 1$. Le informazioni ottenute permettono in particolare di congetturare che $x = 1$ sia punto di flesso a tangente verticale, sebbene tale conclusione non possa essere giustificata rigorosamente senza studiare la concavità. Infine, si vede subito che zeri e segno della derivata sono determinati dallo studio del solo fattore $1-3x^2$ (tutti gli altri fattori sono strettamente positivi per $x \neq \pm1$. Quindi i punti $x_1 := -1/\sqrt{3}$ e $x_2 := 1/\sqrt{3}$ sono rispettivamente di minimo e di massimo relativo per f, la funzione è crescente nell'intervallo $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, decrescente in ciascuno degli intervalli $(-\infty, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, 1), (1, +\infty)$. Non vi sono estremi assoluti. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



4. (punti 7) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}.$$

Successivamente stabilire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-3)^a x^b} \, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Operiamo la sostituzione $\sqrt{x^2 - 9} = t$. Vale, supponendo ad esempio $x > 0$, $x = \sqrt{9 + t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{9+t^2}} \mathrm{d}t$, e dunque:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{9 + t^2} \, \mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{9}{9 + t^2}\right) \mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t^2}{9}}\right) \mathrm{d}t \\
&= t - 3 \arctan\left(\frac{t}{3}\right) \\
&= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}\right),
\end{aligned}$$

avendo scelto per semplicità uguale a zero la costante additiva arbitraria (è richiesta *una* primitiva). Analoghi calcoli valgono per $x < 0$.

Riguardo alla seconda domanda dobbiamo analizzare la funzione integranda in un intorno destro di $x = 3$ e a $+\infty$ (l'eventuale singolarità in $x = 0$ non appartiene al dominio di integrazione). Vale:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(x-3)^a x^b} &\sim \frac{c}{(x-3)^{a - \frac{1}{2}}} \quad \text{per } x \to 3^+; \\
\frac{f(x)}{(x-3)^a x^b} &\sim \frac{1}{x^{a+b}} \quad \text{per } x \to +\infty,
\end{aligned}$$

dove c è un'opportuna costante diversa da zero. Dunque per la convergenza dell'integrale occorre che $a < \frac{3}{2}$ e, inoltre, che $a + b > 1$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 15/9/2016**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Determinare per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} (\alpha+1)x + (\alpha+2)y - z = 4 \\ \alpha x + \alpha z = 6 - \alpha \\ x - (\alpha+2)y + z = -4 \end{cases}$$

ammette come soluzione un insieme bidimensionale di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, si determini l'equazione cartesiana della retta ortogonale a tale insieme passante per il punto $P = (2, 6, 5)$.

Soluzione.

Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e $A|b$ la matrice completa. Il calcolo del determinante diventa immediato se si sommano la prima e la terza riga. Si ha: $\det A = \alpha(\alpha+2)^2$. Esso si annulla per $\alpha = 0 \vee \alpha = -2$.
Se $\alpha = 0$, allora: $2 = \mathrm{Rk}(A) \neq \mathrm{Rk}(A|b) = 3$. Si noti infatti che la matrice A contiene una riga nulla e minori di ordine due non nulli, mentre il minore di $A|b$ di ordine tre, formato dalla prima, dalla seconda e dalla quarta colonna è anch'esso non nullo. Pertanto, se $\alpha = 0$ il sistema non ammette soluzioni.
Se $\alpha = -2$, $\mathrm{Rk}(A) = \mathrm{Rk}(A|b) = 1$, infatti tutte le righe (colonne) sono tra loro proporzionali. Per il teorema di *Rouché-Capelli* esistono ∞^{3-1} soluzioni, vale a dire un sottoinsieme bidimensionale di $\mathbb{R}^3$.
Per rispondere al secondo quesito si osservi che il piano $\pi : x + z + 4 = 0$ è l'insieme soluzione nel caso $\alpha = 2$ e che il vettore $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)^{\mathrm{t}}$ è ortogonale al piano π. Dunque la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

altrimenti, in forma cartesiana: $y = 6$ e $z = x + 3$.

2. (punti 8) Stabilire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^a \left[4 + 9x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 3x(3x-1)e^{\frac{1}{3x}}\right]$$

esiste finito e diverso da zero, e per tale valore di a calcolarlo.

Soluzione. Consideriamo dapprima la funzione $4+9x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-3x(3x-1)e^{\frac{1}{3x}}$ e, posto $t = \frac{1}{3x}$ (dunque $t \to 0^+$) studiamo il comportamento nell'intorno dell'origine della funzione

$$g(t) := 4 + \frac{\cos(3t)}{t^2} + \frac{t-1}{t^2}\,e^t.$$

Si ha, per $t \to 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4 + \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{9}{2}t^2 + o(t^3)\right) + \frac{t-1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\ &= \frac{t}{3} + o(t). \end{aligned}$$

Tornando alla variabile originaria abbiamo quindi, per $x \to +\infty$:

$$x^a \left[4 + 9x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 3x(3x-1)e^{\frac{1}{3x}}\right] = x^a \left[\frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Quindi il limite assegnato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 1$, e in tal caso tale limite vale $\frac{1}{9}$.

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 1$. Non è né pari né dispari. Si annulla se e solo se $x = -1$ e vale $f(0) = 1$. Lo studio del segno è immediato e mostra che f è positiva per $x \in (-1, 1)$, negativa in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Vale inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

Dunque $x = -1$ è asintoto verticale bilatero, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \infty$. Non vi è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ perché la crescita della funzione in tale limite è esponenziale.

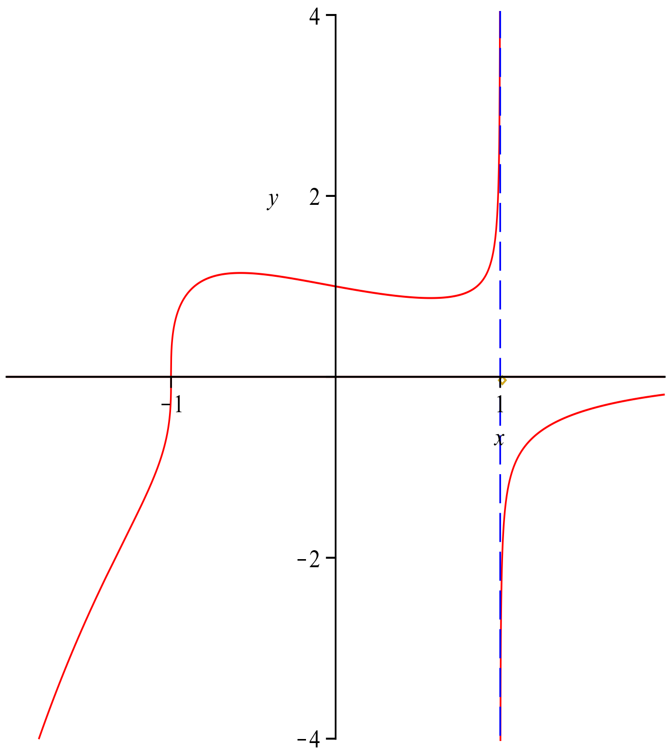
La funzione è derivabile su tutto il dominio di definizione *tranne che nel punto* $x = -1$ (la funzione $t^{1/3}$ non è derivabile in $t = 0$). Calcoli elementari mostrano che, per $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3(1-x)^{\frac{4}{3}}\,(1+x)^{\frac{2}{3}}}\, e^{-x}.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to(-1)^{\pm}} f'(x) = +\infty,$$

quindi la retta tangente alla curva tende a diventare verticale quando $x \to 1$. Le informazioni ottenute permettono in particolare di congetturare che $x = -1$ sia punto di flesso a tangente verticale, sebbene tale conclusione non possa essere giustificata rigorosamente senza studiare la concavità. Infine, si vede subito che zeri e segno della derivata sono determinati dallo studio del solo fattore $3x^2 - 1$ (tutti gli altri fattori sono strettamente positivi per $x \neq \pm 1$. Quindi i punti $x_1 := -1/\sqrt{3}$ e $x_2 := 1/\sqrt{3}$ sono rispettivamente di massimo e di minimo relativo per f, la funzione è decrescente nell'intervallo $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, crescente in ciascuno degli intervalli $(-\infty, -1), (-1, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, +\infty)$. Non vi sono estremi assoluti. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



4. (punti 7) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}.$$

Successivamente stabilire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-2)^a x^b}\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Operiamo la sostituzione $\sqrt{x^2-4} = t$. Vale, supponendo ad esempio $x > 0$, $x = \sqrt{4+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\mathrm{d}t$, e dunque:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{4+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{4}{4+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+\frac{t^2}{4}}\right)\mathrm{d}t \\
&= t - 2\arctan\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sqrt{x^2-4} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right),
\end{aligned}$$

avendo scelto per semplicità uguale a zero la costante additiva arbitraria (è richiesta *una* primitiva). Analoghi calcoli valgono per $x < 0$.

Riguardo alla seconda domanda dobbiamo analizzare la funzione integranda in un intorno destro di $x = 2$ e a $+\infty$ (l'eventuale singolarità in $x = 0$ non appartiene al dominio di integrazione). Vale:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(x-2)^a x^b} &\sim \frac{c}{(x-2)^{a-\frac{1}{2}}} \quad \text{per } x \to 2^+; \\
\frac{f(x)}{(x-2)^a x^b} &\sim \frac{1}{x^{a+b}} \quad \text{per } x \to +\infty,
\end{aligned}$$

dove c è un'opportuna costante diversa da zero. Dunque per la convergenza dell'integrale occorre che $a < \frac{3}{2}$ e, inoltre, che $a + b > 1$.