ANALISI FUNZIONALE

II.1 - SPAZI NORMATI

Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$). Si dice **norma** su V un'applicazione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ con le seguenti proprietà:

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \forall v \in V$ (positività)
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C}), \ \forall v \in V$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Da cui seguono immediatamente anche:

4. $\|0\| = 0$
5. $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$

Uno **spazio normato** è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su V.

Esempi:

- $V=\mathbb{R}, \quad \|\cdot\|=|\cdot|$: modulo
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$: norma euclidea
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_p:=\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$: norma p, con $p\geq 1$
- $V=\mathbb{R}^N, \quad \|x\|_\infty:=\max_{i\in[1,N]}\{|x_i|\}$: norma del massimo
- $V=\mathbb{C}, \quad \|\cdot\|=|\cdot|_{\mathbb{C}}$: modulo complesso
- $V=C^0([a,b]), \quad \|f\|_1:=\int_a^b |f(x)|\,dx$
- $V=C^0([a,b]), \quad \|f\|_\infty:=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è anche metrico con la seguente **distanza**:

$$d(u,v) = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$$

che soddisfa le proprietà:

1. $d(u,v) \geq 0, \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v, \quad \forall u, v \in V$
2. $d(u,v) = d(v,u), \quad \forall u, v \in V$
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v), \quad \forall u, v, w \in V$

Con l'introduzione di una distanza è possibile ora definire i principali elementi topologici in V.

Si definisce **sfera** di raggio R e centro v_0 l'insieme dei punti distanti da v_0 meno di R:

$$B_R(v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| < R\}$$

Il bordo di una tale sfera è invece l'insieme dei punti distanti da v_0 esattamente R:

$$\partial B_R(v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| = R\}$$

Si dice **intorno** di un punto v_0 un insieme contenuto in V che contiene una palla centrata in v_0.
Un sottoinsieme E di V si dice <u>limitato</u> se esiste una palla in cui è incluso:

$$E(\subseteq V) \text{ limitato} \quad \Leftrightarrow \quad \exists R : E \subseteq B_R(0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists R : \|v\| \leq R, \ \forall v \in E$$

Sia E un sottoinsieme di V, si definiscono:

- <u>parte interna</u> di E: $\overset{o}{E} := \{v \in V : \exists \mathcal{U}(v) \subseteq E\}$
- <u>chiusura</u> di E: $\overline{E} := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \ \mathcal{U}(v) \cap E \neq 0\}$
- <u>frontiera</u> di E: $\partial E = E \setminus \overset{o}{E}$
- <u>punti di accumulazione</u> di E: $acc(E) := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \ \mathcal{U}(v) \cap (E \setminus \{v\}) \neq 0\}$

Sia $f : V \to W$ una funzione tra due spazi vettoriali normati $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$. Si dice che il **limite** di *f* per $v \to v_0$ (con $v, v_0 \in V$) è l (con $l \in W$) se:

$$\forall \mathcal{U}(l) \ \ \exists \mathcal{U}(v_0) : \ \forall v \in \mathcal{U}(v_0) \setminus \{v_0\} \ \ f(v) \in \mathcal{U}(l)$$

Una **successione** in V può essere vista come una funzione che associa ad ogni elemento di $\mathbb{N}$ uno ed un solo elemento di V:

$$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V \quad o \quad f:\mathbb{N}\to V$$

Si dice che una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ tende a $v \in V$ se il limite di v_n per $n\to+\infty$ è v, ovvero:

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\|_V \to 0, \ \ per \ \ n\to+\infty$$

Una **serie** in V è una successione di somme parziali S_N, cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n := \left(\lim_{n\to+\infty}\right) S_N, \quad dove \ \ S_N := \sum_{n=0}^{N} v_n$$

Nell'ambito degli spazi normati continuano a valere i seguenti risultati:

- unicità del limite
- linearità del limite
- caratterizzazione del limite per successioni
- una successione convergente è limitata
- una serie convergente ha termine generale infinitesimo

Alcuni risultati, invece, continuano a valere solo nel caso degli spazi a dimensione finita, mentre in generale non sono veri se la dimensione è infinita.
Un primo esempio è il seguente: sia V uno spazio vettoriale normato e W un suo sottospazio. Se V ha dimensione finita, allora W è chiuso.

II.2 - NORME EQUIVALENTI

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale V si dicono **equivalenti** se:

- $\exists c_1 : \|v\|_1 \le c_1 \|v\|_2 , \quad \forall v \in V$
- $\exists c_2 : \|v\|_2 \le c_2 \|v\|_1 , \quad \forall v \in V$

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, si può dimostrare che tutte le norme su di esso sono equivalenti. Ciò è invece falso in generale per gli spazi a dimensione infinita.

Esempi:

- $V = \mathbb{R}^2 : \quad \left\langle \begin{array}{l} \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \\ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \end{array} \right.$, spazio di dimensione finita.

$$\left.\begin{array}{l} - \ \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \le 2 \max\{|x_1|, |x_2|\} = 2\|\underline{x}\|_\infty \\ - \ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \le |x_1| + |x_2| = \|\underline{x}\|_1 \end{array}\right\} \text{le due norme sono equivalenti.}$$

- $v = C^0([a,b])$: $\left\langle \begin{array}{l} \|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \\ \|f\|_\infty = \max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| \end{array} \right.$, spazio di dimensione infinita.

  Si può vedere che solo una delle due disuguaglianze della definizione di equivalenza è sempre verificata. Infatti:

  – $\|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \le (b-a)\max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| = (b-a)\|f\|_\infty$

  – si costruisce ora un controesempio in cui la seconda disuguaglianza non vale:

  $$[a,b]=[0,1], \quad f_n(x)=x^n : \left\langle \begin{array}{l} \|f_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} \left|x^n\right| = 1, \ \forall n \\ \|f_n\|_1 = \int_0^1 \left|x^n\right| dx = \left.\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0, \ \ per \ \ n \to +\infty \end{array} \right.$$

  si vede facilmente quindi come sia impossibile trovare una costante (indipendente da n) tale che $\|f_n\|_\infty \le c\|f_n\|_1$.

II.3 - OPERATORI LINEARI

Siano $(V,\|\cdot\|_V)$ e $(W,\|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Si chiama **operatore lineare** da V a W un operatore $T:V\to W$ tale che:

$$T(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1 T(v_1)+\lambda_2 T(v_2),\quad \forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall v_1,v_2\in V$$

Si può dimostrare che, se V ha dimensione finita, ogni operatore lineare è anche continuo.
Inoltre si può facilmente vedere che la continuità per un operatore lineare equivale alla continuità nell'origine.

Dimostrazione:

- l'implicazione "continuità" $\Rightarrow$ "continuità in 0" è ovvia
- per l'altra implicazione, utilizziamo la caratterizzazione del limite per successioni:

$$x_n\to x;\quad x_n-x\to 0\quad\Rightarrow\quad T(x_n-x)\to T(0)=0;\quad T(x_n)-T(x)\to 0;\quad T(x_n)\to T(x)$$

In particolare, la continuità nell'origine significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < \|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(x)\| < \varepsilon$$

che è equivalente alla proprietà di limitatezza:

$$\exists M > 0: \quad \|T(x)\| < M\|x\|, \quad \forall x \in V$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

- per l'implicazione "limitato" $\Rightarrow$ "continuo in 0", basta scegliere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.
- per l'altra implicazione, si procede per assurdo: sia T non limitato, $\exists\{x_n\}: \quad \|T(x_n)\| = 1, \quad \|x_n\| \to 0$

  $$\frac{x_n}{\|T(x_n)\|} = x_n \to 0, \; ma \;\; T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|}\right) = \frac{T(x_n)}{\|T(x_n)\|} \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad T \; non \; è \; continuo$$

Per un operatore lineare, quindi, continuità e limitatezza sono equivalenti. In particolare, se lo spazio V è a dimensione finita, per quanto appena visto, ogni operatore lineare è anche limitato.

Esempio:

$V = C^0([a,b]), \quad W = \mathbb{R};$ Si fissi $c \in [a,b]$ e si consideri l'operatore lineare:

$$T : V \to W; \quad T : f \mapsto f(c)$$

- $\|T(f)\|_\infty = |f(c)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$: T è limitato con $M = 1$.

- $[a,b]=[0,1], \quad c=1, \quad f_n(x)=x^n: \quad \|T(f)\|_1=|f(c)|=1; \quad \|f\|_1=\dfrac{1}{n+1}\to 0$

  Con la norma $\|\cdot\|_1$, quindi, T è lineare ma non è limitato!

Siano $(V,\|\cdot\|_V)$ e $(W,\|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Si indica con $\mathcal{L}(V,W)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari e limitati da V a W (se V ha dimensione finita, esso coincide con l'insieme di tutti gli operatori lineari). Esso è uno spazio vettoriale su cui si può introdurre la seguente norma:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)}:=\sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}}\frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V}=\sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}}\|T(x)\|_W$$

II.4 - SPAZI DI BANACH

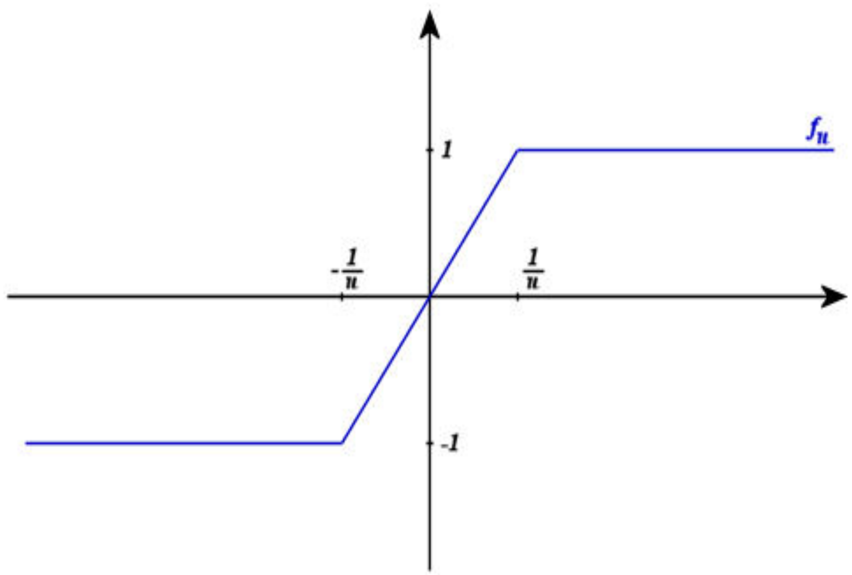
Sia V uno spazio vettoriale normato e $\{x_n\}$ una **successione di Cauchy** in V, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N}: \quad \|v_n - v_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > \overline{n}$$

Una successione convergente è sempre di Cauchy, mentre non è valido in generale il viceversa. In particolare si dimostra che se la dimensione di V è finita data una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in V, allora $\{x_n\}$ è convergente.

Esempio:

$V = C^0([-a, a]), \quad \|\cdot\|_1$



- f_n è di Cauchy, infatti:

$$\|v_n - v_m\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f_m| = 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right) < \frac{1}{n} \to 0, \quad con \;\; m > n$$

- f_n non converge:
  - sia u il limite con la norma $\|\cdot\|_1$
  - sia $v = \operatorname{sign} x$ il limite puntuale

Se u esiste, allora si può facilmente verificare che deve essere $u = v$, ma essendo v discontinua nell'origine, si ha che u non appartiene a V e quindi la successione non converge.

Uno spazio vettoriale normato si dice <u>completo</u> se in esso tutte le successioni di Cauchy convergono. Un tale spazio è detto anche **spazio di Banach**.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Si chiama $C^0(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni da Ω a $\mathbb{R}$ continue che si possono estendere con continuità alla chiusura di Ω:

$$C^0(\bar{\Omega}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ continue : \ \ \exists \tilde{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \ \ estensione \ \ continua \ \ di \ \ f \right\}$$

Si dice poi $C^k(\bar{\Omega})$, con $k \geq 1$, l'insieme delle funzioni appartenenti a $C^0(\bar{\Omega})$ con tutte le derivate fino all'ordine k appartenenti a tale spazio:

$$C^k(\bar{\Omega}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ continue : \ \ D^\alpha f \in C^0(\bar{\Omega}), \ |\alpha| \leq k \right\}$$

Si può dimostrare che gli spazi $C^k(\bar{\Omega})$ sono di Banach con la seguente norma:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

II.5 - MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

Dato un insieme X, una collezione η di sottoinsiemi di X si dice **σ-algebra** in X se:

1. l'insieme vuoto appartiene a η: $\emptyset \in \eta$
2. η è chiusa per complementari: $A \in \eta \quad \Rightarrow \quad A^C \in \eta$
3. η è chiusa per unione numerabile $A_i \in \eta \;\; \forall i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \eta$

In tal caso si dice che (X, η) è uno <u>spazio misurabile</u> e gli elementi η sono gli <u>insiemi misurabili</u> di X.

Si dice poi **misura** su (X, η) una funzione $\mu : \eta \to [0, +\infty]$ con le seguenti proprietà:

1. μ non è identicamente uguale a $+\infty$: $\mu \not\equiv +\infty$
2. μ è numerabilmente additiva: $A_i \in \eta \;\; \forall i \in \mathbb{N},\; A_i \;\; disgiunti \;\; \Rightarrow \;\; \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Si dice allora che (X, η, μ) è uno <u>spazio di misura</u>.

Teorema: esistono su $\mathbb{R}^N$ una σ-algebra η e una misura μ tali che:

1. η contenga i plurirettangoli e la loro misura è quella elementare:
$$\mu\left(\prod_{j=1}^{N}(a_j,b_j)\right)=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)$$
2. μ sia invariante per traslazioni.
3. μ sia completa: $E\in\eta,\ \mu(E)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall F\subseteq E,\ F\in\eta:\ \mu(F)=0$

Imponendo ulteriori proprietà si arrivano poi a definire la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue e la **misura di Lebesgue** di tali insiemi. D'ora in avanti, ogni volta che si parla di insiemi misurabili, si intende misurabili secondo Lebesgue.

Osservazioni:

- η contiene gli insiemi aperti e quelli chiusi
- $A \subseteq B,\ A, B \in \eta \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \mu(B)$
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots,\ A_i \in \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)$
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots,\ A_i \in \eta,\ \mu(A_1) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)$
- I punti e le unioni numerabili di punti in $\mathbb{R}^N$ hanno dimensione nulla.

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile. Si dice che la funzione f è **misurabile** se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ (la controimmagine di A) è misurabile.

Si dimostra che sono misurabili, tra le altre:

- Le funzioni continue.
- Somme e prodotti di funzioni misurabili.
- Estremo superiore, estremo inferiore, limite superiore, limite inferiore, limite di una successione di funzioni misurabili.

È possibile ora introdurre gradualmente l'integrale di Lebesgue a partire da funzioni semplici fino a funzioni generiche. D'ora in avanti, l'integrale deve essere sempre considerato nel senso di Lebesgue (salvo quando specificato diversamente).

1. Una funzione si dice <u>semplice</u> se assume un numero finito di valori, ciascuno su un insieme misurabile (che siano due a due disgiunti). Essa può essere scritta nella forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad E_i \subseteq \mathbb{R}^N \ \ \textit{misurabili} \qquad (*)$$

L'integrale di una tale funzione è definito nel modo seguente:

$$\int_E s := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i), \quad E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

2. Sia f una funzione limitata e nulla al di fuori di un compatto. Chiamiamo integrali inferiore e superiore di f i seguenti (con s funzione semplice):

$$\int_* f := \sup_{s \leq f} \int s \qquad\qquad \int^* f := \inf_{s \geq f} \int s$$

Se i due integrali precedenti sono uguali, allora si definisce l'integrale di f come il valore comune di questi due:

$$\int f := \int_* f = \int^* f$$

Lo stesso procedimento può essere esteso alle funzioni non negative.

3. Sia f una qualsiasi funzione misurabile. Se almeno uno tra gli integrali di f^+ (parte positiva di f) e f^- (parte negativa di f) è finito, l'integrale di f è definito come:

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Diciamo che una proposizione $P(x)$, con $x \in E$, è valida quasi ovunque (abbreviato q.o.) in E se l'insieme degli x per cui P è falsa è di misura nulla in E.

II.6 - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE

Tra le principali proprietà dell'integrale di Lebesgue si citano le seguenti:

- linearità: $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
- monotonia: $f \leq g \;\; q.o. \;\; in \;\; E \quad \Rightarrow \quad \int_E f \leq \int_E g$
- $f = 0 \;\; q.o. \;\; in \;\; E \quad \Rightarrow \quad \int_E f = 0$
- f integrabile $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrabile; $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

<u>Confronto tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue:</u>

- Se f è limitata e nulla fuori da un compatto, l'integrabilità secondo Riemann implica l'integrabilità secondo Lebesgue. Infatti, dette s_R le funzioni semplici della teoria di Riemann (le funzioni definite sostituendo gli insemi E_i nella $(*)$ con dei plurirettangoli) e s_L le funzioni semplici della teoria di Lebesgue (quelle definite poco prima), si ha che:

$$\sup_{s_R \leq f} \int s \leq \sup_{s_L \leq f} \int s \leq \inf_{s_L \geq f} \int s \leq \inf_{s_R \geq f} \int s$$

- Se f non è limitata e nulla fuori da un compatto, l'implicazione precedente può non essere vera.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \quad in \;\; (0,+\infty)$$

- $$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\sum_{k\geq 1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}=+\infty$$

  Per le proprietà dell'integrale di Lebesgue, non convergendo l'integrale del modulo della funzione, non converge neanche l'integrale della funzione.

- $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R\frac{\sin x}{x}$ è invece convergente secondo la teoria degli integrali impropri di Riemann.

- Sia r fissato e e sia f Riemann-integrabile su $B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ $\forall \varepsilon > 0$: f è Lebesgue-integrabile su $B_r(0)$ se e solo se $|f|$ è integrabile su $B_r(0)$ nel senso degli integrali impropri di Riemann.
- Sia r fissato e sia f Riemann-integrabile su $B_R(0) \setminus B_r(0)$ $\forall R > r$: f è Lebesgue-integrabile su $B_R(0)$ se e solo se $|f|$ è integrabile su $B_r^C(0)$ nel senso degli integrali impropri di Riemann.

- ***Teorema di Lebesgue (convergenza dominata):*** sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \to f$ q.o. in E ed esiste una funzione φ integrabile tale che $|f_n| \leq \varphi$ q.o. in E, allora f_n e f sono integrabili e in particolare:

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n$$

- ***Teorema di Beppo-Levi (convergenza monotona):*** sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \to f$ q.o. in E, $f_n \geq 0$ q.o. in E, $f_{n+1} \geq f_n$ q.o. in E, allora:

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n$$

Corollari

- Sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \geq 0$ q.o. in E, allora:

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$$

- Sia $F(t) = \int_E f(t,x)dx$, con $t \in [a,b]$ e $x \mapsto f(t,x)$ una funzione misurabile su $E \subseteq \mathbb{R}$ misurabile. Se $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ esiste per $t \in \mathcal{U}(t_0)$ q.o. in E e se $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \varphi(x)$, con φ integrabile, allora:

$$F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)dx$$

- ***Teorema di Fubini:*** sia $f(x,y)$ una funzione definita su $A \times B \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M+N}$. Se *f* è integrabile, allora valgono i seguenti risultati:
  1. per q.o. $y \in B$ la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile in A
  2. la funzione $y \mapsto \int_A f(x,y)dx$ è integrabile in B
  3. vale la formula: $\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_B dy \int_A f(x,y)dx$

  e i risultati sono analoghi se si scambiano le variabili.

- ***Teorema di Tonelli:*** sia $f(x,y)$ una funzione misurabile definita su $A \times B \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M+N}$ non negativa q.o. in $A \times B$. Se la funzione *f* soddisfa le prime due tesi del teorema di Fubini, allora *f* è integrabile.

II.7 - SPAZI L^p

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto misurabile e si consideri lo spazio vettoriale V delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ misurabili ed integrabili. Si prenda ora la seguente definizione:

$$\|f\| := \int_A |f|$$

Essa non è ancora una norma su V, poiché non rispetta la prima proprietà della norma: $\int_A |f| = 0 \quad \Rightarrow \quad |f| = 0 \;\; q.o. \;\; su \;\; A$, e non $|f| = 0 \;\; \forall x \in A$, come richiesto dalla definizione.

È quindi necessario modificare lo spazio V in modo che tale definizione porti effettivamente ad una norma. Si introduce quindi il concetto di equivalenza tra due funzioni: si dice che due funzioni di V sono **equivalenti** se sono uguali q.o. su A:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \;\; q.o. \;\; x \in A$$

Si introduce quindi $L^1(A)$ come lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Lebesgue e si può dimostrare che tale spazio è completo con la norma (adesso ben definita) considerata precedentemente.

Si noti che in questo nuovo spazio non è più rigorosamente definito il valore di una funzione in un punto, essendo questo un insieme di misura nulla.

Data una funzione $f \in L^1(A)$, si dice che essa è **continua** su *A* se nella classe di equivalenza di *f* esiste una funzione continua (nell'accezione usuale del termine):

$$f \in L^1(A) \ \ continua \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in C^0(A): \ f \sim g$$

e tale funzione viene chiamata <u>rappresentante continuo</u> di *f*, che, se esiste, è unico.

<u>*Dimostrazione:*</u>

g_1, g_2 rappresentanti continui, $g_1(x_0) > g_2(x_0)$. Per il teorema di permanenza del segno:

$(g_1 - g_2)(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ e quindi g_1 e g_2 non sono nella stessa classe di equivalenza.

Esempi:

- La funzione di Dirichlet $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & se \;\; x\in\mathbb{Q}\\ 0 & se \;\; x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, con $A=\mathbb{R}$, ha come rappresentante continuo la funzione identicamente nulla $g(x)\equiv 0$.
- La funzione $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, con $A=(-1,1)$, ha come rappresentante continuo la funzione definita nel modo seguente: $g(x)=\begin{cases}f(x) & se \;\; x\neq 0\\ 1 & se \;\; x=0\end{cases}$

In generale si definisce lo spazio $L^p(A)$ come lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che $|f|^p$ è integrabile secondo Lebesgue, con la norma:

$$\|f\|_p := \left\{ \int_A |f|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

che è ben definita per ogni $p \geq 1$.

Teorema: gli spazi $L^p(A)$ sono di Banach per ogni $p \geq 1$ con le norme integrali *p*.

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$ misurabile, con $f \in L^p(A)$ definitivamente. Allora si definiscono:

$$\|f\|_\infty := \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p, \quad L^\infty := \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < +\infty \right\}$$

e si può dimostrare che $L^\infty(A)$ è lo spazio delle funzioni **essenzialmente limitate** in A, ovvero che sono limitate a meno di un insieme di misura nulla, e la norma $\|f\|_\infty$ coincide con l'estremo superiore essenziale della funzione:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| = \inf \left\{ M : |f(x)| \le M \quad q.o. \ x \in A \right\}$$

Esempio:

$$f(x)=\begin{cases} n & se \quad x=n\in\mathbb{N} \\ 0 & x\notin\mathbb{N} \end{cases}$$ è essenzialmente limitata e $\|f\|_\infty = 0$

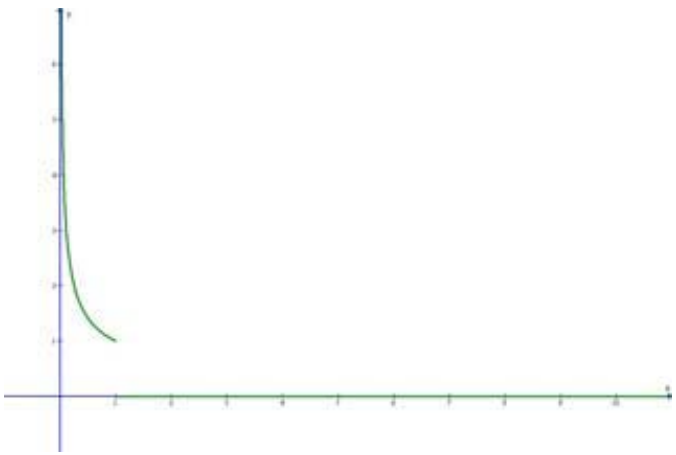
II.8 - RISULTATI DI CONFRONTO

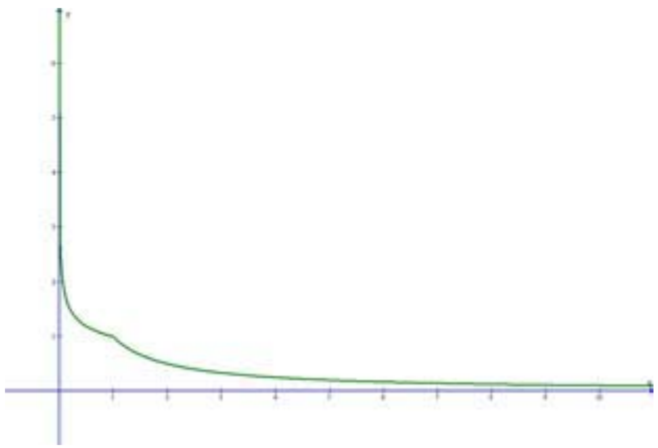
Si considerino gli spazi $L^p(A)$ al variare di *p*. Senza alcuna ipotesi sull'insieme *A* non ci sono in generale relazioni di inclusione per tali spazi.

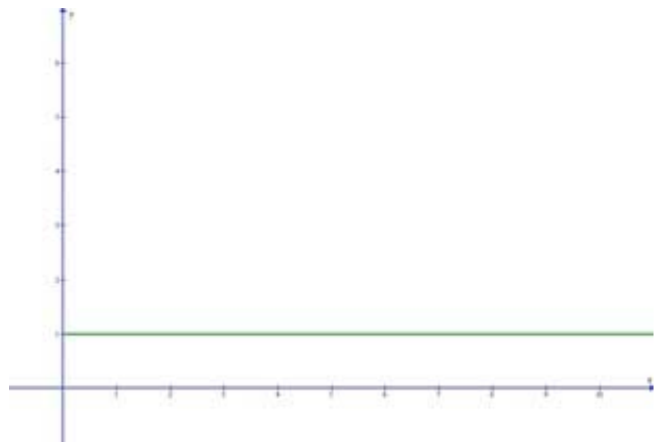
Esempio:

Le seguenti funzioni appartengono rispettivamente agli spazi $L^1(A)$, $L^2(A)$ e $L^\infty(A)$, ma non agli altri due, con $A=(0,+\infty)$:

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1/2} & se \;\; x<1 \\ 0 & se \;\; x\geq 1 \end{cases} \in L^1(A) \qquad g(x)=\begin{cases} x^{-1/4} & se \;\; x<1 \\ x^{-1} & se \;\; x\geq 1 \end{cases} \in L^2(A) \qquad h(x)=1\in L^\infty(A)$$







Disuguaglianza di Hölder: sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Date due funzioni $f \in L^p(A)$ e $g \in L^{p'}(A)$, allora il prodotto $f \cdot g \in L^1(A)$ e vale la seguente disuguaglianza:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

dove p′ è l'<u>esponente coniugato</u> di p (con $p \geq 1$), definito come $p' := \dfrac{p}{p-1}$ oppure $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

In particolare: $(2)' = 2, \quad p \geq 2 \iff p' \leq 2, \quad (1)' = +\infty, \quad (+\infty)' = 1$.

Proprietà di immersione: sia A un insieme di misura finita. Se $q \geq s$, allora $L^q(A) \subseteq L^s(A)$.

Dimostrazione:

Sia u una funzione in $L^q(A)$. Se si considerano ora:

- $f = |u|^s$: essa appartiene a $L^{q/s}(A)$, infatti $\int |f|^{\frac{q}{s}} = \int \left(|u|^s\right)^{\frac{q}{s}} = \int |u|^q$
- $g = \chi_A$: essa appartiene a $L^{(q/s)'}(A)$ poiché A ha misura finita

per la disuguaglianza di Hölder si ha: $\int_A |u|^s = \int_A \chi_A |u|^s \leq \left(\int_A |u|^{s\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_A \chi_A \right)^{\frac{1}{(q/s)'}} = \left(\|u\|_q \right)^s |A|^{\frac{q-s}{s}}$

Elevando tutto alla (*1*/s) si ha infine che $\|u\|_s \leq |A|^{\frac{q-s}{sq}} \|u\|_q$, e quindi che $u \in L^s(A)$.

In particolare si può vedere che $L^q(A)$ si immerge in $L^s(A)$ con “immersione continua”, ovvero si può dimostrare che l’operatore identità $i : L^q(A) \to L^s(A), \quad i : f \mapsto f$ è lineare e quindi continuo.

Un caso particolare della precedente proprietà è quando $q = +\infty$. Se A è misurabile con misura finita, allora $L^{\infty}(A) \subseteq L^{p}(A)$, per ogni $p \geq 1$. Si dimostra infatti che:

$$\|f\|_p \leq |A|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}$$

Proprietà di interpolazione: sia $f \in L^{q}(A) \cap L^{p}(A)$, allora $f \in L^{r}(A)$ per ogni $r \in [p,q]$, ed in particolare si dimostra con la disuguaglianza di Hölder che:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1): \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$$

II.9 - RISULTATI DI CONVERGENZA

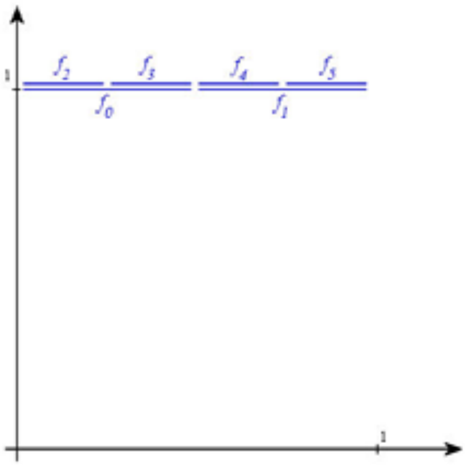
Si dice che una successione di funzioni $\{f_n\}$, definite su un dominio comune A, tende ad una funzione limite f in $L^p(A)$ se:

$$f_n \xrightarrow{L^p(A)} f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\int_A |f_n - f|^p \right) = 0$$

Si consideri prima di tutto il caso $p \in [1,+\infty)$. Senza ipotesi aggiuntive, in generale non ci sono relazioni tra convergenza q.o. su A e convergenza in $L^p(A)$.

__Esempi:__

- $A = \mathbb{R}, \quad f_n = \chi_{(n,n+1)} : \left\langle \begin{array}{l} f_n \to 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ f_n \not\to 0 \ \ in \ \ L^p(\mathbb{R}) : \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p = \int_n^{n+1} 1^p = 1 \not\to 0 \end{array} \right.$
- Si consideri la successione delle funzioni caratteristiche degli intervalli rispettivamente:



$\left[0,\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},1\right], \left[0,\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4},1\right], \left[0,\frac{1}{8}\right]$... e così via.

SI ha che:

- $\int_0^1 |f_n| \to 0 \quad per \ \ n \to +\infty$
- $f_n \not\to 0 \ \ q.o. \ \ in \ \ [0,1]$: si possono trovare infatti sottosuccessioni che in ogni punto convergono ad 1.

Valgono invece i seguenti risultati:

- La convergenza q.o. in A implica la convergenza in $L^p(A)$ se esiste una funzione $\varphi \in L^p(A)$ tale che $|f_n| \leq \varphi$ q.o. in A.
- Se una successione $\{f_n\}$ tende ad una funzione f in $L^p(A)$, allora esiste una sua sottosuccessione che tende ad f q.o. in A.

Conseguenze:

- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ q.o. in A, allora $f = g$ q.o. in A.
- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ in $L^q(A)$, allora $f = g$ q.o. in A.

Il caso $p = +\infty$ è invece strettamente legato con la convergenza uniforme. Infatti, se una successione di funzioni $\{f_n\}$ tende ad una funzione f in $L^\infty(A)$, allora esiste un insieme $E \subseteq A$ di misura nulla tale per cui $f_n \to f$ uniformemente in $A \setminus E$. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A\setminus E} |f_n(x) - f(x)|, \;\; con \;\; |E| = 0$$

II.9 - APPROSSIMAZIONE CON FUNZIONI REGOLARI

Teorema: per ogni $p \in [1,+\infty)$, $C_0^\infty(A)$ è <u>denso</u> in $L^p(A)$, ovvero:

$$\forall f \in L^p(A)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \varphi \in C_0^\infty(A): \quad \left\| f - \varphi \right\|_p < \varepsilon$$

$$\forall f \in L^p(A)\ \ \exists \left\{ f_n \right\} \subseteq C_0^\infty: \quad f_n \xrightarrow{L^p(A)} f$$

dove $C_0^\infty(A)$ è lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(A)$ a supporto compatto, cioè:

$$C_0^\infty(A) := \left\{ f \in C^\infty(A): \quad f = 0 \ \ su \ \ A \setminus K, \ \ con \ \ K \ compatto \subseteq A \right\}$$

Osservazioni:

- Il teorema precedente afferma in pratica che è possibile approssimare le funzioni $L^p(A)$ con successioni di funzioni regolari.
- In realtà sono dense in $L^p(A)$ anche classi di funzioni "più semplici" (come polinomi, funzioni a scalino, …).
- Tale teorema risulta invece falso nel caso $p = +\infty$.

II.9 - CONVOLUZIONE

Proposizione: Siano f e g due funzioni $L^1(\mathbb{R})$. Si definisce **prodotto di convoluzione** il seguente

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

i. Il prodotto $(f * g)(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}$

ii. La funzione $x \mapsto (f * g)(x)$ è di classe $L^1(\mathbb{R}_x)$

iii. Vale la seguente disuguaglianza: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Dimostrazione:

i. $F(x,y)=\left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right|\geq 0$. Essa è misurabile poiché è il prodotto di due funzioni misurabili.

- per q.o. y, $x\mapsto F(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}_x$:

$$\int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx=\int_{\mathbb{R}_x}\left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right|dx=\left|g(y)\right|\int_{\mathbb{R}_x}\left|f(x-y)\right|dx=\left|g(y)\right|\int_{\mathbb{R}}\left|f(z)\right|dz=\left|g(y)\right|\cdot\left\|f\right\|_1$$

- $y\mapsto\int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx$ è integrabile su $\mathbb{R}_y$:

$$\int_{\mathbb{R}_y}\left[dy\int_{\mathbb{R}_x} F(x,y)dx\right]=\int_{\mathbb{R}_y}\left[\left|g(y)\right|dy\int_{\mathbb{R}_x}\left|f(x-y)\right|dx\right]=\left\|f\right\|_1\int_{\mathbb{R}_y}\left|g(y)\right|dy=\left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_1$$

Per il teorema di Tonelli $F(x,y)$ è quindi integrabile su $\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y$, e quindi, se è integrabile il suo modulo, è integrabile anche la funzione stessa $f(x-y)g(y)$ e dal teorema di Fubini segue quindi la prima tesi.

ii. $\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}_x} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy \right| dx \le \int_{\mathbb{R}_x} dx \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)||g(y)|\,dy =$

(per il teorema di Fubini è possibile scambiare l'ordine dell'integrazione)

$$= \int_{\mathbb{R}_y} \left[dy \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right] = \int_{\mathbb{R}_y} \left[|g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx \right] = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$(f*g)(x)$ è quindi integrabile e si è dimostrata anche l'ultima tesi.

La proposizione rimane valida anche per $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$. Il prodotto sarà in questo caso in $L^p(\mathbb{R})$ e l'ultima disuguaglianza diventerà: $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Proposizione: sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Valgono i seguenti risultati:

- $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$

Teorema: per ogni $p \in [1, +\infty)$, la chiusura di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ coincide con $L^p(\mathbb{R})$: $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$

La dimostrazione di tale teorema si ottiene con l'uso di particolari funzioni, dette <u>mollifficatori</u>.

Si chiama mollificatore una funzione non negativa $\rho:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ a supporto compatto compreso tra $[-1,1]$ che abbia integrale unitario:

$$\rho \geq 0, \quad \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{spt}\rho \subseteq [-1,1], \quad \int_{\mathbb{R}} \rho = 1$$

Dato un mollificatore ρ si ha inoltre che $\rho_n = n\rho(nx)$ definisce una famiglia di mollificatori, ovvero che ρ_n è un mollificatore per ogni n con supporto incluso in $\left[-1/n, 1/n\right]$.

Si consideri ora una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \neq +\infty$. La mollificazione di f via ρ è definita come il prodotto di convoluzione tra f e ρ_n, ovvero:

$$f_n := f * \rho_n = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)dy$$

Si può poi dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$, con $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n. Se si approssimano poi le f con una successione $f_k = f\chi_{[-k,k]}$ si ottiene la dimostrazione del teorema.

II.10 - SPAZI l^p

- Per $p \in [1, +\infty)$ si definisce lo spazio l^P come l'insieme delle successioni di $\mathbb{R}^N$ tali che la serie del loro modulo, elevato alla p, converga:

$$l^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N : \quad \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Si può dimostrare che tali spazi sono di Banach con la seguente norma:

$$\|(x_n)\|_{l^p} := \left(\sum |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- Per $p=+\infty$ si definisce invece l^∞ come l'insieme delle successioni di $\mathbb{R}^N$ il cui estremo superiore sia finito:
$$l^\infty := \left\{ \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} : \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n\right| < +\infty \right\}$$
Anche questo è uno spazio di Banach se si considera la norma:
$$\left\|\left(x_n\right)\right\|_{l^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n\right|$$

<u>*Osservazioni:*</u>

1. $l^p \subseteq l^\infty, \quad \forall p \in [1,+\infty)$, infatti: $\sum \left|x_n\right|^p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \left|x_n\right| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left|x_n\right|$ limitato

   Se $p \le q$, allora $l^p \subseteq l^q$

2. Le successioni in l^p sono successioni di successioni:

$$\begin{matrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 & \dots \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^i & x_2^i & \dots & x_n^i & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{matrix}$$

Se una successione $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{i\to+\infty} 0$ in l^p, allora $\forall n \in \mathbb{N}:\quad x_n^i \xrightarrow{i\to+\infty} 0$, ma non è in generale valido il viceversa.

3. In maniera analoga è possibile definire $l^p(\mathbb{Z})$, intendendo in questo caso che l'indice della successione è un numero relativo.

II.10 - FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Teorema di differenziazione: data una funzione $f \in L^1([a,b])$, si consideri:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

Allora, per q.o. x, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Data una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice che essa è **assolutamente continua** se esiste una funzione $f\in L^1([a,b])$ di cui F sia la primitiva:

$$F\in AC \quad \Leftrightarrow \quad \exists f\in L^1([a,b]):\ F(x)=\int_a^x f(t)dt+c$$

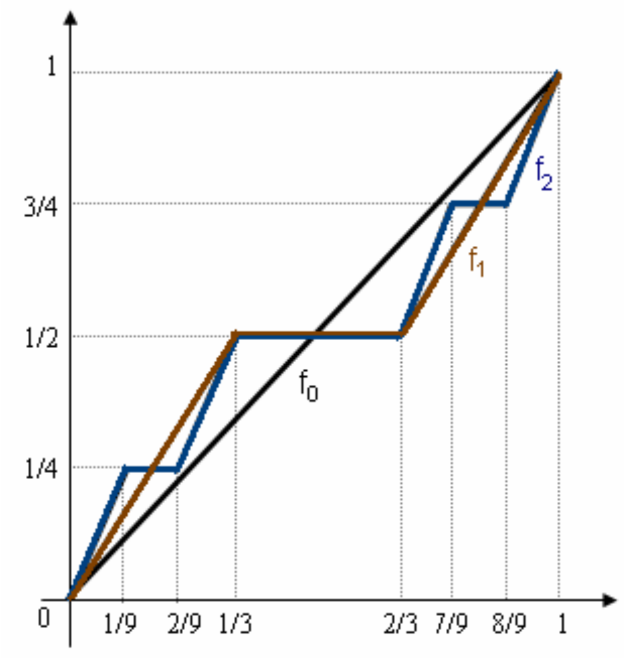
Tale condizione è equivalente alla seguente:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad \forall(x_i,y_i)\subseteq(a,b),\ i=1,...,N$ 2 a 2 disg. $\quad \sum_i |y_i-x_i|<\delta \Rightarrow \sum_i |F(y_i)-F(x_i)|<\varepsilon$

In particolare, l'insieme delle funzioni assolutamente continue è incluso in quello delle funzioni uniformemente continue e si può dimostrare che tale inclusione è stretta.

Conseguenze:

- Siano F e G due funzioni assolutamente continue, allora anche FG è assolutamente continua: $F, G \in AC([a,b]) \Rightarrow F \cdot G \in AC([a,b])$, da cui si ricava che:
$$(FG)(b) - (FG)(a) = \int_a^b (FG)' = \int_a^b (fG + Fg)$$
Vale quindi per le funzioni assolutamente continue la formula di integrazione per parti.
- Data una funzione F assolutamente continua con derivata nulla q.o., essa è costante:
$$F \in AC([a,b]),\ \ F' = 0\ \ q.o.\ \Rightarrow\ F = c\ \ q.o.\ \Rightarrow\ F = c$$
Ciò non è invece in generale valido se F è solamente continua.



Il limite della successione in figura, che si dimostra essere uniforme, è la funzione di Cantor, che è quindi continua.

La misura dell'insieme dei punti in cui ha derivata nulla è:

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1$$

Essa è quindi una funzione continua che ha derivata nulla q.o., ma che non è costante poiché passa da 0 a 1 in [0,1]

II.11 - Spazi di Hilbert

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un'applicazione $a: V \times V \to \mathbb{R}$ si dice forma bilineare simmetrica se ha le seguenti proprietà:

- $a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v,u) + \beta a(w,u) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u,v) + \beta a(u,w)$
- $a(u,v) = a(v,u)$

In spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ si parla invece di forme sesquilineari hermitiane $a: V \times V \to \mathbb{C}$ se:

- $a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v,u) + \beta a(w,u) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $a(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} a(u,v) + \bar{\beta} a(u,w)$
- $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$

Una funzione $f: V \to \mathbb{R}$ si dice **forma quadratica** se esiste un'applicazione a bilineare simmetrica tale che $f(v) = a(v,v)$.

<u>*Osservazioni:*</u>

- Se esiste una tale applicazione, allora essa è unica ed in particolare:
  $$f(u+v) - f(u) - f(v) = a(u+v, u+v) - a(u,u) - a(v,v) = a(u,v) + a(v,u) = 2a(u,v)$$
  $$a(u,v) = \frac{1}{2}\left[f(u+v) - f(u) - f(v)\right]$$
- Chiedere che a sia simmetrica non è restrittivo. Se infatti esiste una forma bilineare b tale che $f(v) = b(v,v)$, è sempre possibile trovare una forma bilineare simmetrica a con le stesse caratteristiche. Infatti:
  $a(u,v) = \frac{1}{2}\left[b(u,v) + b(v,u)\right]$ è simmetrica e $a(v,v) = \frac{1}{2} \cdot 2b(v,v) = b(v,v) = f(v)$

Uno spazio $\left(V, \|\cdot\|\right)$ di Banach si dice **spazio di Hilbert** se il quadrato della norma è una forma quadratica e la norma si dice hilbertiana:

$$\|\cdot\|^2 = a(v,v)$$

In tal caso l'applicazione $a(u,v)$ è chiamata **prodotto scalare** su V.

Proposizione: uno spazio $\left(V, \|\cdot\|\right)$ di Banach è di Hilbert se e solo se vale la seguente identità:

$$\forall x, y \in V: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ (id. del parallelogrammo)}$$

Proposizione: sia $\left(V, \|\cdot\|\right)$ uno spazio di Hilbert, allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|a(x,y)| \le \|x\|\|y\|$$

–

Esempi:

- $V = \mathbb{R}^N$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{1/2}$ è di Hilbert con $a(x,y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$
- $V = l^2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i \geq 0} x_i^2 \right)^{1/2}$ è di Hilbert $a(x,y) = \sum_{i \geq 0} x_i y_i$
- $V = L^2(A)$, $\|f\|_2 = \left(\int_A f^2 \right)^{1/2}$ e A misurabile di $\mathbb{R}^N$ è di Hilbert con $a(f,g) = \int_A f \cdot g$

- $V=\mathbb{R}^N$, $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{1/p}$ non è di Hilbert per $p\neq 2$
- $V=C^0([a,b])$, $\|f\|_\infty$ non è di Hilbert. Infatti, si consideri per esempio:
  $[a,b]=[0,1]$, $\quad f(x)=x$, $\quad g(x)=1-x$. L'identità del parallelogrammo non è soddisfatta:
  $\|1\|_\infty^2+\|2x-1\|_\infty^2\neq 2\|x\|_\infty^2+2\|1-x\|_\infty^2$; $\quad 1+1\neq 2+2$; $\quad 2\neq 4$, che è ovviamente impossibile.