Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2008/2009
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
I Appello - Analisi Matematica D (17-2-09) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos^2\theta}\, d\theta\ .$$

Esprimendo $\cos\theta$ come $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/(2i)$, e poi moltiplicando a numeratore e denominatore per $ie^{i\theta}$, l'integrale assegnato si riscrive come

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{6-e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{4ie^{i\theta}}{6e^{i\theta}-e^{3i\theta}-e^{-i\theta}}\, d\theta\ ,$$

che può essere riscritto come integrale nel piano complesso sotto la forma seguente:

$$-\frac{4}{i}\int_{C_1(0)} f(z)\, dz\ , \qquad f(z) = \frac{z}{z^4-6z^2+1}\, dz\ .$$

Poiché f ha, all'interno di $C_1(0)$ due poli semplici nei punti $z_\pm := \pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, applicando il teorema dei residui si ottiene

$$-\frac{4}{i}\int_{C_1(0)} f(z)\, dz = -\frac{4}{i}2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,z_+)+\mathrm{Res}(f,z_-)\big] = -8\pi\big[\frac{-2\sqrt{2}}{16}\big] = \pi\sqrt{2}\ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

Sia $I = [-1, 1]$ e sia $f \in L^2(I)$.

1. Dimostrare che

$$g(x) \mapsto \int_I f(x)g(x)\,dx$$

definisce un funzionale lineare continuo da $L^2(I)$ in $\mathbb{R}$. Calcolarne la norma.

2. Dimostrare che, se

$$\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty(I)\ ,$$

allora $f(x) = 0$ per q.o. $x \in I$.

1. Posto T_f, il funzionale assegnato, si ha che T_f è chiaramente lineare in quanto

$$T_f(g_1 + g_2) = \int_I f(g_1 + g_2) = \int_I fg_1 + fg_2 = T_f(g_1) + T_f(g_2)$$

$$T_f(\lambda g) = \int_I f(\lambda g) = \int_I \lambda fg = \lambda T_f(g)\ .$$

Inoltre T_f è continuo in quanto limitato; infatti per la disuguaglianza di Holder si ha

$$|T_f(g)| \leq \|f\|_{L^2(I)}\|g\|_{L^2(I)}\ .$$

Questo mostra che la norma di T_f è minore o uguale di $\|f\|_{L^2(I)}$. In realtà la norma di T_f è proprio uguale a $\|f\|_{L^2(I)}$, perché prendendo $g = f$ la precedente disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

2. Prendendo $\varphi(x) = \cos(\pi kx), \sin(\pi kx)$, si ottiene che tutti i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema ortonormale completo dei polinomi trigonometrici sono nulli. Quindi per l'identità di Bessel f è identicamente nulla.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

1. Calcolare, in $L^2([-\pi,\pi])$, i coefficienti di Fourier di $f(x)=x$ rispetto al sistema ortonormale completo dei polinomi trigonometrici.
2. Dare la definizione di spazio di Hilbert completo ed enunciare l'identità di Bessel.
3. Utilizzare i punti 1. e 2. per calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\ .$$

1. Poniamo

$$\left\{p_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ p_k=\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\ ,\ q_k=\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k\geq 1}\ .$$

Poiché f è dispari, si ha $p_k=0\ \forall k\geq 0$.
Per i q_k si ha invece (mediante una semplice integrazione per parti):

$$(f,q_k)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(kx)\,dx=-2\sqrt{\pi}\frac{(-1)^k}{k}\ .$$

2. Si veda uno dei testi consigliati.

3. L'identità di Bessel $\|u\|^2=\sum_k(u,u_k)^2$, (dove u è un elemento di uno spazio di Hilbert munito di un sistema ortonormale completo (u_k)), applicata nella situazione del punto 1., fornisce

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\sum_{k\geq 1}\frac{4\pi}{k^2}\ ,$$

da cui

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$