Applicazioni lineari

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Richiami sulle applicazioni lineari: definizione

Siano V e W spazi vettoriali.

Definizione (Applicazione Lineare)

Una funzione $f : V \to W$ si dice **applicazione lineare** quando verifica le seguenti proprietà:

a. *additività*: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \ ;$$

b. *omogeneità*: per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) \ .$$

Richiami sulle applicazioni lineari: osservazioni

- La funzione $f : V \to W$ è lineare se e solo se preserva le combinazioni lineari, cioè per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in V e per ogni h, k numeri reali si ha

$$f(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}) \ .$$

- Se f è lineare, allora $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
  È vero il viceversa?
- L'applicazione nulla $\quad 0 : V \to V \ , \quad 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad$ è lineare.
- L'applicazione identica

$$I : V \to V \ , \quad I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

  è lineare.
  Si indica l'applicazione identica anche con I_V , Id_V , id_V o 1_V .
- La composizione di applicazioni lineari è lineare, cioè, se $f : V \to U$ e $g : U \to W$ sono lineari, allora anche $g \circ f : V \to W$ è lineare.

Richiami sulle applicazioni lineari: lo spazio $\hom(V, W)$

Fissati gli spazi vettoriali V e W, è uno spazio vettoriale l'insieme delle applicazioni lineari da V a W

$$\hom(V, W) = \{\, f : V \to W \mid f \text{ lineare}\},$$

con la somma di due applicazioni lineari $F, G \in \hom(V, W)$ e il prodotto di un numero λ per $F \in \hom(V, W)$ definiti ponendo

$$(F + G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})\ , \quad (kF)(\mathbf{v}) = k\, F(\mathbf{v})$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni numero k.
Infatti $\hom(V, W)$ è sottospazio dello spazio vettoriale $W^V = \{\, f : V \to W\}$ di tutte le funzioni da V a W perchè:

- la somma di due applicazioni lineari $F : V \to W$, $G : V \to W$, definita da
  $$F + G : V \to W\ , \quad (F + G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})$$
  è un'applicazione lineare;
- il prodotto di un'applicazioni lineari $F : V \to W$ con lo scalare k, definito da
  $$kF : V \to W\ , \quad (kF)\mathbf{v} = k(F(\mathbf{v}))$$
  è un'applicazione lineare.

Proposizione

Sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *una base dello spazio vettoriale* V *e siano* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n$ *vettori (non necessariamente distinti) dello spazio vettoriale* W *.*
Esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ *tale che*

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2,\ \ldots,\ f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

Dimostrazione.

Il generico vettore $\mathbf{v}$ di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Quindi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

definisce l'unica applicazione lineare con $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Proposizione

Ogni applicazione lineare trasforma vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente dipendenti.

Dimostrazione.

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V linearmente dipendenti, cioè esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \, .$$

Per la linearità di f, possiamo scrivere il vettore nullo di W come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= f(\mathbf{0}) \\ &= f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Dunque $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente dipendenti. □

Possiamo affermare una simile proposizione per vettori linearmente indipendenti?

Richiami: iniettività, immagine e suriettività

- Una funzione $F : A \to B$ si dice **iniettiva** quando

$$F(a) = F(a') \text{ implica } a = a' \,.$$

  In altri termini, una funzione è iniettiva quando trasforma elementi distinti in elementi distinti.

- L'**immagine** di $F : A \to B$ è l'insieme

$$\operatorname{Im} F = \{b \in B \mid \exists a \in A\,,\ F(a) = b\} \,.$$

- Una funzione $F : A \to B$ si dice **suriettiva** quando

  ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

  In altri termini, la funzione F è suriettiva quando $\operatorname{Im} F = B$.

Proposizione

Ogni applicazione lineare iniettiva trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare; siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V linearmente indipendenti e supponiamo $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ siano linearmente dipendenti, cioè che esistano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \ .$$

Per la linearità di f , abbiamo anche :

$$f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \ .$$

Poiché f iniettiva, deve essere

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \ ,$$

e quindi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linearmente dipendenti, contro l'ipotesi fatta. □

Iniettività e dimensioni

Proposizione

Siano V *e* W *due spazi vettoriali finitamente generati. Se* $\dim V > \dim W$, *allora non esiste alcuna* $f : V \to W$ *lineare e iniettiva.*

Esercizio

Dimostrare la proposizione.

Nucleo

Si consideri un'applicazione lineare $F : V \to W$.

Definizione (Nucleo, Kernel)

Il **nucleo**, o **kernel**, di F è l'insieme delle controimmagini del vettore nullo:

$$\ker F = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Teorema

$\ker F$ *è un sottospazio vettoriale di* V *.*

Dimostrazione.

- $\ker F$ è chiuso rispetto la somma: se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono due vettori di $\ker F$, allora anche $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ è in $\ker F$, perché

$$F(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \ .$$

- $\ker F$ è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare: se $\mathbf{v}$ è un vettore di $\ker F$ e k uno scalare, allora anche $k\mathbf{v}$ è in $\ker F$, perché

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0} \ . \qquad \square$$

Iniettività e nucleo

Teorema

F è iniettiva se e solo se $\ker F = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Per definizione di nucleo, per ogni $\mathbf{v} \in \ker F$ si ha $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Per la linearità di F, abbiamo anche $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Se F iniettiva, allora da $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{0})$, abbiamo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dunque $\ker F = \{\mathbf{0}\}$.

$\Leftarrow$ Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ vettori di V tali che $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}')$, cioè $F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Per la linearità di F si ha $F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ e quindi $F(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}$, cioè

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \ker F = \{\mathbf{0}\}.$$

Dunque $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ e F è iniettiva.

$\square$

Corollario

F è iniettiva se e solo se $\dim \ker F = 0$.

Suriettività e immagine

Si consideri un'applicazione lineare $F : V \to W$.

Teorema

L'immagine $\mathrm{Im}\, F$ *di* F *è un sottospazio vettoriale di* W *.*

Dimostrazione.

- $\mathrm{Im}\, F$ è chiuso rispetto la somma: se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono due vettori di $\mathrm{Im}\, F$, allora anche $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ è in $\mathrm{Im}\, F$, perché

$$\mathbf{w} + \mathbf{w}' = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \ .$$

- $\mathrm{Im}\, F$ è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare: se $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathrm{Im}\, F$ e k uno scalare, allora anche $k\mathbf{w}$ è in $\mathrm{Im}\, F$, perché

$$k\mathbf{w} = kF(\mathbf{v}) = F(k\mathbf{v}) \ . \qquad \square$$

Teorema

F *suriettiva se e solo se* $\mathrm{Im}\, F = W$ *se e solo se* $\dim \mathrm{Im}\, F = \dim W$ *.*

Osservazione

Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V e $F : V \to W$ è lineare, allora i vettori $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)$ generano l'immagine $\operatorname{Im} F$ di F.

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\{F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)\} \ .$$

Proposizione

Siano V e W due spazi vettoriali finitamente generati. Se $\dim V < \dim W$, allora non esiste alcuna $f : V \to W$ lineare e suriettiva.

Esercizio

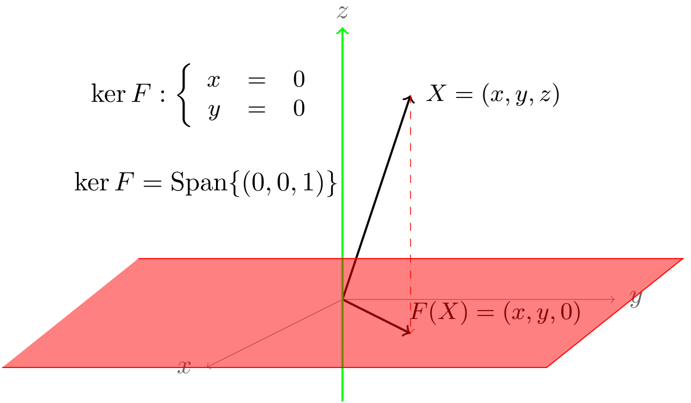
Dimostrare la proposizione.

Esempio: $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad F(x,y,z) = (x,y,0)$$

$$\ker F : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\ker F = \operatorname{Span}\{(0,0,1)\}$$

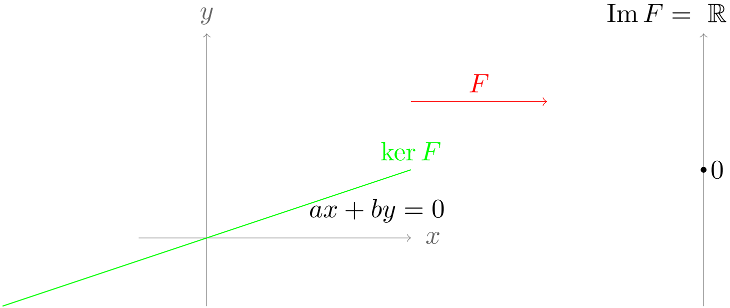


$$\operatorname{Im} F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \operatorname{Span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

Esempio: $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$

Fissati due numeri reali a e b non entrambi nulli, consideriamo

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \qquad F(x,y) = ax + by \; .$$



Nullità e rango

Definizione (Nullità di un'applicazione lineare)

Si definisce **nullità dell'applicazione lineare** F la dimensione del nucleo di F.

Definizione (Rango di un insieme di vettori)

Sia A un insieme finito di vettori dello spazio V. Si definisce **rango** $\mathrm{rk} A$ **di** A la dimensione del sottospazio generato dai vettori di A:

$$\mathrm{rk} A = \dim \mathrm{Span}\, A.$$

Definizione (Rango di un'applicazione lineare)

Si definisce **rango dell'applicazione lineare** F la dimensione dell'immagine di F:

$$\mathrm{rk}\, F = \dim \mathrm{Im}\, F\ .$$

Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V e $F : V \to W$, risulta

$$\mathrm{rk}\, F = \dim \mathrm{Im}\, F = \mathrm{rk}\, \{F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n)\}\ .$$

Teorema (delle dimensioni, o “Nullità + Rango”)

Sia $F : V \to W$ *un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, con* V *finito-dimensionale. Risulta:*

$$\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F) \ .$$

Dimostrazione:

Sia $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ una base di $\ker F$.
Estendiamola a una base di V :

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+r} \tag{1}$$

Naturalmente, $\dim \ker F = k$ e $\dim V = k + r$.
Per dimostrare la tesi, basta dimostrare che $\dim(\operatorname{Im} F) = r$.

Poniamo

$$F(\mathbf{v}_{k+1}) = \mathbf{w}_1, \dots, F(\mathbf{v}_{k+r}) = \mathbf{w}_r \tag{2}$$

Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ costituiscono una base di $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ generano il sottospazio $\operatorname{Im} F$.
  Sia $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} F$. Dunque, esiste $\mathbf{v} \in V$

  $$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k + y_1\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r\mathbf{v}_{k+r}$$

  tale che $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$. Allora:

  $$\begin{aligned} \mathbf{w} \quad = \quad F(\mathbf{v}) \quad &= \quad F(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k + y_1\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= \quad y_1F(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + y_rF(\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= \quad y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_r\mathbf{w}_r \end{aligned}$$

  (Infatti: $F(\mathbf{v}_1) = \cdots = F(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, in quanto $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ appartengono al nucleo di F).
  Dunque, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ generano lo spazio $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sono linearmente indipendenti.
  Supponiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= y_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + y_r \mathbf{w}_r \\ &= y_1 F(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + y_r F(\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= F(y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r}) \end{aligned}$$

  Allora $y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r} \in \ker F$. Dunque

$$y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r} = z_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \mathbf{v}_k$$

  ossia:

$$z_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \mathbf{v}_k - y_1 \mathbf{v}_{k+1} - \cdots - y_r \mathbf{v}_{k+r} = \mathbf{0} \tag{3}$$

  Poiché $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+r}$ sono linearmente indipendenti (formano una base di V), tutti i coefficienti della combinazione lineare (3) sono nulli. In particolare, $y_1 = \cdots = y_r = 0$.
  Dunque $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Richiami sull'invertibilità

- Una funzione F dall'insieme A all'insieme B

$$F : A \to B$$

è *invertibile* quando esiste una funzione G da B all'insieme A

$$G : B \to A$$

tale che

$$F \circ G = I_B \ , \quad G \circ F = I_A \ .$$

- La funzione G si dice *inversa* di F e si indica con F^{-1} .
- Se F è invertibile, la sua inversa F^{-1} è unica.
- Se F è invertibile, anche F^{-1} è invertibile.
- F è invertibile se e solo se F è biiettiva, cioè iniettiva *e* suriettiva.

Esercizio

Siano V, W spazi vettoriali. Se la funzione $F : V \to W$ è invertibile e lineare, allora la sua inversa F^{-1} è lineare.

Definizione (Isomorfismo)

Un'applicazione lineare invertibile si dice *isomorfismo*.

Dunque un isomorfismo è un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva.

Definizione (Spazi isomorfi)

Due spazi vettoriali V e W si dicono isomorfi, e si scrive $V \simeq W$, quando esiste un isomorfismo $F : V \to W$.

Esercizio

Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W finitamente generati di uguale dimensione. Provare che:

F iniettiva *se e solo se* F suriettiva *se e solo se* F isomorfismo.

Esercizio

Siano V e W spazi vettoriali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base per V. Dimostrare che:

1. F è iniettiva *se e solo se* $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)$ sono vettori linearmente indipendenti.
2. F è suriettiva *se e solo se* $\operatorname{rk} F = \dim W$.
3. F è un isomorfismo *se e solo se* $(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n))$ è una base per W.

Teorema

Due spazi vettoriali V *e* W *finitamente generati sono isomorfi se e solo se* $\dim V = \dim W$ *.*

Corollario

Ogni spazio vettoriale reale V *con dimensione* $\dim V = n$ *è isomorfo a* $\mathbb{R}^n$ *.*

$$V \simeq \mathbb{R}^n$$

Osservazione

Fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V , un isomorfismo tra V e $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n \ , \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

che assegna ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di V la $n-$ upla delle coordinate reali di $\mathbf{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione del teorema.

$\Rightarrow$ Se V e W sono isomorfi, esiste un isomorfismo $F : V \to W$.
Poiché F è iniettivo, si ha $\dim V \leq \dim W$;
poiché F è suriettivo, si ha $\dim V \geq \dim W$;
quindi $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$ Se $\dim V = \dim W$, siano $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base per V e $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ una base di W . Le applicazioni lineari che assegnano ad ogni vettore le coordinate

$$\varphi_{\mathcal{V}} : V \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \varphi_{\mathcal{W}} : W \to \mathbb{R}^n$$

sono isomorfismi, quindi

$$\varphi_{\mathcal{W}}^{-1} \varphi_{\mathcal{V}} : V \to W$$

è un isomorfismo.

$\square$

Ancora sulla somma di sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione finita. Consideriamo l'addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

e osserviamo che è un'applicazione lineare (esercizio) la cui immagine è

$$\operatorname{Im} F = U + W \ ;$$

inoltre risulta che (esercizio)

$$\ker F \quad \text{è isomorfo a} \quad U \cap W \ .$$

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione finita. Vale la formula di Grassmann:

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W) \ .$$

Dimostrazione.

Il Teorema “Nullità + Rango" per l’addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

fornisce l’uguaglianza

$$\dim U \times V = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F.$$

Ricordando che $\dim U \times V = \dim U + \dim V$, $\ker F$ è isomorfo a $U \cap W$, $\operatorname{Im} F = U + W$, otteniamo la Formula di Grassmann. □

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione finita. La somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

La somma $U + W$ è definita diretta quando ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come somma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. In altri termini, la somma $U + W$ è diretta se e solo se l'addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

è iniettiva, quindi se e solo se $\ker F = \{\mathbf{0}\}$. Ricordando che $\ker F$ è isomorfo a $U \cap W$, abbiamo che la somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Un esercizio già visto

Esercizio

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nello spazio vettoriale V, consideriamo la funzione

$$\psi : \mathbb{R}^n \to V \ , \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \ .$$

Dopo aver verificato che ψ è lineare, provare che:

- ψ è suriettiva se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme di generatori per V;
- ψ è iniettiva se e solo se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono vettori linearmente indipendenti;
- ψ è un isomorfismo se e solo se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V.

Nel caso in cui $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sia una base di V, descrivere l'isomorfismo inverso di ψ.

Fibre

Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.
Per ogni $\mathbf{w}$ in W, la **fibra** $F^*(\mathbf{w})$ sopra $\mathbf{w}$ è l'insieme delle controimmagini di $\mathbf{w}$, cioè

$$F^*(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V : F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \ .$$

Le fibre sono sottoinsiemi di V, ma, con un'unica eccezione, non sono sottospazi vettoriali di V.
L'unica fibra che risulta essere sottospazio vettoriale di V è

$$F^*(\mathbf{0}) = \ker F \ .$$

Esempi: ...

Teorema (di struttura delle fibre)

Sia $F : V \to W$ *un'applicazione lineare e* $\mathbf{w}$ *un vettore di* W *.*
Se la fibra $F^*(\mathbf{w})$ *sopra* $\mathbf{w}$ *non è vuota, sia* $\bar{\mathbf{v}}$ *un suo elemento.*
Si ha

$$F^*(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{v}} + \ker F \ ,$$

dove $\bar{\mathbf{v}} + \ker F = \{\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \ker F\}$.

Il teorema afferma che, data l'"equazione lineare" $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ nell'incognita $\mathbf{v}$ con il termine noto $\mathbf{w}$ fissato, se $\bar{\mathbf{v}}$ è una soluzione particolare (cioè se $\bar{\mathbf{v}}$ è *uno* dei vettori tali che $F(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w}$), allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ si ottengono sommando a $\bar{\mathbf{v}}$ i vettori del nucleo di F , cioè sommando a $\bar{\mathbf{v}}$ le soluzioni dell'"equazione lineare omogenea" $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Complemento: fibre e sottospazi affini

Se in uno spazio vettoriale V si considerano un sottospazio vettoriale U ed un vettore $\bar{\mathbf{v}}$ di V, l'insieme

$$\bar{\mathbf{v}} + U = \{\bar{\mathbf{v}} + u : u \in U\}$$

si dice *sottospazio affine* (o varietà affine) di *sostegno* U.

Ogni sottospazio affine $\bar{\mathbf{v}} + U$ è in corrispondenza biunivoca con il proprio sostegno U.

L'insieme $\bar{\mathbf{v}} + U$ può essere interpretato come la traslazione del sostegno U rispetto il vettore $\bar{\mathbf{v}}$.

Generalmente un sottospazio affine non è un sottospazio vettoriale, ma si definisce la dimensione dello spazio affine come la dimensione del sostegno:

$$\dim(\bar{\mathbf{v}} + U) = \dim U \ .$$

Tutte le fibre non vuote dell'applicazione lineare $F : V \to W$ sono sottospazi affini di V il cui sostegno è il nucleo di F.

Dimostrazione.

- Mostriamo che $F^*(\mathbf{w}) \subseteq \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.
  Se $\mathbf{v}_0 \in F^*(\mathbf{w})$, consideriamo la differenza $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}$.
  $F(\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}) = F(\mathbf{v}_0) - F(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$;
  quindi $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}$ è un elemento del nucleo di F , cioè $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \in \ker F$.
  Dunque $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.

- Mostriamo che $F^*(\mathbf{w}) \supseteq \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.
  Se $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in \bar{\mathbf{v}} + \ker F$, allora
  $F(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}) = F(\bar{\mathbf{v}}) + F(\mathbf{v}) = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w}$.
  Dunque $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in F^*(\mathbf{w})$.

$\square$