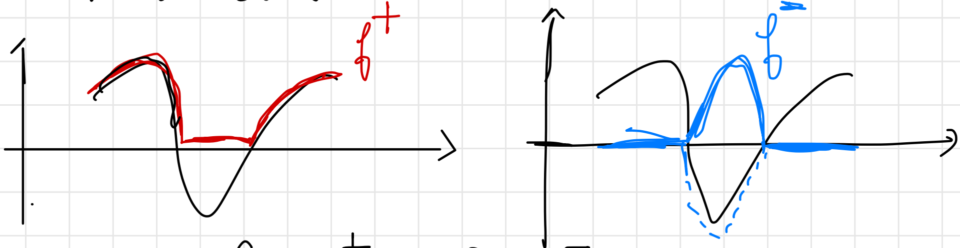
③ FUNZIONI MISURABILI di segno qualsiasi

Data f misurabile su E misurabile, scriviamo

$$f = f^+ - f^- \quad \text{con } f^+, f^- \geq 0$$

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := -\min\{f, 0\}.$$

misurabili



$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

A PATTO CHE: almeno uno tra $\int_E f^+$ e $\int_E f^-$ sia finito

(eventualmente $\int_E f = \pm\infty$).

Def. $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile si dice INTEGRABILE SECONDO LEBESGUE se

$$\int_E f \in \mathbb{R}$$

Oss. f integrabile secondo Lebesgue

$$\Leftrightarrow \int_E f^+ \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ integrabile secondo Lebesgue} \\ \Leftrightarrow |f| \text{ integrabile secondo Lebesgue.} \end{array}\right]$$

Infatti:

$$|f| = f^+ + f^-$$

Proprietà dell'integrale di Lebesgue

1) LINEARITÀ: f, g Lebesgue integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) MONOTONIA: f, g Lebesgue integrabili

$$f \leq g \text{ q.o. su } E \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

3) MAGGIORAZIONE DEL MODULO:

f Lebesgue integrabile $\Rightarrow$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2):

$$-|f| \leq f \leq |f| \Longrightarrow$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.

Sia S semplice $: E \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \setminus N \\ 1 & \text{su } N \end{cases} \qquad m(N) = 0$$

$$\int_E s = \underbrace{m(E \setminus N) \cdot 0}_{\shortparallel \atop 0} + \underbrace{m(N)}_{\shortparallel \atop 0} \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se f misurabile $: E \to \mathbb{R}$ se f si annulla su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se f, g misurabili $: E \to \mathbb{R}$ se $f = g$ su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

Def. Si dice che una proprietà $P(x)$ vale per q.o. $x \in E$ (q.o. su E) se $P(x)$ vale $\forall x \in E \setminus N$, con $m(N) = 0$

Quindi:

- $f = 0$ q.o. su E $\Rightarrow$ $\int_E f = 0$
- $f = g$ q.o. su E $\Rightarrow$ $\int_E f = \int_E g$

3) Confronto Riemann-Lebesgue

INTEGRALI "PROPRI" (f limitata e nulla fuori da un limitato)

- f R-integrabile $\Rightarrow$ f $\mathcal{L}$-integrabile

$\not\Leftarrow$

In caso affermativo, i valori degli integrali coincidono

($\Rightarrow$) Le funzioni semplici secondo Lebesgue $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ sono una classe più ampia delle funzioni semplici secondo Riemann $\mathcal{S}_R$

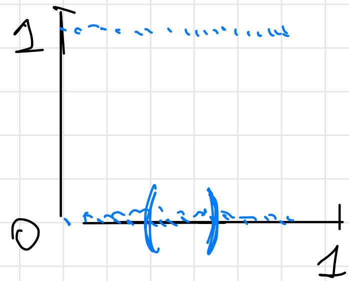
$$\sup_{\substack{s \in \mathcal{S}_R \\ s \leq f}} \int_E s \leq \sup_{\substack{s \in \mathcal{S}_L \\ s \leq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in \mathcal{S}_L \\ s \geq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in \mathcal{S}_R \\ s \geq f}} \int_E s$$

se f R-integrabile, coincidono e sono finiti

$\cancel{\Leftarrow}$ Controesempio:

$\exists f$ Lebesgue integrabile ma <u>NON</u> Riemann-integrabile su $E=(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$



FUNZIONE DI DIRICHLET $=\chi_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$

- NON R-integrabile

$s\in S_R,\quad s\geq f \Rightarrow s\geq 1$ su $(0,1)$.
$\Rightarrow \int_0^1 s\geq 1$

$s\in S_R \quad s\leq f \Rightarrow s\leq 0$ su $(0,1)$
$\Rightarrow \int_0^1 s\leq 0$.

- f $\mathcal{L}$-integrabile, $\int_0^1 f=0$

$$\int_0^1 f = 1\,\underbrace{m((0,1)\cap\mathbb{Q})}_{=0} + 0\cdot \underbrace{m((0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))}_{=1} = 0$$

INTEGRALI IMPROPRI f non limitata e/o definita su un non limitato

In $\mathbb{R}$:

Supponiamo che f limitata sia R-integrabile su $[-L, L]$ $\forall L > 0$.

Allora:

$$\exists \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{L} |f| \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

f $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $|f|$ R-integrabile (in senso improprio) su $\mathbb{R}$.

$$\Updownarrow$$

$|f|$ $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}$

$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$

f R-integrabile (in senso improprio su $\mathbb{R}$)

e in tal caso, l'integrale di Lebesgue di f coincide con l'integrale improprio di f.

Analogamente se f non limitata.

Controesempio: una funzione Riemann-integrabile (in senso improprio) ma non Riemann-integrabile (in senso improprio) in modulo, e quindi **non** Lebesgue integrabile

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{in } (0, +\infty)$$

- Riemann-integrabile in $(0, +\infty)$

Infatti

$$\exists \lim_{L \to +\infty} \int_0^L \frac{\sin x}{x} \, dx \quad \text{finito}$$

(tramite analisi complessa)

- non Riemann-integrabile in modulo

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$$

(tramite serie)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Quindi

$\frac{\sin x}{x}$ NON Lebesgue integrabile su $(0, +\infty)$

4) Principali teoremi nella teoria di Lebesgue.

Def. Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{ f : E \to \mathbb{R} \ \mathcal{L}\text{-integrabili} \} /_{\sim}$$

spazio vettoriale: f, g $\mathcal{L}$-integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ $\mathcal{L}$-integrabile

$$\left(\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g \right)$$

Def. Data $f \in L^1(E)$, $\|f\|_{\underset{L^1(E)}{1}} := \int_E |f|$

- $\int_E |f| \geq 0$ $\quad$ $\left[\int_E |f| > 0 \quad \forall f \neq \text{"}0\text{"} \right]$
- $\int_E |\lambda f| = |\lambda| \int_E |f|$
- $\int_E |f+g| \leq \int_E |f| + \int_E |g|$

$|f+g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_E |f+g| \leq \int_E (|f| + |g|)$

$$\int_E |f| = 0 \;\not\Rightarrow\; f = 0 \text{ su } E$$

$$\Rightarrow \; f = 0 \text{ q.o. su } E$$

$$f \sim 0$$

<u>Def.</u> Date $f, g \in L^1(E)$, diciamo che f è equivalente a g se $f = g$ q.o. su E.

(è una relazione di equivalenza:
$f \sim f$, $\quad f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$, $\quad f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$)

$\Rightarrow$ Identificheremo le funzioni equivalenti.

<u>Teorema</u>

$(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach
(tutte le successioni di Cauchy convergono).

Convergenza in $L^1(E)$

Def $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$, $f_n \to f$ in $L^1(E)$ $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_1 = 0. \quad \text{ovvero}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n - f| \, dx = 0.$$

Consideriamo per semplicità $f = 0$

Q: $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente q.o. in E.

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_E f_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \overset{?}{=} \int_E \underbrace{\lim_n f_n}_{= 0}$$

$\rightsquigarrow$ Teoremi di passaggio al limite sotto integrale