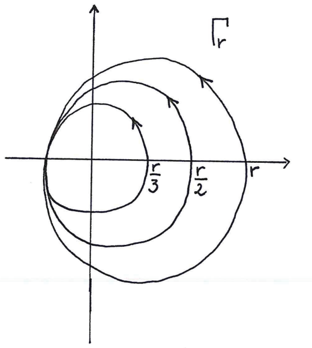
**Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015**
**Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica**
**Secondo appello di Metodi Analitici (29-6-15) – Prof. I. FRAGALÀ**

**COGNOME E NOME** .................. .................. **N. MATRICOLA** ..................

## I. ANALISI COMPLESSA.

Si considerino la funzione di variabile complessa $f(z) := \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$ e il circuito $\Gamma_r$ in figura, percorso una volta nel senso indicato dalla freccia, essendo $r$ un parametro positivo.




(i) Si classifichino le singolarità isolate di $f$ e si calcolino i corrispondenti residui.

(i) Si dica per quali valori di $r$ l'integrale di $f$ su $\Gamma_r$ può essere calcolato applicando il teorema dei residui.

(ii) Per tali valori di $r$, calcolare l'integrale di $f$ su $\Gamma_r$ .

**Soluzione**.
(i) La funzione $f$ ha un polo semplice in $z = 1$ e una singolarità essenziale in $z = 0$.
Nel caso del polo semplice si ha

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -e\,.$$

Nel caso della singolarità essenziale, poiché per $|z| \in (0, 1)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!z^n} \sum_{m\geq 0} z^m = \sum_{n,m\geq 0} \frac{1}{n!} z^{m-n}$$

si ha

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+1)!} = e - 1\,.$$

(ii) I valori di $r$ per cui l'integrale assegnato può essere calcolato tramite il teorema dei residui sono quelli tali che le singolarità di $f$ non cadono su $\Gamma_r$, ovvero $r \notin \{1, 2, 3\}$ .

(iii) Si ha

$$\mathrm{Ind}(\Gamma_r, 0) = 3\,, \qquad \mathrm{Ind}(\Gamma_r, 1) = \begin{cases} 3 & \text{se } r > 3 \\ 2 & \text{se } 2 < r < 3 \\ 1 & \text{se } 1 < r < 2 \\ 0 & \text{se } r < 1\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = (2\pi i)\cdot \begin{cases} 3(e-1) - 3e = -3 & \text{se } r > 3 \\ 3(e-1) - 2e = e - 3 & \text{se } 2 < r < 3 \\ 3(e-1) - e = 2e - 3 & \text{se } 1 < r < 2 \\ 3(e-1) & \text{se } r < 1\,. \end{cases}$$

**II. ANALISI FUNZIONALE.**

(i) Si dia la definizione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali normati e la definizione di norma per un tale operatore.

(ii) Si consideri l'operatore lineare da $L^p(\mathbb{R})$ in sé definito da

$$(Tu)(x) := u(2x)\,.$$

Al variare di $p \in [1, +\infty]$, stabilire se $T$ è limitato e nei casi affermativi calcolarne la norma.

**Soluzione.**
(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) Per $p \in [1, +\infty)$, si ha

$$\|Tu\|_p = \Big( \int_{\mathbb{R}} |u(2x)|^p \, dx \Big)^{1/p} = \Big( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \, dy \Big)^{1/p} = 2^{-1/p} \|u\|_p$$

dove si è usato il cambio di variabile $2x = y$.
Pertanto $T$ è limitato con $\|T\| = 2^{-1/p}$.
Per $p = +\infty$, si ha

$$\|Tu\|_\infty = \mathrm{esssup}_{\mathbb{R}} |u(2x)| = \mathrm{esssup}_{\mathbb{R}} |u(x)| = \|u\|_\infty\,.$$

Pertanto $T$ è limitato con $\|T\| = 1$.

**III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.**

Sia $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata, e si definisca, per $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier di $f$. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere supponendo di sapere solo che la funzione $\varphi$ è continua su $[-1,1]$:

(a) $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

(b) $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

(c) $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$

(d) $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$

(e) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

**Soluzione.**

(a) In generale è falso, basta prendere ad esempio $\varphi(t) \equiv 1$.

(b) Vero perché $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(e) Vero perché $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. In particolare sono vere anche (c) e (d).