Equazioni lineari a coefficienti costanti

1) Il moto armonico smorzato di un punto materiale è descritto dall'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Supponiamo inoltre che all'istante $t = 0$ il punto si trovi nell'origine ($y(0) = 0$) con velocità $y'(0) = 1$. Trovare dopo quanto tempo il punto ripassa per l'origine e con quale velocità.

2)

a) Supponiamo che le funzioni $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-2t}$ siano soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

Trovare a e b e scrivere l'integrale generale dell'equazione.

b) Per i valori di a e b trovati, determinare l'integrale generale dell'equazione *non omogenea*

$$y'' + ay' + by = e^{-2t}$$

3) Trovare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \\ y_3' = 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

4) Si consideri il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x - y \end{cases}$$

a) Determinare l'integrale generale del sistema.

b) Ricavare un'equazione differenziale per le orbite nel piano xy (piano delle fasi) e integrarla.

c) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e disegnare la corrispondente traiettoria nel piano xy.

Soluzioni.

1) Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Radici dell'equazione caratteristica: $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$. Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$$

La condizione $y(0) = 0$ è soddisfatta scegliendo $c_1 = 0$. Per imporre la seconda condizione, calcoliamo la derivata:

$$y'(t) = c_2 e^{-t}(-\sin 2t + 2\cos 2t)$$

Nell'origine abbiamo $y'(0) = 2c_2$, per cui la seconda condizione vale per $c_2 = 1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$y = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

Il punto ripassa per l'origine quando l'argomento del seno è uguale a π, quindi all'istante $t = \pi/2$. In quell'istante, la velocità vale

$$y'(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} \cos \pi = -e^{-\pi/2}$$

2)

(a) Osservando che i valori 1 e -2 sono radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

(o semplicemente sostituendo $y = e^t$ e $y = e^{-2t}$ nell'equazione differenziale) si ricava subito: $a = 1$, $b = -2$. Dunque l'equazione è

$$y'' + y' - 2y = 0$$

L'integrale generale ha la forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

(b) Poiché il valore -2 è radice (semplice) dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' + y' - 2y = e^{-2t}$$

nella forma

$$\bar{y}(t) = Kte^{-2t}$$

con K costante da determinarsi. Sostituendo nell'equazione troviamo (semplificando il fattore esponenziale comune a tutti i termini)

$$-4K + 4Kt + K - 2Kt - 2Kt = 1$$

da cui si ricava $K = -1/3$. Dunque, l'integrale generale si scrive

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{3} t e^{-2t}$$

3) La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$$

Dunque $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. I corrispondenti autovettori si ottengono risolvendo i sistemi

$$(A + 2I)\,\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)\,\mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)\,\mathbf{h_3} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tre autovettori indipendenti sono

$$\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'integrale generale (in forma vettoriale) si scrive

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

4.

a) La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = (\lambda + 1)^2 = 0$$

Dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ soluzione di molteplicità 2. Cerchiamo le soluzioni nella forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = te^{-t}\,\mathbf{h} + e^{-t}\,\mathbf{k}$$

Sostituendo nell'equazione si trova che i vettori $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ devono soddisfare le condizioni

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{h} = 0, \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{h}$$

Poiché

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ricava

$$\mathbf{h} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$ sono rispettivamente un autovettore e un autovettore generalizzato di $\left.\mathbf{A}\right]$

Soluzione alternativa : La prima equazione non contiene la funzione incognita $y(t)$; integrando, si trova

$$x(t) = C_1 e^{-t}$$

con C_1 costante arbitraria. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$y'(t) = -y(t) + C_1 e^{-t}$$

ovvero una equazione lineare del primo ordine non omogenea per la y; applicando la formula risolutiva si ricava:

$$y(t) = C_1 te^{-t} + C_2 e^{-t}$$

In entrambi i casi l'integrale generale (in forma vettoriale) si scrive:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) L'equazione delle traiettorie (come grafici di funzioni della variabile x) è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$$

Si tratta di un'equazione omogenea; con la sostituzione $z(x) = y(x)/x$ si ottiene

$$z' = -\frac{1}{x}$$

e quindi

$$z(x) = -\ln|x| + C; \qquad y(x) = -x\ln|x| + Cx$$

c) Sostituendo la condizione iniziale

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nell'espressione dell'integrale generale in forma vettoriale, ricaviamo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. L'orbita nel piano delle fasi ha equazioni parametriche

$$x = e^{-t}, \quad y = te^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Eliminando il parametro t si ricava la curva cartesiana di equazione

$$y = -x\log x, \qquad x > 0$$

La stessa soluzione si trova imponendo il passaggio per il punto $(1,0)$ alla famiglia di soluzioni dell'equazione delle traiettorie (punto (b)) ricordando che si deve considerare solo la curva che giace nel semipiano $x > 0$.