Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Quarto appello di Metodi Analitici (20-9-13) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

(i) Enunciare il teorema dei residui.
(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_{2\pi}(0)} \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi)}\, dz\,,$$

dove $C_{2\pi}(0)$ è la circonferenza di raggio 2π e centro l'origine, percorsa una volta in senso antiorario.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Poniamo

$$f(z) := \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi)}\,.$$

Si ha che $f(z)$ ha tre singolarità che cadono tutte all'interno di $C_{2\pi}(0)$, poste in $z = 0$ e $z = \pm\pi$.
Si verifica facilmente che si tratta in tutti e tre i casi di singolarità eliminabili, in quanto

$$\lim_{z\to 0} f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$$

$$\lim_{z\to \pi} f(z) = -\lim_{z\to\pi} \frac{\sin(z-\pi)}{z(z-\pi)(z+\pi)} = -\frac{1}{2\pi^2}$$

$$\lim_{z\to -\pi} f(z) = -\lim_{z\to-\pi} \frac{\sin(z+\pi)}{z(z-\pi)(z+\pi)} = \frac{1}{2\pi^2}\,.$$

Pertanto il residuo in tutti e tre i casi è nullo, e di conseguenza il valore dell'integrale assegnato è 0.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Siano a_n e b_n, $n \geq 1$, due successioni di numeri reali positivi, entrambe divergenti a $+\infty$ per $n \to +\infty$. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = a_n \chi_{[0, \frac{1}{b_n}]}(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\chi_{[0,\frac{1}{b_n}]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \frac{1}{b_n}]$. Al variare delle successioni numeriche a_n e b_n (ovvero in base al loro comportamento asintotico), discutere la convergenza della successione $f_n(x)$:

(i) in senso puntuale quasi ovunque;

(ii) in $L^1(\mathbb{R})$;

(iii) in $L^\infty(\mathbb{R})$.

Soluzione.
(i) Si ha che $f_n(x) \to 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. Infatti, sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissato. Se $x < 0$, si ha $f_n(x) = 0$ per ogni n; se $x > 0$, si ha $f_n(x) = 0$ per $b_n > \frac{1}{x}$, cioè definitivamente in n (poiché $b_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$).

(ii) Per il punto (i), l'unico possibile limite in $L^1(\mathbb{R})$ della successione f_n è zero. (Infatti la convergenza ad una funzione f in L^1 implica la convergenza q.o. a f a meno di passare a una sottosuccessione).
Si ha:

$$\|f_n(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^{1/b_n} a_n\, dx = \frac{a_n}{b_n}\,.$$

Pertanto, la successione risulta convergente in $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$, e in tal caso il limite è zero.

(iii) Per il punto (i), l'unico possibile limite in $L^\infty(\mathbb{R})$ della successione f_n è zero. (Infatti la convergenza ad una funzione f in L^∞ implica la convergenza q.o.).
Si ha

$$\|f_n(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = a_n$$

Dunque, dato che per ipotesi $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, non si ha mai convergenza in $L^\infty(\mathbb{R})$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Si dimostri l'uguaglianza

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

(*Suggerimento: si usi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione* 2π*-periodica data da* $f(x) = |x|$ *per* $x \in (-\pi, \pi]$*.*)

Soluzione. Poiché la funzione f è pari, i suoi coefficienti di Fourier b_k sono tutti nulli. Inoltre, poiché $|x|$ è continua su $(-\pi, \pi]$, la sua estensione 2π-periodica appartiene a $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pertanto possiamo scrivere l'identità di Parseval come

$$(*) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2\,,$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Effettuando il calcolo esplicito delle espressioni che compaiono in (*), si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Pertanto possiamo riscrivere (*) come:

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}\,,$$

da cui si ricava immediatamente l'uguaglianza voluta.