Analisi matematica 2		6 luglio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Calcolare gli integrali

$$\int\int_{\Omega} x\,dx\,dy, \qquad \int\int_{\Omega} y\,dx\,dy,$$

dove Ω è la regione *finita* del primo quadrante delimitata dalle curve $y = x^2$ e $x = y^2$. Trovare le coordinate del baricentro della regione.

b) Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_{D} (y^2 + z^2)\,dxdydz,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \le 4, \quad -1 \le z \le 1\}$$

c) Determinare il volume del solido che giace *sotto* la superficie di equazione $z = 1 - |y|$ e *sopra* la superficie di equazione $z = |x|$.

2. Sia Σ la porzione del paraboloide di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ con $0 \leq z \leq 1$.

i) Calcolare l'area di di Σ

ii) Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2yz\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

sulla superficie Σ orientata in modo che la componente della normale lungo l'asse z sia (in ogni punto) positiva.

3a.

- Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

- Detta $f(x)$ la somma della serie, trovare una serie convergente a $f'(x)$, giustificando i passaggi e specificando l'intervallo di convergenza.
- Determinare l'espressione di $f(x)$.

3b. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2$ e tale che

$$f(x) = x \qquad \text{per} \quad x \in (-1, 1].$$

- Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3, 3]$.
- Dimostrare che la *serie di Fourier associata a* f ha la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

(non è richiesto il calcolo esplicito dei coefficienti b_n).
- Discutere la convergenza puntuale della serie. Spiegare perchè la serie *non* converge totalmente in $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI

1.

a)

Il dominio è sia $x-$semplice che $y-$semplice; usando le formule di riduzione si ottiene

$$\int\int_\Omega x\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy\Big)dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} - x^3)\,dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Il valore del secondo integrale è ancora $3/20$, come segue applicando le formule di riduzione o osservando che il dominio Ω è simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$. Poiché l'area vale $|\Omega| = 1/3$, le coordinate del baricentro sono

$$x_b = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega x\,dx\,dy = \frac{9}{20}\,; \qquad y_b = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega y\,dx\,dy = \frac{9}{20}\,.$$

b) Utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z,$$

abbiamo

$$\int\int\int_D (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^2\sin^2\theta + z^2)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_{-1}^1\int_0^{2\pi}(4\sin^2\theta + 2z^2)\,d\theta\,dz = 4\pi\int_{-1}^1 (1+z^2)\,dz = \frac{32}{3}\pi\,.$$

c) Il solido occupa la regione

$$E = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, |x|+|y|\le 1, \quad |x|\le z\le 1-|y|\big\}$$

Dunque

$$|E| = \int\int\int_E dx\,dy\,dz = \int\int_Q \Big(\int_{|x|}^{1-|y|} dz\Big)dx\,dy = \int\int_Q (1-|y|-|x|)\,dx\,dy\,,$$

dove $Q = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, |x|+|y|\le 1,\big\}$ è il quadrato con vertici nei punti $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$. Per ragioni di simmetria, detto T il triangolo nel primo quadrante di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, abbiamo

$$\int\int_Q (1-|y|-|x|)\,dx\,dy = 4\int\int_T (1-x-y)\,dx\,dy = 4\,\frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,.$$

2.

i) La superficie Σ è cartesiana e si parametrizza con

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}\,,$$

dove

$$(x,y) \in \mathrm{T} := \{(x,y)\,|\, 3 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

L'elemento di area su Σ è

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$$

L'area è allora

$$|\Sigma| = \int\!\!\int_{\mathrm{T}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 13\sqrt{13})$$

ii) Calcoliamo prima il flusso di

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2(z+1)\,\mathbf{k}\,,$$

attraverso Σ con l'orientazione assegnata. La normale moltiplicata per l'elemento di superfice è

$$\mathbf{n}\,dS = \big(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,dxdy$$

Dunque:

$$\int\!\!\int_{\Sigma} \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\!\!\int_{\mathrm{T}} 2\big[x^2 + y^2 - (4 - x^2 - y^2) - 1\big]\,dx\,dy =$$

$$= 2\int\!\!\int_{\mathrm{T}} (2x^2 + 2y^2 - 5)\,dx\,dy = 2\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2} (2\rho^2 - 5)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 4\pi\int_{\sqrt{3}}^{2} (2\rho^3 - 5\rho) = 4\pi\,.$$

Il bordo di Σ è l'unione delle due circonferenze γ_0 e γ_1, rispettivamente di equazioni $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 3$, $z = 1$. Il bordo è percorso in senso positivo rispetto all'orientazione assegnata se le due circonferenze sono parametrizzate da

$$\gamma_0 \;:\quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 0, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\gamma_1 \;:\quad x = \sqrt{3}\cos t, \quad y = -\sqrt{3}\sin t, \quad z = 1, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Su γ_0 abbiamo:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (0\,\mathbf{i} - 4\cos t\,\mathbf{j} + 4\cos t\sin t\,\mathbf{k})\cdot(-2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j})\,dt = -8\cos^2 t\,dt$$

Su γ_1 abbiamo:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (-2\sqrt{3}\sin t\,\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\cos t\,\mathbf{j} + 3\cos t\sin t\,\mathbf{k})\cdot(-\sqrt{3}\sin t\,\mathbf{i} - \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{j})\,dt = 6\,dt$$

Dunque

$$\int_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-8\cos^2 t + 6)\,dt = -8\pi + 12\pi = 4\pi\,.$$

3a.

La serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Poiché $|a_n| = 1/n$, il raggio di convergenza si calcola dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Dunque $R = 1$ e la serie converge (assolutamente) per $x \in (0, 2)$. Agli estremi $x = 0$ e $x = 2$, abbiamo rispettivamente le serie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La prima serie diverge a $-\infty$, la seconda converge per il criterio di Leibniz. Quindi la serie converge nell'intervallo $(0, 2]$. La sua somma $f(x)$ è continua nello stesso intervallo per il teorema di Abel, ed è derivabile in $(0, 2)$ per le proprietà delle serie di potenze; la derivata si può calcolare derivando termine a termine:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(x-1)^{n-1} = \; (n-1 = m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (x-1)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (1-x)^m = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}, \quad \forall\, x \in (0, 2).$$

Dunque $f'(x) = 1/x$, ed essendo $f(1) = 0$ abbiamo subito $f(x) = \ln x$ con $x \in (0, 2]$.

3b.

La funzione f è limitata, integrabile e *dispari* sull'intervallo $(-1, 1)$; la serie di Fourier associata è allora una serie di soli seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

con $T = 2$.

Poiché f è regolare a tratti, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge a $f(x)$ per $x \neq 2k+1$ e converge a 0 per $x = 2k+1$, dove $k \in \mathbb{Z}$. Se la serie convergesse totalmente in $\mathbb{R}$, la sua somma sarebbe una funzione continua in $\mathbb{R}$, contraddicendo il teorema della convergenza puntuale.