I.7 - Serie di potenze in campo complesso

Prima di proseguire con la teoria è necessario elencare brevemente in principali risultati riguardo alle **serie di potenze in campo complesso** (centrate in z_0), ovvero una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad con \;\; c_n \in \mathbb{C}$$

Come nel caso reale, essa non è altro che la successione delle somme parziali definite da:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n$$

- Si dice che la serie <u>converge puntualmente</u> in z se esiste finito (in $\mathbb{C}$) il limite della successione delle somme parziali $S_N(z)$.

- Si dice che la serie <u>converge uniformemente</u> a $S(z)$ su Ω se $\lim_{N\to+\infty} \sup |S_N(z) - S(z)|_{\boldsymbol{C}} = 0$

- Si dice che la serie <u>converge assolutamente</u> in z se ivi converge la serie dei moduli $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - z_0|^n$.

Per le serie di potenze complesse valgono in particolare i seguenti risultati:

1. L'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} : \ S_N(z) \ \textit{converge}\}$ è detto *dominio di convergenza* della serie. In particolare per le serie di potenze si può dimostrare che l'interno di tale insieme è un disco di raggio R (che viene chiamato *raggio di convergenza*):
$$\overset{o}{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$
Sui punti di frontiera dell'insieme D è invece necessario effettuare un'analisi punto per punto. La serie converge inoltre assolutamente in D e uniformemente in ogni compatto incluso in D, in particolare in ogni insieme $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le \rho, \ \rho < R\}$.

2. Ripetendo la dimostrazione come nel caso reale, si ha che il raggio di convergenza è:
$$R = \frac{1}{l}, \quad \textit{dove} \ \ l := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

3. Le serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza della serie di potenze e quindi è possibile derivare per serie infinite volte

I.8 - FUNZIONI ANALITICHE

Sia data una $f : \Omega$ *aperto di* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; essa si dice **analitica** su Ω se $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ essa può essere scritta, in un intorno di z_0, come una serie di potenze (sviluppo di Taylor di f) centrate in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in U(z_0)$$

In particolare, se f è analitica, allora è anche C^∞. In particolare si ha, dalle proprietà delle serie di potenze in campo complesso, che le derivate di f hanno la forma seguente:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = c_1$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n n(n-1)(z - z_0)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad f''(z_0) = 2c_2$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!}(z - z_0)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(z_0) = k! c_k$$

Da cui si deduce che, come nel caso reale, i coefficienti c_n si possono calcolare come:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

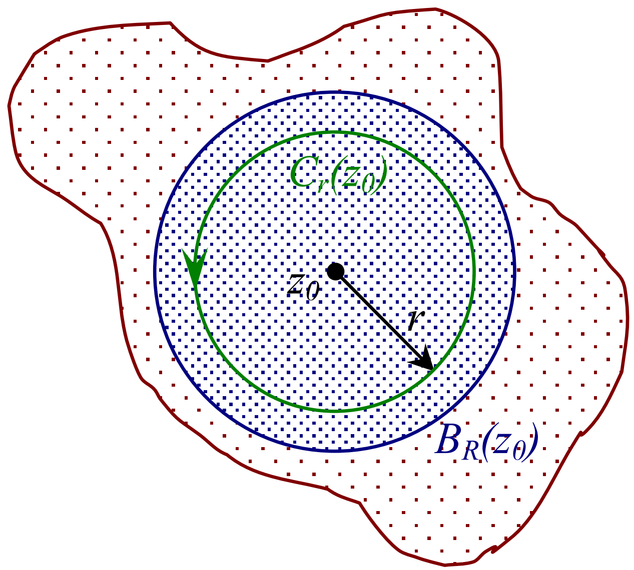
A differenza del caso reale, però, tali coefficienti si possono trovare anche in un altro modo. Si consideri a questo proposito una funzione complessa f analitica su Ω *aperto di* $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

Si fissino a questo punto un $r \in (0, R)$ ed un intero $k \geq 0$

Prima di proseguire si calcoli il risultato del seguente integrale, necessario per lo sviluppo della trattazione, dove m è un intero relativo:

$$\int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^m \, dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} i r e^{it} \, dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} \, dt = \begin{cases} 0 & se\ m \neq -1 \\ 1 & se\ m = -1 \end{cases}$$



Utilizzando tale risultato e la proprietà di scambio serie - integrale (garantita dalla convergenza uniforme), si ottiene quindi che:

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz = \int_{C_r(z_0)} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \right] dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} \, dz \right] = 2\pi i \, c_k$$

Per una serie di potenze complessa, i coefficienti possono quindi essere trovati in due modi:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Da tale relazione si ricava subito la ***formula di Cauchy per la derivata*** n-esima:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Se si pone $n = 0$, otteniamo la relazione:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

Più in generale si può dimostrare che se f è una funzione olomorfa su $\Omega \supseteq \overline{B_R(z_0)}$, fissato $r \in (0, R)$, vale la seguente ***formula di Cauchy***:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

che valutata in z_0 permette di ritrovare subito la formula precedente.

Osservazioni:

- Gli integrali precedenti non dipendono dal particolare r scelto (sempre con $r \in (0, R)$), poiché tutte le circonferenze centrate in z_0 appartengono alla stessa classe di omotopia (nel caso ad esempio della formula di Cauchy per la derivata n-esima con $n = 0$ il dominio della funzione integranda è infatti $\Omega \setminus \{z_0\}$).
- La formula di Cauchy implica che conoscendo i valori di una funzione olomorfa sul bordo di un disco, si conoscono tutti i valori della funzione nei punti interni a tale disco.

Teorema: Se una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω, allora essa è ivi analitica. In particolare $\forall z_0 \in \Omega$, detta $B_R(z_0)$ la più grande sfera di centro z_0 contenuta in Ω, si ha che:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

dove i c_n sono proprio quelli trovati precedentemente.

La dimostrazione di tale teorema è basata sulla seguente osservazione: dalla formula di Cauchy si può vedere che la funzione $f(z)$ è l'integrale di una funzione dipendente in maniera regolare da un parametro z. Tale regolarità si può dimostrare che viene trasferita all'integrale stesso e quindi alla f.

I.9 - SINGOLARITÀ ISOLATE E LORO CLASSIFICAZIONE

Si dice che un punto z_0 è di **singolarità isolata** per una funzione complessa f se tale funzione è olomorfa in tutto un intorno di z_0, tranne tale punto.

In particolare, se z_0 è una singolarità isolata per f, essa può essere di tre tipi:

1. **eliminabile**: se esiste una funzione $\tilde{f}$ olomorfa su un intorno di z_0 che ivi estende f, ovvero se:

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & per\ z \neq z_0 \\ \lambda & per\ z = z_0 \end{cases} \quad sia\ \ olomorfa$$

2. **polo**: se $f(z)$ tende all'infinito quando z tende a z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

3. **essenziale**: in tutti gli altri casi.

Esempi:

- $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata eliminabile per f. Infatti la funzione:

$$\tilde{f}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

È analitica (e quindi olomorfa) ed estende la f nel punto di singolarità.

- $f(z)=\dfrac{1}{z^m}$, $m\in\mathbb{N}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata di tipo polo per f

- $f(z) = e^{1/z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata essenziale per *f*. Se infatti prendiamo i limiti di *f(z)* per $z \to 0$ lungo l'asse dei reali prima da destra e poi da sinistra, essi sono diversi:

$$z = x \begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/z} = +\infty \\ x \in \mathbb{R}^- & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/z} = 0 \end{cases}$$

La singolarità non è quindi né un polo, né eliminabile. Essa e quindi essenziale, e si può vedere come fissato un certo valore $w \neq 0$, la funzione assume tale valore in un qualsiasi intorno di z_0.

$$w = \rho e^{i\vartheta}, \ \frac{1}{z} = x + iy \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{1/z} = w; \quad e^{x+iy} = \rho e^{i\vartheta}; \quad e^x e^{iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

Le cui soluzioni sono: $x = \ln\rho \ \ e \ \ y = \vartheta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Si ha perciò:

$$z = \frac{1}{\ln\rho + i(\vartheta + 2k\pi)}$$

il cui modulo può essere reso piccolo a piacere al variare di *k*. Fissati quindi ρ e ϑ, esistono infiniti punti *z* in cui la funzione assume il valore $\rho e^{i\vartheta}$ in un qualunque intorno di *0* se $\rho \neq 0$.

- $f(z)=\left[\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}$: $z_0 = 0$ non è una singolarità isolata per f. Infatti:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z}=k\pi, \quad z=\frac{1}{k\pi}, \; con\; k\in\mathbb{Z}$$

Un qualsiasi intorno dell'origine contiene quindi infiniti zeri del seno e quindi infiniti punti in cui f non è olomorfa.

Osservazioni:

- Nel caso della singolarità eliminabile, la funzione $\tilde{f}$ che estende f è unica.
- ***Teorema di rimozione della singolarità:*** sia z_0 una singolarità isolata per f: z_0 è una singolarità eliminabile se e solo se f è limitata in un intorno di z_0.
- ***Teorema di Picard:*** se z_0 è una singolarità essenziale per f, allora in ogni intorno di z_0 la funzione assume tutti i valori di $\mathbb{C}$ tranne al più uno.

$$\forall U(z_0) \quad f(U(z_0)) = \left\langle \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \setminus \{w_0\} \end{matrix} \right., \quad con\ w_0 \in \mathbb{C}$$

I.10 - SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT

Teorema: Sia f una funzione olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$ e $B_R(z_0) \subseteq \Omega$. Tale funzione ammette uno sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 per ogni z in $B_R(z_0)$ tolto z_0, ovvero:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}, \quad \forall z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$$

Le due serie che compaiono in tale sviluppo prendono il nome di:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n : \text{parte regolare} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} : \text{parte singolare}$$

Osservazioni:

- I coefficienti c_n si possono calcolare con la formula trovata precedentemente per lo sviluppo in serie di Taylor di funzioni in campo complesso:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

  In questo caso, però, non è più valida la formula utilizzabile nel caso reale: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

- Il teorema è valido più in generale se f è olomorfa in una corona circolare centrata in z_0, ovvero un dominio Ω del tipo $B_R(z_0) \setminus B_r(z_0)$ con $r < R$.
- Nel caso di una singolarità eliminabile, lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor ed è quindi presente solo la parte regolare.