Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Secondo appello di Analisi III, 7 febbraio 2020 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

(a) Al variare del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcolare tramite il teorema dei resuidui

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{((x-t)^2+1)(t^2+1)}\, dt\,.$$

(b) Stabilire per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ si ha $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) Le singolarità della funzione

$$g(t) := \frac{1}{((x-t)^2+1)(t^2+1)}\, dt\,.$$

sono nei punti $t = x \pm i$ e $t = \pm i$. Poiché per ipotesi $x \neq 0$, si tratta di poli semplici, e i residui nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$ sono

$$\mathrm{Res}(g, x+i) = \frac{1}{2i((x+i)^2+1)} \qquad \mathrm{Res}(g, i) = \frac{1}{2i((x-i)^2+1)}\,.$$

Essendo soddisfatta la condizione di decadimento per applicare il teorema dei residui, si ha

$$f(x) = 2\pi i[\mathrm{Res}(g, x+i) + \mathrm{Res}(g, i)] = \frac{2\pi}{x^2+4}\,.$$

(b) Si ha $f \in L^\infty$, poiché $\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{\pi}{2}$. Inoltre poiché f è continua sui compatti, e per $x \to +\infty$, $|f|^p \sim |x|^{-2p}$ (con $2p > 1$) si ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Trovare tramite trasformata di Fourier tutte le funzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$, con $u', u'' \in L^1(\mathbb{R})$, tali che

$$u''(x) + u(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Procedendo formalmente, supponiamo esista una soluzione $u \in L^1(\mathbb{R})$, con $u', u'' \in L^1(\mathbb{R})$. Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri si ottiene

$$\hat{u}(\xi)(1-\xi^2) = 2\frac{\sin(\xi)}{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \hat{u}(\xi) = 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}\,\frac{1}{1-\xi^2}.$$

Ora, osservando che $2\,\dfrac{\sin(\xi)}{\xi}\,\dfrac{1}{1-\xi^2} \notin L^\infty(\mathbb{R})$ si ottiene una contraddizione con il Lemma di Riemann-Lebesgue. Se ne conclude dunque che l'equazione non ammette soluzioni con le proprietà richieste.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]

Si consideri l'operatore $T : L^1(\mathbb{R}^+) \to L^1(\mathbb{R}^+)$ definito come

$$(Tf)(x) = \frac{f(x)}{x+1}\,.$$

(a) Dimostrare che T è un operatore lineare continuo.

(b) Calcolare la norma di T.

(c) Discutere se la norma di T è realizzata (ovvero se esiste $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ non identicamente nulla tale che $\|Tg\|_1 = \|T\|\|g\|_1$).

Soluzione.

(a) La linearità dell'operatore è una conseguenza della linearità dell'operazione di prodotto con una data funzione (in questo caso $1/(x+1)$). Inoltre osserviamo che

$$\|Tf\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x+1}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\ , \tag{1}$$

da cui l'operatore T è anche continuo con $\|T\| \le 1$.

(b) Per mostrare che la norma di T è esattamente 1, consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = n\,\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)\,.$$

Evidentemente $\|f_n\|_1 = 1$, mentre

$$\|Tf_n\|_1 = n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\,,$$

perciò

$$\lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,,$$

il che mostra, assieme alla (1), che $\|T\| = 1$.

(c) Verifichiamo che la norma di T non può essere realizzata da alcuna funzione $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ non identicamente nulla. Infatti in tal caso si avrebbe

$$\int_0^{+\infty} |Tg(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} |g(x)|\,dx$$

ovvero

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}|g(x)|\,dx = 0$$

che non è possibile a meno che g sia identicamente nulla (dato che l'integranda ha segno costante).

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Fornire la definizione dello spazio $H_0^1(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e enunciare la disuguaglianza di Poincaré.

(b) Mostrare che una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ definisce una distribuzione temperata, e fornire un esempio di una distribuzione non temperata.

Soluzione.

(a)- (b) Si veda uno dei testi consigliati. Per la distribuzione non temperata, si può prendere ad esempio e^x.