Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2020/2021
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Terzo appello di Analisi 3, 10/6/2021 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti) Sia f la funzione di variabile reale definita da

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{if } |x| \le 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \, . \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

a. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

   VERO, poiché f è limitata sull'intervallo $[-1, 1]$ e nulla al di fuori di esso

b. $f \in H^1(\mathbb{R})$

   FALSO, poiché f ha un salto in $x = \pm 1$, dunque la sua derivata in senso distribuzionale non appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

c. $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

   VERO: $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ per il teorema di Riemann-Lebesgue, e $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ poiché $f \in L^2(\mathbb{R})$.

d. $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$
   VERO, poiché $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

TEST 2. (8 punti) Siano f e g due funzioni assegnate su $(0, 1)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere affinché esista una e una sola funzione $u \in H^1_0(0, 1)$ soluzione del seguente problema variazionale:

$$\int_0^1 f(x)u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1_0(0, 1)\,.$$

e. È condizione necessaria che g appartenga a $L^\infty(0, 1)$

   FALSO, perché la forma lineare $F(v) = \int_0^1 g(x)v(x)\,dx$ puó essere continua su $H^1_0(0, 1)$ anche se g appartiene a $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R})$.

f. È condizione sufficiente che f e g appartengano a $L^\infty(0, 1)$

   FALSO, perché queste condizioni non garantiscono la coercività della forma bilineare $B(u, v) = \int_0^1 f(x)u'(x)v'(x)\,dx$

g. È condizione sufficiente che $\inf_{(0,1)} f > 0$ e g appartenga a $L^2(0, 1)$

   FALSO, perché queste condizioni non garantiscono la continuità dell forma bilineare $B(u, v) = \int_0^1 f(x)u'(x)v'(x)\,dx$

h. È condizione sufficiente che $\inf_{(0,1)} f > 0$, f appartenga a $L^\infty(0, 1)$ e g appartenga a $L^2(0, 1)$

   VERO per il teorema di Lax Milgram, poiché sotto tali ipotesi, usando le disuguaglianze di Hölder e di Poincaré, si ha:

   – $B(u, v) \le \|f\|_\infty \|u'\|_2 \|v'\|_2$ (B continua)
   – $B(u, u) \ge (\inf_{(0,1)} f)\|u'\|_2$ (B coerciva)
   – $F(v) \le \|g\|_2 \|v\|_2 \le C\|g\|_2 \|v'\|_2$ (F continua)

ESERCIZIO (10 punti) Siano a e b due parametri reali fissati, con $b > 0$. Si consideri la funzione di variabile reale $f(t)$ definita da

$$f(t) = V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixt}}{x - (a+ib)}\, dx$$

i. Si dimostri che f ha una discontinuità di tipo salto in $t = 0$ e si determini l'ampiezza del salto (ovvero la differenza tra limite destro e limite sinistro in $t = 0$).

ii. Si stabilisca per quali scelte dei parametri a e b la funzione f assume un valore reale nel punto $t = -1$.

Soluzione.

i. Estendiamo la funzione integranda al campo complesso, ponendo

$$g(z) = \frac{e^{-izt}}{z - (a+ib)}\,.$$

La funzione g ha un'unica singolarità (precisamente un polo semplice), nel punto $z_0 = a + ib$. Per l'ipotesi $b > 0$, tale polo si trova nel semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Applicando quindi il lemma di Jordan e il teorema dei residui, abbiamo:

per $t > 0$,

$$f(t) = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^-(0)} \frac{e^{-izt}}{z-(a+ib)}\, dz = 0$$

dove $C_R^-(0)$ è la semicirconferenza inferiore di centro 0 e raggio R (ovvero $\{Re^{i\theta}\, \theta \in [\pi, 2\pi]\}$) percorsa una volta in senso orario;

per $t < 0$,

$$f(t) = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} \frac{e^{-izt}}{z-(a+ib)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_0) = 2\pi i e^{-i(a+ib)t} = 2\pi i e^{(b-ia)t}\,.$$

dove $C_R^+(0)$ è la semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio R (ovvero $\{Re^{i\theta}\, \theta \in [0, \pi]\}$) percorsa una volta in senso antiorario.

Pertanto

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 \neq 2\pi i = \lim_{t\to 0^-} f(t)$$

da cui abbiamo che la funzione f è discontinua in 0, con un salto di ampiezza $2\pi i$.

ii. Per quanto ottenuto al punto precedente, abbiamo:

$$f(-1) = 2\pi i e^{(-b+ia)} = 2\pi i e^{-b}(\cos a + i \sin a) = 2\pi e^{-b}(-\sin a + i\cos a)\,.$$

Tale valore è puramente reale se e solo se $\cos a = 0$, e quindi $f(-1)$ è reale se e solo se

$$a \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

TEORIA (6 punti)

i. Si esibisca un esempio esplicito di una funzione φ appartenente allo spazio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ii. Si spieghi perché lo spazio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ non è denso in $L^\infty(\mathbb{R})$.

La funzione costante $f(x) = 1$ non puó essere approssimata da funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R})$, poiché per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, prendendo un punto x_0 fuori dal supporto di φ, si ha

$$\|f - \varphi\|_\infty \geq |f(x_0) - \varphi(x_0)| = 1\,.$$