Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2011/2012
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Quarto appello di Metodi Analitici (19-9-12) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA

Calcolare

$$\int_\gamma f(z)\,dz\ ,$$

dove γ è il circuito

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t, 1 + 2\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e f è la funzione di variabile complessa

$$f(z) = e^{\frac{1}{3z^6}} + \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)\ .$$

Soluzione. Le singolarità isolate della funzione f sono in $z = 0$ e in $z = -1$. La singolarità $z = -1$ cade fuori dal circuito assegnato (circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio 2). La singolarità $z = 0$ cade dentro al circuito assegnato, ma il residuo di f in $z = 0$ è nullo (poiché $e^{\frac{1}{3z^6}}$ è una funzione pari). Quindi l'integrale assegnato per il teorema dei residui è uguale a 0.

II. ANALISI FUNZIONALE

Si consideri, per $x \in [0, \frac{1}{2}]$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{per } x = 0 \\ x^n \log(1 + nx) & \text{per } x \in (0, \frac{1}{2}] \ . \end{cases}$$

(i) Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha $f_n \in L^\infty[0, \frac{1}{2}]$.

(ii) Per tali valori di n, calcolare la norma di f_n in $L^\infty[0, \frac{1}{2}]$.

(iii) Stabilire se f_n ammette limite in $L^\infty[0, \frac{1}{2}]$, e in caso affermativo determinarlo.

Soluzione.
(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ f_n è essenzialmente limitata.
(ii) Si ha

$$\|f_n\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^n \log(1 + \frac{n}{2})$$

(iii) Si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \log(1 + \frac{n}{2}) = 0 \ ,$$

pertanto la successione $\{f_n\}$ converge a zero in $L^\infty[0, \frac{1}{2}]$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita per $t \in [0, 2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \ . \end{cases}$$

(i) Calcolare per quali valori del parametro reale α la serie di Fourier di f appartiene a l^2.

(ii) Per $\alpha = 1/3$, calcolare la norma in l^2 di tale serie di Fourier.

Soluzione.
(i) Sono i valori di α per cui la funzione f appartiene a $L^2_{2\pi}$, ovvero i valori che soddisfano la condizione $2\alpha < 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$.
(ii) Per l'identità di Parseval la norma in l^2 della serie di Fourier di f è uguale alla norma in $L^2_{2\pi}$ di f, ovvero, per $\alpha = 1/3$,

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{t^{2/3}} \, dt \right\}^{1/2} = \sqrt{3}(2\pi)^{1/6} \ .$$