Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Primo appello di Analisi III, 1 febbraio 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \frac{1}{n}]$. Stabilire se la successione converge nei sensi seguenti, e nei casi affermativi determinare il limite:

(a) in $L^1(\mathbb{R})$;

(b) in $L^2(\mathbb{R})$;

(c) in $L^\infty(\mathbb{R})$;

(d) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soluzione. (a) Si ha $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$, in quanto $\|f_n\|_{L^1} = \sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.
(b) La successione non converge in $L^2(\mathbb{R})$, in quanto $\|f_n\|_{L^2} = 1$, e l'unico limite possibile è il limite puntuale, il quale è $f(x) = 0$: infatti, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ risulta $f_n(x) = 0$ se $x < 0$ oppure se $x > 1/n$, cioè definitivamente in n.
(c) La successione non converge in $L^\infty(\mathbb{R})$, in quanto $\|f_n\|_{L^\infty} = \sqrt{n} \to +\infty$ per $n \to +\infty$.
(d) La successione converge a 0 in $\mathcal{D}'(R)$, in quanto per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} n \int_0^{1/n} \varphi\, dx \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(0) \to 0\,.$$

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Classificare le singolarità isolate e calcolare i residui della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 - e^{2\pi i z}}{z^4 - 1}\,.$$

Soluzione. Le singolarità isolate di f sono gli zeri del denominatore, dati dalle radici quarte di 1, ovvero $\pm i$, ± 1.
Nei punti $z = \pm 1$ si annulla anche il numeratore, e usando la regola di de L'Hopital si vede che sono singolarità eliminabili (quindi con residuo nullo).
Nei punti $z = \pm i$ il numeratore non si annulla, e quindi si tratta di poli semplici, con residui dati da

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{1 - e^{2\pi i i}}{4i^3} = \frac{i}{4}(1 - e^{-2\pi})\,, \qquad \mathrm{Res}(f, -i) = \frac{1 - e^{2\pi i(-i)}}{4(-i)^3} = \frac{-i}{4}(1 - e^{2\pi})\,.$$

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Si consideri l'equazione

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\,\varphi(y)\,dy\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

nell'incognita $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Determinare la trasformata di Fourier di φ.

(b) Senza calcolare φ, mostrare che $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Calcolare φ.

Soluzione.

(a) L'equazione assegnata può essere riscritta come $e^{-x^2} = e^{-|x|} * \varphi(x)$. Pertanto, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri, si ottiene $\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} = \frac{2}{1+\xi^2}$, da cui

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1+\xi^2)\,e^{-\xi^2/4}.$$

(b) Poiché $\mathcal{F}$ manda $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, per dimostrare che $\varphi \in \mathcal{S}(R)$, basta dimostrare che $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quest'ultima affermazione è facilmente verificata, in quanto $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, e tutte le sue derivate sono del tipo $P(\xi)\,e^{-\xi^2/4}$ con P polinomio, il che implica in particolare che $\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}$ è limitata per ogni scelta di α e di β.

(c) Applicando le note regole di trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, osserviamo che

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\}(\xi) - \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right\}(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-x^2} - \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right\}(\xi)\,.$$

Pertanto,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right)e^{-x^2}.$$

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Sia $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Fornire la definizione dello spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$, e mostrare un esempio di una funzione $u \in L^2(\Omega)$ tale che $u \notin H^1(\Omega)$.

(b) Enunciare le condizioni di Cauchy-Riemann e dimostrare che sono condizione necessaria affinché una funzione di variabile complessa sia olomorfa.

Soluzione. Per la definizione di $H^1(\Omega)$ e il punto (b) si veda uno dei testi consigliati. Per il controesmpio, basta prendere $u(x) = \text{sign}(x)$ (con $(a, b) = (-1, 1)$). Si ha $u \in L^2(-1, 1)$ (in quanto $u \in L^\infty(-1, 1)$), ma $u \notin H^1(-1, 1)$, in quanto $u' = 2\delta_0 \notin L^2(-1, 1)$.