SERIE DI FOURIER 4 - 6 - 2020

ESERCIZIO 1. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e definita in $[0;\pi]$ da $f(x) = 5 - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier di f è:

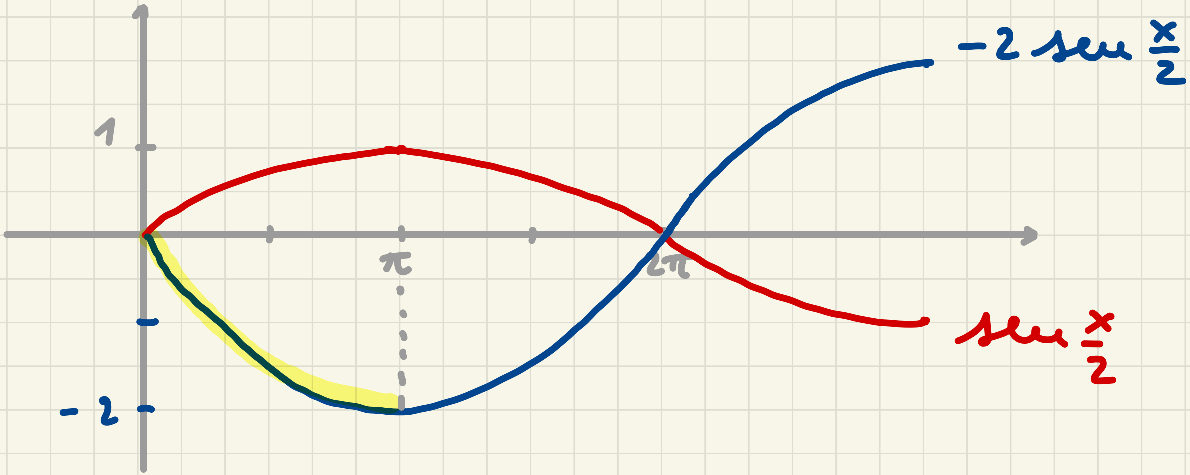
$$Sf(x) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi}\cos nx$$

1) Tracciare il grafico di f in $[-3\pi; 3\pi]$

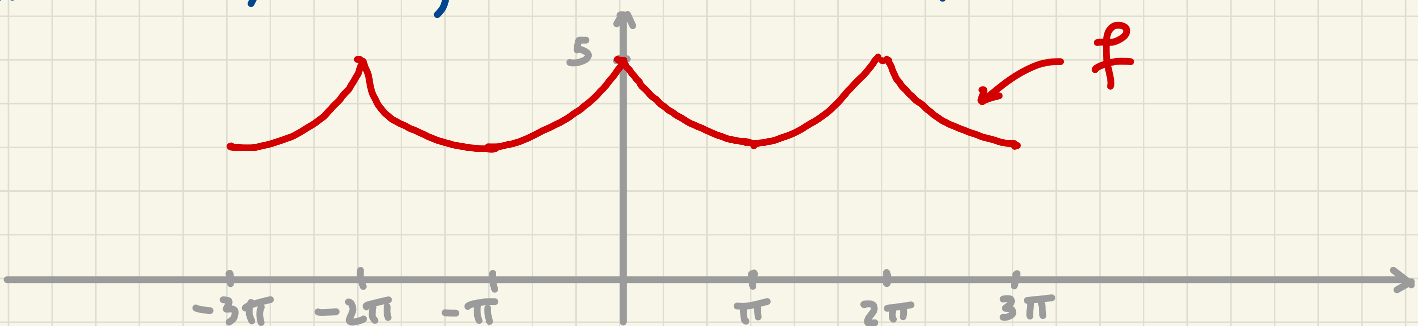
2) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, calcolarne la somma.

SOL.

1) $f(x) = 5 - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \qquad x \in [0; \pi]$



$f : \mathbb{R} \to [3; 5]$, 2π-periodica, pari



OSS.

$$Sf(x) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi} \cos nx$$

$$\frac{a_0}{2} = 5 - \frac{4}{\pi} \Longrightarrow a_0 = 10 - \frac{8}{\pi}$$

$$a_n = \frac{8}{\pi(4n^2-1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(5 - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx$$

PARI

$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$ perché f è PARI.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ converge ?

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right| \leq \frac{1}{4n^2-1}$$ poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ converge $\Longrightarrow$

la serie data converge assolutamente
$\Rightarrow$ converge semplicemente.

$$Sf(x) = 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2-1}$$

$$Sf(\pi) = 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n}$$

$$\begin{gathered} Sf(\pi) \\ \| \\ f(\pi) \\ \| \\ 3 \end{gathered}$$

$$\Rightarrow 3 = 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

$$\left(-2 + \frac{4}{\pi}\right)\frac{\pi}{8} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

ESERCIZIO 2. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = 2(x + |x|)$

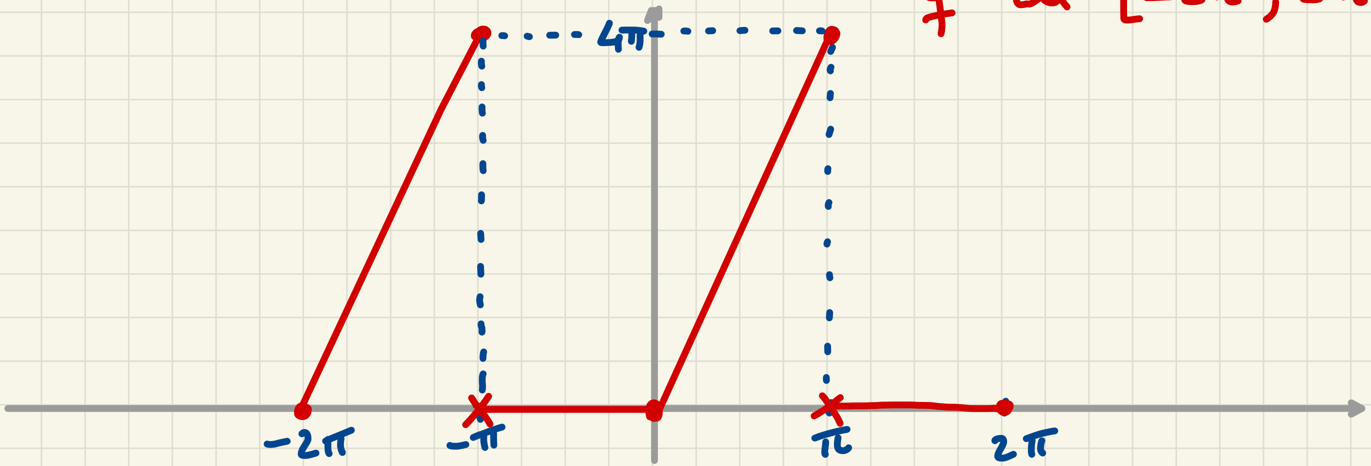
1) Tracciare il grafico di f in $[-2\pi; 2\pi]$
2) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la $Sf(x)$ converge puntualmente precisandone il limite.
3) Scrivere il polinomio di Fourier

$$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$$

SOL.

1) $$f(x) = 2(x + |x|) = \begin{cases} 2(x+x) = 4x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 2(x-x) = 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

f in $[-2\pi; 2\pi]$



2) • $Sf(x)$ converge a $f(x)$ dove f è continua

cioè $\forall x \in \mathbb{R} - \{ x = (2k+1)\pi ,\ k \in \mathbb{Z} \}$

multipli dispari

• Se $x = x_k = (2k+1)\pi$ la serie converge al valore medio dei due limiti destro e sinistro: $\dfrac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = \dfrac{0 + 4\pi}{2} = 2\pi$

3) $$S_1 f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \cancel{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos x\,dx} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\cos x\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \frac{4}{\pi}\left\{\cancel{\left[x \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}(-2) = -\frac{8}{\pi}.$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{ \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \cancel{\int_0^{\pi} \cos x \, dx} \right\} = \frac{4}{\pi}(\pi) = 4.$$

$$S_1 f(x) = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} - \frac{8}{\pi}\cos x + 4\,\mathrm{sen}\,x$$

$$S_1 f(x) = \pi - \frac{8}{\pi}\cos x + 4\,\mathrm{sen}\,x$$

ESERCIZIO 3. Sia f la funzione **dispari** di periodo 2π così definita:

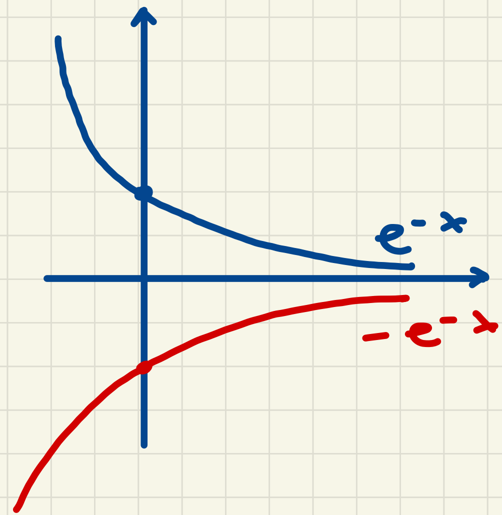
$$f(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{se } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$$

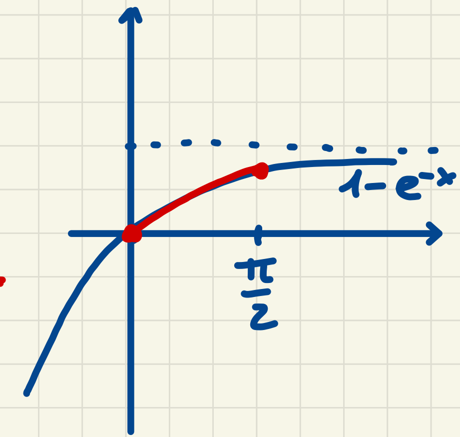
1) Tracciare il grafico di f in $[-\pi; 3\pi]$
2) Si dica in quali punti di $[0; 2\pi]$ la

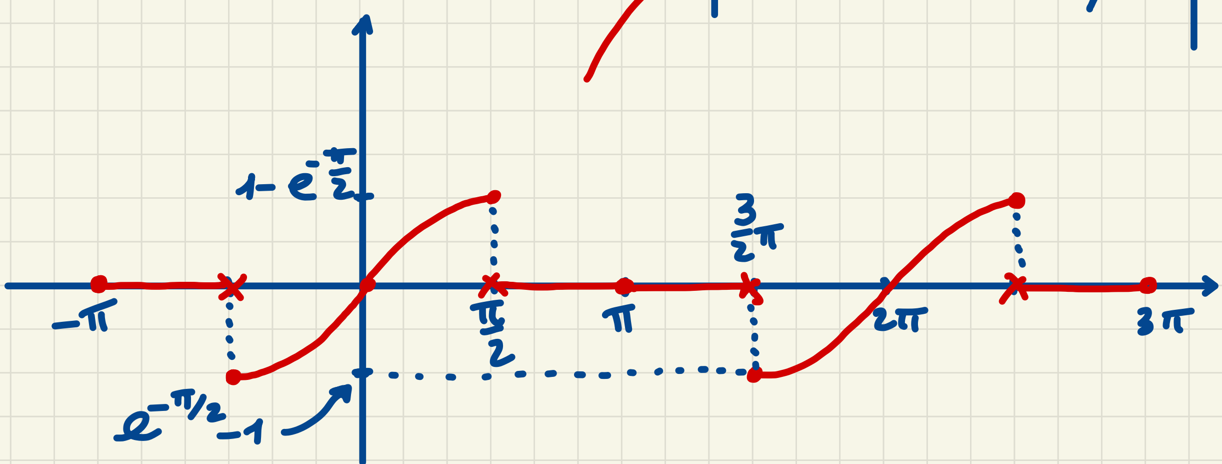
$Sf(x)$ converge e per questi punti si dice a cosa converge.

SOL.

1) $f(x) = 1 - e^{-x}$







2) $Sf(x)$ converge ad $f(x)$ dove è continua cioè in $[0; \pi/2) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi; 2\pi]$.

in $x = \frac{\pi}{2}$: $f(\frac{\pi}{2}^-) = 1 - e^{-\pi/2}$

$f(\frac{\pi}{2}^+) = 0$

Sf converge a $\dfrac{1-e^{-\pi/2}}{2}$

in $x = \frac{3}{2}\pi$: $f(\frac{3}{2}\pi^-) = 0$

$f(\frac{3}{2}\pi^+) = e^{-\pi/2} - 1$

Sf converge a $\dfrac{e^{-\pi/2}-1}{2}$.

ESERCIZIO 4. Sia $f(x)$ la funzione 2π-periodica che vale $f(x) = x(\pi - |x|)$ se $x \in [-\pi;\pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f e tracciare il grafico di f in $[-2\pi; 2\pi]$.

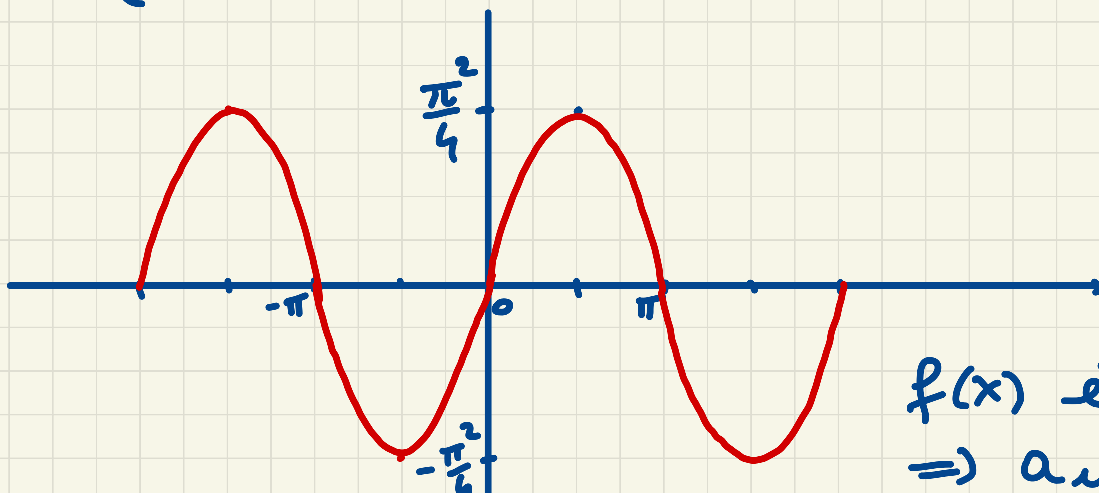
SOL.

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{se } x \in [0;\pi] \\ x(\pi + x) & \text{se } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

PARABOLA DI VERTIC.

$V\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi^2}{4}\right)$

$V\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi^2}{4}\right)$



$f(x)$ è dispari

$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\cancel{\left[-x(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}(\pi-2x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi-2x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\cancel{\left[\frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}(\pi-2x)\right]_0^\pi} + 2\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\,dx\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{4}{\pi n^3}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = -\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\boxed{Sf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \operatorname{sen}\left[(2n+1)x\right]}$$

ESERCIZIO 5. Scrivere lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x - \cos^2 x$ e calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx$.

SOL.

FORMULE DI BISEZIONE: $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x - \frac{1+\cos 2x}{2} =$$
$$= 1 + \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$
$$= \frac{1}{2} + \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $b_1 = 1$; $a_2 = -\frac{1}{2}$

$b_2 = 0 \qquad a_n, b_n = 0 \quad \forall n > 2.$

PARSEVAL: $$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

Nel nostro caso:

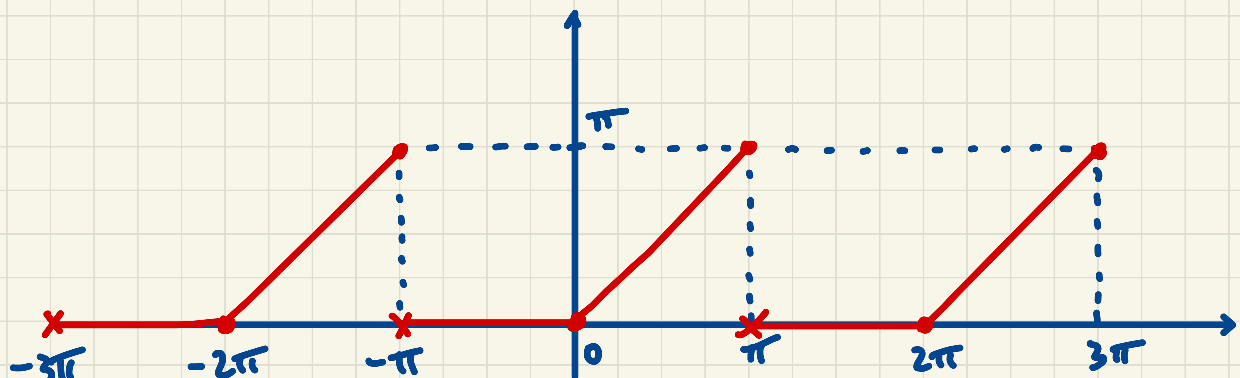
$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} \right] = \frac{7}{4}\pi.$$

ESERCIZIO 6. Sia g la funzione 2π-periodica definita in $(-\pi; \pi]$ da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

1) Discutere la convergenza di $S_g(x)$
2) Calcolare i coeff. di Fourier fino a $n=3$
Quale proprietà di minimo è soddisfatta?

SOL.
1)



La serie di F. converge a g $\forall x$ in cui g è continua ($\forall x \neq (2k+1)\pi$)
Se $x=(2k+1)\pi$ la serie di F. converge

al valore medio dei limiti destro e sin.:

$$\frac{0+\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\cancel{\left[x\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx = +\frac{1}{\pi n}\left[+\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \qquad n = 1, 2, \dots$$

Analogamente si ottiene $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ $n=1,2,\dots$

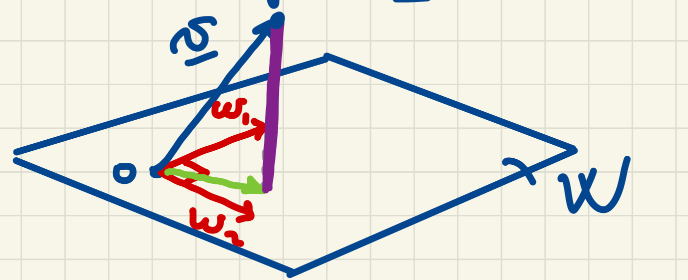
(ESERCIZIO!)

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \operatorname{sen} 3x.$$

NOTA (di algebra lineare)

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ prodotto scalare di $\underline{v}$ per $\underline{w}$.

W spazio vettoriale



$$B_W^{\perp} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\} \qquad \underline{w}_1 \perp \underline{w}_2$$

$\underline{v} \notin W$

$$P_W(\underline{v}) = \underbrace{\frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle}{\|\underline{w}_1\|^2}} \underline{w}_1 + \underbrace{\frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle}{\|\underline{w}_2\|^2}} \underline{w}_2$$

COEFFICIENTI DI FOURIER.

$\|\underline{v} - P_W(\underline{v})\|$ è la minima distanza di $\underline{v}$ da W.

Sia ora $V = \{$ funzioni 2π-periodiche $\}$ è uno sp. vettoriale di dim. infinita e una sua base ortogonale è:

$$\mathcal{B}_V^{\perp} = \{1, \cos nx, \sin nx\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

con $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$, $\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} f^2\, dx \right)^{1/2}$

W sottosp. di V, $f \notin W$

$$p_W(f) = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 + \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\|\cos x\|^2} \cos x +$$

$$+ \frac{\langle f, \operatorname{sen} x \rangle}{\|\operatorname{sen} x\|} \operatorname{sen} x + \dots$$

$\boxed{\|f - p_W(f)\| \text{ è la minima distanza di } f \text{ da } W}$

FINE NOTA

$S_3(x)$ è il polinomio trigonometrico

che minimizza la distanza di g dallo spazio vettoriale generato da

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \cos 3x, \operatorname{sen} 3x\}.$$

$$\|f - S_3(x)\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - S_3(x)|^2 dx$$

ESERCIZIO 4 (SIMULAZIONE)

Determinare l'intervallo di convergenza delle serie di potenze

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}(x-1)^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

Calcolare la somma della seconda.

SOL.

i) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{2^n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^n}\left(2+ {}^1/_{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\left(1+ {}^1/_{2^n}\right)\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$R = \frac{3}{2}$ $\qquad |x-1| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cancel{3^n}}{2^n} \cdot \frac{2^n+1}{\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

la serie non converge perché

non è soddisfatta la condizione necessaria.

$x = \frac{5}{2}$ IDEM. La serie converge in $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} \cdot (2n+1) = 1 \qquad |x|<1$$

$$-1<x<1$$

$x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(-1)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverge

per confronto con la serie armonica.

$x = 1$: IDEM

La serie converge in $(-1; 1)$.

SOMMA DELLA SERIE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^2)^n = \frac{1}{1-t^2} \qquad |t| < 1$$

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \, dt = \int \frac{1}{1-t^2} \, dt$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int t^{2n} \, dt}_{B} = \underbrace{\int \frac{1}{1-t^2} \, dt}_{A}$$

A

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt = \int\left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}\right)dt$$

$$= \underset{A=B=1/2}{\cdots} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

B

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot t^{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$