EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

8-4-2021

ESERCIZIO 1. (Modello di Malthus per la dinamica di una popolazione)

Sia $N(t)$ il numero di individui al tempo t, λ numero di nuovi nati per unità di tempo, μ numero di morti per unità di tempo.

In un tempo h sono nati $\lambda h N(t)$ e sono morti $\mu h N(t)$

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = \frac{\lambda \cancel{h} N(t) - \mu \cancel{h} N(t)}{\cancel{h}}$$

per $h \to 0$ (se $N(t)$ è derivabile)

$$\dot N(t) = (\lambda - \mu) N(t)$$

$$\frac{\dot N(t)}{N(t)} = \underbrace{\lambda - \mu}_{\varepsilon} \quad \text{(potenziale biologico)}$$

$$\frac{\dot N(t)}{N(t)} = \varepsilon$$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\frac{d}{dt}\left(\log|N(t)|\right) = \varepsilon$$

$$\log|N(t)| = \varepsilon t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|N(t)| = e^{\varepsilon t} \underbrace{e^{c}}_{= A > 0}$$

La dinamica della popolazione è

descritte dalla relazione

$$N(t) = A e^{\varepsilon t}, \quad A \in \mathbb{R}$$

Se $A = N_0 = N(0)$ (condizione iniziale) si ha:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}}$$

Se $\varepsilon > 0$: $\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$ (si moltiplicano)

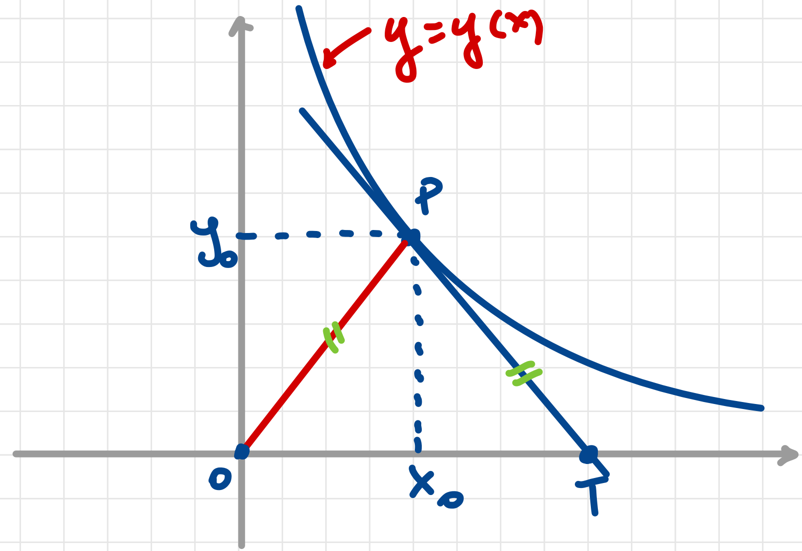
Se $\varepsilon < 0$: $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 0$ (si estinguono).

ESERCIZIO 2. Si determinino le curve $y = y(x)$ tali che il segmento di tangente che unisce il punto P di tangenza al punto T di intersezione con l'asse x

uguaglia il segmento che unisce P all'origine.

SOL.

$P(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$



EQ. TG.:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$T: \begin{cases} y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$-y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad -y_0 = x\,y'(x_0) - x_0 y'(x_0)$$

$$x y'(x_0) = x_0 y'(x_0) - y_0 \longrightarrow x = \frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}$$

$$T\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}; 0\right) \qquad P(x_0; y_0) \qquad O(0; 0)$$

$$PT^2 = \left(\cancel{x_0} - \cancel{x_0} + \frac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2 + (y_0 - 0)^2 = \frac{y_0^2}{[y'(x_0)]^2} + \cancel{y_0^2}$$

$$\|$$

$$PO^2 = x_0^2 + \cancel{y_0^2} \implies x_0^2 = \frac{y_0^2}{(y'(x_0))^2}$$

$$[y'(x_{\cancel{0}})]^2 = \left(\frac{y_{\cancel{0}}}{x_{\cancel{0}}}\right)^2$$

$$\boxed{y'(x) = \pm \frac{y}{x}}$$

EQ. DIFF. le cui sol. soddisfano la richiesta.

(*) $y' = \pm \frac{1}{x} y$ $\qquad$ $y' = b(x)\, a(y)$

SOL. COST.: $y = 0$ $\qquad$ SOL. COSTANTI: $a(y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x} y \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \pm \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \pm \ln|x| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\pm \ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c}}_{= k > 0}$$

$$|y| = k e^{\pm \ln|x|}$$

$$y = \pm k e^{\pm \ln|x|} \quad , \quad k > 0$$

$$y = A e^{\pm \ln|x|} \quad , \quad A \neq 0$$

$\oplus$ $y = A|x|$ $\qquad\qquad$ $\ominus$ $y = \dfrac{A}{|x|}$

Se $x > 0$ $\begin{cases} + \nearrow \; y = Ax \\ - \searrow \; y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$

L'integrale generale dell'eq. (*) è

$$y = Ae^{\pm \ln|x|}, \quad A \neq 0 \quad \vee \quad y = 0$$

Scritto meglio, in questo caso, si ha che l'int. generale è:

$$y = Ae^{\pm \ln|x|}, \quad A \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 3. (ESAME)

Si consideri l'eq. diff $y' = \dfrac{y^2+1}{2ty} = f(t,y)$

1) Stabilire in quale regione del piano $(t;y)$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'eq. data.

2) Determinare le soluzioni nel caso in cui $y(1)=1$, $y(1)=-1$; $y(-1)=1$; $y(-1)=-1$ specificandone gli intervalli massimali di esistenza.

SOL.

1) • $f(t;y) = \dfrac{y^2+1}{2ty}$ è definita e continua

per $ty \neq 0$, cioè dentro ai quattro quadranti.

• $f_y(t;y) = \dfrac{y^2-1}{2ty^2}$ $f(t;y)$ è derivabile e la sua derivata è continua nei quattro quadranti.

2) $y' = \dfrac{y^2+1}{2ty} \longrightarrow y' = \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{y^2+1}{2y}$ (NO SOL. COSTANTI, $\dfrac{y^2+1}{2y} = 0$ IMP.)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\,\frac{y^2+1}{2y} \longrightarrow \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln(y^2+1) = \ln|t| + c$$

$$y^2+1 = k|t| \qquad k \neq 0$$

$$y^2 = k|t| - 1$$

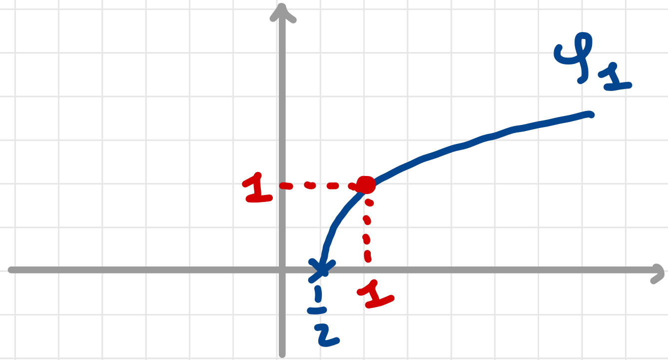
$$y = \pm\sqrt{k|t|-1}\,, \quad k \neq 0$$

$y(1) = +1$ $\quad (t>0\,,\ 1°Q)$ $\quad y = \sqrt{kt-1}$

$$1 = y(1) = \sqrt{k-1} \Longrightarrow k-1 = 1 \Longrightarrow k = 2$$

$\varphi_1(t) = \sqrt{2t-1}$ $\quad I_{MAX}:\ 2t-1>0 \rightarrow t > 1/2$

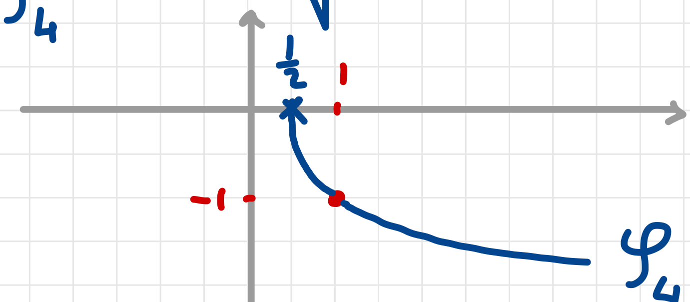
$$I_{MAX} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$



$y(1) = -1 \quad (t > 0,\ 4^\circ\ Q) \qquad y = -\sqrt{kt - 1}$

$-1 = -\sqrt{k-1} \implies k = 2$

$\varphi_4(t) = -\sqrt{2t-1} \qquad I_{MAX} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

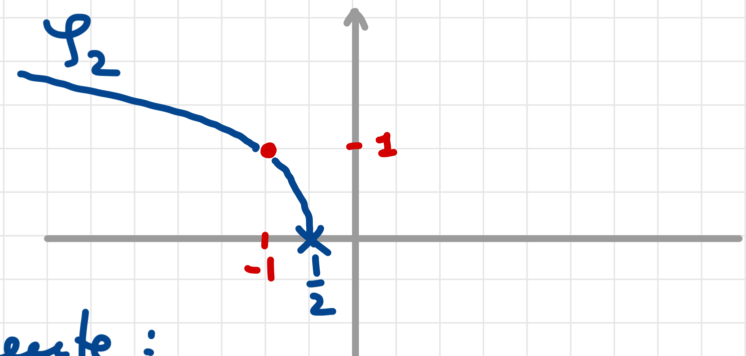


$y(-1) = +1$ $\quad (t<0 \,,\ 2° Q)$ $\quad y = \sqrt{-kt-1}$

$$1 = \sqrt{k-1} \implies k = 2$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{-2t-1}$$

I_{MAX}: $-2t-1>0$ $\quad \cancel{2}t < -1/2$ $\quad I_{MAX} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$



Analogamente:

$$\varphi_3(t) = -\sqrt{-2t-1} \qquad I_{MAX} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$$

ESERCIZIO 4. Trovare l'integrale generale dell'equazione (omogenea)

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

SOL.

N.B.: una eq. diff. del primo ordine si dice OMOGENEA se può essere scritta nel modo seguente:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}y^2} + \frac{y^{\cancel{3}}}{x\cancel{y^2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right) \quad (*)$$

Pongo: $z = \frac{y}{x} \longrightarrow y = zx \longrightarrow y' = z'x + z$

Sostituendo in $(*)$

$$z'x + \cancel{z} = \frac{1}{z^2} + \cancel{z}$$

$$z'(x)\,x = \frac{1}{z^2(x)} \longrightarrow z' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z^2}$$

VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z^2} \longrightarrow \int z^2\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c \qquad z^3 = 3\ln|x| + 3c$$

$$z = \sqrt[3]{3\ln|x| + k}$$

$$y(x) = x\,z(x) = x\sqrt[3]{3\ln|x| + k}\,, \quad k \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

SOL.

$$\frac{y}{x} = z \rightarrow y = zx \rightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = z(1 + \ln z)$$

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + z\ln z$$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot z\ln z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z\ln z$$

$$\int \frac{dz}{z\ln z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z \ln z} = \int \frac{1/z}{\ln z}\, dz = \ln|\ln z| \; ; \; \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\ln|\ln z| = \ln|x| + c \xrightarrow[x>0]{} |\ln z| = e^{\ln x} e^{c}$$

$$|\ln z| = Ax \; , \quad A > 0$$

$$\ln z = kx \; , \quad k \neq 0$$

$$z = e^{kx}$$

$$y(x) = x\, z(x) = x e^{kx} \; , \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

L'int. generale per $x > 0$ è:

$$y = x e^{kx} \; , \quad k \neq 0$$

Sol. Pb. d.C.:

$$5 = y(1) = 1 \cdot e^k \rightarrow e^k = 5 \rightarrow k = \ln 5$$

$$y = x e^{x \ln 5} = x e^{\ln 5^x} = x \cdot 5^x$$

$$\boxed{y(x) = x \cdot 5^x}$$

ESERCIZIO 6. Si consideri l'eq. differenziale

$$y' = \frac{2y^2}{y^2+1} \qquad (\text{con } y = y(t))$$

1) Applicando il teorema di esistenza e unicità globale, dimostrare che ogni soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2) Determinare le soluzioni che soddisfa-

con $y(0)=1$, $y(0)=0$, $y(0)=-1$
e tracciamo un grafico qualitativo.

Sol.

1) NOTA: $y' = f(t;y)$ (*)

- $f, f_y \in C^0(\bar{S})$ $\bar{S} = [a;b] \times \mathbb{R}$
- esistono $h, k > 0$: $|f(t;y)| < h + k|y|$ $\forall (t,y) \in \bar{S}$ allora ogni soluzione di (*) è definita su tutto $[a,b]$.

$$y' = \underbrace{\frac{2y^2}{y^2+1}}_{f(t;y)}$$ (non dipende da t!)

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\bar{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|f(t;y)| = \left|\frac{2y^2}{y^2+1}\right| = 2\underbrace{\left|\frac{y^2}{y^2+1}\right|}_{<1} \leq 2 + 1\cdot|y| \quad \forall (t,y) \in \bar{S}$$

La soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2) $$y' = \frac{2y^2}{y^2+1} \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2y^2}{y^2+1}$$

$$dy \cdot \frac{y^2+1}{y^2} = 2dt$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \int 2dt$$

$$y - \frac{1}{y} = 2t + c \qquad y \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- $y(0) = 1$ $\quad y(0) - \dfrac{1}{y(0)} = 2 \cdot 0 + c$

$$1 - 1 = c \implies c = 0$$

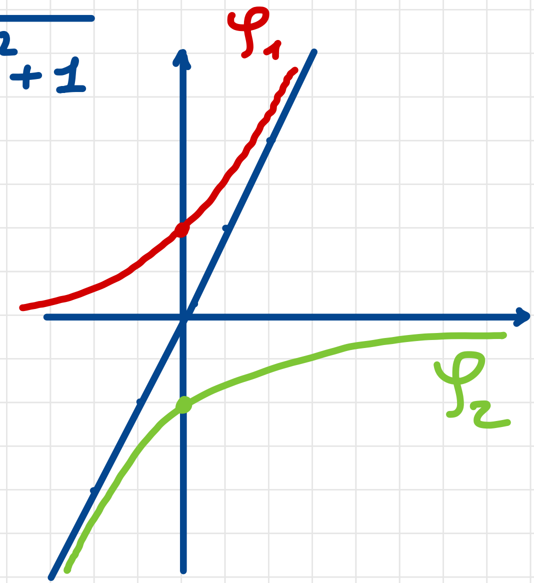
- $y(0) = -1$ $\quad -1 + 1 = c \implies c = 0$

$$y - \frac{1}{y} = 2t \qquad y^2 - 2ty - 1 = 0$$

$$y = t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\varphi_1(t) = t + \sqrt{t^2+1} \qquad \varphi_1(0) = 1$$

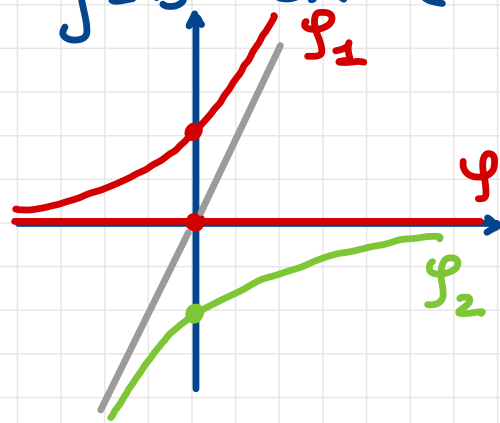
$$\varphi_2(t) = t - \sqrt{t^2+1} \qquad \varphi_2(0) = -1$$



Cerco le sol. costanti di (*):

$$y' = \frac{2y^2}{y^2+1}$$

$$\frac{2y^2}{y^2+1} = 0 \rightarrow y = 0 \quad \text{che è la sol. richiesta:}$$



ESERCIZIO 7. (EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE)

Determinare l'integrale generale dell'eq.

$$y' = \frac{2}{t} y + t$$

SOL.

N.B.: $$y' + a(t)\,y = f(t)$$

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(c + \int f(t)\,e^{A(t)}\,dt\right)$$

con $$A(t) = \int a(t)\,dt$$

$$y' - \frac{2}{t}y = t \qquad A(t) = \int -\frac{2}{t}\,dt = -2\ln|t|$$

$$y(t) = e^{\cancel{2}\ln(|t|)^2}\left(c + \int t\,e^{-\cancel{2}\ln(|t|)^2}\,dt\right)$$

$$= t^2\left(c + \int \cancel{t}\cdot\frac{1}{t^{\cancel{2}}}\,dt\right)$$

$$= t^2\left(c + \ln|t|\right) = ct^2 + t^2\ln|t|,\ c\in\mathbb{R}$$

$$y(t) = ct^2 + t^2 \ln|t|, \quad c \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 8. Tra le soluzioni dell' eq. diff

$$y' = \frac{x^2 y - 3}{x^3}, \qquad x > 0$$

si determini quella che ammette $y = x$ come asintoto obliquo.

SOL.

$$y' = \frac{\cancel{x^2} y}{x^{\cancel{3}}} - \frac{3}{x^3} \longrightarrow y' - \frac{1}{x} y = -\frac{3}{x^3}$$

$$A(x) = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln x$$

$$y(x) = e^{\ln x}\left(c + \int -\frac{3}{x^3} e^{-\ln x}\, dx\right) =$$

$$= x\left(c - 3\int \frac{1}{x^4}\,dx\right) = x\left(c \cancel{+3}\cdot \frac{x^{-3}}{\cancel{+3}}\right) =$$

$$= cx + \frac{1}{x^2}$$

Int. generale: $y = cx + \frac{1}{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(c + \frac{1}{x^3}\right) = c$$

$y = x$ sia as. obl. $\Longrightarrow m = 1$

$\Longrightarrow \underline{c = 1}$

$$\boxed{\text{RISPOSTA: } \quad y = x + \frac{1}{x^2}}$$

ESERCIZIO 9. Si consideri l'eq. diff.

$y' + ty = t$ dove $y = y(t)$.

1) Determinare le sue soluzioni

2) Determinare la sol. $\bar{y}$ che assume valore minimo uguale a 2.

3) Definita la funzione $F(x) = \int_0^x \bar{y}(t)\,dt$ verificare che $F(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

SOL.

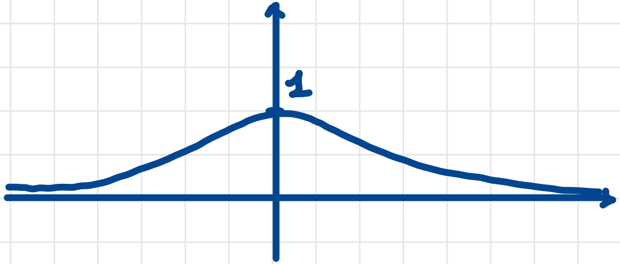
1) $y' + ty = t$ $\qquad A(t) = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}$

$$y(t) = e^{-t^2/2}\left(c + \int t\, e^{t^2/2}\,dt\right) =$$

$$= e^{-t^2/2}\left(c + e^{t^2/2}\right) = c\,e^{-t^2/2} + 1.$$

INT. GENERALE: $\quad y(t) = c\,e^{-t^2/2} + 1$

2) NOTA (CAMPANA DI GAUSS)



$y = e^{-x^2}$

Assume valore massimo 1 in $x = 0$.

$y(t) = 1 + c e^{-t^2/2}$, $\bar{y}$ è una campana di Gauss che assume valore massimo in $t = 0$:

$$y(0) = 2 \rightarrow 1 + c = 2 \rightarrow c = 1$$

$$\bar{y}(t) = 1 + e^{-t^2/2}$$

3) $F(x) = \int_0^x \bar{y}(t)\,dt = \int_0^x \left(1 + e^{-t^2/2}\right) dt$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left(1+e^{-t^2/2}\right)dt$$

l'integrale diverge perché $\lim_{t\to+\infty}\left(1+e^{-t^2/2}\right) = 1 \neq 0$

non è verificata la cond. necessaria di convergenza.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \left(1+e^{-t^2/2}\right)dt}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x^2/2}}{1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \left(1+e^{-t^2/2}\right)dt - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{[t]_0^x} + \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt \cancel{- x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

CONVERGE

$\Rightarrow$ $F(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$.