Baricentri e momenti d'inerzia di solidi non omogenei

5.89.★ Calcolare il momento d'inerzia, rispetto all'asse z, del cono

$$C = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{h}z\right)^2, z \in [0, h]\right\}$$

di densità $$\delta(x, y, z) = \alpha\left(\frac{2z}{h} + 1\right)$$

(dove $R, h, \alpha > 0, \alpha$ ha le dimensioni di una densità, R, h sono raggio e altezza del cono).

5.90.★ Calcolare il baricentro della semisfera solida

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, z \geq 0\}$$

avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + z/R$.

5.91.★ Si consideri il cono (pieno):

$$C = \{(x, y, z) : z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Supponendo che si tratti di un solido di densità variabile $\delta = 2z$, calcolare:

a. la massa totale;
b. le coordinate del baricentro;
c. il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

Fornire risultati *espliciti*, dipendente dall'unico parametro h che figura nel testo dell'esercizio. (*Si consiglia di fare una figura...*)

Un'applicazione fisica: campo gravitazionale generato da un corpo sferico

Esempio 5.17. La legge di gravitazione universale

$$\underline{F} = G m_1 m_2 \frac{\underline{r}_{12}}{|\underline{r}_{12}|^3}$$

dove $\underline{r}_{12}$ è il vettore che unisce i punti in cui si trovano le masse m_1 e m_2 rispettivamente, riguarda masse *puntiformi*. Quando si tratta di calcolare il campo gravitazionale generato ad esempio dal sole, sarebbe comodo poter fare il conti come se tutta la massa si trovasse nel centro del sole (o il suo baricentro, se non coincide col centro), in altre parole come se il sole fosse una massa puntiforme.

Ma questo è lecito per una massa distribuita su distanze enormi come è il sole? Rispondiamo mediante il calcolo integrale.

Si dimostra che *il campo gravitazionale generato in un punto dello spazio da un corpo esteso è uguale al campo generato da una massa puntiforme pari alla massa totale del corpo, e posta nel baricentro del corpo stesso.*

Qui proveremo questa proprietà in un caso particolare, sufficiente a trattare in prima approssimazione il sole e i pianeti: *che il corpo abbia forma sferica e la sua densità sia una funzione radiale.* Scegliamo un riferimento in cui il corpo è una sfera di centro l'origine e raggio R e scegliamo l'asse z passante per il punto in cui vogliamo calcolare il campo, dunque sia esso $(0,0,L)$ con $L > R$ (calcoliamo il campo solo nei punti *esterni* al corpo). Sia $\delta(x,y,z) = \delta(\rho)$ la sua densità (radiale) e M la sua massa totale. Useremo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad dxdydz = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\vartheta.$$

Il campo generato in $(0,0,L)$ è

$$\frac{F}{m} = G\int\int\int_{x^2+y^2+z^2<R^2} \delta(x,y,z)\frac{(x,y,z-L)}{\left[x^2+y^2+(z-L)^2\right]^{3/2}}dxdydz.$$

Per le simmetrie si vede subito che le componenti x e y del campo sono nulle. Calcoliamo quindi

$$\frac{F_z}{mG} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2\sin^2\varphi+(\rho\cos\varphi-L)^2\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi\right)\delta(\rho)\rho^2 d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho L\cos\varphi\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi\right)\delta(\rho)\rho^2 d\rho. \qquad (*)$$

Ora nell'integrale interno facciamo la sostituzione

$\cos\varphi = t; -\sin\varphi d\varphi = dt, t \in [1,-1]$ e abbiamo

$$\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho L\cos\varphi\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi = \int_{-1}^1\left(\frac{\rho t - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho Lt\right]^{3/2}}\right)dt$$

ora poniamo

$$\rho^2 + L^2 - 2\rho L t = u^2; -\rho L dt = u du; u \in (L+\rho, L-\rho)$$

$$= \int_{L-\rho}^{L+\rho} \frac{\frac{\rho^2+L^2-u^2}{2L} - L}{u^3} \cdot \frac{u}{\rho L} du = \frac{1}{2L^2\rho} \int_{L-\rho}^{L+\rho} \left(\frac{\rho^2 - L^2 - u^2}{u^2} \right) du =$$

$$= \frac{1}{2L^2\rho} \left((\rho^2 - L^2) \left[-\frac{1}{u} \right]_{L-\rho}^{L+\rho} - 2\rho \right) = \frac{1}{2L^2\rho} \left((\rho^2 - L^2) \left(\frac{2\rho}{L^2 - \rho^2} \right) - 2\rho \right) =$$

$$= -4\rho \cdot \frac{1}{2L^2\rho} = -\frac{2}{L^2}.$$

Perciò, inserendo il risultato nell'integrale doppio $(*)$,

$$\frac{F_z}{mG} = -\frac{4\pi}{L^2} \int_0^R \delta(\rho) \rho^2 d\rho.$$

D'altro canto la massa totale del corpo è:

$$M = \iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} \delta(x,y,z) dx dy dz = 4\pi \int_0^R \delta(\rho) \rho^2 d\rho,$$

da cui si riconosce che

$$\frac{F_z}{mG} = -\frac{M}{L^2}.$$

Pertanto il campo generato nel punto $(0,0,L)$ è

$$\frac{\underline{F}}{m} = -GM \frac{(0,0,1)}{L^2}$$

cioè proprio il campo prodotto da una massa puntiforme posta nell'origine.