Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2020/2021
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Primo appello di Analisi 3, 14/1/2021 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

a.
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(n^2xe^{-n^2x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n^2xe^{-n^2x^2}\right)dx$$

FALSO: con la sostituzione $nx = y$ si ottiene $\int_0^1 \left(n^2xe^{-n^2x^2}\right)dx = \frac{1}{2}(1-e^{-n^2}) \to \frac{1}{2}$, mentre $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2xe^{-n^2x^2} = 0$.

b.
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}\right)dx$$

VERO, applicando il teorema di convergenza dominata, usando come dominante integrabile la funzione $f(x)$ uguale a 1 per $x \in (0,1)$ e $\frac{1}{1+x^2}$ per $x > 1$.

c. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$, tale che $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$, allora $f_n \to 0$ puntualmente q.o. in $\mathbb{R}$.

FALSO, per un controesempio si vedano le lavagne virtuali

d. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tale che $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ e $f_n \to g$ in $L^2(\mathbb{R})$, allora $f = g$ q.o. su $\mathbb{R}$.

VERO, poiché una sottosuccessione estratta da f_n converge a f quasi ovunque, e una ulteriore sottosuccessione converge a g quasi ovunque, e il limite puntuale quasi ovunque è unico.

TEST 2. (8 punti) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

e. $f(x) = \frac{1}{x^2+4} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}$

VERO, usando la trasformata nota di $\frac{1}{x^2+1}$ e il comportamento della trasformata per riscalamento

f. $f(x) = (\sin x)\cdot\chi_{(-\pi,\pi)} \Rightarrow \hat{f}$ è puramente immaginaria

VERO, poiché f è dispari e reale

g. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

VERO, poiché $f \in \mathcal{S}(R) \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

h. $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

FALSO, poiché se $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}(\mathbb{R})$, non puó essere $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (altrimenti si avrebbe anche $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$)

ESERCIZIO (10 punti) Si calcoli, tramite tecniche di analisi complessa,

$$V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx\,.$$

Si stabilisca poi, giustificando la risposta, se la funzione $f(x) := \frac{1}{x^3-x^2+x-1}$ è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Con la classificazione vista a lezione (cf. Lavagne virtuali), si tratta di un integrale "di tipo 4". Infatti la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$$

ha tre poli semplici (di cui uno sull'asse reale), e decade a zero come $1/R^3$ per $R \to +\infty$. Pertanto,

$$I := V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx = \pi i \mathrm{Res}(f, 1) + 2\pi i \mathrm{Res}(f, i)\,.$$

Si ha:

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}$$

e

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{2i(i-1)} = \frac{i+1}{-4i}\,.$$

Pertanto

$$I = \frac{\pi i}{2} + \frac{(2\pi i)(i+1)}{-4i} = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi(i+1)}{2} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ non è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$, perché non è integrabile in un intorno del punto 1, in quanto $f(x)$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{x-1}$ il cui integrale diverge per i noti criteri di integrabilità per le funzioni di tipo potenza.

TEORIA (6 punti)

i. Si stabilisca, giustificando la risposta, se il seguente problema al contorno ammette soluzione sul disco unitario $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$, dove ν indica la normale esterna al bordo di D:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y) = x^2 & \text{su } \partial D\,. \end{cases}$$

Soluzione. Il problema assegnato è un problema di Neumann che non ammette soluzione, in quanto non è soddisfatta la condizione di compatibilità $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ (essendo $\int_{\partial D} x^2 > 0$).

l. Sia H uno spazio di Hilbert, sia K un convesso chiuso in H, e sia P_K l'operatore di proiezione che associa ad ogni $f \in H$ l'elemento di K di minima distanza da f. Mostrare che P_K non aumenta le distanze, ovvero

$$\|P_K(f_1) - P_K(f_2)\| \le \|f_1 - f_2\| \qquad \forall f_1, f_2 \in H\,.$$

(*Suggerimento*: ricordare che, per la caratterizzazione di $P_K(f_i)$ si ha, per $i = 1, 2$,

$$(f_i - P_K(f_i), v - P_K(f_i)) \le 0 \qquad \forall v \in K\,.)$$

Soluzione. Scriviamo la disuguaglianza sopra per $i = 1$ prendendo $v = P_K(f_2)$, e poi per $i = 2$, prendendo $v = P_K(f_1)$. Si ottiene:

$$(f_1 - P_K(f_1), P_K(f_2) - P_K(f_1)) \le 0$$
$$(f_2 - P_K(f_2), P_K(f_1) - P_K(f_2)) \le 0 \text{ ovvero } (P_K(f_2) - f_2, P_K(f_2) - P_K(f_1)) \le 0\,.$$

Sommando le due disuguaglianze cosí ottenute, si ha:

$$(f_1 - P_K(f_1) + P_K(f_2) - f_2, P_K(f_2) - P_K(f_1)) \le 0\,,$$

che può essere riscritta come:

$$\|P_K(f_2) - P_K(f_1)\|^2 \le (f_1 - f_2, P_K(f_1) - P_K(f_2))$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene quindi

$$\|P_K(f_2) - P_K(f_1)\|^2 \le \|f_1 - f_2\| \|P_K(f_1) - P_K(f_2)\|$$

da cui dividendo per $\|P_K(f_1) - P_K(f_2)\|$ si ha la tesi.