Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Seconda prova parziale di Analisi III, 18 gennaio 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Sia $u(x) := \frac{1}{1+x^2} * e^{-\sqrt{2}|x|}$, per $x \in \mathbb{R}$.

(a) Stabilire se $u \in L^1(\mathbb{R})$ e se $u \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Calcolare la trasformata di Fourier di u.

Soluzione.

(a) $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(b) $\hat{u}(\xi) = 2\sqrt{2}\pi \frac{e^{-|\xi|}}{\xi^2+2}$

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $u(x,t)$.

(b) Determinare $T := \sup \Big\{ t > 0 \ : \ x \mapsto u(x,t) \text{ ha supporto connesso} \Big\}$.

Soluzione.

(a) $u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\chi_{[-1,1]}(x+t) + \chi_{[-1,1]}(x-t)\Big]$

(b) $T = 1$

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{16}{2+x^2}u' + xu = e^{-x} \quad 0 < x < 2 \\ u(0) = 0,\ u'(2) - u(2) = 3 \end{cases}$$

e mostrarne la buona positura. Determinare poi una limitazione superiore per $\|u\|_{L^2(0,2)}$.

Soluzione. Poniamo $V = \{v \in H^1(0,2) : v(0) = 0\}$, sappiamo che per le funzioni di V valgono le maggiorazioni

$$(*):\ \|v\|_{L^2(0,2)} \le \frac{4}{\pi}\|v'\|_{L^2(0,2)}, \qquad (**):\ |v(2)| \le \sqrt{2}\,\|v'\|_{L^2(0,2)},$$

grazie alla prima possiamo porre $\|v\|_V = \|v'\|_{L^2(0,2)}$. (Da ora in avanti, per brevità, scriviamo L^2 anziché $L^2(0,2)$) Moltiplichiamo dunque entrambi i membri dell'equazione per una funzione test $v \in V$ e integriamo: osservato che $u'(2) = 3 + u(2)$, il primo termine dà

$$-\int_0^2 u''v\ dx = -\big[u'v\big]_0^2 + \int_0^2 u'v'\ dx = \int_0^2 u'v'\ dx - 3v(2) - u(2)v(2)$$

e dunque possiamo scrivere

$$\underbrace{\int_0^2 u'v'\ dx + \int_0^2 \frac{16}{2+x^2}u'v\ dx + \int_0^2 xuv\ dx - u(2)v(2)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^2 e^{-x}v\ dx + 3v(2)}_{F(v)},$$

la formulazione cercata è allora

$$\boxed{\text{Trovare } u \in V \text{ tale che } B(u,v) = F(v) \text{ per ogni } v \in V.}$$

La linearità di B e di F è ovvia, per la limitatezza di F osserviamo che, grazie alle disequazioni $(*)$ e $(**)$,

$$\begin{aligned} |F(v)| &\le \int_0^2 e^{-x}|v|\ dx + 3|v(2)| \le \left\|e^{-x}\right\|_{L^2}\cdot\|v\|_{L^2} + 3\sqrt{2}\,\|v'\|_{L^2} \\ &\le \frac{\sqrt{1-e^{-4}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\pi}\|v'\|_{L^2} + 3\sqrt{2}\,\|v'\|_{L^2} = \left(\frac{2\sqrt{2(1-e^{-4})}}{\pi} + 3\sqrt{2}\right)\|v\|_V; \end{aligned}$$

analogamente, per la limitatezza di B, maggiorando $\frac{16}{2+x^2}$ e x con il loro massimo su $[0,2]$ e facendo uso della $(**)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\le \int_0^2 |u'v'|\ dx + 8\int_0^2 |u'v|\ dx + 2\int_0^2 |uv|\ dx + |u(2)v(2)| \\ &\le \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + 8\|u'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + 2\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + 2\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\ &\le \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + 8\|u'\|_{L^2}\frac{4}{\pi}\|v'\|_{L^2} + 2\cdot\frac{4}{\pi}\|u\|_{L^2}\frac{4}{\pi}\|v\|_{L^2} + 2\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\ &\le \left(3 + \frac{32}{\pi} + \frac{32}{\pi^2}\right)\|u\|_V\|v\|_V. \end{aligned}$$

Infine, la coercività di B, osserviamo in via preliminare che

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{16}{2+x^2}u'u\ dx &= \int_0^2 \frac{8}{2+x^2}\cdot\frac{d}{dx}(u^2)\ dx = \left[\frac{8}{2+x^2}u^2\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{16x}{(2+x^2)^2}u^2\ dx \\ &= \frac{4}{3}u^2(2) + \int_0^2 \frac{16x}{(2+x^2)^2}u^2\ dx \end{aligned}$$

e dunque (usando quest'ultimo risultato):

$$B(u,u) = \underbrace{\int_0^2 (u')^2\ dx}_{=\|u'\|_{L^2}^2} + \underbrace{\int_0^2 \frac{16x}{(2+x^2)^2}u^2\ dx}_{\ge 0} + \underbrace{\int_0^2 x\ u^2\ dx}_{\ge 0} + \underbrace{\left(\frac{4}{3} - 1\right)u^2(2)}_{\ge 0} \ge \|u'\|_{L^2}^2 = \|u\|_V^2.$$

Infine, da

$$\|u\|_V^2 = B(u,u) = F(u) \le |F(u)| \le \left(\frac{2\sqrt{2(1-e^{-4})}}{\pi} + 3\sqrt{2} \right) \|u\|_V \,,$$

dividendo per $\|u\|_V$ si ottiene la stima a priori

$$\|u\|_V \le \left(\frac{2\sqrt{2(1-e^{-4})}}{\pi} + 3\sqrt{2} \right).$$

TEORIA. (7 punti)

(a) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel in uno spazio di Hilbert.

(b) Enunciare la definizione di distribuzione temperata, e la definizione di trasformata di Fourier per una distribuzione temperata.