STABILIRE SE UNA FUNZIONE APPARTIENE A UNO SPAZIO LP

Stabilire se una funzione appartiene a uno spazio Lp

#52636

paperino
Frattale

Salve a tutti, ho svariati problemi su come lavorare con gli esercizi sugli spazi Lp e nello stabilire se una funzione appartiene ad uno spazio Lp, ad esempio:

'dire per quali p risulta che $g \in L^p(R)$, dove la g(x) in questione è

$$g(x) = \frac{|x|^{\frac{1}{4}}}{(x-4i)(x+2i)}$$

Noto che in un intorno di 0, la funzione è continua, mentre in un intorno di infinito riscrivo la g(x) portando $|x|^{\frac{1}{4}}$ al denominatore.

Per trovare la p nell'intorno di infinito dunque pongo:

$$-\frac{1}{4}p + p + p > 1$$

da cui: $p > \frac{4}{7}$. Dato che con quella funzione in un secondo esercizio mi chiede di porre p=2 credo che vada bene, solo una domanda: il valore assoluto ha qualche importanza particolare da farci qualche discorso?

Grazie!

MENU

- Home
- eBook e dispense di Matematica
- Ripetizioni di Matematica
- Penne con formule
- Libri ed eserciziari
- Prove Invalsi
- Blog
- Sostieni YouMath!

Stabilire se una funzione appartiene a uno spazio Lp

#52643

Ifrit
Amministratore

Ciao paperino! Qual è la definizione di funzione sommabile che conosci? Riporta quella dei tuoi appunti per piacere

Ringraziano: Omega, paperino, CarFaby

Stabilire se una funzione appartiene a uno spazio Lp

#52647

paperino
Frattale

Premetto che ho letto svariate definizioni sul forum, il quale coincidono con quella dell'analisi 1, ma in analisi complessa mi è stata data un'altra definizione (nella teoria della misura..) :

In sostanza riconducibile a :

una funzione f è sommabile su un intervallo (a,b) se:
$\int_a^b |f(x)|dx$ esiste finito

Stabilire se una funzione appartiene a uno spazio Lp

#52648

Ifrit
Amministratore

Ok, una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è p- sommabile su $\mathbb{R}$ se è finito:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx$$

Attenzione che in questo caso $|f(x)|$ indica il modulo della funzione a valori complessi.

Nel nostro caso quindi:

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|^{\frac{1}{4}}}{(x-4i)(x+2i)}\right|$$

Per le proprietà del modulo si ha che

$$|f(x)|=\frac{|x|^{\frac{1}{4}}}{|x-4i||x+2i|}$$

Ora

$$|x-4i|=\sqrt{x^2+16}$$

$$|x+2i|=\sqrt{x^2+4}$$

quindi:

$$|f(x)| = \frac{|x|^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+4}}$$

elevando membro a membro per p

$$|f(x)|^p = \frac{|x|^{\frac{p}{4}}}{(x^2+4)^{\frac{p}{2}}(x^2+4)^{\frac{p}{2}}}$$

La funzione al secondo membro è a valori reali ed è positiva, quindi valgono i criteri di convergenza noti

A più infinito

$$|f(x)| \sim_{+\infty} \frac{|x|^{\frac{p}{4}}}{|x|^p|x|^p} = \frac{1}{x^{2p-\frac{p}{4}}}$$

e converge se $2p - \dfrac{p}{4} > 1 \iff p > \dfrac{4}{7}$

Procedi allo stesso modo per - infinito stando attento ai segni, otterrai la stessa condizione. In definitiva hai ragione, ma ti ho chiesto la definizione perché avevo l'impressione che tu non avessi considerato a dovere $|f(x)|$.

Ringraziano: Omega, Pi Greco, paperino, CarFaby, tice

Pagina: 1