Analisi matematica 2		9 luglio 2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Calcolare

$$\int\int_D x|y|\,dx\,dy$$

dove D è il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.

b) La densità di una sfera solida di raggio $R = 2$ è data dall'espressione

$$\delta(r) = 4 - r$$

dove r è la distanza dal centro della sfera. Determinare la massa della sfera.

c) Calcolare l'area racchiusa dalla linea γ di equazione

$$\gamma: \ \mathbf{r}(t) = \sin(2t)\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi$$

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido delimitato dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal piano $z = 1$.

i) Mostrare che Ω è un dominio ammissibile per il teorema della divergenza.

ii) Verificare il teorema della divergenza nel dominio Ω per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - \frac{1}{2}z^2\,\mathbf{k}$$

iii) Il campo $\mathbf{F}$ è solenoidale ? È irrotazionale ? Calcolare $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$ e $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$.

3.

a1) Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$$

a2) Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $f'''(0)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$ (giustificare i passaggi).

a*) Trovare l'espressione di $f(x)$ $\big($*suggerimento:* valutare, in un intervallo opportuno, $\int_0^x f(t)\,dt\big)$

b) Sia $0 < \delta < \pi$ e sia g la funzione 2π−periodica definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \le \delta, \\ 0 & \text{per } \delta < |x| \le \pi \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier associata a g e discuterne la convergenza.

b*) Utilizzando l'identità di Parseval dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\delta(\pi-\delta)}{2}$

SOLUZIONI

1.

a) Per simmetria abbiamo

$$\int\int_D x|y|\,dx\,dy = 2\int\int_{D_+} xy\,dx\,dy$$

dove

$$D_+ \equiv D \cap \{(x,y)\,|, y \geq 0\}$$

Utilizziamo coordinate polari *centrate nel punto* $(1,0)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$2\int\int_{D_+} xy\,dx\,dy = 2\int_0^1\int_0^\pi \rho^2(1+\rho\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\rho =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^\pi \rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\rho + 2\int_0^1\int_0^\pi \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\rho$$

$$= 2\big[\rho^3/3\big]_0^1\big[-\cos\theta\big]_0^\pi + 0 = \frac{4}{3}$$

b) Ponendo il centro della sfera nell'origine e usando le coordinate sferiche

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\phi$$

la massa M è data dall'integrale

$$M = \int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \delta(r)r^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,dr$$

$$= 4\pi\int_0^2 (4-r)r^2\,dr = 4\pi\Big[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^2 = \frac{80}{3}\pi$$

c) Detta A la regione racchiusa dalla curva, dalla formula di Green abbiamo:

$$|A| = \oint_{\partial^+ A} x\ dy \tag{1}$$

La frontiera di A coincide con il sostegno della curva γ. Osserviamo che la linea γ inizia e termina nell'origine, è contenuta nel semipiano dell y negative ed è percorsa in senso *negativo* rispetto a A; dalle equazioni parametriche

$$x = \sin(2t), \qquad y = -\sin t$$

abbiamo:

$$dx = 2\cos(2t)\,dt, \qquad dy = -\cos t\,dt$$

Pertanto, dalla formula (1) si ottiene:

$$|A| = -\int_0^\pi \sin(2t)(-\cos t)\,dt = 2\int_0^\pi \sin t\cos^2 t\,dt = \frac{2}{3}\big[-\cos^3 t\big]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Al posto della (1) si poteva usare la formula $|A| = \oint_{\partial^+ A} -y\ dx$ o la semisomma delle due.

2.

i) Il dominio Ω è ammissibile per il teorema della divergenza perchè è *semplice rispetto ai tre assi* come si può verificare per via geometrica (è un convesso) e la sua frontiera è una superficie chiusa, regolare a pezzi e orientabile.

ii) Calcoliamo prima il flusso del campo uscente da $\partial\Omega$. La superfice è composta da due superfici (cartesiane) regolari: la porzione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$ e il disco unitario nel piano $z = 1$ con centro sull'asse z. La normale *esterna* moltiplicata per l'elemento di superfice è

$$\mathbf{n}_e\, dS = \big(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\big)\, dxdy$$

sul paraboloide e

$$\mathbf{n}_e\, dS = \mathbf{k}\, dxdy$$

sul disco. Dunque:

$$\int\!\!\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS =$$

$$\int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} \Big(x(x^2+y^2)\mathbf{i} + y(x^2+y^2)\,\mathbf{j} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\,\mathbf{k}\Big)\cdot\big(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\big)\, dxdy$$

$$+\int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} \big(x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - \frac{1}{2}\,\mathbf{k}\big)\cdot\mathbf{k}\, dxdy$$

$$= \frac{5}{2}\int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)^2 - \frac{1}{2}\int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy$$

$$= 5\pi\int_0^1 \rho^5 d\rho - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \partial_x(xz) + \partial_y(yz) + \partial_z(-z^2/2) = z + z - z = z$$

Abbiamo allora

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = \int\!\!\int\!\!\int_{\Omega} z\, dxdydz =$$

(integrando per strati)

$$= \int_0^1 z\int\!\!\int_{x^2+y^2\leq z} dxdy = \pi\int_0^1 z^2\, dz = \frac{\pi}{3}$$

iii) Poiché $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z \neq 0$, il campo non è solenoidale; inoltre

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

per cui il campo non è nemmeno irrotazionale. Infine, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ (vale per ogni campo di classe $\mathcal{C}^2$) e

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{k}$$

3.

a1) La serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Dunque $R = 2$ e la serie converge (assolutamente) per $|x| < 2$. Agli estremi $x = 2$ e $x = -2$, abbiamo

$$\left|\frac{n+1}{2^n}(\pm 2)^n\right| = n+1$$

La serie non converge in questi punti perchè il termine generale non tende a zero. L'intervallo di convergenza è $(-2, 2)$.

a2) Osservando che la serie data è la serie di Maclaurin di $f(x)$, valgono le relazioni

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{n+1}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Dunque

$$f'''(0) = 3!\, \frac{4}{2^3} = 3$$

Calcolo dell'integrale: l'intervallo chiuso $[0, 1]$ è contenuto nell'intervallo di convergenza. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione per serie e calcolare

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \int_0^1 x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

b) La funzione g è limitata, integrabile e *pari*; calcoliamo i coefficienti di Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} dx = \frac{2\delta}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n\delta)}{n}, \qquad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx = 0, \qquad n = 1, 2, ...$$

La serie di Fourier associata è una serie di soli coseni e si scrive

$$\frac{\delta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} \cos(nx)$$

Poiché g è regolare a tratti, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge a $g(x)$ per $x \neq 2k\pi \pm \delta$ (dove g è continua) e converge a $1/2$ per $x = 2k\pi \pm \delta$, con $k \in \mathbb{Z}$. La serie converge a g in media quadratica.

a*) Per $|x| < 2$ possiamo calcolare $\int_0^x f(t)\,dt$ integrando la serie termine a termine:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \int_0^x x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n+1} =$$

(raccogliendo x)

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x\,\frac{1}{1 - x/2} = \frac{2x}{2 - x}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, abbiamo allora

$$f(x) = \frac{d}{dx}\frac{2x}{2-x} = \frac{4}{(2-x)^2}$$

b*) Dall'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

e dalla espressione di g e dei suoi coefficienti di Fourier, si ottiene

$$2\delta = \pi\left[\frac{2\delta^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2}\right]$$

$$\frac{2\delta}{\pi} - \frac{2\delta^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\delta(\pi-\delta)}{2}$$