Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello di Analisi III, 30 giugno 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (12 punti)

a) Determinare una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non identicamente nulla, tale che $u(x, y) := \varphi(x) \sin y$ sia la parte reale di una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ (con l'identificazione standard $z = x + iy$).

b) Scelta φ come al punto precedente, determinare una funzione $v(x, y)$ tale che $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ sia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, e scrivere l'espressione della funzione f in termini della variabile complessa z (sempre con $z = x+iy$).

Soluzione.

a) Affinché u sia la parte reale di una funzione olomorfa, u deve essere armonica, ovvero

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Questo si traduce nella condizione

$$\varphi''(x) \sin y - \varphi(x) \sin y = 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

che equivale a richiedere che φ sia soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\varphi''(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Dunque φ deve essere della forma

$$\varphi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} ,$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie (poiché è richiesto che φ non sia identicamente nulla, qualsiasi scelta di C_1 e C_2 non entrambe nulle è appropriata).

b) Prendiamo ad esempio $u(x, y) = e^x \sin y$ (che corrisponde alla scelta $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$). La funzione v deve soddisfare le condizioni di Cauchy Riemann

$$u_x = v_y \qquad \text{e} \qquad u_y = -v_x ,$$

ovvero

$$\nabla v = (-e^x \cos y, e^x \sin y) .$$

Pertanto v è un potenziale per la forma differenziale

$$\omega(x, y) = -e^x \cos y \, dx + e^x \sin y \, dy ,$$

il quale si calcola facilmente essere dato da $v(x, y) = -e^x \cos y$ (a meno di costanti additive).

La corrispondente funzione di variabile complessa è data da

$$f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y = -ie^x(\cos y + i \sin y) = -ie^{x+iy} = -ie^z .$$

ESERCIZIO 2. (12 punti)
Determinare, se esistono, tutte le soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$xu'' + 2u' - xu = xe^{-|x|}\,.$$

Soluzione. Supponiamo che xu'', u', e xu siano in $L^1(\mathbb{R})$. Applichiamo la trasformata di Fourier a ambo i membri dell'equazione, utilizzando le note regole algebriche di trasformazione. Si ha

- $\widehat{xu''} = i(\widehat{u''})' = i(-\xi^2\hat{u})' = -i\xi^2(\hat{u})' - 2i\xi\hat{u}$
- $\widehat{u'} = i\xi\hat{u}$
- $\widehat{xu} = i(\widehat{u})'$
- $\widehat{xe^{-|x|}} = i(\widehat{e^{-|x|}})' = i\dfrac{d}{d\xi}\dfrac{2}{1+\xi^2}\,.$

Pertanto l'equazione trasformata diventa:

$$-i\xi^2(\hat{u})' - 2i\xi\hat{u} + 2i\xi\hat{u} - i(\widehat{u})' = i\frac{d}{d\xi}\frac{2}{1+\xi^2}\,.$$

Semplificando e calcolando la derivata prima a membro destro si ottiene

$$(\hat{u})'(\xi) = \frac{4\xi}{(1+\xi^2)^3}\,,$$

da cui integrando si ricava

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{(1+\xi^2)^2} + \lambda\,, \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Osservato che l'unica scelta di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\hat{u}$ è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è $\lambda = 0$, concludiamo che

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{(1+\xi^2)^2}\,,$$

e si tratta a questo punto di calcolare l'antitrasformata. La funzione u sarà data dalla formula di inversione (infatti, osserviamo che si ha anche $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi è lecito antitrasformare). Per semplicità osserviamo che $\hat{u}$ è pari e reale, e dunque lo stesso varrà anche per u. Calcoliamo quindi $u(x)$ per $x > 0$, e poi la prolungheremo per parità. Applicando la formula di inversione e i metodi di analisi complessa otteniamo, per $x > 0$:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = -i\ \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}, z = i\Big)\,.$$

La funzione di variabile complessa $\frac{e^{ixz}}{(1+z^2)^2}$ ha nel punto $z = i$ un polo di ordine 2, e quindi il residuo si calcola facilmente come:

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{e^{ixz}}{(1+z^2)^2}, z = i\Big) = \frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{ixz}}{(z+i)^2}\Big)\Big|_{z=i} = \frac{e^{ixz}\big[ix(z+i)^2 - 2(z+i)\big]}{(z+i)^4} = -\frac{i}{4}e^{-x}(x+1)\,.$$

Pertanto per $x > 0$ si ha

$$u(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(x+1)\,,$$

che prolungata per parità fornisce in definitiva la soluzione

$$u(x) = -\frac{1}{4}e^{-|x|}(|x|+1)$$

(la quale soddisfa tutte le condizioni di sommabilità imposte all'inizio).

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

a) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del prolungamento analitico.

b) Enunciare il teorema di proiezione su un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.

Soluzione

Si veda uno dei testi consigliati