PDE's (eq differenziali alle derivate parziali) 1/3

Formulazione variazionale di pb. ellittici.

(S. Salsa: Partial Differential Eqs. in Action, Springer).

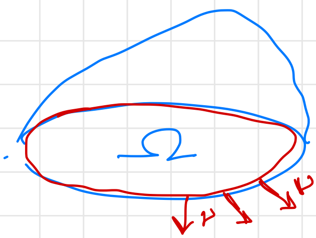
$$-a\,\Delta u + c\,u = f \quad \text{in} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$u = u(x_1, \dots, x_n)$$

Ω: aperto limitato regolare

Ipotesi
$$\begin{cases} a > 0 & \text{costante} \\ c(x) \geq 0, & c \in L^\infty(\Omega) \\ f(x) \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

$c = 0$, $a = 1$ $\qquad -\Delta u = f$ $\qquad$ EQ. POISSON.



condizione di Dirichlet (omogenea) $\qquad u = 0$ su $\partial\Omega$.

condizione di Neumann (omogenea) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

Il prototipo di PDE lineare ellittica del 2° ordine

<u>ODE</u> lineari del 2° ordine $\quad u = u(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$$a u'' + b u' + c u = f$$

<u>PDE</u> lineare del 2° ordine $\quad u = u(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

$$- A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + \underbrace{b(x)}_{} \cdot \underbrace{\nabla u(x)}_{} + c u = f$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} \qquad (b_1, \dots, b_n) \cdot (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

si dice ellittica se A è definita positiva:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare se $A(x) = Id \qquad A_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{A_{ij}(x)}_{= \delta_{ij}} u_{x_i x_j} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \Delta u$$

op. di Laplace

Formulazione variazionale del pb di Dirichlet

$(D)_C$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$(D)_V$ Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c\, u\, v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Proposizione (D) Nelle ip. sopra:

(1) u sol. classica $\Rightarrow$ u sol. variazionale

(2) u sol. variazionale
c, f continue
$u \in C^2(\overline{\Omega})$ $\Big| \Rightarrow$ u sol. classica.

<u>Recall:</u>

- $$\int_\Omega \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \qquad X \in C^1(\Omega)$$

$$X = v \nabla u \qquad v \in C^1, \; u \in C^2$$

$$\operatorname{div}(v \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u$$

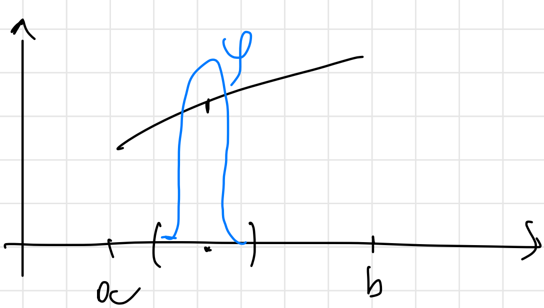
G.G.

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad v \in C^1, \; u \in C^2}$$

- <u>Lemma di Du Bois-Raymond:</u>

Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è tale che:

$$\int_\Omega u \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$



Dim. Prop. (D)

(1) Sia u sol. di $(D)_c$. Allora per ip. $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e risolve:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora $u \in H_0^1(\Omega)$ $\left(u, \nabla u \in C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega),\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right)$

Moltiplico l'eq. per $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integro:

$$\int_\Omega -a\Delta u \cdot v + cuv = \int_\Omega fv \qquad \text{in } \Omega$$

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v - \cancel{\int_{\partial\Omega} a v \frac{\partial u}{\partial \nu}} \qquad \Rightarrow$$

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_\Omega f v_n \qquad \forall v_n \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Data $v \in H_0^1(\Omega)$, $\exists \{v_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$: $v_n \xrightarrow{H^1} v$ (per def. di $H_0^1(\Omega)$)

$$\left|\int_\Omega f v_n - fv\right| \leq \int_\Omega |f(v_n - v)| \underset{H}{\leq} \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \to 0$$

analogamente si verificano le altre convergenze.

(2) Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. variazionale,

supponendo $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ($c$, f continue su $\overline{\Omega}$).

$u = 0$ su $\partial\Omega$ ✓

Sappiamo che:

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c\, u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

in particolare $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$

Usiamo eq. eq:

$$\int_\Omega \left(-a\, \Delta u \cdot v + c\, u v - f v\right) = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega \underbrace{\left(-a\, \Delta u + c u - f\right)}_{\text{continua su } \overline{\Omega}} v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \quad -a\, \Delta u + c u - f = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

D.B.R.

$\blacksquare$

$$\left(+ \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \forall v \in C^\infty(\Omega) \right.$$

$$\left. \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \right)$$

analogo di DBR su $\partial\Omega$.

Formulazione variazionale del pb di Neumann

$(N)_C$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$(N)_V$ Trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c\, u\, v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

<u>Proposizione (N)</u> Nelle ip. sopra:

(1) u sol. classica $\Rightarrow$ u sol. variazionale

(2) u sol. variazionale
c, f continue
$u \in C^2(\overline{\Omega})$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ u sol. classica.

Teorema di esistenza e unicità per $(D)_V$

Nelle ip. sopra, il problema $(D)_V$:
trovare $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che
$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$
ammette una e una sola soluzione
Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:
u risolve:
$$\min_{v \in H^1_0(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a|\nabla v|^2 + c v^2\right) - \int_\Omega f v$$

Dim.

Considero $H = H^1_0(\Omega)$, munito di $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$

- $\varphi(v) := \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$
- $b(u,v) := \int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v$

$$\begin{cases} \varphi \text{ è lineare continuo} \\ b(u,v) \text{ è bilineare simm. continua coerciva} \end{cases}$$

Lax-Milgram: $\exists$ unico $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che
$$\varphi(v) = b(u,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
ovvero:
$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
Inoltre u risolve
$$\min_{H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} b(v,v) - \varphi(v)$$
Verifica ip. Lax-Milgram:

- φ è (lineare) continuo: $|\varphi(v)| \leq M \|v\|_H$

$$\left| \int_\Omega f v \right| \leq \int_\Omega |f v| \underset{(H)}{\leq} \|f\|_2 \|v\|_2$$
$$\underset{(P)}{\leq} \underbrace{C_p(\Omega) \|f\|_2}_{M} \underbrace{\|\nabla v\|_2}_{= \|v\|_H}$$

- $b(u,v)$ è (bilineare simmetrica)

$$\begin{cases} \text{continua} & |b(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \\ \text{coerciva} & b(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \end{cases}$$

continua:

$$|b(u,v)| = \left| \int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + e u v \right| \leq$$

magg. modulo

$$\leq \int_\Omega |a \nabla u \cdot \nabla v + e u v|$$

$$\leq \int_\Omega a |\nabla u \cdot \nabla v| + e |u v| \leq \int_\Omega a |\nabla u \cdot \nabla v| + \|e\|_\infty \int_\Omega |uv|$$

$$\leq a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|e\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2$$

$$\underset{(P)}{\overset{(H)}{\leq}} a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|e\|_\infty C_P^2(\Omega) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

$$= \underbrace{\left(a + \|e\|_\infty C_P^2(\Omega)\right)}_{C} \underset{\|u\|_H}{\underset{\downarrow}{\|\nabla u\|_2}} \underset{\|v\|_H}{\underset{\downarrow}{\|\nabla v\|_2}}$$

coercività:

$$b(u,u) = \int_\Omega a |\nabla u|^2 + e u^2 \geq$$

$$\geq \int_\Omega a |\nabla u|^2 = \underbrace{a}_{\alpha} \underset{\|u\|_H^2}{\underset{\uparrow}{\|\nabla u\|_2^2}}$$

$\blacksquare$

Teorema di esistenza e unicità per $(N)_V$

Nelle ip. sopra, supponiamo anche che

$c(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega$

il problema $(N)_V$:

trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

ammette una e una sola soluzione

Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente

u risolve:

$$\min_{v \in H^1(\Omega)} \quad E(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(a |\nabla v|^2 + c v^2 \right) - \int_\Omega f v$$

dim. Analoga al caso (D) lavorando su $H = H^1(\Omega)$ munito di $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$.

Trovare che per la coercività di b:

$$b(u,u) = \underbrace{\int_\Omega a |\nabla u|^2 + c u^2} \overset{?}{\geq} \alpha \|u\|^2_{H^1}$$

$$\geq \int_\Omega a |\nabla u|^2 + c_0 u^2 \geq \underbrace{\min\{a, c_0\}}_{:= \alpha} \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2}_{\|u\|^2_{H^1}}$$