

Estremi

1. Determinare gli estremi relativi di $f(x, y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2$.
2. Determinare gli estremi relativi di $f(x, y) = \frac{y^2}{4} - (y+1)\cos x$.
3. Determinare gli estremi relativi di $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.
4. Sia $f(x, y) = xy(x-1)^2$. a) Determinare gli estremi relativi di f ; b) determinare gli estremi assoluti di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
5. Determinare le dimensioni di una scatola rettangolare di volume v assegnato, che abbia la superficie minima.
6. Sia $f(x, y) = e^{2x-x^2-y^2}$. a) Determinare gli estremi relativi liberi di f . b) Determinare gli estremi assoluti di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
7. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = e^x - \lambda x + y^2$ ha massimo o minimo relativo?
8. Sia $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Calcolare tutte le derivate parziali fino al secondo ordine della funzione $f(x, y) = g(xy)$. Verificare che l'origine è un punto critico per f , qualunque sia g ; trovare una condizione sufficiente su g affinché l'origine sia un punto di sella.
9. Sia $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. a) Determinare l'insieme di definizione D di f . b) Determinare le curve di livello di f . c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di f nel punto $(1, 0, 1)$. Qual è la direzione di massima crescita di f nel punto $(1, 0)$? d) Mostrare che f non ha estremi locali.
10. Sia $f(x, y) = x^4 - x^2y^2$. a) Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo di f in \mathbb{R}^2 . b) Dire se f ammette massimo e minimo assoluti in \mathbb{R}^2 .
11. Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4$.

- 12.** Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.
- 13.** Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2)$.
- 14.** Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2(x + y)$. Senza ricorrere al calcolo differenziale dire se i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono di massimo o di minimo relativo.
- 15.** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = 2xy$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- 16.** Determinare la minima distanza della curva di equazione $y = \frac{16}{x^2}$ dall'origine.
- 17.** Sia $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{1}{9}y^2} + 2x$. a) Determinare il dominio D di f ; b) stabilire se f è differenziabile nei punti interni di D ; c) determinare gli estremi assoluti di f in D .
- 18.** Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = xy$, vincolati alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.
- 19.** Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = xy$, vincolati all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$.
- 20.** Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = x + y$, vincolati al ramo di iperbole $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$.
- 21.** Determinare gli estremi superiore e inferiore della funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, al variare di (x, y) sulla retta di equazione $3x + 4y = 25$. Verificare che nel punto $(3, 4)$ il gradiente di f è perpendicolare alla retta.
- 22.** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = 1 - e^{(x-y)^2(x^2+y^2-1)^2}$ sull'insieme $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq y\}$.
- 23.** Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = 4x(x^2 - y^2) - 3x^2 + y^2$, vincolati all'iperbole $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$.

Soluzioni.

1.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x x(y-1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(x-1) + 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha come soluzione $x = 0$ oppure $y = 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova $y = \frac{3}{2}$; sostituendo $y = 1$ si trova $x = 1$. Dunque i punti critici sono: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $(1, 1)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x(x+1)(y-1)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. Il determinante della matrice Hessiana è positivo in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(0, \frac{3}{2}\right) > 0$, dunque $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ è un punto di minimo relativo. Il determinante della matrice Hessiana è negativo in $(1, 1)$, dunque $(1, 1)$ è un punto di sella.

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (y+1) \sin x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2} - \cos x = 0 \end{cases}$$

La funzione è periodica in x , dunque possiamo limitarci a considerare $x \in [0, 2\pi)$. La prima equazione ha come soluzione $y = -1$ oppure $x = 0$ oppure $x = \pi$. Sostituendo $y = -1$ nella seconda equazione si trova $x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi$; sostituendo $x = 0$ si trova $y = 2$; sostituendo $x = \pi$ si trova $y = -2$. Dunque i punti critici sono: $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$, $(0, 2)$ e $(\pi, -2)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+1) \cos x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}$. $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$ sono punti di sella, $(\pi, -2)$ e $(0, 2)$ sono punti di minimo relativo.

3. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y-x^2y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x-xy^2) = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono: $(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 - x^2)(1 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy(y^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. $(0, 0)$ è un punto di sella; $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ sono punti di massimo relativo; $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ sono punti di minimo relativo.

4. a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)^2 + 2xy(x-1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono: $(0, 0)$ e tutti i punti della retta $x = 1$. L'origine è un punto di sella, infatti $f(0, 0) = 0$ e la funzione cambia di segno in ogni intorno dell'origine. I punti $(1, y)$ con $y > 0$ sono punti di minimo relativo, infatti $f(1, y) = 0$ e la funzione è positiva in un intorno di tali punti; analogamente si ha che i punti $(1, y)$ con $y < 0$ sono punti di massimo relativo e il punto $(1, 0)$ è un punto di sella.

b) D è il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. All'interno di D non ci sono punti critici di f , allora gli estremi assoluti, che esistono essendo la funzione continua e D chiuso e limitato, si trovano sulla frontiera di D . Si ha che: $f(x, 0) = f(0, y) = 0$; $f(x, 1-x) = x(1-x)^3$. La funzione $g(x) = x(1-x)^3$ ha massimo in $x = \frac{1}{4}$ e minimo in $x = 0$ e $x = 1$. Dunque il minimo assoluto

di f in D vale 0; il massimo assoluto vale $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}$.

5. Siano x, y, z le dimensioni della scatola. Si tratta di minimizzare la superficie: $S = 2xz + 2xy + 2yz$, sotto la condizione: $xyz = v$. Sia $f(x, y) = 2x\frac{v}{xy} + 2xy + 2y\frac{v}{xy}$;

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2\frac{v}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2\frac{v}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzione: $(x, y) = (\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$. Si verifica che tale punto è un punto di minimo per f , dunque le dimensioni della scatola sono: $x = y = z = \sqrt[3]{v}$.

6. a) Essendo la funzione esponenziale monotona crescente, gli estremi di f si hanno in corrispondenza degli estremi dell'esponente $g(x, y) = 2x - x^2 - y^2$. Si trova che il punto $(1, 0)$ è un punto di massimo relativo per g , e dunque per f .
b) All'interno del cerchio l'unico eventuale estremo assoluto è il punto $(1, 0)$. Sulla frontiera di D la funzione vale $f(x, y) = e^{2x-4}$, $-2 \leq x \leq 2$; dunque $x = 2$ e $x = -2$ sono rispettivamente punti di massimo e minimo per f sulla frontiera di D . Poichè per il teorema di Wierstrass la funzione assume valore massimo e valore minimo in D , confrontando i valori: $f(1, 0) = e$, $f(2, 0) = 1$, $f(-2, 0) = e^{-8}$, si deduce che il massimo assoluto vale e e il minimo assoluto vale e^{-8} .

7.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda > 0$ il sistema ha la soluzione: $(\log \lambda, 0)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$; si verifica che $(\log \lambda, 0)$ è un punto di minimo relativo per f .

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = yg'(xy)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = xg'(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 g''(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g'(xy) + xyg''(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 g''(xy)$. L'origine è un punto critico per f perché le due derivate parziali si annullano nell'origine. Il determinante della matrice Hessiana di f nell'origine vale $-g'(0)^2$, dunque se $g'(0) \neq 0$ l'origine è un punto di sella.

9. a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}$. b) Le curve di livello c hanno equazione: $x^2 - y^2 = \frac{1}{c^2}$, $c > 0$; sono iperboli equilateri. c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}$. Il piano tangente ha equazione: $x + z = 2$. La direzione di massima crescita in $(1, 0)$ è quella del gradiente: $(-1, 0)$. d) Siccome le derivate parziali non si annullano mai in D , la funzione non ha estremi.

10. a) I punti critici sono quelli dell'asse y . Studiamo il segno della funzione: $f(x, y) = x^2(x^2 - y^2) \geq 0$, $-|x| \leq y \leq |x|$. Quindi l'origine è un punto di sella, mentre gli altri punti dell'asse y sono dei punti di massimo relativo. b) Si ha

che: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - x^6 = -\infty$.
Dunque f non ha né massimo né minimo assoluti in \mathbb{R}^2 .

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2y^2 - x)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2x$. I punti critici sono: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{6}, \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. L'origine è un punto di sella; $\left(\frac{1}{6}, \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ sono punti di minimo.

12. L'origine è l'unico punto critico. Si ha che: $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = x^4 \geq 0$, $f(x, x) = -4x^4 \leq 0$, dunque l'origine è un punto di sella, in quanto in OGNI intorno dell'origine la funzione assume valori positivi e negativi.

13. Per simmetria possiamo limitare lo studio al primo quadrante. I punti critici sono: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Si verifica che: $(0, 0)$ è un punto di massimo, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono punti di sella, $(1, 1)$ è un punto di minimo. Per simmetria si deduce che: $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ sono punti di sella, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ sono punti di minimo.

14. La funzione si annulla nei punti della circonferenza. Studiando il segno della funzione si deduce che i punti della circonferenza sopra la retta $y = -x$ sono punti di minimo, quelli sotto la retta sono punti di massimo, e i due punti di intersezione della retta con la circonferenza sono punti di sella.

15. Per il teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo assoluti in D . All'interno di D l'unico punto critico è l'origine, ma poiché $f(0, 0) = 0$ e la funzione cambia di segno in ogni intorno dell'origine, l'origine non è un estremo. Per valutare la funzione sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, scriviamola in forma parametrica: $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dunque la restrizione di f sulla circonferenza vale: $f(2 \cos t, 2 \sin t) = 8 \cos t \sin t = 4 \sin(2t)$. Tale funzione ha come massimo 4, assunto per $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{5}{4}\pi$, e minimo -4, assunto per $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = \frac{7}{4}\pi$. Il massimo di f vale quindi 4 ed è assunto in $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$; il minimo vale -4 ed è assunto in $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$.

16. Il quadrato della distanza dell'origine dal generico punto della curva: $(x, \frac{16}{x^2})$, vale $x^2 + \frac{16^2}{x^4}$. Si tratta allora di trovare il minimo della funzione $f(x) =$

$x^2 + \frac{16^2}{x^4}$. La derivata di f si annulla in $x = \pm \sqrt[6]{\frac{4^5}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$. La distanza minima vale $d = 2\sqrt{3}$.

17. a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1\}$; b) f è differenziabile nei punti interni di D poiché entrambe le derivate parziali sono definite e continue all'interno di D ; c) l'unico punto stazionario interno a D è $A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$; si ha che $f(A) = \sqrt{5}$. Sul bordo di D la funzione vale $2x$; dunque il minimo assoluto vale -2 ed è assunto sul bordo, nel punto $(-1, 0)$, e il massimo assoluto vale $\sqrt{5}$ ed è assunto in A .

18. Ponendo $x = \cos t$, $y = \sin t$, si trova che la funzione, ristretta sulla circonferenza, vale: $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin(2t)$; il massimo è quindi $\frac{1}{2}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; il minimo è $-\frac{1}{2}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19. Ponendo $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2} \sin t$, si trova che la funzione, ristretta sull'ellisse, vale: $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin(2t)$; il massimo è quindi $\frac{1}{4}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$; il minimo è $-\frac{1}{4}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

20. La restrizione della funzione all'iperbole è $f(x, \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$, che per $x > 0$ non ha massimo e ha minimo 1, assunto in $(1, 1)$.

21. La restrizione della funzione alla retta è $f(x, \frac{25-3x}{4}) = e^{-x^2 - (\frac{25-3x}{4})^2}$; tale funzione ha massimo in $x = 3$ e il massimo vale e^{-25} ; il minimo non esiste, l'estremo inferiore è zero. Il gradiente nel punto $(3, 4)$ è $-2e^{-25}(3, 4)$; tale vettore appartiene alla retta $y = \frac{4}{3}x$, che è ortogonale alla retta $3x + 4y = 25$.

22. La funzione è sempre negativa, nei punti di frontiera di D si annulla, quindi i punti di frontiera di D sono punti di massimo assoluti, e il massimo assoluto è zero. All'interno di D , annullando le derivate parziali, si trova come unico punto stazionario il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ che risulta un punto di minimo assoluto.

23. La funzione ha un massimo che vale $-\frac{1}{4}$, ed è assunto in $(\frac{1}{2}, 0)$.