Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
I Appello Autunnale di Metodi Analitici (1-9-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Calcolare
$$\int_{\partial R} \frac{z^2}{e^z - 1}\, dz\,,$$
dove ∂R indica il bordo dell'insieme
$$R := \Big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Re} z| \leq 1\,,\ -1 \leq \mathrm{Im} z \leq 10 \Big\}\,,$$
percorso una volta in senso orario.

Soluzione. Le singolarità della funzione integranda $f(z)$ sono poste nei punti z in cui $e^z = 1$. Per la periodicità della funzione esponenziale, si tratta dei punti $z_k = 2k\pi i$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Di queste, cadono all'interno di R soltanto
$$z_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = 2\pi i\,.$$
Poiché
$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{e^z - 1} = \lim_{z \to 0} z\, \frac{z}{e^z - 1} = 0\,,$$
si ha che z_0 è una singolarità eliminabile, con $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$. Poiché
$$\lim_{z \to 2\pi i} \frac{z^2}{e^z - 1}(z - 2\pi i) = \lim_{z \to 2\pi i} z^2\, \frac{(z - 2\pi i)}{e^{(z - 2\pi i)} - 1} = (2\pi i)^2 = -4\pi^2\,,$$
si ha che z_1 è un polo semplice, con $\mathrm{Res}(f, z_1) = -4\pi^2$. Infine, applicando il teorema dei residui, tenendo conto che ∂R è percorso una volta in senso orario, si ha
$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = -(2\pi i)(-4\pi^2) = 8\pi^3 i\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia $f \in C^1([0,1])$ una fissata funzione tale che $f(0) \neq f(1)$. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definite:

$$f_n(x) = f(x^n) \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Mostrare che:

(i) $\{f_n\}$ converge alla costante $f(0)$ in $L^1([0,1])$.

(ii) $\{f_n\}$ *non* converge a $f(0)$ in $L^\infty([0,1])$.

(iii) La successione di derivate

$$f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x} \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a zero puntualmente quasi ovunque.

(iv) *(facoltativo)* $\{f_n'\}$ *non* converge a zero in $L^\infty([0,1])$.

Soluzione.

(i) La successione converge puntualmente quasi ovunque alla costante $f(0)$. Infatti, essendo f continua,

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x^n\right) = 0 \quad \forall x \in [0,1)\,.$$

La convergenza in $L^1([0,1])$ è poi conseguenza diretta del teorema della convergenza dominata: come funzione dominante possiamo scegliere la costante $\|f\|_\infty$, dato che

$$|f(x^n)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) Dato che sia f_n che la costante $f(0)$ sono funzioni continue, abbiamo:

$$\|f_n - f(0)\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x^n) - f(0)| \geq |f(1) - f(0)| > 0\,, \tag{1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi $f(0) \neq f(1)$. Chiaramente, la (1) implica che $\{f_n\}$ non può convergere a $f(0)$ in $L^\infty([0,1])$.

(iii) Derivando rispetto a x l'espressione di $f_n(x)$, otteniamo:

$$f_n'(x) = n x^{n-1} f'(x^n) \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

da cui

$$\limsup |f_n'(x)| \leq \|f'\|_\infty \lim_{n\to\infty} n x^{n-1} = 0 \quad \forall x \in [0,1)\,,$$

ovvero $\{f_n'\}$ converge a zero ovunque tranne (al più) in $x = 1$.

(iv) Essendo $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) \neq f(1)$ (in particolare, f *non* è costante), deve necessariamente esistere $\overline{x} \in (0,1)$ che soddisfa $|f'(\overline{x})| \neq 0$. In particolare,

$$\left| f_n'\left(\overline{x}^{\frac{1}{n}}\right)\right| = n\overline{x}^{1-\frac{1}{n}}\, |f'(\overline{x})|\,,$$

da cui

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n'\|_\infty \geq \liminf_{n\to\infty} n\overline{x}^{1-\frac{1}{n}}\, |f'(\overline{x})| = \infty\,,$$

il che mostra come $\{f_n'\}$ in realtà non sia nemmeno limitata in $L^\infty([0,1])$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{4+x^2}\,dx\,.$$

Soluzione. Posto

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{4+x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad f(x) = \frac{1}{4+x^2}\,,$$

osserviamo che si ha

$$I = \hat{f}(-3)\,.$$

Poiché

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = \pi e^{-|\xi|} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}\Big(u\big(\frac{x}{a}\big)\Big) = a\hat{u}(a\xi) \quad \forall a > 0$$

si ha

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{4+x^2}\Big) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\xi|}\,,$$

e pertanto

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-6}\,.$$