Analisi Matematica B+C [60038] - Analisi Matematica II [78624], esame del 10/02/2012

Nome e cognome .... **Matricola** ....

1. (a) Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = \sqrt{x^2+5y^2}$ nel punto $P(2,1)$, nella direzione della bisettrice del primo e terzo quadrante, nel verso delle x crescenti.

f è differenziabile in P, usiamo dunque la formula del gradiente: poiché

$$\nabla f(x,y) = \frac{x\mathbf{i}+5y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+5y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f(2,1) = \frac{2\mathbf{i}+5\mathbf{j}}{3},$$

ed inoltre il versore $\mathbf{v}$ che individua la direzione è $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, in definitiva abbiamo

$$D_{\mathbf{v}}f(2,1) = \nabla f(2,1)\cdot \mathbf{v} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{6}\sqrt{2}.$$

(b) Determinare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = 3x^2+y^4$ nel rettangolo $R = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

Non vi sono estremanti interni, sulla frontiera $f(0,0) = 0$ è il minimo assoluto e $f(1,2) = 19$ è il massimo assoluto.

(c) Stabilire se la funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y-x^2}$ è differenziabile nel punto $P(0,1)$.

Osserviamo che $f_x(0,1) = f_y(0,1) = 0$ applicando la definizione e passando alle coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,1+k) - \left[f(0,1)+f_x(0,1)h+f_y(0,1)k\right]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\sqrt[3]{\varrho^2\cos^2\theta\varrho\sin\theta}}{\varrho} = \cos^2\theta\sin\theta$$

poiché il limite non è nullo, la funzione non è differenziabile in P.

2. (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \left(y + \frac{1}{y}\right) \cos 2x.$$

Separando le variabili, si ottiene

$$\int \frac{y}{y^2+1}\ dy = \int \cos 2x\ dx,$$

da cui $ln(y^2+1) = C + \sin 2x$, ossia ponendo $K = e^C$

$$y(x) = \pm\sqrt{Ke^{\sin 2x} - 1}.$$

(b) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy + 6x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Applicando la formula, posto $A(x) = \int 2x\ dx = x^2$, determiniamo l'integrale generale:

$$y(x) = e^{A(x)}\left[C + \int 6xe^{-A(x)}\ dx\right] = e^{x^2}\left[C + \int 6xe^{-x^2}\ dx\right] = Ce^{x^2} - 3;$$

poiché $y(0) = C - 3$, si ricava $C = 4$ e dunque la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 4e^{x^2} - 3$.

(c) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 6 + 4e^{3x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, da cui $\lambda = 3, -1$, con il metodo di somiglianza si trova l'integrale particolare $\bar{y}(x) = xe^{3x} - 2$, dunque l'integrale generale è

$$y(x) = He^{3x} + Ke^{-x} + xe^{3x} - 2,$$

imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} y(0) = H + K - 2 = 1 \\ y'(0) = 3H - K + 1 = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H = 1, K = 2;$$

e dunque la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (1+x)e^{3x} + 2e^{-x} - 2$.

3. (a) Calcolare il lavoro L compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\cos x)\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}$ per percorrere l'arco di parabola $\gamma : y = x^2$ dal punto $A(-1,1)$ al punto $B(1,1)$.

Osservato che, lungo γ, $dy = 2x\ dx$, abbiamo

$$L = \int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy) = \int_{-1}^{1} \Big[(\cos x)\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}\Big] \cdot (\mathbf{i} + 2x\ \mathbf{j})dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(\cos x + 10x^4\right)\ dx = \Big[\sin x + 2x^5\Big]_{-1}^{1} = 4 + 2\sin 1.$$

(b) Calcolare le coordinate (x_B, y_B) del baricentro della lamina omogenea $T = \{0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$.

Sia k la densità superficiale della lamina. La massa M è

$$M = \iint_T k\ dx\ dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} k\ dy = k\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\ dx = \frac{k}{3}.$$

Per simmetria, $x_B = y_B$, dunque è sufficiente calcolare una delle due:

$$x_B = \frac{1}{M}\iint_T x\ k\ dx\ dy = \frac{3}{k}\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xk\ dy = 3\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^3\right)\ dx = 3\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{20}.$$

(c) Calcolare il flusso Φ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (3z+3)\mathbf{k}$ attraverso la semisfera $\Sigma : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, nel verso delle z crescenti.

Sia V il solido $\{0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \le 1\}$, il flusso Φ_V uscente da V è

$$\Phi_V = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}\ dx\ dy\ dz = \iiint_V 3\ dx\ dy\ dz = 2\mathrm{vol}(V) = 2\pi;$$

sottraendo a questo risultato il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la base B della semisfera (ove la normale è $-\mathbf{k}$) otteniamo Φ:

$$\Phi = \Phi_V - \iint_B \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\ dS = 2\pi + \iint_B 3\ dS = 2\pi + 3\mathrm{area}(B) = 5\pi.$$

4. (a) Determinare il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2^n}.$$

Posto $a_n = \frac{1}{n+2^n}$, abbiamo

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

pertanto $R = 2$.

(b) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2^n}$$

agli estremi del proprio intervallo di convergenza.

In $x = \pm 2$ abbiamo rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n+2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+2^n},$$

poiché in ambo i casi il termine generale non tende a 0, nessuna delle due serie converge.

(c) Determinare i coefficienti della serie di Fourier associata alla funzione 2π-periodica

$$f(x) = (\cos x + \sin x)(1 + \cos x - \sin x).$$

Poiché

$$f(x) = \cos x + \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x + \cos 2x,$$

abbiamo $a_1 = a_2 = b_1 = 1$, mentre tutti gli altri a_n e b_n sono nulli.