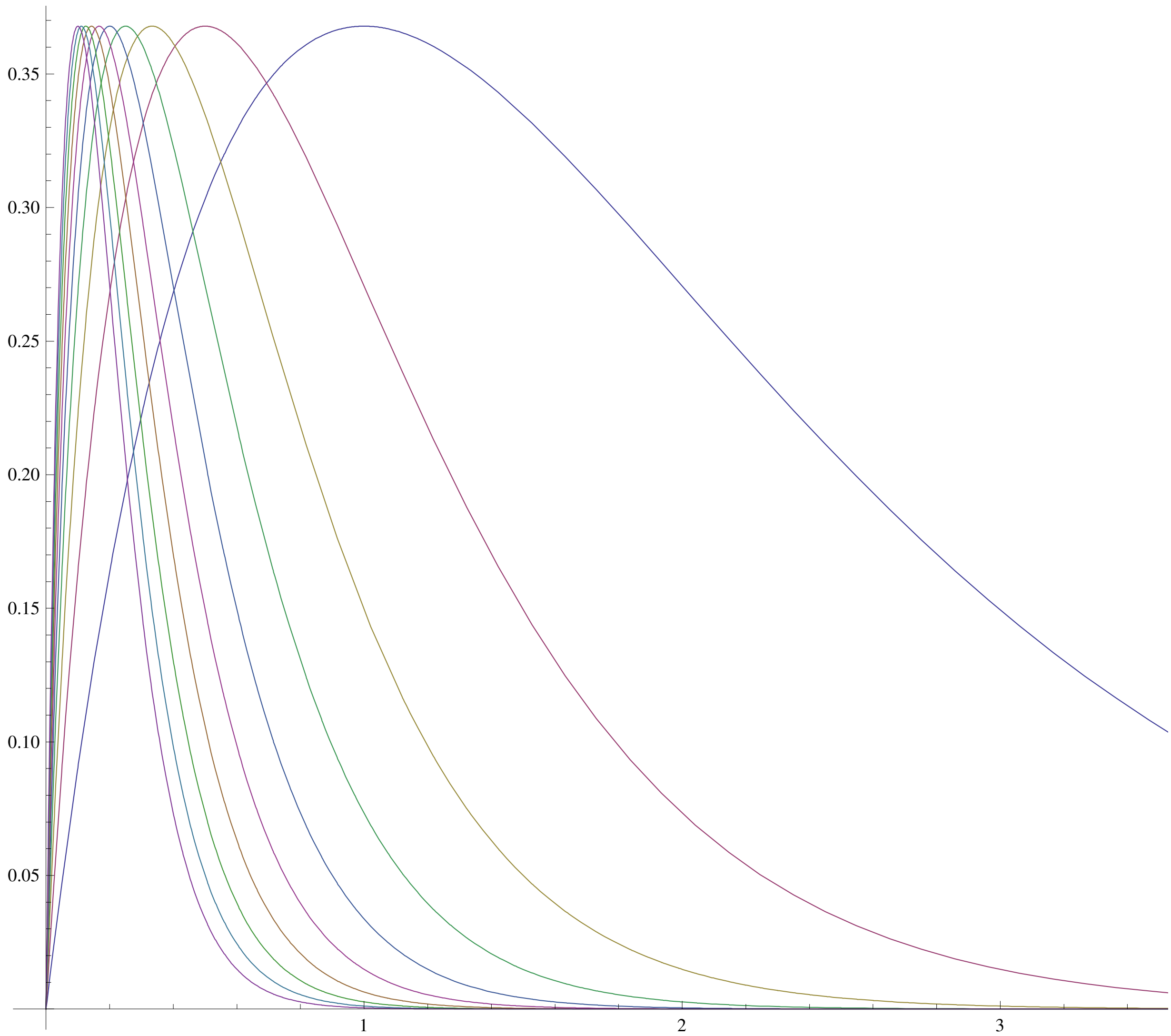
Successioni e serie di funzioni

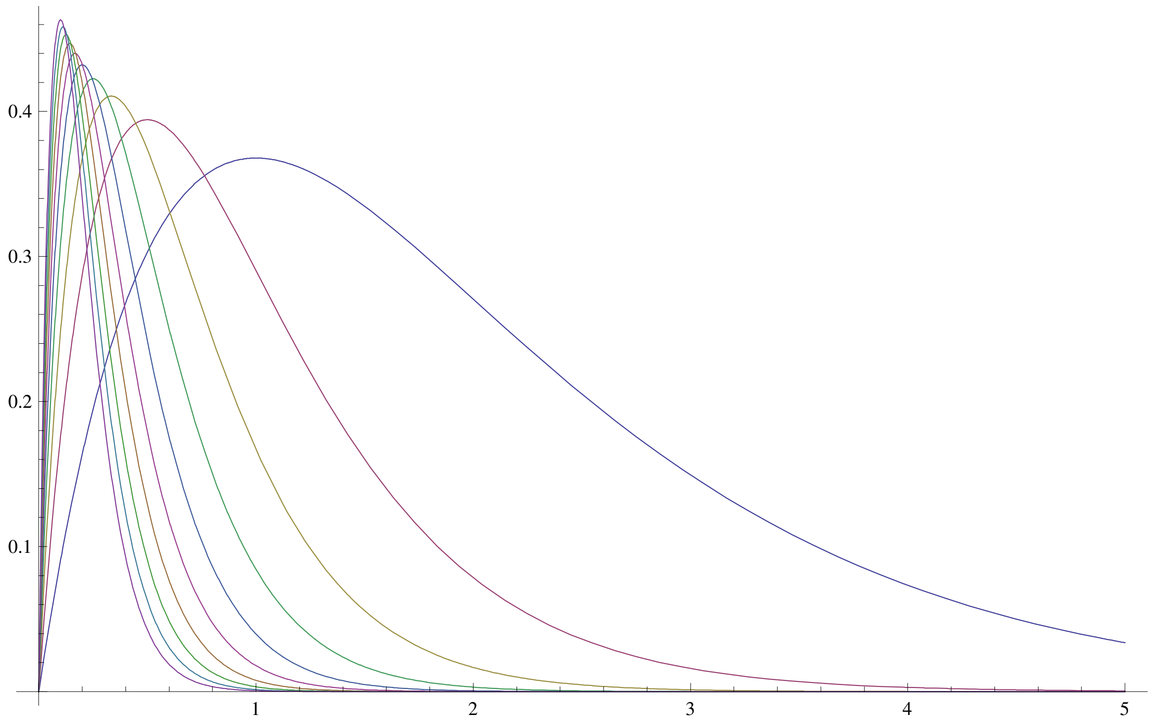
Convergenza puntuale e uniforme di successioni

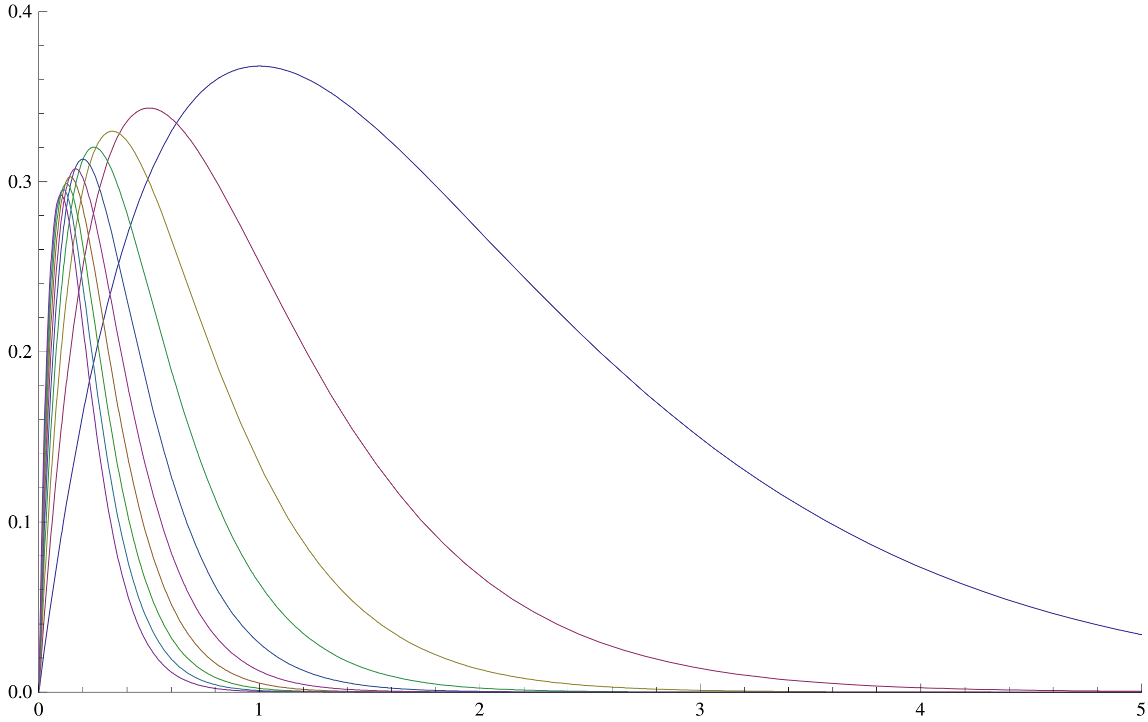
Data la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^\alpha \, t \, e^{-n t}, \quad n = 1, \ldots, \infty, \quad t \in [0, +\infty)$$

studiarne convergenza puntuale e unfirme nell'intervallo $[0, +\infty)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$







Convergenza puntuale e uniforme di serie

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n},\ x\ \in \mathbb{R}$$

Grafico dei termini della serie

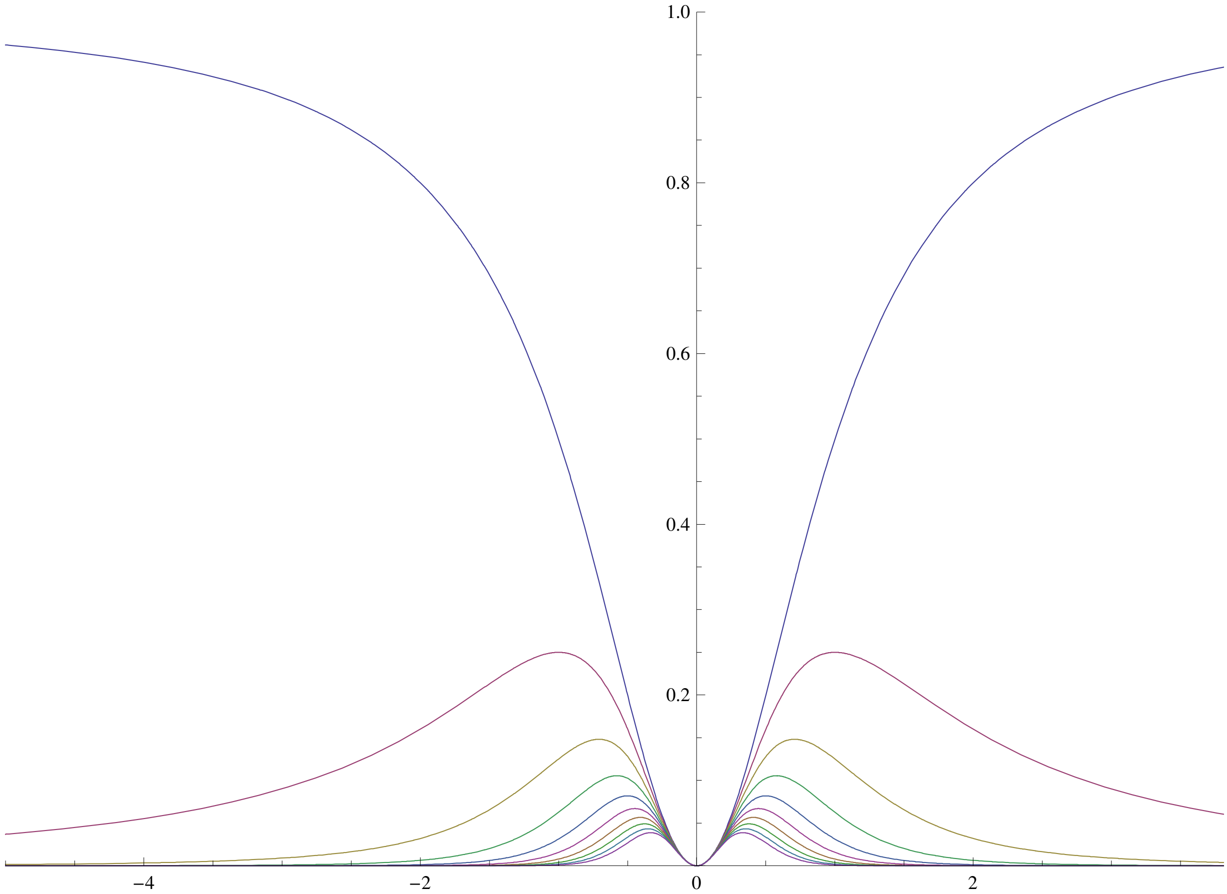
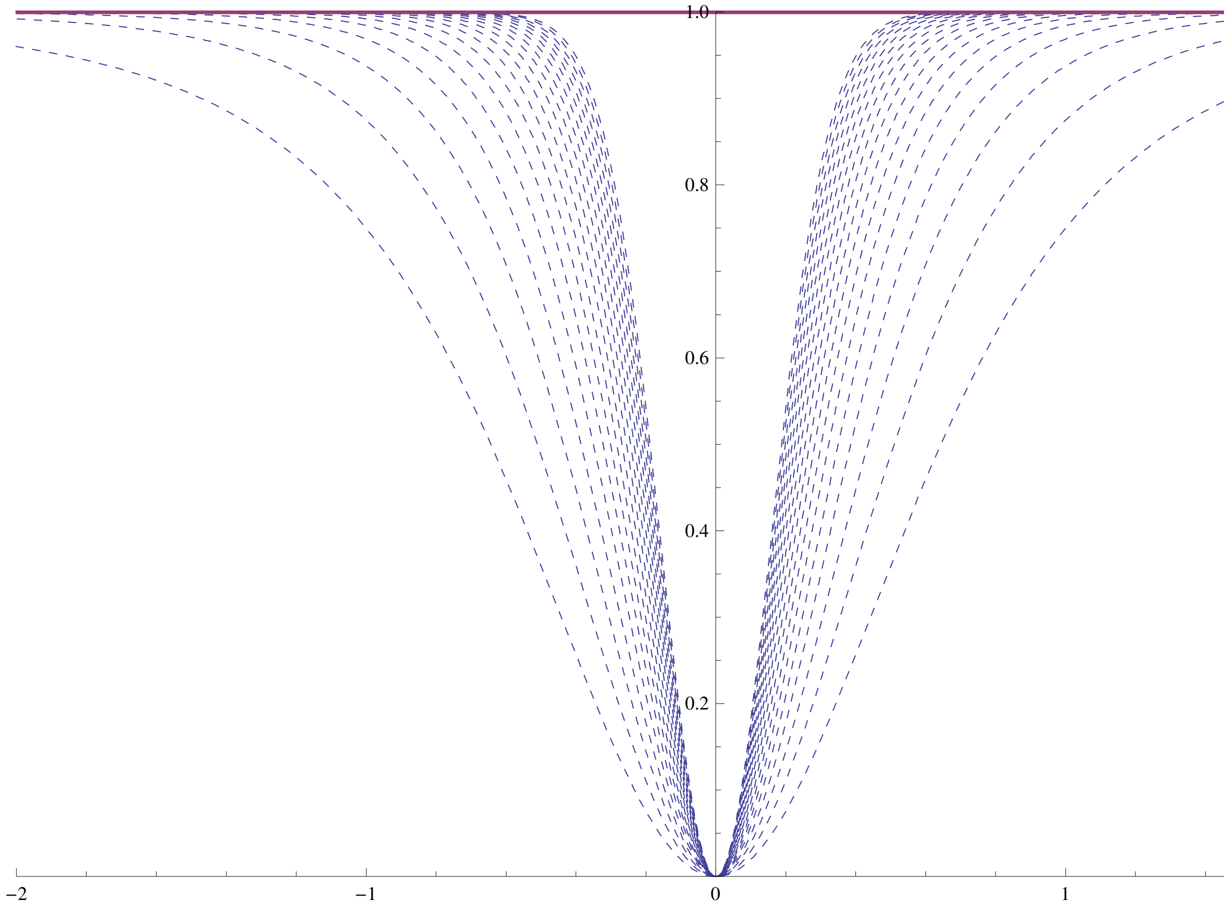


Grafico delle somme parziali

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n} = \left(x^2+1\right)\left(1-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\right)-x^2$$

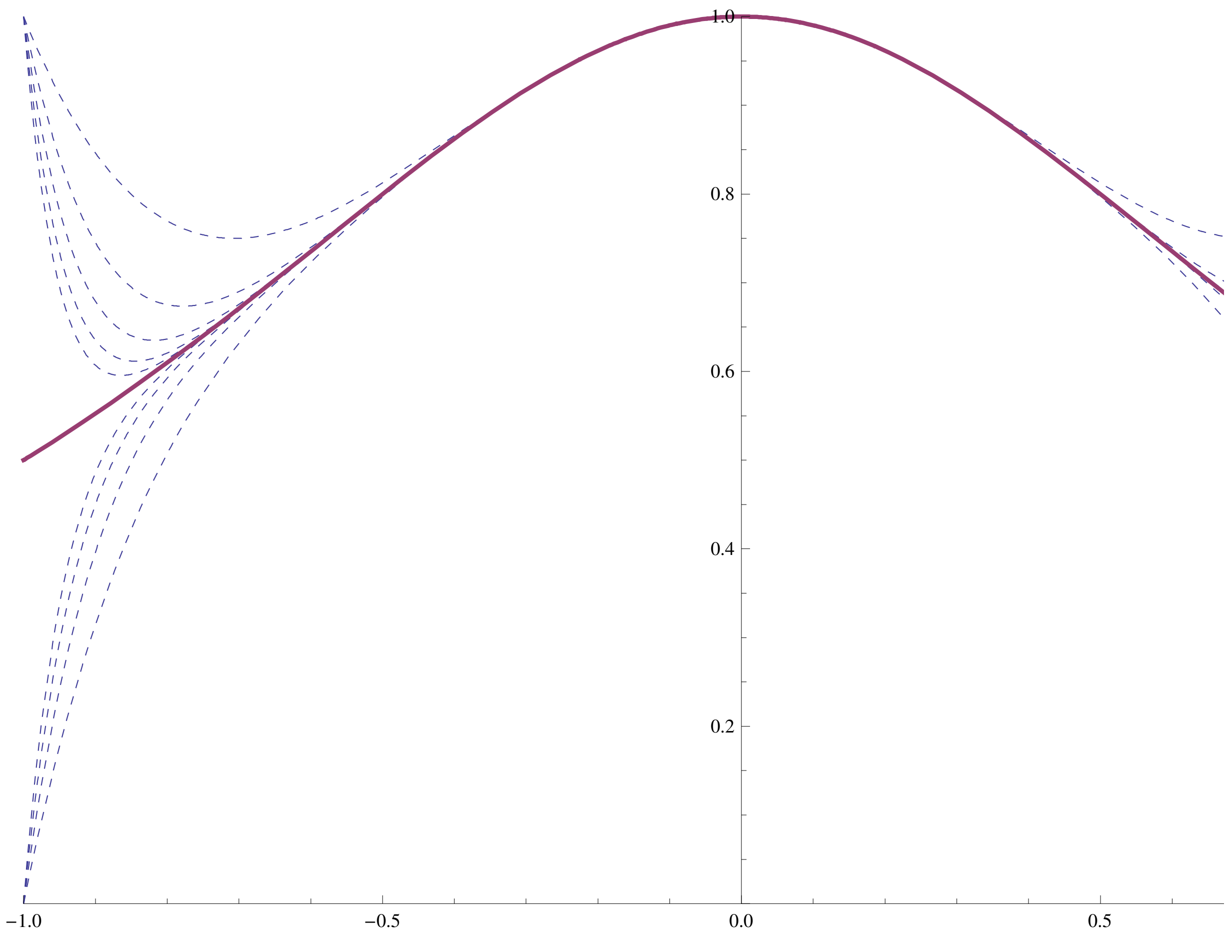
e del limite puntuale della serie



Serie di Taylor

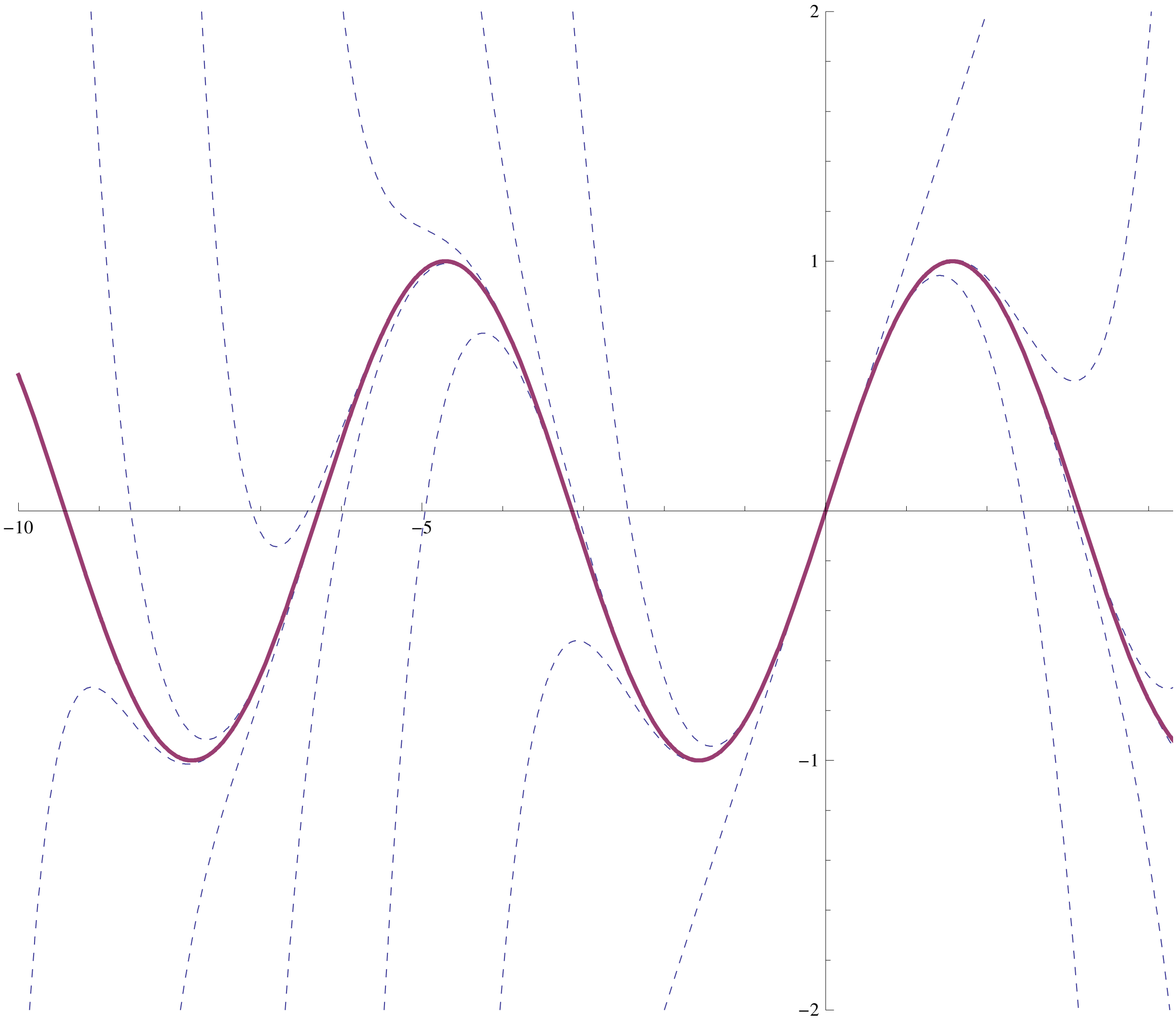
$$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Raggio di convergenza $R = 1$



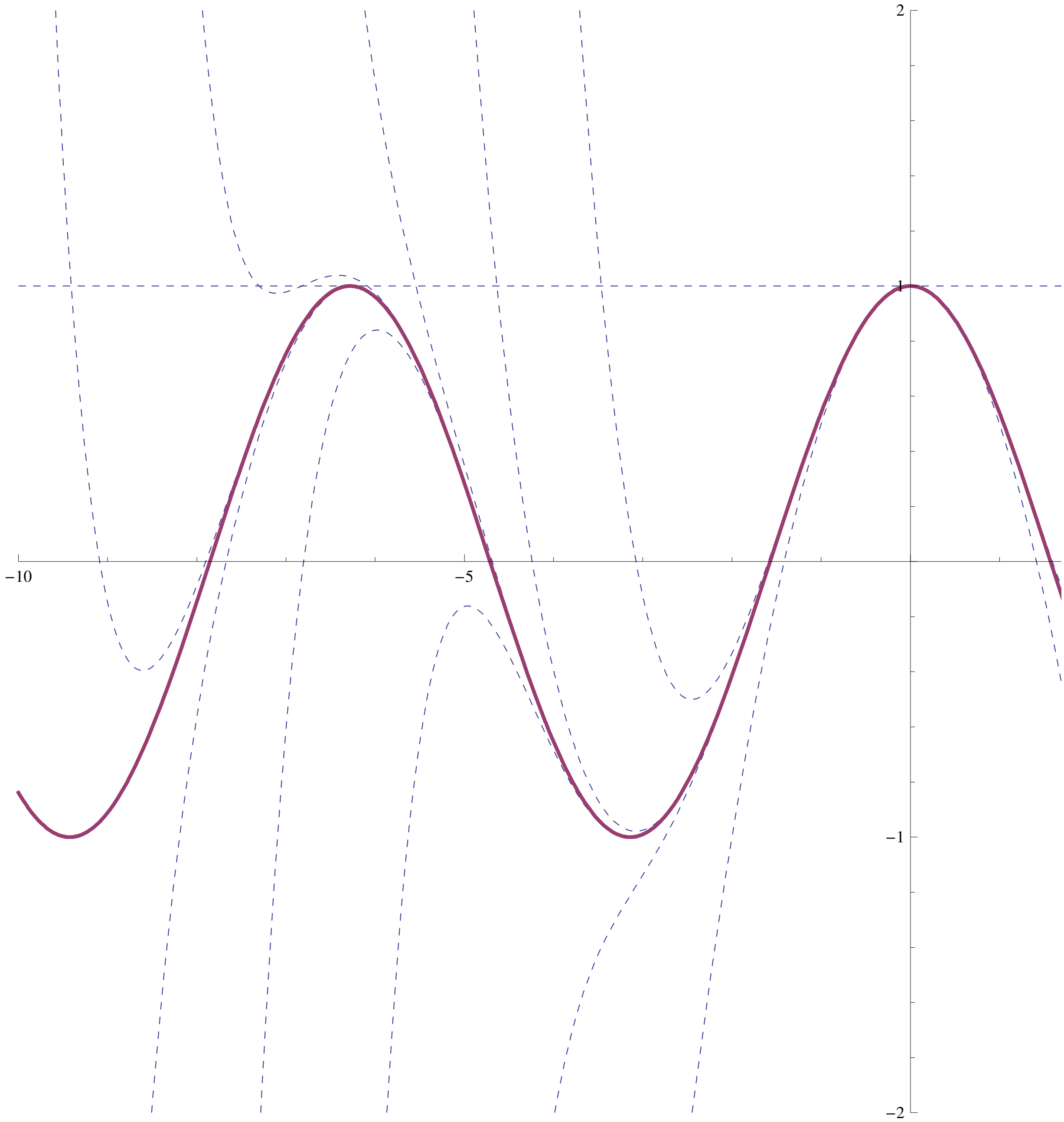
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Raggio di convergenza $R = \infty$



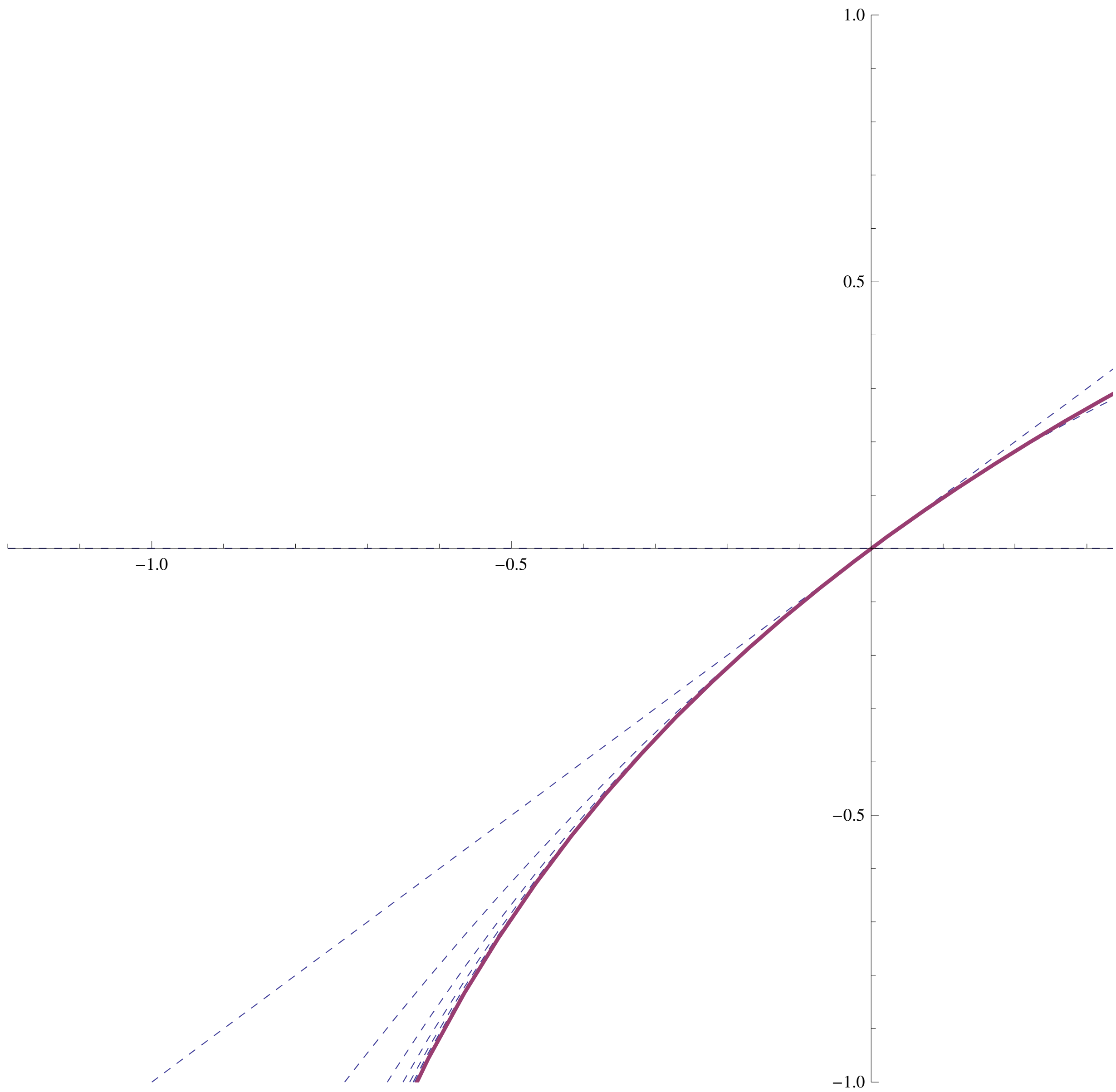
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Raggio di convergenza $R = \infty$



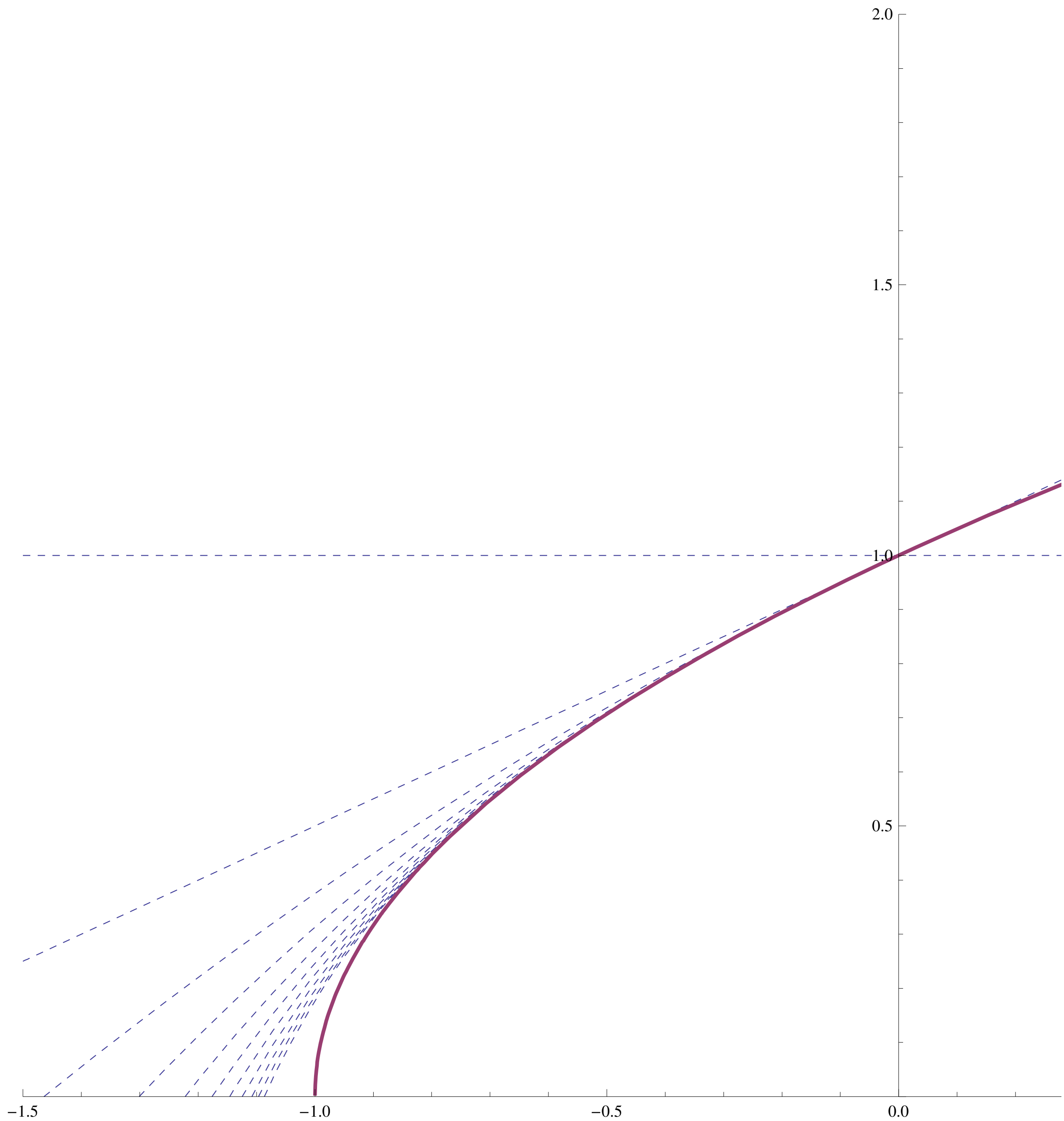
$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^n}{n}$$

Raggio di convergenza $R = 1$



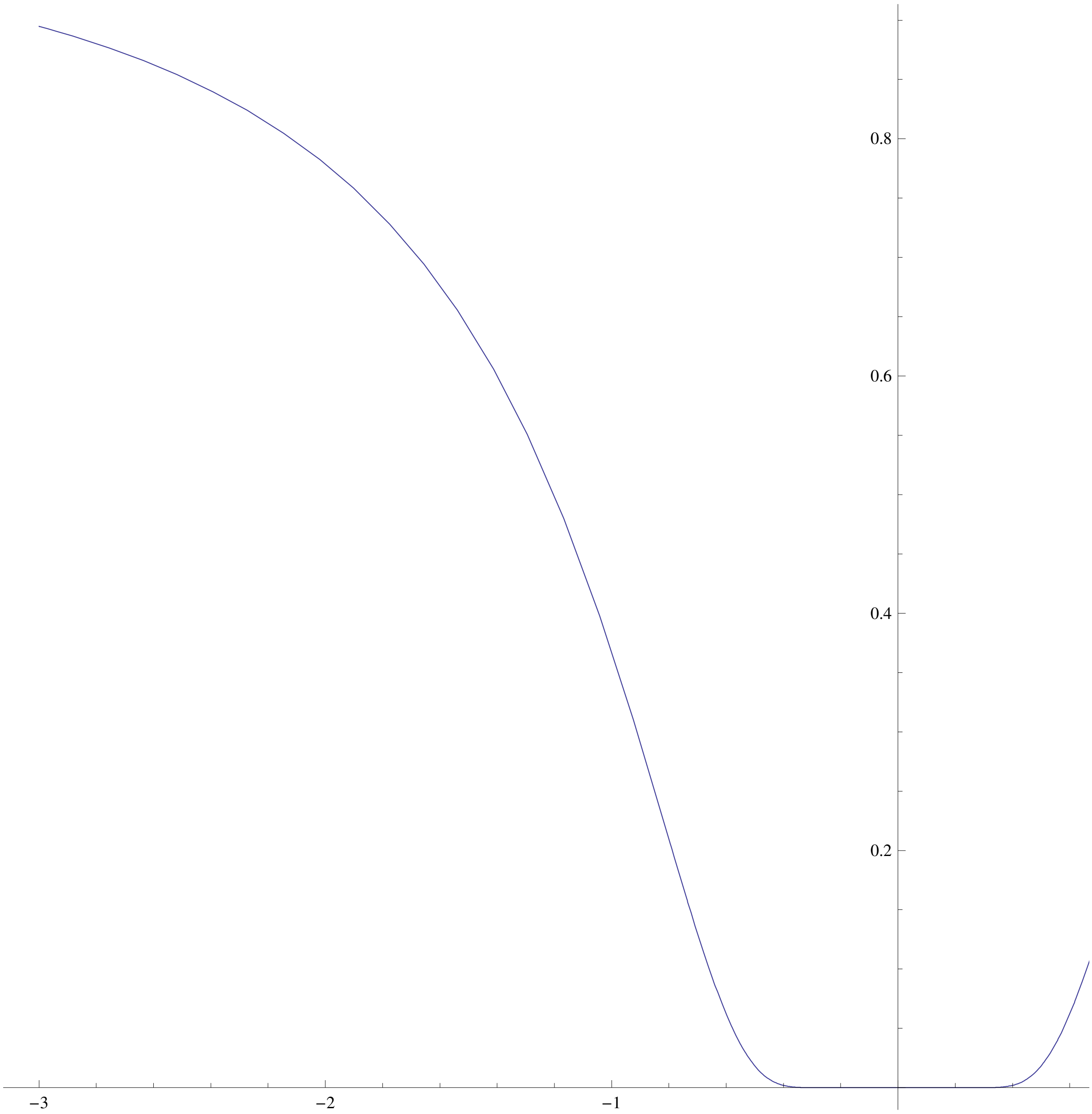
$$\sqrt{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

Raggio di convergenza $R = 1$



Esempio di funzione C^∞ ma non analitica

```
Plot[Exp[-1 / x^2], {x, -3, 3}]
```

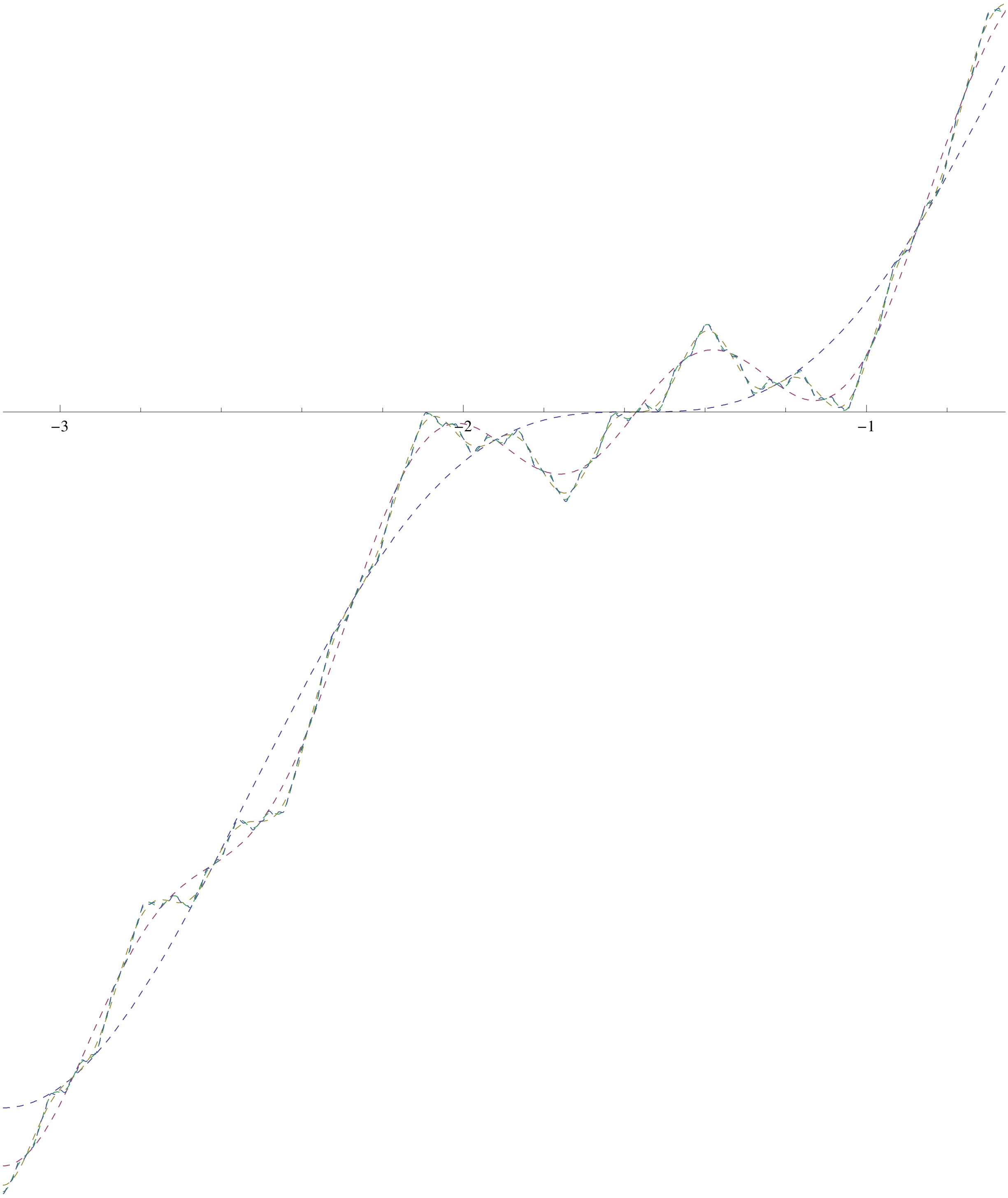


Serie di Fourier

Esempio di serie di Fourier lacunare

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^i x)}{3^i}$$

```
Plot[Evaluate[Table[Sum[ Cos[3^i * x] / 3^i, {i, 0, n}], {n, 1, 5}]] ,
  {x, -π, π}, PlotRange → {{-π, π}, {-1.5, 1.5}}, PlotStyle → {Dashed}]
```


−3
−2
−1

Applicazioni

Risoluzione di equazioni differenziali

Le serie di potenze sono molto utile per ottenere approssimazioni di soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti polinomiali. Conderiamo per esempio l'equazione dell'oscillatore armonico (quantistico)

$$u'' + \left(\lambda - x^2\right) u = 0$$

In base alla sostituzione

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\, w(x)$$

siamo ricondotti all' equazione

$$w'' - 2\, x\, w' + (\lambda - 1)\, w = 0$$

Ponendo poi

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

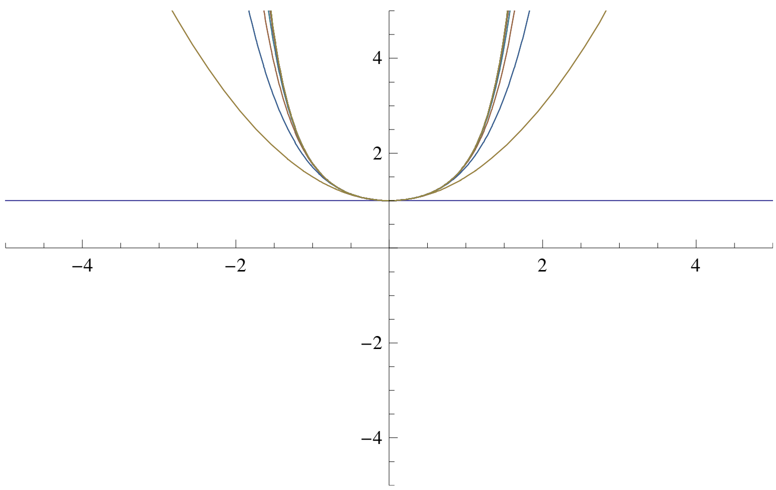
ricaviamo la relazione ricorsiva

$$a(n+2) = \frac{(2\,n-1)\,a(n)}{(n+2)\,(n+1)}$$

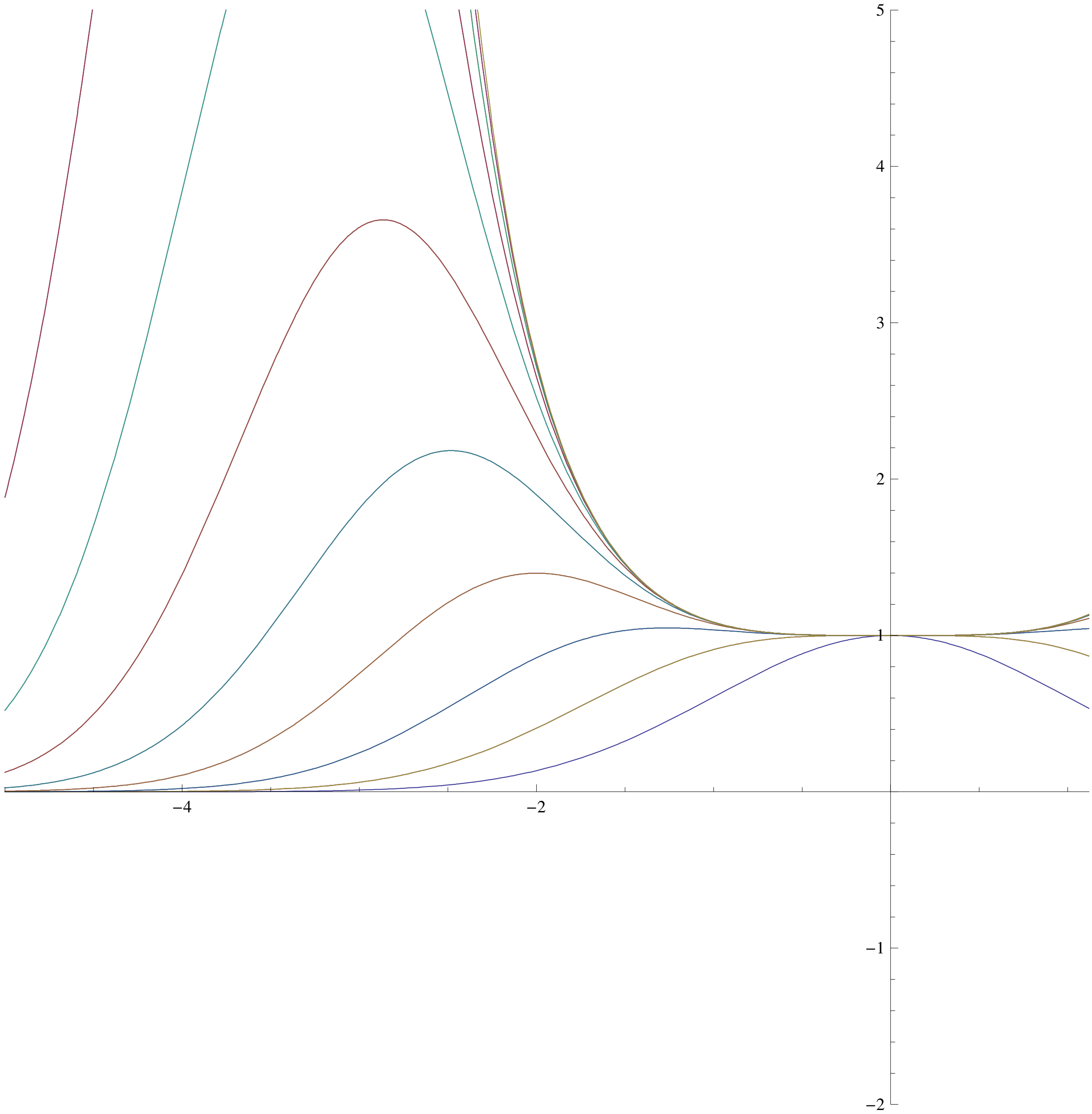
$$\text{coeff} = \text{RecurrenceTable}\left[\left\{a(n+2) = \frac{(2\,n-\lambda+1)\,a(n)}{(n+2)\,(n+1)},\ a(0) = 1,\ a(1) = 0\right\},\ a,\ \{n,\ 100\}\right];$$

```
coeff = RecurrenceTable[{a[n + 2] == (2 n + 1) / ((n + 2) * (n + 1)) * a[n],
   a[0] == 1, a[1] == 0}, a, {n, 100}]
```

```
Plot[Evaluate[Table[Sum[ coeff[[i + 1]] * x^i, {i, 0, n}], {n, 1, 20}]] ,
 {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}]
```



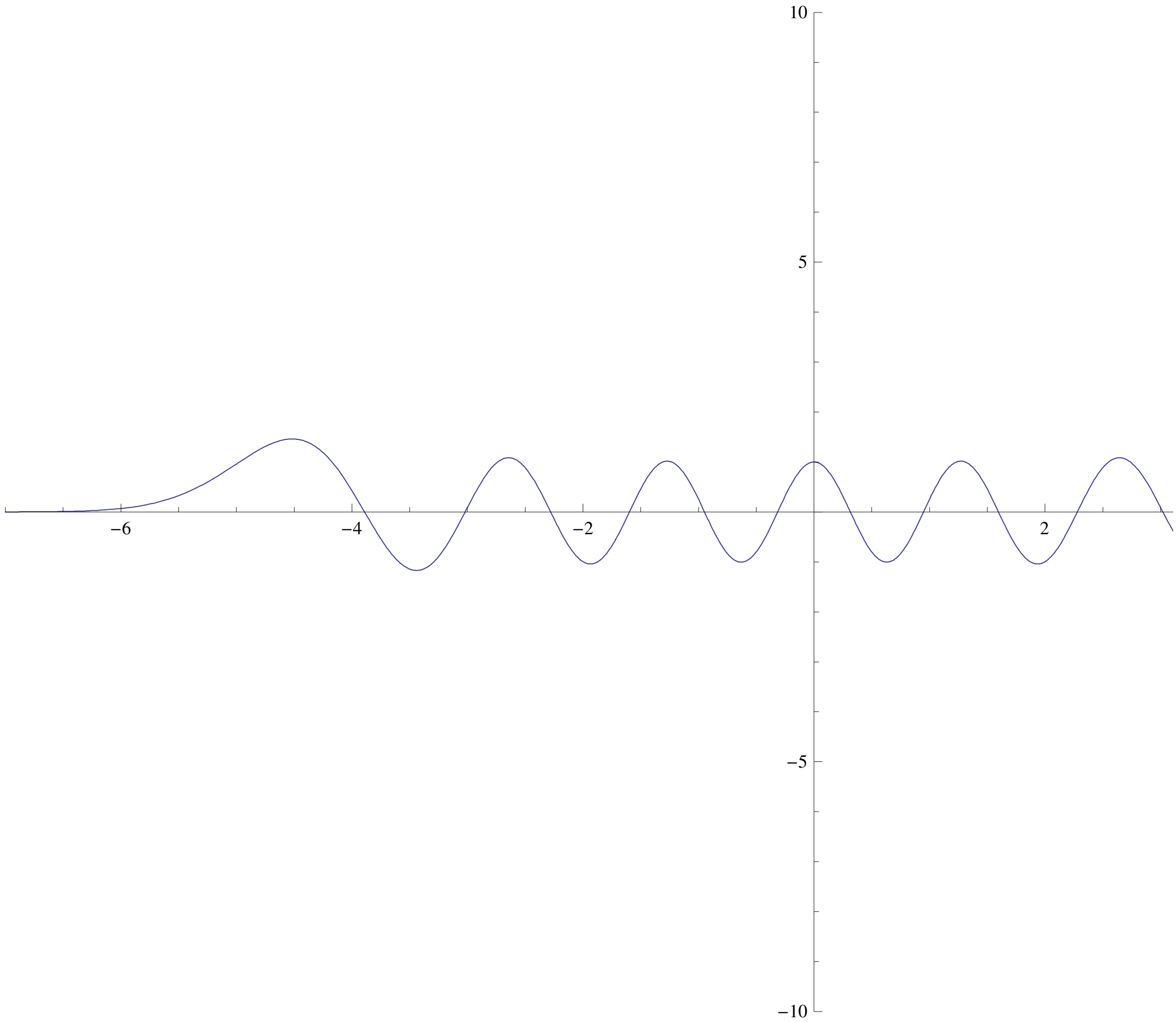
```
Plot[Evaluate[
  Table[Sum[ Exp[-x^2 / 2] * coeff[[i + 1]] * x^i, {i, 0, n}], {n, 1, 20}]] ,
 {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-2, 5}}]
```




```
coeff = RecurrenceTable[
  {a[n + 2] == (2 * n + 1 - 25) / ((n + 2) * (n + 1)) * a[n], a[0] == 1, a[1] == 0}, a, {n, 30}]
```

$$\left\{1, 0, -12, 0, 20, 0, -\frac{32}{3}, 0, \frac{16}{7}, 0, -\frac{64}{315}, 0, \frac{64}{10\,395}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}$$

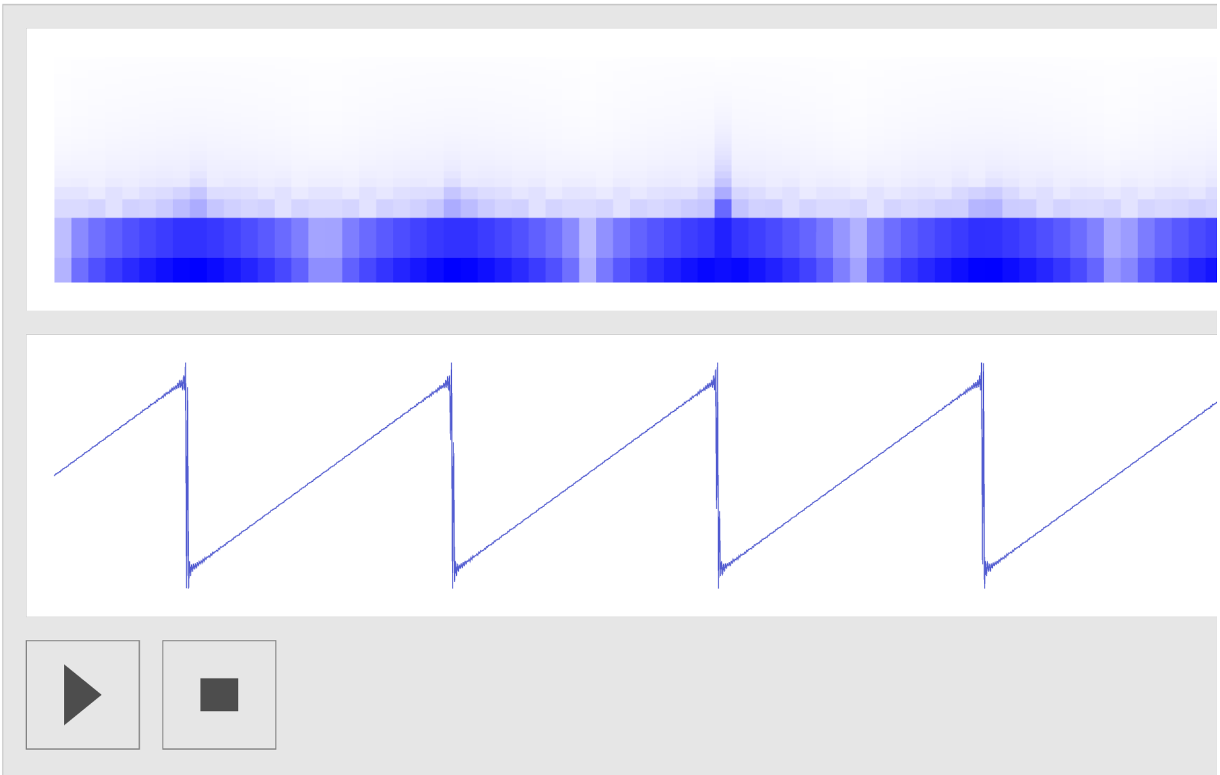
```
Plot[Evaluate[Sum[Exp[-x^2 / 2] * coeff[[i + 1]] * x^i, {i, 0, 30}]],
  {x, -7, 7}, PlotRange → {{-7, 7}, {-10, 10}}]
```



■ Serie di Fourier e suoni

Serie di Fourier e onda lineare

```
Play[Sum[ (-1) ^ (n + 1) * Sin[4 π n * t] / n,  {n, 1, 100}],
 {t, 0, 3},  SampleRate → 32 000]
```



Quest'ultima è una serie di funzioni ma non una serie di Fourier (si vede bene controllando gli argomenti delle funzioni trigonometriche). Per maggiori informazioni, guardate: sound of hydrogen

```
Play[
 Evaluate[Sum[ Sin[440 * 2 π (1 - 1 / n^2) * t] + Sin[440 * 2 π (1 / 4 - 1 / (n + 1) ^2) * t] +
     Sin[440 * 2 π (1 / 9 - 1 / (n + 2) ^2) * t] + Sin[440 * 2 π (1 / 16 - 1 / (n + 3) ^2) * t] +
     Sin[440 * 2 π (1 / 25 - 1 / (n + 4) ^2) * t],
   {n, 2, 20}]], {t, 0, 10},  SampleRate → 32 000]
```