# Manuale di sopravvivenza per l'Analisi III ovvero Guida pratica alla risoluzione degli esercizi di Analisi III

Roberto Aloi
<prof3ta@email.it>

27 giugno 2005

# Indice

# Nota dell'autore

Questo manuale non vuole in alcun modo sostituire, ma semplicemente integrare, dispense e libri di testo indicati dal Professore di Analisi III.
D'altra parte sarà impossibile un utilizzo corretto di esso da parte dello studente che non ha ben assimilato i concetti del corso.
Il manuale vuole semplicemente fornire una tecnica generale per la risoluzione dei principali esercizi di Analisi III e servire da supporto per lo studente durante le esercitazioni (in aula ed a casa) e l'esame scritto (ove ne è consentito l'utilizzo).
L'intero manuale è il frutto dell'unione e dell'elaborazione di formule, metodi e tecniche estrapolati da libri, dispense, formulari, appunti e di ricerche sul web.
Nonostante abbia fatto di tutto per realizzare un manuale privo di errori ed imprecisioni, non è, nella maniera più assoluta, assicurata la correttezza dei suoi contenuti.
L'autore non si ritiene responsabile di eventuali danni (fisici e morali) provocati da un utilizzo (corretto o meno) di questo manuale.
Per la segnalazione di errori o imprecisioni, per consigli o proposte di ampliamento del manuale, scrivere a: prof3ta@email.it

# Capitolo 1

# Singolarità

## 1.1 Studio delle singolarità

- Individuare le singolarità della funzione data (discontinuità, etc...).
- Limitarsi allo studio delle singolarità **isolate**.
- Porre:
$$l = \lim_{z->z_0} |f(z)|$$
- Classificare tali singolarità, a seconda del valore di $l$, come:
  - Singolarità fittizia ($l \in \mathbb{R}_0^+$)
  - Polo ($l = +\infty$)[1]
  - Singolarità essenziale ($l \nexists$)

## 1.2 Studio del punto all'infinito

Condizione necessaria per lo studio del punto all'infinito di una funzione è che la funzione stessa sia olomorfa all'infinito.
Ciò, ovviamente, accade quando tutte le singolarità sono comprese in un intorno di centro l'origine e raggio finito.
In questo caso, il punto all'infinito per la funzione $f(z)$ si *comporterà* come l'origine per la funzione $g(w)$, con $w = \frac{1}{z}$. Basterà, dunque, effettuare il

[1] L'ordine di un polo può essere agevolmente verificato in virtù del fatto che dovrà essere: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0$, dove $m$ rappresenta proprio l'ordine del polo.
Ricordiamo anche che il grado di uno *zero* può essere calcolato controllando il grado della prima derivata della funzione ad essere non nulla.

cambio di variabile: $z = \frac{1}{w}$ e studiare la singolarità come visto nella sezione 1.1.

## 1.3 Il calcolo dei residui

- Polo del primo ordine[2].

$$Res(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{n(z)}{d'(z)}$$

  dove $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$, $g(z) \neq 0$.

- Polo di ordine m.

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)} \lim_{z \to z_0} D^{(m-1)}[(z-z_0)^m f(z)]$$

- Residuo all'infinito.

$$Res(f(z), \infty) = -a_{-1} \equiv -Res(\frac{g(w)}{w^2}, 0), \quad \text{dove} \quad z = \frac{1}{w}$$

- Singolarità fittizia / non isolata.

$$Res(f(z), z_0) = 0$$

- Singolarità essenziale.
  In questo caso si sfrutta un corollario del teorema dei residui[3], secondo il quale:

$$Res(f, \infty) + \sum_{i=1}^{p} Res(f(z), z_i) = 0$$

[2] L'ordine di un polo coincide con la sua molteplicità.

[3] Tale residuo può anche essere calcolato, ma in maniera molto più complessa, mediante lo sviluppo in serie di Laurent ed il prodotto delle serie secondo Cauchy. In questo manuale, quest'ultimo caso non verrà contemplato.

# Capitolo 2

# Il calcolo degli integrali

Prima ancora del calcolo dell'integrale di Analisi III, bisogna cercare di classificare l'integrale stesso, capendo se si tratta di un integrale di Lebesgue, di un integrale improprio o se è possibile calcolarlo solo in valore principale. A tal scopo si analizza la funzione sotto il segno di integrale e se ne studia la cosiddetta **sommabilità** all'infinito e nelle discontinuità.

## 2.1 Sommabilità di una funzione

$f(x)$ è sommabile all'infinito se

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$$

per $\alpha > 1$.

$f(x)$ è sommabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$$

per $0 < \alpha < 1$.

Se la funzione dovesse risultare sommabile, l'integrale in questione, calcolato in valore principale, coinciderà con quello di Lebesgue.

## 2.2 Integrali tra 0 e $+\infty$

Per il calcolo di questo tipo di integrali, si segua il seguente procedimento[1]:

[1] Questo procedimento non può essere adottato per il calcolo di integrali di funzioni trigonometriche iperboliche, per il quale si veda la sezione 2.2.3

- Studiare la sommabilità al finito (nelle eventuali discontinuità) ed all'infinito della funzione sotto il segno di integrale, come spiegato nella sezione 2.1.

- Controllare l'eventuale parità della funzione suddetta. Se la funzione risulta pari, passare alla sezione 2.2.1, altrimenti passare alla sezione 2.2.2.

### 2.2.1 Funzioni pari

- Poichè la funzione è pari, varrà la:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

- Passare dalla funzione $f(x)$ alla funzione $f(z)$, tenendo conto del fatto che:

  – Per le funzioni razionali fratte basta sostituire (brutalmente!) la z alla x.

  – Nel caso delle funzioni trigonometriche $sin(\alpha z)$ e $cos(\alpha z)$, bisogna considerare la funzione[2] $e^{i\alpha z}$.

- Calcolare i poli della f(z), che altro non sono che gli zeri del denominatore della funzione stessa[3].

- Scegliere come *dominio regolare* una semicirconferenza di raggio R, situata nel semipiano in cui Im(s) $>$ 0, tale da far rientrare al suo interno i punti singolari giacenti sullo stesso semipiano. "Saltare" le eventuali discontinuità presenti sull'asse delle ascisse. A questo proposito, si consideri, come verso positivo della semicirconferenza quello antiorario e ci si regoli di conseguenza per le altre curve (la curva deve chiudersi, dunque le eventuali discontinuità dovranno essere saltate in senso orario).

- Applicare il teorema dei residui:

$$\int_{+\partial C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} Res(f, z_i)$$

[2]Questo modo di procedere potrebbe portare a dover escludere una parte (quella reale o quella immaginaria) del risultato ottenuto.

[3]Se questi appartengono al campo nei numeri reali, essi costituiscono delle *discontinuità* per la funzione.

al dominio regolare individuato.
Si noti che, qualora il dominio regolare $C_R$ non dovesse contenere punti singolari all'interno, sarà possibile applicare il teorema di Cauchy-Goursat:

$$\int_{+\partial C_R} f(z)dz = 0$$

- Calcolare i vari integrali risultanti attraverso i due lemmi del cerchio piccolo e del cerchio grande, riportati nell'appendice B.

### 2.2.2 Funzioni non pari

In questo caso è possibile applicare uno dei due seguenti procedimenti[4]:

- Calcolare l'integrale utilizzando due opportune determinazioni (nel caso in cui la funzione sia di tipo esponenziale o logaritmico), quindi effettuare una somma "membro a membro" dei due risultati ottenuti.
  Se si sono scelte due determinazioni adeguate, rimarrà il solo integrale da calcolare, mentre gli altri termini si annulleranno a vicenda.

- Considerare un settore circolare di ampiezza $\alpha$, cosicchè l'integrale lungo la semiretta di parametrizzazione $z(t) = te^{i\alpha}$ sia uguale a quello cercato.

### 2.2.3 Integrali di funzioni trigonometriche iperboliche

Le funzioni trigonometriche iperboliche costituiscono una categoria particolare di funzioni delle quali non è possibile calcolare l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ nel modo tradizionale.
Ciò si spiega con il fatto che, quando una funzione trigonometrica iperbolica si trova al denominatore di una funzione fratta, le singolarità sono disposte lungo tutto l'asse immaginario.

Quando ci si trova davanti a funzioni con queste caratteristiche, il modo più conveniente di calcolare l'integrale è quello di considerare come *dominio regolare* un rettangolo di base -R. . . R e di altezza tale che l'integrale lungo il segmento superiore sia uguale a quello cercato.
Solitamente, ciò è possibile scegliendo, per il seno iperbolico, la retta intersecante la prima singolarità mentre, per il coseno iperbolico, la retta passante tra la seconda e la terza singolarità.

[4] Il primo procedimento, più intuitivo, dà luogo a calcoli ben più complessi rispetto al secondo, con il quale, tuttavia, bisogna essere molto attenti.

Gli integrali sui segmenti laterali andranno maggiorati e fatti tendere, così, a zero.

## 2.3 Integrali tra 0 e $2\pi$

Il calcolo di questi integrali risulta abbastanza agevole se si utilizzano i risultati del **teorema dei residui**.

Si proceda nella seguente maniera:

- Calcolare il valore della funzione da integrare in 0 ed in $2\pi$.
- Qualora uno di questi valori non risulti appartenere ad $\mathbb{R}$, studiare la sommabilità della funzione, come spiegato nel paragrafo 2.1.
- Sostituire alle funzioni trigonometriche le relazioni equivalenti presenti nell'appendice E.
- Effettuare il cambiamento di variabili $z = e^{i\theta}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$[5]
- Calcolare i **poli** della funzione, ovvero gli zeri del denominatore della funzione stessa.
- Disegnare il sistema di assi cartesiani con **ascissa** = **Re** e **ordinata** = **Imm**.
- Disegnare la circonferenza goniometrica (di raggio 1).
- Identificare nel grafico i poli della funzione, escludendo quelli esterni alla circonferenza goniometrica.
- Calcolare i **residui** nei punti rimasti (quelli interni alla circonferenza goniometrica), come spiegato nel paragrafo 1.3.
- L'integrale di partenza risulterà uguale, per il **teorema dei residui** a:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{q} Res(f, z_i)$$

[5] Chiaramente, a questo punto, l'integrale passa dall'integrale $\int_0^{2\pi}$ a quello curvilineo $\int_\gamma$, dove $\gamma$ è la circonferenza goniometrica.

# Capitolo 3

# Sviluppo in serie di Laurent

In questo caso, solitamente vengono assegnati una funzione $f(z)$ ed uno o più intervalli di definizione[1].

Si ricordi, in proposito, che

**una funzione olomorfa[2] definita in una corona circolare**
**è *sempre* sviluppabile in serie di Laurent.**

## 3.1 Funzioni razionali fratte

Sono le funzioni del tipo:

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$$

Si proceda nella seguente maniera:

- Scomporre la funzione in fratti semplici [3], come spiegato nell'appendice C.
- Considerare il primo intervallo assegnato.
- Effettuare lo sviluppo in serie di Laurent per ognuno dei fratti semplici ottenuti.

[1] Qualora dovesse esserer richiesto lo sviluppo in serie di Laurent in un intorno di infinito, basterà prendere in considerazione la $g(w) = f(\frac{1}{z})$ ed effettuare lo sviluppo per quest'ultima funzione in un *intorno* opportuno dell'origine.

[2] Una funzione derivabile in un punto $z \in \mathbb{C}$ si dice *olomorfa*. Una funzione derivabile in tutto $\mathbb{C}$ si dice *intera*.

[3] Ricordandosi che la scomposizione in fratti semplici può essere effettuata solo quando il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore.

Per i **termini di primo grado**, si tenga a mente il fatto che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

converge al termine

$$\frac{1}{1-q}$$

se la ragione q è tale che $-1 < q < 1$.

Bisognerà cercare, allora, di ricondursi, attraverso stratagemmi algebrici quali la messa in evidenza della $z$ o di altri termini al denominatore, il cambiamento di segno, il cambiamento di variabili, l'aggiunta e la sottrazione di 1 al denominatore, di ottenere dei termini "simili" per forma a:

$$\frac{1}{1-q}$$

con $-1 < q < 1$.

Per i **termini di grado superiore al primo**, invece, si dovranno sfruttare il **prodotto di Cauchy per le serie**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ed il **teorema di derivazione per serie**:

$$D\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} D\left[f_n(x)\right]$$

ricordandosi, ad esempio, che:

$$D\left[\frac{1}{1+z}\right] = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

o che:

$$D\left[\frac{1}{z-1}\right] = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

- Ripetere il procedimento negli (ulteriori) altri intervalli assegnati.

## 3.2 Funzioni irrazionali

In questo caso bisognerà utilizzare gli sviluppi notevoli presenti nell'appendice D, sfruttando il prodotto di due serie secondo Cauchy (vedi paragrafo 3.1), ricorrendo al principio di identità dei polinomi e facendo attenzione ad eventuali parità / disparità delle funzioni in gioco.

# Capitolo 4

# Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier viene definita come:

$$\mathscr{F}[f(t), y] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i y t} dt$$

## 4.1 Il calcolo della trasformata di Fourier

Quando viene richiesto il calcolo della trasformata di Fourier di una generica funzione $f(x)$, bisogna applicare la definzione stessa di trasformata di Fourier e calcolare, dunque, l'integrale risultante.
Basterà, dunque, applicare i procedimenti propri del calcolo degli integrali riportati nella sezione 2.2, tenendo a mente le proprietà di linearità dell'integrale, che potrà, così, essere eventualmente scomposto in due o più integrali più semplici[1].
Per quanto riguarda la *parità* della funzione, si consideri che:

- $f(x)$ reale e pari $\rightarrow \mathscr{F}[f(x)]$ reale e pari
- $f(x)$ reale e dispari $\rightarrow \mathscr{F}[f(x)]$ immaginaria e dispari

L'individuare una funzione pari potrebbe semplificare di molto il calcolo dell'integrale, permettendo di ricondursi al solo caso $y > 0$.

Si consideri, nel calcolo di questi integrali, la possibilità (reale!) di utilizzare il **lemma di Jordan**, riportato in appendice B.

[1]Si presti particolare attenzione anche al fatto che, talvolta, la scomposizione di un integrale in due o più integrali porta ad un cambiamento del *tipo* stesso dell'integrale (ad esempio, da integrale di Lebesgue ad integrale calcolabile solo in valore principale)

# Capitolo 5

# Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è definita come:

$$\mathscr{L}[f(t), s] = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

## 5.1 Risoluzione di sistemi di equazioni

Questa tipologia di esercizi consiste nella risoluzione di un problema di due o più equazioni, spesso accompagnate da delle cosiddette *condizioni iniziali*.

Possono essere considerati due casi principali, a seconda del numero di variabili coinvolte:

- Problemi con una sola variabile
- Problemi con due variabili

Si segua il seguente procedimento risolutivo:

- Controllare le equazioni date. Spesso, alcune operazioni come il prodotto di ambo i membri per una costante o la somma (sottrazione) membro a membro, possono profondamente ridurre la difficoltà di calcolo.
- Trasformare le equazioni secondo Laplace, utilizzando le apposite tabelle di trasformazione.
- Sostituire le (eventuali) condizioni iniziali date agli opportuni termini[1]. Una volta trovate le soluzioni del problema, il valore di queste costanti potrà essere agevolmente calcolato.

[1] Per quanto concerne eventuali condizioni iniziali mancanti, si utilizzino delle arbitrarie costanti del tipo $a, b, c \dots$

- Osservare il numero delle variabili coinvolte.
  - Caso **1 variabile**: Risolvere l'equazione nell'unica variabile, eventualmente scomponendo il polinomio ottenuto in fratti semplici, come spiegato nell'appendice C.
  - Caso **2 variabili**: Risolvere il sistema con Cramer (vedi appendice B), ricavando, così, i due polinomi eventualmente da scomporre in fratti semplici.
- Antitrasformare, sempre per via tabellare, i polinomi ottenuti.
- Verificare la correttezza delle soluzioni trovate, imponendo le condizioni iniziali.

# Capitolo 6

# Trasformata Zeta

La trasformata Zeta è definita come:

## 6.1 Successioni definite per ricorrenza

Solitamente, queste tipologie di esercizi consistono nella determinazione del termine generale di una successione definita per ricorrenza da una data legge.[1]

Per la risoluzione di questa tipologia di esercizi, seguire il seguente procedimento:

- Porre:
$$a_n = y(t), \quad n \leq t < (n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Ricondursi al problema (equivalente) che consiste nel risolvere in $[0, +\infty[$ un'opportuna equazione alle differenze in y(t). Ricordarsi, a questo proposito, di "convertire" le condizioni iniziali, ponendo, ad esempio:
$$a_0 \to y(t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t < 1$$

- Porre:
$$Z = Z_1\left[y(t); z\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y(n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

- Calcolare la trasformata zeta dell'equazione data considerando, ad esempio, che:
$$Z_1[y(t+1); z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}} = zZ - a_0 z$$

[1]Questa tipologia di esercizi può anche essere risolta attraverso la trasformata di Laplace, ma in maniera molto più complessa. Quest'ultimo caso non verrà contemplato all'interno di questo manuale.

$$Z_1[y(t+2);z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n-2}} = z^2 Z - a_0 z^2 - a_1 z^2$$

$$Z_1[1;z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$Z_1[(-2)^n;z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^n} = \frac{z}{z+2}, \quad |z| > 2$$

- Risolvere in Z l'equazione ottenuta.
- Poichè la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

è lo sviluppo in serie di Laurent di Z, è possibile ricavare il termine generale $a_n$ come:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Z}{z^{(-n+1)}} dz = \sum_{i=0}^{p} Res\left(\frac{Z}{z^{(-n+1)}}, z_i\right)$$

dove $\gamma$ è una circonferenza centrata in $z_0$ di raggio tale da risultare interna alla corona circolare in cui si ha convergenza assoluta da parte della serie di Laurent ed in cui la funzione somma risulta olomorfa[2].

[2] In pratica si pone il raggio della circonferenza maggiore del polo più distante dal centro

# Capitolo 7

# Distribuzioni

Per le distribuzioni vale la seguente:

$$< f(t), \phi(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt$$

## 7.1 Limiti nel senso delle distribuzioni

### 7.1.1 Il calcolo del limite

Bisogna considerare il fatto che:

$$f_n(t) \overset{\mathscr{D}'}{\rightarrow} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad < f_n(t), \phi(t) > \rightarrow < f(t), \phi(t) >, \quad \forall \quad \phi \in \mathscr{D}.$$

A questo punto si dovrà calcolare il:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t)$$ [1]

Quindi, basterà provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\phi(t)dt$$

Ovvero che sono verificate le ipotesi di Lebesgue del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Dunque, basterà verificare il fatto che:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$$

E, soprattutto, che:

$$\exists g(t) : |f_n(t)\phi(t)| < g(t)$$

[1] Solitamente nullo!

Per trovare una funzione $g(t)$ opportuna, basterà studiare la funzione $f(x)$ ottenuta sostituendo alla n la x e rintracciarne il massimo attraverso lo studio della derivata prima.
Quindi, basterà porre:

$$g(t) = \max(f(x))$$

### 7.1.2 Convergenza alla $\delta$ di Dirac

Talvolta, può essere richiesto di dimostrare che una data successione di funzioni $\beta_n(t)$ converga alla $\delta$ di Dirac.
In questo caso, si ragioni nella seguente maniera:

- Dovrà essere:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

- Solitamente, in questi casi si scopre[2] (miracolosamente!) che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(t)dt = 1$$

- Dunque, si potrà giocare sul fatto che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(t)\phi(0)dt =$$

  ovvero che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(t)[\phi(t) - \phi(0)]dt = 0$$

- Ma (quasi sicuramente), si scoprirà che:

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n(t)[\phi(t) - \phi(0)]dt = 0$$

- Basterà, dunque, verificare le ipotesi di Lebesgue per il passaggio al limite sotto il segno di integrale per terminare l'esercizio.
  Ciò può essere fatto ricorrendo al fatto che la $\beta_n(t)$ è una funzione limitata e che la $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty$ e, dunque, gode della proprietà di Lipschitzianità:

$$|\beta_n(t)| \cdot |\phi(t) - \phi(0)| \leq |\beta_n(t)| \cdot L \cdot |t| \leq |\beta_n(t)| \cdot L \cdot \frac{1}{n}$$

[2] Solitamente si utilizzano delle opportune sostituzioni di variabili, per passare ad un integrale in x.

## 7.2 Trasformata di Fourier di una distribuzione

### 7.2.1 TF di distribuzioni periodiche

Per la risoluzione di questa tipologia di esercizi, si proceda nella seguente maniera:

- Disegnare il grafico della distribuzione $f(t)$ data, ricavandone il periodo T.
- Fare attenzione al fatto che una distribuzione periodica è sempre una distribuzione temperata e, pertanto, ammette *sempre* una trasformata di Fourier.
- Porre:
$$\mathscr{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\frac{n}{T})$$
in virtù del fatto che:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i \frac{nt}{T}}$$
- Calcolare i coefficienti $c_n$[3] come:
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i \frac{nt}{T}}$$

### 7.2.2 TF di distribuzioni aperiodiche

Vale la seguente:
$$\mathscr{F}[f(t)] =< f(t), \mathscr{F}[\phi(t), y]$$

Non vi sono, in questo senso, particolari differenze rispetto al normale metodo di calcolo della trasformata di Fourier per le funzioni.
Si ricordi, semplicemente, che:
$$\mathscr{F}[\delta(t)] = 1$$

[3]Sovente, il calcolo dei coefficienti $c_n$ ci costringe ad imporre la condizione $n \neq 0$. In questo caso andrà calcolato a parte il valore del coefficiente $c_0$.

## 7.3 Derivata nel senso delle distribuzioni

Procedere nella seguente maniera per le distribuzioni **non periodiche**:

- Porre:
$$< f'(t), \phi(t) >= - < f(t), \phi'(t) >$$
- Calcolare quest'ultimo termine come:
$$< f(t), \phi'(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi'(t)dt$$
eventualmente ricorrendo alla formula di integrazione per parti (vedi appendice B).
- Considerare nulli i termini ottenuti del tipo $\phi(\infty)$ o $\phi(-\infty)$ coerentemente con il concetto di distribuzione.
- Sostituire gli eventuali integrali ottenuti del tipo
$$c\int_a^b t\phi(t)dt$$
con
$$c < t\chi_{[a;b]}(t), \phi(t) >$$
- Sostituire gli eventuali termini del tipo: $a\phi(c), \quad a, c \in \mathbb{R}$ con $a < \delta(t-c), \phi(t) >$, in virtù della proprietà della "traslata" (vedi sezione 7.5).
- A questo punto, risulta banale ricavare (eguagliando i membri) la $f'(t)$ cercata (ma attenzione ai segni!).

Per quanto riguarda le distribuzioni periodiche, è possibile, in maniera molto agevole, passare dallo sviluppo in serie di Fourier alla derivata mediante il teorema di derivazione per serie (vedi sezione 3.1)

## 7.4 Trasformata di Laplace per le distribuzioni

In questo caso si procede alla risoluzione del problema assegnato nel modo tradizionale.
Tuttavia, bisognerà tenere a mente che, se f(t) è la distribuzione:

- $$D^n \mathscr{L}(f(t)) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t), s]$$

- $$\mathscr{L}[f^{(n)}(t), s] = s^n \mathscr{L}[f(t), s]$$

- $$\mathscr{L}[f(t-a), s] = e^{-as} \mathscr{L}[f(t), s]$$

- $$\mathscr{L}[e^{at} f(t), s] = \mathscr{L}[f(t), s-a]$$

- $$\mathscr{L}[u(t), s] = \frac{1}{s}$$

- $$\mathscr{L}[\delta^n, s] = s^n$$

## 7.5 Proprietà delle distribuzioni

Talvolta può rivelarsi molto utile l'utilizzo delle seguenti proprietà:

- Traslata di una distribuzione:

$$< f(c), \phi(t) >=< f(t), \phi(t+c) >, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Prodotto di una distribuzione per una funzione:

$$< \gamma f(t), \phi(t) >=< f(t), \gamma\phi(t) >$$

- Distribuzioni e serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = f(t) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} < f_n(t), \phi(t) >=< f(t), \phi(t) >$$

# Appendice A

# Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è definita come:

$$\mathscr{F}[f(t), y] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i y t} dt$$

Essa gode delle seguenti proprietà:

### Linearità

$$\mathscr{F}[\alpha f(t) + \beta g(t), y] = \alpha \mathscr{F}[f(t), y] + \beta \mathscr{F}[g(t), y]$$

### Trasformata della traslata

$$\mathscr{F}[f(t-h), y] = \mathscr{F}[f(t), y] e^{-2\pi i y h t}$$

### Traslata della trasformata

$$\mathscr{F}[f(t), y-h] = \mathscr{F}[e^{2\pi i h t} f(t), y]$$

### Cambiamento di scala

$$\frac{1}{|c|} \mathscr{F}\left[f(t), \frac{y}{c}\right] = \mathscr{F}[f(tc), y]$$

### Parità

$f(x)$ reale e pari $\rightarrow \mathscr{F}[f(x)]$ reale e pari
$f(x)$ reale e dispari $\rightarrow \mathscr{F}[f(x)]$ reale e dispari

## Derivata della trasformata

$$\frac{d^n}{dy^n}\mathscr{F}[f(t), y] = (-2\pi i)^n \mathscr{F}[t^n f(t), y]$$

## Trasformata della convoluzione

$$\mathscr{F}[f(t) * g(t), y] = \mathscr{F}[f(t), y] \cdot \mathscr{F}[g(t), y]$$

## Trasformata aggiunta

$$\mathscr{F}^*[f(t), y] = \mathscr{F}[f(t), -y]$$

## Inversione

$$f(t) = \mathscr{F}^*[\mathscr{F}[f(t), y], t]$$

# Appendice B

# Formule utili

### Esponenziale complesso

$$f(z) = e^z = e^x cos(y + isin(y))$$

### Logaritmo complesso

$$f(z) = log(z) = ln|z| + iArg(z), \quad \alpha \leq Arg(z) \leq \alpha + 2\pi$$

### Potenza complessa

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha log(z)} = e^{\alpha[ln|z| + iArg(z)]}$$

### Formula di De Moivre

$$z^n = |z|^n e^{i\theta z} = |z|^n[cos(n\theta) + isin(n\theta)]$$

### Formula della radice ennesima

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{Arg(z)+2k\pi}{n}}, \quad 0 < k < n - 1$$

### Lemma del cerchio piccolo

Sia f(z) continua in un settore circolare di ampiezza $(\beta - \alpha)$. Allora:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\Gamma_\epsilon} f(z)dz = \lambda_\epsilon i(\beta - \alpha)$$

dove:

$$\lambda_\epsilon = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) \in \mathbb{R}$$

## Lemma del cerchio grande

Sia f(z) continua in un settore circolare di ampiezza $(\beta - \alpha)$. Allora:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\Gamma_R} f(z)dz = \lambda_R i(\beta - \alpha)$$

dove:

$$\lambda_R = \lim_{z\to+\infty} zf(z) \in \mathbb{R}$$

## Lemma di Jordan

Se:

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) = 0$$

in un settore circolare di ampiezza minore di $\pi$ e compreso, con $\mu > 0$ $(\mu < 0)$, nel semipiano superiore (inferiore), allora:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{+\Gamma_R} f(z)e^{i\mu z}dz = 0$$

## Risoluzione di un sistema di due equazioni con Cramer[1]

Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = f_1 \\ x_2 + y_2 = f_2 \end{cases}$$

Sarà:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & y_1 \\ f_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

[1]Il discorso può essere facilmente generalizzato al caso di sistemi con più di due equazioni.

Qualora il $\Delta$ dovesse risultare pari a 0, bisognerà calcolare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa (osservando i minori non nulli ed il loro ordine).
Affinchè il sistema sia possibile, i due ranghi dovranno essere uguali.
Quindi, si dovrà imporre che il determinante della matrice completa sia nullo, ottenendo nuove informazioni ed un nuovo sistema (solitamente, viene "scartata" l'ultima equazione dal sistema di partenza), questa volta risolvibile con i sistemi tradizionali.

## Formula di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

## Limiti

$$\lim_{z\to+\infty} |e^{i\lambda z}| = \lim_{z\to+\infty} |e^{i\lambda Re(z)}| \cdot |e^{-\lambda Im(z)}| = 1 \cdot 0 = 0$$

## Prodotto per serie secondo Cauchy[2]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = A \cdot B$$

## Formula di inversione generale (per il calcolo di integrali attraverso la trasformata di Fourier)

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}[f(t), y] e^{2\pi i y t_0} dy$$[3]

## Formula per la risoluzione degli integrali del tipo: $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{1+x^{\frac{\beta(\alpha+1)}{\alpha+1}}} dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{D[x^{\alpha+1}]}{1+x^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} dx = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} dt$$

[2] Applicabile se le due serie convergono.
[3] Solitamente si sceglie il punto $t_0 = 0$

# Appendice C

# Scomposizione in fratti semplici

Supponiamo di avere una funzione F(s) razionale fratta del tipo:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \quad m < n$$

Allora, sarà possibile *scomporre in fratti semplici* la funzione F(s) nella seguente maniera:

- Trovare i poli della funzione F(s), ovvero gli zeri del denominatore Q(s).
- Supponendo che gli zeri siano gli:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & \text{con molteplicità} & n_1 \\ \alpha_2 & \text{con molteplicità} & n_2 \\ & \cdots & \\ \alpha_r & \text{con molteplicità} & n_r \end{array}$$

con

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

scrivere la$F(s)$come:

$$\begin{aligned} F(s) &= \left( \frac{A_{11}}{s-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(s-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(s-\alpha_1)^{n_1}} \right) + \\ &+ \left( \frac{A_{21}}{s-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(s-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(s-\alpha_2)^{n_2}} \right) + \cdots + \\ &+ \left( \frac{A_{r1}}{s-\alpha_r} + \frac{A_{r2}}{(s-\alpha_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rn_r}}{(s-\alpha_r)^{n_r}} \right) \end{aligned}$$

- Calcolare i *residui* $A_{ij}$ come:

$$A_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \to \alpha_i} D^{(n_i - j)} \left[ (s - \alpha_i)^{n_i} F(s) \right]$$

con:

$$i = 1, 2, 3 \ldots, r \quad j = 1, 2, \ldots, n_i$$

- Nel caso in cui si ha a che fare esclusivamente con poli del primo ordine, il tutto si riduce a:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

dove:

$$A_i = \lim_{s \to \alpha_i} (s - \alpha_i) \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$$

# Appendice D

# Sviluppi notevoli

Si noti come nelle funzioni pari siano nulli tutti i coefficienti del tipo $a_{2k+1}$, mentre in quelli dispari lo siano quelli del tipo $a_{2k}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \\
e^{-\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \\
sin(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} \\
cos(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\
arctan(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}
\end{aligned}
$$

# Appendice E

# Trigonometria

$$
\begin{aligned}
sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\
sinh\theta &= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} &= \frac{1}{i} sin(i\theta) \\
cosh\theta &= \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}
\end{aligned}
$$