Analisi matematica 2		Facsimile
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Sia D la regione del piano definita da

$$D = \{(x,y) \,|\, 1 < x + y < 2, \quad x < y < 2x\}$$

a) Disegnare la regione D e spiegare perchè la funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$$

è integrabile su D.

b) Calcolare

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy$$

(Si consiglia la sostituzione $u = x + y$, $v = y/x$)

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

i) Scrivere l'espressione di rot $\mathbf{F}$ e calcolarne il flusso attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\right\}$$

orientata in modo che la componente della normale lungo l'asse z sia non negativa.

ii) Verificare che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Stokes e utilizzare il teorema per ricalcolare il flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

iii) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una regione ammissibile per il teorema della divergenza, simmetrica rispetto al piano xz. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente da $\partial\Omega$.

3.

a) Trovare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-2)^n$$

b) Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione e^{-x^2}, verificando che converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verificare che si può utilizzare il teorema di integrazione per serie per esprimere l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

come somma di una serie numerica. Calcolare i primi 5 termini della serie.

c) Verificare che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x)$$

è convergente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e definisce una funzione periodica continua, dispari, che si annulla in tutti i punti di ascissa intera. Determinare il periodo T della funzione.

SOLUZIONI

1.

a) La regione D è un quadrilatero (trapezio) intersezione della striscia tra le rette parallele $y = 2 - x$ e $y = 1 - x$ con il settore di piano compreso tra le rette $y = 2x$ e $y = x$.
La funzione è integrabile perchè D è misurabile e f è *continua e limitata* su D.

b) La trasformazione

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y/x \end{cases}$$

mappa il dominio D nel quadrato $Q = (1,2) \times (1,2)$ del piano (u, v). La trasformazione inversa si scrive

$$\begin{cases} x = u/(v+1) \\ y = uv/(v+1) \end{cases}$$

Determinate Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{u}{(v+1)^2}$$

Dunque

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int\int_Q f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 \frac{(v+1)^2}{uv} \frac{u}{(v+1)^2}\, dudv = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v}\, dv = \log 2$$

2.

i)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}\Big(xy\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}\Big) = z\,\mathbf{i} + (1-x)\,\mathbf{k}$$

La superficie è la semisfera con centro nell'origine e raggio unitario che giace nel semispazio delle z positive. Osserviamo che, in ogni punto (x, y, z) *sulla semisfera*, la normale richiesta dal problema è il vettore

$$\mathbf{n} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Il flusso del rotore del campo è allora:

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int\int_\Sigma \big(zx + (1-x)z\big)\, ds = \int\int_\Sigma z\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \pi$$

ii) Per usare il teorema di Stokes, si osserva che il bordo orientato $\partial^+\Sigma$ della superficie è la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorsa una volta in senso *antiorario*. Ponendo

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si ottiene:

$$\int\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\gamma} xy\, dx + x\, dy + yz\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(- \cos t \sin^2 t + \cos^2 t\big)\, dt = \pi$$

iii) Applicando il teoema della divergenza nella regione Ω :

$$\int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e}\, ds = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} 2y\, dxdydz = 0$$

per ragioni di simmetria.

3.

a) Si tratta di una serie di potenze centrata nel punto $x = 2$. Applicando il criterio della radice alla successione $|(-1)^n/n| = 1/n$, si ricava il raggio di convergenza R dalla relazione:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$$

Dunque $R = 1$ e la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x - 2| < 1$, dunque nell'intervallo $(1, 3)$. Nel punto $x = 1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$. Per $x = 3$ abbiamo invece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz.

b) Ponendo $-x^2 = t$ e utilizzando il noto sviluppo di McLaurin dell'esponenziale, si ottiene

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Poiché la serie esponenziale converge per ogni t anche la serie trovata converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Avendo raggio di convergenza infinito, la serie converge totalmente in ogni intervallo di $\mathbb{R}$. Possiamo allora applicare il teorema di integrazione per serie nell'intervallo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{20} - \frac{1}{42} + \frac{1}{116} - ...$$

c) Valendo la stima

$$\frac{1}{n^2}|\sin(n\pi x)| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e poiché la serie numerica di termine generale $1/n^2$ è convergente, la serie data converge *totalmente* e quindi converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Ponendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x)$$

abbiamo che f è una funzione continua perchè limite uniforme di una serie di funzioni continue. Inoltre

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(-n\pi x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x) = -f(x),$$

per cui la funzione è dispari. Allo stesso modo abbiamo

$$f(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi k) = 0,$$

per ogni k intero relativo. Infine, la funzione f è periodica ed il suo periodo è uguale al periodo della funzione trigonometrica $\sin(\pi x)$ (primo termine della serie data); dunque, risolvendo l'equazione $\pi T = 2\pi$, otteniamo $T = 2$.