Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

PRIMA PROVA IN ITINERE (A)

16 novembre 2010

1. (a) Si determini, al variare del parametro *positivo* A, l'insieme Ω_A dei numeri complessi z *che abbiano parte reale positiva* e siano tali che
$$\mathrm{Im}\left(\frac{A}{z} - \frac{\mathrm{Im}z}{\overline{z}}\right) > 0$$
e si rappresenti tale insieme nel piano complesso.

   (b) Rappresentare nel piano complesso il seguente insieme:
$$D_A := \{w \in \mathbb{C} : w = e^z \text{ per qualche } z \in \Omega_A\}.$$

   (c) Stabilire se esistono valori di A per i quali la funzione $f(z) = e^z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ω_A e D_A e in caso affermativo determinare tali valori.

2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + kx_4 \\ x_2' = 2x_1 + (k-1)x_3 + 2x_4 \\ x_3' = 3x_1 + (k^2 - 3k + 2)x_2 + (k-1)x_3 + (2+k)x_4 \end{cases}$$

   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.

   (b) Sia $\bar{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\bar{k}}$ vale 2. Per $k = \bar{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathcal{I}m\ f_k$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_k$ e passante per il punto $P = (5, 2, -4)$.

   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\boldsymbol{v} = (1, 3, 4)^T$ non appartiene all'immagine di f_k.

3. Sia $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione dell'applicazione lineare f_k, definita nell'esercizio precedente, sul sottospazio $x_4 = 0$, vale a dire:
$$\tilde{f}_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire per quale valore di k $\tilde{f}_k$ ammette come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 6$.

   (b) Per tale valore di k cercare gli autovettori di $\tilde{f}_k$.

   (c) Per quali valori del parametro k, $\tilde{f}_k$ ammette una coppia di autovalori complessi coniugati?

   (d) Trovare un valore del parametro k per cui $\tilde{f}_k$ non è diagonalizzabile.

4. Discutere la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità più rango.

6. Discutere le principali condizioni necessarie o sufficienti per la convergenza di una serie numerica.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

PRIMA PROVA IN ITINERE (B)

16 novembre 2010

1. (a) Si determini, al variare del parametro *negativo* A, l'insieme Ω_A dei numeri complessi z *che abbiano parte reale negativa* e siano tali che
$$\mathrm{Im}\left(\frac{A}{z} - \frac{\mathrm{Im} z}{\overline{z}}\right) > 0$$
e si rappresenti tale insieme nel piano complesso.
   (b) Rappresentare nel piano complesso il seguente insieme:
$$D_A := \{w \in \mathbb{C} : w = e^z \text{ per qualche } z \in \Omega_A\}.$$
   (c) Stabilire se esistono valori di A per i quali la funzione $f(z) = e^z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ω_A e D_A e in caso affermativo determinare tali valori.

2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + (k-1)x_4 \\ x_2' = 3x_1 + (k-2)x_3 + 3x_4 \\ x_3' = x_1 + (k^2 - 5k + 6)x_2 + (2-k)x_3 + (4k-7)x_4 \end{cases}$$
   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.
   (b) Sia $\bar{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\bar{k}}$ vale 2. Per $k = \bar{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathcal{I}m\ f_k$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_k$ e passante per il punto $P = (-3, 4, 6)$.
   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\boldsymbol{v} = (1, 5, -1)^T$ non appartiene all'immagine di f_k.

3. Sia $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione dell'applicazione lineare f_k, definita nell'esercizio precedente, sul sottospazio $x_4 = 0$, vale a dire:
$$\tilde{f}_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Stabilire per quale valore di k $\tilde{f}_k$ ammette come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -6$.
   (b) Per tale valore di k cercare gli autovettori di $\tilde{f}_k$.
   (c) Per quali valori del parametro k, $\tilde{f}_k$ ammette una coppia di autovalori complessi coniugati?
   (d) Trovare un valore del parametro k per cui $\tilde{f}_k$ non è diagonalizzabile.

4. Discutere la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

5. Dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge a un numero, detto e, finito e compreso tra 2 e 3.

6. Discutere la forma cartesiana, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

PRIMA PROVA IN ITINERE (C)

16 novembre 2010

1. (a) Si determini, al variare del parametro *positivo* A, l'insieme Ω_A dei numeri complessi z *che abbiano parte reale positiva* e siano tali che
$$\mathrm{Im}\left(\frac{A}{z}+\frac{\mathrm{Im}z}{\overline{z}}\right)>0$$
e si rappresenti tale insieme nel piano complesso.
   (b) Rappresentare nel piano complesso il seguente insieme:
$$D_A := \{w \in \mathbb{C} : w = e^z \text{ per qualche } z \in \Omega_A\}.$$
   (c) Stabilire se esistono valori di A per i quali la funzione $f(z) = e^z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ω_A e D_A e in caso affermativo determinare tali valori.

2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}x_1' = x_1+(k+2)x_4\\x_2' = 2x_1+(k+1)x_3+2x_4\\x_3' = -x_1+(k^2-k-2)x_2+(k+1)x_3-(4+3k)x_4\end{cases}$$
   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.
   (b) Sia $\bar{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\bar{k}}$ vale 2. Per $k=\bar{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathcal{I}m\ f_k$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_k$ e passante per il punto $P=(-2,-5,4)$.
   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\boldsymbol{v} = (-1,5,4)^T$ non appartiene all'immagine di f_k.

3. Sia $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione dell'applicazione lineare f_k, definita nell'esercizio precedente, sul sottospazio $x_4 = 0$, vale a dire:
$$\tilde{f}_k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=f_k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\0\end{pmatrix}.$$
   (a) Stabilire per quale valore di k $\tilde{f}_k$ ammette come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$.
   (b) Per tale valore di k cercare gli autovettori di $\tilde{f}_k$.
   (c) Per quali valori del parametro k, $\tilde{f}_k$ ammette una coppia di autovalori complessi coniugati?
   (d) Trovare un valore del parametro k per cui $\tilde{f}_k$ non è diagonalizzabile.

4. Discutere la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5. Enunciare e dimostrare il Teorema sulla rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.

6. Discutere il concetto di convergenza di una successione, esponendo i principali risultati al riguardo.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

PRIMA PROVA IN ITINERE (D)

16 novembre 2010

1. (a) Si determini, al variare del parametro *negativo* A, l'insieme Ω_A dei numeri complessi z *che abbiano parte reale negativa* e siano tali che
$$\mathrm{Im}\left(\frac{A}{z} + \frac{\mathrm{Im} z}{\overline{z}}\right) > 0$$
e si rappresenti tale insieme nel piano complesso.

   (b) Rappresentare nel piano complesso il seguente insieme:
$$D_A := \{w \in \mathbb{C} : w = e^z \text{ per qualche } z \in \Omega_A\}.$$

   (c) Stabilire se esistono valori di A per i quali la funzione $f(z) = e^z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ω_A e D_A e in caso affermativo determinare tali valori.

2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1' = -x_1 + (k+2)x_4 \\ x_2' = 3x_1 + (k+3)x_3 + 3x_4 \\ x_3' = 2x_1 + (k^2+2k-3)x_2 + (k+3)x_3 + (k+5)x_4 \end{cases}$$

   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.

   (b) Sia $\bar{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\bar{k}}$ vale 2. Per $k = \bar{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathcal{I}m\ f_k$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_k$ e passante per il punto $P = (-7, 3, 0)$.

   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\boldsymbol{v} = (-1, 5, 1)^T$ non appartiene all'immagine di f_k.

3. Sia $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione dell'applicazione lineare f_k, definita nell'esercizio precedente, sul sottospazio $x_4 = 0$, vale a dire:
$$\tilde{f}_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire per quale valore di k $\tilde{f}_k$ ammette come autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -6$ e $\lambda_3 = 12$.

   (b) Per tale valore di k cercare gli autovettori di $\tilde{f}_k$.

   (c) Per quali valori del parametro k, $\tilde{f}_k$ ammette una coppia di autovalori complessi coniugati?

   (d) Trovare un valore del parametro k per cui $\tilde{f}_k$ non è diagonalizzabile.

4. Discutere la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

5. Dimostrare che una serie assolutamente convergente è convergente.

6. Discutere il concetto di diagonalizzabilità di una matrice quadrata, esponendo i principali risultati al riguardo.

PRIMA PROVA IN ITINERE (prova A)

16 novembre 2010

1. (a) Si determini, al variare del parametro *positivo* A, l'insieme Ω_A dei numeri complessi z *che abbiano parte reale positiva* e siano tali che
$$\mathrm{Im}\left(\frac{A}{z} - \frac{\mathrm{Im}z}{\overline{z}}\right) > 0$$
e si rappresenti tale insieme nel piano complesso.

   (b) Rappresentare nel piano complesso il seguente insieme:
$$D_A := \{w \in \mathbb{C} : w = e^z \text{ per qualche } z \in \Omega_A\}.$$

   (c) Stabilire se esistono valori di A per i quali la funzione $f(z) = e^z$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ω_A e D_A e in caso affermativo determinare tali valori.

2. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:
$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + kx_4 \\ x_2' = 2x_1 + (k-1)x_3 + 2x_4 \\ x_3' = 3x_1 + (k^2 - 3k + 2)x_2 + (k-1)x_3 + (2+k)x_4 \end{cases}$$

   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.

   (b) Sia $\bar{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\bar{k}}$ vale 2. Per $k = \bar{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathcal{I}m\ f_k$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_k$ e passante per il punto $P = (5, 2, -4)$.

   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\boldsymbol{v} = (1, 3, 4)^T$ non appartiene all'immagine di f_k.

3. Sia $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione dell'applicazione lineare f_k, definita nell'esercizio precedente, sul sottospazio $x_4 = 0$, vale a dire:
$$\tilde{f}_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire per quale valore di k $\tilde{f}_k$ ammette come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 6$.

   (b) Per tale valore di k cercare gli autovettori di $\tilde{f}_k$.

   (c) Per quali valori del parametro k, $\tilde{f}_k$ ammette una coppia di autovalori complessi coniugati?

   (d) Trovare un valore del parametro k per cui $\tilde{f}_k$ non è diagonalizzabile.

4. Discutere la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità più rango.

6. Discutere le principali condizioni necessarie o sufficienti per la convergenza di una serie numerica.

SOLUZIONI PROVA A

1. Sia $z = x + iy$ e sia $x > 0$.

   (a) La disequazione diventa:

$$\text{Im}\left(\frac{A}{x+iy} - \frac{y}{x-iy}\right) > 0$$
$$\text{Im}\left(\frac{Ax - iAy - xy - iy^2}{x^2+y^2}\right) > 0$$
$$\frac{-Ay - y^2}{x^2+y^2} > 0$$
$$y^2 + Ay < 0$$

   La cui soluzione è $-A < y < 0$. Quindi $\Omega_A = \{z = x + iy : x > 0 \text{ e } -\text{A} < \text{y} < 0\}$.

   (b) Poiché $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ l'insieme D_A è formato da numeri complessi di modulo $e^x > 1$ e fase y strettamente compresa tra $-A$ e 0. Poiché x deve essere positivo, tali condizioni indiduano l'insieme dei numeri complessi di modulo strettamente maggiore di uno e di fase come sopra. In particolare se $A \geq 2\pi$, D_A coincide con $\overline{B_1(0)}^c$, cioè con il complementare della palla chiusa di centro $z = 0$ e raggio $r = 1$. In caso contrario D_A è quel sottoinsieme di $\overline{B_1(0)}^c$ costituito dai punti di fase strettamente compresa tra $-A$ e 0.

   (c) Per come l'insieme D_A è definito, la funzione $f(z) = e^z$ $f : \Omega_A \to D_A$ è suriettiva.
   Verifichiamo se $f(z)$ è anche iniettiva: siano $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_1, z_2 \in \Omega_A$. Allora: $e^{z_1} = e^{z_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2 + 2k\pi$ per un opportuno intero k. Quindi $f(z)$ è iniettiva se $e^{z_1} = e^{z_2} \Longrightarrow z_1 = z_2$, cioè se anche $y_1 = y_2$, il che si verifica solo se $A < 2\pi$.

2. la forma matriciale dell'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 0 & k-1 & 2 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 & k+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

   (a) Le dimensioni del nucleo e dell'immagine, per il teorema di nullità più rango, sono legate dalla relazione DIM $\mathcal{I}m\ f_k +$ DIM $\mathcal{K}er\ f_k = 4$.
   Occorre quindi determinare il rango della matrice al variare del parametro k che sarà un numero compreso tra 1 e 3.
   Se si considera il minore formato dalle prime tre colonne (è sempre opportuno considerare sottomatrici con molti zeri e pochi elementi dipendenti dal parametro), si ottiene:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k-1 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 \end{pmatrix} = -(k-1)^2(k-2) \neq 0 \qquad \text{se } k \neq 1 \text{ e } k \neq 2.$$

   Caso $k \neq 1$ *e* $k \neq 2$. In questo caso la matrice contiene un minore di ordine tre invertibile, quindi rk $f_k = 3$, DIM $\mathcal{I}m\ f_k = 3$, e DIM $\mathcal{K}er\ f_k = 1$.
   Per trovare una base di $\mathcal{I}m\ f_k$, basta considerare che lo spazio immagine coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^3$. La base più semplice che si possa considerare è la base canonica:

$$\text{Base di } \mathcal{I}m\ f_k : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo di f_k è lo spazio monodimensionale formato dai vettori soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 0 & k-1 & 2 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 & k+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo x_4 come variabile libera, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -kx_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Una possibile base è (scegliendo $x_4 = 1$) la seguente:

$$\text{Base di } \mathcal{K}er\ f_k\ :\ \left\{ \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso $k = 1$. In questo caso la matrice di rappresentazione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché due colonne sono nulle e due sono identiche, il rango vale 1, pertanto DIM $\mathcal{I}m\ f_1 = 1$, DIM $\mathcal{K}er\ f_1 = 3$. Può essere scelto come base per $\mathcal{I}m\ f_1$ l'unico vettore colonna indipendente:

$$\text{Base di } \mathcal{I}m\ f_1\ :\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo di f_k è lo spazio tridimensionale formato dai vettori soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo x_4 come variabile libera, (x_2 e x_3 lo sono necessariamente), si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Una possibile base è la seguente:

$$\text{Base di } \mathcal{K}er\ f_1\ :\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso $k = 2$. In questo caso la matrice di rappresentazione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, (la terza riga è la somma delle prime due). Pertanto DIM $\mathcal{I}m\ f_2 = 2$, DIM $\mathcal{K}er\ f_2 = 2$. Di tre colonne non nulle due saranno indipendenti e formeranno una base per $\mathcal{I}m\ f_1$. Scegliendo, per esempio la prima e la terza colonna:

$$\text{Base di } \mathcal{I}m\ f_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo di f_k è lo spazio bidimensionale formato dai vettori soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo x_4 come variabile libera, (x_2 lo è necessariamente), si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 2x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Una possibile base è la seguente:

$$\text{Base di } \mathcal{K}er\ f_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) lo spazio immagine è bidimensionale solo se $k = 2$. Due vettori indipendenti di $\mathcal{I}m\ f_2$ sono i vettori della base determinata precedentemente. Un vettore ortogonale $\boldsymbol{v}$ a questi vettori è il loro prodotto vettoriale:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

il cui modulo è $\sqrt{3}$. Un versore è quindi:

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il piano parallelo a $\mathcal{I}m\ f_2$ e passante per il punto $P = (5, 2, -4)$ è individuato dai vettori $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ che soddisfano alla relazione $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{OP}) = 0$, vale a dire:

$$-1(x-5) - 1(y-2) + 1(z+4) = 0$$

ovvero:

$$x + y - z = 11$$

(c) Se $k \neq 1$ e $k \neq 2$, $\mathcal{I}m\ f_k = \mathbb{R}^3$.
Tutti i vettori, compreso $\boldsymbol{v} = (1, 3, 4)^T$ appartengono a $\mathcal{I}m\ f_k$.

Restano da discutere solo i casi $k = 1$ e $k = 2$. Occorre vedere se $\boldsymbol{v}$ è generato da i vettori della base di $\mathcal{I}m\ f_k$.

Sia $k = 2$.
Vado a considerare il rango della matrice formata da $\boldsymbol{v}$ e i due vettori della base $\mathcal{I}m\ f_2$. Poiché:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

risulta che il rango vale 2, quindi $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{I}m\ f_2$, pertanto $\boldsymbol{v} \in \mathcal{I}m\ f_2$.

Sia $k = 1$.
$\boldsymbol{v} \notin \mathcal{I}m\ f_1$ perchè non è proporzionale all'unico vettore della base, cioè $(1, 2, 3)^T$.

3. la forma matriciale dell'applicazione lineare $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k-1 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

(a) Il modo più semplice di procedere è considerare che la traccia della matrice è uguale alla somma degli autovalori: Tr $(\tilde{f}_k) = k = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$.
Altrimenti, si poteva considerare l'equazione agli autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & k-1 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[-\lambda(k-1-\lambda) - (k-1)^2(k-2)\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k-1)^2(k-2)\right] = 0$$

da cui si evince che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ è soluzione $\forall k$. L'equazione di secondo grado in λ nella parentesi quadra deve avere soluzioni $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 6$. In generale, se x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora $b = -a(x_1 + x_2)$. Nel nostro caso: $k - 1 = \lambda_2 + \lambda_3 = 3$, quindi $k = 4$.

(b) Se $k = 4$, la matrice rappresentativa di $\tilde{f}_4$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 6$.
Determiniamo gli autovettori.

Caso $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo z come variabile indipendente, la soluzione è:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{scelto } z = 3 \text{ un possibile autovettore è } \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Caso $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo z come variabile indipendente, la soluzione è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{scelto } z = 1 \text{ un possibile autovettore è } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Caso $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo y come variabile indipendente, la soluzione è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \text{scelto } y = 1 \text{ un possibile autovettore è } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Come abbiamo già visto, l'equazione agli autovalori è:

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k-1)^2(k-2)\right] = 0$$

Si ha una coppia di autovalori complessi coniugati se il discriminante dell'equazione di secondo grado che compare nella parentesi quadra è minore di zero:

$$\Delta = (k-1)^2 - 4(k-1)^2(k-2) = (k-1)^2(4k-7) < 0 \quad \Longrightarrow \quad k < \frac{7}{4}$$

(d) L'esercizio chiede di trovare un valore di k per cui $\tilde{f}_k$ non sia diagonalizzabile.
Risolvendo l'equazione agli autovalori si ha:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{k-1 \pm |k-1|\sqrt{4k-7}}{2}.$$

$\lambda_2 = \lambda_3$ quando $\Delta = 0$ cioè quando $k = 1$ oppure $k = 7/4$. Per tali valori di k si ha un autovalore con molteplicità geometrica doppia. In tal caso è possibile che la molteplicità geometrica sia diversa (minore) di quella geometrica implicando la non diagonalizzabilità di $\tilde{f}_k$.

Caso $k = 1$.
Si ha: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. l'equazione agli autovettori risulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Poiché la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica, $\tilde{f}_1$ è diagonalizzabile.

Caso $k = \frac{7}{4}$.
Si ha: $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{8}$. l'equazione agli autovettori risulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ 3 & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è (scelta z come variabile libera):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Poiché la molteplicità algebrica non coincide con la molteplicità geometrica, $\tilde{f}_{7/4}$ non è diagonalizzabile.

(non richiesto dall'esercizio) Esiste anche la possibilità che per qualche altro valore di k, $\tilde{f}_k$ non sia diagonalizzabile. Infatti, un autovalore ha molteplicità doppia anche quando $\lambda_2 = \lambda_1$ o $\lambda_3 = \lambda_1$.
posto $k > \frac{7}{4}$ l'equazione in k è:

$$\begin{aligned} &\frac{k-1 \pm (k-1)\sqrt{4k-7}}{2} = 1 \\ &\pm\sqrt{4k-7} = \frac{2}{k-1} - 1 \\ &4k - 7 = \left(\frac{3-k}{k-1}\right)^2 \\ &k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0 \end{aligned}$$

che è fattorizzabile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &k^3 - 4k^2 + 4k + 2k - 4 = 0 \\ &k(k-2)^2 - 2(k-2) = 0 \\ &(k-2)(k^2 - 2k + 2) = 0 \end{aligned}$$

Questa equazione ha come unica soluzione $k = 2$.

Sia $k = 2$. Si ha: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$. L'equazione agli autovettori per $\lambda_{1,2} = 1$ risulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è (scelta z come variabile libera):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Poiché la molteplicità algebrica non coincide con la molteplicità geometrica, $\tilde{f}_2$ non è diagonalizzabile.

4. La serie è a termini positivi (si noti che l'argomento della funzione seno è compreso tra 0 e 1). Sia a_n il termine generale della serie.
Per ogni $n \geq 1$, considerato che $\sin 1/n < 1$, si ha:

$$a_n < \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

Dimostro, mediante il criterio della radice, la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

perchè n^n è un infinito di ordine superiore rispetto a $n!$ (oppure per il criterio del rapporto per successioni).

Infine, $\sum_n^{+\infty} a_n$ converge per il criterio del confronto.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Seconda prova in itinere

3 febbraio 2011

1. Determinare il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in $x_0 \to 0$, della funzione
$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
Successivamente calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il primo termine dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione
$$g(x) = f(x) - \log(1 - \alpha x^2) - 1.$$

2. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right).$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi.

3. Si considerino le regioni di piano delimitate dal grafico della funzione
$$f(x) = e^x \log\left(e^{2x} - 1\right),$$
dagli assi coordinati e dalla retta $x = 1$. Stabilire quali tra queste hanno area finita e calcolare tali aree.

4. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio:
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^5}{x}\left(e^{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}} - 1\right)\log\left[\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]\,\mathrm{d}x.$$

5. Dimostrare che una funzione è derivabile in un punto x_0 se e solo se essa è ivi differenziabile.

6. Discutere il concetto di integrale inferiore ed enunciare i risultati più significativi al riguardo.

Seconda prova in itinere-soluzioni

3 febbraio 2011

1. Determinare il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in $x_0 \to 0$, della funzione
$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
Successivamente calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il primo termine dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione
$$g(x) = f(x) - \log(1 - \alpha x^2) - 1.$$

Soluzione. Vale, per $x \to 0$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$
Il polinomio richiesto è quindi $P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$. Si ha allora, sempre per $x \to 0$:
$$\begin{aligned}g(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) - \left(-\alpha x^2 - \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)\right) - 1 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5}{24} + \frac{\alpha^2}{2}\right)x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$
Ne segue che, per $\alpha \neq -1/2$ il termine dominante nello sviluppo di g per $x \to 0$ è $-(\alpha + \frac{1}{2})x^2$. Se invece $\alpha = -1/2$ il termine di grado due si annulla e il termine dominante è il successivo, cioè $\frac{1}{3}x^4$.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right).$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi.

Soluzione. La funzione è definita se e solo se $x \neq 1$. Si ha:
$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$
In particolare f ha una discontinuità a salto nel punto $x = 1$ e, inoltre, la retta $y = \pi/4$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to \pm + \infty$.

Per quanto riguarda il segno di f, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se il suo argomento è positivo, cioè se e solo se $x > 1$ oppure $x < -2$. f è negativa per $x \in (-2, 1)$ e inoltre $f(-2) = 0$.

Calcoliamo la derivata di f per $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2} \frac{x - 1 - x - 2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2 + (x+2)^2}$$
$$= -\frac{3}{2x^2 + 2x + 5}.$$

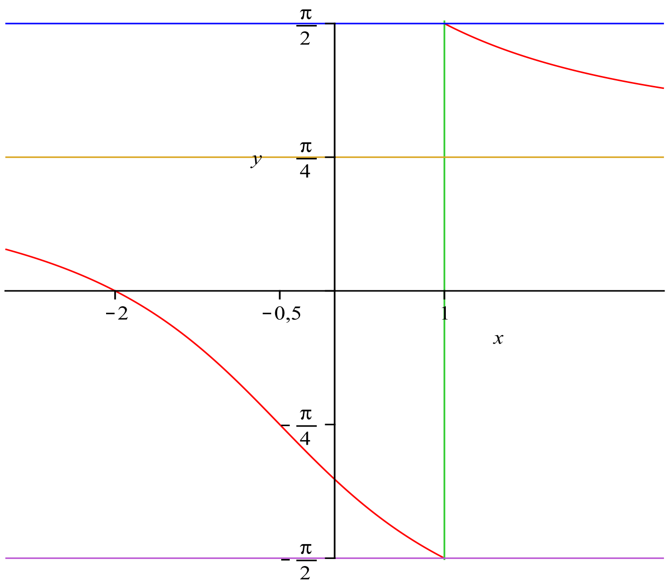
Tale derivata è sempre negativa. Dunque (si ricordi che f non è definita in $x = 1$) la funzione è decrescente negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Vale inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f'(x) = -\frac{1}{3}.$$

Calcoliamo infine la derivata seconda. Si ha, sempre per $x \neq -1$:

$$f''(x) = 6 \frac{2x + 1}{(2x^2 + 2x + 5)^2}.$$

Dunque $f''(x) > 0$ per $x \in (-1/2, 1)$ e per $x > 1$ ed è dunque convessa in tali intervalli, mentre $f''(x) < 0$ per $x < -1/2$ ed è dunque concava in tale intervallo. Il punto $x = -1/2$ è un punto di flesso. In conclusione il grafico della funzione è il seguente.



3. Si considerino le regioni di piano delimitate dal grafico della funzione

$$f(x) = e^x \log\left(e^{2x} - 1\right),$$

dagli assi coordinati e dalla retta $x = 1$. Stabilire quali tra queste hanno area finita e calcolare tali aree.

Soluzione. La funzione è definita per $x > 0$, ed è positiva se e solo se $x > (\log 2)/2$. Inoltre $f(x) \to -\infty$ se $x \to 0^+$ e $f(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$. Tra le regioni individuate dalle curve indicate dal testo, la regione $D_1 := \left\{x \in \left[\frac{\log 2}{2}, 1\right], y \in [0, f(x)]\right\}$ ha chiaramente area finita. Tra le altre, quanto detto sopra riguardo a segno e limiti di f implica che l'unica altra regione che potrebbe avere area finita è

$$D_2 := \left\{x \in \left[0, \frac{\log 2}{2}\right], y \in [f(x), 0]\right\}.$$

Essa ha area finita se e solo se la funzione f è integrabile (in senso generalizzato) nell'intervallo $(0, (\log 2)/2)$. La funzione, come già notato, è singolare per $x \to 0^+$ e non vi sono altre singolarità. Vale la formula

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \log(2x).$$

La funzione è quindi integrabile nell'intervallo in questione e dunque l'area di D_2 è finita.

Dobbiamo quindi calcolare le aree di D_1 e di D_2. A questo fine calcoliamo una primitiva di f. Integrando per parti si ha:

$$\int e^x \log\left(e^{2x} - 1\right)\, \mathrm{d}x = e^x \log\left(e^{2x} - 1\right) - 2\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1}\, \mathrm{d}x.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale effettuando la sostituzione $e^x = t$. Si ha (si ricordi che $x > 0$ nella regione in questione, quindi $e^x - 1 > 0$, quindi non sono necessari i moduli nei logaritmi che appaiono qui sotto):

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{t^2 - 1}\, \mathrm{d}t \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right) \mathrm{d}t \\
&= t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + c \\
&= e^x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + c.
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato quanto segue:

$$\int e^x \log\left(e^{2x} - 1\right)\, \mathrm{d}x = e^x \log\left(e^{2x} - 1\right) - 2e^x - \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + c.$$

Le precedenti considerazioni riguardo al segno di f e la definizione di integrale improprio mostrano allora che

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(D_1) &= \int_{(\log 2)/2}^{1} e^x \log\left(e^{2x} - 1\right)\, \mathrm{d}x = \\
&= e\log(e^2 - 1) - 2e + \log\left(\frac{e+1}{e-1}\right) + 2\sqrt{2} - \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(D_2) &= -\int_0^{(\log 2)/2} e^x \log\left(e^{2x}-1\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{(\log 2)/2} e^x \log\left(e^{2x}-1\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2}+\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[e^\varepsilon\log\left(e^{2\varepsilon}-1\right)-2e^\varepsilon-\log\left(\frac{e^\varepsilon-1}{e^\varepsilon+1}\right)\right] = \\
&= 2\sqrt{2}+\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[(e^\varepsilon+1)\log(e^\varepsilon+1)-2e^\varepsilon+(e^\varepsilon-1)\log(e^\varepsilon-1)\right] \\
&= 2\sqrt{2}+\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)+2\log 2-2,
\end{aligned}$$

dove si è usato il limite notevole $x\log x\to 0$ se $x\to 0^+$.

4. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^5}{x}\left(e^{\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}-1\right)\log\left[\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. La funzione integranda f ha una singolarità in $x=0$. Non ve ne sono altre: in effetti sia l'esponenziale che il logaritmo che appaiono nell'espressione di f sono ben definiti e continui per ogni $x\geq 0$. Analizziamo il comportamento di f per $x\to 0$. Si ha, dato che $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\to 0$ se $x\to 0^+$:

$$f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\log(\cos 1)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{\log(\cos 1)}{\sqrt{x}}.$$

Ciò mostra prima di tutto che f è positiva in un intorno destro dell'origine. E' possibile dunque applicare il criterio del confronto asintotico e concludere che la funzione è ivi integrabile.

Analizziamo ora il comportamento di f a $+\infty$. Si ha, dato che $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\to 0$ e $\frac{1}{1+x^2}\to 0$ se $x\to+\infty$:

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^5+1}{x}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\log\left(1-\frac{1}{2(1+x^2)^2}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} -x^4\frac{1}{x^{3/2}}\frac{1}{2(1+x^2)^2} \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Ciò mostra prima di tutto che f è negativa in un intorno di $+\infty$. E' possibile dunque applicare il criterio del confronto asintotico e concludere che la funzione è ivi integrabile.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 18/2/2011 (A)

1. Data la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & -a \\ a & a & 1-2a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare per quali valore del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile.
   (b) Per $a = 1$ trovare una base dello spazio ortogonale all'autospazio di A.

2. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione
$$f_b(x) = \cos\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}\log(1-3x) - x}.$$
Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = xe^{\frac{4}{\log x}}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}.$$

5. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

6. Discutere la forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 18/2/2011 (B)

1. Data la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -a \\ a & a & -1-2a \\ a & 0 & -1-a \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare per quali valore del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile.
   (b) Per $a = -1$ trovare una base dello spazio ortogonale all'autospazio di A.

2. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione
$$f_b(x) = \cos\left(\frac{3x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{3}\log(1+3x) - x}.$$
   Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = xe^{\frac{3}{\log x}}.$$
   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{\sin x(\cos x - 2)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}.$$

5. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

6. Discutere la forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 18/2/2011 (C)

1. Data la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 2+a & 0 & -a \\ a & a & 2-2a \\ a & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare per quali valore del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile.
   (b) Per $a = 2$ trovare una base dello spazio ortogonale all'autospazio di A.

2. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione
$$f_b(x) = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\log(1+2x) - x}.$$
   Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = xe^{\frac{2}{\log x}}.$$
   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{\sin x(\cos x - 3)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}.$$

5. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

6. Discutere la forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 18/2/2011 (D)

1. Data la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & -a \\ a & a & -2-2a \\ a & 0 & -2-a \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare per quali valore del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile.
   (b) Per $a = -2$ trovare una base dello spazio ortogonale all'autospazio di A.

2. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione
$$f_b(x) = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}\log(1-2x) - x}.$$
   Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = xe^{\frac{1}{\log x}}.$$
   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{\sin x(\cos x - 4)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}.$$

5. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

6. Discutere la forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi.

Soluzione della versione C

18 febbraio 2011

1. Data la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 2+a & 0 & -a \\ a & a & 2-2a \\ a & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare per quali valore del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile.
   (b) Per $a = 2$ trovare una base dello spazio ortogonale all'autospazio di A.

   Soluzione.

   (a) Il polinomio caratteristico in forma fattorizzata è
$$P(\lambda) = (a-\lambda)(2-\lambda)^2.$$
   Pertanto gli autovalori sono sono $\lambda_1 = a$, $\lambda_{2,3} = 2$. Se $a \neq 2$ quindi la matrice è diagonalizzabile se l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 2.
   Poiché i suddetti autovettori sono soluzione del sistema omogeneo:
$$\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ a & a-2 & 2-2a \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   la matrice ha rango 2 se $a \neq 0$ e rango 1 se $a = 0$. Quindi, nel caso $a \neq 2$, la matrice è diagonalizzabile soltanto se $a = 0$.
   Se $a = 2$ si ha un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3, esiste pertanto un unico autospazio formato da vettori soluzioni del sistema omogeneo:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   la cui soluzione è $x = z$ e y qualsiasi cosicché l'autospazio relativo ha dimensione 2. Dunque anche in tal caso la matrice non è diagonalizzabile.

   (b) Dal punto precedente sappiamo che, se $a = 2$, si ha un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3, mentre la molteplicità geometrica è 2 e una possibile base di autovettori è:
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Lo spazio ortogonale al sottospazio è lo spazio monodimensionale generato dal vettore
$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione

$$f_b(x) = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\log(1+2x) - x}.$$

Determinarne il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$.

Soluzione. Valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
1 - x + \frac{1}{2}\log(1+2x) &= 1 - x + \frac{1}{2}\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\
&= 1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\
\sqrt[3]{1 - x + \frac{1}{2}\log(1+2x)} &= \sqrt[3]{1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \\
&= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3); \\
\cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= 1 - 2x^2 + o(x^3); \\
f_b(x) &= 1 - 2x^2 - 2 + bx^2 + 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3) \\
&= \left(b - 2 - \frac{1}{3}\right)x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi il primo termine non nullo nello sviluppo richiesto è $\left(b - \frac{7}{3}\right)x^2$ se $b \neq \frac{7}{3}$, mentre esso è $\frac{4}{9}x^3$ se $b = \frac{7}{3}$.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = xe^{\frac{2}{\log x}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x > 0$, $x \neq 1$. Si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. La funzione è chiaramente positiva ove definita. Non vi sono intersezioni con gli assi coordinati. La retta $x = 1$ è asintoto verticale destro per f. Per verificare l'eventuale esistenza di asintoti obliqui, notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{\log x}} = 1$$

Verifichiamo se, per un opportuno $q \in \mathbb{R}$, la retta $y = x + q$ è asintoto obliquo per f. Si ha:

$$f(x) - x = x\left(e^{\frac{2}{\log x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\frac{x}{\log x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Dunque non vi è alcun asintoto obliquo. La funzione è derivabile ove definita, e in tale dominio si ha:

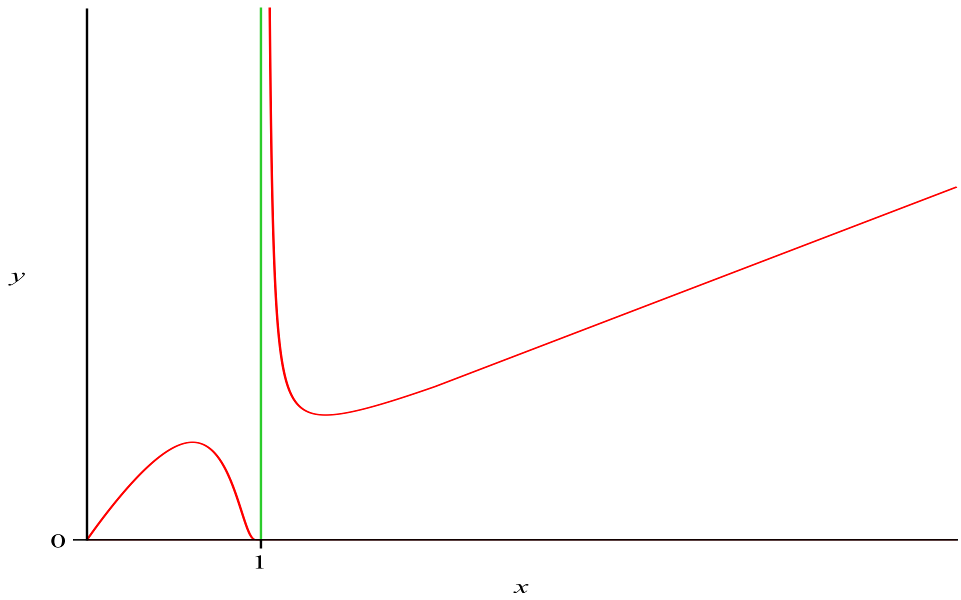
$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log x}}\left[1 - \frac{2}{(\log x)^2}\right].$$

Ne segue allora che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, e che $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$. La derivata si annulla nei punti $x = e^{\pm\sqrt{2}}$. Si vede inoltre che $f'(x) > 0$ se $x \in (0, e^{-\sqrt{2}})$ e se $x > e^{\sqrt{2}}$: in tali intervalli la funzione è crescente. Inoltre $f'(x) < 0$ se $x \in (e^{-\sqrt{2}}, 1)$ e se $x \in (1, e^{\sqrt{2}})$: in tali intervalli la funzione è decrescente. Quindi $x = e^{-\sqrt{2}}$ è punto di massimo relativo, mentre $x = e^{\sqrt{2}}$ è punto di minimo relativo. Le precedenti considerazioni sui limiti di f implicano che tali punti non sono punti di estremo assoluto.

Calcoliamo infine la derivata seconda, definita sullo stesso insieme di definizione di f e f'. Vale:

$$f''(x) = \frac{2e^{\frac{2}{\log x}}}{x(\log x)^4}\left[2 + 2\log x - (\log x)^2\right].$$

Si vede immediatamente che la derivata seconda si annulla nei punti $x = e^{1\pm\sqrt{3}}$. E' facile verificare che $e^{-\sqrt{2}} < e^{1-\sqrt{3}} < 1 < e^{\sqrt{2}} < e^{1+\sqrt{3}}$. Si vede anche che $f''(x) > 0$ se $x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1)$ e se $x \in (1, e^{1+\sqrt{3}})$: in tali intervalli la funzione è convessa. Inoltre $f''(x) < 0$ se $x \in (0, e^{1-\sqrt{3}})$ e se $x > e^{1+\sqrt{3}}$: in tali intervalli la funzione è concava. I punti $x = e^{1\pm\sqrt{3}}$ sono dunque punti di flesso. In conclusione il grafico qualitativo della funzione è il seguente (il flesso in $x = e^{1+\sqrt{3}}$ non è ben visibile nel grafico ma è tuttavia presente).



4. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x(\cos x - 3)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}.$$

Soluzione. Viene chiesta una sola primitiva della funzione assegnata, e quindi per comodità fisseremo sempre uguale a zero la costante arbitraria che compare in ogni calcolo di primitica. Con la sostituzione $\cos x = t$ si ottiene

$$\int \frac{\sin x(\cos x - 3)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}\,dx = \int \frac{\sin x(\cos x - 3)}{2 - (\cos x)^2 - (\cos x)^3}\,dx = -\int \frac{t-3}{2 - t^2 - t^3}\,dt.$$

Il polinomio a denominatore si scompone così: $2 - t^2 - t^3 = (1-t)(t^2+2t+2)$. Con la nota tecnica di scomposizione in fratti semplici si ottiene allora:

$$-\frac{t-3}{2-t^2-t^3} = \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{t-1} + \frac{2t+11}{t^2+2t+2}\right).$$

È chiaro che una primitiva di $\frac{2}{t-1}$ è $2\log|t-1|$. Notiamo poi che

$$\frac{2t+11}{t^2+2t+2} = \frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{9}{1+(t+1)^2}$$

così che vale

$$\begin{aligned}\int \frac{2t+11}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t &= \int \left(\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{9}{1+(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \log(t^2+2t+2) + 9\arctan(t+1).\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x(\cos x - 3)}{(\sin x)^2 - (\cos x)^3 + 1}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t-3}{2-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}\int\left(-\frac{2}{t-1} + \frac{2t+11}{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{5}\log|t-1| + \\ &+ \frac{1}{5}\log(t^2+2t+2) + \frac{9}{5}\arctan(t+1) \\ &= -\frac{2}{5}\log(1-\cos x) + \\ &+ \frac{1}{5}\log((\cos x)^2 + 2\cos x + 2) + \frac{9}{5}\arctan(\cos x + 1)\end{aligned}$$

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 28/6/2011 (A)

1. Si consideri la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare il rango di A.
   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di A. Scrivere l'equazione di tali insiemi in forma cartesiana, precisandone la natura geometrica.
   (c) Determinare autovalori e autovettori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x - \sqrt[7]{1 + 7x}}}{xe^x}, \quad x > 0.$$
   (a) Mostrare che essa è ben definita per $|x|$ sufficientemente piccolo e diverso da zero.
   (b) Determinare i primi due termini non nulli nello sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = x\frac{3 - 2\log x}{2 - \log x}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x^{3/2}}.$$
   (a) Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette $x = 1$ e $x = 4$.
   (b) Studiare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione e le proprietà di monotonia della funzione
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.

6. Discutere il concetto di integrale generalizzato per funzioni non limitate o definite su intervalli non limitati.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 28/6/2011 (B)

1. Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare il rango di A.

   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di A. Scrivere l'equazione di tali insiemi in forma cartesiana, precisandone la natura geometrica.

   (c) Determinare autovalori e autovettori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x - \sqrt[5]{1 + 5x}}}{xe^x}, \quad x > 0.$$

   (a) Mostrare che essa è ben definita per $|x|$ sufficientemente piccolo e diverso da zero.

   (b) Determinare i primi due termini non nulli nello sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x\frac{1 - \log x}{2 - \log x}.$$

   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + 2\sqrt{x})}{x^{3/2}}.$$

   (a) Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Studiare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione e le proprietà di monotonia della funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.

6. Discutere il concetto di integrale generalizzato per funzioni non limitate o definite su intervalli non limitati.

Soluzione della versione B

18 febbraio 2011

1. Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare il rango di A.

   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di A. Scrivere l'equazione di tali insiemi in forma cartesiana, precisandone la natura geometrica.

   (c) Determinare autovalori e autovettori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) Il minore

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero. Dunque il rango è almeno pari a due. Inoltre si vede immediatamente che la seconda e la terza riga della matrice A sono proporzionali (si può anche verificare altrettanto immediatamente che $\det A = 0$), dunque il rango è due.

(b) Dal punto precedente sappiamo che l'immagine è un sottospazio di dimensione due, dunque un piano (passante per l'origine). Esso è generato (ad esempio) dai vettori rappresentati dalla prima e dalla seconda colonna di A. Dal Teorema di nullità più rango sappiamo inoltre che il nucleo è un sottospazio di dimensione uno, dunque una retta (passante per l'origine). Per determinare l'equazione cartesiana di tali luoghi geometrici, notiamo dapprima che un vettore ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ rappresentati dalle prime due colonne di A è $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$, che ha componenti $(0, -6, 9)$. Semplificando, otteniamo che il vettore $\mathbf{v} = (0, -2, 3)$ è ortogonale al piano cercato, la cui equazione è dunque data da $\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \mathbf{v} = 0$ (O è l'origine), cioè $3z - 2y = 0$. Per quanto riguarda il nucleo, basta notare che il sistema $A\mathbf{x} = 0$ si riscrive come

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0, \end{cases} \tag{1}$$

che fornisce le equazioni della retta cercata. La sua forma parametrica è $(-t, t, t)$ $(t \in \mathbb{R})$, che si riscrive in forma cartesiana come $y = z = -x$.

(c) Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda(3 - \lambda)(\lambda - 1)$, dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Dunque ciascuno di essi ha molteplicità (sia algebrica che geometrica) uguale a uno e quindi la matrice è diagonalizzabile. L'autospazio relativo a λ_1 coincide con il nucleo, dunque con la retta generata da $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$. Gli autospazi relativi a λ_2, λ_3 si ottengono risolvendo i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ e $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, ottenendo le rette generate da $\mathbf{v}_2 = (-7, 6, 4)$ e da da $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x - \sqrt[5]{1 + 5x}}}{xe^x}, \quad x > 0.$$

   (a) Mostrare che essa è ben definita per $x > 0$ sufficientemente piccolo.

   (b) Determinare i primi due termini non nulli nello sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.

   Soluzione.

   (a) Si noti che, per $x \to 0$,

$$\sqrt[5]{1 + 5x} = 1 + \frac{1}{5}5x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\frac{25\,x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x - 2x^2 + o(x^2).$$

   Quindi, sempre per $x \to 0$, $1 + x - \sqrt[5]{1 + 5x} = 2x^2 + o(x^2)$, il che mostra la positività del membro di sinistra per $x > 0$ sufficientemente piccolo.

   (b) Sviluppando come sopra ma fino al terzo ordine si ottiene, per $x \to 0$,

$$\sqrt[5]{1 + 5x} = 1 + x - 2x^2 + 6x^3 + o(x^3).$$

   Quindi, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x^2 - 6x^3 + o(x^3)}}{xe^x} = \sqrt{2}\sqrt{1 - 3x + o(x)}e^{-x} \\ &= \sqrt{2}\left[1 - \frac{3}{2}x + o(x)\right][1 - x + o(x)] \\ &= \sqrt{2}\left(1 - \frac{5}{2}x\right) + o(x). \end{aligned}$$

   Il polinomio di grado uno cercato è quindi $P(x) = \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}x$.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x\frac{1 - \log x}{2 - \log x}.$$

   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

   Soluzione. La funzione è definita per $x > 0$, $x \neq e^2$. Vale:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to(e^2)^\pm} = \pm\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

   Dunque $x = e^2$ è asintoto verticale bilatero. Notiamo poi che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\log x) - 2} = +\infty,$$

   dunque non vi sono asintoti obliqui. L'unico punto in cui f si annulla è $x = e$, e si vede immediatamente che f è positiva per $x \in (0, e) \cup (e^2, +\infty)$ e negativa per $x \in (e, e^2)$.

La funzione è derivabile su tutto il suo dominio. Vale, in tale dominio,

$$f'(x) = \frac{(\log x)^2 - 3(\log x) + 1}{(2 - \log x)^2}.$$

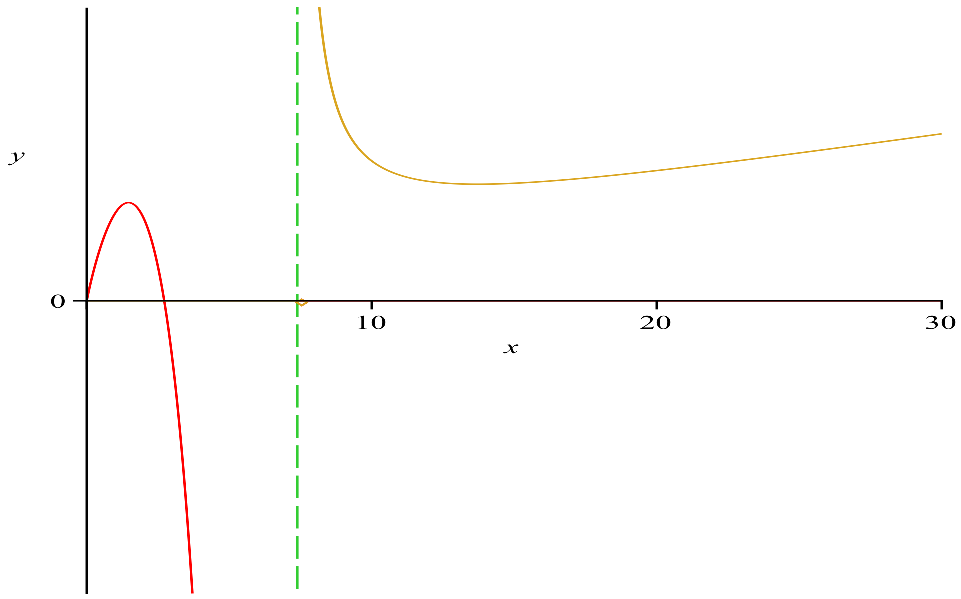
La derivata si annulla per $x = x_1 = e^{(3-\sqrt{5})/2}$ e per $x = x_2 = x = x_1 = e^{(3+\sqrt{5})/2}$. Sia x_1 che x_2 appartengono al dominio di f, in particolare è immediato verificare che $x_1 \in (0, e)$ e $x_2 > e$. Si vede immediatamente che x_1 è punto di massimo relativo e che x_2 è punto di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti. Inoltre f è crescente se $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, decrescente se $x \in (x_1, e^2) \cup (e^2, x_2)$. Si noti infine che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$.

Si ha infine che f è due volte derivabile nel suo dominio e ivi vale

$$f''(x) = \frac{(\log x) - 4}{x[2 - \log x]^3}.$$

Ciò mostra subito che f è convessa se $x \in (0, e^2) \cup (e^2, e^4)$, concava se $x > e^4$, e che $x = e^4$ è punto di flesso.

In conclusione il grafico qualitativo della funzione è il seguente.



4. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x^{3/2}}.$$

   (a) Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Studiare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione e le proprietà di monotonia della funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

Soluzione.

(a) Calcoliamo una primitiva di f. Si ha, ponendo $\sqrt{x} = t$ e integrando poi per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\log(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{2\log(1+t)}{t} + 2\int \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2\log(1+t)}{t} + 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2\log(1+t)}{t} + 2\log\left|\frac{t}{1+t}\right| \\
&= -\frac{2\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \log\left[\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2\right] =: G(x).
\end{aligned}$$

Quindi, essendo f positiva su tutto il proprio dominio di definizione, l'area cercata è

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = G(4) - G(1) = 6\log 2 - 3\log 3 \simeq 0.8631.$$

(b) Si può rispondere alla domanda o tramite l'espressione calcolata sopra, visto che $F(x) = G(x) - G(1) = G(x) + 4\log 2$, o tramite considerazioni qualitative. In effetti F è ben definita se e solo se nell'intervallo di integrazione f è ben definita e integrabile, eventualmente in senso improprio. Chiaramente quindi deve essere $x > 0$. Non si può prendere $x = 0$ poichè $f(x) \sim x^{-1}$ per $x \to 0$, e x^{-1} non è integrabile in senso improprio in tale limite. Quindi il dominio di F è $(0, +\infty)$. La non integrabilità di f nell'intorno di $x = 0$ mostra che $\lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$, dato che l'intervallo di integrazione è "invertito" quanto x è vicino a zero. Inoltre, $f(x) \sim x^{-3/2}\log x$ per $x \to +\infty$, dunque f è integrabile all'infinito e il limite di F quando $x \to +\infty$ è finito. Per calcolarlo esplicitamente basta notare che $G(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, e dunque $F(x) \to 4\log 2$ se $x \to +\infty$. Infine, il Teorema fondamentale del calcolo mostra che $F'(x) = f(x) > 0$ per ogni $x > 0$, e dunque F è strettamente crescente ove definita.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 12/9/2011 (A)

1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ -ky + 4z = -8 \\ x + ky - 3z = 3k. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k esso ha esattamente una soluzione, per quali non ne ha alcuna, per quali ne ha infinite. Determinare infine l'equazione cartesiana dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia monodimensionale.

2. Stabilire, al variare del parametro reale a, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\log\left(1+\frac{2}{n^a}\right)}{(n^3+1)\left[\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]}.$$

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left|3 - \frac{1}{|\log x|}\right|.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x + \cos x \sin x}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}.$$

5. Dare la definizione di integrale inferiore ed enunciarne le principali proprietà.

6. Dare entrambe le definizioni di funzione continua, mostrarne l'equivalenza ed enunciare le principali proprietà delle funzioni continue.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 12/9/2011 (B)

1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ ky - 2z = 2k \\ kx + y + 3z = -6. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k esso ha esattamente una soluzione, per quali non ne ha alcuna, per quali ne ha infinite. Determinare infine l'equazione cartesiana dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia monodimensionale.

2. Stabilire, al variare del parametro reale a, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n^a}\right)}{(2n^3 + 1)\left[\frac{2}{n} - \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]}.$$

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left|2 - \frac{1}{|\log x|}\right|.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{2\cos x + \cos x \sin x}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}.$$

5. Dare la definizione di integrale inferiore ed enunciarne le principali proprietà.

6. Dare entrambe le definizioni di funzione continua, mostrarne l'equivalenza ed enunciare le principali proprietà delle funzioni continue.

Soluzione della versione B

18 febbraio 2011

1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ ky - 2z = 2k \\ kx + y + 3z = -6. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k esso ha esattamente una soluzione, per quali non ne ha alcuna, per quali ne ha infinite. Determinare infine l'equazione cartesiana dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia monodimensionale.

Soluzione. Poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & k & -2 \\ k & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 & 2k \\ k & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Occorre determinare il rango delle matrici A e B. È evidente che $2 \leq R(A) \leq 3$ (c'è un minore 2x2 indipendente da k con determinante diverso da zero). Si calcola quindi il determinante di A:

$$\det A = -2k^2 + 3k + 2$$

che si annulla soltanto per $k = 2$ e $k = -1/2$. Pertanto, $R(A) = 3$ se $k \neq 2$ e $k \neq -1/2$ e $R(A) = 2$ se $k = 2$ e $k = -1/2$. Dunque si ha anche $R(B) = 3$ se $k \neq 2$ $k \neq -1/2$ in quanto le prime tre colonne sono indipendenti.

Se $k = -1/2$ osserviamo che il determinante della matrice formata dalle ultime tre colonne di B è diverso da zero, quindi $R(B) = 3$. Infine, se $k = 2$, notiamo che la quarta colonna della matrice B è proporzionale alla terza colonna. In conclusione $R(B) = 2$ solo se $k = 2$.
Dal teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che se $k = -1/2$ il sistema è impossibile, se $k \neq 2, k \neq -1/2$ il sistema ha una sola soluzione, se $k = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni (lo spazio delle soluzioni ha dimensione uno). Viene quindi chiesto di risolvere esplicitamente il sistema nel caso $k = 2$. Dalla prima equazione si ottiene $y = -x/2$ e dalla seconda $y = z + 2$. Dunque si ottengono le seguenti equazioni cartesiane:

$$y = -\frac{x}{2} = 2 + z.$$

2. Stabilire, al variare del parametro reale a, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n^a}\right)}{(2n^3 + 1)\left[\frac{2}{n} - \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]}.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$(2n^3 + 1)\left[\frac{2}{n} - \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right] \underset{n \to +\infty}{\sim} 2n^3 \cdot \frac{4}{3}\frac{1}{n^3} = \frac{8}{3}.$$

Dunque il denominatore tende a un limite finito e diverso da zero quando $n \to +\infty$. Inoltre $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Dunque, detto a_n il termine generale della serie, si ha $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{3}\log\left(1+\frac{1}{n^a}\right)$. Ciò mostra che la serie è a termini definitivamente positivi. Se $a \le 0$, tale termine generale non tende a zero quando $n \to +\infty$, dunque la serie diverge. Se $a > 0$ vale $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{3n^a}$, e il criterio del confronto asintotico mostra che la serie converge se e solo se $a > 1$.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left|2 - \frac{1}{|\log x|}\right|.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. Occorre chiedere che valga $x > 0$ affinché $\log x$ sia ben definito, che $x \neq 1$ affinché il denominatore all'interno del logaritmo non si annulli, e infine che $|\log x| \neq 1/2$ in modo che l'argomento del logaritmo più esterno non si annulli. Quest'ultima condizione corrisponde a $x \neq e^{1/2}, x \neq e^{-1/2}$. Dunque il dominio di definizione D è dato da

$$D = \left(0, e^{-1/2}\right) \cup \left(e^{-1/2}, 1\right) \cup \left(1, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, +\infty\right).$$

Si ha:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \log 2, \quad \lim_{x\to e^{-1/2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to1} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to e^{1/2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \log 2.$$

Quindi le rette $x = e^{-1/2}, x = 1, x = e^{1/2}$ sono asintoti verticali per la funzione, mentre la retta $y = \log 2$ è asintoto orizzontale quanto $x \to +\infty$.

Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left|2 + \frac{1}{\log x}\right| & \text{se } x \in \left(0, e^{-1/2}\right) \cup \left(e^{-1/2}, 1\right) \\ \\ \log\left|2 - \frac{1}{\log x}\right| & \text{se } x \in \left(1, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Per studiare gli zeri di f, notiamo che se $x \in (0,1)$ f si annulla se e solo se $\frac{1}{\log x} = -1$ oppure $\frac{1}{\log x} = -3$. Ciò corrisponde a $x = e^{-1}$ e a $x = e^{-1/3}$. Entrambi questi punti appartengono all'insieme $\left(0, e^{-1/2}\right) \cup \left(e^{-1/2}, 1\right)$. Si vede facilmente che f è positiva per $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1/3}, 1)$, e che essa è negativa per $x \in (e^{-1}, e^{-1/2}) \cup (e^{-1/2}, e^{-1/3})$. Se $x > 1$ invece f si annulla se e solo se $\frac{1}{\log x} = 1$ oppure $\frac{1}{\log x} = 3$. Ciò corrisponde a $x = e$ e a $x = e^{1/3}$. Entrambi questi punti appartengono all'insieme $\left(1, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, +\infty\right)$. Si vede facilmente che f è positiva per $x \in (1, e^{1/3}) \cup (e, +\infty)$, e che essa è negativa per $x \in (e^{1/3}, e^{1/2}) \cup (e^{1/2}, e)$.

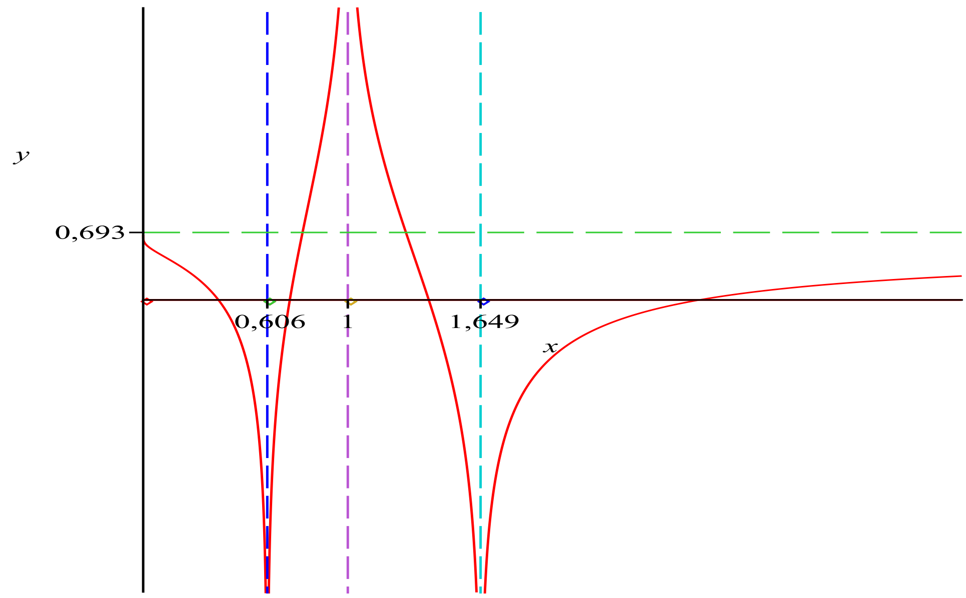
La derivata prima della funzione vale

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x\log x[2(\log x)+1]} & \text{se } x \in \left(0, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, 1\right) \\ \\ \frac{1}{x\log x[2(\log x)-1]} & \text{se } x \in \left(1, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Ciò mostra chiaramente che non vi sono punti stazionari per f. Lo studio del segno di f' è immediato e mostra che f è crescente in $(e^{-1/2}, 1) \cup (e^{1/2}, +\infty)$, decrescente in $(0, e^{-1/2}) \cup (1, e^{1/2})$. Si noti anche che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

dunque la funzione tende ad avere tangente verticale quando $x \to 0^+$.



Infine, la derivata seconda vale

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 1}{x^2(\log x)^2[2(\log x)+1]^2} & \text{se } x \in \left(0, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, 1\right) \\ \\ -\frac{2(\log x)^2 + 3\log x - 1}{x^2(\log x)^2[2(\log x)-1]^2} & \text{se } x \in \left(1, e^{1/2}\right) \cup \left(e^{1/2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Risolvendo la corrispondente equazioni di secondo grado si vede che se $x \in (0, 1)$ la derivata seconda si annulla se e solo se $x = x_1 := e^{(-5-\sqrt{17})/4}$ e se $x = x_2 := e^{(-5+\sqrt{17})/4}$. Entrambi tali punti appartengono a $(0, 1)$. Si tratta dunque di punti di flesso. Analogamente se $x > 1$ la derivata seconda si annulla se $x = x_3 = e^{(-3+\sqrt{17})/4}$, che è punto di flesso: in effetti il punto $x = x_4 := e^{(-3-\sqrt{17})/4}$, che darebbe luogo a un ulteriore zero della derivata seconda, è strettamente minore di uno e quindi non accettabile. Studiando il segno dei polinomi di secondo grado a numeratore si vede poi che f è convessa se $x \in (0, x_1) \cup (x_2, 1) \cup (1, x_3)$, mentre essa è concava se $x \in (x_1, e^{-1/2}) \cup (e^{-1/2}, x_2) \cup (x_3, e^{1/2}) \cup (e^{1/2}, +\infty)$.

In conclusione il grafico qualitativo della funzione è quello rappresentato più sopra.

4. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{2\cos x + \cos x \sin x}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}.$$

Soluzione. Porremo sempre uguale a zero la costante di integrazione visto che è chiesto di calcolare una sola primitiva. Si ha, operando la sostituzione $\sin x = t$ e usando il fatto che $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$:

$$\int \frac{2\cos x + \cos x \sin x}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2+t}{2-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Il denominatore dell'ultima quantità ammette la radice $t = 1$. Si ha $2 - t^2 - t^3 = (1-t)(t^2+2t+2)$. Il polinomio di secondo grado appena scritto non ha radici reali. Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{2+t}{2-t^2-t^3} = \frac{3t+4}{5(t^2+2t+2)} - \frac{3}{5(t-1)}.$$

Calcoliamo quindi separatamente:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3t+4}{(t^2+2t+2)}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{1+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\log(t^2+2t+2) + \arctan(t+1).
\end{aligned}$$

Nel logaritmo a ultimo membro non si è scritto il modulo visto che l'argomento è sempre positivo. In conclusione:

$$\int \frac{2+t}{2-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{10}\log(t^2+2t+2) + \frac{1}{5}\arctan(t+1) - \frac{3}{5}\log|t-1|.$$

Ritornando alle variabili originarie abbiamo quindi

$$\int \frac{2\cos x + \cos x \sin x}{(\cos x)^2 - (\sin x)^3 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10}\log[(\sin x)^2 + 2\sin x + 2] + \frac{1}{5}\arctan(\sin x + 1) - \frac{3}{5}\log(1-\sin x).$$