Esempio

$$I = (\text{V.P.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\, dx \overset{\uparrow}{=} (\text{V.P.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\, dx$$

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{x^2}\, dx = 0$$

$f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$z_0 = 0$ polo semplice $\left(\lim_{z\to 0} z f(z) \in \mathbb{C} \right)$

Devo verificare $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz = 0$. $(\ast\ast\ast)$ ✓

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{2iz}}{z^2}$$

- $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} \overbrace{\frac{1}{z^2}}^{f_1(z)}\, dz = 0$ per il lemma di decadimento $|f_1(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} \leftarrow \alpha > 1$

- $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} \underbrace{\frac{e^{2iz}}{z^2}}_{f_2(z)}\, dz = 0$ per il lemma di Jordan ($2 \leftarrow w \in \mathbb{R}^+$)

$$\sup_{C_R^+(0)} \left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow I = \pi i \,\text{Res}(f, 0) =$ completare ...

Cenni su → Residuo all'infinito
→ Funzioni polidrome
→ Funzioni armoniche

Residuo all'infinito

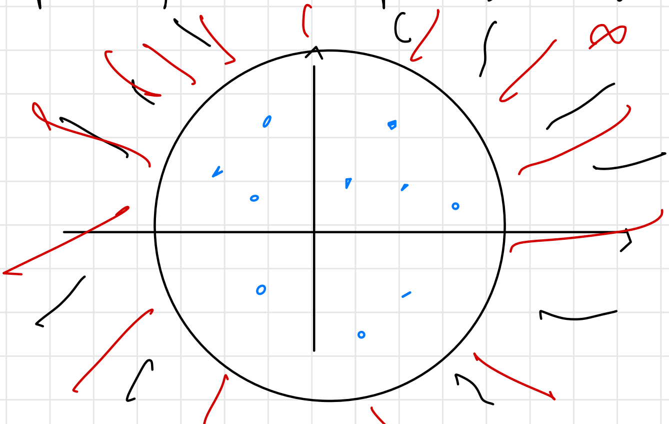
Def. Diciamo che ∞ è una sing. isolata per f se f olomorfa al di fuori di un disco (in $\mathcal{U}(\infty)$)

o equivalentemente $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità isolata nell'origine (cl. su $\left|\frac{1}{z}\right| < R \iff |z| > \frac{1}{R}$).

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Teorema: La somma di tutti* i residui di una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{$un n° finito di punti$\}$ è zero.

(* compreso quello nel punto all'infinito).



Utilizzo: quando si deve calcolare la somma di molti residui al finito (stesso indice).

Funzioni polidrome

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \qquad \operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

argomento principale $\in [0, 2\pi)$.

- $$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} \right\}$$ ← n valori
$$= \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \left(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

- $$\log z = \{ \log |z| + i \operatorname{Arg} z \}$$ ← ∞ valori
$$\left(w = \log|z| + i \operatorname{Arg} z \Rightarrow e^{w} = e^{\log|z| + i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \right)$$

$z \longmapsto \sqrt[n]{z}, \ \log z$ non sono funzioni!

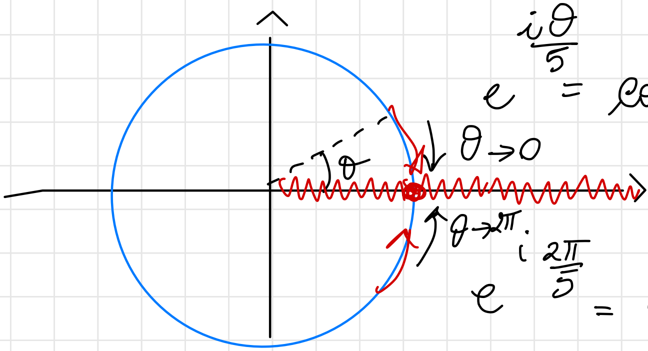
Per definire una radice n-esima, si può specificare l'intervallo di variabilità di $\operatorname{Arg} z$

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} \quad \underline{\underline{\text{con}}} \ \operatorname{Arg} z \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi)$$

<u>BRANCA</u> della radice n-esima es. $\bar{\theta} = 0$.

Oss. Una branca della radice n-esima non è continua su $\mathbb{C}$.

Su $|z|=1$.

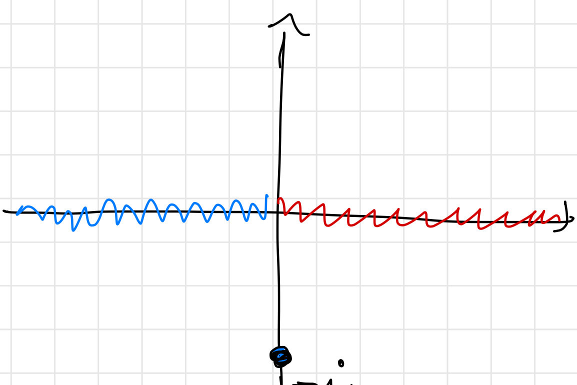


$$e^{\frac{i\theta}{5}} = \cos\left(\frac{\theta}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{5}\right) \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$$

$$e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

(è continua (olomorfa) su $\mathbb{C} \setminus \{\theta = \overline{\theta}\}$)

Oss. Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.



$$f_1(z) = |z|^{1/5} e^{\frac{i \operatorname{Arg} z}{5}}$$

con $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi]$

$$f_1(z) = |z|^{\frac{1}{5}} e^{\frac{i \operatorname{Arg} z}{5}}$$

con $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$.

$$f_1(-i) = e^{i\frac{3\pi}{10}}, \quad f_2(-i)\, e^{i\frac{-\pi}{10}}$$

Funzioni armoniche

Def $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice armonica se (u derivabile 2 volte).

$$\Delta u = 0$$

Laplaciano di u $= u_{xx} + u_{yy}$

$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$

$(+ u_{x_3x_3} + \ldots + u_{x_nx_n})$.

Oss 1 $f = f(z)$ olomorfa, $f = u + iv$

$\Rightarrow$ u, v armoniche

$$(CR)\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \xrightarrow[D_y]{D_x} \begin{cases} u_{xx} = v_{\cancel{yx}} \\ u_{yy} = -v_{\cancel{xy}} \end{cases} + \Rightarrow \Delta u = 0$$

(Analogamente $\Delta v = 0$)

Oss 2 u armonica su Ω, Ω sempl. connesso

$\Rightarrow$ $\exists\, v$ armonica (coniugata di u) t.c.

$f = u + iv$ olomorfa.

ANALISI FUNZIONALE

Def. Uno SPAZIO VETTORIALE (su $\mathbb{R}$) è un insieme V su cui sono definite

$$\begin{cases} \text{SOMMA } + : V \times V \longrightarrow V \\ \text{PRODOTTO PER SCALARE } \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \end{cases}$$

che godono delle proprietà seguenti

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$
- $(ts)u = t(su)$
- $t(u+v) = tu + tv$
- $(t+s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

Esempi

① $V = \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$\qquad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{cases} \underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ t\underline{x} = (tx_1, \dots, tx_n) \end{cases}$$

dimensione finita (n).

BASE $\qquad (1, 0, 0 \dots 0), (0, 1, 0, \dots 0) \dots (0, \dots 0, 1)$

(2) $V = C^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$\begin{cases} (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ (tf)(x) := t \cdot f(x) \end{cases}$$

dimensione infinita

Es. x^n $n \in \mathbb{N}$ sono lin. indipendenti

$p(x) \equiv 0 \iff$ sono nulli tutti i ~~coeff.~~

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una NORMA su V è una funzione
$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{tale che:}$$

1) $\|v\| > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ POSITIVITÀ
2) $\|tv\| = |t|\,\|v\| \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall v \in V$ OMOGENEITÀ
3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ DIS. TRIANGOLARE.

Def. $(V, \|\cdot\|)$ SPAZIO VETTORIALE NORMATO

Oss. Seguono dalle 1) - 2) - 3):

4) $\|\underline{0}\| = 0$ (segue da 2) prendendo $t=0$)

5) $\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leq \|u-v\|. \quad \forall u, v \in V$

(segue da 3):
$$\|u\| = \|u-v+v\| \overset{3)}{\leq} \|u-v\| + \|v\|$$
$$\Rightarrow \|u-v\| \geq \|u\| - \|v\|.$$
scambiare u, v)

Esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- $$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

NORMA EUCLIDEA.