Analisi matematica 2		7 settembre 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (x-y)(1-y^2)$$

a) Descrivere *l'insieme di livello* $\{f = 0\}$. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Trovare i punti critici della funzione e studiarne la natura.

c) Verificare che l'equazione $f(x,y) = 1$ definisce implicitamente, in un intorno di $x = 1$, una funzione regolare $y = g(x)$ tale che $g(1) = 0$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $x = 1$.

d) Verificare che l'insieme di livello $\{f = 1\}$ si può rappresentare come l'unione (disgiunta) di tre *curve regolari* nel piano.

2.

a) Stabilire in quali regioni del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = -\frac{t+1}{y}$$

Integrare l'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(0) = \sqrt{3}, \qquad \psi(0) = -\sqrt{3},$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = \sin t + \cos t$$

3.

a) Sia D la regione di spazio compresa tra la superficie conica di equazione $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ed il piano $z = 4$. Supponiamo che D sia occupata da un solido di densità (massa per unità di volume)

$$\rho(x, y, z) = 4 - z$$

Calcolare la massa totale del solido.

b) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ uscente da ∂D.

4.

a) Trovare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + 1}(x-1)^n$$

b) Enunciare il teorema di integrazione per serie e utilizzarlo per esprimere l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx$$

come somma di una serie numerica. Calcolare i primi 4 termini della serie.

c) Dimostrare che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx/3)$$

è convergente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e che la sua somma definisce una funzione periodica di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Determinare il periodo T della funzione.

SOLUZIONI

1.

a) L'insieme di livello zero è l'unione delle 3 rette di equazione e $y = x$, $y = 1$, $y = -1$. Si tratta di un insieme chiuso, *non* limitato e connesso (due punti qualsiasi dell'insieme sono collegati da un segmento o da una spezzata contenuta nell'insieme).

b) Derivate parziali:

$$f_x(x, y) = 1 - y^2; \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 2xy - 1$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 3y^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Si trovano 2 soluzioni:

$$P_1(1, 1); \qquad P_2(-1, -1).$$

Derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = 0; \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2y; \quad f_{yy}(x, y) = -2x + 6y$$

Il determinante della matrice Hessiana vale $\det H_f(x, y) = -4y^2$ ed è uguale a $-4 < 0$ nei due punti P_1, P_2, che sono dunque *punti di sella*.

c) Il punto $(1, 0)$ soddisfa l'equazione $f(x, y) = 1$; inoltre, f è regolare e $f_y(1, 0) = -1 \neq 0$. Valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita, per cui esiste un'unica funzione $g(x)$, definita in un intorno di $x = 1$, tale che $g(1) = 0$ e $f(x, g(x)) = 0$. La derivata nel punto $x = 1$ vale

$$g'(1) = -\frac{f_x(1, 0)}{f_y(1, 0)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

L'equazione della retta tangente è allora

$$y = x - 1$$

d) Si osserva che l'equazione $f(x, y) = 1$ si può risolvere esplicitamente rispetto a x :

$$x = y + \frac{1}{1 - y^2},$$

dove la funzione di y al secondo membro è definita nei tre intervalli aperti

$$I_1 = (-\infty, -1), \qquad I_2 = (-1, 1), \qquad I_3 = (1, \infty).$$

Scrivendo

$$\mathbf{r}(t) = \left(t + \frac{1}{1 - t^2}\right)\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \qquad \text{con} \quad t \in I_i,\ i = 1, 2, 3,$$

otteniamo tre curve regolari ($\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I_i$).

2.

a) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t, y) = -\frac{t+1}{y}$ al secondo membro è definita e continua nei due sottoinsiemi aperti del piano

$$D_1 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\} \text{ e } D_2 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2,\ y < 0\}$$

La derivata parziale $f_y(t, y) = \frac{t+1}{y^2}$ è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $y_0 \neq 0$.
Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int y\, dy = -\int (t+1)\, dt + C,$$

da cui si ricava la soluzione in forma implicita $y^2/2 = -t^2/2 - t + C$; ridefinendo la costante arbitraria otteniamo

$$y^2 + t^2 + 2t = C\,,$$

che rappresenta una *famiglia di circonferenze concentriche* nel piano (t, y) con centro $(-1, 0)$. Risolvendo rispetto a y e imponendo le condizioni si trovano le soluzioni

$$\Phi(t) = \sqrt{3 - t^2 - 2t}; \qquad \psi(t) = -\sqrt{3 - t^2 - 2t}$$

entrambe definite nell'intervallo massimale $(-3, 1)$.

b) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $z'' + 2z' + z = 0$, è

$$z(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, t\, e^{-t}$$

Applicando il metodo di somiglianza, si cerca la soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $A \sin t + B \cos t$; sostituendo nell'equazione si ottiene $A = 1/2$, $B = -1/2$.
L'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, t\, e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$$

3.

a)

La massa totale del solido è data dalla formula

$$M = \int\int\int_D \rho(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D (4-z)\,dxdydz$$

Integrando per fili si trova:

$$M = \int\int_{x^2+y^2\le 4}\Big(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{4}(4-z)\,dz\Big)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-8\rho+2\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\,\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi\,.$$

(Il calcolo si poteva svolgere anche integrando per strati.)

b) La regione D è ammissibile per il teorema della divergenza. La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 3$$

Dunque:

$$\int\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = 3\int\int\int_D dxdydz = 3\,|D| = 3\,\frac{1}{3}\,16\pi = 16\pi.$$

Il flusso si calcola anche direttamente osservando che *sulla superfice laterale del cono* si ha

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e = 0,$$

mentre sul cerchio nel piano $z=4$, $\mathbf{n}_e = \mathbf{k}$ e $\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = 4$. Di conseguenza:

$$\int\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\int_{x^2+y^2\le 4} 4\,dx\,dy = 16\,\pi\,.$$

4.

a) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza $R = 2$, per cui converge (assolutamente) per $-1 < x < 3$. Per $x = -1$ e $x = 3$ abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{4^n + 1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{4^n + 1}$$

che non convergono perchè il termine generale non tende a zero.

b)

Sviluppo in serie di Taylor della funzione:

$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x^2/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}\, x^{2n}$$

La serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Integrando termine a termine nell'intervallo $[0, 1]$ si ottiene

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + ...$$

c)

Poiché vale la stima

$$\left| \frac{1}{n^3} \sin(nx/3) \right| \leq \frac{1}{n^3}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ è convergente, la serie di funzioni converge *totalmente* (e quindi uniformemente) in $\mathbb{R}$; la somma della serie è dunque una funzione continua (essendo continue le funzioni $\sin(nx/3)$) e periodica di periodo $T = 6\pi$.
Infine, la *serie delle derivate* è pure totalmente convergente in $\mathbb{R}$ perchè

$$\left| \frac{1}{3n^2} \cos(nx/3) \right| \leq \frac{1}{3n^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ è ancora convergente. Possiamo quindi applicare il teorema di derivazione per serie e concludere che la somma è una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.