Marco Contedini

LEZIONE 8

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

13 novembre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Limiti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a.\quad \lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{5^x-1} \qquad b.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(3-2\cos x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$c.\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x}-\sqrt{x+6}} \qquad d.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)-\sin x-\sin x^2}{\sin^4 x}$$

2 Formula di Taylor

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni più note.
Per $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\operatorname{Th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

Degli ultimi sviluppi (tangente e tangente iperbolica) abbbiamo dato gli sviluppi arrestati al settimo ordine in quanto la forma chiusa dell'ordine n-esimo è piuttosto complicata.

3 Applicazione della formula di taylor: limiti

2. Deteminare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 2$ $\qquad$ (b) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3$ $\quad x_0 = 1$

(c) $\dfrac{1}{1 + 2x + 3x^2}$ $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ (d) $f(x) = \log x$ $\quad x_0 = 2$

(e) $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \log(\cos x)}{x \sin x}$$

$$(d) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^x - 1 - x^2}{x^3}$$

$$(e) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1 + x)) - \cos x - x + 1}{x^3}$$

$$(f) \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{4 + x^3} - \sqrt[3]{1 + 2x^2 + x^3}\right)$$

$$(g) \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{(x - 1)^2}$$

4. Calcolare, al variare del parametro reale a,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a}$$

4 Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+kx)}{x} \qquad b.\quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x\sin^2 x)$$

$$c.\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x \qquad d.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{Sh }x}{x}$$

$$e.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{Ch }x-1}{x^2} \qquad f.\quad \lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{x-1})$$

$$g.\quad \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right) \qquad h.\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)^2}{\log(1+\sin^4 x)}$$

$$i.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x+2)-\log_2 2}{x} \qquad j.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$$

$$k.\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(e^x+1)}{x+\sin x} \qquad l.\quad \lim_{x\to 0}x\cdot\text{tg}\left(2x+\text{arctg }\frac{3}{x}\right)$$

$$m.\quad \lim_{x\to\pi/2}\text{tg }x(e^{\cos x}-1) \qquad n.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\text{tg }x}$$

$$o.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} \qquad p.\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{(1+\sin^2 x)^{\log x}-1}{(e^x-\sin x-\cos x)\log x}$$

$$q.\quad \lim_{x\to\pi/2}(x-\frac{\pi}{2})\text{tg }x \qquad r.\quad \lim_{x\to\pi/2}\left(1+\frac{1}{\text{tg }x}\right)^{\frac{2}{\pi-2x}}$$

2. Deteminare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

$$(a)\quad f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \qquad x_0=0$$

$$(b)\quad f(x)=(1+e^x)^3 \qquad x_0=0$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{\sin x}{1-x} \qquad x_0=0$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$a.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\log(1+x^2)\right)-2(1-\cos x)}{\sin^4 x}$$

$$b.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\log(1+x^2)\right)-2(1-\cos x)+\frac{5}{12}x^4}{\sin^6 x}$$

$$c.\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}}$$

$$d.\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-\log(1+x^2)}{7x^2\text{tg }x^4}$$

$$e.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x\text{arctg }x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}$$

$$f.\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\text{Ch }x)^{\sin x}-1-\frac{1}{2}x^3}{x^5}$$

4. Calcolare fino al sesto ordine i coefficienti dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad f(x) = \frac{\mathrm{Sh}(x^2 + \sin^3 x)}{1 - x^4} \quad x_0 = 0 \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \sqrt[3]{e^{2x^2+x^3}} \quad x_0 = 0$$

5 Soluzioni

1. Nella risoluzione dei seguenti limiti verranno utilizzati i seguenti risultati:

   a. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *b.* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

   c. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \quad (a\in\mathbb{R})$ *d.* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

   e. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ *f.* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a} \quad (a>0)$

   g. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \quad (a\in\mathbb{R})$ *h.* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

   (a) Applicazione del limite notevole h:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1-2^x+1}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x\log 3}-1}{x}-\frac{e^{x\log 2}-1}{x}}{\frac{e^{x\log 5}-1}{x}}$$
   $$=\frac{\log 3-\log 2}{\log 5}=\frac{\log\frac{3}{2}}{\log 5}$$

   (b) Applicazione di a, b e e:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(3-2\cos x)}{\text{tg }x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(2(1-\cos x)+1)}{\frac{\sin x}{x}\frac{x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(2x^2\frac{1-\cos x}{x^2}+1\right)}{x}$$
   $$=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to 0}x\frac{\log(x^2+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$$

   (c) Cambio di variabile $x=y+3$:

   $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x}-\sqrt{x+6}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{4+y}-\sqrt{4+2y}}{\sqrt{9+3y}-\sqrt{9+y}}$$
   $$=\lim_{y\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{y}{4}}-\sqrt{1+\frac{y}{2}}\right)}{3\left(\sqrt{1+\frac{y}{3}}-\sqrt{1+\frac{y}{9}}\right)}$$
   $$=\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{18}}=-\frac{3}{4}$$

   (d) In questo caso occorre fare attenzione all'uso di $\sim$.
   Un tipico errore è:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)-\sin x-\sin x^2}{\sin^4 x}\sim\frac{x^2+x-x-x^2}{x^4}=...0$$

   Quando si cancellano tutti i temini dominanti, bisogna stimare l'infinitesimo residuo. Più corretto sarebbe scrivere il residuo infinitesimo in termini di "o piccolo":

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)-\sin x-\sin x^2}{\sin^4 x}=$$
   $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+o(x)-x+o(x)-x^2+o(x^2)}{x^4}=\frac{o(x)}{x^4}$$

In questo modo non si può determinare il limite: $o(x)$ è una funzione che tende a zero più rapidamente di x, ma non sappiamo se tende a zero come x^4 o più rapidamente di x^4. Occorrono comunque ulteriori considerazioni per stimare l'infinitesimo residuo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)-\sin x-\sin x^2}{\sin^4 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cos x+\cos x^2\sin x-\sin x-\sin x^2}{\sin^4 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2(\cos x-1)+\sin x(\cos x^2-1)}{\sin^4 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-\frac{x^5}{2}+o(x^5)}{x^4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. Sviluppi di Taylor (primi quattro termini non nulli):

   (a) Poichè $e^{2+h}=e^2\cdot e^h$, allora:

   $$e^{(h+2)}=e^2\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)$$

   (b) Ponendo $x=h+1$ in $f(x)=1+2x-3x^2+4x^3$ si ottiene:

   $$f(h+1)=4+8h+9h^2+4h^3$$

   (c) Si utilizza lo sviluppo di $f(z)=\frac{1}{1+z}$ con $z=2x+3x^2$:

   $$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x+3x^2} &= 1-(2x+3x^2)+(2x+3x^2)^2-(2x+3x^2)^3+o(x^3)\\ &= 1-2x+x^2+4x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

   (d) Ponendo $x=h+2$: $f(x)=\log(2+h)=\log 2\left(1+\frac{h}{2}\right)=\log 2+\log\left(1+\frac{h}{2}\right)$

   $$\begin{aligned}\log 2+\log\left(1+\frac{h}{2}\right) &= \log 2+\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3+o(h^3)=\\ &= \log 2+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\frac{1}{24}h^3+o(h^3)\end{aligned}$$

   (e) Ponendo $x=h+\frac{\pi}{4}$: $f(x)=\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\sin h\cos\frac{\pi}{4}+\cos h\sin\frac{\pi}{4}=$
   $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin h+\cos h)$

   $$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin h+\cos h)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)$$

3. Limiti

   (a) Per $x\to 0$, si ha:

   $$\begin{aligned}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{e^{x^2}-e^{x^3}} &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{(1+x^2+o(x^2))-(1+x^3+o(x^3))}\\ &= \frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}\end{aligned}$$

Pertanto:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{e^{x^2}-e^{x^3}}=1$$

(b) Poichè per $t\to 0$: $(1+t)^{1/5}=1+\frac{1}{5}t-\frac{2}{25}t^2+o(t^2)$, per $x\to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[5]{1-5x^2+x^4}-1+x^2}{x^4} &= \frac{1+\frac{1}{5}(-5x^2+x^4)-\frac{2}{25}(-5x^2+x^4)^2+o(x^4)-1+x^2}{x^4}\\ &= \frac{-\frac{9}{5}x^4+o(x^4)}{x^4}\end{aligned}$$

Pertanto:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-5x^2+x^4}-1+x^2}{x^4}=-\frac{9}{5}$$

(c) Per $x\to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}-\log(\cos x)}{x\sin x} &= \frac{x^{2/3}-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)-x^{2/3}-\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x(x+o(x^2))}\\ &= \frac{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)-\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2+o(x^3)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}\end{aligned}$$

Pertanto:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}-\log(\cos x)}{x\sin x}=\frac{1}{3}$$

(d) Per $x\to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^x-1-x^2}{x^3} &= \frac{e^{x\log(1+x)}-1-x^2}{x^3}\\ &= \frac{\exp\left[x\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\right]-1-x^2}{x^3}\\ &= \frac{\exp\left[(x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]-1-x^2}{x^3}\\ &= \frac{1+x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)^2+o(x^4)-1-x^2}{x^3}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}\end{aligned}$$

Pertanto:
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1-x^2}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

(e) Per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
\sin(\log(1+x)) &= \sin\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \\
&- \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)^3 + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+x)) - \cos x - x + 1}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - x + 1}{x^3} = \frac{1}{6}$$

(f) Raccogliendo x si può utilizzare lo sviluppo di: $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ per $t \to 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{4+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{4}{x^3}+1} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{2}{3}$$

(g) Posto: $x = 1+h$, ($h \to 0$ se $x \to 1$), si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{(x-1)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{h^2}$$

Inoltre, per $h \to 0$, vale:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+h}} &= \exp\left[1 - h + h^2 + o(h^2)\right] \\
&= e \cdot \exp\left[-h + h^2 + o(h^2)\right] \\
&= e\left[1 + \left(-h + h^2 + o(h^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-h + h^2 + o(h^2)\right)^2 + o(h^2)\right] \\
&= e\left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)\right]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}eh^2 + o(h^2)}{h^2} = \frac{3}{2}e$$

.

4. Se $a > 0$ il limite presenta una forma indeterminata del tipo $0/0$.
   Per $x \to 0^+$, si ha:

$$\log(1 - 2x + x^2) = 2\log|1 - x| = 2\log(1 - x)$$

   ($1 - x$ è positivo in un intorno di $x = 0$).
   Sviluppando fino al terzo ordine:

$$2\log(1 - x) = -2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

   Inoltre:

$$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4).$$

   Pertanto:

$$\frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \frac{-2x^3 + o(x^3)}{ax^3 + x^a}.$$

   Se $a > 3$: $ax^3 + x^a = ax^3 + o(x^3)$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{ax^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{a}$$

   Se $a = 3$: $ax^3 + x^a = 4x^3$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{4x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{4x^3} = -\frac{1}{2}$$

   Se $0 < a < 3$: $ax^3 + x^a = x^a + o(x^a)$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{x^a + o(x^a)} = 0^-$$

   Lo stesso accade se $a \leq 0$, infatti: Se $a = 0$, il limite è della forma $\frac{0^-}{1}$, se $a < 0$ il limite è della forma $\frac{0^-}{+\infty}$

6 Soluzione degli esercizi proposti

1. (a) Applicazione del limite notevole a (vedere pag. 6):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\pi\cdot\cos kx}{x}+\frac{\cos\pi\cdot\sin kx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-k\sin kx}{kx}=-k$$

(b) Criterio del confronto.
Poichè $x^2-x\le x^2-x\sin^2 x\le x^2+x$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x\sin^2 x)\ge\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty$$

(c) Ricordando che x tende a zero più rapidamente del logaritmo di x:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\log\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x\log x}=e^{1^+}$$

(d) Applicazione di h:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{Sh }x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-e^{-x}+1}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}+\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{2y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

dove si è posto $y=-x$.

(e) Forma di indecisione 0/0. (Ch $x\to 1$ per $x\to 0$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ch }x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\text{Ch }x-1)(\text{Ch }x+1)}{x^2(\text{Ch }x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Sh}^2\,x}{x^2}\frac{1}{\text{Ch }x+1}=\frac{1}{2}$$

(f) Applicazione formule di prostaferesi:

$$\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{x-1}=-2\sin\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}$$

In questo modo si è separata la parte oscillante dalla parte che tende a zero.
Si ha:

$$-2\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}\le\underbrace{2\sin\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}}_{\text{compreso tra -1 e 1}}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}\le 2\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}$$

Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4\sqrt{x}}=0$$

Per il criterio del confronto:

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{x-1})=0.$$

(g) Si ha: $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$.
Da $\sqrt{x} \to 0$ per $x \to 0$ segue anche $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \to 0$.

(h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\log(1+\sin^4 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}$$

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(x+2) - \log_2 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log_2 2\left(1+\frac{x}{2}\right) - \log_2 2}{x} = \frac{\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

(j)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - (\sqrt{1-x} - 1)}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x) - \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)}{x} = \frac{3}{2}$$

(k)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_2(e^x+1)}{x+\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log_2 e^x(1+e^{-x})}{x+\sin x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\log e^x}{\log_2} + \log_2(1+e^{-x})}{x+\sin x} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{\log 2}}{x} = \frac{1}{\log 2}$$

(l) Ricordando che:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}\ \beta}{1 - \mathrm{tg}\ \alpha \cdot \mathrm{tg}\ \beta}$$

e che: $\mathrm{tg}(\mathrm{artg}\ \alpha) = \alpha$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \mathrm{tg}\left(2x + \mathrm{artg}\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\mathrm{tg}\ 2x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot \mathrm{tg}\ 2x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{2x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot 2x} = -\frac{3}{5}$$

(m)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\ x\,(e^{\cos x} - 1) = \lim_{y\to 0} \mathrm{tg}\ \left(y + \frac{\pi}{2}\right)\left(e^{\cos(y+\pi/2)} - 1\right)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi/2)}{\cos(y+\pi/2)} \cdot (-\sin y)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{-\sin y} \cdot (-\sin y) = 1$$

(n)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{2} + o(\sin x) - \left(-\frac{\sin x}{2}\right) + o(\sin x)}{x} = 1$$

(o)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x - \pi + \pi)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(\cos x - 1) + \pi)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi(\cos x - 1))}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin\left(-\frac{\pi x^2}{2}\right)}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

(p)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sin^2 x)^{\log x}-1}{(e^x-\sin x-\cos x)\log x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\log x\cdot\log(1+\sin^2 x)}-1}{(e^x-1-\sin x+1-\cos x)\log x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\log x\cdot\log(1+x^2)}-1}{(x+x^2/2-x+x^2/2+o(x^2))\log x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2\log x}-1}{\frac{x^2}{2}\log x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log x}{x^2\log x} = 1
\end{aligned}$$

(q)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{tg } x &= \lim_{y\to 0} y\cdot \text{tg}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \lim_{y\to 0} y\frac{\sin(y+\pi/2)}{\cos(y+\pi/2)}\\
&= \lim_{y\to 0} y\frac{\sin y\cos\frac{\pi}{2}+\cos y\sin\frac{\pi}{2}}{\cos y\cos\frac{\pi}{2}-\sin y\sin\frac{\pi}{2}}\\
&= \lim_{y\to 0} y\frac{\cos y}{-\sin y} = -1
\end{aligned}$$

(r)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\left(1+\frac{1}{\text{tg } x}\right)^{\frac{2}{\pi-2x}} &= \lim_{y\to 0}\left[1+\frac{\cos(y+\pi/2)}{\sin(y+\pi/2)}\right]^{-\frac{1}{y}}\\
&= \lim_{y\to 0}\left[1-\frac{\sin y}{\cos y}\right]^{-\frac{1}{y}}\\
&= \lim_{y\to 0}[1-\text{tg } y]^{-\frac{1}{y}}\\
&= \lim_{y\to 0}[1-\text{tg } y]^{\frac{1}{\text{tg } y}\left(-\frac{\text{tg } y}{y}\right)} = e
\end{aligned}$$

2. Sviluppi di Taylor (primi quattro termini non nulli):

(a) Dato lo sviluppo $(1-x)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{\sqrt{1-x}} &= (1+x)\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3)\right)\\
&= 1+\frac{3}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{11}{16}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

(b) Si utilizza lo sviluppo di e^x e si eleva al cubo il polinomio, facendo attenzione a non dimenticare i termini di grado minore o uguale a tre.

$$\begin{aligned}
(1+e^x)^3 &= \left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\\
&= 8+12x+12x^2+9x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}
(1+e^x)^3 &= 1+3e^x+3e^{2x}+e^{3x} \\
&= 1+3\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+ \\
&+3\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right)+ \\
&+\left(1+(3x)+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)\right) \\
&= 8+12x+12x^2+9x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

(c) La funzione risulta il prodotto di due funzioni elementari: $f_1(x)=\sin x$ e $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$. si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1-x} &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) \\
&= x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+o(x^4) \\
&= x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

3. Limiti

(a) In questo caso e nei prossimi esercizi i limiti notevoli non sono sufficienti a determinare l'ordine di infinitesimo al numeratore. Infatti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\log(1+x^2)\right)-2(1-\cos x)}{\sin^4 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+o(x^2))-2\cdot\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^4+o(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^4}
\end{aligned}$$

Occorre sviluppare in serie di potenze le funzioni al numeratore per $x\to 0$:

$$\begin{aligned}
&\log(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4) \\
&\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \\
&\sin\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\log(1+x^2)\right)-2(1-\cos x)}{\sin^4 x}= \\
&\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-2\left[1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]}{x^4+o(x^4)}= \\
&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{12}x^4}{x^4}=-\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

(b) In questo caso, occorre spingersi all'ordine successivo di infinitesimo, vale a dire x^6.

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

$$\begin{aligned}\sin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right)^3 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\end{aligned}$$

Si osservi che il termine x^2 all'interno della parentesi elevata al cubo NON è un termine trascurabile, vale a dire che non fa parte di $o(x^6)$.
Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\log(1+x^2)\right) - 2(1-\cos x) + \frac{5}{12}x^4}{\sin^6 x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) - 2\left[1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right] + \frac{5}{12}x^4}{x^6} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{241}{720}x^4}{x^6} = \frac{241}{720}$$

(c) Per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}} &= \exp\left[\frac{1}{x\sin 2x}\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{x\sin 2x}\log\left(\frac{3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)}{3x}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{x(2x+o(x))}\log\left(1 - \frac{1}{6}(3x)^2 + o(x^2)\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{3}{4} + o(1)\right]\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}} = e^{-3/4}$$

(d) Per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{x^2\cos x - \log(1+x^2)}{7x^2\tan x^4} &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right)}{7x^2(x^4 + o(x^4))} \\ &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^7) - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^7)}{7x^6 + o(x^6)} \\ &= \frac{-\frac{7}{24}x^6 + o(x^7)}{7x^6 + o(x^6)} = -\frac{1}{24} + o(x)\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x - \log(1+x^2)}{7x^2\tan x^4} = -\frac{1}{24}$$

(e) Per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(1+x\cdot \text{arctg } x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \\
&= \frac{\log\left(1+x\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)\right)+1-\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)}{1+\frac{1}{2}(2x^4)+o(x^4)-1} = \\
&= \frac{\log\left(1+x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)-x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \\
&= \frac{\left[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)^2+o(x^4)\right]-x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \\
&= \frac{-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \\
&= \frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\arctan x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = -\frac{4}{3}$$

(f) Per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&(\text{Ch } x)^{\sin x} = e^{\sin x \log(\text{Ch } x)} = \\
&= \exp\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\log\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\right)\right] = \\
&= \exp\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)^2+o(x^5)\right)\right] = \\
&= \exp\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)\right)\right] = \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^5-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)\right]
\end{aligned}$$

Sviluppando la funzione esponenziale:

$$\exp\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)\right] = \ = 1+\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)\right]+o(x^5)$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x)^{\sin x}-1-\frac{1}{2}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}$$

4. Sviluppi di Taylor (sesto ordine):

(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Sh}(x^2+\sin^3 x)}{1-x^4} &= \frac{\mathrm{Sh}\left(x^2+\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^3\right)}{1-x^4} = \frac{\mathrm{Sh}\left(x^2+\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^6)\right)\right)}{1-x^4} \\
&= \frac{\left(x^2+x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^6)\right)+\frac{1}{6}\left(x^2+x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^6)\right)^3+o(x^6)}{1-x^4} \\
&= \frac{x^2+x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)}{1-x^4} \\
&= \left(x^2+x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\right)\left(1+x^4+o(x^7)\right) \\
&= x^2+x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{7}{6}x^6+o(x^6)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{e^{2x^2+x^3}} &= \exp\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right) \\
&= 1+\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)^3+o(x^6) \\
&= 1+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}x^4+\frac{4}{9}x^5+\frac{1}{9}x^6\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{8}{27}x^6+o(x^6)\right)+o(x^6) \\
&= 1+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{9}x^4+\frac{2}{9}x^5+\frac{17}{162}x^6+o(x^6)
\end{aligned}
$$