II.5 - MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

Dato un insieme X, una collezione η di sottoinsiemi di X si dice **σ-algebra** in X se:

1. l'insieme vuoto appartiene a η: $\emptyset \in \eta$
2. η è chiusa per complementari: $A \in \eta \quad \Rightarrow \quad A^C \in \eta$
3. η è chiusa per unione numerabile $A_i \in \eta \;\; \forall i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \eta$

In tal caso si dice che (X, η) è uno spazio misurabile e gli elementi η sono gli insiemi misurabili di X.

Si dice poi **misura** su (X, η) una funzione $\mu : \eta \to [0, +\infty]$ con le seguenti proprietà:

1. μ non è identicamente uguale a $+\infty$: $\mu \not\equiv +\infty$
2. μ è numerabilmente additiva: $A_i \in \eta \;\; \forall i \in \mathbb{N},\; A_i \;\; disgiunti \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Si dice allora che (X, η, μ) è uno <u>spazio di misura</u>.

Teorema: esistono su $\mathbb{R}^N$ una σ-algebra η e una misura μ tali che:

1. η contenga i plurirettangoli e la loro misura è quella elementare:
$$\mu\left(\prod_{j=1}^{N}(a_j,b_j)\right)=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)$$
2. μ sia invariante per traslazioni.
3. μ sia completa: $E\in\eta,\ \mu(E)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall F\subseteq E,\ F\in\eta:\ \mu(F)=0$

Imponendo ulteriori proprietà si arrivano poi a definire la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue e la **misura di Lebesgue** di tali insiemi. D'ora in avanti, ogni volta che si parla di insiemi misurabili, si intende misurabili secondo Lebesgue.

Osservazioni:

- η contiene gli insiemi aperti e quelli chiusi
- $A \subseteq B,\ A, B \in \eta \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots,\ A_i \in \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)$
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots,\ A_i \in \eta,\ \mu(A_1) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)$
- I punti e le unioni numerabili di punti in $\mathbb{R}^N$ hanno dimensione nulla.

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile. Si dice che la funzione f è **misurabile** se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ (la controimmagine di A) è misurabile.

Si dimostra che sono misurabili, tra le altre:

- Le funzioni continue.
- Somme e prodotti di funzioni misurabili.
- Estremo superiore, estremo inferiore, limite superiore, limite inferiore, limite di una successione di funzioni misurabili.

È possibile ora introdurre gradualmente l'integrale di Lebesgue a partire da funzioni semplici fino a funzioni generiche. D'ora in avanti, l'integrale deve essere sempre considerato nel senso di Lebesgue (salvo quando specificato diversamente).

1. Una funzione si dice <u>semplice</u> se assume un numero finito di valori, ciascuno su un insieme misurabile (che siano due a due disgiunti). Essa può essere scritta nella forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad E_i \subseteq \mathbb{R}^N \ \ \textit{misurabili} \qquad (*)$$

L'integrale di una tale funzione è definito nel modo seguente:

$$\int_E s := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i), \quad E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

2. Sia f una funzione limitata e nulla al di fuori di un compatto. Chiamiamo integrali inferiore e superiore di f i seguenti (con s funzione semplice):

$$\int_* f := \sup_{s \leq f} \int s \qquad\qquad \int^* f := \inf_{s \geq f} \int s$$

Se i due integrali precedenti sono uguali, allora si definisce l'integrale di f come il valore comune di questi due:

$$\int f := \int_* f = \int^* f$$

Lo stesso procedimento può essere esteso alle funzioni non negative.

3. Sia f una qualsiasi funzione misurabile. Se almeno uno tra gli integrali di f^+ (parte positiva di f) e f^- (parte negativa di f) è finito, l'integrale di f è definito come:

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Diciamo che una proposizione $P(x)$, con $x \in E$, è valida quasi ovunque (abbreviato q.o.) in E se l'insieme degli x per cui P è falsa è di misura nulla in E.

II.6 - PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE

Tra le principali proprietà dell'integrale di Lebesgue si citano le seguenti:

- linearità: $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
- monotonia: $f \leq g \ \ q.o. \ in \ E \quad \Rightarrow \quad \int_E f \leq \int_E g$
- $f = 0 \ \ q.o. \ in \ E \quad \Rightarrow \quad \int_E f = 0$
- f integrabile $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrabile; $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

Confronto tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue:

- Se f è limitata e nulla fuori da un compatto, l'integrabilità secondo Riemann implica l'integrabilità secondo Lebesgue. Infatti, dette s_R le funzioni semplici della teoria di Riemann (le funzioni definite sostituendo gli insemi E_i nella $(*)$ con dei plurirettangoli) e s_L le funzioni semplici della teoria di Lebesgue (quelle definite poco prima), si ha che:
$$\sup_{s_R \leq f} \int s \leq \sup_{s_L \leq f} \int s \leq \inf_{s_L \geq f} \int s \leq \inf_{s_R \geq f} \int s$$

- Se f non è limitata e nulla fuori da un compatto, l'implicazione precedente può non essere vera.

  $$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \quad in \ (0,+\infty)$$

  - $$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\sum_{k\geq 1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}=+\infty$$

    Per le proprietà dell'integrale di Lebesgue, non convergendo l'integrale del modulo della funzione, non converge neanche l'integrale della funzione.

  - $\lim_{R\to+\infty}\int_0^R\frac{\sin x}{x}$ è invece convergente secondo la teoria degli integrali impropri di Riemann.

- Sia r fissato e e sia f Riemann-integrabile su $B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ $\forall \varepsilon > 0$: f è Lebesgue-integrabile su $B_r(0)$ se e solo se $|f|$ è integrabile su $B_r(0)$ nel senso degli integrali impropri di Riemann.
- Sia r fissato e sia f Riemann-integrabile su $B_R(0) \setminus B_r(0)$ $\forall R > r$: f è Lebesgue-integrabile su $B_R(0)$ se e solo se $|f|$ è integrabile su $B_r^C(0)$ nel senso degli integrali impropri di Riemann.

- ***Teorema di Lebesgue (convergenza dominata):*** sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \to f$ q.o. in E ed esiste una funzione φ integrabile tale che $|f_n| \leq \varphi$ q.o. in E, allora f_n e f sono integrabili e in particolare:

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

- ***Teorema di Beppo-Levi (convergenza monotona):*** sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \to f$ q.o. in E, $f_n \geq 0$ q.o. in E, $f_{n+1} \geq f_n$ q.o. in E, allora:

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

Corollari

- Sia $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con *E* misurabile e le f_n misurabili. Se $f_n \geq 0$ q.o. in *E*, allora:

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$$

- Sia $F(t) = \int_E f(t,x)dx$, con $t \in [a,b]$ e $x \mapsto f(t,x)$ una funzione misurabile su $E \subseteq \mathbb{R}$ misurabile. Se $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ esiste per $t \in \mathcal{U}(t_0)$ q.o. in *E* e se $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \varphi(x)$, con φ integrabile, allora:

$$F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)dx$$

- ***Teorema di Fubini:*** sia $f(x,y)$ una funzione definita su $A \times B \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M+N}$. Se *f* è integrabile, allora valgono i seguenti risultati:
  1. per q.o. $y \in B$ la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile in *A*
  2. la funzione $y \mapsto \int_A f(x,y)dx$ è integrabile in *B*
  3. vale la formula: $\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_B dy \int_A f(x,y)dx$

  e i risultati sono analoghi se si scambiano le variabili.

- ***Teorema di Tonelli:*** sia $f(x,y)$ una funzione misurabile definita su $A \times B \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M+N}$ non negativa q.o. in $A \times B$. Se la funzione *f* soddisfa le prime due tesi del teorema di Fubini, allora *f* è integrabile.