I.11 - ZERI E POLI, PRINCIPIO DI IDENTITÀ

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto z_0 sia un polo per una funzione f è che tale punto sia uno zero per il prolungamento della funzione $1/f$. Infatti:

- Se $f(z)$ ha un polo in z_0, allora esiste un intorno di tale punto in cui la funzione non si annulla ed è quindi ben definita la funzione $1/f(z)$, che ha limite nullo per $z \to z_0$. Quest'ultima ha quindi una singolarità eliminabile in z_0 e per il teorema di rimozione della singolarità esiste un prolungamento di $1/f(z)$ e tale prolungamento ha in z_0 uno zero.
- Se $1/f(z)$ non si annulla in un intorno di z_0 e tende a 0 per $z \to z_0$, allora il limite per $z \to z_0$ di $f(z)$ è infinito e quindi tale funzione ha un polo in z_0.

È quindi possibile ricondurre lo studio dei poli di una funzione a quello degli zeri della sua reciproca. In quest'ottica molto utile è il seguente risultato.

Principio di identità: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme connesso (cioè tale che per ogni coppia di punti z_1 e z_2 di tale insieme esista almeno un cammino continuo che li collega in esso interamente contenuto), $f(z)$ una funzione olomorfa su Ω e z_0 un punto di tale insieme.

Chiamiamo $\mathcal{Z}(f)$ l'insieme degli zeri della funzione, ovvero: $\mathcal{Z}(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni:

1. z_0 è un punto di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$, ovvero: $\exists \{z_n\} \subseteq \mathcal{Z}(f) \setminus \{z_0\} : z_n \to z_0$.
2. Tutte le derivate di f hanno uno zero in z_0: $f^{(n)}(z_0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{Z}(f)$ contiene un intorno di z_0.
4. $\mathcal{Z}(f)$ coincide con Ω.

In particolare quindi, se una funzione olomorfa non è identicamente nulla in tutto il suo dominio (che deve però per ipotesi essere connesso), ovvero se $\mathcal{Z}(f) \neq \Omega$, allora l'insieme degli zeri di tale funzione $\mathcal{Z}(f)$ è fatto di punti isolati:

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow \exists \mathcal{U}(z_0): \; f(z) \neq 0, \; \forall z \in \mathcal{U}$$

Sia f una funzione olomorfa non identicamente nulla su un dominio Ω connesso e z_0 uno zero per tale funzione. Si definisce **ordine dello zero** (ν) il minimo ordine delle derivate di f che non sono nulle in tale punto (grazie al principio di identità si ha che almeno una tale derivata deve esistere):

$$\nu := \min\{n > 0 : \ f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

Tale valore può essere caratterizzato anche nei seguenti due modi:

- L'indice v a partire da cui inizia lo sviluppo di Taylor di f in z_0: $f(z)=\sum_{n=\nu}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n,\ c_\nu \neq 0$.
- Il valore v tale per cui esista finito e non nullo il seguente limite: $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^\nu}$.

Infatti il coefficiente c_k dello sviluppo di Taylor di f è proporzionale alla derivata *k-esima* di f in z_0, per cui sono tutti nulli quei coefficienti con $k < v$ ed il primo termine non nullo dello sviluppo è proprio quello di ordine v.
Se poi nel limite precedente si sostituisce quindi lo sviluppo di Taylor di f si vede subito che esso è finito e non nullo solo quando v coincide con l'ordine del primo termine dello sviluppo (poiché gli altri sono infinitesimi di ordine superiore e possono essere tralasciati nel calcolo del limite).

Se invece z_0 è un polo per una funzione *f*, si definisce **ordine del polo** l'ordine dello zero che la funzione *1/f* ha in z_0. Anche esso può essere caratterizzato in altri due modi:

- Il valore ν tale per cui esista finito e non nullo il limite: $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^\nu$.
- L'indice ν tale per cui *f* ammette il seguente sviluppo di Laurent: $f(z)=\sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,\ c_{-\nu}\neq 0$.

Infatti, il limite precedente è finito e non nullo se e solo se è finito e non nullo il limite:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)(z-z_0)^\nu}$$

che caratterizza proprio l'ordine dello zero per la funzione *1/f*.

La funzione $f(z)(z - z_0)^\nu$ ha quindi una singolarità eliminabile in z_0. Il suo sviluppo di Laurent è quindi formato dalla sola parte regolare, per cui:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n;\quad f(z)(z-z_0)^\nu=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n+\nu},\ con\ \ n+\nu>0 \quad\Rightarrow\quad n>-\nu$$

Si possono quindi distinguere le singolarità isolate di una funzione in base alla struttura della parte singolare dello sviluppo di Laurent di tale funzione:

- singolarità eliminabile: la parte singolare non contiene alcun termine.
- singolarità di tipo polo: la parte singolare contiene un numero finito di termini.
- singolarità essenziali: la parte singolare contiene un numero infinito di termini.

I.12 - TEOREMA DEL PROLUNGAMENTO ANALITICO

Teorema di unicità del prolungamento analitico: sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e $S \subseteq \mathbb{C}$ un insieme che contenga almeno un punto di accumulazione in Ω. Data una funzione f definita da S a valori in $\mathbb{C}$, allora esiste al più un prolungamento analitico di f in Ω.

Dimostrazione:

Siano f_1 e f_2 due prolungamenti analitici di f a Ω. Si consideri la funzione $(f_1 - f_2)$: essa si annulla in tutti i punti di S. Poiché l'insieme degli zeri di f (che contiene sicuramente S) ha almeno un punto di accumulazione, per il principio di identità $(f_1 - f_2) \equiv 0$ in Ω e quindi $f_1 \equiv f_2$.

Esempio:
Si vuole dimostrare che anche in campo complesso vale la formula: $\sin(2z) = 2\sin z \cos z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Ammesso di sapere che tale uguaglianza è vera per i numeri reali, si può applicare il teorema di unicità del prolungamento analitico nel modo seguente:
$\Omega = \mathbb{C}, \quad S = \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(2x) - 2\sin x \cos x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Si considerano ora le due seguenti funzioni in campo complesso:
1. $f_1(z) = \sin(2z) - 2\sin z \cos z$
2. $f_2(z) \equiv 0$

Poiché esse sono due funzioni olomorfe che coincidono con *f* in *S*, per l'unicità del prolungamento esse devono essere uguali, per cui:
$\sin(2z) - 2\sin z \cos z = 0; \quad \sin(2z) = 2\sin z \cos z$

Allo stesso modo si possono estendere al campo complesso le principali uguaglianze trigonometriche valide in ambito reale.

I.13 - DEFINIZIONE E CALCOLO DEI RESIDUI

Sia $\gamma \subseteq \Omega$ un circuito in campo complesso omotopo a zero. Si vuole calcolare il seguente integrale:

$$\int_\gamma f(z)dz$$

Se la funzione f è olomorfa in Ω tale integrale è nullo per la teoria già vista sulle primitive.

Si consideri ora una funzione con una singolarità isolata in un punto z_0. Dalla formula per trovare i coefficienti dello sviluppo di Laurent si ha che:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}; \quad se \;\; n=-1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi i\, c_{-1} = \int_{C_r(z_0)} f(z)dz$$

Si può iniziare a vedere come il coefficiente c_{-1} abbia un ruolo molto importante nel calcolo degli integrali in campo complesso: data una funzione f con una singolarità isolata in un punto z_0 si definisce **residuo** di f in z_0 il coefficiente di ordine -1 dello sviluppo di Laurent di f centrato in z_0.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n : \quad \mathrm{Res}(f, z_0) := c_{-1}$$

Si pone quindi il problema del calcolo dei residui in un qualche modo che sia diverso dalla definizione dei coefficienti dello sviluppo di Laurent.

Se la singolarità in z_0 è eliminabile si può subito concludere che il residuo sia nullo. Se la singolarità è essenziale non si può dire altro a riguardo.
Se invece z_0 è un polo di ordine ν per la funzione f, vale la seguente formula:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(\nu - 1)!} D^{(\nu-1)}\left[f(z)(z - z_0)^{\nu}\right]$$

In particolare, in caso di polo semplice (ovvero con $v = 1$), essa si semplifica nella seguente:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Infatti:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,\ \ c_{-1} \neq 0: \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} = c_{-1}$$

Vale inoltre la seguente formula: date g e h due funzioni olomorfe e z_0 uno zero di ordine 1 per h:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Esempi:

- $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f. Res(f, 0) = c_{-1} = 0.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$: $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2, infatti: $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

  $$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{2} = 0$$

Esempi:

- $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f. Res(f, 0) = c_{-1} = 0.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$: $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2, infatti: $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

  $\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{2} = 0$

- $f(z) = z\cot z = \dfrac{z\cos z}{\sin z}, \quad \sin z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  - $k = 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}\right)\cos z = 1$: $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile. Res(f, 0) = 0.
  - $k \neq 0$: $z_0 = k\pi$ è un polo di ordine 1.

$$\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)z\frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to k\pi} z\cos z\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi+k\pi)} =$$

$$= (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)\cos(k\pi)+\cos(z-k\pi)\sin(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(-1)^k}k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)} = k\pi = \mathrm{Res}(f, k\pi)$$

I.14 - INDICE DI AVVOLGIMENTO

Sia γ un circuito contenuto in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e z_0 un punto non appartenente a γ. Intuitivamente, si chiama **indice di avvolgimento** (che viene indicato con la scrittura Ind(γ, z_0)) di γ rispetto a z_0 il numero di volte che la curva gira attorno al punto, contate positive per un giro in senso antiorario, negative in caso contrario.

Per una definizione più rigorosa, si consideri una parametrizzazione $r(t)$ di γ, con $r: [a, b] \to \mathbb{C}$ e sia $\rho(t) := |r(t) - z_0|$. Si può dimostrare che esiste una funzione $\theta(t): [a , b] \to \mathbb{C}$ tale che:

$$r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Poiché, essendo γ un circuito, $r(a) = r(b)$, allora anche $\rho(a) = \rho(b)$, e quindi:

$$\left.\begin{array}{l} r(a) = z_0 + \rho(a)e^{i\theta(a)} \\ r(b) = r(a) = z_0 + \rho(a)e^{i\theta(b)} \end{array}\right\rangle \quad e^{i\theta(b)} = e^{i\theta(b)} \quad \Rightarrow \quad \theta(b) - \theta(a) = 2\pi m \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

Analiticamente, questo valore si può calcolare mediante il seguente integrale:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Dimostrazione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)ie^{i\theta(t)}\theta'(t)}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}dt = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\rho(t)\Big|_a^b + i\int_a^b \theta'(t)dt\right] = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$