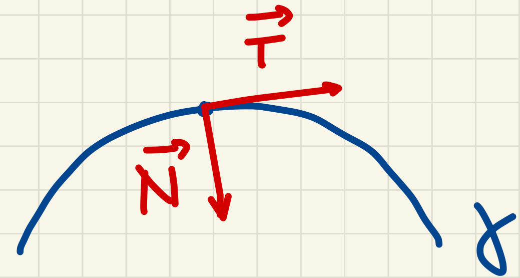
VERSORE BINORMALE 19-3-2020

$$\vec{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\underline{T}'(t)}{\|\underline{T}'(t)\|}$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

VERSORE BINORMALE



Il piano che contiene $\vec{N}$ e $\vec{T}$ ed è ortogonale a $\vec{B}$ contiene localmente la curva ed è detto **PIANO OSCULATORE**.

Se $\vec{B}$ è COSTANTE $\Longrightarrow$ la curva è piana.

Per calcolare $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ è più utile usare le seguenti relazioni:

$$\vec{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|} \qquad \vec{B}(t) = \frac{\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)}{\|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)\|}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$$

Ricordo che la curvatura di una curva è definita dalla relazione:

$$k(t) = \frac{\|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)\|}{\|\underline{r}'(t)\|^3} \qquad \rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

RAGGIO DI CURVATURA

ESERCIZIO 1. Sia data la curva di sostegno γ di equazioni

$$\underline{r}(t): \begin{cases} x = 3t + t^3 \\ y = 2t^2 + t^4 \\ z = t \end{cases}$$

Determinare il raggio di curvatura di γ in $P(4;3;1)$ e scrivere l'eq. del piano osculatore in P.

Sol.

P è ottenuto per $t = 1$

$\underline{r}'(t) = (3+3t^2;\ 4t+4t^3;\ 1)$ $\qquad r'(1) = (6;8;1)$

$\underline{r}''(t) = (6t;\ 4+12t^2;\ 0)$ $\qquad r''(1) = (6;16;0)$

$$r'(1) \times r''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 8 & 1 \\ 6 & 16 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(-16) - \underline{j}(-6) + \underline{k}(48) =$$

$$= (-16;6;48)$$

$$k(1) = \frac{\|(-16, 6, 48)\|}{\|(6,8,1)\|^3} = \sqrt{\frac{2596}{101^3}} \qquad \rho(1) = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{101^3}{2596}}$$

PIANO OSCULATORE IN P

Il piano osculatore è ortogonale a $\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1) = (-16; 6; 48)$ e passa per $P(4;3;1)$

$$\pi_{osc}: -\overset{8}{\cancel{16}}(x-4) + \overset{3}{\cancel{6}}(y-3) + \overset{24}{\cancel{48}}(z-1) = 0$$

$$\pi_{osc}: 8x - 3y - 24z = -1$$

ESERCIZIO 2 (CURVE PLANARI)

Sia data la famiglia di curve $\Gamma_a \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\underline{r}: \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma_a$$

$$\underline{r}(t) = \left(t^2;\ t+1;\ at^3 + t^2 + 2t + 1 \right)$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, Γ è planare?
Per tali valori di a scrivere l'eq. del piano che la contiene.

SOL.

$$\underline{r}(t) = \left(t^2;\ t+1;\ at^3 + t^2 + 2t + 1 \right)$$

$$\underline{r}'(t) = \left(2t;\ 1;\ 3at^2 + 2t + 2 \right)$$

$$\underline{r}''(t) = \left(2;\ 0;\ 6at + 2 \right)$$

$$\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t & 1 & 3at^2 + 2t + 2 \\ 2 & 0 & 6at + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(6at+2) - \underline{j}(12at^2 + \cancel{4t} - 6at^2 - \cancel{4t} - 4) + \underline{k}(-2) =$$

$$= \underline{i}(6at+2) - \underline{j}(6at^2 - 4) - 2\underline{k}$$

Se $a = 0$:

$$\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) = 2\underline{i} + 4\underline{j} - 2\underline{k} = (2;4;-2)$$ **COSTANTE**

$\Rightarrow \underline{r}(t)$ è **PLANARE.**

La curva piana è Γ_0 e il piano che la contiene è il piano OSCULATORE

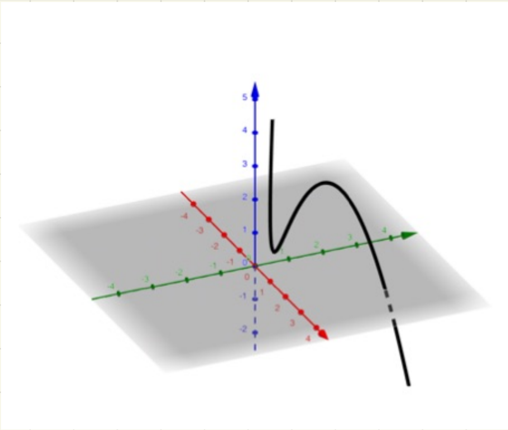
$a = 0$: $\quad \underline{r}(t) = (t^2;\ t+1;\ t^2+2t+1)$

Scelgo un suo punto, per esempio $t = 0$

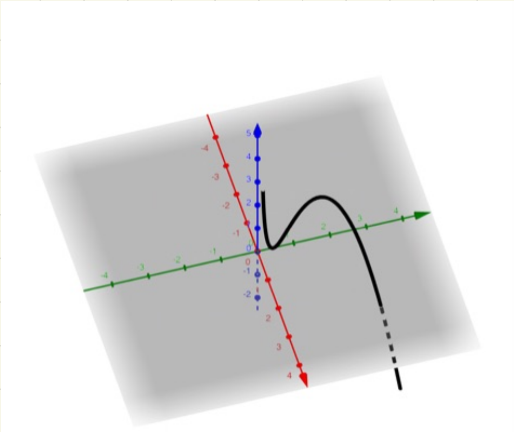
$P(0;1;1)$, e scrivo il piano $\perp$ a $(2;4;-2)$ e passante per P :

$$\pi :\ \cancel{2}x + \overset{2}{\cancel{4}}(y-1) - \cancel{2}(z-1) = 0$$

$\pi: \quad x + 2y - z = 1 .$

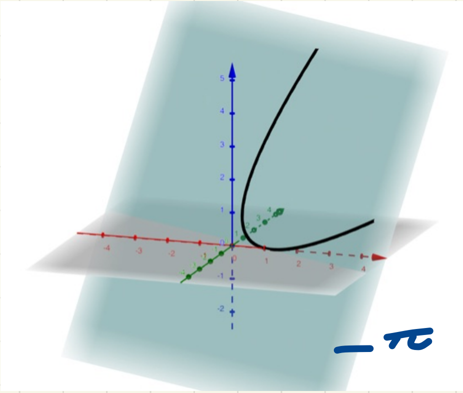


$a \neq 0$



$a \neq 0$

$a = 0$



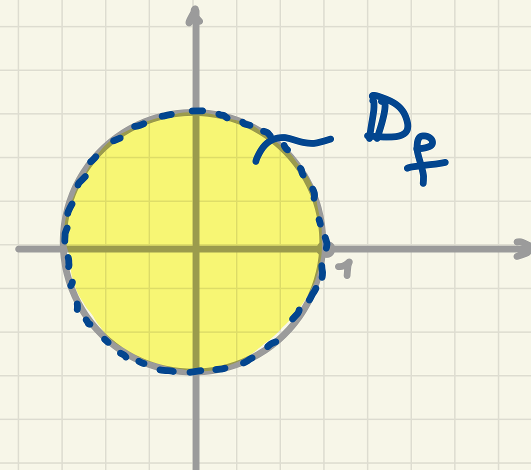
$-\pi$

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

ESERCIZIO 3. Determinare il dominio delle seguenti funzioni in due variabili:

1) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$

$D_f: \; 1-x^2-y^2>0 \;\longrightarrow\; x^2+y^2<1$



$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2<1\}$$

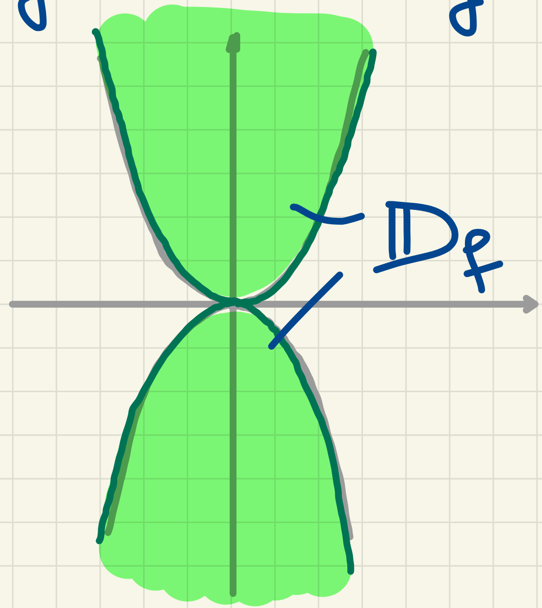
2) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

$D_f: \; x^2+y^2>0$ vero $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

$$D_f = \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

3) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^4}$ $\qquad D_f: \; y^2-x^4\geq 0$

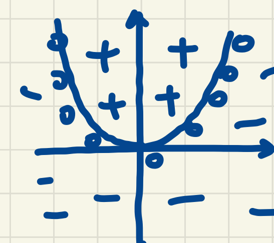
$$y^2 - x^4 \geq 0 \rightarrow y^2 \geq x^4 \rightarrow y \leq -x^2 \vee y \geq x^2$$



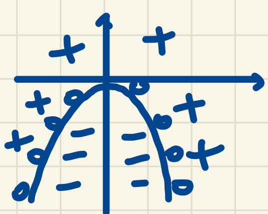
OPPURE:

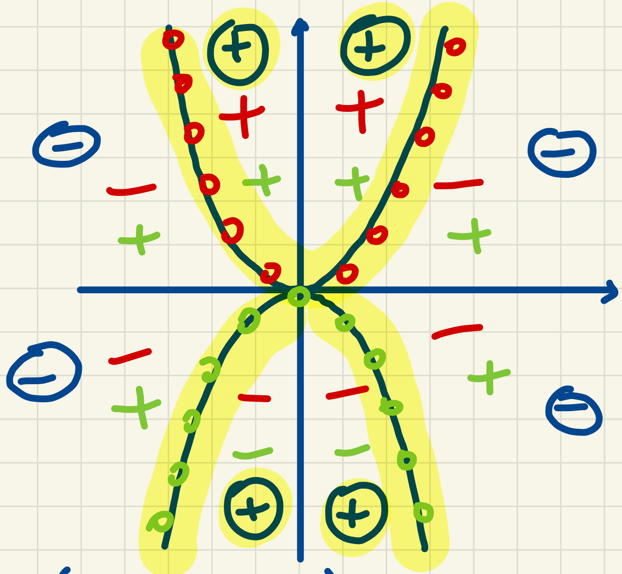
$$(y-x^2)(y+x^2) \geq 0$$

- I° $F>0$: $y - x^2 > 0 \rightarrow y > x^2$



- II $F>0$: $y + x^2 > 0 \rightarrow y > -x^2$

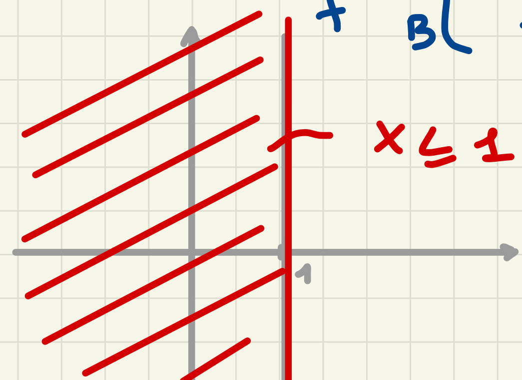




4) $f(x,y) = \log\left(y - \sqrt{1-x}\right)$

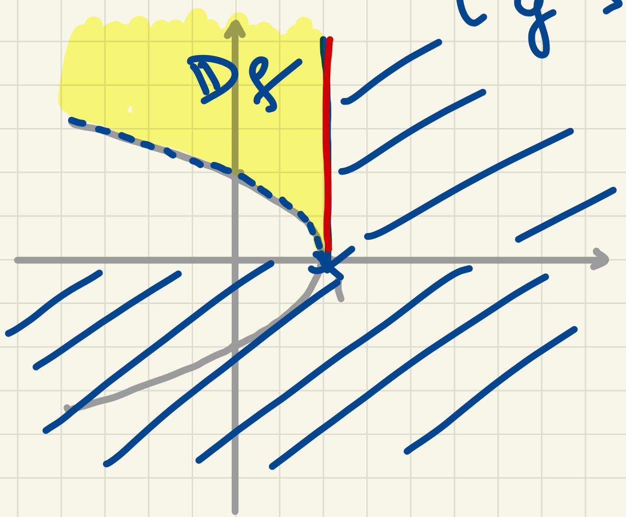
$$D_f : \begin{cases} {}^{A}\ y - \sqrt{1-x} > 0 \\ {}_{B}\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

B) $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$



A) $y > \sqrt{1-x}$

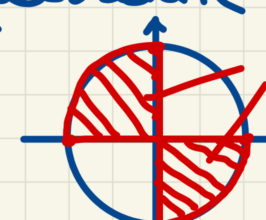
$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \to x \leq 1 & \text{C.E.} \\ y > 0 & \text{C.C.S.} \\ y^2 > 1-x \to x > 1-y^2 \end{cases}$$



5) $f(x,y) = \sqrt{-xy} + \text{arcsen}\,(x^2+y^2)$

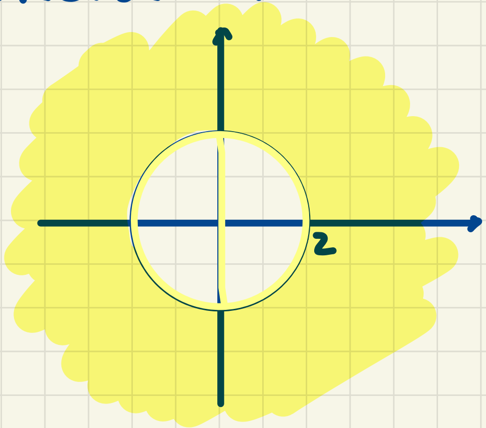
$$\begin{cases} -xy \geq 0 \to xy \leq 0 \\ -1 \leq x^2+y^2 \leq 1 \longrightarrow x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

($2°$ e $4°$ quadrante assi inclusi)



D_f

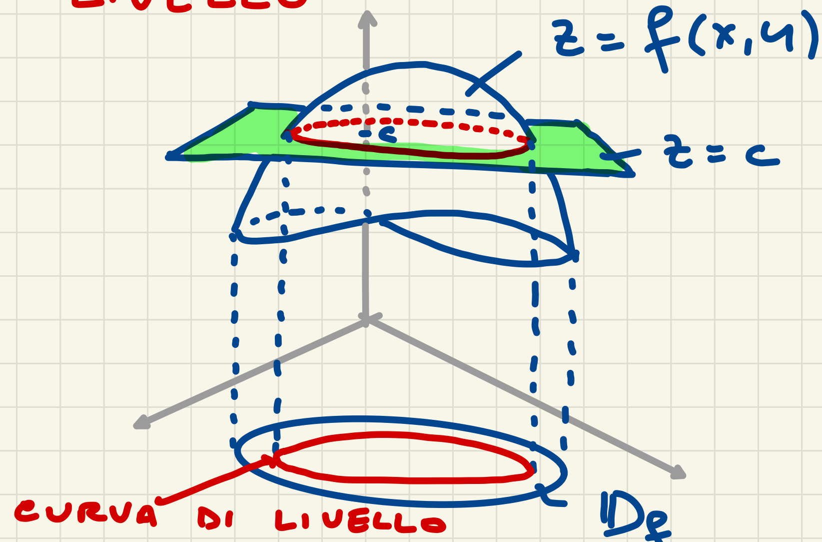
ESERCIZIO A CASA: $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$



CURVE DI LIVELLO

EQUAZIONE DELLA CURVA DI LIVELLO

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$$



ESERCIZIO 4. Determinare le curve di livello della funzione $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

SOL.

$$\begin{cases} z = c \\ z = e^{-x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow e^{-x^2-y^2} = c \quad , \quad c > 0.$$

$$e^{-x^2-y^2} = c \Rightarrow -x^2-y^2 = \ln c \Rightarrow x^2+y^2 = \ln \frac{1}{c}$$

Le curve di livello sono circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{\ln \frac{1}{c}}$

$$\begin{cases} c > 0 \\ \ln \frac{1}{c} \geq 0 \rightarrow \frac{1}{c} \geq 1 \rightarrow c \leq 1 \end{cases}$$

Ci sono curve di livello se $0 < c \leq 1$

OSS. Studiando le curve di livello siamo riusciti a determinare l'immagine di f

$$\mathrm{Im} f = (0; 1]$$

$$\max_{D} f = 1 \qquad \inf_{D} f = 0.$$

ESERCIZIO 5. Mediante le curve di livello e mediante opportune restrizioni individuare la natura delle seguenti superfici:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}$

- CURVE DI LIVELLO: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = c \quad , \quad c \geq 0$

$$x^2 + y^2 = 4c$$

$\Rightarrow$ circonferenze di centro $(0;0)$ e raggio $2\sqrt{c}$

- Restringo $z = f(x,y)$ all'asse x $(y=0)$

$$z = f(x,0) = \frac{x^2}{4}$$ PARABOLA.

- Restringo $z = f(x,y)$ all'asse y $(x=0)$

$$z = f(0,y) = \frac{y^2}{4}$$ PARABOLA

RISPOSTA: la superficie è un PARABOLOIDE ELLITTICO

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

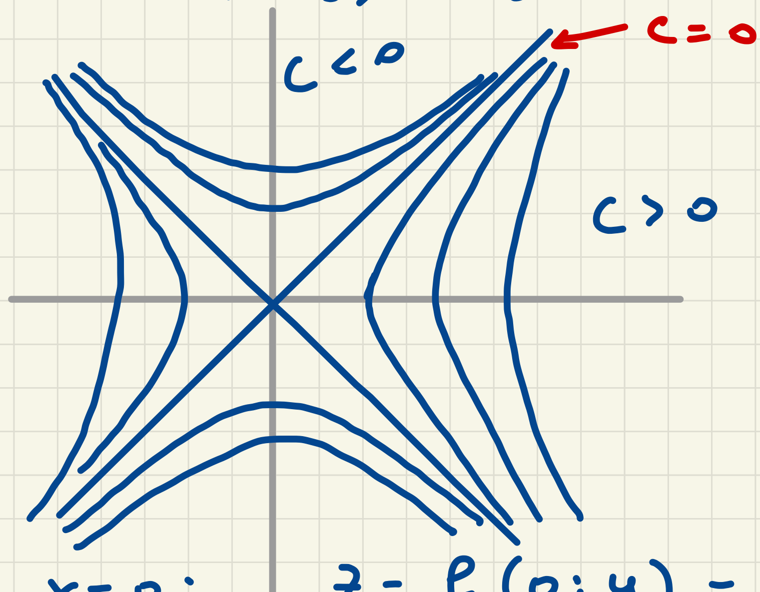
2) $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

CURVE DI LIVELLO : $x^2 - y^2 = c \gtrless 0$

$c > 0$: $x^2 - y^2 = c$ iperboli equilatere con fuochi sull'asse x.

$c < 0$: $x^2 - y^2 = c$ iperboli equilatere con fuochi sull' asse y.

$c = 0$: $x^2 - y^2 = 0$ $(x-y)(x+y) = 0$ COPPIA DI RETTE INCIDENTI



Restrizione $x = 0$: $z = f(0; y) = -y^2$ PARABOLA

" $y = 0$: $z = f(x; 0) = x^2$ "

$z = f(x,y) = x^2 - y^2$ PARABOLOIDE IPERBOLICO

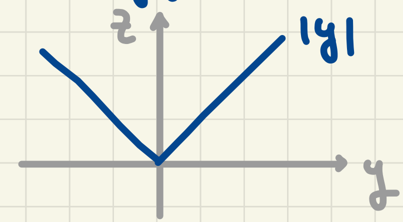
3) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

CURVE DI LIVELLO : $\sqrt{x^2+y^2} = c \qquad c \geq 0$

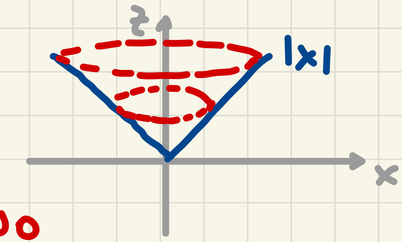
$$x^2+y^2 = c^2$$

circonferenze di centro $(0,0)$ e raggio c

• $x = 0$: $\quad z = f(0;y) = \sqrt{y^2} = |y|$



• $y = 0$: $\quad z = f(x;0) = \sqrt{x^2} = |x|$



$z = \sqrt{x^2+y^2}$ è un cono.

FUNZIONI IN TRE VARIABILI

ESERCIZIO 6. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y,z) = \log(x^2+y^2) + z$$

SOL. $\mathbb{D}_f : \; x^2+y^2 > 0$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \neq (0;0)\}$$

$\mathbb{D}_f$ è tutto $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z.

ESERCIZIO 7. Determinare le superfici di livello delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y,z) = x+3y+5z$

Le superfici di livello sono:

$$\begin{cases} w = x+3y+5z \\ w = c \end{cases} \Longrightarrow \quad x+3y+5z = c$$

PIANI PARALLELI.

2) $f(x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2$

superfici di livello: $x^2+3y^2+5z^2 = k, \quad k \geq 0$

ELLISSOIDE $(k>0)$

$k>0$: $$\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{\frac{k}{3}}+\frac{z^2}{\frac{k}{5}} = 1$$

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

ELLISSOIDE DI SEMIASSI

$a=\sqrt{k}$; $b=\sqrt{\frac{k}{3}}$; $c=\sqrt{\frac{k}{5}}$

3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c \qquad c > 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{c} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{c^2} \quad \text{(SFERA)}$$

Sfera di centro $(0;0;0)$ e raggio $\frac{1}{c}$.

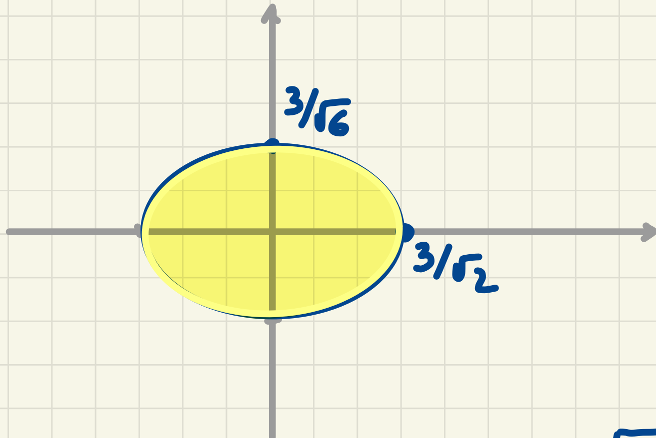
ESERCIZIO 8. Sia $f(x,y) = \sqrt{9-2x^2-6y^2}$, si determini il D_f e si disegnino le curve di livello 0; 1; 3. Si determini la curva di livello passante per il punto $P(1;1)$.

SOL.

$D_f: \quad 9 - 2x^2 - 6y^2 \geq 0$

$2x^2 + 6y^2 \leq 9$

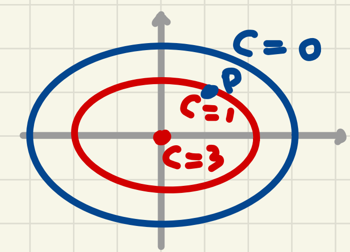
$\frac{x^2}{9/2} + \frac{y^2}{9/6} \leq 1$



CURVE DI LIVELLO : $\sqrt{9 - 2x^2 - 6y^2} = c \qquad c \geq 0$

$9 - 2x^2 - 6y^2 = c^2$

$c = 0 \Rightarrow \quad 9 - 2x^2 - 6y^2 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{9/2} + \frac{y^2}{9/6} = 1$



$c = 1 \Rightarrow \quad 9 - 2x^2 - 6y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 6y^2 = 8$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4/3} = 1$$

$c = 3 \Rightarrow \quad \cancel{9} - 2x^2 - 6y^2 = \cancel{9} \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 6y^2 = 0$

Curve di livello passante per $P(1;1)$:

$$9 - 2 \cdot (1)^2 - 6 \cdot (1)^2 = c^2$$

$$9 - 2 - 6 = c^2 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow c = 1$$