Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2015/2016
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Quarto appello di Metodi Analitici (30-9-16) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

(i) Enunciare la formula di Cauchy per la derivata n-esima di una funzione di variabile complessa.
(ii) Sia $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(a) $I_n := \displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^n}\,dz;$

(b) $J_n := \displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(2z-i)^n}\,dz.$

Soluzione.
(i) Si veda uno dei testi consigliati.
(ii) Osserviamo che la curva γ è una circonferenza di centro 0 e raggio 1 che gira una volta attorno all'origine.
(a) Sia $f(z) := \frac{\cos z}{(z-2i)^n}$. Per $n = 0$, f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, e quindi $I_0 = 0$. Per $n \geq 1$, f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$; poiché la curva γ ha indice 0 rispetto al punto singolare $2i$, si ha ancora $I_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. In conclusione, si ha $I_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(b) Per $n = 0$, dato che la funzione $\cos z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si ha $J_0 = 0$.
Per $n \geq 1$, osserviamo che si ha:

$$J_n = \frac{1}{2^n}\int_\gamma \frac{\cos z}{\left(z - \frac{i}{2}\right)^n}\,dz\,.$$

Dalla formula di Cauchy per la derivata n-esima, posto $g(z) = \cos z$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, ricaviamo

$$J_n = \frac{1}{2^n}\frac{2\pi i}{(n-1)!}g^{(n-1)}(\frac{i}{2})\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Fornire la definizione di funzione assolutamente continua. Stabilire giustificando la risposta se la funzione $f(x) := \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ appartiene ad $AC([0,1])$.

(ii) Fornire la definizione di spazio di Banach. Stabilire giustificando la risposta se lo spazio $C^0([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali sull'intervallo $[0,1]$, munito della norma $\|u\|_{L^1} := \int_0^1 |u(x)|\, dx$ è uno spazio di Banach.

(iii) Fornire la definizione di spazio di Hilbert. Stabilire giustificando la risposta se lo spazio $C^0([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali sull'intervallo $[0,1]$, munito della norma $\|u\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$ è uno spazio di Hilbert.

Soluzione.

Per le definizioni, si vedano le slides del corso o uno dei testi consigliati.

(i) La funzione $f(x)$ non è assolutamente continua, in quanto non è neppure continua.

(ii) Lo spazio $C^0([0,1])$ munito della norma $\|u\|_{L^1}$ non è uno spazio di Banach, perché si può costruire una successione di Cauchy che non converge. Basta considerare la successione data da:

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$

(iii) Lo spazio $C^0([0,1])$ munito della norma $\|u\|_\infty$ non è uno spazio di Hilbert, perché non soddisfa l'identità del parallalogramma. Prese ad esempio $f(x) := x$, e $g(x) := 1 - x$, si ha

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)\,,$$

in quanto

$$\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1\,.$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) = x^3 e^{-x} H(x)\,,$$

dove H è la funzione di Heavyside.

Soluzione.
Per le note proprietà della trasformata di Fourier, si ha

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = i^3 \frac{d}{d\xi^3} \mathcal{F}\big(e^{-x} H(x)\big)\,.$$

Calcoliamo $\mathcal{F}\big(e^{-x} H(x)\big)$. Usando la definizione si ottiene:

$$\mathcal{F}\big(e^{-x} H(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-x} H(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x}\,dx = -\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{1+i\xi}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\xi} =: v(\xi)\,.$$

Si ha:

$$v'(\xi) = -i(1+i\xi)^{-2}\,, \quad v''(\xi) = -2(1+i\xi)^{-3}\,, \quad v'''(\xi) = 6i(1+i\xi)^{-4}\,.$$

Pertanto

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = i^3 \cdot 6i(1+i\xi)^{-4} = 6(1+i\xi)^{-4}\,.$$