Analisi matematica 2		20 luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x - y - 2x^2 - 2y^2$$

nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$g(x,y,z) = x - y + 2z^2$$

nell'insieme $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

L'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente qualche funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 0$? (Giustificare la risposta).

(*) Spiegare perché l'equazione $g(x,y,z) = 0$ non definisce implicitamente una funzione $z = z(x,y)$ *in un intorno* del punto $(x,y) = (0,0)$.

2.

a) Definire la nozione di punto di equilibrio (o punto critico) di un sistema autonomo. Trovare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = x + xy \\ y' = y - xy^2 \end{cases}$$

e studiarne la stabilità con il metodo di linearizzazione.

b) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \frac{2}{t}\, y + t$$

3. Enunciare il teorema della divergenza e verificarne la validità per il campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + \frac{z^3}{3}\,\mathbf{k}$$

nel cubo $D := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Dimostrare che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e trovare un potenziale.

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\, x^n \quad ; \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)(x+1)^n$$

Trovare la somma di (almeno) una delle due serie.

ii)

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

come somma di una serie numerica, giustificando i passaggi. Calcolare i primi 4 termini della serie.

SOLUZIONI

1.

a) Derivate parziali:
$$f_x(x,y) = 1 - 4x; \quad f_y(x,y) = -1 - 4y$$
I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente
$$\nabla f(x,y) = (1-4x)\,\mathbf{i} - (1+4y)\,\mathbf{j}$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} 1-4x = 0 \\ 1+4y = 0 \end{cases}$$
troviamo l'unica soluzione $P_0(1/4, -1/4)$. Il punto P_0 è interno al disco D. Calcolando le derivate seconde:
$$f_{xx}(x,y) = -4; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0; \quad f_{yy}(x,y) = -4$$
e valutando la matrice Hessiana si deduce che si tratta di un punto di massimo; il *valore* della funzione nel punto è $f(1/4,-1/4) = 1/4$. Gli estremi sulla frontiera di D si trovano con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, oppure studiando la funzione composta
$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta - \sin\theta - 2, \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$
che ha un punto di minimo per $\theta = 3\pi/4$ con uno di massimo per $\theta = 7\pi/4$. Abbiamo quindi sulla frontiera i punti $P_1(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $P_2(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, con
$$f(P_1) = -(\sqrt{2}+2) \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = \sqrt{2} - 2.$$
Si conclude che P_0 è il punto di massimo assoluto e P_1 è il punto di minimo assoluto della funzione in D.

b) L'insieme E è la palla di raggio 1 centrata nell'origine; cerchiamo i punti critici di g *all'interno* di E. Vettore gradiente:
$$\nabla g(x,y,z) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}$$
Il gradiente non si annulla mai, quindi non esistono estremi locali all'interno della palla.
Gli estremi sulla frontiera della palla si possono cercare tra i punti critici vincolati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; in alternativa, osserviamo che essendo
$$g(x,y,-z) = g(x,y,z)$$
possiamo limitarci a studiare gli estremi di g sulla semisfera
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad (x,y) \in D\,.$$
Abbiamo allora
$$g(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) = x - y - 2x^2 - 2y^2 + 2 = f(x,y) + 2\,, \qquad (x,y) \in D\,.$$
Possiamo allora utilizzare i risultati del punto a); si conclude che (sulla palla) la funzione g assume il valore massimo nei punti $(1/4, -1/4, \pm\sqrt{7/8})$ con $g(1/4,-1/4,\pm\sqrt{7/8}) = 9/4$ e valore minimo nel punto $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ con $g(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = -\sqrt{2}$.

L'equazione $f(0,y) = 0$ ha due soluzioni, $y = 0$ e $y = -1/2$. Essendo $f_y(0,0) = -1 \neq 0$ e $f_y(0,-1/2) = 1 \neq 0$, per il teorema della funzione implicita sono definite due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno dell'origine e tali che $f(x, y_1(x)) = f(x, y_2(x)) = 0$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1/2$. Le due funzioni si potevano anche ottenere risolvendo rispetto a y l'equazione $f(x,y) = 0$.
(*) In *qualunque* intorno di $(0,0)$ ci sono punti (x,y) tali che l'equazione $x - y + 2z^2 = 0$ non ha soluzioni z (precisamente i punti in cui vale $x > y$). Dunque, in *nessun* intorno dell'origine è definita implicitamente una funzione $z(x,y)$.

2.

a) I punti di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + xy = 0 \\ y - xy^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(0,0)$ e $(-1,-1)$. Per scrivere il sistema linearizzato si calcola la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ -y^2 & 1-2xy \end{pmatrix}$$

Nei punti critici:

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = v \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in $(1,-1)$ è

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = -u - v \end{cases}$$

Nel primo caso, la matrice dei coefficienti ha l'autovalore doppio 1, di molteplicità geometrica 2. Quindi l'origine è un nodo a stella *instabile* per il sistema linearizzato; nel secondo caso, gli autovalori sono $-1/2 \pm \sqrt{5}/2$, per cui l'origine è un *colle* per il sistema linearizzato. In base alla teoria, anche per il sistema non lineare i punti $(0,0)$ e $(-1,-1)$ sono instabili.

b) Utilizzando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, si trova l'integrale generale

$$y(t) = C\,t^2 + t^2 \ln|t|, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Soluzione alternativa: l'equazione omogenea associata $z' = \frac{2}{t}z$ ha l'integrale generale

$$z(t) = Ct^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cercando una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $\psi(t) = C(t)t^2$ e sostituendo nell'equazione si ricava $C(t) = \ln|t|$.

3. La frontiera dell'insieme è una superfice regolare a pezzi, unione delle 6 facce del cubo:

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{6} F_i,$$

dove

$$F_1 = \{(x, y, 0)\,,\,(x, y) \in [0,1] \times [0,1]\}, \qquad F_2 = \{(x, y, 1)\,,\,(x, y) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

$$F_3 = \{(x, 0, z)\,,\,(x, z) \in [0,1] \times [0,1]\}, \qquad F_4 = \{(x, 1, z)\,,\,(x, z) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

$$F_5 = \{(0, y, z)\,,\,(y, z) \in [0,1] \times [0,1]\}, \qquad F_6 = \{(1, y, z)\,,\,(y, z) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

La normale uscente è

$$\mathbf{n}_e\big|_{F_1} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_e\big|_{F_2} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_e\big|_{F_3} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{n}_e\big|_{F_4} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{n}_e\big|_{F_5} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{n}_e\big|_{F_6} = \mathbf{i}.$$

Flusso uscente:

$$\sum_{i=1}^{6} \int\int_{F_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS =$$

$$= \frac{1}{3} \int\int_{[0,1]\times[0,1]} dxdy + \int\int_{[0,1]\times[0,1]} x^2 \, dxdz + \int\int_{[0,1]\times[0,1]} y^2 \, dydz = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\,.$$

Integrale della divergenza:

$$\int\int\int_D \mathrm{div}\mathbf{F}(x, y, z) \, dxdydz = \int\int\int_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dxdydz$$

$$= \int\int\int_D x^2 \, dxdydz + \int\int\int_D y^2 \, dxdydz + \int\int\int_D z^2 \, dxdydz = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\,.$$

Poiché $\mathrm{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ in tutto $\mathbb{R}^3$, il campo è conservativo. Un potenziale U avrà la forma $U(x, y, z) = z^4/12 + h(x, y)$, dove h soddisfa le condizioni $h_x(x, y) = xy^2$ e $h_y(x, y) = x^2 y$. Si ricava facilmente $h(x, y) = x^2 y^2/2 + C$, per cui

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{12} z^4 + C\,.$$

4.

i) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie a) ha raggio di convergenza $R = 1$, per cui converge (assolutamente) per $-1 < x < 1$. La serie converge anche per $x = 1$ per il criterio di Leibniz, mentre per $x = -1$ diverge a $+\infty$. L'intervallo di convergenza è quindi $(-1, 1]$.
La serie b) ha centro in $x_0 = -1$ e raggio di convergenza $R = 2$ poiché vale

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)^{1/n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1-(2/3)^n\right)^{1/n}=\frac{1}{2}\,.$$

Dunque la serie converge assolutamente nell'intervallo $(-3, 1)$. Agli estremi dell'intervallo il termine generale non tende a zero, per cui la serie non converge.
Detta $f(x)$ la somma della serie a), applicando il teorema di derivazione per serie nell'intervallo $(-1, 1)$ abbiamo :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}x^m=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\,.$$

Osservando che $f(0) = 0$ abbiamo allora

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=-\frac{1}{2}\ln(1+x),\qquad x\in(-1,1)$$

Applicando il teorema di Abel, l'identità vale anche in $x = 1$.
La serie *b*), nell'intervallo di convergenza, si può scrivere come la differenza di due serie geometriche convergenti rispettivamente a

$$\frac{1}{1-(x+1)/2}=\frac{2}{1-x}\qquad\text{e}\qquad\frac{1}{1-(x+1)/3}=\frac{3}{2-x}\,.$$

Quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)(x+1)^n=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

ii) Sviluppando e^x in serie di MacLaurin si ottiene

$$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}x^m,$$

convergente in tutto $\mathbb{R}$. Applicando il teorema di integrazione per serie:

$$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\int_0^1 x^m\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!(m+1)}$$

Dunque:

$$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}\,dx=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{96}+\ldots$$