Marco Contedini

LEZIONE 4

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

09 ottobre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Matrici

1. Cercare la forma della generica matrice M di ordine 2 tale che $M^2 = \mathbb{I}$

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Siano $A_N, B_N \in \mathbb{R}^{N,N}$ i cui elementi sono così definiti:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{se } j = i \\ 1 & \text{se } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

   Calcolare i determinanti di A_N e B_N.

4. Calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Discutere il rango delle seguenti matrici al variare del parametro α:

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & \alpha & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

2 Esercizi proposti

1. Cercare la forma della generica matrice M di ordine 2 tale che $M^2 = \mathbb{O}$

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

3. determinare per quali valori di x si annullano i determinanti delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & 0 \\ x-1 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & -2 & 3 \\ 2 & x & -1 \\ -x & -8 & 11 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ x & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Determinare i valori di x per i quali esiste ed è invertibile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \log x & log(1-x) & 1 \\ log(1-x) & \log x & 2 \\ 0 & 0 & \log x \end{pmatrix}$$

5. Calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$a) \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3 Soluzioni

1. $$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Sia $M^2 = \mathbb{I}$, ovvero:
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Gli elementi della matrice M devovo soddisfare le seguenti relazioni:
   $$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases}$$
   Se $a \neq -d$ allora necessariamente $b = c = 0$. Segue che $a^2 = d^2 = 1$, pertanto le uniche soluzioni sono $a = d = 1$ e $a = d = -1$, ovvero $M = \mathbb{I}$ e $M = -\mathbb{I}$. Viceversa se $a = -d$, b e c possono essere qualsiasi, pertanto abbiamo che $a = \pm\sqrt{1-bc} = -d$. Le generiche matrici M sono quindi della forma:
   $$M = \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix} \quad \text{con } bc \leq 1, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

2. Per quanto riguarda la prima matrice, è conveniente sommare la prima e la terza riga. Si ha:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-6+4) = -4$$
   Per quanto riguarda la seconda matrice:
   $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 12 + 6 + 9 = \\ &= 27 \end{aligned}$$

3. Scriviamo esplicitamente le matrici A_N e B_N:
   $$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'unico elemento non nullo della prima riga è $a_{1,2}$ e gli unici elementi non nulli della seconda riga sono: $a_{2,1}$ e $a_{2,3}$. Quindi:

$$\det A_N = -a_{1,2} \cdot (a_{2,1} \cdot \det A_{N-2} + a_{2,3} \cdot 0) = -\det A_{N-2}$$

Poichè: $\det A_1 = 0$ e $\det A_2 = -1$ la formula ricorsiva precedente ci permette di asserire che: $\det A_{2N+1} = 0$ e $\det A_{2N} = (-1)^N\ \forall N \in \mathbb{N}$. Ragionando come per la matrice A_N, gli unici elementi non nulli della matrice B_N nella prima riga sono $b_{1,1} = 2$ e $b_{2,1} = 1$. Quindi:

$$\det B_N = 2 \cdot \det B_{N-1} - 1 \cdot (b_{2,1} \cdot \det B_{N-2} + b_{2,3} \cdot 0) = 2 \cdot \det B_{N-1} - \det B_{N-2}$$

Poichè: $\det B_1 = 2$ e $\det B_2 = 3$ la formula ricorsiva precedente, per induzione, ci permette di asserire che: $\det B_N = N + 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

4. Calcolo delle matrici inverse, mediante il metodo dei complementi algebrici:
Fase 1: si calcolano i determinanti dei minori algebrici $M_{i,j}$ (ovvero le matrici quadrate che si ottengono da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna).
Fase 2: Si scrive la matrice dei complementi algebrici $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.
Fase 3: si fa la trasposta della matrice C.
Fase 4: si dividono gli elementi della matrice trovata per il determinante di A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+4} \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

$\det B = 1$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa di C mediante l'algoritmo di Gauss: esso consiste nello scrivere la matrice da invertire e la matrice identità uno accanto all'altra. Effettuando le usuali operazioni di Gauss (somma e differenza di **righe**, scambio, prodotto per uno scalare) **simultaneamente** sulle matrici, si trasforma la matrice da invertire nella matrice identità. In parallelo la matrice identità si trasformerà nell'inversa della matrice iniziale.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II-III]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}II]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[I-II]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}I]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II \leftrightarrow III]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

5. Il rango di una matrice è il numero di righe (o di colonne) linearmente indipendenti. Sia A una matrice $n \times m$. Allora $rk(A) \leq \min(n, m)$.
   Per calcolare il rango di una matrice si può tentare di verificare "a mano" la dipendenza lineare di una colonna (o di una riga) dalle altre oppure determinare la più grande matrice sottoquadrata che ha determinante non nullo. In questo caso è utile applicare il teorema di Kronecker o "degli orlati": data una matrice A, trovato un minore M con determinante non nullo, il rango di A è uguale all'ordine di M se le matrici "orlate" di M hanno detetermінante nullo. Si dice matrice "orlata" di M una qualsiasi matrice aggiungendo a M una riga ed una colonna qualsiasi di A.

   - In questo caso $rk(A) = 1$ perchè le righe sono tra loro proporzionali.
   - $rk(B) = 2$ perchè solo le prime due colonne sono indipendenti, infatti la terza colonna è la somma delle prime due, la quarta colonna è la differenza tra la seconda e la prima colonna. Anche tra le righe c'è necessariamente una dipendenza lineare. Detta r_i la i-esima riga, si ha: $r_3 = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{4}r_2$.
   - Le prime due colonne solo linearmente indipendenti. La terza colonna è la somma delle prime due colonne, la quarta colonna è uguale alla differenza tra la seconda e la prima colonna.
     Oppure: la terza riga è l'opposta della prima e la quarta riga è l'opposta della seconda.
     Quindi $rk(C) = 2$.

6. Determinazione del rango della matrice al variare del parametro α.

   - $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & \alpha & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -12 \end{pmatrix}$. La matrice ha un minore, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo.
     Quindi $2 \leq rk(D) \leq 3$.
     Orliamo con la prima riga e la terza colonna:
     $$\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 3\alpha^2 - 3\alpha.$$
     Questo determinante è nullo se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$. Orliamo con la prima riga e quarta colonna:
     $$\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} = 72\alpha - 72.$$
     Questo determinante si annulla soltanto per $\alpha = 1$.
     Quindi:
     se $\alpha = 1$, $rk(A) = 2$;
     se $\alpha \neq 1$, $rk(A) = 3$.

- $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

  La matrice ha un minore, $\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ con determinante $\alpha^2 + 2 \neq 0$.
  Quindi $2 \leq rk(D) \leq 3$.
  Orliamo con la prima riga e quarta colonna:

  $$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2 - \alpha$$

  Questo determinante si annulla per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. Se ora orlassimo con la prima riga e con la prima colonna otterremmo un'equazione di terzo grado in α.
  Per ora sappiamo che se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ il rango di B vale 3. Basta allora sostituire α prima con 0 e poi con 1 e analizzare distintamente questi casi.
  Sia $\alpha = 0$, allora: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  $rk(B) = 3$ perchè il minore di ordine tre formato dalle prime tre colonne ha determinante diverso da zero.
  Sia $\alpha = 1$, allora: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  $rk(B) = 2$ perchè ci sono tre colonne uguali tra di loro, di conseguenza le uniche colonne indipendenti sono la prima e la seconda.
  Quindi: $rk(B) = 3$ se $\alpha \neq 1$ e $rk(B) = 2$ se $\alpha = 1$

4 Soluzione degli esercizi proposti

1. Poniamo:

   $$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Allora:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   ovvero:

   $$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases}$$

   Sia $a \neq -d$. Dalla seconda e dalla terza equazione segue che $b = c = 0$, dalla prima $a = 0$ e dalla quarta $d = 0$ (ma troviamo che $0 = a = -d$, e siamo costretti, per coerenza, a scartare questa soluzione!)
   Sia $a = -d$, b e c possono essere numeri qualsiasi ma non concordi in segno, infatti dalla prima equazione abbiamo: $a = \pm\sqrt{-bc}$ e dalla quarta segue che:

$d = \mp\sqrt{-bc}$ (ricordiamoci che a e b devono essere opposti).
La generica matrice M sarà quindi della forma:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -\sqrt{-bc} & b \\ c & \sqrt{-bc} \end{pmatrix} \quad \text{con } bc \leq 0, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

In particolare, se $b = c = 0$ si recupera la soluzione banale $M = \mathbb{O}$ scartata nel caso $a \neq -d$.

2. Il determinante della prima matrice vale 1 (è un'applicazione dell'identità fondamentale trigonometrica).
Per quanto riguarda la seconda matrice:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \end{vmatrix} - \cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta \end{vmatrix} = \\
&= -\sin\varphi(-\sin^2\vartheta\sin\varphi - \cos^2\vartheta\sin\varphi) - \cos\varphi(-\sin^2\vartheta\cos\varphi - \cos^2\vartheta\cos\varphi) = \\
&= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{vmatrix} x & x+1 & 0 \\ x-1 & x & x+1 \\ 0 & x-1 & x \end{vmatrix} = -x^3 + 2x = 0 \text{ se } x = 0, \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ 2 & x & -1 \\ -x & -8 & 11 \end{vmatrix} = 14x^2 - 10x - 4 = 0 \text{ se } x = 1 \text{ oppure } x = \frac{2}{7}$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ x & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 2 = 0 \text{ se } x = \pm 1$$

4. una matrice A è invertibile se $\det A \neq 0$.
Se $x = 0$ e $x = 1$ la matrice A non è definita.

$$\begin{aligned}
\det A &= \log x \left(\log^2 x - \log^2(1-x)\right) = \\
&= \log x \left(\log x - \log(1-x)\right)\left(\log x + \log(1-x)\right) = \\
&= \log x \log \frac{x}{1-x} \log \frac{x}{1+x}
\end{aligned}$$

$\det A = 0$ solo se $x = 1/2$. Per $x \neq 1/2$ la matrice A è invertibile.

5. (a) La matrice in questione è una matrice diagonale a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che in questo caso la matrice inversa è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

In questo caso: $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Quindi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{eh-fg} & -\frac{f}{eh-fg} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{eh-fg} & \frac{e}{eh-fg} \end{pmatrix}.$$

(b) Se operando una serie di scambi tra righe (colonne) si ottiene una nuova matrice B da A allora operando la stessa serie di scambi tra colonne (righe) dalla matrice B^{-1}, si ottiene A^{-1}.
In questo caso la matrice di partenza può essere trasformata in una matrice a blocchi nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}\leftrightarrow\text{IV colonna}]{} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}\leftrightarrow\text{III riga}]{} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'inversa dell'ultima matrice si calcola facilmente e, operando gli opportuni scambi, otteniamo l'inversa della matrice di partenza.

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}\leftrightarrow\text{III colonna}]{} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}\leftrightarrow\text{IV riga}]{}$$

$$\to \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) La matrice A ha un minore, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo. Quindi $2 \leq rk(D) \leq 3$.
Usiamo il teorema di Kronecker.
Orliamo questo minore con la prima colonna e la terza riga. Abbiamo:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Orliamo adesso con la quarta colonna e con la terza riga:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Perciò: $rk(A) = 2$.

(b) La matrice B contiene un minore, quello formato dalle ultime tre colonne, con determinante non nullo. Esse sono pertanto indipendenti, quindi: $Rk(B) = 3$.

(c) Detta c_i la i-esima colonna della matrice C, si può notare che: $c_4 = c_1 + c_2 - c_3$ e $c_5 = c_1 - c_3$. Oppure: il minore formato dalle prime tre colonne e ultime tre righe ha determinante diverso da zero. I due minori di ordine 4 che lo contengono hanno determinante nullo.