

Marco Bramanti

Esercitazioni di Analisi 3

Copyright © Cusl 2001
Cooperativa Universitaria Studio e Lavoro
Piazza Leonardo da Vinci, 32 - 20133 Milano

Prima edizione: settembre 2001

www.cusl.it

Stampato da: Laser Copy Center
Via Livraghi, 1 - 20126 Milano

Tutti i diritti riservati. Riproduzione anche parziale vietata. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, archiviata in un sistema di recupero o trasmessa, in qualsiasi forma o con qualunque mezzo elettronico, meccanico, fotoriproduzione memorizzazione o altro, senza permesso scritto da parte dell'Editore.

ISBN 88-8132-014-2

Premessa

Questo testo raccoglie il materiale da me utilizzato, da qualche anno, per le esercitazioni del corso di Analisi III tenuto dal prof. Carlo Pagani presso la facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Trattandosi di un corso che tocca argomenti provenienti da vari settori dell'analisi matematica (come si può vedere sfogliando l'indice di questo libro), risultava difficile suggerire agli studenti un unico testo, accessibile, che potesse costituire un riferimento per esercizi, esempi e osservazioni su questi argomenti. È questa la motivazione principale che mi ha spinto, su richiesta degli studenti, a raccogliere in un libro il contenuto delle mie esercitazioni. Il testo ha mantenuto il carattere "alla buona" dell'esposizione in aula, e riflette ovviamente le particolari esigenze didattiche del corso per il quale è nato. Perciò, mentre in generale si presentano esempi e osservazioni che presuppongono la conoscenza della teoria sottostante, in alcuni casi si è fornita un'esposizione sommaria della teoria stessa: è questo il caso della trasformata di Laplace (cap. 14), delle equazioni quasilineari del 1^o ordine (cap. 16), delle funzioni di Bessel (cap. 23) e, in parte, delle funzioni speciali trattate nel § 13.3.

Il testo raccoglie più materiale di quanto possa essere ragionevolmente svolto in una cinquantina di ore di esercitazioni. Questo vale soprattutto per la 3^a parte (equazioni a derivate parziali), per la quale ho inteso fornire allo studente una certa varietà di esempi, che possano servire da orientamento nell'affronto di problemi simili. Così pure l'ultimo capitolo (funzioni di Bessel) è stato pensato come un piccolo prontuario che lo studente potrà consultare all'occorrenza.

Desidero ringraziare la Prof. ssa Luisa Rossi Costa che ha letto il manoscritto e ha dato utili suggerimenti nella stesura di questo testo. La

responsabilità degli eventuali errori è naturalmente mia.

Desidero inoltre ringraziare la CUSL che ha reso possibile la pubblicazione, in tempi brevi, di questo volume, ed Emanuele Volpe per il lavoro di battitura del testo.

Milano, Settembre '93.

Indice

Parte I. Funzioni olomorfe

| | | |
|----------------|---|-----------|
| Cap. 1. | <i>LE FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE COMPLESSA</i> | 10 |
| 1.1. | Relazioni tra funzioni elementari | 10 |
| 1.2. | Parte reale, parte immaginaria e modulo delle funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$ | 12 |
| 1.3. | Periodicità e zeri delle funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$ | 14 |
| Cap. 2. | <i>CONDIZIONI DI MONOGENEITÀ. DERIVABILITÀ IN SENSO COMPLESSO. FUNZIONI ARMONICHE</i> | 17 |
| 2.1. | Condizioni di monogeneità e derivabilità in senso complesso | 17 |
| 2.2. | Funzioni armoniche. Armonica coniugata | 22 |
| Cap. 3. | <i>CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO. FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY</i> | 30 |
| 3.1. | Primi esempi di calcolo di integrali nel campo complesso | 30 |
| 3.2. | Esempi di calcolo di integrali reali con metodi di variabile complessa | 34 |
| 3.3. | Calcolo di integrali nel campo complesso mediante formule integrali di Cauchy | 41 |
| Cap. 4. | <i>SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT. STUDIO DELLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE. CALCOLO DEI RESIDUI</i> | 44 |
| 4.1. | Richiami sul calcolo con serie di potenze | 44 |
| 4.2. | Sviluppi di Laurent | 48 |
| 4.3. | Studio delle singolarità isolate di una funzione mediante sviluppi di Laurent | 50 |
| Cap. 5. | <i>APPLICAZIONI DEI TEOREMI DEI RESIDUI</i> | 60 |
| 5.1. | Applicazioni dei teoremi dei residui al calcolo di integrali nel campo complesso | 61 |
| 5.2. | Applicazioni dei teoremi dei residui al calcolo di integrali di variabile reale | 64 |
| 5.2.1. | <i>Integrali di funzioni razionali</i> | 64 |
| 5.2.2. | <i>Lemmi di Jordan</i> | 67 |

| | | |
|----------------|--|-----|
| 5.2.3. | <i>Integrali del tipo</i> $\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx, \dots$ | 71 |
| 5.2.4. | <i>Integrali del tipo</i> $\int_{\mathbb{R}} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta$ | 79 |
| 5.2.5. | <i>Integrali che richiedono cammini di tipo rettangolare</i> | 82 |
| 5.3. | Applicazioni del teorema dell'indicatore logaritmico e del teorema di Rouché | 87 |
| Cap. 6. | <i>TRASFORMAZIONI DEL PIANO COMPLESSO. MAPPE CONFORMI</i> | 90 |
| 6.1. | Alcune trasformazioni notevoli del piano complesso | 90 |
| 6.2. | Mappe conformi | 93 |
| Cap. 7. | <i>FUNZIONI POLIDROME</i> | 100 |
| 7.1 | Classificazione delle polidromie e ricerca dei punti di diramazione | 100 |
| 7.2. | Calcolo di integrali col metodo dei residui e funzioni polidrome | 108 |

Parte II. Spazi di funzioni, integrale di Lebesgue, trasformate

| | | |
|-----------------|---|-----|
| Cap. 8. | <i>SPAZI VETTORIALI. SPAZI METRICI. SPAZI NORMATI</i> | 113 |
| 8.1. | Esempi di spazi di funzioni | 113 |
| 8.2. | Spazi metrici completi. Sottospazi | 115 |
| 8.3. | Spazi di successioni | 121 |
| Cap. 9. | <i>MISURA DI LEBESGUE</i> | 123 |
| 9.1. | Alcuni esempi di insiemi misurabili | 123 |
| 9.2. | Misura e dimensione di Hausdorff di un insieme. Insiemi frattali. | 126 |
| Cap. 10. | <i>FUNZIONI MISURABILI</i> | 130 |
| 10.1. | Funzioni misurabili, funzioni continue, proprietà vere quasi ovunque | 130 |
| 10.2. | I teoremi di Egoroff e di Lusin | 132 |

| | | | |
|-------------|--|---|------------|
| Cap. | 11. | INTEGRALE DI LEBESGUE | 137 |
| 11.1. | Relazioni tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue | 137 | |
| 11.2. | Integrazione per successioni | 140 | |
| 11.3. | Integrazione per serie | 144 | |
| 11.4. | Integrali doppi: teoremi di Fubini-Tonelli | 147 | |
| 11.5. | Il teorema fondamentale del calcolo. La funzione di Vitali. | 150 | |
| 11.6. | Derivazione sotto il segno di integrale | 151 | |
| 11.7. | Convoluzione di funzioni | 153 | |
| Cap. | 12. | SPAZI \mathcal{L}^P | 158 |
| 12.1. | Esempi sull'appartenenza di una funzione a spazi \mathcal{L}^P | 158 | |
| 12.2. | Disuguaglianza di Hölder | 160 | |
| 12.3. | Teorema di Lebesgue e convergenza in norma \mathcal{L}^P | 163 | |
| 12.4. | Gli spazi ℓ^P | 164 | |
| 12.5. | Disuguaglianza di Hölder in spazi ℓ^P | 166 | |
| Cap. | 13. | SPAZI DI HILBERT | 167 |
| 13.1. | Esercizi sulla geometria negli spazi di Hilbert | 167 | |
| 13.2. | Uguaglianza del parallelogramma. Norme Hilbertiane | 170 | |
| 13.3. | Sistemi ortonormali completi formati da autosoluzioni di problemi differenziali. Funzioni speciali | 171 | |
| 13.3.1. | <i>Polinomi di Legendre</i> | 173 | |
| 13.3.2. | <i>Polinomi di Laguerre</i> | 180 | |
| 13.3.3. | <i>Polinomi di Hermite</i> Grafici | 184 188 | |
| Cap. | 14. | LA TRASFORMATA DI LAPLACE | 197 |
| 14.1. | Prime proprietà della trasformata di Laplace | 197 | |
| 14.2. | Calcolo di trasformate | 207 | |
| 14.3. | Applicazioni della trasformata di Laplace ad equazioni differenziali ordinarie ed equazioni integro-differenziali | 214 | |
| 14.3.1. | <i>Equazioni differenziali ordinarie lineari</i> <i>a coefficienti costanti</i> | 214 | |
| 14.3.2. | <i>Esempi di equazioni integrodifferenziali</i> | 219 | |
| 14.3.3. | <i>Equazioni differenziali ordinarie lineari</i> <i>a coefficienti polinomiali</i> | 221 | |
| Cap. | 15. | LA TRASFORMATA DI FOURIER | 228 |
| 15.1. | Osservazioni sulle formule di trasformazione e antitrasformazione. Calcolo di trasformate. | 228 | |

| | | |
|-------|--|-----|
| 15.2. | Formule delle derivate | 235 |
| 15.3. | La trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ | 237 |
| 15.4. | Trasformata di Fourier e convoluzione | 239 |
| 15.5. | Autovalori e autofunzioni di \mathcal{F} su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ | 243 |
| 15.6. | Calcolo di trasformate mediante metodi di analisi complessa | 246 |
| 15.7. | Relazione tra trasformata di Fourier e di Laplace. | |
| | Antitrasformata di Laplace | 250 |
| 15.8. | Soluzioni di equazioni differenziali ordinarie | |
| | ed equazioni di convoluzione mediante trasformate | 257 |
| | Grafici | 264 |

Parte III. Equazioni a derivate parziali

| | | |
|-----------------|---|-----|
| Cap. 16. | <i>EQUAZIONI QUASILINEARI DEL 1° ORDINE</i> | 274 |
| 16.1. | Risoluzione del problema di Cauchy per equazioni quasilineari del 1° ordine | 274 |
| 16.2. | Equazioni lineari | 281 |
| 16.3. | Equazioni omogenee | 284 |
| 16.4. | Equazioni quasilineari che modellizzano problemi di traffico | 288 |
| Cap. 17. | <i>CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL 2° ORDINE IN 2 VARIABILI</i> | 298 |
| 17.1. | Il caso iperbolico | 299 |
| 17.2. | Il caso parabolico | 302 |
| 17.3. | Il caso ellittico | 306 |
| 17.4. | Il problema di Cauchy per un'equazione iperbolica | 308 |
| Cap. 18. | <i>IL LAPLACIANO IN DUE DIMENSIONI</i> | 314 |
| 18.1. | Il problema di Dirichlet nel cerchio | 314 |
| 18.2. | Altri problemi per il laplaciano in coordinate polari | 318 |
| 18.3. | L'equazione di Poisson nel cerchio | 323 |
| 18.4. | L'equazione di Laplace nel rettangolo | 328 |
| 18.5. | L'equazione di Laplace nel semipiano | 330 |
| 18.6. | Relazione tra il nucleo di Poisson nel semipiano e nel cerchio | 333 |
| | Grafici | 335 |

| | | |
|-----------------|--|------------|
| Cap. 19. | <i>IL LAPLACIANO IN COORDINATE SFERICHE. ARMONICHE SFERICHE</i> | 340 |
| 19.1. | L'equazione di Laplace in coordinate sferiche. Separazione delle variabili | 340 |
| 19.2. | Il problema di Dirichlet sulla sfera con dato indipendente dalla longitudine | 342 |
| 19.3. | Il problema di Dirichlet sulla sfera nel caso generale. Armoniche sferiche | 346 |
| Cap. 20. | <i>L'EQUAZIONE DEL CALORE IN UNA DIMENSIONE</i> | 355 |
| 20.1. | Il caso della sbarra finita | 355 |
| 20.1.1. | <i>Equazione omogenea con condizioni agli estremi omogenee</i> | 355 |
| 20.1.2. | <i>Il caso della conducibilità non costante</i> | 359 |
| 20.1.3. | <i>Equazione non omogenea</i> | 363 |
| 20.1.4. | <i>Condizioni agli estremi dipendenti dal tempo</i> | 365 |
| 20.2. | Problemi per l'equazione del calore sulla retta | 371 |
| 20.2.1. | <i>L'equazione omogenea</i> | 371 |
| 20.2.2. | <i>L'equazione non omogenea</i> | 373 |
| 20.3. | Problemi per l'equazione del calore sulla semiretta | 374 |
| 20.3.1. | <i>Condizioni omogenee all'estremo</i> | 374 |
| 20.3.2. | <i>Condizioni all'estremo dipendenti dal tempo</i> | 376 |
| | Grafici | 378 |
| Cap. 21. | <i>L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE</i> | 385 |
| 21.1. | Il problema di Cauchy sulla retta | 385 |
| 21.2. | La corda vibrante con uno o due estremi fissati: metodi di riflessione | 390 |
| 21.3. | Decomposizione in armoniche per la vibrazione di una corda fissata agli estremi | 395 |
| 21.4. | Corda vibrante con condizioni agli estremi dipendenti dal tempo | 399 |
| | Grafici | 405 |
| Cap. 22. | <i>PROBLEMI AI LIMITI PER L'EQUAZIONE DELLE Onde O DEL CALORE IN PIÙ DIMENSIONI. L'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ</i> | 412 |
| 22.1. | Separazione delle variabili in problemi ai limiti per l'equazione delle onde o del calore | 412 |
| 22.2. | La membrana vibrante rettangolare | 417 |
| 22.3. | La membrana vibrante circolare | 422 |
| | Grafici | 429 |

| | | | |
|-------------|------------|---|------------|
| Cap. | 23. | <i>FUNZIONI DI BESSEL E APPLICAZIONI</i> | 433 |
| 23.1. | | Equazioni di Bessel e loro integrale generale | 433 |
| 23.2. | | Equazioni e funzioni di Bessel modificate | 439 |
| 23.3. | | Andamento delle funzioni $J_\nu(x)$ | 440 |
| 23.4. | | Funzioni di Bessel di ordine semiintero | 444 |
| 23.5. | | Funzioni di Bessel come sistemi ortonormali | 446 |
| 23.6. | | Applicazioni delle funzioni di Bessel a problemi per equazioni a derivate parziali | 450 |
| 23.6.1. | | <i>Equazione di Helmholtz sul cilindro</i> | 451 |
| 23.6.2. | | <i>Laplaciano sul cilindro</i> | 453 |
| 23.6.3. | | <i>Equazione di Helmholtz sulla sfera</i> Grafici e tabelle | 455 |
| | | <i>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI</i> | 468 |

Parte I

Funzioni olomorfe

1. LE FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE COMPLESSA

Consideriamo le funzioni elementari di variabile complessa

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{Sh} z, \quad \operatorname{Ch} z,$$

definite dalle seguenti serie di potenze:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\operatorname{Sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \operatorname{Ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Queste serie di potenze hanno raggi di convergenza infinito, pertanto rappresentano funzioni $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, infinitamente derivabili. Per $z = x \in \mathbb{R}$, queste sono le serie di Taylor delle corrispondenti funzioni di variabili reale e^x , $\sin x$, ecc. Inoltre la funzione e^z , ad esempio, risulta essere l'unica funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, derivabile in senso complesso in tutto \mathbb{C} , che coincide con e^x per $z = x \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora alcune proprietà di queste funzioni.

1.1. RELAZIONI TRA FUNZIONI ELEMENTARI

Dalla definizione di e^z , $\sin z$, $\cos z$ segue:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Infatti: dalla serie di potenze che definisce e^z si ha, separando la serie delle potenze pari dalla serie delle potenze dispari:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

1. Le funzioni elementari di variabile complessa

$$\begin{aligned}
 &= [\text{poiché } i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n \text{ e } i^{2n+1} = i \cdot (-1)^n] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z.
 \end{aligned}$$

In particolare dalla (1.1) per $z = \vartheta \in \mathbb{R}$ si ha:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta,$$

da cui segue la “forma esponenziale dei numeri complessi”:

$$z = \rho e^{i\vartheta} = \rho \cdot (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

con $\rho = |z|$, $\vartheta = \arg z$.

Scrivendo la (1.1) per $-z$ si ha:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (1.2)$$

(osservando che, per la definizione di $\cos z$ e $\sin z$, si ha $\cos(-z) = \cos z$ e $\sin(-z) = -\sin z$).

Sommendo e sottraendo membro a membro le equazioni (1.1)-(1.2) si ha allora:

$$\begin{aligned}
 \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
 \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le (1.1) e (1.3) sono dette formule di Eulero.

Infine, dalla definizione di e^z , $\operatorname{Ch} z$, $\operatorname{Sh} z$ si ha:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
 \operatorname{Sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}.
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

(Basta scrivere e^z e e^{-z} in serie di potenze ed eseguire la somma o la

sottrazione).

Sono molto utili pure le seguenti formule, di verifica immediata mediante serie di potenze:

$$\operatorname{Ch}(iz) = \cos z ; \quad \operatorname{Sh}(iz) = i \sin z ; \quad \sin(iz) = i \operatorname{Sh} z. \quad (1.5)$$

1.2. PARTE REALE, PARTE IMMAGINARIA E MODULO DELLE FUNZIONI e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$

Poniamo $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Perciò:

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$$

$$\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y \quad (1.6)$$

$$|e^z| = e^x.$$

(Nel 2° passaggio si è usato il fatto che $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$. Questo si può dimostrare utilizzando la serie di potenze che definisce e^z).

Dalle (1.3) si ha poi:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \\ &= \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i \sin \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = \cos x \operatorname{Ch} y - i \sin x \operatorname{Sh} y. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\cos z = \cos x \operatorname{Ch} y - i \sin x \operatorname{Sh} y. \quad (1.7)$$

(Notare che per $y = 0$ si ha $z = x$ e si ritrova la funzione $\cos x$).

Dalla (1.7) si ha anche:

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \operatorname{Ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{Sh}^2 y = \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{Sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{Sh}^2 y = \\ &= \operatorname{Sh}^2 y + \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{Sh}^2 y} \quad (1.8)$$

Dalla (1.8) si osserva in particolare che la funzione $\cos z$ non è, nel campo complesso, una funzione limitata: per $y \rightarrow \pm \infty$, $|\cos z| \rightarrow +\infty$. La funzione $\cos z$ è però limitata in ogni striscia del tipo $\{z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} z| \leq k\}$.

Con calcoli del tutto analoghi a quelli che hanno portato alla (1.7) si trova:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y \\ \operatorname{Ch} z &= \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y \\ \operatorname{Sh} z &= \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y \end{aligned} \quad (1.9)$$

da cui:

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{Sh}^2 y} \\ |\operatorname{Ch} z| &= \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \sin^2 y} \\ |\operatorname{Sh} z| &= \sqrt{\operatorname{Sh}^2 x + \sin^2 y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.3. PERIODICITÀ E ZERI DELLE FUNZIONI

$e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$

Consideriamo e^z . Dalla formula $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ si vede che $e^{2k\pi i} = 1$.

Perciò:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$$

ossia: la funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$. Allora, per le (1.4), le funzioni $\operatorname{Ch} z, \operatorname{Sh} z$ sono periodiche di periodo $2\pi i$; per le (1.3), le funzioni $\cos z, \sin z$ sono periodiche di periodo 2π .

Cerchiamo gli zeri di queste funzioni. $e^z \neq 0 \forall z$. Infatti l'equazione $e^z = 0$ dà, per le (1.6):

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0. \end{cases}$$

Ma $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $\cos y, \sin y$ non sono mai contemporaneamente nulli, dunque il sistema non è mai soddisfatto.

$$\sin z = 0 \text{ per } z = k\pi$$

$$\cos z = 0 \text{ per } z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(proprietà elementari; si dimostra usando le (1.9) che non ci sono altri zeri nel campo complesso).

Dalle precedenti, poiché $\operatorname{Sh} iz = i \sin z$ si ha che

$$\operatorname{Sh} z = 0 \text{ per } z = k\pi i.$$

Infine, poiché $\operatorname{Ch} iz = \cos z$,

$$\operatorname{Ch} z = 0 \text{ per } z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

1. Le funzioni elementari di variabile complessa

Esercizi. Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

1. $\sin z = 2$

2. $\operatorname{Sh} z = i$

3. $\operatorname{Ch} z = -1$

4. $e^z = -1$

1. Per (1.9), si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sin x \operatorname{Ch} y = 2 \\ \cos x \operatorname{Sh} y = 0 \end{cases}$$

La 2^a dà: $y = 0$ o $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Se $y = 0$ la 1^a dà $\sin x = 2$, impossibile. (Ricordare che x e y sono numeri *reali!*).

Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la 1^a dà $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \operatorname{Ch} y = 2$ cioè $(-1)^k \operatorname{Ch} y = 2$.

Questo implica: k pari e $y = \pm \operatorname{SettCh} 2$. (Indichiamo con *SettCh* la funzione inversa di *Ch*).

Dunque le soluzioni sono

$$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i \operatorname{SettCh} 2,$$

con n intero relativo.

2. $\operatorname{Sh} z = i$.

$$\begin{cases} \operatorname{Sh} x \cos y = 0 \\ \operatorname{Ch} x \sin y = 1. \end{cases}$$

La prima equazione dà $x = 0$ o $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

1. Le funzioni elementari di variabile complessa

$$x = 0 \Rightarrow \sin y = 1 , \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i.$$

$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \operatorname{Ch} x \cdot (-1)^k = 1 \Rightarrow k = 2n$ e $x = 0$, e ritrovo le stesse soluzioni:

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i.$$

In modo analogo si risolvono:

3. $\operatorname{Ch} z = -1. \quad z = (2k+1)\pi i.$

4. $e^z = -1. \quad z = (2k+1)\pi i.$

2. CONDIZIONI DI MONOGENEITÀ. DERIVABILITÀ IN SENSO COMPLESSO. FUNZIONI ARMONICHE

2.1. CONDIZIONI DI MONOGENEITÀ E DERIVABILITÀ IN SENSO COMPLESSO

Se $w = f(z)$ è una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ponendo $z = x + iy$ possiamo scrivere:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

con $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni opportune. Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché f sia derivabile in senso complesso in un aperto A , è che u, v siano funzioni $\mathcal{C}^1(A)$ e soddisfino inoltre in A le condizioni di monogeneità:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (2.1)$$

Le (2.1) discendono dal fatto che, se f è derivabile in senso complesso, la sua derivata nella direzione dell'asse reale deve coincidere con la sua derivata nella direzione dell'asse immaginario, ossia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Dalla (2.2) seguono le (2.1), separando parte reale e immaginaria di f . Le condizioni (2.1) si possono riformulare in modo differente. Dalle relazioni:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

si possono esprimere x e y in funzione di z e \bar{z} :

$$\begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Di conseguenza si può scrivere f come funzione di z e \bar{z} . Si ha allora:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right). \end{cases}$$

Dalle (2.2) e (2.3) segue allora

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

ossia:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0} \quad (2.4)$$

che è un altro modo di scrivere le condizioni di monogeneità.

Esempi. Verificare se le seguenti funzioni sono derivabili in senso complesso:

$$z^2 ; \quad \bar{z} ; \quad z \operatorname{Re} z ; \quad |z|^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}).$$

1. z^2 . Per $f(z, \bar{z}) = z^2$ si ha subito $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Perciò la funzione è derivabile in \mathbb{C} .

Alternativamente, per verificare le (2.1) si può scrivere:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$$

con

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = 2x = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{cases}$$

perciò le (2.1) sono soddisfatte.

2. $f(z, \bar{z}) = \bar{z}$; $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$; f non è mai derivabile in senso complesso.

Alternativamente: $z = x - iy = u + iv$ con

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{cases}$$

perciò $u_x \neq v_y$ sempre.

3. $f = z \operatorname{Re} z$; $f(z, \bar{z}) = z \cdot \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) = \frac{z^2}{2} + \frac{z \cdot \bar{z}}{2}$.

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2} = 0$ per $z = 0$. È derivabile solo nell'origine.

Oppure: $z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = u + iv$ con

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases}$$

$u_x = 2x$; $v_y = x$; $u_y = 0$; $v_x = y$. Le (2.1) si scrivono:

$$\begin{cases} 2x = x \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

4. $f = |z|^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). ($\alpha \neq 0$) $|z|^\alpha = (z \cdot \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\alpha}{2} (z \cdot \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot z = 0 \text{ se e solo se } z = 0 \text{ e } \alpha > 1$$

(perché: $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}| = |\frac{\alpha}{2}| |z|^{\alpha-1} \rightarrow 0$ per $z \rightarrow 0$ se $\alpha > 1$). □

Un'altra forma ancora che possono assumere le condizioni di monogeneità è legata alle coordinate polari. Sia:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Si può allora calcolare:

$$\varrho_x \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}; \quad \varrho_y \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\varrho}$$

$$\vartheta_x = -\frac{y}{\varrho^2}; \quad \vartheta_y = \frac{x}{\varrho^2}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \cdot \varrho_x + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \vartheta_x = \frac{x}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{y}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \cdot \varrho_y + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \vartheta_y = \frac{y}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{x}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Allora le condizioni (2.1) diventano:

$$\begin{cases} u_x = u_\rho \cdot \frac{x}{\varrho} - u_\theta \cdot \frac{y}{\varrho^2} = v_y = v_\rho \cdot \frac{y}{\varrho} + v_\theta \cdot \frac{x}{\varrho^2} \\ u_y = u_\rho \cdot \frac{y}{\varrho} + u_\theta \cdot \frac{x}{\varrho^2} = -v_x = -v_\rho \cdot \frac{x}{\varrho} + v_\theta \cdot \frac{y}{\varrho^2}. \end{cases}$$

Moltiplicando la 1^a equazione per $-y$ e la 2^a per x e sommando si ha:

$$u_\theta = -\varrho v_\rho$$

Moltiplicando la 1^a equazione per x e la 2^a per y e sommando si ha invece:

$$v_\theta = \varrho u_\rho$$

Dunque le *condizioni di monogeneità in coordinate polari* sono:

$$\begin{cases} u_\theta = -\varrho v_\rho \\ v_\theta = \varrho u_\rho. \end{cases} \quad (2.5)$$

Le formule sono valide per $\rho \neq 0$ (perché le coordinate polari sono singolari nell'origine, come si vede dall'espressione di $\varrho_x, \varrho_y, \vartheta_x, \vartheta_y$).

Esempi.

5. La funzione $|z|^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$f(\varrho, \vartheta) = \varrho^\alpha = u + iv$ con: $u = \varrho^\alpha, v = 0$. Dunque:

$$u_\varrho = \alpha \varrho^{\alpha-1} = \frac{1}{\varrho} v_\vartheta = 0$$

A parte il caso $\alpha = 0$, le condizioni di monogeneità non sono mai verificate fuori dall'origine. (La derivabilità nell'origine va studiata a parte).

6. Consideriamo la funzione z^n (n intero positivo). In coordinate polari si ha:

$$z^n = [\varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = \varrho^n \cos n\vartheta + i \varrho^n \sin n\vartheta = u + iv$$

$$\text{con: } u = \varrho^n \cos n\vartheta, \quad v = \varrho^n \sin n\vartheta.$$

Si verifica che le (2.5) sono soddisfatte. (Naturalmente non è questo il modo più semplice per affermare che z^n è derivabile in senso complesso!).

7. Esiste una funzione olomorfa la cui parte reale è ϑ ?

(Naturalmente, per avere una funzione a un sol valore, dobbiamo restringerci a un settore del tipo $\vartheta \in (0, \alpha)$ con $\alpha \leq 2\pi$).

Cerchiamo una funzione $f = u + iv$ con $u = \vartheta, v$ incognita, per cui valgano le (2.5). Poiché

$$u_\varrho = 0$$

$$u_\vartheta = 1$$

dev'essere:

$$\begin{cases} 1 = -\varrho v_\rho \\ 0 = v_\theta. \end{cases}$$

Dunque v è una funzione della sola ϱ , che soddisfa l'equazione differenziale

$$v_\rho = -\frac{1}{\varrho}$$

Perciò

$$v = -\log \varrho + \text{costante.}$$

Allora

$$f(\varrho, \vartheta) = \vartheta - i \log \varrho + \text{costante},$$

olomorfa nella regione $\{z = \varrho e^{i\theta} : \varrho \neq 0, \vartheta \in (0, \alpha)\}$ per ogni $\alpha \leq 2\pi$.

2.2. FUNZIONI ARMONICHE. ARMONICA CONIUGATA.

Dalle condizioni di monogeneità

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

segue, derivando la 1^a equazione rispetto a x , la 2^a rispetto a y , e sommando, che

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

cioè u soddisfa l'equazione

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.6}$$

nell'aperto in cui $u + iv$ è olomorfa. Si dice che u è *armonica*. Analogamente si ottiene che $\Delta v = 0$, ossia:

la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa f sono

funzioni armoniche (nell'aperto in cui f è olomorfa).

Esempi. Poiché e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$ sono funzioni olomorfe in \mathbb{C} , per quanto visto nel cap. 1 (v. (1.6), (1.7), (1.9)) le funzioni $e^x \cos y$, $e^x \sin y$, $\cos x \operatorname{Ch} y$, $\sin x \operatorname{Sh} y$, $\sin x \operatorname{Ch} y$, $\cos x \operatorname{Sh} y$, ... sono armoniche in \mathbb{R}^2 .

Poiché le funzioni z^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sono olomorfe in \mathbb{C} , le funzioni:

$$\rho^n \cos n\vartheta = \operatorname{Re}(x + iy)^n$$

$$\rho^n \sin n\vartheta = \operatorname{Im}(x + iy)^n$$

sono armoniche in \mathbb{R}^2 . Queste funzioni, molto importanti nello studio delle funzioni armoniche nel piano, sono dette armoniche elementari (v. cap. 18). Scritte in coordinate cartesiane (x, y) risultano polinomi omogenei di grado n .

Consideriamo ora il problema seguente. Data una funzione u armonica in un certo aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, determinare una funzione $v: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u + iv$ risulti olomorfa in A . È chiaro, per il discorso precedente, che una tale v , se esiste, è armonica: si chiamerà armonica coniugata di u . Per determinarla, dobbiamo risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

dove v è l'incognita, e u_x , u_y sono note. Determinare v a partire da v_x , v_y (cioè $-u_y$, u_x) equivale a trovare un potenziale della forma differenziale:

$$-u_y dx + u_x dy.$$

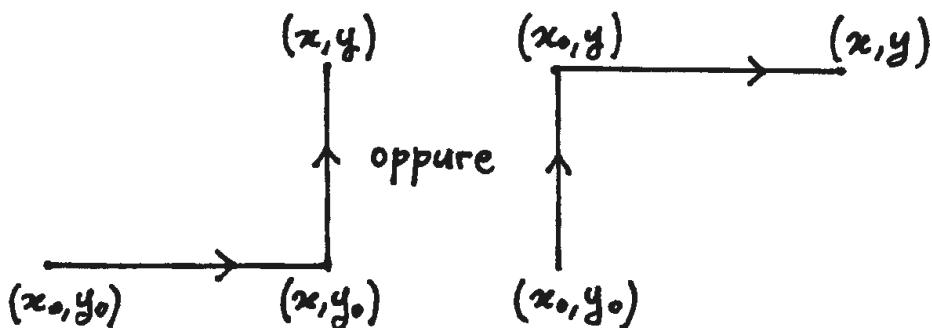
Questa forma differenziale è chiusa, ossia

$$(-u_y)_y = (u_x)_x$$

perchè $u_{xx} + u_{yy} = 0$ per ipotesi (u è armonica). Allora sappiamo che la forma differenziale è esatta in ogni dominio semplicemente connesso. In queste ipotesi, il potenziale si calcola mediante l'integrale:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy) + c$$

dove l'integrale è esteso a qualunque cammino, interno al dominio semplicemente connesso, congiungente (x_0, y_0) con (x, y) . $((x_0, y_0)$ è un qualunque punto fissato, nel dominio). Poiché il cammino è arbitrario, possiamo sceglierne uno comodo. Se ad esempio il dominio è tutto \mathbb{R}^2 , consideriamo il cammino:



In corrispondenza del 1° cammino si avrà:

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x -u_y(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y u_x(x, u) du.$$

Scegliendo invece il 2° cammino si ha:

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u_x(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x -u_y(u, y) du.$$

Esempi.

8. Sia $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

Si verifica che $\Delta u = 0$ in tutto \mathbb{R}^2 . Cerchiamo l'armonica coniugata.

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2$$

$$u_y = -12x^2y + 4y^2.$$

Scegliamo $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^x -u_y(t, 0) dt + \int_0^y u_x(x, u) du = \\ &= \int_0^y (4x^3 - 12xu^2) du = 4x^3y - 4xy^3. \end{aligned}$$

A meno di una costante additiva, si vede che

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

(Si riconosce che la funzione olomorfa $u + iv$ non è altro che z^4).

9. Sia $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

Si verifica che u è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

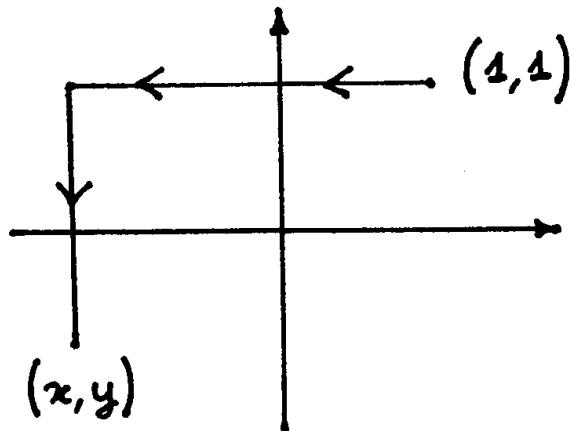
$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Osserviamo che la regione in cui u è armonica non è semplicemente连通的.

Proviamo a operare come nell'esempio precedente. Scegliamo $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e calcoliamo (scegliendo il cammino come in figura):

$$v(x, y) = \int_{(1, 1)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_1^x -u_y(t, 1) dt + \int_1^y u_x(x, u) du = \\
 &= \int_1^x -\frac{2}{1+t^2} dt + \int_1^y \frac{2x}{x^2+u^2} du = \\
 &= -2 [\operatorname{arctg} t]_1^x + 2 [\operatorname{arctg} \frac{u}{x}]_1^y = \\
 &= -2 \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

Questa funzione è ben definita per $x \neq 0$. Vediamo se è possibile definirla per continuità anche per $x = 0$. Cominciamo con l'osservare che:

$$\frac{\pi}{2} - 2 (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ per } x \rightarrow 0^+ \\ \frac{3}{2}\pi \text{ per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Fissiamo un punto $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$. Si vede che:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = -\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Perciò

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0, y_0)} v(x,y) = \frac{\pi}{2}, \text{ se } y_0 > 0.$$

Si può quindi definire per continuità $v(x,y)$ anche sul semiasse $x = 0, y > 0$.

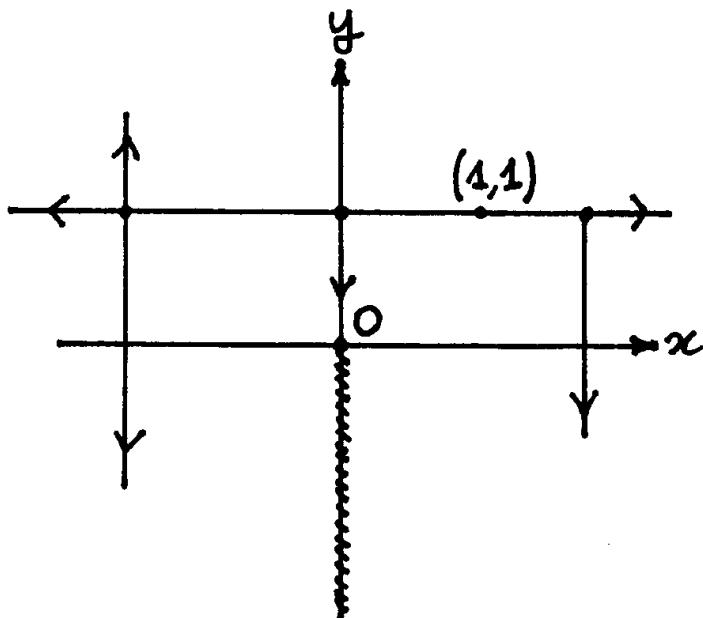
Se invece $y_0 < 0$ si trova:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}}^+ v(x,y) = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}}^- v(x,y) = \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

dunque la funzione v è discontinua lungo il semiasse $x = 0, y < 0$.

Notiamo che questo semiasse è esattamente l'insieme dei punti che non si possono raggiungere partendo da $(1,1)$ e muovendosi lungo un cammino come quello considerato (ossia che prima incrementa la x e poi la y) senza passare per l'origine (che è il punto in cui la forma differenziale non è definita):

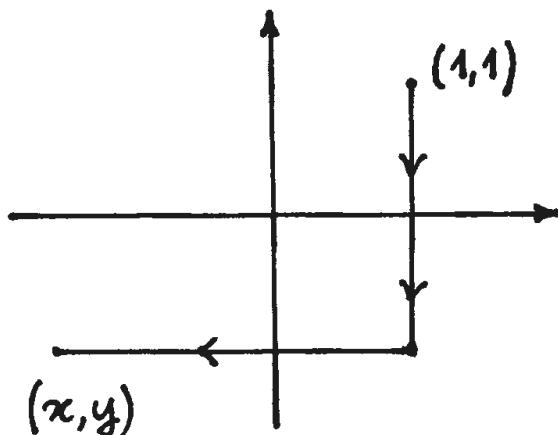


La figura mostra i tipi di cammino possibili: i punti del semiasse $y < 0$ sono irraggiungibili, senza attraversare l'origine.

Riassumendo, ciò che abbiamo fatto è: fissare un dominio semplicemente connesso che non contiene lo 0 (nel nostro caso, il piano privato di una semiretta), e all'interno di questo determinare l'armonica coniugata $v(x, y)$. Osserviamo che, così come non è possibile prolungare questa v con continuità a tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, non è neanche possibile usare un altro tipo di cammino per definire v in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Se ad esempio, calcolassimo:

$$v_1(x, y) = \int_1^y u_x(1, t) dt + \int_1^x -u_y(u, y) du$$

cioè scegliessimo un cammino del tipo:



otterremmo di poter raggiungere tutti i punti del semiasse $y < 0$, $x = 0$, ma ora risulterebbero irraggiungibili quelli del semiasse $x < 0$, $y = 0$. E se pensassimo di usare cammini dei 2 tipi per definire v in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, otterremmo una funzione non univoca. Ad esempio, $v(-1, 1) = 2\pi$. La funzione $v_1(x, y)$ invece, una volta calcolata, dà $v_1(-1, -1) = -2\pi$.

La conclusione di quest'esempio è che: se una funzione u è armonica non in tutto \mathbb{R}^2 , ma in un dominio che non è semplicemente connesso, l'armonica coniugata non si può determinare su *tutto* il dominio ma solo su ogni sottodominio semplicemente connesso.

3. CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO. FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY

3.1. PRIMI ESEMPI DI CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO

Esempio 1.

Calcolare $I = \int_{\gamma} z \, dz$ dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$ percorsa per x crescente da -1 a 2 .

Risolviamo l'esercizio in 3 modi diversi.

1. Ricorriamo alla definizione di integrale nel campo complesso. γ ha equazioni parametriche:

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in (-1, 2)$$

ossia:

$$z = t + it^2, \quad t \in (-1, 2), \quad dz = (1 + 2it)dt.$$

L'integrale di linea è allora:

$$I = \int_{-1}^2 (t + it^2) \cdot (1 + 2it) dt$$

(si è usata la definizione: se γ è l'arco di curva $z = \gamma(t)$, $t \in (a, b)$,

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt).$$

Il calcolo di I è allora:

$$I = \int_{-1}^2 [(t - 2t^3) + i(3t^2)] dt = [\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{2}]_{-1}^2 + i[t^3]_{-1}^2 = -6 + 9i.$$

2. Invece di calcolare l'integrale lungo γ , osservando che la funzione integranda (z) è olomorfa in tutto \mathbb{C} , in base al teorema di Cauchy si può calcolare

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

l'integrale lungo un qualunque cammino equivalente a γ . In particolare, per semplicità, si può scegliere un segmento che unisce gli estremi di γ .

L'equazione parametrica del segmento che unisce i punti $a, b \in \mathbb{C}$ è:

$$z(t) = a + t(b - a) \text{ con } t \in (0, 1).$$

Nel nostro caso:

$$z(t) = (-1 + i) + t(3 + 3i)$$

$$dz(t) = (3 + 3i)dt$$

$$I = \int_0^1 [(-1 + i) + t(3 + 3i)](3 + 3i)dt = -6 + \frac{1}{2}(3 + 3i)^2 = -6 + 9i.$$

3. Infine, si potrebbe evitare di calcolare esplicitamente qualsiasi integrale, osservando che l'integrandata z ha in tutto \mathbb{C} primitiva $\frac{z^2}{2}$, e quindi:

$$I = \left[\frac{z^2}{2} \right]_{(-1+i)}^{(2+4i)} = \frac{(2+4i)^2 - (-1+i)^2}{2} = -6 + 9i.$$

Nell'esercizio precedente si sono voluti illustrare di proposito vari metodi di calcolo, anche se, in realtà, era immediatamente preferibile il 3º, più semplice. Il 1º metodo però è applicabile a ogni funzione continua su γ , mentre il 2º e il 3º richiedono che f sia olomorfa in un certo dominio contenente γ .

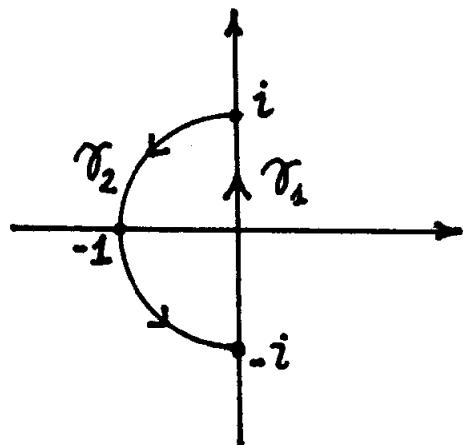
Esempio 2. Si calcoli

$$I = \oint_{\gamma} |z| dz$$

con γ come in figura (v. pag. seguente).

In questo caso l'integrandata non è una funzione olomorfa (come visto in un esempio nel cap. 2), perciò l'unico metodo è il calcolo dell'integrale di linea lungo γ (ossia mediante la definizione).

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy



Sia γ_1 il segmento che unisce $-i$ a i , γ_2 la semicirconferenza passante per i , -1 , $-i$.

$$z = \gamma_1(t) = it \text{ con } t \in (-1, 1) \quad dz = idt ;$$

$$\int_{\gamma_1} |z| dz = \int_{-1}^1 i|t| dt = 2i \int_0^1 t dt = i.$$

$$z = \gamma_2(t) = e^{it} \text{ con } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad dz = ie^{it} dt ;$$

$$\int_{\gamma_2} |z| dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} i e^{it} dt = [e^{it}]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2i.$$

Perciò:

$$I = i - 2i = -i$$

(Osservare che il valore dell'integrale è un numero complesso anche se l'integranda ha valori reali, perché il cammino di integrazione è in \mathbb{C}).

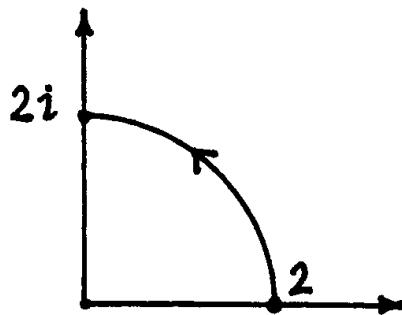
Esempio 3.

Si dia una maggiorazione numerica di

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} \right|$$

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

con γ :



Si utilizza qui la maggiorazione fondamentale:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|$$

dove $|\gamma|$ indica la lunghezza di γ . Nel nostro caso: $|\gamma| = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$;

$$|f(z)| = \frac{1}{|1+z^2|}$$

$$\begin{aligned} |1+z^2| &= |1+x^2-y^2+2ixy| = \\ &= \sqrt{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{1+(x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2)}. \end{aligned}$$

Poiché γ ha equazione: $x^2 + y^2 = 4$ con $x \in (0, 1)$, $y > 0$, si ha:

$$|1+z^2| = \sqrt{1+16+2(2x^2-4)} = \sqrt{9+4x^2}$$

$$\max_{z \in \gamma} \frac{1}{|1+z^2|} = \max_{x \in [0, 1]} \frac{1}{\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Dunque:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

3.2. ESEMPI DI CALCOLO DI INTEGRALI REALI CON METODI DI VARIABILE COMPLESSA

Vediamo alcuni esempi in cui il teorema di Cauchy dell'integrale nullo viene utilizzato con opportuni accorgimenti, per calcolare integrali di funzioni di variabile reale. Altri metodi di variabile complessa per il calcolo di integrali reali verranno discussi in seguito (v. cap. 5 e cap. 7).

Esempio 4. Si vuole calcolare:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Anzitutto, discutiamo in che senso va inteso l'integrale. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è continua e limitata in $(0, +\infty)$ ($f(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$). L'integrale I si può intendere allora come integrale di Riemann generalizzato, ossia:

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Poiché

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \text{ ma } \int \frac{dx}{x} \text{ diverge all'infinito,}$$

non è immediato capire che l'integrale converge. Operiamo così:

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^R \frac{\sin x}{x} dx$$

e occupiamoci dell'ultimo integrale scritto. Integrando per parti si ha:

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Per $R \rightarrow +\infty$, $\frac{\cos R}{R} \rightarrow 0$; $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ perciò $\int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx$ ha limite finito per

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

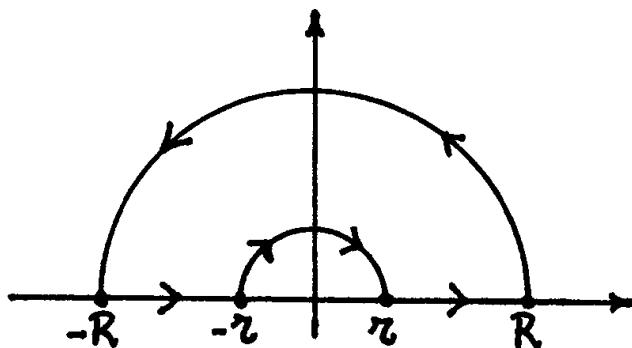
$R \rightarrow +\infty$. Dunque l'integrale converge.

Stabilito che ha senso considerare l'integrale I , vediamo come calcolarlo esplicitamente. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Per $z = x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = \frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x}$, il che mostra la relazione tra $f(z)$ e la nostra integranda. $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Consideriamo un cammino chiuso in \mathbb{C} del tipo:



Sia γ questo cammino, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ con $\gamma_1 = [r, R]$, $\gamma_2 = [-R, r]$, γ_3 = semicirconferenza di centro 0 e raggio r , percorsa in senso orario, γ_4 = semicirconferenza di centro 0 e raggio R , percorsa in senso antiorario.

L'interno di γ è una regione in cui $f(z)$ è olomorfa, perciò per il teorema di Cauchy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f.$$

Osserviamo ora che:

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{[-R, -r] \cup [r, R]} \left(\frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x} \right) dx.$$

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

Poiché $\frac{\cos x}{x}$ è dispari e $\frac{\sin x}{x}$ è pari, questo integrale è uguale a

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

che, per $r \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow +\infty$, tende a $2i \cdot I$. Per calcolare I dobbiamo allora valutare

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_4} f(z) dz \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_3} f(z) dz.$$

Cominciamo da $\int_{\gamma_4} f(z) dz$.

$$\gamma_4: z = Re^{i\theta} \text{ con } \vartheta \in (0, \pi); \quad dz = iRe^{i\theta} d\vartheta;$$

$$e^{iz} = e^{i(R \cos \theta + iR \sin \theta)} = e^{iR \cos \theta} \cdot e^{-R \sin \theta};$$

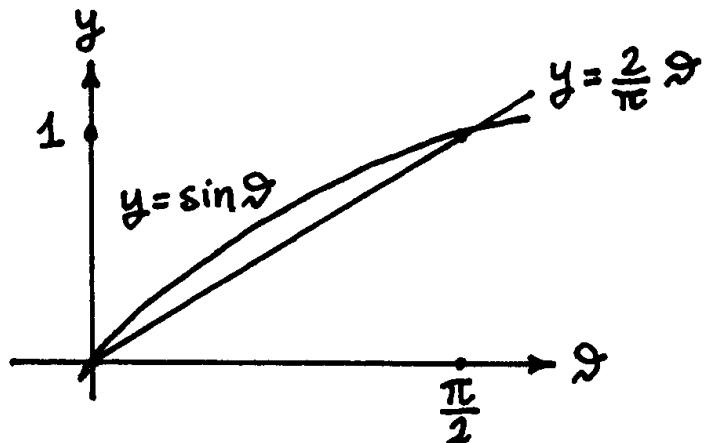
$$\int_{\gamma_4} f(z) dz = \int_0^\pi e^{iR \cos \theta} \cdot e^{-R \sin \theta} \cdot i d\vartheta;$$

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR \cos \theta} \cdot e^{-R \sin \theta} \cdot i| d\vartheta = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\vartheta.$$

Notiamo che, per simmetria,

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\vartheta.$$

Ma per $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin \vartheta \geq \frac{2}{\pi} \vartheta$, come mostra la figura:



Dunque $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-\frac{R2\theta}{\pi}}$ per $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{R2\theta}{\pi}} d\vartheta = 2 \frac{\pi}{2R} [e^{-\frac{R2\theta}{\pi}}]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{R} [1 - e^{-R}] \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Di conseguenza $\int_{\gamma_4} f(z) dz \rightarrow 0$ per $R \rightarrow +\infty$.

Consideriamo ora $\int_{\gamma_3} f(z) dz$ (ragionando come per γ_4 , e tenendo conto del verso in cui è percorsa la semicirconferenza) $= - \int_0^\pi (e^{ir \cos \theta} \cdot e^{-r \sin \theta} \cdot i) d\vartheta$. Osserviamo che per $r \rightarrow 0^+$ l'integrandata tende a i uniformemente rispetto a ϑ :

$$|ie^{ir \cos \theta} - r \sin \theta - i| \sim |ir(i \cos \vartheta - \sin \vartheta)| \leq 2r \rightarrow 0.$$

Perciò il limite si può portare sotto l'integrale, ossia

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_0^\pi i d\vartheta = -\pi i.$$

Siamo ora in grado di calcolare I .

Poiché:

$$0 = \left(\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \right) + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f \rightarrow 2iI - \pi i + 0,$$

per $r \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty$, si ha: $2iI - \pi i = 0$, ossia: $I = \frac{\pi}{2}$.

Si è così calcolato esplicitamente l'integrale richiesto.

Osservazioni.

- Il modo di trattare gli integrali lungo γ_3 e γ_4 può apparire laborioso; in seguito (v. cap. 5) dimostreremo dei risultati generali (lemmi di Jordan) che permetteranno di calcolare il limite di integrali lungo archi di circonferenze come γ_3 e γ_4 , senza dover ogni volta ripetere la stima che qui abbiamo fatto.
- Nell'applicare questi metodi, la fase più delicata è la scelta del cammino di

integrazione in \mathbb{C} e della funzione $f(z)$ di variabile complessa. Ad esempio, in questo caso poteva sembrare più naturale la scelta

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

visto che la nostra integranda è $\frac{\sin x}{x}$. Come si è visto però nel cap. 1 (v. (1.9)),

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{Sh}^2 y}$$

e questa funzione $\rightarrow +\infty$ esponenzialmente per $|y| \rightarrow +\infty$. Questo avrebbe reso impossibile il controllo di $\int f(z) dz$ su qualunque arco di circonferenza di raggio $\rightarrow +\infty$.

Invece,

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}$$

dunque questa funzione è limitata nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$, e tende a zero esponenzialmente per $y \rightarrow +\infty$. Questa è dunque una scelta migliore, che suggerisce proprio di considerare cammini come quelli considerato.

Esempio 5. (Integrali di Fresnel)

Dimostreremo il seguente risultato:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

dove gli integrali vanno intesi in senso generalizzato

(ossia come $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \sin(x^2) dx$ ecc.).

Questi integrali intervengono in ottica, nei “fenomeni di diffrazione di Fresnel” (per il significato fisico di questi integrali, si veda ad esempio: Landau-Lifschitz: The classical theory of fields, pp. 155-165).

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

Per rendersi conto che questi integrali convergono, si potrebbe ad esempio procedere così:

$$\int_1^R \sin(x^2) dx = [x^2 = t] \int_1^{R^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

quindi si esegue su quest'ultimo integrale una integrazione per parti, come nell'esempio precedente.

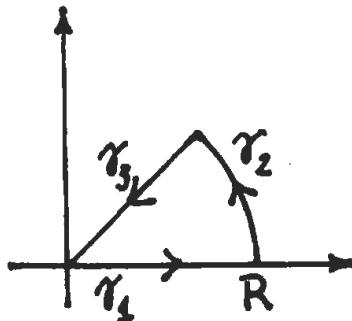
(Questa verifica non è comunque necessaria: sarà il metodo stesso di calcolo a dirci che l'integrale di Riemann generalizzato converge).

Per calcolare gli integrali, procediamo così. Sia:

$$f(z) = e^{iz^2}$$

e consideriamo il cammino γ :

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$



$$\text{con: } \gamma_1 = [0, R]$$

$$\gamma_2: z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\gamma_3: z = x + ix \text{ con } x \in [R, 0].$$

Poiché $f(z)$ è olomorfa in \mathbb{C} , per il teorema di Cauchy:

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f .$$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^R e^{ix^2} dx = \int_0^R [\cos(x^2) + i \sin(x^2)] dx .$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z) dz &= \int_0^R e^{i(x+ix)^2} (1+i) dx = -(1+i) \int_0^R e^{-2x^2} dx \rightarrow \\ &\rightarrow -(1+i) \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx \quad \text{per } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Sfruttando l'integrale notevole

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \forall \alpha > 0,$$

si ha:

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz \rightarrow -(1+i) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\pi/4} e^{i(R^2 \cos 2\theta + iR^2 \sin 2\theta)} \cdot Rie^{i\theta} d\theta .$$

$$| \int_{\gamma_2} f(z) dz | \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta$$

(perché $|e^{iR^2 \cos 2\theta} \cdot ie^{i\theta}| = 1$).

L'ultimo integrale si riscrive come

$$\int_0^{\pi/2} \frac{R}{2} e^{-R^2 \sin t} dt,$$

che, ragionando come nell'Esempio 4, si maggiora con

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{R}{2} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} t} dt &= \frac{R}{2} \left[\frac{e^{-R^2 \frac{2}{\pi} t}}{-R^2 \frac{2}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{4R} [1 - e^{-R^2}] \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Dunque $\int_{\gamma_2} f(z) dz \rightarrow 0$.

In definitiva si ha:

$$0 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx - (1+i)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

3.3. CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO MEDIANTE FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY.

Richiamiamo le formule integrali di Cauchy nella loro forma più semplice.

Se f è una funzione olomorfa in un cerchio, σ è il bordo del cerchio percorso in senso antiorario e z_0 è un punto interno al cerchio, si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Queste formule sono talvolta utili al calcolo di integrali.

Esempio 6. Si calcoli:

$$I = \oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz$$

con $\gamma = \{z: |z| = 2\}$ oppure $\gamma = \{z: |z| = 4\}$.

Cominciamo da $\gamma = \{|z| = 2\}$.

Detto $A = \{|z| < 2\}$ e $f(z) = \frac{e^z}{z-3}$, si vede che f è olomorfa in A , perciò

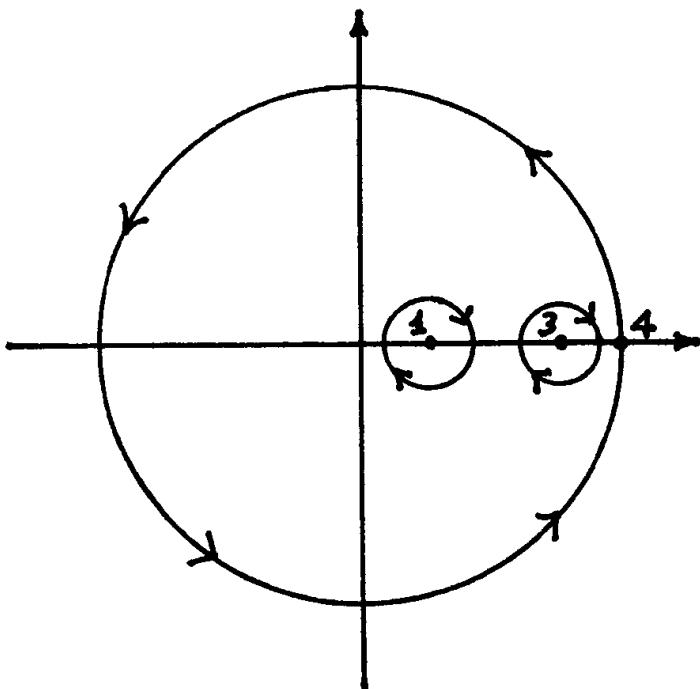
$$I = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{e}{-2} = -\pi ei.$$

3. Calcolo di integrali nel campo complesso. Formule integrali di Cauchy

Sia ora $\gamma = \{ |z| = 4 \}$.

Questa volta non si può procedere come prima perché né $\frac{e^z}{z-1}$ né $\frac{e^z}{z-3}$ sono olomorfe in $\{ |z| < 4 \}$. Ricordiamo però che il teorema integrale di Cauchy vale anche per regioni non semplicemente connesse.

Consideriamo allora il seguente cammino in \mathbb{C} :



(γ è composta dai 3 cicli chiusi disegnati).

Nella regione interna a γ , ossia $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 4, |z-1| > \epsilon, |z-3| > \epsilon\}$,

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} \text{ è olomorfa, perciò: } \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

D'altro canto questo integrale è uguale a:

$$\oint_{|z-1|=\epsilon} f(z) dz + \oint_{|z-3|=\epsilon} f(z) dz - \oint_{|z|=4} f(z) dz$$

(dove ciascun ciclo è percorso in senso antiorario).

Di conseguenza:

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = \int_{|z-1|=\epsilon} f(z) dz + \int_{|z-3|=\epsilon} f(z) dz.$$

L'integrale a 1° membro -che è ciò che dobbiamo calcolare- si può calcolare allora mediante i 2 integrali a 2° membro, che si calcolano mediante la formula integrale di Cauchy:

$$\int_{|z-1|=\epsilon} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-3} \right)_{z=1} = -e\pi i$$

$$\int_{|z-3|=\epsilon} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-1} \right)_{z=3} = e^3 \pi i.$$

Perciò $I = e\pi i(e^2 - 1)$.

Come si vedrà in seguito, quando all'interno del cammino di integrazione cadono più singolarità, il metodo più diretto di calcolo dell'integrale è il teorema dei residui. Di questo ci occuperemo nel cap. 5.

Esempio 7. Si calcoli:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-4)} dz.$$

La funzione $f(z) = \frac{z+1}{z-4}$ è olomorfa in $\{|z| < 2\}$, perciò per la 2ª formula integrale di Cauchy si ha:

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1).$$

$$f(z) = \frac{z+1}{z-4} = 1 + \frac{5}{z-4}; \quad f'(z) = -\frac{5}{(z-4)^2};$$

$$f''(z) = \frac{10}{(z-4)^3}; \quad f''(1) = -\frac{10}{27}. \quad I = -\frac{10}{27} \pi i.$$

□

4. SVILUPPI IN SERIE DI LAURENT. STUDIO DELLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE. CALCOLO DEI RESIDUI

4.1. RICHIAMI SUL CALCOLO CON SERIE DI POTENZE

Richiamiamo, attraverso esempi, alcuni tipici modi di operare con serie di potenze; queste tecniche saranno utili anche nel trattare la serie di Laurent (cioè serie bilatera).

Esempio 1. Sfruttando la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{per} \quad |z| < 1,$$

si scriva lo sviluppo in serie di potenze, centrato in 0, delle funzioni

$$\frac{1}{1+z}, \quad \frac{1}{1-z^2}, \quad \frac{1}{1+z^2}, \quad \frac{1}{(1+z)^2},$$

precisando il raggio di convergenza.

Scrivendo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$$

con $w = -z$, $w = z^2$, $w = -z^2$, rispettivamente, si ha:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Il raggio di convergenza è sempre 1 perché $|w| < 1$ se e solo se $|z| < 1$.

Ricordando poi che, all'interno del cerchio di convergenza, le serie di potenze si

possono derivare termine a termine, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^2} &= -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)' = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n z^{n-1}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^n = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots\end{aligned}$$

Esempio 2. Si sviluppi $f(z) = \frac{1}{4-3z}$ in serie di potenze di centro $z_0 = 1+i$.

Dalla serie $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ si ha $\frac{1}{1-(z-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n$
ed anche $\frac{1}{a[1-b(z-z_0)]} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} b^n (z-z_0)^n$, per $|b(z-z_0)| < 1$.

Scriviamo $f(z)$ in questa forma.

$$4-3z = 4-3(z-(1+i))-3-3i = (1-3i)-3(z-z_0).$$

Perciò:

$$\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}(z-z_0)} = \frac{1}{1-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{1-3i}\right)^n (z-z_0)^n,$$

purché:

$$\left| \frac{3}{1-3i} (z-z_0) \right| < 1, \quad \text{cioè} \quad |z-z_0| < \frac{|1-3i|}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Esempio 3. Sfruttando gli sviluppi in serie di $\sin z$ e $\cos z$, si scriva lo sviluppo di $\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}$ arrestato al 5° ordine, centrato in 0.

$$\frac{\sin z}{\cos z} = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + o(z^5)) \cdot (1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + o(z^5))^{-1}.$$

Sfruttando ora la serie geometrica si ha:

$$(1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + o(z^5))^{-1} = [1 - \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + o(z^5)\right)]^{-1} =$$

4. Sviluppi in serie di Laurent. Singolarità di una funzione. Residui

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + o(z^5) \right) + \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + o(z^5) \right)^2 + o(z^5).$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{\cos z} &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + o(z^5) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4!} \right)z^4 + o(z^5) \right) = \\ &= z + z^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + z^5 \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4!} \right) + o(z^5). \end{aligned}$$

Esercizio 4. Scrivere lo sviluppo in serie al 3° ordine di e^{e^z} , centrato in 0.

$$[\text{R: } e^{e^z} = e \cdot (1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + o(z^3))].$$

Esempio 5. Scrivere lo sviluppo in serie arrestato al 4° ordine di $\frac{1}{1+\cos z}$, centrato in 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\cos z} &= \frac{1}{1 + 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + o(z^4)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!}z^4 + o(z^4) \right)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!}z^4 + o(z^4) \right) + \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!}z^4 + o(z^4) \right)^2 + o(z^4) \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{48}z^4 + o(z^4). \end{aligned}$$

Ricordiamo ora il procedimento che si segue per eseguire un *prodotto di serie*:

$$\begin{aligned} \sum_k a_k z^k \cdot \sum_n b_n z^n &\equiv \sum_{k,n} a_k b_n z^{k+n} = \\ &= \sum_k \left(\sum_{k+n=h} a_k b_n \right) z^h = \sum_h \left(\sum_k a_k b_{h-k} \right) z^h. \end{aligned}$$

Si sono usate diverse scritture equivalenti; caso per caso può essere più utile una di queste. Si è omesso volutamente di indicare gli estremi tra cui variano gli indici k , n , h , perché queste formule valgono sia per serie di potenze $(\sum_{k=0}^{\infty})$ sia per serie bilatera $(\sum_{k=-\infty}^{+\infty})$. Il simbolo $\sum_{k+n=h}$ vuol dire: somma, per tutte le coppie di indici k e n ammissibili, la cui somma è h . Ad es., se k e n variano tra 0 e $+\infty$, dovrà essere $h \geq 0$, e

$$\sum_{k+n=h}^{\infty} a_k b_n = \sum_{\substack{k=0, \dots, +\infty \\ n=0, \dots, +\infty \\ k+n=h}} a_k b_n = \sum_{k=0}^h a_k b_{n-k}.$$

Esempio 6. Verificare che $(e^z)^2 = e^{2z}$.

$$\begin{aligned} (e^z)^2 &= e^z \cdot e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{k!} z^{n+k} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{n+k=h} \frac{1}{n!} \frac{1}{k!} \right) z^h. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il coefficiente di z^h nella serie precedente:

$$\sum_{n+k=h} \frac{1}{n!} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^h \frac{1}{k!} \frac{1}{(h-k)!} = \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \cdot \frac{1}{h!} = \frac{1}{h!} \cdot \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} = \frac{2^h}{h!},$$

dove si sono usate proprietà note dei coefficienti binomiali. Dunque:

$$e^z \cdot e^z = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2^h}{h!} z^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2z)^h}{h!} = e^{2z}.$$

4.2. SVILUPPI DI LAURENT

Se una funzione $f(z)$ è olomorfa in un cerchio, è ivi rappresentabile in serie di potenze. Se invece è olomorfa in una corona circolare del tipo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ con $0 \leq r < R \leq +\infty$, si dimostra che è ivi sviluppabile in serie di Laurent, ossia con una serie bilatera del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Vediamo su alcuni esempi come si determina concretamente tale sviluppo.

Esempio 1.

Sia $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, C_1 la corona $\{0 < |z| < 1\}$, C_2 la corona $\{|z| > 1\}$. $f(z)$ è olomorfa in C_1 e C_2 . Si scriva lo sviluppo di Laurent in ciascuna delle 2 corone.

C_1 . Poiché $|z| < 1$ si può usare la serie geometrica per sviluppare $\frac{1}{1-z}$, perciò:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= -\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right) = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

Si poteva anche osservare che

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

C_2 . Qui $|z| > 1$; per sviluppare $\frac{1}{z-1}$ in serie geometrica si deve allora scrivere:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

sfruttando il fatto che $|\frac{1}{z}| < 1$ in C_2 . Perciò

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

Osservazione. Notare come la stessa funzione ha 2 sviluppi diversi in 2 corone diverse, anche se centrate nello stesso punto. Questo fenomeno non ha un analogo per le serie di potenze, per le quali, fissata la funzione e il punto z_0 , lo sviluppo è univocamente determinato in un cerchio massimale.

Esercizio 2.

Scrivere lo sviluppo di Laurent di $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ nelle corone:

$$|z| < 1 \quad ; \quad 1 < |z| < 2 \quad ; \quad |z| > 2.$$

Esempio 3.

Scrivere lo sviluppo di Laurent di $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ nelle corone:

$$0 < |z| < 1 ; \quad |z| > 1 ; \quad 0 < |z-1| < 1.$$

1. Sia $0 < |z| < 1$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)^2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \\ &= \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+2) z^n. \end{aligned}$$

2. Sia $|z| > 1$.

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} =$$

[usando lo sviluppo $\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = \frac{1}{(1-w)^2}$ valido per $|w| < 1$, con $w = \frac{1}{z}$]

$$= \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{z^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{z^{n+2}}.$$

3. Sia $0 < |z-1| < 1$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-2}.$$

4.3. STUDIO DELLE SINGOLARITÀ ISOLATE DI UNA FUNZIONE MEDIANTE SVILUPPO DI LAURENT

Se f è una funzione olomorfa in una regione del tipo $\{0 < |z - z_0| < r\}$ (cioè nell'intorno di un punto z_0 , tranne il punto z_0 stesso, su cui non si fa nessuna ipotesi), f può essere sviluppata in serie di Laurent, nella corona $0 < |z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \equiv I_1(z) + I_2(z)$$

$$\text{con } I_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$I_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

$I_1(z)$ è detta “parte regolare” di f (è una serie di potenze, dunque una funzione olomorfa in tutto il cerchio $|z - z_0| < r$); $I_2(z)$ è detta “parte caratteristica”, e il suo esame serve a studiare il tipo di singolarità che f ha in z_0 . Si presentano 3 casi:

$I_2(z) \equiv 0$; $I_2(z)$ non è nulla ma ha un numero finito di termini; $I_2(z)$ ha un numero infinito di termini non nulli.

Il punto z_0 si dice allora, rispettivamente: singolarità eliminabile; polo di ordine n (se n è il massimo indice per cui $c_{-n} \neq 0$); singolarità essenziale.

Si prova quanto segue:

4. Sviluppi in serie di Laurent. Singolarità di una funzione. Residui

z_0 è singolarità eliminabile se e solo se $|f(z)|$ è limitata nell'insieme:

$$\{0 < |z - z_0| < r\};$$

z_0 è un polo di ordine n se e solo se $|f(z)| \rightarrow +\infty$ per $z \rightarrow z_0$; più precisamente, in questo caso si ha:

$$|f(z)| \sim \frac{c}{|z - z_0|^n};$$

z_0 è una singolarità essenziale se e solo se non esiste $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (né finito né infinito).

Definizioni e proprietà analoghe alle precedenti valgono anche per il punto all'infinito. Lo sviluppo di Laurent si fa allora in una corona del tipo $|z - z_0| > R$ (con z_0 qualsiasi); la parte regolare è allora

$$\sum_{n=-\infty}^0 c_n (z - z_0)^n$$

e la parte singolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

∞ è un polo di ordine n se $|f(z)| \sim c |z - z_0|^n$ per $z \rightarrow +\infty$.

Per motivi su cui si tornerà nel prossimo capitolo, particolare importanza ha la determinazione del coefficiente c_{-1} nello sviluppo di Laurent di f centrato in z_0 . Tale coefficiente viene detto residuo di f in z_0 (lo indicheremo con $R(f, z_0)$) se $z_0 \neq \infty$; si definisce invece $R(f, \infty) = -c_{-1}$.

Infine, ricordiamo che le precedenti considerazioni permettono di studiare z_0 solo se esso è una singolarità isolata, cioè f è olomorfa in una regione del tipo $0 < |z - z_0| < r$; ciò non si verifica, ad esempio, quando z_0 è un punto di accumulazione di singolarità (isolate). In questo caso non è possibile sviluppare f in una regione $0 < |z - z_0| < r$ in serie di Laurent, e la precedente classificazione

delle singolarità non si applica a z_0 (diremo solo, ad es. “ z_0 è un punto d’accumulazione di poli”). Questi punti sono anche detti “singolarità essenziali in senso esteso”. Fatte queste premesse, vediamo alcuni

esempi.

1) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$. Studiare le singolarità.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{n!}.$$

(Sviluppo valido in $|z| > 0$).

$z = 0$: polo del 3° ordine.

$z = \infty$: singolarità essenziale.

Non ci sono altre singolarità.

2) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2(n+1)]!} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots \end{aligned}$$

$z = 0$: singolarità eliminabile

$z = \infty$: singolarità essenziale.

3) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$.

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

$z = 0$: singolarità essenziale

$z = \infty$: zero del 1° ordine (punto regolare)

$$4) \quad f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}.$$

Ogni punto $z_k = k\pi$ è un polo del 2° ordine per f ($\sin^2 z$ si annulla del 2° ordine e $e^z \neq 0$); il punto $z = \infty$ è punto d'accumulazione di poli del 2° ordine, perciò non è una singolarità isolata (Singolarità essenziale in senso esteso).

5) Nell'esempio precedente, si determini il residuo di f in 0.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right)^2} = (1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)) \cdot \frac{1}{z^2} (1 - \frac{z^2}{3!} + o(z^2))^{-2} = \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)) \cdot (1 + \frac{2}{3!}z^2 + o(z^2)) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{5}{6} + o(1). \end{aligned}$$

$\text{Res}(f, 0) = 1$ (coefficiente di $\frac{1}{z}$).

$$6) \quad f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

$e^z - 1 = 0$ per $z = 2k\pi i$. Se $k = 0$: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, quindi $z_0 = 0$ singolarità eliminabile. $z_k = 2k\pi i$ con $k \neq 0$ (intero relativo) polo del 1° ordine. ∞ è punto di accumulazione di poli del 1° ordine.

7) Si studino le singolarità della seguente funzione e si determinino i residui nei punti singolari.

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - e^z}{z^2 - 1}.$$

I punti da esaminare sono: $z = \pm 1$ (si annulla il denominatore), $z = 0$ (per la presenza di $e^{\frac{1}{z}}$) e ∞ .

$z = 1$. Il denominatore si annulla del 1° ordine ($z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$); il numeratore si annulla, perciò la singolarità sarà probabilmente eliminabile. Calcoliamo $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ usando il teorema dell'Hospital (per convincersi che è lecito applicare questo teorema anche a funzioni complesse, pensare al fatto che calcolare un limite col teorema dell'Hospital nella forma $\frac{0}{0}$ equivale a sviluppare al 1° ordine numeratore e denominatore).

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2} e^{\frac{1}{z}} - e^z}{z^2 - 2z} = \frac{-2e}{2} = -e.$$

Dunque $z = 1$ singolarità eliminabile. In modo analogo si vede che

$$\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \frac{1}{e}$$

dunque anche $z = -1$ è singolarità eliminabile. Nelle singolarità eliminabili il residuo è zero, come nei punti regolari (al finito).

$$z = 0, \quad f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1} - \frac{e^z}{z^2 - 1} \equiv f_1 + f_2.$$

$f_2(z)$ è regolare in $z = 0$, quindi non dà contributo alla parte caratteristica dello sviluppo di f .

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{1-z^2} \cdot e^{\frac{1}{z}} = -\sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{2m-n=k \\ m,n=0,\dots+\infty}} \frac{1}{n!} \right) z^k. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$c_k = \sum_{\substack{2m-n=k \\ m,n=0,\dots+\infty}} \frac{1}{n!} \neq 0 \quad \forall k \text{ intero},$$

perciò $z = 0$ è singolarità essenziale.

$c_{-1} = \sum_{\substack{2m-n=-1 \\ n=2m+1}} \frac{1}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} = \text{Sh } 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2},$

come si vede ricordando che $\text{Sh } z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Dunque $\text{Res}(f, 0) = \text{Sh } 1$.

$z = \infty$. Si tratta in modo analogo a $z = 0$. Questa volta è f_1 ad essere regolare, ed è sufficiente studiare

$$f_2 = \frac{-e^z}{z^2 - 1}.$$

Procedendo come prima si trova che $z = \infty$ è singolarità essenziale, e $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Sh } 1$.

8) Si studino le singolarità di $f(z)$ e si determinino i residui nelle singolarità isolate e all'infinito:

$$f(z) = z^2 \operatorname{tg} \frac{1}{z}.$$

Punti da esaminare: $z = 0$; punti in cui $\operatorname{tg} \frac{1}{z}$ non è definita, cioè $\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia

$$z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}; \quad z = \infty.$$

I punti $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ sono poli del 1° ordine (così z si annulla del 1° ordine per $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$); $z = 0$ perciò è punto di accumulazione di poli del 1° ordine (non è una singolarità isolata). Calcoliamo i residui in questi poli del 1° ordine.

$$f(z) = \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{\cos \frac{1}{z}} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

con $g(z)$ regolare e $\neq 0$ in z_k , $h(z)$ con uno zero del 1° ordine in z_k . Si può allora usare la formula di calcolo per i residui:

4. Sviluppi in serie di Laurent. Singolarità di una funzione. Residui

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_k\right) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2} \sin \frac{1}{z}} \Big|_{z=z_k} = z_k^4 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^4}.$$

Studiamo ora $z = \infty$.

$$|f(z)| = \left| z^2 \operatorname{tg} \frac{1}{z} \right| \sim \left| z^2 \cdot \frac{1}{z} \right| = |z| \text{ per } z \rightarrow +\infty,$$

perciò ∞ è un polo del 1° ordine.

Sfruttando lo sviluppo $\operatorname{tg} w = w + \frac{w^3}{3} + o(w^3)$ per $w \rightarrow 0$, si ha che, per $|z| > R$ opportuno, $z^2 \operatorname{tg} \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right) = z + \frac{1}{3z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Dunque:

$$c_{-1} = \frac{1}{3}; \quad \text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{3}.$$

9) Si studino le singolarità di

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \sin z$$

e se ne determini il residuo all'infinito.

Punti da studiare: $z = 0, z = \infty$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{2m+1-n=k \\ m,n=0,\dots,+\infty}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{1}{n!} \right) z^k. \\ c_k &= \sum_{\substack{m=0 \\ n=2m+1-k}}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{1}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)! (2m+1-k)!}. \end{aligned}$$

Da questo si vede che: $z = 0, z = \infty$ sono singolarità essenziali;

$$\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)! (2m+2)!}.$$

10) Si studino le singolarità di $f(z)$ e se ne determinino i residui nelle singolarità isolate:

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^5 - z^3}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{\sin \pi z}{z^2 - 1}. \quad \text{Punti da esaminare: } z = 0, z = \pm 1, z = \infty.$$

In $z = 0$ il numeratore si annulla del 1° ordine, il denominatore si annulla del 3° ordine, dunque $z = 0$ è polo del 2° ordine.

In $z = \pm 1$ numeratore e denominatore si annullano del 1° ordine dunque $z = \pm 1$ sono singolarità eliminabili. In $z = \infty$ la serie che esprime $\sin \pi z$ ha infinite potenze positive, quindi $z = \infty$ è singolarità essenziale.

Per il calcolo dei residui, sviluppiamo in $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\pi z)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\ &= \sum_{n,m=0}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{\pi^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2(n+m-1)}. \end{aligned}$$

Poiché compaiono solo potenze di esponente pari, $c_{-1} = 0$, perciò $\text{Res}(f, 0) = 0$.

Per sviluppare in $|z| > 1$ (e determinare $\text{Res}(f, \infty)$) si scrive

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Procedendo in modo analogo, si vede che anche $\text{Res}(f, \infty) = 0$.

11) Si consideri $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ e si calcoli $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ lungo le rette $y = 0, x = 0, y = x$. Se ne deduca il tipo di singolarità di $z = 0$.

Sia $z = x \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0^+$. Sia $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$ $z^2 = -y^2$ e $\lim_{y \rightarrow 0} e^{1/y^2} = +\infty$. Da questi fatti segue che $z = 0$ è singolarità essenziale. Infatti il fatto che $\lim_{y \rightarrow 0} f(iy) = +\infty$ esclude la singolarità eliminabile (perché f è illimitata) mentre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^+$ esclude la singolarità polare (perché non è $|f(x)| \sim \frac{c}{|x|^n}$). Calcoliamo anche

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + ix) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2ix^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)] \text{ non esiste.}$$

Questo esempio mostra la particolarità delle singolarità essenziali: per $z \rightarrow z_0$ su particolari curve, possono avversi comportamenti diversi; $f(z)$ non ha limite né finito né infinito.

Osserviamo anche, per esempio, il comportamento di $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ per $z \rightarrow 0$.

Mentre la funzione di variabile reale $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$ non ha limite ma è limitata, la funzione $\sin \frac{1}{z}$ è illimitata. Ad es. per $z = ix$ si ha:

$$\sin \frac{1}{iz} = -\sin \frac{i}{x} = -i \operatorname{Sh} \frac{1}{x}.$$

$\operatorname{Sh} \frac{1}{x} \rightarrow \pm \infty$ per $x \rightarrow 0^\pm$, perciò $|\sin \frac{1}{iz}| \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow 0$.

Notare che, per il teorema della singolarità eliminabile, se $\sin \frac{1}{z}$ per $z \rightarrow 0$ fosse limitata, dovrebbe anche avere limite.

Esercizi.

Studiare le singolarità e il punto all'infinito per la funzione $f(z)$; determinarne il residuo in questi punti.

- | | | |
|---|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{z}{e^z} ;$ | 2) $\frac{z - \sin z}{z^3} ;$ | 3) $ze^{\frac{1}{(z-1)^2}} ;$ |
| 4) $\frac{z^3 \sin \frac{1}{z}}{1 - \pi^2 z^2} ;$ | 5) $\frac{1}{\sin^3 z} ;$ | 6) $\frac{1}{z \cos \frac{i}{z}} .$ |

Soluzioni degli esercizi

1) $z = \infty$ singolarità essenziale. $R(f, \infty) = 0$.

2) $z = 0$ singolarità eliminabile; $z = \infty$ singolarità essenziale.

$$R(f, 0) = R(f, \infty) = 0.$$

3) $z = 1$ singolarità essenziale; $z = \infty$ polo del 1º ordine $R(f, 1) = 1$;
 $R(f, \infty) = -1$.

4) $z = 0$ singolarità essenziale; $z = \pm \frac{1}{\pi}$ singolarità eliminabile; $z = \infty$ punto regolare ($f(z) \rightarrow -\frac{1}{\pi^2}$ per $z \rightarrow \infty$). $R(f, 0) = R(f, \infty) = 0$.

5) $z = k\pi$ polo del 3º ordine; $z = \infty$ punto di accumulazione di poli del 3º ordine. Per la periodicità, $R(f, k\pi)$ è lo stesso per tutti i k . Si calcola allora $R(f, 0) = \frac{1}{2}$. Non ha senso invece $R(f, \infty)$ perché ∞ non è singolarità isolata.

6) $z_k = \frac{i}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, per k intero, poli del 1º ordine.

$z = 0$ punto di accumulazione di poli del 1º ordine; $z = \infty$ zero del 1º ordine.

$$R(f, z_k) = \frac{(-1)^k}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad ; \quad R(f, \infty) = 1.$$

5. APPLICAZIONI DEI TEOREMI DEI RESIDUI

L'enunciato del teorema dei residui nella sua forma più semplice è il seguente. Se f è olomorfa in $\{0 < |z - z_0| < r\}$, per ogni $\epsilon < r$ è:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \epsilon} f(z) dz = \text{Res}(f, z_0) = c_{-1}$$

dove la circonferenza $|z - z_0| = \epsilon$ è percorsa in senso antiorario, e c_{-1} è il coefficiente del termine $\frac{1}{z - z_0}$ nello sviluppo di Laurent di f nella corona $0 < |z - z_0| < r$.

Analogamente se f è olomorfa in $\{|z| > r\}$, per ogni $R > r$ è:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = R} f(z) dz = \text{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$$

dove ora la circonferenza è percorsa in senso orario, e c_{-1} è il coefficiente di $\frac{1}{z - z_0}$ nello sviluppo di Laurent valido per $|z - z_0| > r$.

Conseguenza dei fatti precedenti è che se γ è una linea chiusa, semplice, regolare, all'interno della quale $f(z)$ è olomorfa salvo al più un numero finito di singolarità z_1, \dots, z_n ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

dove γ è percorsa in senso antiorario.

Se γ è come sopra ma f è olomorfa all'esterno di γ , salvo al più un numero finito di singolarità z_1, \dots, z_n , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty)$$

dove ora γ è percorsa in senso orario.

Infine, se la linea γ lungo la quale si calcola l'integrale non è semplice ma intrecciata, bisognerà tenere conto di quante volte γ gira attorno a ciascuna singolarità, e in quale senso (orario o antiorario). Questo sarà illustrato sugli esempi. Questi teoremi sono quindi molto utili per calcolare integrali mediante il calcolo di residui. Nel cap. 4 abbiamo visto vari esempi di calcolo dei residui. Ricordiamo un criterio utile per il calcolo di $\text{Res}(f, z_0)$ quando z_0 è un polo, al finito. Se

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

con g regolare e non nulla in z_0 , h regolare con uno zero del 1º ordine in z_0 (quindi f ha un polo del 1º ordine),

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Se $f(z)$ ha un polo di ordine n in z_0 ,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right|_{z=z_0}.$$

5.1. APPLICAZIONI DEI TEOREMI DEI RESIDUI AL CALCOLO DI INTEGRALI NEL CAMPO COMPLESSO

Esempio 1. Calcolare

$$I = \oint_{\sigma} \frac{dz}{z(z+1)}$$

per ogni possibile cammino chiuso σ , percorso in senso antiorario.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} \quad \text{olomorfa in } \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$\text{Res}(f, 0) = 1$; $\text{Res}(f, -1) = -1$ (0 e -1 sono poli del 1º ordine).

Se γ è una curva chiusa non passante per 0 e -1 , $I = 2\pi i(n - m)$ dove n è il numero di volte che σ gira positivamente attorno a 0 e m l'analogo indice per -1 .

Esempio 2. Calcolare

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{Sh} z}{z+z^3} dz.$$

Studiamo $f(z) = \frac{\operatorname{Sh} z}{z(1+z^2)}$.

Si vede che: $z=0$ è singolarità eliminabile; $z=\pm i$ sono poli del 1º ordine.

$$\text{Res}(f, \pm i) = \frac{\frac{\operatorname{Sh} z}{z}}{2z} \Big|_{z=\pm i} = -\frac{1}{2} \operatorname{Sh}(\pm i) = \mp \frac{i}{2} \sin 1.$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{Sh} z}{z+z^3} dz = 2\pi i(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) = 0.$$

Esempio 3. Calcolare

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz \text{ per } t \in \mathbb{R}.$$

Studiamo $f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$.

$z^2+2z+2=0$ per $z=-1\pm i$. Quindi: $z=0$ polo del 2º ordine; $z=-1\pm i$ poli del 1º ordine.

$$\text{Res}(f, -1 \pm i) = \left| \frac{e^{zt}}{z^2(2z+2)} \right|_{z=-1 \pm i} = \frac{e^{t(-1 \pm i)}}{4}.$$

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{d}{dz} [z^2 f(z)]_{z=0} = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2} \right]_{z=0} = \frac{t-1}{2}.$$

L'integrale vale allora:

$$2\pi i \left(\frac{e^{-t+it}}{4} + \frac{e^{-t-it}}{4} + \frac{t-1}{2} \right) = \pi i \left(e^{-t} \cos t + t - 1 \right).$$

Esempio 4. Calcolare

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}}.$$

La funzione $1/\sin \frac{1}{z}$ ha poli del 1° ordine nei punti $z = \frac{1}{k\pi}$. Perciò all'interno del cerchio $|z| < 1$ cadono infinite singolarità, e 0 è un punto d'accumulazione di singolarità. Non è possibile quindi applicare il teorema dei residui alla regione interna. Si può applicare però alla regione esterna: se $|z| = 1$ è percorso in senso antiorario, l'integrale vale:

$$-2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i c_{-1}.$$

Calcoliamo dunque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} &= \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + o\left(\frac{1}{z^3}\right)} = \frac{z}{1 - \frac{1}{6}\frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= z \left(1 + \frac{1}{6z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \right) = z + \frac{1}{6z} + o\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Perciò $c_{-1} = \frac{1}{6}$, e:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = \frac{1}{3}\pi i.$$

Esempio 5. Dire quali sono i possibili valori dell'integrale:

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

se γ è una qualsiasi linea congiungente $(0,0)$ e $(1,0)$.

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ha poli del 1° ordine in $z = \pm i$.

$$\text{Res}(f, \pm i) = \frac{1}{\pm 2i} = \mp \frac{i}{2}.$$

Perciò

$$\oint_{|z-i|=\epsilon} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{ R}(f, i) = \pi ;$$

$$\oint_{|z+i|=\epsilon} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{ R}(f, -i) = -\pi .$$

Osserviamo anche che:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{4} .$$

Allora, a seconda di quante volte γ gira intorno a i e $-i$ nell'andare da 0 a 1, l'integrale può assumere come valore:

$$\frac{\pi}{4} + n\pi \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

5.2. APPLICAZIONI DEI TEOREMI DEI RESIDUI AL CALCOLO DI INTEGRALI DI FUNZIONI DI VARIABILI REALE.

5.2.1. INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

Consideriamo un integrale del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ dove $R(x)$ è una funzione razionale, cioè un quoziente di polinomi, tale che:

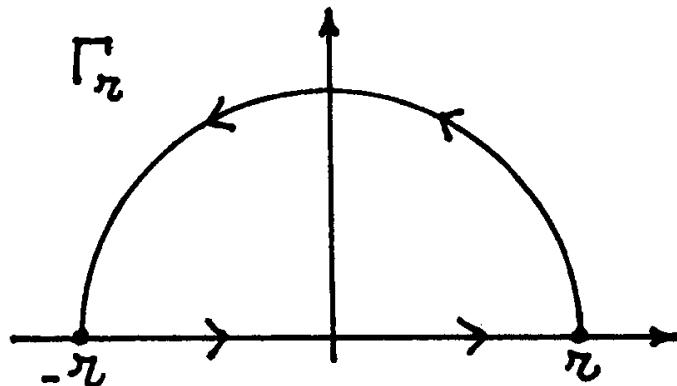
- 1) il denominatore è diverso da 0 $\forall x \in \mathbb{R}$;

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

2) il grado del denominatore supera di almeno 2 il grado del numeratore.

Questo garantisce che $R(x)$ è limitata su \mathbb{R} , e per $x \rightarrow \pm\infty$ è $R(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, perciò l'integrale di Riemann generalizzato converge.

Consideriamo la funzione $R(z)$ per $z \in \mathbb{C}$. Questa funzione è olomorfa tranne un numero finito di poli (gli zeri del denominatore nel campo complesso). Applichiamo il teorema dei residui a un cammino Γ_r del tipo:



Si avrà: $\int_{\Gamma_r} R(z) dz = 2\pi i \sum (\text{Residui di } R(z) \text{ all'interno di } \Gamma_r).$

Per $r \rightarrow +\infty$ il 2° membro tende a:

$$2\pi i \sum (\text{Residui di } R(z) \text{ nel semipiano } \operatorname{Im} z > 0);$$

il 1° membro è invece uguale a:

$$\int_{-r}^{+r} R(x) dx + \int_{\gamma_r} R(z) dz$$

con $\gamma_r = \{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$.

Il 1° integrale per $r \rightarrow +\infty$ tende a $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$, che è ciò che vogliamo

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

calcolare; il 2^o tende a zero perché:

$$\left| \int_{\gamma_r} R(z) dz \right| \leq |\gamma_r| \cdot \max_{z \in \gamma_r} |R(z)| \leq \pi r \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{M\pi}{r} \rightarrow 0$$

in quanto, per $|z| \rightarrow +\infty$, $|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$. In conclusione si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum (\text{Residui di } R(z) \text{ in poli posti nel semipiano } \operatorname{Im} z > 0).$$

Esempio 1. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} \quad \text{con } a > 0.$$

$$\text{Considero } R(z) = \frac{1}{z^4 + a^4}.$$

Le radici di $z^4 + a^4 = 0$ sono:

$$a \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad a \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad a \frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}, \quad -a \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}.$$

I poli (del 1^o ordine) posti nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ sono: $a \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $a \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

$$\operatorname{Res}\left(R(z), a \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}a} = \frac{\sqrt{2}}{4a^3(i-1)};$$

$$\operatorname{Res}\left(R(z), a \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}a} = \frac{\sqrt{2}}{4a^3(i+1)}.$$

Quindi:

$$I = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{4a^3} \left(\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2} a^3}.$$

(Notare che il risultato finale è, ovviamente, un numero reale).

Osservazione.

Se, nell'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2} a^3},$$

valida $\forall a > 0$, deriviamo ambo i membri rispetto ad a , troviamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{-4a^3}{(x^4 + a^4)^2} dx = \frac{-3\pi}{\sqrt{2} a^4}$$

e quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2} a^7}.$$

Otteniamo così il valore di un altro integrale, più complesso. Il procedimento di derivazione di un integrale rispetto al parametro a si può giustificare in base alle proprietà dell'integrale di Lebesgue, come si vedrà in seguito (cap. 11).

Esercizi. Si calcolino i seguenti integrali:

$$1) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2 + x + 1} \quad 2) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)} \quad 3) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^6 + a^6} \quad (a > 0).$$

Soluzioni.

$$1) \frac{2}{\sqrt{3}} \pi; \quad 2) \pi(\sqrt{2} - 1); \quad 3) \frac{2\pi}{3a^5}.$$

5.2.2 LEMMI DI JORDAN

Per poter applicare il metodo dei residui al calcolo di integrali di altri tipi di funzioni, ci occorre stabilire alcuni risultati utili per valutare integrali su archi di circonferenze.

Lemma 1. Sia

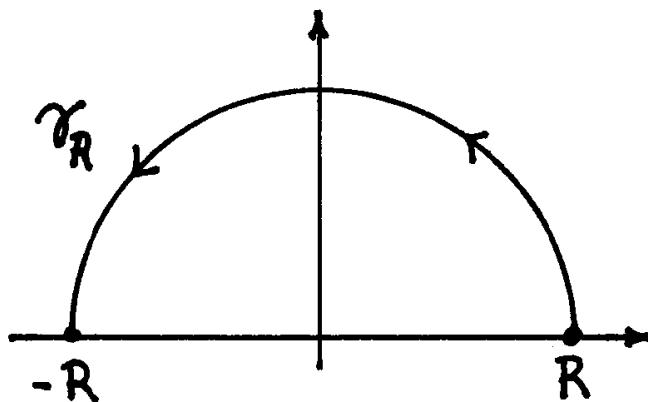
$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

con $\alpha > 0$, $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$.

Supponiamo inoltre che $|f(z)| \rightarrow 0$ uniformemente per $z \in \gamma_R$, $R \rightarrow +\infty$.

Allora $I_R \rightarrow 0$ per $R \rightarrow +\infty$.



Dimostrazione. Sia $z = Re^{i\theta} = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Allora:

$$dz = iRe^{i\theta}d\vartheta ;$$

$$e^{i\alpha z} = e^{i\alpha R \cos \theta} \cdot e^{-\alpha R \sin \theta} ;$$

$$|I_R| = \left| \int_{\gamma_R} f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R \cos \theta} \cdot e^{-\alpha R \sin \theta} \cdot iRe^{i\theta} d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-\alpha R \sin \theta} R d\vartheta \leq M_R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R d\vartheta$$

dove: $|f(Re^{i\theta})| \leq M_R \rightarrow 0$ per $R \rightarrow +\infty$ per l'ipotesi su f .

Osserviamo ora che, per simmetria,

$$\int_0^\pi e^{-R \alpha \sin \theta} d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \alpha \sin \theta} d\vartheta$$

e che, per $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin \vartheta \geq \frac{2}{\pi} \vartheta$ (osservazione già usata nel cap. 3, esempio 4).

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Allora:

$$|I_R| \leq M_R \cdot 2R \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \frac{2}{\pi}\theta} d\theta = M_R 2R \left| \frac{e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}}{-\frac{R^2}{\pi}} \right|_0^{\pi/2} = \\ = M_R \cdot \pi [1 - e^{-R}].$$

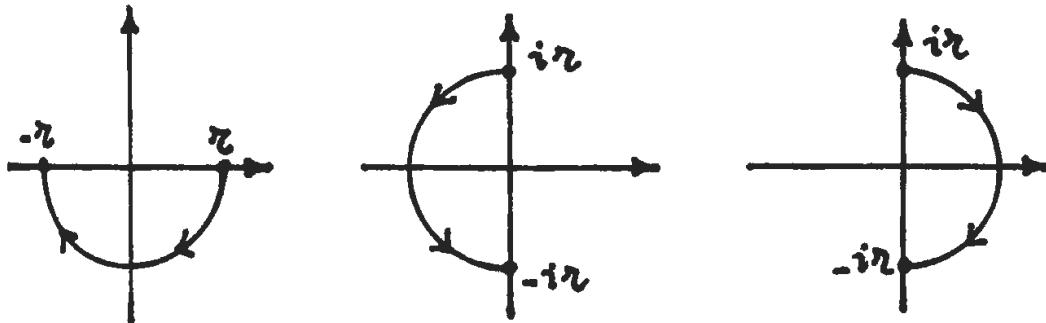
Perciò $I_R \rightarrow 0$ per $R \rightarrow +\infty$. □

In modo del tutto analogo si dimostra che gli integrali:

$$\int_{\gamma_r} f(z) e^{i\alpha z} dz; \quad \int_{\gamma_r} f(z) e^{\alpha z} dz; \quad \int_{\gamma_r} f(z) e^{\alpha z} dz$$

con $\alpha < 0$ con $\alpha > 0$ con $\alpha < 0$

e con γ_r , rispettivamente:



tendono a zero, per $r \rightarrow +\infty$, se $|f(z)| \rightarrow 0$ uniformemente, per $z \in \gamma_r$, $r \rightarrow +\infty$.

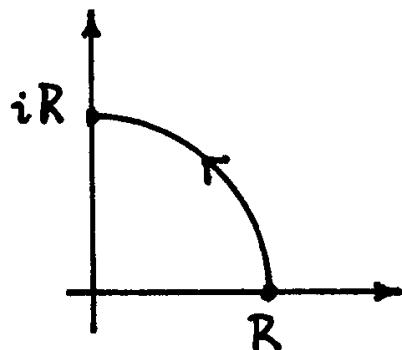
Gli integrali del tipo $\int f(z) e^{i\alpha z} dz$ sono utili ad esempio nel calcolo di trasformate di Fourier (v. cap. 15); quelli del tipo $\int f(z) e^{\alpha z} dz$ intervengono nel calcolo di anttrasformate di Laplace (v. cap. 14).

Ripetendo una dimostrazione del tutto analoga a quella condotta nel calcolo degli integrali di Fresnel (v. cap. 3, esempio 5), si può infine dimostrare che

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

l'integrale:

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z^2} dz, \text{ con } \alpha > 0, \gamma_R \text{ come in figura}$$



e $|f(z)|$ limitata su γ_R per $R \rightarrow +\infty$, tende a zero per $R \rightarrow +\infty$.

Un'altra proprietà che ci sarà utile nel seguito è contenuta nel prossimo

Lemma 2.

Sia f olomorfa in un intorno di un punto z_0 , tranne il punto z_0 stesso che è un polo del 1° ordine. Sia $\gamma_r = \{z = re^{i\theta}: \vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2\}$. Allora:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \text{Res}(f, z_0).$$

Dimostrazione.

Poiché z_0 è un polo del 1° ordine, si può scrivere lo sviluppo di Laurent di f in un intorno di z_0 nella forma:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + g(z)$$

con $g(z)$ regolare (in particolare, limitata in z_0). Allora

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = c_{-1} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_r} g(z) dz.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Per $r \rightarrow 0$, il 2° integrale $\rightarrow 0$ perché g è limitata e $|\gamma_r| \rightarrow 0$. Il 1° integrale è uguale a: (ponendo $z - z_0 = re^{i\theta}$)

$$c_{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{ri e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta = c_{-1} i(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \text{Res}(f, z_0) \cdot i(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

□

5.2.3. INTEGRALI DEL TIPO:

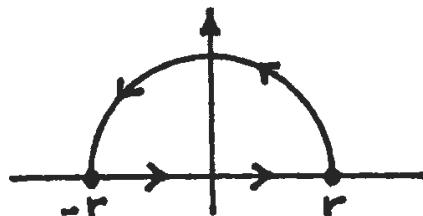
$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{ix} dx; \quad \int_{\mathbb{R}} R(x) \cos x dx; \quad \int_{\mathbb{R}} R(x) \sin x dx.$$

Sia $R(x)$ una funzione razionale come in 5.2.1 (denominatore privo di radici reali, $R(x) \rightarrow 0$ almeno come $\frac{1}{x^2}$ per $|x| \rightarrow +\infty$); si voglia calcolare:

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{ix} dx \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

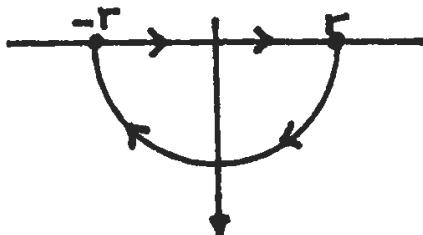
Consideriamo allora $\int_{\gamma_r} R(z) e^{iz} dz$ con

con $\gamma_r =$



se $\alpha > 0$

$\gamma_r =$



se $\alpha < 0$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Allora

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} R(z) e^{iz} dz =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \sum (\text{Residui di } R(z) e^{iz} \text{ nei poli posti in } \operatorname{Im} z > 0) \text{ se } \alpha > 0 \\ -2\pi i \sum (\text{Residui di } R(z) e^{iz} \text{ nei poli posti in } \operatorname{Im} z < 0) \text{ se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Il segno $-$ nel 2° caso dipende dal senso orario in cui è percorso γ_r . Questo limite, d'altra parte, coincide con

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{ix} dx$$

perché l'integrale sulla semicirconferenza tende a zero, per i lemmi di Jordan.

Esempio 2. Si calcoli

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x+2}{x^4+1} e^{ix} dx, \text{ per } \alpha > 0.$$

$R(z) = \frac{z+2}{z^4+1}$ ha poli del 1° ordine nei punti: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

Sia $f(z) = R(z)e^{iz}$.

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \left. \frac{(z+2) e^{iz}}{4z^3} \right|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1+2\sqrt{2}+i}{4(i-1)} e^{\alpha \frac{(i-1)}{\sqrt{2}}};$$

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \left. \frac{(z+2) e^{iz}}{4z^3} \right|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{-1+2\sqrt{2}+i}{4(i+1)} e^{-\alpha \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x+2}{x^4+1} e^{ix} dx = 2\pi i \sum (\text{residui di } f(z) \text{ nel semipiano } \operatorname{Im} z > 0) =$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$$= 2\pi i \left(\frac{1+2\sqrt{2}+i}{4(i-1)} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} e^{i\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} + \frac{-1+2\sqrt{2}+i}{4(i+1)} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} e^{-i\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \right).$$

Esempio 3. Si calcoli

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Per ottenere integrali di funzioni del tipo $R(x) \cos \lambda x$, $R(x) \sin \lambda x$, si può scrivere

$$\cos \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} \quad \sin \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}$$

e ricondursi al calcolo di 2 integrali del tipo $R(x) e^{i\alpha x}$.

Talvolta però con considerazioni di simmetria si riesce a calcolare un solo integrale. Ad esempio in questo caso

$$\frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} = \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} + i \frac{\sin \lambda x}{1+x^2}.$$

Poiché la 2^a funzione è dispari, il suo integrale su \mathbb{R} è nullo, perciò:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx \equiv I_{\lambda}.$$

Considero ora $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$. $f(z)$ ha poli del 1^o ordine in $z = \pm i$.

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i};$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{e^{\lambda}}{-2i};$$

$$I_{\lambda} = (\text{se } \lambda > 0) \quad 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi e^{-\lambda}$$

$$I_{\lambda} = (\text{se } \lambda < 0) \quad -2\pi i \text{Res}(f, -i) = \pi e^{\lambda}.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Perciò: $I_\lambda = \pi e^{-|\lambda|}$ $\forall \lambda \neq 0$. (Anzi, anche per $\lambda = 0$: si calcola direttamente).

Esempio 4. Si calcoli

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \lambda x}{a^2 + x^2} dx \quad \text{per } \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osservando che $\sin^2 \lambda x = \frac{1 - \cos 2\lambda x}{2}$ si ha:

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{a^2 + x^2} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2\lambda x}{a^2 + x^2} dx \right).$$

Il 1° integrale è immediato; il 2° si calcola come nell'esempio precedente.

Esempio 5. Si calcoli:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx \quad (\lambda > 0).$$

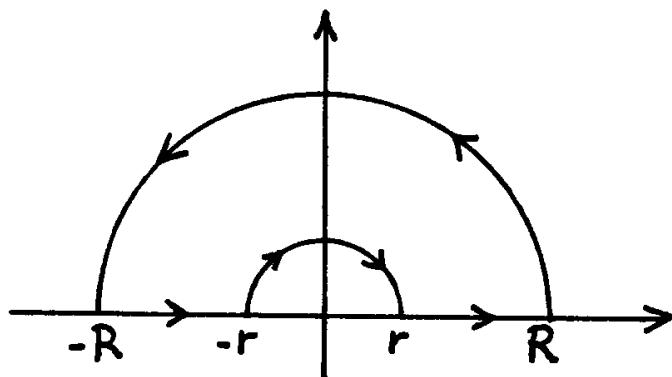
Notiamo che per $x \rightarrow 0$ la funzione è limitata ($1 - \cos \lambda x \sim \frac{1}{2} \lambda^2 x^2$ per $x \rightarrow 0$).

Se però, per calcolare l'integrale, lo spezziamo nella somma

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \lambda x}{x^2} dx$$

troviamo due integrali divergenti. Consideriamo allora:

$$\int_{\Gamma} \frac{1 - e^{i\lambda z}}{z^2} dz \text{ con } \Gamma:$$



Notiamo che $f(z) = \frac{1-e^{i\lambda z}}{z^2}$ ha un polo del 1^o ordine in $z=0$, perciò è necessario scegliere un cammino Γ che eviti lo zero. Notiamo anche che, detto $I_{r,R} = [-R, -r] \cup [r, R]$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{I_{r,R}} \frac{1-e^{i\lambda x}}{x^2} dx &= \int_{I_{r,R}} \frac{1-\cos \lambda x}{x^2} dx - i \int_{I_{r,R}} \frac{\sin \lambda x}{x^2} dx = \\ &= \int_{I_{r,R}} \frac{1-\cos \lambda x}{x^2} dx \end{aligned}$$

in quanto la funzione $\frac{\sin \lambda x}{x^2}$ è dispari e dunque ha integrale nullo su $I_{r,R}$.

Perciò

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{I_{r,R}} \frac{1-e^{i\lambda x}}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos \lambda x}{x^2} dx.$$

La funzione $f(z) = \frac{1-e^{i\lambda z}}{z^2}$ non ha singolarità oltre all'origine, che cade all'esterno di Γ , perciò, per il teorema di Cauchy,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Stimiamo ora gli integrali sulle semicirconferenze. Detta γ_r la semicirconferenza più piccola, per il lemma 2 si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Per $z \rightarrow 0$, $f(z) \sim \frac{-i\lambda z}{z^2} = \frac{-i\lambda}{z}$, perciò $\operatorname{Res}(f, 0) = -i\lambda$ e il limite è: $-\pi\lambda$.

Sia ora γ_R la semicirconferenza grande.

$$\int_{\gamma_R} \frac{1-e^{i\lambda z}}{z^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2} - \int_{\gamma_R} \frac{e^{i\lambda z}}{z^2} dz.$$

Il 2^o integrale tende a zero per $R \rightarrow +\infty$ per i lemmi di Jordan; il 1^o tende a zero perché

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0.$$

In definitiva si ha che

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx - \pi \lambda,$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx = \pi \lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Esempio 6. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \lambda x}{x} \right)^2 dx = \pi \lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Basta scrivere $\sin^2 \lambda x = \frac{1 - \cos 2\lambda x}{2}$ e applicare il risultato dell'esempio 5.

Esempio 7. Si calcoli:

$$V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^3 - 1} dx.$$

Osservazione. Poiché il denominatore $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ ha uno zero del 1° ordine in \mathbb{R} , l'integrale qui considerato diverge (come integrale di Riemann generalizzato o come integrale di Lebesgue). Ciò che si chiede qui è di calcolare il “valor principale secondo Cauchy”, che per definizione è

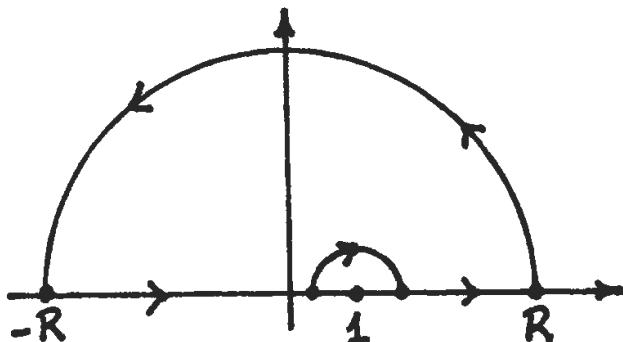
$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(-\infty, 1-\epsilon) \cup (1+\epsilon, +\infty)} \frac{e^{ix}}{x^3 - 1} dx.$$

Quest'ultimo può convergere, grazie alle cancellazioni dell'integranda in un intorno simmetrico di 1, anche se la singolarità non è integrabile.

È naturale allora considerare:

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^3 - 1} dz \text{ con } \Gamma:$$



$$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \text{ per } z = 1, z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Il punto $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ è un polo del 1° ordine che cade entro Γ per R abbastanza grande.

$$\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^3 - 1}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = \left.\frac{e^{iz}}{3z^2}\right|_{z=\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = -\frac{2}{3(1 + \sqrt{3}i)} e^{-\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})}.$$

Detta γ_r la circonferenza piccola si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^3 - 1} dz = -\pi i \text{ Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^3 - 1}, 1\right) = -\pi i \frac{e^i}{3}.$$

L'integrale sulla circonferenza grande tende a zero per $R \rightarrow +\infty$. In definitiva si ha:

$$2\pi i \left(-\frac{2}{3(1 + \sqrt{3}i)} e^{-\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})} \right) = I - \pi i \frac{e^i}{3}$$

$$I = \pi i \left(-\frac{4}{3(1 + \sqrt{3}i)} e^{-\frac{1}{2}(i + \sqrt{3})} + \frac{e^i}{3} \right) \simeq 1,76 + i \cdot 0,53.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Esercizi.

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx; \quad 2) \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+x+1} dx;$$

$$3) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx; \quad 4) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos x}{4\pi^2-x^2} dx.$$

Traccia di soluzione.

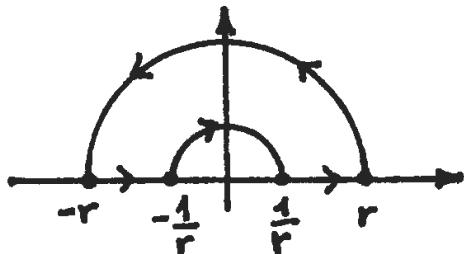
$$\begin{aligned} 1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 e^{ix}}{1+x^4} dx = \pi i \left(\frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \simeq 0,06. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x^2+x+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{iz}}{2z+1} \Big|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} - \frac{e^{-iz}}{2z+1} \Big|_{z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \frac{1}{2} \simeq 1,34. \end{aligned}$$

$$3) \quad I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx.$$

$$\text{Sia } J_r = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{z \cdot 2z} \right)_{z=i} = -\frac{\pi i}{e},$$

con γ_r :

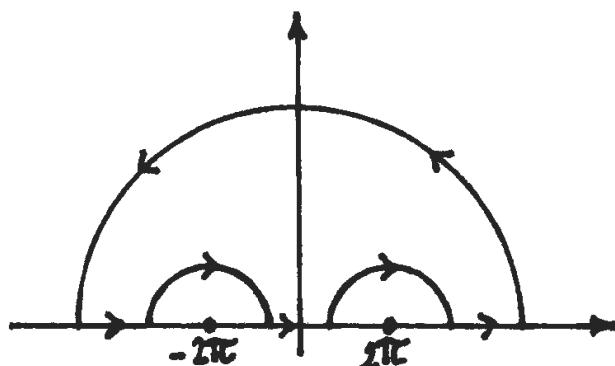


Per $r \rightarrow \infty$, $J_r \rightarrow iI - \pi i \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2} \right)_{z=0} = iI - \pi i$.

Allora $-\frac{\pi}{e}i = iI - \pi i$, e $I = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) \simeq 1,98$.

$$4) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{4\pi^2 - x^2} dx = I$$

$$0 = \int_{\gamma_r} \frac{1 - e^{iz}}{4\pi^2 - z^2} dz = J_r, \text{ con } \gamma_r:$$



Poiché $\frac{1 - e^{iz}}{4\pi^2 - z^2}$ è regolare anche in $\pm 2\pi$, $J_r \rightarrow I$ perciò $I = 0$.

5.2.4. INTEGRALI DEL TIPO: $\int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta$

Consideriamo un integrale di questo tipo, dove R è una funzione razionale

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

tale che $R(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ risulti limitata per $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (ossia il denominatore non si annulli). L'integranda sarà allora una funzione continua su $[0, 2\pi]$ e pertanto certamente integrabile.

Poniamo $z = e^{i\theta}$. Per ϑ variabile in $[0, 2\pi]$, z varierà sulla circonferenza $|z| = 1$. Si può scrivere allora:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2};$$

$$\sin \vartheta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i};$$

$$dz = ie^{i\theta}d\vartheta = izd\vartheta, \quad d\vartheta = -i\frac{dz}{z};$$

l'integrale si trasforma allora in:

$$\oint_{|z|=1} -i \cdot R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{z}$$

che è l'integrale di una funzione razionale lungo $|z| = 1$, e si può calcolare mediante i residui dell'integranda all'interno del cerchio.

Esempio 8. Calcolare

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{a + b \sin \vartheta} \quad \text{con } a > b > 0.$$

Notare che l'ipotesi $a > b > 0$ garantisce che l'integranda sia continua su $[0, 2\pi]$. Con la sostituzione vista l'integrale diventa:

$$I = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(a + b \frac{(z - \frac{1}{z})}{2i} \right)} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 + 2iaz - b}.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Dobbiamo ora cercare gli zeri di $bz^2 + 2iaz - b$ interni al cerchio $|z| < 1$.

$$bz^2 + 2iaz - b = 0 ; \quad z = \frac{-ai \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{b} = i \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right).$$

Poiché $0 < b < a$, l'espressione tra parentesi è reale, e il punto $i \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)$ cade all'interno di $|z| < 1$, mentre l'altro punto cade all'esterno. Si ha allora:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \cdot 2 \operatorname{Res} \left(\frac{1}{bz^2 + 2iaz - b}, i \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right) = \\ &= 4\pi i \left(\frac{1}{2bz + 2ia} \right)_{z=i \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Esempio 9. Calcolare

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\vartheta}{5 - 4 \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Osserviamo che:

$$\cos 3\vartheta = \frac{e^{i3\vartheta} + e^{-i3\vartheta}}{2} = \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}.$$

Con la sostituzione $z = e^{i\theta}$ si ha dunque:

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}}{\frac{5 - 4 \left(z + \frac{1}{z} \right)}{2}} \frac{dz}{z} = \\ &= -i \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^6 + 1}{2z^3(-2z^2 + 5z - 2)}}{2z^3(-2z^2 + 5z - 2)} dz = \end{aligned}$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$$= \frac{i}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz \equiv \frac{i}{2} \oint_{|z|=1} f(z) dz.$$

$f(z)$ ha un polo del 3° ordine in $z=0$, e poli del 1° ordine in $z=\frac{1}{2}$, $z=2$. Quest'ultimo cade fuori dal cerchio $|z|<1$, quindi:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{i}{2} \cdot \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \frac{1}{2}) \right).$$

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \frac{z^6 + 1}{2z^3(z-2)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{65}{24};$$

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^6 + 1}{2z^2 - 5z + 2} \right)_{z=0} = \frac{21}{8};$$

$$I = \frac{\pi}{12}.$$

5.2.5 INTEGRALI CHE RICHIEDONO CAMMINI DI TIPO RETTANGOLARE

Raccogliamo qui alcuni esempi di integrali che non rientrano nei tipi visti finora, e hanno in comune il fatto di richiedere un cammino di integrazione di tipo rettangolare. Il motivo di questa scelta sarà illustrato sugli esempi.

Esempio 10. Si calcoli

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Ch } ax}{\text{Ch } x} dx \text{ con } |a| < 1.$$

Osserviamo che, per simmetria, il segno di a non influisce sull'integrale, perciò possiamo supporre $a \geq 0$. Allora per $x \rightarrow \pm\infty$ l'integrandà tende a zero come $e^{-|x|(1-a)}$, perciò è integrabile. Notiamo anche che:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Ch} ax}{\operatorname{Cn} x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{Ch} x} dx \right)$$

e questi 2 integrali sono uguali, per simmetria, perciò:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx.$$

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{Ch} z}$. $f(z)$ ha poli del 1° ordine negli zeri di $\operatorname{Ch} z$, cioè in $z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, k intero relativo. Osserviamo cosa succede se calcoliamo $\int_{\gamma_r} f(z) dz$ con γ_r semicirconferenza come negli esempi di 4.2.3. Per quanto visto nel cap. 1,

$$|f(z)| = \frac{e^{ax}}{\sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \sin^2 y}} \text{ con } z = x + iy$$

In particolare $|f(z)| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$, ma $|f(z)|$ non tende a zero uniformemente su γ_r , per $r \rightarrow +\infty$: se ad es. $z = iy$ si ha

$$|f(z)| = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

che non tende a zero per $y \rightarrow \pm\infty$ (anzi è illimitata). Devo quindi considerare un altro tipo di cammino. Per capire qual è la scelta giusta, osserviamo le proprietà di periodicità di e^z :

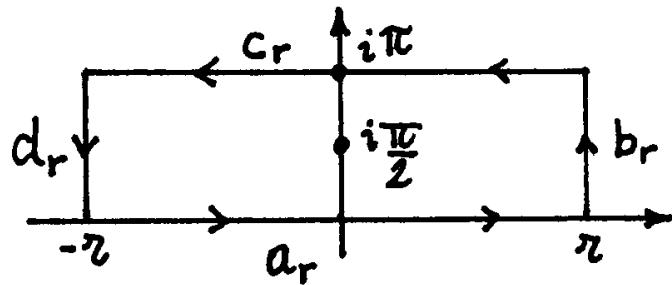
$$e^{z+2\pi i} = e^z; \quad e^{z+\pi i} = -e^z$$

perciò:

$$\operatorname{Ch}(z + \pi i) = -\operatorname{Ch} z \quad \text{e} \quad \operatorname{Sh}(z + \pi i) = -\operatorname{Sh} z.$$

5. Applicazioni dei teoremi dei residui

Consideriamo allora un cammino γ_r del tipo:



γ_r contiene un solo polo di $f(z)$: $z = i \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, i \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{az}}{\operatorname{Sh} z} \right)_{z=i\frac{\pi}{2}} = \\ &= 2\pi i \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{i \sin \frac{\pi}{2}} = 2\pi e^{ia\frac{\pi}{2}}; \end{aligned}$$

$$\int_{a_r} f(z) dz = \int_{-r}^r \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx;$$

$$\begin{aligned} \int_{c_r} f(z) dz &= \int_r^{-r} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\operatorname{Ch}(x+\pi i)} dx = \\ &= e^{a\pi i} \int_r^{-r} -\frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = e^{a\pi i} \int_{-r}^r \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx. \end{aligned}$$

Perciò:

$$\int_{a_r} f(z) dz + \int_{c_r} f(z) dz \rightarrow (1 + e^{a\pi i}) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{\operatorname{Ch} x} dx = (1 + e^{a\pi i}) \cdot I.$$

Per $x \in b_r$, $|f(z)| = \frac{e^{ar}}{\sqrt{\operatorname{Ch}^2 r - \sin^2 y}} \sim e^{-r(1-a)}$ per $r \rightarrow +\infty$, dunque:

$$\left| \int_{b_r} f(z) dz \right| \leq |b_r| \cdot \max_{z \in b_r} |f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow +\infty$$

Analogamente per c_r .

In definitiva si ha:

$$2\pi e^{ia\frac{\pi}{2}} = I(1 + e^{a\pi i}); \quad I = \frac{2\pi e^{ia\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{a\pi i}} = \pi \cdot \frac{2}{e^{a\frac{\pi}{2}i} + e^{-a\frac{\pi}{2}i}} = \frac{\pi}{\cos(a\frac{\pi}{2})}$$

(osservare che il risultato trovato ha senso per $0 \leq a < 1$).

Esercizio 11. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\operatorname{Ch} x} dx.$$

[Si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle dell'esempio 10. Risultato: $I = \frac{\pi^3}{4}$].

Esempio 12. Calcolare:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\operatorname{Sh} x} dx.$$

Notare che l'integrandà è pari, per $x \rightarrow 0$ tende a 1, dunque è limitata; per $x \rightarrow \infty$ tende a zero esponenzialmente, perciò è integrabile. La corrispondente funzione $f(z) = \frac{z}{\operatorname{Sh} z}$ ha una singolarità eliminabile in $z = 0$, e poli del 1º ordine nei punti $z = k\pi i$ con k intero $\neq 0$.

$$|f(z)| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\operatorname{Sh}^2 x + \sin^2 y}}.$$

Da quest'espressione si vede che $f(z)$ non è limitata su semicerchi di tipo

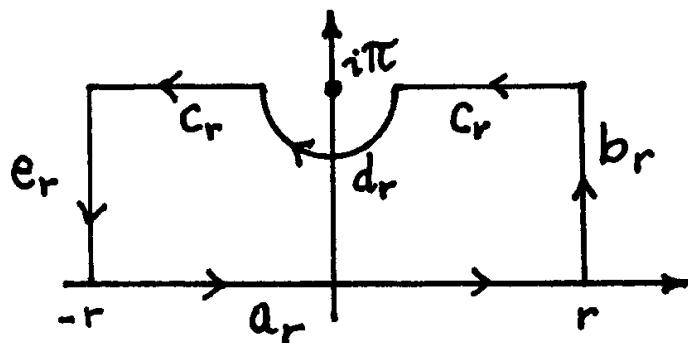
5. Applicazioni dei teoremi dei residui

$|z| = R$, mentre è limitata e tende a zero se $|y|$ è limitato e $|x| \rightarrow +\infty$.

Come osservato nell'esempio 10, inoltre, $\operatorname{Sh}(z + \pi i) = -\operatorname{Sh} z$.

Consideriamo allora:

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz, \text{ con } \gamma_r:$$



(Osservare che $z = 0$ è singolarità eliminabile, perciò non c'è bisogno di evitarla).

Per il teorema di Cauchy,

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Inoltre:

$$\int_{a_r} f(z) dz = \int_{-r}^r \frac{x}{\operatorname{Sh} x} dx \rightarrow I;$$

$$\begin{aligned} \int_{c_r} f(z) dz &= \int_r^\epsilon -\frac{x+\pi i}{\operatorname{Sh} x} dx + \int_{-\epsilon}^{-r} -\frac{x+\pi i}{\operatorname{Sh} x} dx = \\ &= \pi i \int_{(-r, -\epsilon) \cup (\epsilon, r)} \frac{dx}{\operatorname{Sh} x} + \int_{(-r, -\epsilon) \cup (\epsilon, r)} \frac{x}{\operatorname{Sh} x} dx. \end{aligned}$$

Il primo dei due integrali è nullo perché $\operatorname{Sh} x$ è dispari, dunque $\int_{c_r} f(z) dz \rightarrow I$.

Per le osservazioni fatte su $|f(z)|$, $\int_{b_r} f(z) dz$ e $\int_{c_r} f(z) dz$ tendono a zero. Infine,

$$\int_{d_r} f(z) dz \rightarrow -\pi i \operatorname{Res}(f, \pi i) = -\pi i \left(\frac{z}{\operatorname{Ch} z} \right)_{z=\pi i} = -\pi^2.$$

Allora $2I - \pi^2 = 0$, ossia $I = \frac{\pi^2}{2}$.

5.3. APPLICAZIONI DEL TEOREMA DELL'INDICATORE LOGARITMICO E DEL TEOREMA DI ROUCHÉ

Questi due teoremi sono conseguenze del teorema dei residui, e ne offrono quindi altri esempi di applicazione. Richiamiamo il Teorema dell'indicatore logaritmico.

Sia f olomorfa in un dominio limitato Ω tranne al più singolarità polari, e su $\partial\Omega$ non cadano né zeri né poli di f . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

dove N e P sono, rispettivamente, il numero degli zeri e il numero dei poli di f in Ω , computati con la dovuta molteplicità.

Esempio 1. Calcolare:

$$I = \oint_{|z|=n+\frac{1}{2}} \cotg(\pi z) dz \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots$$

Osserviamo che $\cotg(\pi z) = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}$ con $f(z) = \sin \pi z$.

La funzione $f(z)$ non ha poli, e ha zeri per $\pi z = k\pi$, cioè $z = k$ (k intero relativo). All'interno della circonferenza $|z| = n + \frac{1}{2}$ cadono $2n + 1$ zeri: gli interi $-n, -n+1, \dots, n-1, n$.

$-(n-1), \dots, -2, -1, 0, 1, \dots, n$. Perciò

$$\frac{I}{2\pi i} = \frac{1}{\pi} \cdot (2n+1), \quad I = 2i(2n+1).$$

Ricordiamo ora l'enunciato del Teorema di Rouché:

siano f, g olomorfe in un dominio limitato Ω ; se su $\partial\Omega$ è $|g(z)| < |f(z)|$ allora l'equazione $f(z) + g(z) = 0$ ha lo stesso numero di soluzioni in Ω (computate con la dovuta molteplicità) dell'equazione $f(z) = 0$.

Il teorema precedente serve a determinare il numero di soluzioni di un'equazione in un certo dominio, quando si può vedere l'equazione come una "piccola perturbazione" di un'equazione più semplice (che si sa risolvere).

Esempio 2. Quante radici ha il polinomio

$$z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1 \quad \text{in } |z| < 1?$$

Sia $f(z) = 6z^3$; $g(z) = z^7 - 2z^5 - z + 1$. Mi interessa l'equazione $f + g = 0$ in $|z| < 1$. Per $|z| = 1$ si ha:

$$|g(z)| \leq 1 + 2 + 1 + 1 = 5 < 6 = |f(z)|.$$

Perciò l'equazione considerata ha lo stesso numero di soluzioni in $|z| < 1$ (computate con la dovuta molteplicità) dell'equazione $6z^3 = 0$, ossia 3. (Notare che le soluzioni di $f + g = 0$ non è detto siano coincidenti, come le soluzioni di $f = 0$).

Esempio 3. Quante soluzioni dell'equazione $z^4 - 6z + 3 = 0$ hanno modulo compreso tra 1 e 2?

Contiamo il n° di soluzioni in $|z| < 2$, poi quello in $|z| \leq 1$, e quindi facciamo la differenza.

Consideriamo prima $f(z) = z^4$; $g(z) = -6z + 3$. Per $|z| = 2$,

$$|g(z)| \leq 6 \cdot 2 + 3 = 15 < 16 = |f(z)|.$$

In $|z| < 2$, $f(z) = 0$ ha 4 soluzioni, quindi $f + g = 0$ ha 4 soluzioni.

Considero ora $f(z) = -6z$; $g(z) = z^4 + 3$. Per $|z| = 1$,

$$|g(z)| \leq 1 + 3 = 4 < 6 = |f(z)|$$

(in particolare $f + g = 0$ non ha soluzioni per $|z| = 1$). In $|z| < 1$, $f(z) = 0$ ha 1 soluzione, quindi $f + g = 0$ ha una soluzione per $|z| < 1$, anzi per $|z| \leq 1$. Allora l'equazione ha $3 - 1 = 2$ soluzioni di modulo compreso tra 1 e 2.

Esercizio 4. Quante soluzioni ha $e^z + 3z^2 = 0$ in $|z| < 1$? [R.: 2]

Esercizio 5. Quante soluzioni ha l'equazione $\frac{z}{4} + \sin^2 z = 0$ nel quadrato $\{|\Re z| < 1; |\Im z| < 1\}$?

[Suggerimento: $|\sin^2 z| = \sin^2 x + \operatorname{Sh}^2 y$. Soluzione: 2].

6. TRASFORMAZIONI DEL PIANO COMPLESSO. MAPPE CONFORMI

6.1. ALCUNE TRASFORMAZIONI NOTEVOLI DEL PIANO COMPLESSO

Una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si può interpretare, geometricamente, come una trasformazione del piano in se stesso: la trasformazione che porta il punto z nel punto $f(z)$:

$$z \mapsto f(z).$$

Le funzioni più semplici sono interpretabili come opportune trasformazioni elementari della geometria euclidea. Vediamo qualche esempio.

1. $f(z) = z + z_0$ (con $z_0 \in \mathbb{C}$, fissato)

è la traslazione: $z \mapsto z + z_0$.

2. $f(z) = \alpha \cdot z$ (con $\alpha \in \mathbb{C}$, fissato).

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ e $\alpha = \alpha_0 e^{i\theta_0}$ si ha $\alpha \cdot z = \rho \cdot \alpha_0 \cdot e^{i(\theta + \theta_0)}$. Perciò $w = f(z)$ ha modulo $\alpha_0 \cdot |\rho|$ e argomento $\theta_0 + \arg z$. Perciò f agisce come una rotazione di angolo θ_0 insieme a una dilatazione di coefficiente α_0 . In particolare se $|\alpha| = 1$, f è una rotazione, se $\theta_0 = 0$, cioè α è reale positivo, f è una dilatazione.

3. $f(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fissati.

Per quanto visto in 1) e 2) questa trasformazione (trasformazione lineare) è una composizione di una rotazione, una traslazione e una dilatazione: perciò è una similitudine, nel senso della geometria euclidea.

Consideriamo una trasformazione più complessa, cioè:

4. L'inversione $f(z) = \frac{1}{z}$.

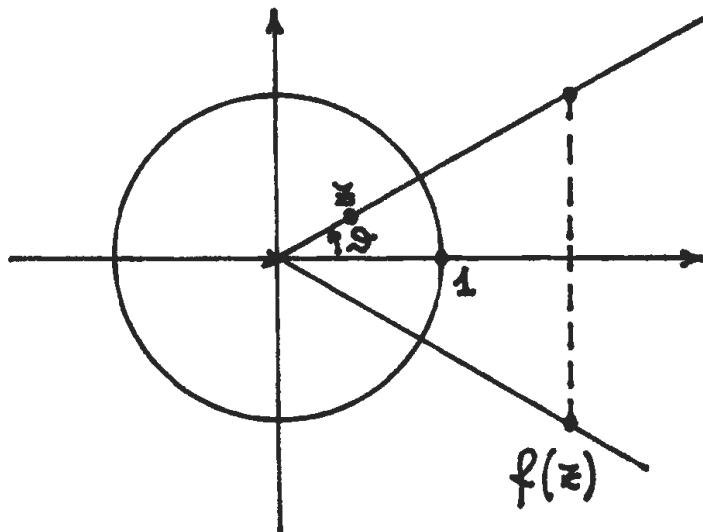
6. Trasformazioni del campo complesso. Mappe conformi

Per vedere come agisce su un punto, consideriamo

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$f(z) = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}.$$

Perciò il modulo di $f(z)$ è $\frac{1}{|\rho|}$ e l'argomento è $-\arg z$. $f(z)$ è quindi l'"inversione circolare" seguita da una riflessione attraverso l'asse x .



Scriviamo in coordinate cartesiane l'azione di f . Posto $w = f(z) = u + iv$ e $z = x + iy$ si ha:

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

perciò:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

(Il piano (x, y) è trasformato nel piano (u, v) mediante queste equazioni).

Notiamo che $f(z)$ è l'inversione di se stessa:

$$f(f(z)) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$$

(perciò per studiare le proprietà geometriche di f non ha molta importanza distinguere il “piano di partenza” (x, y) dal “piano d’arrivo” (u, v)).

Consideriamo ora l’equazione:

$$d(u^2 + v^2) + au + bv + c = 0 \quad (6.2)$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ che rappresenta, nel piano (u, v) , una circonferenza (reale o immaginaria) se $d \neq 0$, una retta se $d = 0$. Chiameremo la totalità delle curve di questa famiglia “circonferenze generalizzate”. Sostituendo nella (6.2) le (6.1) si ha:

$$d \frac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{ax - by}{x^2 + y^2} + c = 0$$

ossia:

$$c(x^2 + y^2) + ax - by + d = 0 \quad (6.3)$$

che è ancora, nel piano (x, y) , un’equazione di tipo (6.2). Si può quindi affermare che:

l’inversione trasforma circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate.

Più precisamente, dal confronto di (6.2) e (6.3) si vede che:

- Una circonferenza passante per l’origine è trasformata in una retta non passante per l’origine, e viceversa.

Infatti: la (6.2) rappresenta una circonferenza se $d \neq 0$, passante per l’origine se $c = 0$; allora la (6.3) rappresenta una retta ($c = 0$) non passante per l’origine ($d \neq 0$). Il viceversa si dimostra allo stesso modo.

- Una retta passante per l'origine è trasformata in una retta passante per l'origine. (Porre $c = d = 0$ nella (6.2) e leggere quindi la (6.3)).
- Una circonferenza non passante per l'origine è trasformata in una circonferenza non passante per l'origine. (Porre $c \neq 0, d \neq 0$ nella (6.2) e leggere quindi la (6.3)).

6.2. MAPPE CONFORMI

Una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (Ω dominio di \mathbb{C}) si dice mappa conforme se: f è olomorfa in Ω ; $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$. Detto allora $\Omega' = f(\Omega)$ si dice che f porta Ω conformemente in Ω' . La trasformazione f risulta essere allora localmente invertibile (mentre in generale non si può garantire che sia biunivoca tra Ω e $f(\Omega)$), inoltre f conserva gli angoli.

Se f è olomorfa in Ω tranne in alcuni punti, e $f'(z) \neq 0$ in Ω tranne in alcuni punti, i punti in cui f non è derivabile oppure è $f'(z) = 0$ si dicono punti critici della trasformazione. Il punto ∞ (se appartiene ad Ω) si considera sempre punto critico. Gli angoli formati da 2 curve in un punto critico non sono in generale conservati dalla mappa conforme.

Consideriamo le trasformazioni elementari fin qui studiate. La trasformazione lineare $f(z) = \alpha z + \beta$ è conforme purché $\alpha \neq 0$ (per $\alpha = 0$ diventa la funzione costante); l'inversione è una trasformazione conforme in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e ha $z = 0$ e ($z = \infty$) come punti critici.

Consideriamo ora le trasformazioni del tipo:

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ fissati.}$$

Una tale trasformazione si dice trasformazione bilineare, o di Möbius.

6. Trasformazioni del campo complesso. Mappe conformi

Dall'identità:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

si vede che questa trasformazione può vedersi come composizione di trasformazioni lineari e inversioni. Infatti:

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \alpha + \beta \cdot \frac{1}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d} \text{ se } \alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{bc - ad}{c}.$$

Questo consente di affermare che una mappa bilineare porta circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate. Infatti l'inversione ha queste proprietà, come abbiamo visto, mentre le trasformazioni lineari, essendo similitudini, portano rette in rette e circonferenze in circonferenze. Tutto ciò vale se la mappa non è costante, cioè se $\beta = \frac{bc - ad}{c} \neq 0$, ossia se $bc - ad \neq 0$. (Se $bc - ad = 0$, $f(z) = \frac{a}{c}$). Sotto questa ipotesi, anzi, f è una mappa conforme. Infatti:

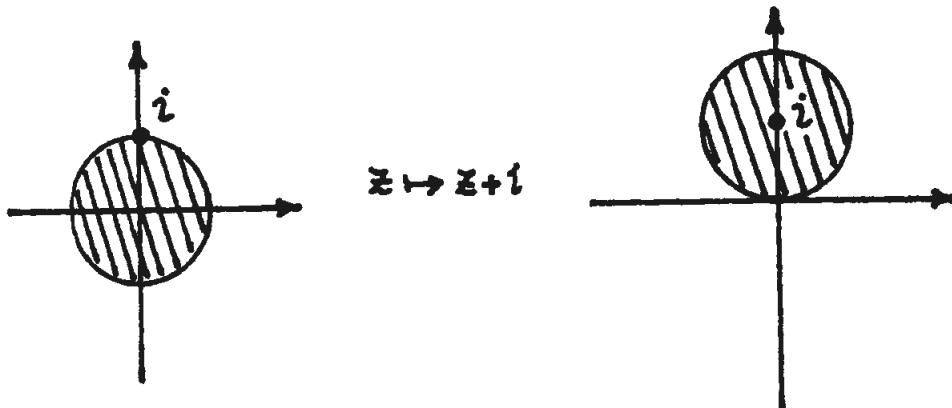
$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

$f(z)$ ha come punti critici $z = -\frac{d}{c}$ e $z = \infty$. Scrivendo $w = \frac{az + b}{cz + d}$ si può ricavare la funzione inversa: $z = \frac{b - dw}{cw - a}$ che è ancora una mappa bilineare, conforme, e ha punti critici $w = \frac{a}{c}$, $w = \infty$.

Esercizio 1. Costruire una mappa conforme che trasformi il cerchio $|z| < 1$ nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

Cerchiamo una mappa conforme che trasformi la circonferenza $|z| = 1$ nella retta $\operatorname{Im} z = 0$. Sappiamo che l'inversione trasforma rette non passanti per l'origine in circonferenze passanti per l'origine, e viceversa. Allora procediamo così: con una traslazione portiamo $|z| = 1$ in una circonferenza passante per l'origine; con l'inversione portiamo questa in una retta non passante per l'origine;

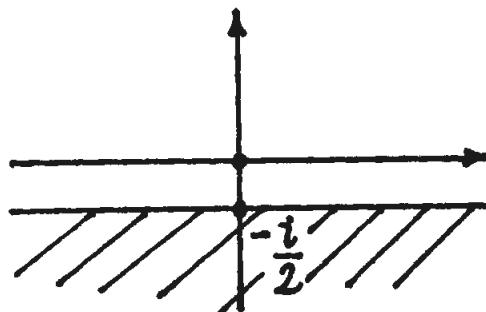
con una rototraslazione portiamo questa retta nell'asse x .



Ora: la circonferenza di centro i e raggio 1 ha equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$, che ha forma (6.2) con $d = 1$, $a = 0$, $b = -2$, $c = 0$. Allora per la (6.3), l'inversione porta questa nella retta:

$$2y + 1 = 0 \quad \text{ossia} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

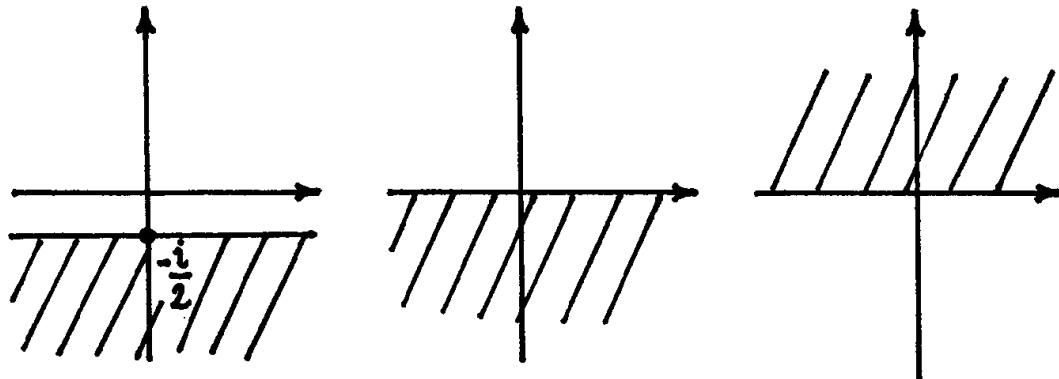
Perciò $z \mapsto z + i \mapsto \frac{1}{z+i}$ porta la circonferenza $|z| = 1$ nella retta:



Osserviamo che $z = 0$ è trasformato in $w = -i$, perciò l'interno del cerchio è trasformato nel semipiano inferiore: $\operatorname{Im} z < -\frac{1}{2}$.

Ora eseguiamo la traslazione di $\frac{i}{2}$, seguita da una rotazione di 180° (cioè il prodotto per $e^{i\pi} = -1$) e otteniamo la trasformazione desiderata:

6. Trasformazioni del campo complesso. Mappe conformi



$$\frac{1}{z+i} \quad \mapsto \quad \frac{1}{z+i} + \frac{i}{2} \quad \mapsto \quad -\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right).$$

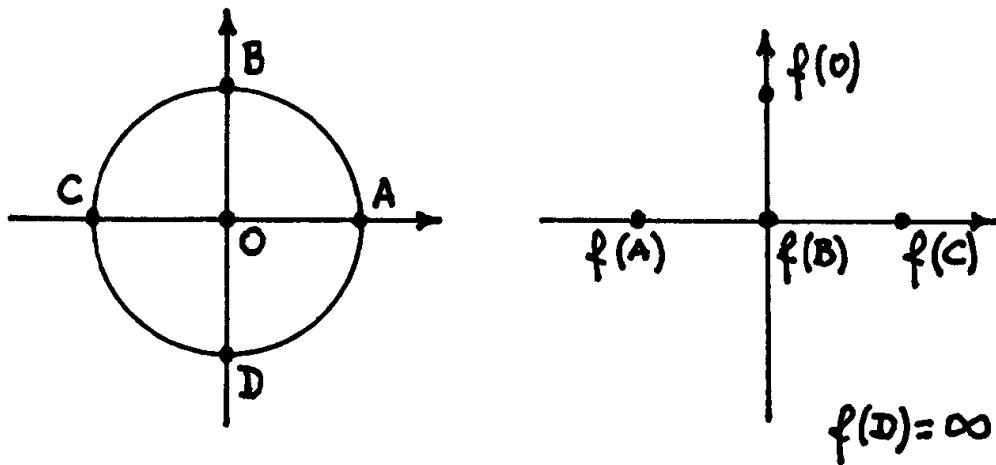
In definitiva

$$w = f(z) = -\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1+iz}{2(z+i)}$$

è una mappa conforme che trasforma $|z| < 1$ in $\operatorname{Im} z > 0$.

Calcoliamo, come esempio, come f agisce su alcun punti:

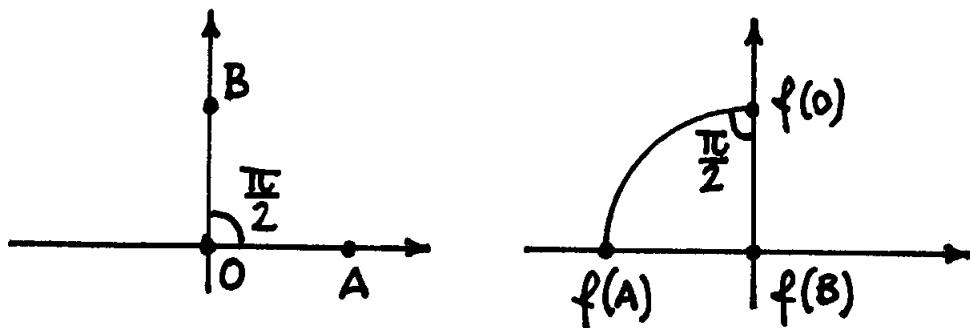
$$f(0) = \frac{1}{2}i ; \quad f(1) = -\frac{1}{2} ; \quad f(i) = 0 ; \quad f(-i) = \infty ; \quad f(-1) = \frac{1}{2} .$$



$z = -i$ è un punto critico per la mappa f .

Verifichiamo come esempio che f conserva un angolo. Consideriamo $A\widehat{O}B$, angolo formato nel piano z dal segmento AO col segmento BO .

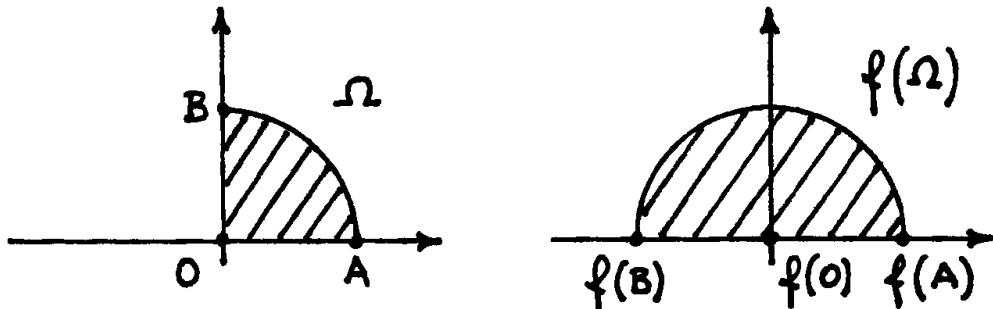
Per come è stata costruita la trasformazione, si può vedere che BO è trasformato nel segmento $f(B)f(O)$, verticale, mentre il segmento AO è trasformato nell'arco di circonferenza di centro O e raggio 1 passante per $f(A)$ e $f(O)$: quest'arco, in $f(O)$, ha tangente orizzontale, perciò nel piano w le due curve trasformate formano ancora un angolo di 90° .



Esempio 2. Si studi la mappa $f(z) = z^2$.

Poiché $f'(z) = 2z$, f è una mappa conforme in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notiamo che f è localmente ma non globalmente invertibile. (Difatti $f(-z) = f(z)$). Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, $f(z) = \rho^2 e^{2i\theta}$ si vede come agisce f su $|z|$ e $\arg z$. Ad esempio, consideriamo $\Omega = \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$. Si vede facilmente che $f(\Omega)$ è il semicerchio: $\{0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \pi\}$. In particolare, osserviamo (v. fig. a pag. seguente) che gli angoli in O (che è punto critico) non sono conservati: i segmenti AO e OB , che formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$, sono trasformati nei segmenti $f(A)f(O)$ e $f(O)f(B)$, che formano un angolo di π . Osserviamo anche che f trasforma il 1° quadrante nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

6. Trasformazioni del campo complesso. Mappe conformi



Esercizio 3. Costruire una mappa conforme che trasformi il 1º quadrante ($\Im z > 0$ e $\Re z > 0$) nel cerchio $|z| < 1$.

Nell'esercizio 1 si è trovata una mappa conforme che trasforma il cerchio $|z| < 1$ nel semipiano $\Im z > 0$:

$$w = -\frac{1+iz}{2(z+i)}.$$

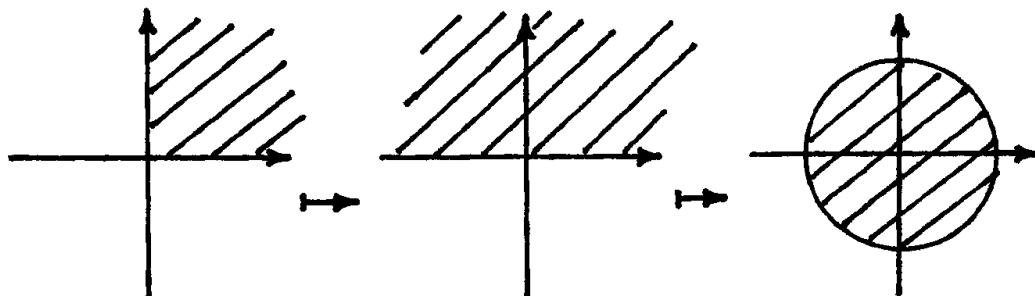
Scriviamo la funzione inversa di questa:

$$z = -\left(\frac{1+2iw}{2w+i}\right).$$

Questa trasformazione porta il semipiano $\Im z > 0$ nel cerchio $|z| < 1$.

Per quanto si è visto nell'esempio 2, allora, la composizione di trasformazioni:

$$z \mapsto z^2 \mapsto -\left(\frac{1+2iz^2}{2z^2+i}\right)$$



6. Trasformazioni del campo complesso. Mappe conformi

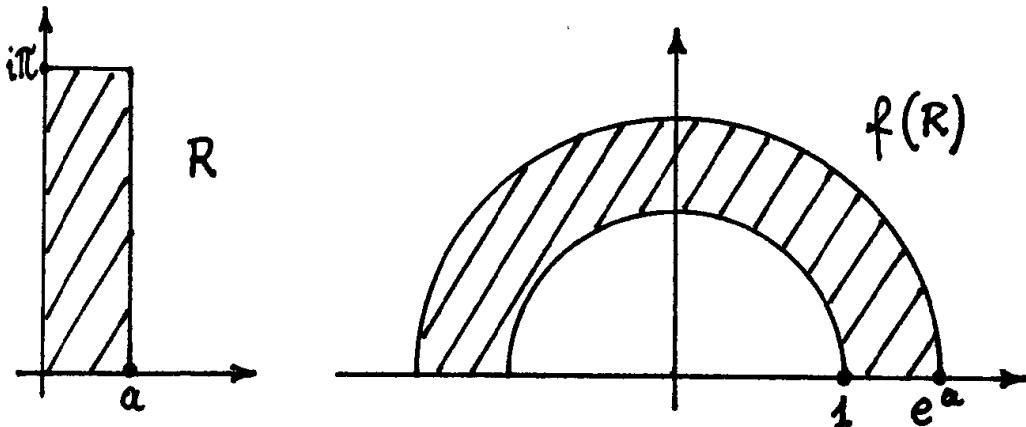
ha le proprietà richieste. La trasformazione cercata è dunque $f(z) = -\left(\frac{1+2iz^2}{2z^2+i}\right)$. (osservare che non è bilineare).

Esercizio 4. Studiare la mappa $f(z) = e^z$, dire se è conforme, se è globalmente invertibile, studiare come agisce sul rettangolo $R = \{0 < \Re z < a, 0 < \Im z < \pi\}$.

$f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z$, dunque f è conforme in tutto \mathbb{C} ; l'unico punto critico è ∞ . Osservare che $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; f non è globalmente invertibile in quanto è periodica di periodo $2\pi i$.

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}; \quad |f(z)| = e^x; \quad \arg f(z) = y.$$

Il rettangolo R è allora trasformato in $f(R) = \{z = \rho e^{i\theta}: 1 < \rho < e^a; 0 < \vartheta < \pi\}$.



Osservare che in R la $f(z)$ è globalmente invertibile.

7. FUNZIONI POLIDROME

7.1 CLASSIFICAZIONE DELLE POLIDROMIE E RICERCA DEI PUNTI DI DIRAMAZIONE.

L'esempio più semplice di funzione polidroma è $f(z) = \sqrt{z}$. È noto che $\forall z \in \mathbb{C}$ esistono 2 numeri distinti il cui quadrato è z (tranne il caso $z = 0$), perciò \sqrt{z} ha 2 valori, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se, fissato un punto $z_o \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, scegliamo uno dei 2 valori $\sqrt{z_o}$, ad es., posto $z_o = r_o e^{i\theta_o}$, scegliamo $\sqrt{r_o} e^{i\theta_o/2}$, e poi percorriamo la circonferenza $|z| = r_o$ a partire da z_o , si avrà:

$$f(z) = r_o e^{i\theta/2}$$

e, dopo che z ha compiuto un giro intero attorno all'origine, si ha

$$f(z_o) = r_o e^{i \frac{\theta_o + 2\pi}{2}} = -r_o e^{i\theta_o/2}$$

ossia non riotteniamo il valore iniziale di $f(z_o)$, ma un valore diverso. Diciamo allora che $z = 0$ è punto di diramazione per f , di ordine 2 (in quanto dopo 2 giri completi intorno all'origine f riacquista il valore primitivo). Si dice anche che $f(z)$ ha 2 determinazioni, che si scambiano tra loro girando attorno all'origine.

Anche $z = \infty$ è un punto di diramazione di ordine 2, perché un giro attorno all'origine può vedersi anche come un giro attorno all' ∞ .

In generale, se $f(z)$ è una funzione olomorfa, che si annulla in qualche punto, $\sqrt{f(z)}$ sarà una funzione polidroma, avente punti di diramazione dove f si annulla. Per accertarsene occorre chiedersi: quando z compie un giro attorno a z_o (punto in cui f si annulla), $f(z)$ quanti giri compie attorno a 0? La risposta è: n , se n è l'ordine di cui si annulla f in z_o (ossia $f(z) \sim c(z - z_o)^n$ per $z \rightarrow z_o$). Allora

se n è dispari z_0 sarà un effettivo punto di diramazione per $\sqrt[n]{f(z)}$, se n è pari no.

Discorsi analoghi si possono fare per le funzioni $\sqrt[n]{f(z)}$.

Esempio 1.

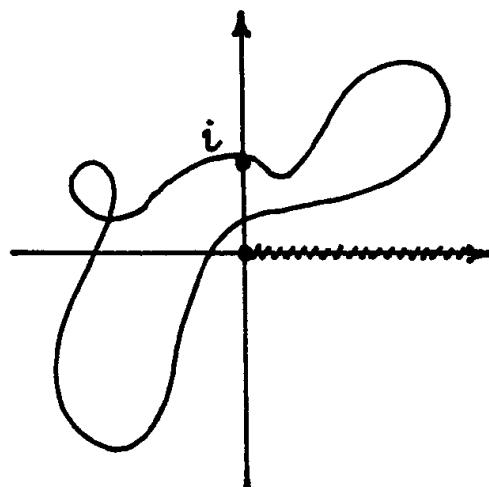
$$f(z) = \sqrt{z(z^2 - 1)} .$$

$f(z) = \sqrt{g(z)}$ con $g(z) = z(z-1)(z+1)$. g è olomorfa e ha zeri del 1° ordine in 0, 1, -1. Perciò 0, 1, -1 sono punti di diramazione per f , del 2° ordine. Se si compie un giro lungo una circonferenza che circonda tutti e 3 i punti, la determinazione cambia (si moltiplica 3 volte per -1). Perciò anche ∞ è un punto di diramazione del 2° ordine. (Per studiare il punto ∞ si deve considerare un cammino fuori dal quale non cadano altri punti di diramazione: per questo abbiamo preso una circonferenza che circonda tutti e 3 i punti).

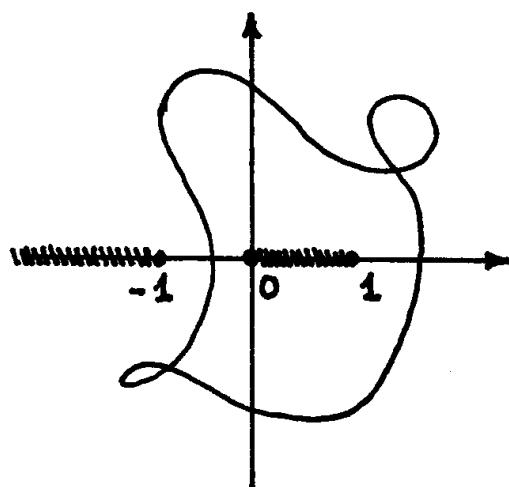
Quando una funzione ha dei punti di diramazione, si possono eseguire opportuni "tagli" nel piano complesso, allo scopo di ottenere una regione contenuta in \mathbb{C} tale che muovendosi all'interno di questa la determinazione di f non cambia. I tagli vengono eseguiti unendo opportunamente i punti di diramazione. Ad es. se $f(z) = \sqrt{z}$ possiamo considerare \mathbb{C} privato della semiretta $y=0, x \geq 0$. Questa si può vedere come una linea che congiunge i 2 punti di diramazione, 0 e ∞ . Se fissiamo una determinazione di $f(z)$ (ad esempio decidiamo che $f(i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$), siamo sicuri che muovendoci lungo un qualunque cammino che parte da i e si muove all'interno della regione, tornando in i ritroveremo lo stesso valore.

(v. fig. a pag. seguente)

7. Funzioni polidrome



Nell'es. 1. Consideriamo il piano cosi' tagliato:



(Abbiamo unito 0 e 1, -1 e ∞). Nel piano privato del segmento $[0, 1]$ e la semiretta $(-\infty, -1]$, ogni cammino non fa cambiare determinazione a f . (Notiamo che se un cammino circonda sia 0 che 1, il segno della funzione cambia 2 volte, e quindi la determinazione non cambia).

Esempio 2.

$$f(z) = \sqrt{z(z-1)} .$$

$z=0, z=1$ sono punti di diramazione di ordine 2. Perciò ∞ non è un punto di diramazione. Nel piano \mathbb{C} privato del segmento $[0,1]$ ognuna delle 2 determinazioni di $f(z)$ è una funzione olomorfa. Per rendersene conto, si scriva lo sviluppo di Laurent di una determinazione di $f(z)$ sulla corona $|z| > 1$.

Scegliendo ad es. la determinazione per cui $\sqrt{z^2} = z$, si ha

$$f(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z}} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1/2}{n} \right) (-1)^n \frac{1}{z^n} .$$

Esempio 3.

$$f(z) = \sqrt[3]{z(z+1)^2} .$$

Studiamo $z=0, z=-1, z=\infty$. Sia $g(z) = z(z+1)^2$. In $z=0$, $g(z)$ si annulla del 1° ordine, dunque in 1 giro attorno all'origine, $g(z)$ gira attorno a zero 1 volta, perciò $\sqrt[3]{g(z)}$ si trasforma in $\sqrt[3]{g(z)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Dunque si vede che $z=0$ è punto di diramazione del 3° ordine. $g(z)$ si annulla del 2° ordine in -1 , dunque quando z fa un giro attorno a -1 $g(z)$ fa 2 giri attorno a zero e $\sqrt[3]{g(z)} \mapsto e^{\frac{4\pi i}{3}} \sqrt[3]{g(z)}$. Ancora, occorrono 3 giri per riottenere il valore iniziale, perciò -1 è punto di diramazione del 3° ordine. Quando z fa un giro lungo una circonferenza che circonda 0 e -1 , $\sqrt[3]{g(z)} \mapsto \sqrt[3]{g(z)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}} = \sqrt[3]{g(z)}$ quindi ∞ non è punto di diramazione. In $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ ciascuna delle 3 determinazioni di $f(z)$ è

olomorfa. (Per esercizio, si scriva lo sviluppo di Laurent in $|z| > 1$).

Esempio 4.

$$f(z) = \sqrt[3]{z(z^2 + 1)}.$$

$z = 0$, $z = i$, $z = -i$ punti di diramazione del 3° ordine. ∞ non è di diramazione. Tagliare \mathbb{C} lungo $[-i, i]$.

Esempio 5.

$$f(z) = \sqrt[3]{z(z + 1)}.$$

$z = 0$, $z = -1$, $z = \infty$ punti di diramazione del 3° ordine. Si può tagliare \mathbb{C} lungo una semiretta passante per 0 e -1 .

Un altro esempio fondamentale di funzione polidroma è la funzione $\log z$. Il punto $z = 0$ è di diramazione per $\log z$, e ad ogni giro in senso antiorario intorno a 0 la funzione si incrementa di $2\pi i$. Perciò $f(z)$ non riassume il proprio valore dopo un numero finito di giri: si dice pertanto che $z = 0$ è un punto di diramazione trascendente (non ha ordine finito).

Esempio 6.

$$f(z) = \log(z - 2)(z + 3).$$

Attenzione: data la polidromia di $\log z$, le proprietà formali come $\log a \cdot b = \log a + \log b$ vanno usate con cautela nel campo complesso. Infatti ognuno dei “logaritmi” scritti non rappresenta un numero ma infiniti numeri. Perciò lasciamo f scritta in questa forma.

Studiamo $z = 2$, $z = -3$, $z = \infty$.

$z = 2$ e $z = -3$ sono punti di diramazione trascendenti. Se considero una circonferenza che circonda entrambi, in un giro antiorario $f(z)$ si incrementa di $2\pi i + 2\pi i$. Perciò anche ∞ è un punto di diramazione trascendente. Si può tagliare \mathbb{C} lungo una semiretta contenente 2 e -3 .

Esempio 7.

$$f(z) = \log\left(\frac{z-2}{z+3}\right).$$

I punti $z = 2$ e $z = -3$ sono ancora di diramazione, trascendenti. Però mentre, in un giro attorno a 2 , $f(z)$ si incrementa di $2\pi i$, in un giro attorno a -3 , $f(z)$ si incrementa di $-2\pi i$. Perciò ∞ non è un punto di diramazione. Basta tagliare \mathbb{C} lungo il segmento $[-3, 2]$ per avere una regione in cui ogni determinazione di f è olomorfa. Possiamo infatti scrivere lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \log\left(1 - \frac{5}{z+3}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(z+3)^n} \cdot \frac{1}{n},$$

valido nella corona: $|z+3| > 5$.

Osservazione. Il concetto di funzione polidroma non coincide con quello di “funzione a più valori”. Si consideri l’esempio $f(z) = \sqrt{z^2}$. È noto che $\sqrt{z^2} = \pm z$ dunque z ha più valori (tranne in 0). Però f non ha punti di diramazione: ciascuna delle 2 determinazioni, z e $-z$, è una funzione olomorfa in tutto \mathbb{C} . Perciò f non è polidroma; è semplicemente l’insieme di 2 funzioni monodrome.

Esercizi vari. Si studi l’eventuale polidromia delle seguenti funzioni.

1) $f(z) = \sqrt{1 - \cos z}$.

Gli eventuali punti di diramazione sono quelli in cui $\cos z = 1$, cioè $z = 2k\pi$.

Poiché $(1 - \cos z)' = \sin z = 0$ per $z = 2k\pi$, il radicando ha uno zero del 2º ordine in questi punti. Perciò in un giro attorno a questi f non cambia valore, ossia è monodroma. Più precisamente: f è l'insieme di 2 funzioni monodroma (perché $\forall z \in \mathbb{C}, \sqrt{1 - \cos z}$ rappresenta 2 numeri), ma le 2 determinazioni non si scambiano mai, e non c'è polidromia.

$$2) \quad g(z) = \sqrt[4]{1 - \cos z}.$$

$g(z) = \sqrt{f(z)}$ con $f(z)$ come nell'esercizio precedente. f è l'insieme di 2 funzioni monodrome; ognuna di queste ha uno zero del 1º ordine in $z = 2k\pi$, perciò questi sono punti di diramazione per g . Ossia: $g(z)$ è un insieme di 2 funzioni polidrome, aventi ciascuna infiniti punti di diramazione del 2º ordine. In altre parole: g è una funzione a 4 valori, ma comunque si fissi il valore di g in un punto z_o , muovendosi da z_o si vedrà che g si comporta come una funzione polidroma con solo 2 determinazioni. Infine, ∞ è punto d'accumulazione di punti di diramazione.

$$3) \quad f(z) = \cos \sqrt{z}.$$

Studiamo $z = 0$; quando z percorre un giro antiorario attorno a z , $\sqrt{z} \mapsto -\sqrt{z}$. Poiché \cos è una funzione pari, il valore di f non cambia. Perciò f è monodroma. Infatti possiamo scriverne lo sviluppo in serie di potenze:

$$\cos \sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(\sqrt{z})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

da cui si vede che f è olomorfa in tutto \mathbb{C} .

$$4) \quad f(z) = \frac{\operatorname{Sh} a\sqrt{z}}{\operatorname{Sh} \sqrt{z}} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1.$$

Quando z compie un giro antiorario attorno a 0, $\sqrt{z} \mapsto -\sqrt{z}$; poiché Sh è dispari,

$f(z) \mapsto \frac{-\text{Sh } a\sqrt{z}}{-\text{Sh } \sqrt{z}} = f(z)$, dunque f è monodroma.

$$5) \quad \text{Sia } F(z) = \int_{(1,0)}^z (e^t - 1)^{-2} dt.$$

Dire per quali valori di z e per quali cammini in \mathbb{C} è definita $F(z)$; studiare l'eventuale polidromia di $F(z)$.

L'integrandra $f(t) = \frac{1}{(e^t - 1)^2}$ ha poli del 2° ordine nei punti $t = 2k\pi i$.

Bisogna quindi escludere $z = 2k\pi i$ e tutti i cammini che passano o terminano in uno di questi punti. Poiché $f(t)$ ha dei poli, l'integrale di $f(t)$ lungo un cammino chiuso non è in generale zero, perciò ci aspettiamo che $F(z)$ abbia polidromia. Precisamente, se z_o è un polo per $f(t)$ in cui il residuo è non nullo, z_o sarà un punto di diramazione per F . Per la periodicità, $\text{Res}(f, 2k\pi i) = \text{Res}(f, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(e^t - 1)^2} &= \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right)^{-2} = \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3!} + o(t^2)\right)^{-2} = \\ &= \frac{1}{t^2} (1 - t + o(t)) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \quad \text{Res}(f, 0) = -1. \end{aligned}$$

Perciò in ogni giro antiorario attorno a un punto $z = 2k\pi i$, $F(z)$ si incrementa di $-2\pi i$. Pertanto i punti $z_k = 2k\pi i$ sono punti di diramazione trascendenti, e ∞ è punto d'accumulazione di punti di diramazione.

6) Determinare la determinazione finale di $\log \sqrt{z}$ quando z percorre il segmento di retta congiungente i punti $(1,0)$ e $(0,i)$, assumendo che nel punto di partenza $(1,0)$ la determinazione sia: 0, oppure: πi .

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$ si ha:

$$\log \sqrt{z} = \log [\sqrt{\rho} e^{i[\theta/2 + k\pi]}] = \ln \sqrt{\rho} + i\left(\frac{\vartheta}{2} + k\pi + 2h\pi\right) =$$

$$= (\text{per l'arbitrarietà degli interi } h \text{ e } k) = \ln \sqrt{\varrho} + i \left(\frac{\vartheta}{2} + k\pi \right).$$

Nel punto $z = 1$ è $\varrho = 1$, $\vartheta = 0$, dunque $f(1) = k\pi i$. Perciò se $f(1) = 0$, $k = 0$ e $f(\varrho e^{i\theta}) = \ln \sqrt{\varrho} + i \frac{\vartheta}{2}$. Allora muovendo z lungo un segmento fino a i si arriva a $\varrho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, da cui $f(i) = i \frac{\pi}{4}$.

Se invece si assume $f(1) = \pi i$, significa che $k = 1$, dunque $f(\varrho e^{i\theta}) = \ln \sqrt{\varrho} + i \left(\frac{\vartheta}{2} + \pi \right)$, perciò $f(i) = i \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) = \frac{5}{4}\pi i$.

7.2. CALCOLO DI INTEGRALI COL METODO DEI RESIDUI E FUNZIONI POLIDROME

Vediamo ora come si può procedere al calcolo di integrali col metodo dei residui, quando le funzioni coinvolte risultano polidrome.

Consideriamo un integrale del tipo:

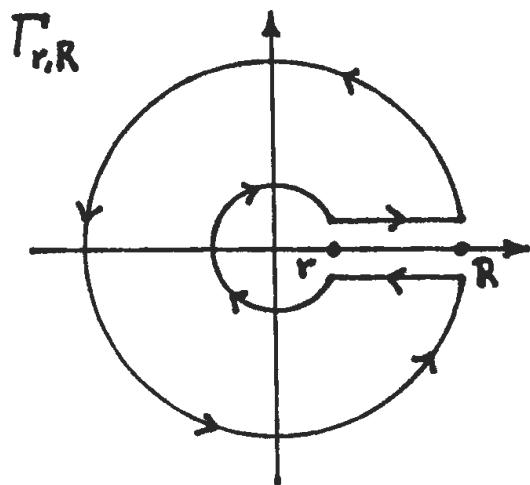
$$I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} R(x) dx \quad \text{per } 0 < \alpha < 1$$

e $R(x)$ funzione razionale che tende a zero all'infinito ed è limitata al finito. (Notare che in questo caso l'integrandà ha nello zero una singolarità al più del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$, integrabile, e all'infinito tende a zero almeno come $\frac{1}{x^{1+\alpha}}$, integrabile).

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha},$$

che ha un punto di diramazione in 0 e in ∞ . Per poterne fissare una determinazione olomorfa, tagliamo \mathbb{C} lungo la semiretta $y = 0$, $x \geq 0$. Fissiamo la determinazione di $z^{-\alpha}$ che tende a 1 quando $z \rightarrow 1$ dal semipiano superiore ($\Im z > 0$). Applichiamo il teorema dei residui a un cammino del tipo:



Per $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\Gamma_{r,R}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz \rightarrow 2\pi i \sum (\text{Residui di } \frac{R(z)}{z^\alpha} \text{ nelle singolarità } \neq 0).$$

D'altro canto osserviamo che:

$$\left| \frac{R(z)}{z^\alpha} \right| = O\left(\frac{1}{|z|^{\alpha+1}}\right)$$

per $|z| \rightarrow +\infty$, perciò l'integrale sulla circonferenza esterna tende a zero;

$$\left| \frac{R(z)}{z^\alpha} \right| = O\left(\frac{1}{|z|^\alpha}\right)$$

per $|z| \rightarrow 0$, perciò l'integrale sulla circonferenza interna tende a zero. L'integrale sul segmento superiore tende a

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx.$$

Per valutare l'integrale sul segmento inferiore, osserviamo che \mathbb{C} è privato della semiretta $[0, +\infty)$, perciò bisogna pensare di raggiungere i punti del segmento inferiore facendo tutto un giro attorno all'origine. In altre parole per questi punti è $\arg z = 2\pi$, anziché $\arg z = 0$. Dunque $z^\alpha = \rho^\alpha e^{i2\pi\alpha}$ e l'integrale tende a:

$$-e^{-2\pi\alpha i} \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx.$$

In definitiva si ha

$$(1 - e^{-2\pi\alpha i}) \cdot I = 2\pi i \sum (\text{Residui di } \frac{R(z)}{z^\alpha} \text{ nei poli in } \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

da cui si ricava I .

Osservare che, nel valutare i residui di $\frac{R(z)}{z^\alpha}$, bisogna fare attenzione a computare z^α correttamente, cioè in base alla stessa determinazione scelta all'inizio.

Esempio. Calcolare:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx.$$

Riscriviamolo nella forma:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$$

con $\alpha = \frac{2}{3}$, $R(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Applicando il risultato discusso in precedenza si ha:

$$I = \frac{1}{1 - e^{-2\pi i \cdot 2/3}} \cdot 2\pi i \sum \left(\text{Residui di } \frac{R(z)}{z^\alpha} \right).$$

La funzione $R(z)$ ha poli in $z = \pm i$. Per calcolare $z^{2/3}$, tagliamo \mathbb{C} lungo la

semiretta $[0, +\infty)$, ossia scriviamo z nella forma $\rho e^{i\theta}$ con $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e fissiamo la determinazione:

$$z^{\frac{2}{3}} = \rho^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{2}{3}\theta}$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^{2/3}} \frac{z}{1+z^2}, \pm i\right) = \left(\frac{1}{z^{2/3}} \cdot \frac{z}{2z}\right)_{z=\pm i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{z^{2/3}}\right)_{z=\pm i}.$$

Per calcolare l'ultima espressione, osserviamo che

$$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad z^{\frac{2}{3}} = e^{i\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{1}{z^{2/3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}; \quad z^{2/3} = e^{\pi i} = -1; \quad \frac{1}{z^{2/3}} = -1.$$

Allora:

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\frac{4}{3}\pi i}} \cdot \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\pi i \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Parte II

Spazi di funzioni, integrale di Lebesgue, trasformate

8. SPAZI VETTORIALI. SPAZI METRICI. SPAZI NORMATI

8.1. ESEMPI DI SPAZI DI FUNZIONI

1. Cominciamo a considerare i seguenti spazi di funzioni continue:

$$\mathcal{C}(a, b), \quad \mathcal{C}[a, b], \quad \mathcal{C}(\Omega), \quad \mathcal{C}(\bar{\Omega})$$

ovvero: gli spazi di funzioni continue su un intervallo (aperto o chiuso) a, b della retta, oppure gli spazi di funzioni continue definite su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o sulla chiusura di tale aperto. (Supporremo anche Ω limitato). In tutti i casi, si tratta di spazi vettoriali: combinazioni lineari di funzioni continue sul dominio indicato sono ancora funzioni continue, sullo stesso dominio. C'è però una differenza tra i 4 casi: se il dominio è un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R} o \mathbb{R}^n (cioè: $[a, b]$ o $\bar{\Omega}$) le funzioni ivi continue sono anche limitate. Allora possiamo definire:

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b], \quad \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (1)$$

(analogamente per $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$). Si vede che il funzionale $\|\cdot\|$ così definito risulta essere una norma su $\mathcal{C}[a, b]$, che pertanto è uno *spazio vettoriale normato*. (Lo stesso vale per $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$). Ricordiamo poi che ogni spazio vettoriale normato è uno spazio metrico, con la distanza definita da

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Nel nostro caso,

$$\forall f, g \in \mathcal{C}[a, b], \quad d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|. \quad (2)$$

Invece una funzione $\mathcal{C}(a, b)$ o $\mathcal{C}(\Omega)$ non deve necessariamente essere limitata; perciò la “norma” definita in precedenza potrebbe essere infinita per una certa funzione: questi spazi vettoriali non hanno quindi una norma (né una metrica)

“naturale”.

2. Consideriamo ora lo spazio:

$$X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } f \text{ è continua e periodica}\}.$$

Poiché ogni funzione continua e periodica è limitata, $\forall f, g \in X, d(f, g) < +\infty$, se d è definita come in (2). Perciò X risulta essere uno spazio metrico. Però non è vero in generale che la somma di 2 funzioni periodiche è periodica. Consideriamo ad esempio:

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \sin \pi x.$$

f ha periodo 2π ; g ha periodo 2; i due periodi hanno rapporto irrazionale, pertanto $f+g$ non è periodica, e quindi X non è uno spazio vettoriale. (Si è usato qui il seguente criterio: se f e g sono funzioni periodiche, , di periodi T_1 , T_2 , rispettivamente, $f+g$ è periodica se esiste un numero T che sia multiplo intero sia di T_1 che di T_2 : $T = nT_1 = mT_2$. Questo implica $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, cioè T_1 e T_2 devono avere rapporto razionale).

Osservare che anche se la “norma” definita da (1) è finita per ogni $f \in X$, X non può dirsi “spazio normato” proprio perché non è vettoriale.

Dunque abbiamo visto esempi di spazi di funzioni che sono metrici e vettoriali, vettoriali ma non metrici, metrici ma non vettoriali; abbiamo inoltre ricordato che ogni spazio vettoriale normato è (vettoriale e) metrico. Domandiamoci: esistono spazi che siano sia vettoriali che metrici, ma non normati? Più precisamente: dato uno spazio vettoriale metrico, è sempre possibile definire una norma che sia *compatibile con la distanza*, ossia che induca la stessa topologia? La risposta è negativa:

Esempio 3. Sia $X = L^p(\mathbb{R})$ con $0 < p < 1$, ossia

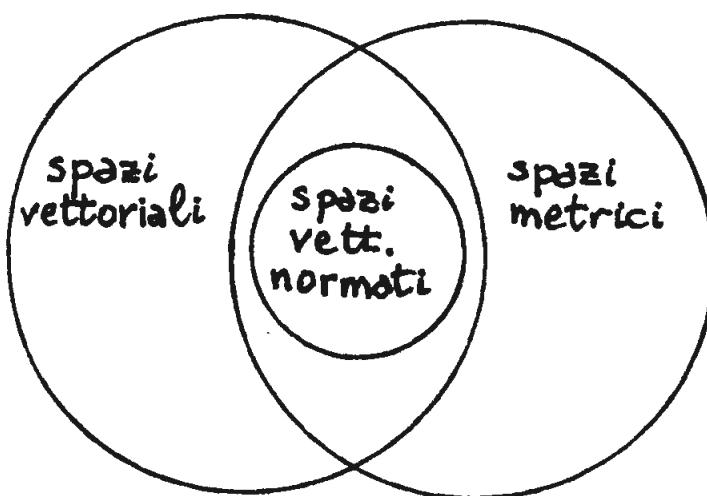
$$X = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili tale che } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \}.$$

X è uno spazio vettoriale, e definendo

$$d(f, g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^p dx$$

si verifica facilmente che d è una metrica. Però si può dimostrare che non è possibile definire in alcun modo in X una norma tale che la distanza definita da $\|f - g\|$ sia topologicamente equivalente a d .

Le relazioni logiche tra le nozioni di spazio vettoriale, metrico, normato sono riassunte nel seguente diagramma:



8.2. SPAZI METRICI COMPLETI. SOTTOSPAZI

4. Esempi di spazi metrici completi sono i seguenti:

$\mathbb{C}[a, b]$ con la distanza d introdotta in precedenza (la chiameremo anche d_0);

$\mathcal{C}^1[a, b]$ con la distanza d_1 definita da:

$$d_1(f, g) = d_0(f, g) + d_0(f', g');$$

in generale:

$\mathcal{C}^k[a, b]$ con la distanza d_k , definita da:

$$d_k(f, g) = d_0(f, g) + \sum_{j=1}^k d_0(f^{(j)}, g^{(j)}).$$

La completezza di $\mathcal{C}[a, b]$ segue dal fatto che d_0 è la metrica della convergenza uniforme, e il limite uniforme di funzioni continue è continuo. Analogamente la completezza di $\mathcal{C}^1[a, b]$ segue dal teorema che afferma che se $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $f_n' \rightarrow g$ uniformemente, allora f è derivabile e $f' = g$.

5. Se invece consideriamo $\mathcal{C}^1[a, b]$ con la metrica d_0 , abbiamo uno spazio ancora metrico ma non più completo, come mostra il seguente

Esempio. Sia $f_n(x) = |x|^{1 + \frac{1}{n}}$. Allora $f_n \in \mathcal{C}^1[-1, 1]$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente, con $f(x) = |x|$. Però $f \notin \mathcal{C}^1[-1, 1]$.

Notare che il fatto che f_n converga nella metrica d_0 , sia pure a una funzione non \mathcal{C}^1 , implica che f_n è una successione di Cauchy in $(\mathcal{C}^1[a, b], d_0)$. Perciò il fatto che f_n non abbia limite in $\mathcal{C}^1[a, b]$ mostra che lo spazio non è completo.

Lo stesso esempio si può leggere anche per dire che $\mathcal{C}^1[a, b]$, visto come sottospazio (metrico) di $(\mathcal{C}^0[a, b], d_0)$, non è chiuso. Infatti il limite (in \mathcal{C}^0) di una certa successione di funzioni di \mathcal{C}^1 non sta in \mathcal{C}^1 .

Si può dire, grosso modo, che un certo insieme di funzioni “diventa” uno spazio metrico completo quando la metrica che vi si mette è “adeguata” allo

spazio, cioè contiene in sè le informazioni importanti per sapere se una funzione sta nello spazio stesso. Ad es. la metrica d_0 non è adeguata a \mathcal{C}^1 perché non “pesa” la derivata delle funzioni di \mathcal{C}^1 . Per questo motivo si capisce subito che lo spazio $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ (funzioni infinitamente derivabili) non sarà uno spazio metrico completo rispetto a nessuna delle distanze d_k .

In tutti gli esempi discussi in questo paragrafo la metrica proveniva da una norma: abbiamo quindi anche esempi di spazi vettoriali normati completi o non completi.

Osservazione 6. Il fatto che una varietà lineare in uno spazio vettoriale X possa essere non chiusa è un fenomeno che può capitare solo in dimensione infinita: è noto che ogni varietà lineare di \mathbb{R}^n è chiusa (cioè è un sottospazio).

7. Un esempio di sottospazio in dimensione infinita è il seguente:

$$X = \{f \in \mathcal{C}[a, b] \text{ t. c. } f(a) = f(b) = 0\}.$$

X è una varietà lineare chiusa in $\mathcal{C}[a, b]$ e non ha dimensione finita.

8. Un esempio di spazio metrico non completo, che sarà importante dal punto di vista della teoria dell'integrazione, è il seguente.

Sia X lo spazio $\mathcal{C}[a, b]$ munito della metrica integrale:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

X non è completo: si consideri, ad esempio,

$$f_n(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\frac{1}{n}} \quad \text{in } [-1, 1].$$

Il limite, puntuale e nella distanza integrale, di f_n è $f(x) = \operatorname{sgn} x$, che però non sta in $\mathcal{C}[a, b]$. Pertanto X non è completo.

La necessità di avere uno spazio di funzioni che sia completo rispetto a questa distanza porterà a introdurre l'integrale di Lebesgue.

Esercizio 9. Sia X lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^1[0, T]$ soluzioni dell'equazione: $y' + ay = b$ su $[0, T]$. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ e $T \in (0, +\infty]$ X è: vettoriale; metrico (con la distanza di \mathcal{C}^1); nel caso in cui è metrico, si calcoli esplicitamente la distanza tra due generici elementi dello spazio.

X è vettoriale per $b = 0$ (ossia quando l'equazione differenziale è lineare omogenea).

Risolvendo l'equazione si trova:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{b}{a} + ce^{-at} & \text{se } a \neq 0 \\ bt + c & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$y'(t) = \begin{cases} -cae^{-at} & \text{se } a \neq 0 \\ b & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Se y_1, y_2 sono due soluzioni distinte, corrispondenti a costanti c_1, c_2 , si ha

$$y_1 - y_2 = \begin{cases} (c_1 - c_2)e^{-at} & \text{se } a \neq 0 \\ c_1 - c_2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$y'_1 - y'_2 = \begin{cases} -a(c_1 - c_2)e^{-at} & \text{se } a \neq 0 \\ 0 & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Affinché X sia metrico occorre che sia

$$\max_{t \in [0, T]} |y_1(t) - y_2(t)| + \max_{t \in [0, T]} |y'_1(t) - y'_2(t)| < \infty.$$

Si vede che ciò accade nei seguenti casi:

1) $a = 0$.

In questo caso $d(y_1, y_2) = |c_1 - c_2|$.

2) $a > 0$.

In questo caso $d(y_1, y_2) = |c_1 - c_2| \cdot (1 + a)$.

3) $a < 0$ ma $T < +\infty$.

In questo caso $d(y_1, y_2) = |c_1 - c_2| \cdot e^{-aT}(1 + |a|)$.

(Osservare, che le condizioni che rendono X metrico o vettoriale sono tra loro indipendenti).

Esercizio 10. Per $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 ; \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} ;$$

$$d_3(x, y) = |x^2 - y^2| ; \quad d_4(x, y) = |x - 2y| ;$$

$$d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} .$$

Si dica per ciascuna di queste se è una metrica o no.

Iniziamo dal test di annullamento: $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$? Vero per 1, 2, 5. Falso per 3, 4. Perciò d_3 e d_4 non sono metriche. Osservare che d_4 non era neanche simmetrica. d_1 , d_2 , d_5 sono simmetriche e non negative, e soddisfano la proprietà di annullamento. Rimane da verificare la disuguaglianza triangolare.

Per d_1 dovrebbe valere la: $(x - y)^2 \leq (x - z)^2 + (z - y)^2$, che è equivalente a: $(a + b)^2 \leq a^2 + b^2$ (per $a, b \geq 0$), e questa in generale è falsa: ad esempio se $y = 1$, $z = 2$, $x = 3$, si ha: $(x - y)^2 = 4$; $(x - z)^2 + (z - y)^2 = 2$. Pertanto d_1 non è una metrica.

Per d_2 . Dalla disuguaglianza triangolare $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ si

8. Spazi vettoriali. Spazi metrici

ha:

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|} .$$

Rimane da provare

$$\sqrt{|x-z| + |z-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} ,$$

ossia

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\text{per } a, b \geq 0),$$

che è vero, come si vede elevando al quadrato: d_2 è una metrica.

Per quanto riguarda d_5 , poniamo $f(t) = \frac{t}{1+t}$.

$$d_5(x, y) = f(|x-y|) \leq f(|x-z| + |z-y|)$$

perché $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ e f è crescente per $t > 0$.

Rimane da provare:

$$f(|x-z| + |z-y|) \leq f(|x-z|) + f(|z-y|)$$

ossia

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Ma:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \\ &\leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \geq 0 . \end{aligned}$$

Dunque d_5 è una distanza.

8.3. SPAZI DI SUCCESSIONI

11. Diamo ora qualche altro esempio di spazio vettoriale normato tra gli spazi di successioni. Siano: l^∞, c, c_0 rispettivamente, l'insieme delle successioni di numeri reali limitate, convergenti, convergenti a zero. È chiaro che $l^\infty \supseteq c \supseteq c_0$ e che ciascuno dei tre è uno spazio vettoriale. Poniamo in l^∞ la norma così definita. Se $x \in l^\infty$, con $x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$,

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|.$$

Questa risulta essere una norma per ciascuno dei tre spazi. In particolare si può vedere c_0 come varietà lineare di c e c come varietà lineare di l^∞ . Si può provare che: l^∞ è completo, e c e c_0 sono sottospazi di l^∞ (cioè sono chiusi).

12. Proviamo, ad esempio, che c_0 è chiuso in c .

Sia $\{x_n\} \subseteq c_0$, $\{x_n\}$ è una successione di successioni ossia $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$. Sia $x_n \rightarrow x \in c$, con $x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$. Proviamo che $x \in c_0$.

Poiché $x_n \rightarrow x$ in c , $\sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$ allora $\exists n_0$ t. c. $\forall n > n_0$ è

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon \quad \forall k.$$

Ma $x_n \in c_0$, perciò $\xi_k^{(n)} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Dunque, fissato un $n > n_0$, fissato un $\varepsilon > 0$ $\exists k_0$ t.c. $|\xi_k^{(n)}| < \varepsilon \quad \forall k > k_0$. Allora $|\xi_k| \leq |\xi_k^{(n)} - \xi_k| + |\xi_k^{(n)}| < 2\varepsilon$ $\forall k > k_0$,

ossia: $\xi_k \rightarrow 0$, ossia: $x \in c_0$.

Pertanto c_0 è chiuso. □

13. Si può dimostrare che c_0 e c , nonostante siano contenuti propriamente uno

nell'altro, sono isomorfi, e dunque "hanno la stessa struttura", anche se elementi diversi. (Questa situazione può accadere perché siamo in dimensione infinita).

Mostriamo dunque che esiste un isomorfismo tra c_0 e c .

Sia $T: c \rightarrow c_0$ così definito:

se $x = \{\xi_k\} \in c$, $\xi_k \rightarrow l$ poniamo $T(x) = \{l, \xi_1 - l, \xi_2 - l, \dots, \xi_k - l, \dots\}$. Sia $\{\eta_k\}$ la successione $T(x)$.

$\eta_k \rightarrow 0$ perciò $T(x) \in c_0$ effettivamente.

T è iniettiva: $T(x) = 0 \Rightarrow l = 0, \xi_1 = l = 0, \dots, \xi_k = l = 0, \dots$

T è suriettiva: detto $\{\eta_k\} = y$ un generico elemento di c_0 , poniamo:

$$\xi_1 = \eta_1 + \eta_2$$

$$\xi_2 = \eta_1 + \eta_3$$

...

$$\xi_k = \eta_1 + \eta_k.$$

$\xi_k \rightarrow \eta_1$, perciò si ha:

$$T(\{\xi_k\}) = \{\eta_1, \eta_1 + \eta_2 - \eta_1, \eta_1 + \eta_3 - \eta_1, \dots, \eta_1 + \eta_k - \eta_1, \dots\} = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Pertanto T è biunivoca tra c e c_0 ; essendo anche lineare (verifica immediata) è un isomorfismo. \square

Altre proprietà degli spazi di successioni saranno trattate nei § 12.4, 12.5.

9. MISURA DI LEBESGUE

9.1. ESEMPI DI INSIEMI MISURABILI

1. Un insieme finito o numerabile di \mathbb{R}^n ha misura nulla.

Dimostrazione. Sia $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^N$. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo la sfera B_n di centro x_n e raggio $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Chiaramente $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq E$. D'altro canto

$$|E| \leq \sum |B_n| \leq c \sum \left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^N \leq c\varepsilon^N.$$

Poiché ε può essere scelto arbitrariamente piccolo, $|E| = 0$.

2. L'esempio precedente mostra che, ad esempio, l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è un sottoinsieme di misura nulla di \mathbb{R} . \mathbb{Q} è privo di punti interni. Mostriamo però che è possibile, $\forall \varepsilon > 0$ fissato, costruire un aperto A_ε , di misura $< \varepsilon$, che contiene \mathbb{Q} .

Infatti, ordinati i razionali in una successione x_n , basta considerare

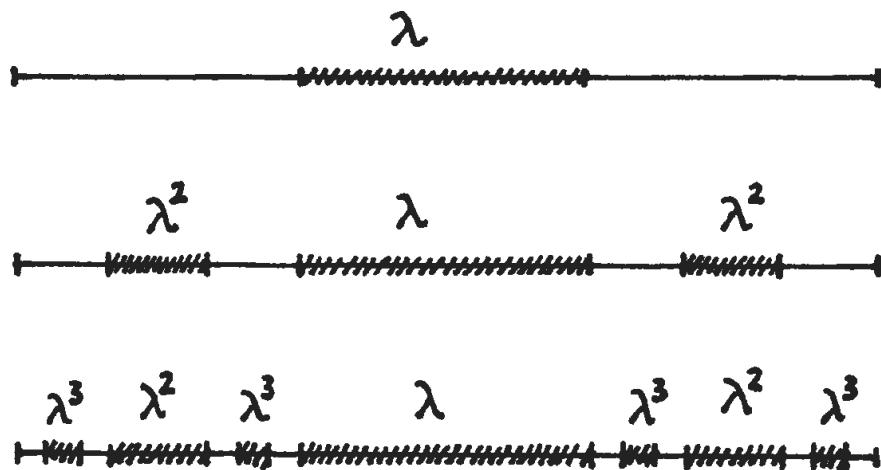
$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}) \quad \text{con} \quad B(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}) = (x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}).$$
$$|A_\varepsilon| \leq \sum |x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}| = 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Osservare che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} (ogni reale si può approssimare con la precisione voluta con un razionale). Ci si potrebbe aspettare perciò che l'insieme A_ε , che contiene un intorno di ogni numero razionale, debba coincidere con \mathbb{R} : invece non è così, anzi A_ε ha misura $< 2\varepsilon$, mentre \mathbb{R} ha misura infinita!

3. Il ternario di Cantor. Costruiamo il seguente sottoinsieme C_λ dell'intervallo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Questo insieme costituisce un esempio interessante in teoria della

misura, per i motivi che vedremo.

Fissiamo $\lambda \in [0, \frac{1}{3}]$. Eseguiamo la seguente costruzione iterativa. Al 1° passo togliamo a $[0, 1]$ un intervallo, centrato, di ampiezza λ . Al 2° passo togliamo, in ognuno dei 2 sottointervalli residui, un intervallo centrato di ampiezza λ^2 ; al 3° passo togliamo 4 intervalli di ampiezza λ^3 , e così via.



L'insieme "residuo" è per definizione C_λ . Osserviamo che il complementare di C_λ è una unione numerabile di aperti; perciò è un aperto e la sua misura di Lebesgue è, per la numerabile additività della misura, pari a:

$$\lambda + 2\lambda^2 + 2^2\lambda^3 + 2^3\lambda^4 + \dots = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^n = \frac{\lambda}{1-2\lambda}.$$

Allora C_λ è un insieme chiuso e la sua misura è:

$$1 - \frac{\lambda}{1-2\lambda} = \frac{1-3\lambda}{1-2\lambda}.$$

Si vede allora che è $|C_\lambda| = 0$ per $\lambda = \frac{1}{3}$ e $|C_\lambda| > 0$ per $0 < \lambda < \frac{1}{3}$. Facendo variare λ in $(0, \frac{1}{3})$, la misura varia tra 0 e 1.

Il ternario di Cantor C_λ ha varie proprietà interessanti. Anzitutto è un

insieme *non numerabile*, equipotente a \mathbb{R} . Ciò si può vedere al seguente modo. Per come è costruito C_λ , ogni punto è individuato da una successione di scelte tra l'intervallo di destra e quello di sinistra: al 1° passo scegliamo uno dei 2 intervalli residui, al 2° scegliamo uno dei due sottointervalli residui dell'intervallo scelto al passo 1, e così via. Una successione di scelte “destra o sinistra” si può rappresentare con una successione formata con le cifre 0 e 1. Ora è noto che la totalità delle successioni formate con le cifre 0 e 1 è un insieme non numerabile.

Il fatto che C_λ sia non numerabile è interessante per il seguente motivo: per $\lambda = \frac{1}{3}$, abbiamo un esempio di sottoinsieme non numerabile di \mathbb{R} , di misura nulla. (Nel punto 1 si è mostrato che ogni insieme *numerabile* di \mathbb{R} ha misura nulla; notare che è facile costruire insiemi non numerabili e di misura nulla in \mathbb{R}^n con $n \geq 2$: ad esempio una retta nel piano; non è altrettanto facile però in \mathbb{R}).

Un'altra proprietà di C_λ è quella di *non contenere alcun intervallo* (a, b) (questo è chiaro dalla costruzione). Perciò C_λ è un chiuso con interno vuoto, e pertanto coincide con la sua frontiera.

Questa proprietà è interessante per un altro motivo. Poniamoci dal punto di vista della misura di Peano-Jordan, e chiediamoci se C_λ è misurabile. Ricordiamo che si definiscono, per un insieme E , la misura interna ed esterna di Peano-Jordan che coincidono con la misura di Lebesgue, rispettivamente, dell'interno e della chiusura di E . Un insieme si dice Peano-Jordan misurabile se misura interna ed esterna coincidono, ossia se, dal punto di vista della teoria di Lebesgue, è $|\overset{\circ}{E}| = |\bar{E}|$; ossia, poiché in generale $|\bar{E}| = |\overset{\circ}{E}| + |\partial E|$, un insieme è Peano-Jordan misurabile se è $|\partial E| = 0$. Ora il ternario di Cantor ha interno vuoto, perciò coincide con la sua frontiera (perché è chiuso) dunque:

C_λ è Peano-Jordan misurabile se e solo se la sua misura di Lebesgue è zero,

ossia per $\lambda = \frac{1}{3}$. Per $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ abbiamo un interessante esempio di insieme chiuso, quindi Lebesgue misurabile, *non misurabile secondo Peano-Jordan*.

9.2. MISURA E DIMENSIONE DI HAUSDORFF DI UN INSIEME.

INSIEMI FRATTALI

Consideriamo i seguenti esempi: la misura di Lebesgue, nel piano, di una retta è zero; la misura di Lebesgue di un quadrato, nello spazio tridimensionale, è zero. Ci spieghiamo intuitivamente questo fatto dicendo che la retta è un oggetto geometrico di dimensione 1, ed è sbagliato calcolarne l'area, così come il quadrato è bidimensionale ed è sbagliato volerne calcolare il volume. Abbiamo visto che il ternario di Cantor $C_{1/3}$ è un insieme di \mathbb{R} di misura nulla; potremmo pensare, per analogia, che sia errato voler misurare la "lunghezza" di $C_{1/3}$, perché $C_{1/3}$ è un oggetto geometrico di dimensione minore di 1. D'altro canto $C_{1/3}$ non è né finito né numerabile, come abbiamo visto, quindi sembra essere "troppo grande" per avere dimensione 0. Perciò, se questo discorso intuitivo contiene un'idea corretta,, significa che la "dimensione" di $C_{1/3}$ è un numero compreso tra 0 e 1, cioè non intero! È possibile dare un senso preciso a questo discorso al modo seguente.

Definiamo anzitutto la misura di Hausdorff α -dimensionale (per un numero reale α fissato, positivo) di un insieme di \mathbb{R}^n .

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$; consideriamo una successione di sfere B_i tali che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ e consideriamo il numero:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^{\frac{\alpha}{n}}$$

(che ha "dimensione" α); l'estremo inferiore di questi numeri per tutte le collezioni numerabili di sfere la cui unione copre E si chiama $|E|_{\alpha}$, misura di

Hausdorff α -dimensionale di E :

$$|E|_\alpha = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^{\frac{\alpha}{n}} : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq E \right\}.$$

Si dimostrano (non lo facciamo) i seguenti risultati.

Se $0 < |E|_\alpha < +\infty$ per un certo α , allora $|E|_\beta = 0 \quad \forall \beta > \alpha$ e $|E|_\alpha = +\infty \quad \forall \beta < \alpha$. (Esempio: se una figura geometrica ha area finita e positiva la lunghezza è infinita e il volume è zero).

Questo fatto rende possibile la seguente definizione:

$$\dim E = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R} : |E|_\alpha = +\infty \} = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : |E|_\alpha = 0 \}.$$

“ $\dim E$ ” è la dimensione di Hausdorff dell’insieme E , e a priori può essere un numero non intero. Naturalmente si ha che:

se $\alpha = n$, $|E|_\alpha$ è la misura di Lebesgue di E in \mathbb{R}^n ;

se $0 < |E| < +\infty$, $\dim E = n$.

Notiamo inoltre che per $\alpha = 0$ si ha la misura del conteggio, ossia $|E|_0 = \text{numero dei punti di } E$.

Così ci aspettiamo di ritrovare che la dimensione di una linea regolare nello spazio è 1, e la dimensione di una superficie regolare nello spazio è 2. Ma il motivo per cui questa nozione è interessante è che vi sono casi notevoli di insiemi con dimensione non intera: questi insiemi si dicono *frattali*.

Esempio 4. Dimensione e misura del ternario $C_{1/3}$:

Riguardando la costruzione di $C_{1/3}$ si vede che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il ternario è contenuto nell’unione di 2^n intervalli di ampiezza $\frac{1}{3^n}$. Esempio: al passo $n = 2$,

$C_{1/3}$ è contenuto dai $2^2 = 4$ intervalli di ampiezza $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

La α -misura di Hausdorff di questo ricoprimento è:

$$2^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^\alpha.$$

(Siamo in \mathbb{R} , quindi $N = 1$; le "sfere" sono gli intervalli, in numero 2^n).

$$|C_{1/3}|_\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3^\alpha}\right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{per } \frac{2}{3^\alpha} > 1 \\ 0 & \text{per } \frac{2}{3^\alpha} < 1 \\ 1 & \text{per } \frac{2}{3^\alpha} = 1. \end{cases}$$

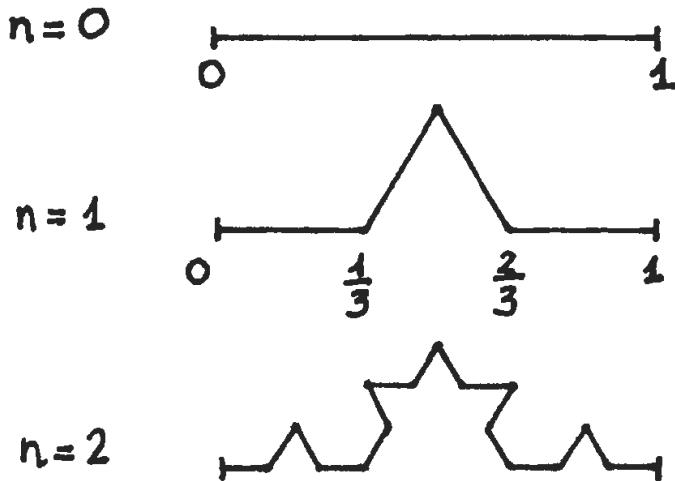
$\frac{2}{3^\alpha} = 1$ per $\alpha = \log_3 2$. Perciò, in base alla definizione data, $C_{1/3}$ ha dimensione

(non intera!) pari a $\log_3 2$ ($= 0,63\dots$). In questa dimensione, la sua misura è 1.

Notare che se $\lambda < \frac{1}{3}$ si ha $|C_\lambda| = \frac{1-3\lambda}{1-2\lambda} \in (0,1)$, perciò $\dim C_\lambda = 1$.

Esempio 6. Un insieme frattale nel piano: la curva "a fiocco di neve".

Costruiamo iterativamente la seguente linea spezzata:

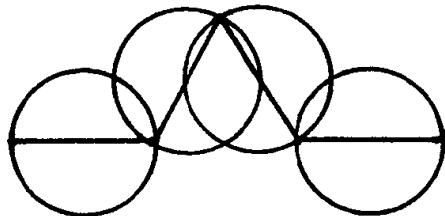


9. Misura di Lebesgue

[Al terzo centrale di ogni segmento sostituiamo 2 segmenti di lunghezza uguale al terzo rimosso). Al passo ennesimo la lunghezza della spezzata è: $(\frac{4}{3})^n$.

La "curva limite" è l'insieme che ci interessa, la sua lunghezza è infinita, poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$, dunque può essere un frattale di dimensione compresa tra 1 e 2.

Se, al passo n -esimo, copriamo ogni segmento con una circonferenza di diametro $\frac{1}{3^n}$, così:



troviamo che la misura α -dimensionale di questa copertura è:

$$4^n \cdot [\pi (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n})^2]^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{4^n \pi^{\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha 3^{n\alpha}} = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha} \left(\frac{4}{3^\alpha}\right)^n$$

che ha limite finito, per $n \rightarrow +\infty$, se $3^\alpha = 4$ cioè $\alpha = \log_3 4 \simeq 1,26\dots$

Questa è la dimensione della curva "fiocco di neve", e la sua misura, in questa dimensione, è:

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\log_3 4} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\log_3 2} \simeq 0,858\dots$$

10. FUNZIONI MISURABILI

10.1. FUNZIONI MISURABILI, FUNZIONI CONTINUE, PROPRIETÀ VERE QUASI OVUNQUE: ESEMPI E OSSERVAZIONI

1. Se f è misurabile e $g = f$ quasi ovunque (q. o.), allora g è misurabile. Questa proprietà fondamentale, discende dalla completezza della misura di Lebesgue (ossia dal fatto che tutti i sottoinsiemi di un insieme di misura nulla sono misurabili). Allora ha senso considerare funzioni misurabili definite q. o., in quanto comunque si definiscano altrove risultano essere misurabili.
2. La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto alle operazioni algebriche, e inoltre:

$$f_n \text{ misurabili}, f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q. o.} \Rightarrow f \text{ misurabile.}$$

Confrontiamo con la nozione di continuità:

$$f_n(x) = |x|^n \operatorname{sgn} x \quad f_n(x) \rightarrow \operatorname{sgn} x \text{ su } [-1, 1]$$

f_n sono continue, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ non lo è. La continuità quindi non si conserva come la misurabilità per passaggio al limite q.o.

3. Se f_n sono misurabili, anche $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$ lo sono. È essenziale però che le f_n siano una successione (cioè una famiglia numerabile):

Controesempio. Sia E un insieme non misurabile, e $\forall \alpha \in E$ sia

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x = \alpha \\ 0 & x \neq \alpha. \end{cases}$$

Allora:

$$\sup_{\alpha \in E} f_\alpha(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

In questo caso dunque ogni f_α è misurabile, ma il loro sup, χ_E , non lo è. (Infatti, ad es., $\{x: \chi_E(x) > \frac{1}{2}\} = E$, non è misurabile). Notare che in questo caso la famiglia di funzioni f_α è non numerabile, perché α varia in tutto E ; poiché per ipotesi E non è misurabile, E non è numerabile: se lo fosse, infatti, avrebbe misura nulla (v. cap. 9, esempio 1).

4. Notare la differenza che c'è tra dire:

“ f è continua q. o.” e dire “ f è uguale q. o. a una funzione continua”.

Esempio.

a. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua q. o. (tranne in 0) ma *non* è uguale q. o. a una funzione continua. Per renderla continua non basta alterarla in 0, si deve alterarla in un intorno di 0.

b. La funzione di Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

è uguale q.o. alla funzione identicamente nulla, che è continua, ma *non* è continua q. o., anzi: è discontinua ovunque.

5. Osservare la relazione che c'è tra:

“ f continua nei punti di E ” e “ f ristretta ad E è continua”.

La 1^a implica la 2^a ma non viceversa. Contrempio: la funzione di Dirichlet, che è continua ristretta a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ad es., ma non è continua (in \mathbb{R}) nei punti di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. Osservare che:

“ f limitata q. o.” \Leftrightarrow “ f è uguale q. o. a una funzione limitata”.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} f \text{ limitata q. o.} &\Leftrightarrow \exists E \subseteq \mathbb{R}: |E| = 0 \text{ e } \sup_{x \notin E} |f(x)| \leq K \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in E} |g(x)| \leq K, \end{aligned}$$

avendo posto:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin E \\ \text{qualsiasi cosa} & x \in E \end{cases}$$

(ossia $g = f$ q. o.). □

Un esempio di funzione limitata q. o. (ossia uguale q. o. a funzione limitata, ossia “essenzialmente limitata”), ma non limitata, è il seguente:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{per } x = n \in \mathbb{N} \\ \sin x & \text{per } x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poiché $|\mathbb{N}| = 0$ e $\sin x$ è limitata, f è essenzialmente limitata, anche se non è limitata.

Si osservi anche il prossimo esempio:

la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è *finita* q.o. (tranne in 0) ma *non* è limitata q.o.: è essenzialmente illimitata. (Qualunque funzione uguale q.o. a f ha estremo superiore infinito).

10.2. I TEOREMI DI EGOROFF E DI LUSIN

Enunciamo e commentiamo due importanti teoremi che riguardano le funzioni misurabili.

Teorema di Egoroff. Sia $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili, con $|E| < +\infty$, e $f_n \rightarrow f$ q. o.. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \subseteq E$ tale che $|E \setminus C_\varepsilon| < \varepsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente in C_ε . Inoltre C_ε si può scegliere chiuso.

Esempio 7.

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{in } [0, 1].$$

$f_n(x) \rightarrow 1$ q. o. in $[0, 1]$ (tranne in 0) ma f_n non tende a 1 uniformemente:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |1 - x^{\frac{1}{n}}| = 1 \quad \forall n.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e consideriamo l'intervallo $[\varepsilon, 1] = C_\varepsilon$. $|[0, 1] \setminus [\varepsilon, 1]| = \varepsilon$ e

$$\sup_{x \in [\varepsilon, 1]} |1 - x^{\frac{1}{n}}| = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

ossia $f_n \rightarrow 1$ uniformemente in $[\varepsilon, 1]$.

Controesempio 8.

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

$f_n(x) \rightarrow 0$ ovunque ma, qualunque $C_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ si consideri, con $|\mathbb{R} \setminus C_\varepsilon| < \varepsilon$ si ha che

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus C_\varepsilon} |f_n(x)| = +\infty.$$

Il teorema non si applica perché in questo caso è $|E| = +\infty$.

Esercizio 9.

$$\text{Sia } f_n(x) = \frac{1}{x^2} \sin n^2 x \sin \frac{x}{n} \quad \text{su } (0, 1).$$

Dire se f_n converge uniformemente, e in caso contrario determinare un sottoinsieme di misura $1 - \varepsilon$ in cui converge uniformemente.

$$\text{Per } x \text{ fissato e } n \rightarrow +\infty, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} \left| \frac{x}{n} \right| \rightarrow 0.$$

$$\text{Per } n \text{ fissato e } x \rightarrow 0, \quad f_n(x) \sim \frac{1}{x^2} n^2 x \cdot \frac{x}{n} = n, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = n,$$

perciò f_n non tende a zero uniformemente. Se però considero $x \geq \varepsilon$ si ha:

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ dunque su $[\varepsilon, 1]$ c'è convergenza uniforme.

Teorema di Lusin. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $|E| < +\infty$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono una funzione $g_\varepsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ e un insieme E_ε , con $|E_\varepsilon| < \varepsilon$, tale che g_ε è continua e $g_\varepsilon(x) = f(x)$ tranne che per $x \in E_\varepsilon$. Inoltre $\max |g_\varepsilon(x)| \leq \sup |f(x)|$.

Corollario. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $|E| < +\infty$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon \subseteq E$ tale che $|E_\varepsilon| < \varepsilon$ e f ristretta a $E \setminus E_\varepsilon$ è continua.

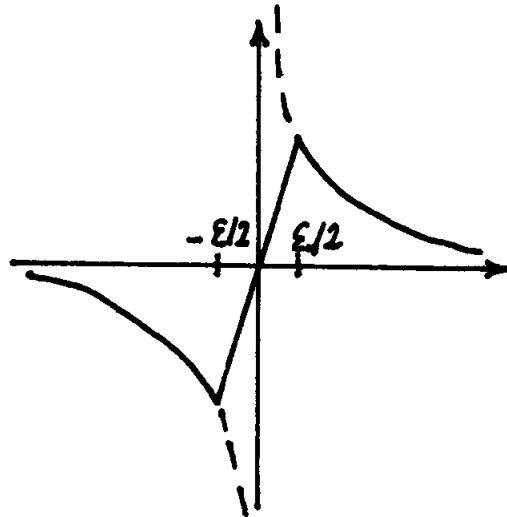
Dimostrazione del corollario. In base al teorema, esistono E_ε e g_ε continue tali che $f = g_\varepsilon$ in $E \setminus E_\varepsilon$, ossia: f è continua nei punti di $E \setminus E_\varepsilon$; allora la sua restrizione a $E \setminus E_\varepsilon$ è continua. (Cfr. osservazione 5). \square

Notare che, sempre per l'osservazione 5, il corollario afferma un risultato più debole del teorema, come vedremo sugli esempi. Questi risultati hanno il significato di precisare in che senso una funzione misurabile è approssimabile da funzioni continue.

Esempi.

10. $f(x) = \frac{1}{x}$ su \mathbb{R} è misurabile, e discontinua in 0.

La figura (v. pag. seguente) mostra come si può definire una funzione g_ε continua e uguale a f tranne su un insieme di misura ε . (Th. di Lusin). Per verificare il corollario invece, basta dire: restringiamo f a $\mathbb{R} \setminus \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, o addirittura: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (f è continua tranne in 0, ma non è uguale a una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, bensì in $\mathbb{R} \setminus \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$).



11. $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ in $[0, 1]$ (funzione caratteristica di \mathbb{Q}).

f è misurabile e discontinua ovunque, ma uguale q. o. alla funzione identicamente nulla; in questo caso l'applicazione del teorema è banale: porre $E_\epsilon = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ e $g_\epsilon \equiv 0, \forall \epsilon$.

12. $f(x) = \chi_{C_\lambda}(x)$ (funzione caratteristica del ternario di Cantor C_λ , v. § 9.1). Se $\lambda < \frac{1}{3}$, $|C_\lambda| > 0$. In questo caso il teorema di Lusin afferma una cosa non banale. Infatti f è discontinua in tutti i punti di C_λ , che è di misura positiva: non è facile capire come vanno definiti E_ϵ e g_ϵ . La potenza del teorema sta proprio nel garantire che questa costruzione è possibile.

13. Sia $f(x)$ così definita: ordinati i razionali di $[0, 1]$ in una successione che chiamiamo $\{x_n\}$ (ciò è sempre possibile perché \mathbb{Q} è numerabile), poniamo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\sin \frac{1}{x-x_n}|$$

La definizione ha senso $\forall x \notin \mathbb{Q}$. (Notare che $|\sin \frac{1}{x-x_n}| \leq 1$, perciò la serie

converge assolutamente e uniformemente). Poniamo anche $f(x) = 0$ per $x \in \mathbb{Q}$. La f , ristretta a $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ è continua perché somma di una serie uniformemente convergente di funzioni che, ristrette a $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ sono continue. Quindi l'applicazione del corollario è banale: ristretta al complementare di un insieme di misura nulla, f è continua. Invece l'applicazione del teorema di Lusin non è banale. Osserviamo che $\forall x_n \in \mathbb{Q}$ si ha che non esiste $\lim_{x \rightarrow x_n} f(x)$; quindi f è discontinua in tutti i punti di \mathbb{Q} . Sia ora $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Per come è definita f , $f(x_0) > 0$. D'altro canto in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti razionali, in cui $f = 0$: perciò f è discontinua anche in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

In conclusione, f è discontinua ovunque, e non è uguale q. o. a una funzione continua; anche in questo caso la costruzione esplicita di E_ϵ e g_ϵ non sarebbe banale.

11. INTEGRALE DI LEBESGUE

11.1. RELAZIONI TRA INTEGRALE DI RIEMANN E INTEGRALE DI LEBESGUE

Facciamo qualche esempio per confrontare le nozioni di integrale di Riemann, integrale di Riemann generalizzato, integrale di Lebesgue.

1. $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ su $(0,1)$.

f è limitata e definita su un intervallo limitato.

f è discontinua nei punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$ in cui ha discontinuità di 1^a specie, e in $x = 0$, in cui ha discontinuità di 2^a specie. L'insieme dei punti di discontinuità è numerabile (in particolare ha misura nulla), dunque f è Riemann integrabile (in senso ordinario) e quindi Lebesgue integrabile.

2. $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ in $[0,1]$.

È misurabile e limitata, perciò Lebesgue integrabile. È discontinua ovunque, quindi non è Riemann integrabile.

In questo caso però f è uguale q. o. alla funzione identicamente nulla, Riemann integrabile. È più significativo allora il prossimo esempio:

3. $f(x) = \chi_{C_\lambda}(x)$ con C_λ ternario di Cantor, $\lambda < \frac{1}{3}$ (v. § 9.1).

f è misurabile (perché C_λ è misurabile) e limitata, dunque Lebesgue integrabile. f è discontinua in tutti i punti di C_λ (perché ogni punto di C_λ è di frontiera); C_λ ha misura positiva, dunque f non è R-integrabile. (Si può vedere anche così: f è la funzione caratteristica di un insieme non misurabile secondo Peano-Jordan, dunque non è R-integrabile). In questo caso f non è nemmeno uguale q.o. a una funzione R-integrabile.

11. Integrale di Lebesgue

4. Si consideri la funzione studiata nell'esempio 13 del cap. 10: per $x \in [0,1]$, poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\sin \frac{1}{x-x_n}| \quad \text{per } x \notin \mathbf{Q}, \quad f(x) = 0 \quad x \in \mathbf{Q},$$

dove x_n sono i razionali di $[0,1]$, ordinati in successione.

f è Lebesgue integrabile su $[0,1]$ perché limitata e misurabile (perché somma di una serie di funzioni misurabili). f non è R-integrabile perché discontinua ovunque. f non è neanche uguale q. o. a una funzione R-integrabile.

5. $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ su $[1, +\infty]$.

Poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \left[-\frac{\cos x}{x^p} \right]_1^{+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$$

$$(\text{intendendo } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k f(x) dx)$$

si vede che f è R-integrabile in senso generalizzato $\forall p > 0$. f è anche Lebesgue integrabile se $p > 1$ ($|f(x)| \leq \frac{1}{x^p}$). Però per $0 < p \leq 1$ f non è Lebesgue integrabile come si vede ad esempio dalle stime seguenti:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}^{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}^{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}\right). \end{aligned}$$

Ora, stimando il termine generale della serie:

$$\log\left(\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}\right) = \log\left(1 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + 2k}\right) \sim \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + 2k} \sim \frac{1}{3k}$$

si vede che la serie diverge. Pertanto l'integrale diverge.

Esercizio 6. $f(x) = \cos x^2$ su $(0, +\infty)$.

Si verifichi, con integrazione per parti, dopo aver eseguito la sostituzione $x^2 = t$, che l'integrale di Riemann generalizzato converge; si dimostri, con metodo simile all'esempio precedente, che f non è Lebesgue integrabile.

Come abbiamo visto nel § 3.2, questo integrale generalizzato di Riemann si può anche calcolare esplicitamente coi metodi dell'analisi complessa (integrale di Fresnel). Si trova:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Quanto visto negli esempi precedenti si può schematizzare al modo seguente:

*Nella classe delle
funzioni limitate, definite su un intervallo limitato:*

f continua q.o. $\Leftrightarrow f$ R-integrabile $\stackrel{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ f L-integrabile $\Leftrightarrow f$ misurabile.

*Nella classe delle
funzioni illimitate o definite su un intervallo illimitato:*

f R-integrabile in senso generalizzato $\stackrel{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ f L-integrabile.

11.2. INTEGRAZIONE PER SUCCESSIONI

Il problema che ci si pone è: quando, sapendo che $f_n \rightarrow f$, si può affermare $\int f_n \rightarrow \int f$? Nella teoria dell'integrale di Riemann, si chiede che la convergenza $f_n \rightarrow f$ sia uniforme su $[a, b]$. Nella teoria dell'integrale di Lebesgue si chiede (teorema della convergenza dominata) che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q. o. ed esista $g \in L^1$ tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Esempi. Confronto tra teoria di Riemann e di Lebesgue.

1. $f_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}}$ in $[-1, 1]$.

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme; la teoria classica non dice niente. Però $|f_n(x)| \leq 1$, la funzione costante è integrabile su $[-1, 1]$, perciò per il teorema di Lebesgue

$$\int_{-1}^1 |x|^{\frac{1}{n}} dx \rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = 2.$$

2. Sia $\{x_n\}$ la successione dei razionali di $[0, 1]$. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = x_1, \dots, x_n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

f_n è R-integrabile, mentre $\chi_{\mathbb{Q}}$ non lo è: per la teoria classica $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}$ non esiste.

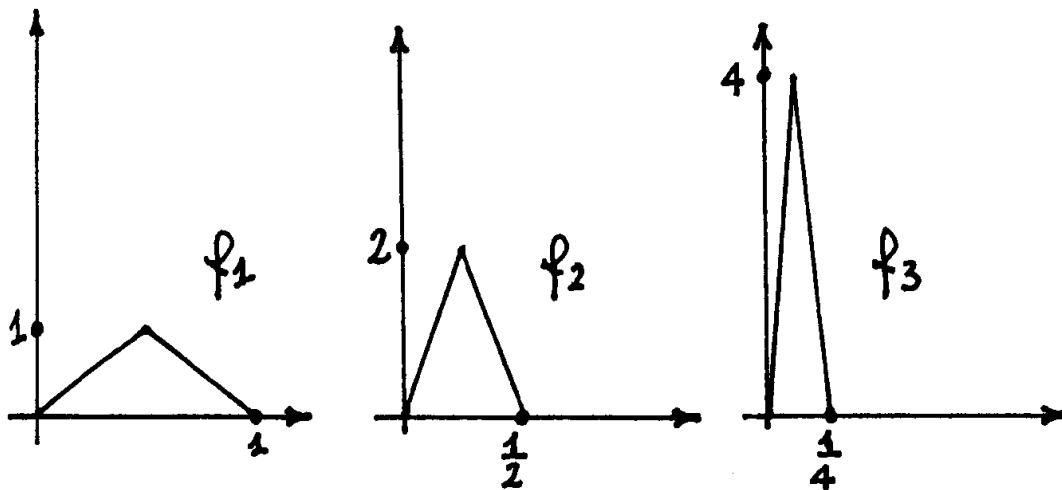
11. Integrale di Lebesgue

Nella teoria di Lebesgue diciamo:

$$f_n = 0 \quad \text{q.o.}, \quad \int f_n = 0 \quad \forall n, \quad \chi_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{q.o.}, \quad \int \chi_{\mathbb{Q}} = 0.$$

Esempi sul teorema di Lebesgue della convergenza dominata

3. Siano le f_n così definite:



(eccetera). Si ha:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \quad \forall n \quad \text{dunque} \quad \lim_n \int f_n = \frac{1}{2}.$$

D'altro canto

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in (0,1) \quad \text{e} \quad \int_0^1 0 dx = 0.$$

Dunque non vale il passaggio al limite. Infatti non c'è una maggiorante integrabile. Una $g(x) \geq f_n(x) \quad \forall n$ dovrebbe valere almeno 2^n nel punto 2^{-n} , cioè essere del tipo $g(x) = \frac{1}{x}$, che non è integrabile.

11. Integrale di Lebesgue

4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx^{3/2}}$ su $(0, +\infty)$.

Si osservi che:

$$|f_n(x)| \leq g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{per } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^{3/2}} & \text{per } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

e g è integrabile in $(0, +\infty)$.

D'altro canto $f_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, allora per Lebesgue $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow 0$.

5. $f_n(x) = \frac{1 - 2^{-x}}{x^{5/3}(1-x)^{1/x}}$ su $(0, 1)$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{1 - 2^{-x}}{x^{5/3}(1-x)^{1/2}} \equiv g(x) \quad \forall n \geq 2.$$

Per $x \rightarrow 0$ è $g(x) \sim \frac{\log 2}{x^{2/3}}$, integrabile; per $x \rightarrow 1$ $g(x) \sim \frac{1}{2(1-x)^{1/2}}$, integrabile;

perciò g è integrabile.

$$f_n(x) \rightarrow \frac{1 - 2^{-x}}{x^{5/3}} \equiv f(x) \quad \text{perciò} \quad \int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 \frac{1 - 2^{-x}}{x^{5/3}} dx.$$

6. $f_n(x) = \frac{n}{1 + \operatorname{Ch}(x-n)}$ su \mathbb{R} .

f_n è integrabile $\forall n$ (tende a zero esponenzialmente all'infinito, per n fissato, ed è limitata). $f_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, $\forall x$, perché $n \ll \operatorname{Ch} n$. Osserviamo però che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1 + \operatorname{Ch}(x-n)} dx = (x-n=t) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + \operatorname{Ch} t} = nI,$$

con $I > 0$.

Perciò $\int f_n \rightarrow +\infty$ mentre $f_n \rightarrow 0$. Infatti non esiste la maggiorante integrabile.

[Osservare che $f_n(n) = \frac{n}{2}$].

$$7. \quad f_n(x) = \frac{e^{-n/x}}{x \log^2(1+nx)} \quad \text{su } (0, +\infty).$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-1/x}}{x \log^2(1+x)} \in L^1(0, +\infty) \text{ perché:}$$

per $x \rightarrow 0^+$, $g(x) \sim \frac{e^{-1/x}}{x^3}$, integrabile;

per $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \sim \frac{1}{x \log^2 x}$, integrabile.

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty, \text{ dunque } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow 0.$$

$$8. \quad f_n(x) = x^n e^{-nx} \quad \text{su } (0, +\infty).$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Proviamo che $f_n(x) \leq f_1(x)$.

$$x^n e^{-nx} \leq x e^{-x} \quad \text{se} \quad x^{n-1} e^{-(n-1)x} \leq 1.$$

Per provare l'ultima diseguaglianza, cerco il massimo di

$$f_{n-1}(x) = x^{n-1} e^{-(n-1)x}.$$

$$f'_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2} e^{-(n-1)x}(1-x) \geq 0 \quad \text{per } x \leq 1.$$

$$f_{n-1}(1) = e^{-(n-1)} \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

$$\text{Dunque } f_n(x) \leq f_1(x) \in L^1(0, +\infty), \text{ e } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow 0.$$

11.3. INTEGRAZIONE PER SERIE

Un criterio che si usa spesso è il seguente:

se $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)| dx$ converge (le f_n si suppongono misurabili) allora:

$\sum f_n(x)$ converge (assolutamente) q. o. a una funzione $f(x) \in L^1$, e

$$\sum \int f_n = \int \sum f_n.$$

In particolare: se $f_n \geq 0$, l'uguaglianza $\sum \int f_n = \int \sum f_n$ vale sempre, nel senso che se uno dei 2 membri è finito, è finito anche l'altro e sono uguali.

Esempi.

1. Sia $F(x) = \sum_1^{\infty} e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}}$.

Dimostrare che $F \in L^1(-\infty, 0)$ ma $F \notin L^1(-\infty, 1)$.

Siano $f_n(x) = e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}} > 0$. Allora

$$\sum \int f_n = \int \sum f_n, \text{ perciò:}$$

$$\int_{-\infty}^0 F(x) dx = \sum \int_{-\infty}^0 e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}} dx \leq$$

$$[e^{\frac{1}{x}} \leq 1 \text{ per } x \leq 0 \text{ perciò } e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}} \leq e^{-n^2|x|}]$$

$$\leq \sum \int_{-\infty}^0 e^{n^2 x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Dunque $F \in L^1(-\infty, 0)$. Studiamo ora F su $(-\infty, 1)$.

$$\int_{-\infty}^1 F(x) dx = \sum \int_{-\infty}^1 e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}} dx$$

ma

$$\int_{-\infty}^1 e^{-n^2|x| + \frac{1}{x}} dx \geq \int_0^1 e^{-n^2x} e^{\frac{1}{x}} dx \geq e^{-n^2} \int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx = +\infty.$$

Perciò ogni termine della serie è $+\infty$, la serie diverge e così l'integrale di F .

2. Sia $\{x_n\}$ la successione di razionali in $(0,1)$ e $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{|x-x_n|}}$.

Ogni $f_n \in L^1(0,1)$. Consideriamo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{|x-x_n|}}. \quad (*)$$

La serie è definita per $x \notin \mathbb{Q}$, e a priori non è chiaro che converga in alcun punto.

Osserviamo però che:

$$\begin{aligned} \sum \int_0^1 f_n(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot [2(\sqrt{x_n} + \sqrt{1-x_n})] \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4. \end{aligned}$$

Per il criterio visto sappiamo allora che: la serie $(*)$ converge q. o. a una funzione $f \in L^1(0,1)$, e

$$\int_0^1 f dx = \sum \int_0^1 f_n dx.$$

In questo caso il modo più semplice di dimostrare che la serie converge q. o. è mostrare che la sua somma è L^1 . Notiamo anche che $\forall n$ fissato si ha:

$$f(x) \geq \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{|x-x_n|}} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow x_n$$

ossia: $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_n$, \forall razionale x_n . Di conseguenza la f è una

funzione discontinua ovunque. Perciò f non è Riemann integrabile. Ciò nonostante è Lebesgue integrabile, e il suo integrale si scrive come serie di integrali delle funzioni f_n (notare che questi ultimi sono anche integrali di Riemann).

È interessante anche notare cosa afferma il teorema di Lusin riguardo a f (v. § 10.2): anche questo è un caso in cui non è banale eseguire la costruzione che il teorema afferma essere possibile.

3. Sia:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{per } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ -n & \text{per } x \in (-\frac{1}{n}, 0) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0 \quad \forall n, \quad \text{perciò} \quad \sum \int f_n = 0.$$

Mostriamo però che non esiste $\int \sum f_n$. (Questo è perciò un caso in cui non vale l'uguaglianza $\int \sum f_n = \sum \int f_n$: notare che le f_n cambiano di segno).

$$\text{Sia } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = (\text{per } x > 0) = \sum_{j < \frac{1}{x}} j.$$

Da qui si vede in particolare che $f(x) < +\infty \quad \forall x > 0$, e $f(x) = 0 \quad \forall x > 1$. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \sum_{j < \frac{1}{x}} j = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} j dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, notiamo che, per $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, ossia $n < \frac{1}{x} < n+1$, si ha:

$$\sum_{j < \frac{1}{x}} j = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Allora l'integrale è uguale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{n(n+1)}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Poiché $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge, anche $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ diverge.

11.4. INTEGRALI DOPPI. TEOREMA DI FUBINI-TONELLI

La forma in cui più solitamente si utilizza il teorema è la seguente: se l'integrale $\int dx \int |f(x,y)| dy$ converge, allora $f \in L^1(dx dy)$, ossia converge l'integrale doppio, e questo coincide con ciascuno dei due integrali iterati:

$$\int dx \int f(x,y) dy = \int \int f(x,y) dx dy = \int dy \int f(x,y) dx.$$

In particolare se $f \geq 0$ le uguaglianze precedenti sono sempre vere, essendo i vari termini finiti o infiniti.

Esempi.

1. $f(x,y) = \frac{\sin x}{x^2 + y^2}$. Dominio: $T = [-1,1] \times \mathbb{R}$.

Calcoliamo:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + y^2} dy = \int_{-1}^1 |\sin x| dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_{-1}^1 |\sin x| \cdot [\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}]_{-\infty}^{+\infty} dx = \pi \int_{-1}^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx < +\infty$$

(perché l'integranda è limitata in $[-1, 1]$). Dunque l'integrale doppio converge.

Allora per la simmetria di f e di T , tale integrale è zero:

$$\int \int_T f(x, y) dx dy = 0.$$

2. $f(x, y) = \frac{1}{x(x^2 + y^2)}$ in $T = [-1, 1] \times \mathbb{R}$.

La funzione f e T sono ancora simmetrici in modo tale che l'integrale

$$\int \int_T f(x, y) dx dy$$

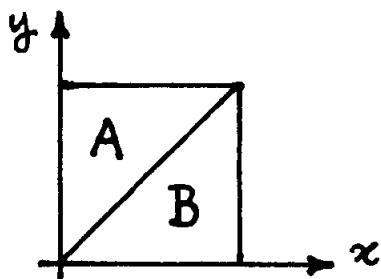
se esiste è zero. Per verificare se esiste, procedendo come nell'esempio precedente si trova:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2} = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

e questo integrale diverge. Quindi l'integrale di partenza non esiste. Notare che prima di concludere che un integrale è zero per ragioni di simmetria, bisogna garantire che l'integrale esiste.

3. Sia $f(x, y)$ così definita sul quadrato: $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/y^2 & \text{in } A \\ -1/x^2 & \text{in } B. \end{cases}$$



Calcolare i due integrali iterati.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) =$$

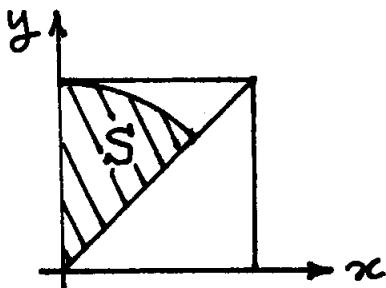
$$= \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{x} + (-1 + \frac{1}{x}) \right) = -1.$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx = \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2} dx \right) =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} \right) = 1.$$

Quindi i due integrali iterati, pur esistendo entrambi, assumono valori diversi. (Osservare che l'integrale iterato del *modulo* di f diverge). Questo prova tra l'altro che l'integrale doppio diverge, come del resto si poteva vedere anche dal calcolo seguente:

$$\iint_{[0,1]^2} |f(x,y)| dx dy \geq \iint_S |f(x,y)| dx dy =$$



$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2 \sin^2 \vartheta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \cdot \int_0^1 \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Poiché l'integrale in ϱ diverge e l'integrale in ϑ converge (ma non è zero), l'integrale doppio diverge.

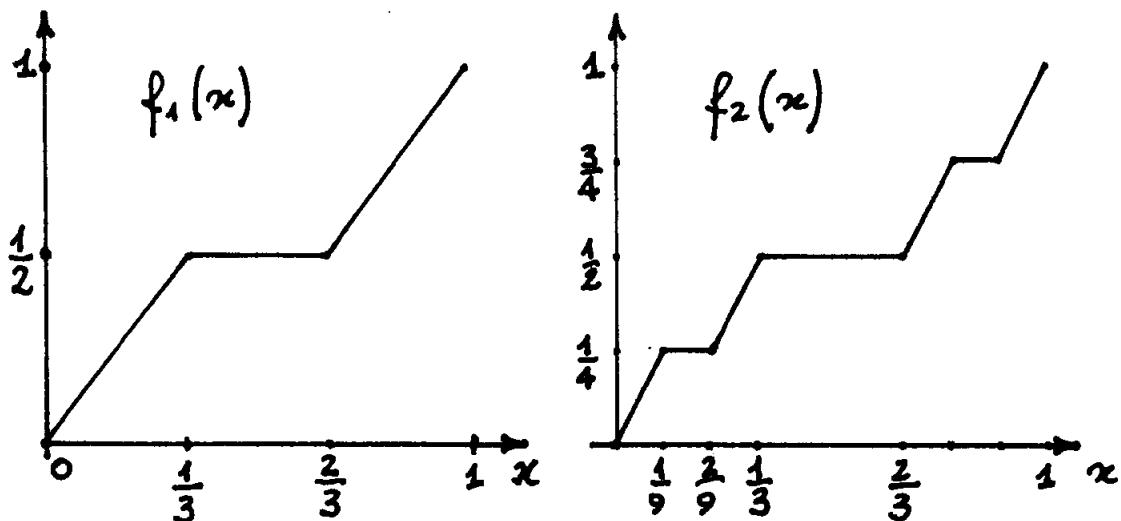
11.5. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO. LA FUNZIONE DI VITALI.

Il classico “teorema fondamentale del calcolo”, che afferma:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

vale, nella teoria dell'integrale di Riemann, per $f \in C^1(a, b)$ e nella teoria dell'integrale di Lebesgue per una classe di funzioni più ampia, che viene detta delle *funzioni assolutamente continue*. Mostriamo con un esempio che questa classe non contiene tutte le funzioni continue aventi q.o. derivata prima: per queste funzioni entrambi i membri dell'uguaglianza possono esistere, ma essere diversi.

L'esempio è dovuto a Vitali e si basa sull'insieme ternario di Cantor (per $\lambda = \frac{1}{3}$) già considerato nel § 9.1. La costruzione è iterativa, ossia si costruisce una successione di funzioni $f_n(x)$ in $(0, 1)$, di cui poi si prenderà il limite:



ossia sugli intervalli che compongono il complementare del ternario C le f_n sono

via via definite costanti e raccordate con continuità in modo che sia sempre $f_n(1) = 1$, $f_n(0) = 0$, f_n monotona non decrescente.

Si mostra che la successione f_n converge uniformemente a un limite $f(x)$ che sarà pertanto una funzione continua. f è costante su ogni intervallo aperto che compone C^C (il complementare di C); pertanto in C^C $\exists f'(x) = 0$. D'altro canto C ha misura nulla, quindi possiamo dire che f' esiste q. o. ed è q. o. nulla. In particolare si ha:

$$\int_0^1 f'(x) \, dx = 0 \quad \text{mentre} \quad f(1) - f(0) = 1$$

e il teorema fondamentale del calcolo non vale per questa f .

11.6. DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Consideriamo una funzione del tipo:

$$F(x) = \int_E f(x, y) \, dy \quad E \subseteq \mathbb{R}^n \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}.$$

Si vuole calcolare $F'(x)$. È possibile portare la derivata sotto il segno di integrale, cioè scrivere:

$$F'(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy ?$$

Sotto certe ipotesi sì. Precisamente:

Teorema. Se esiste un intorno $U(x_0)$ tale che $\forall x \in U(x_0)$ e per q.o. $y \in E$ esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq g(y)$ con $g \in L^1(E)$, allora:

$$F'(x_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \, dy.$$

Questo fatto segue dal teorema di Lebesgue, al seguente modo. Sia $h_n \rightarrow 0$.

Consideriamo:

11. Integrale di Lebesgue

$$F'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0)}{h_n} = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \frac{f(x_0 + h_n, y) - f(x_0, y)}{h_n} dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n(y) dy$$

con

$$|g_n(y)| = \left| \frac{f(x_0 + h_n, y) - f(x_0, y)}{h_n} \right| = \\ = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta h_n, y) \right| \leq g(y) \in L^1(E).$$

Allora, per Lebesgue:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n(y) dy = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y) dy = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) dy.$$

Esempio 1. Come si vedrà in seguito (v. § 20.2.1), la soluzione del seguente problema di equazioni a derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ con } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ assegnata} \end{cases}$$

è data da:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Si verifichi che u risolve l'equazione detta.

Occorre calcolare u_t e u_{xx} derivando sotto il segno di integrale. Calcoliamo ad es. u_t .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right) = \frac{(x-y)^2}{4t^2} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

Fissato comunque un $t_0 > 0$ e un suo intorno $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ con $t_0 - \varepsilon = t_1 > 0$

si ha

$$\frac{(x-y)^2}{4t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \leq \frac{1}{t_1} \cdot z e^{-z} \quad \text{con } z = \frac{(x-y)^2}{4t}.$$

Ma la funzione ze^{-z} è limitata per $z > 0$, dunque

$$|\frac{\partial}{\partial t} [e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)]| \leq \text{cost.} \cdot f(y) \in L^1(y)$$

e si può scrivere:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)^2}{4t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In modo analogo si opera su u_{xx} e si verifica che $u_t - u_{xx} = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la formula di rappresentazione:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(s)(R^2 - \varrho^2)}{R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos(\vartheta - s)} ds$$

definita per $0 \leq \varrho < R$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$. (R costante fissata). Sia $f \in L^1(-\pi, \pi)$ assegnata. Si provi che è possibile calcolare $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ e $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ derivando sotto il segno di integrale.

11.7. CONVOLUZIONE DI FUNZIONI

Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni misurabili. Si definisce:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A priori non è chiaro se e quando l'integrale scritto converga. Si dimostra che:

Teorema. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. In particolare l'integrale che definisce $f*g$ è finito per q. o. $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione del fatto che la funzione di 2 variabili $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ è misurabile. Posto questo, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy = \\ &= (\text{per Tonelli}) = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Si è così provato che:

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad \square$$

Esempio 1. Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[0,1]}(x)$ $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Consideriamo $f*f$. Per il teorema precedente, sappiamo che è $L^1(\mathbb{R})$.
Osservare che $(f*f)(x)$ non finito per ogni x :

$$(f*f)(0) = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Tuttavia, per q. o. x , $(f*f)(x)$ converge.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Calcolare $f*f$, $(f*f)*f$. Osservare poi il grado di regolarità di queste funzioni.

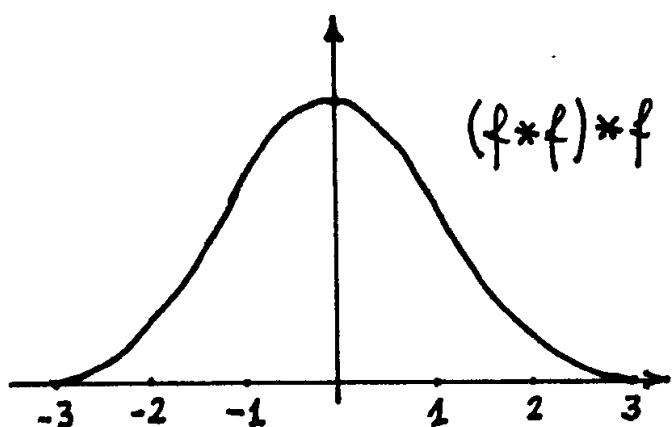
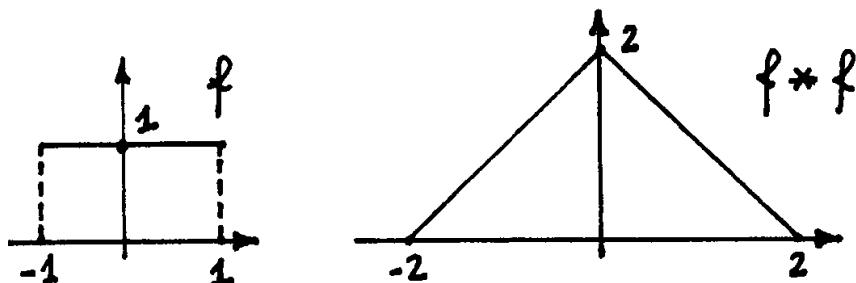
$$(f*f)(x) = \int_{-1}^1 f(x-y) dy = \int_{x-1}^{x+1} f(y) dy = |(x-1, x+1) \cap (-1, 1)| =$$

11. Integrale di Lebesgue

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -2, \quad x \geq 2 \\ x+2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \\ -x+2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ((f*f)*f)(x) &= \int_{-1}^1 (f*f)(x-y) dy = \int_{-1+x}^{1+x} (f*f)(y) dy = \\ &= (\dots \text{con calcoli elementari} \dots) = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -3, \quad x \geq 3 \\ \frac{(x+3)^2}{2} & \text{per } -3 \leq x \leq -1 \\ 3-x^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{(x-3)^2}{2} & \text{per } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



Si vede che: f è discontinua, $f*f$ è continua, $(f*f)*f$ è \mathcal{C}^1 .

□

Siano ora $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Prolunghiamo queste funzioni a tutto \mathbb{R} definendole zero su $x < 0$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} (f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy = (\text{perché } g = 0 \text{ per } y < 0) = \\ &= \int_0^{+\infty} f(x-y) g(y) dy = \\ &= (\text{perché } f(x-y) = 0 \text{ per } x-y < 0 \text{ cioè } y > x) = \int_0^x f(x-y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Si chiama convoluzione finita di $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la convoluzione ora ottenuta:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-y) g(y) dy.$$

Per il teorema precedente, se $f, g \in L^1[0, +\infty)$ si ha $f*g \in L^1[0, +\infty)$. In questo caso però vale anche il seguente risultato:

Teorema. Se $f, g \in L^1_{loc}[0, +\infty)$, $f*g \in L^1_{loc}[0, +\infty)$.

Dimostrazione. Fissiamo $k > 0$ e proviamo che:

$$\int_0^k |(f*g)(x)| dx < +\infty.$$

$$\begin{aligned} \int_0^k |(f*g)(x)| dx &\leq \int_0^k dx \int_0^x |f(x-y)| |g(y)| dy = \\ &= (\text{per Tonelli}) = \int_0^k |g(y)| dy \int_y^k |f(x-y)| dx = (x-y=t) = \\ &= \int_0^k |g(y)| dy \int_0^{k-y} |f(t)| dt \leq \int_0^k |g(y)| dy \int_0^k |f(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

perché $f, g \in L^1_{loc}[0, +\infty)$. □

Altre proprietà della convoluzione (e convoluzione finita) di funzioni saranno studiate in relazione alle trasformate di Fourier e Laplace (v. capp. 14-15).

12. SPAZI L^p

12.1. ESEMPI SULL'APPARTENENZA DI UNA FUNZIONE A SPAZI L^p

Data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ci chiediamo per quali $p \in [1, +\infty)$ $f \in L^p(E)$.

Esempi.

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad f \in L^p(1, +\infty) \quad \forall p > 2.$$

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \log x}. \quad f \in L^p(2, +\infty) \quad \forall p \geq 2.$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x} \log x} & \text{per } x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \\ 0 & \text{per } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]. \end{cases}$$

$$f \in L^p(0, 1) \quad \forall p \leq 2.$$

$$f \in L^p(1, +\infty) \quad \forall p = 2.$$

Dunque $f \in L^p(0, +\infty)$ solo per $p = 2$.

$$4. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \log^{1/3} x}.$$

$$f \in L^p(2, +\infty) \quad \forall p > 2.$$

$$f \in L^p(1, 2) \quad \forall p < 3.$$

Dunque $f \in L^p(1, +\infty)$ per $2 < p < 3$.

$$5. \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad f \notin L^p(0, +\infty) \quad \forall p.$$

N.B. Negli esempi si è fatto uso dei seguenti noti criteri di integrabilità:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}$$

è integrabile in un intorno (destro) di 0 se e solo se $\alpha < 1$ oppure $\alpha = 1$ e $\beta > 1$;

è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$ oppure $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

Dagli esempi si vede che l'insieme dei p per cui $f \in L^p(E)$ può essere un intervallo limitato o illimitato, aperto o chiuso, ridursi a un solo punto o anche essere vuoto. In ogni caso però, se tale insieme non è vuoto, dev'essere un intervallo. Ciò è conseguenza del seguente

Teorema. Se $f \in L^{p_1}(E) \cap L^{p_2}(E)$, allora $f \in L^p(E) \forall p \in (p_1, p_2)$ e vale la diseguaglianza:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{p_1/p} + \|f\|_{p_2}^{p_2/p}.$$

Dimostrazione.

Sia $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \geq 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$f = f_1 + f_2$. Sia $p \in (p_1, p_2)$. Poiché, dove è $\neq 0$, $|f_1(x)| \geq 1$, si ha $|f_1(x)|^p \leq |f_1(x)|^{p_2}$. Analogamente $|f_2(x)|^p \leq |f_2(x)|^{p_1}$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p = \left(\int |f_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f_2|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int |f_1|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f_2|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p}} = \end{aligned}$$

□

$$= \|f\|_{p_1}^{p_1/p} + \|f\|_{p_2}^{p_2/p}.$$

12.2. DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER

Se $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$, con $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$, allora $f \cdot g \in L^1(E)$ e:

$$\int_E |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

In particolare se $p = q = 2$ si dice disuguaglianza di Schwarz.

Esempi di applicazione della disuguaglianza di Hölder a stime di integrali

$$\begin{aligned} 6. \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{\sin x}{1+x^2}} dx &\leq \left(\int_0^1 |\sin x| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (1 - \cos 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}} \simeq 0,6. \end{aligned}$$

L'applicazione della disuguaglianza di Schwarz permette di maggiorare un integrale di difficile calcolo con un prodotto di 2 integrali più semplici, e fornisce in questo modo una maggiorazione numerica dell'integrale da calcolare.

$$7. \quad \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \equiv I.$$

Applichiamo Hölder con $f = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, $g = e^x$, $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{-1}^1 e^{\frac{3}{2}x} dx \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} (e^3 - 1)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{e} \simeq 2,33. \end{aligned}$$

8. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx.$

Applichiamo Hölder con $f = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, $g = e^x$, $p = \frac{3}{2}$ $q = 3$:

$$I \leq \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 e^{3x} dx \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 2,5.$$

Una conseguenza della diseguaglianza di Hölder è la proprietà di inclusione fra spazi $L^p(E)$ quando E ha misura finita.

Teorema. Sia $|E| < +\infty$. Allora se $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$ e vale la diseguaglianza:

$$\|f\|_{L^{p_1}(E)} \leq |E|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(E)}.$$

Dimostrazione. Il caso $p_2 = \infty$ è banale. Se $p_2 < \infty$ e $p_1 < p_2$, $p = \frac{p_2}{p_1} > 1$.

Scriviamo $\int_E |f|^{p_1} dx = \int \chi_E \cdot |f|^{p_1}$,

e applichiamo Hölder con esponente p a $|f|^{p_1}$ e $q = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$ a χ_E :

$$\int_E |f|^{p_1} dx \leq (\int_E |f|^{p_2} dx)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot |E|^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

da cui:

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \cdot |E|^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} = |E|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}. \quad \square$$

Esempi. Se $f \in L^2(0,1)$, certamente $f \in L^1(0,1)$; se $f \in L^\infty(0,1)$, $f \in L^p(0,1) \forall p$. Tutto ciò non si può ripetere per gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, come già visto negli esempi.

Relazione tra norma \mathcal{L}^∞ e norme \mathcal{L}^p su spazi di misura finita

La seguente proprietà giustifica il nome di norma \mathcal{L}^∞ dato alla norma dell'estremo superiore essenziale.

Teorema. Sia $|E| < \infty$, $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$. Allora $f \in \mathcal{L}^p(E) \quad \forall p \in [1, \infty]$ e:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p.$$

Dimostrazione.

$$(\int_E |f|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty \cdot |E|^{\frac{1}{p}}.$$

Viceversa, dato $\varepsilon > 0$, per definizione di $\|\cdot\|_\infty$, $\exists A \subseteq E: |A| > 0$ e $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A$. Dunque:

$$(\int_E |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_A |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot |A|^{\frac{1}{p}}$$

da cui

$$|A|^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq |E|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

Poiché $0 < |A| \leq |E| < +\infty$, $|A|^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$ e $|E|^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$ per $p \rightarrow +\infty$.

Facendo tendere allora ε a 0 e p a $+\infty$ si trova:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

□

Osservazione 9. Ritoccando la dimostrazione precedente si vede anche che se $|E| < +\infty$ e $f \notin \mathcal{L}^\infty(E)$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = +\infty.$$

Perciò l'uguaglianza di $\|f\|_\infty$ e $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$ vale sempre, se $|E| < +\infty$, con

i due membri entrambi finiti o entrambi infiniti.

Esempio 10. Sia $f(x) = \log x$ su $(0,1)$. $f \in L^p(0,1)$ $\forall p < +\infty$ ma $f \notin L^\infty(0,1)$.

Si ha che $\|f\|_p < +\infty \forall p$ ma $\|f\|_p \rightarrow +\infty$ per $p \rightarrow +\infty$.

Se invece $|E| = +\infty$ l'uguaglianza può cadere in qualsiasi senso. Ad es., su \mathbb{R} , la funzione costante $f \equiv 1$ sta in L^∞ , e si ha:

$$\|f\|_p = +\infty \quad \forall p < \infty, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = +\infty \quad \text{ma} \quad \|f\|_\infty = 1.$$

Esercizio 11. Verificare che $\|f\|_{L^\infty(E)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)}$ per $f(t) = e^t$, $E = [0, a]$.

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_0^a e^{pt} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{e^{pt}}{p} \Big|_0^a \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{e^{ap} - 1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow e^a \text{ per } p \rightarrow +\infty; \\ e^a &= \|f\|_{L^\infty(0, a)}. \end{aligned}$$

12.3. TEOREMA DI LEBESGUE E CONVERGENZA IN NORMA L^p

Dal teorema di Lebesgue della convergenza dominata si ha che:

se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q. o. in E e $|f_n(x)| \leq g(x) \in L^p(E)$, allora

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{ossia} \quad \|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{ossia} \quad f_n \rightarrow f \text{ in } L^p(E).$$

(Convergenza in norma). In particolare questo implica la convergenza della norma, cioè

$$\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p.$$

Viceversa osserviamo che, ad esempio:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q. o. e } \int_E f_n \rightarrow \int_E f$$

non implica $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^1(E)$, come mostra il seguente

esempio 12.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{per } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -n & \text{per } x \in [-\frac{1}{2n}, 0] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \neq 0.$$

$$\int f_n \rightarrow 0 \quad (\text{perché } \int f_n = 0 \quad \forall n).$$

Ma $\|f_n\| = \int |f_n| = 1 \quad \forall n$, perciò f_n no tende a 0 in \mathcal{L}^1 .

12.4. SPAZI l^p

Definiamo gli spazi:

$$l^p = \left\{ \text{successioni } x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tali che } \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

per $1 \leq p < \infty$. Sia inoltre:

$$l^\infty = \{ \text{successioni limitate} \}.$$

Valgono le inclusioni: $p < q \Rightarrow l^p \subset l^q$.

Infatti: se $\sum |\xi_n|^p$ converge, in particolare $|\xi_n| < 1$ definitivamente, allora $|\xi_n|^q < |\xi_n|^p$ definitivamente, e dunque anche $\sum |\xi_n|^q$ converge. Inoltre una successione la cui serie è convergente è certamente limitata, quindi la proprietà sopra detta vale anche per $q = \infty$. Rispetto agli spazi c_0 e c introdotti nel § 8.3 (ossia, rispettivamente, lo spazio delle successioni convergenti a zero e lo spazio delle successioni convergenti) valgono le inclusioni:

$$l^p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty \quad \forall p \in [1, \infty).$$

Tutti questi spazi sono completi, con la propria norma; non lo sono con un'altra norma. Ad esempio l^1 con la norma l^∞ non è completo, o anche: l^1 è una varietà lineare di l^∞ ma non un sottospazio (cioè: l^1 non è chiuso in l^∞).

Esempio 13. Sia x_n la successione di elementi di l^1 così definita:

$$x_n = \left\{ \frac{1}{k^1 + \frac{1}{n}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Poiché, per ogni n fissato,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1 + \frac{1}{n}} < +\infty,$$

si ha che $x_n \in l^1 \ \forall n$. Per $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{k^1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{k}.$$

Non solo, si dimostra che la convergenza è uniforme in k , ossia detto

$$x = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty}, \text{ si ha che } x_n \rightarrow x \text{ in } l^\infty \text{ ossia } \|x_n - x\|_{l^\infty} \rightarrow 0,$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_k \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{k^1 + \frac{1}{n}} \right| \rightarrow 0.$$

Infatti: la funzione $f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^1 + \frac{1}{n}}$ è non negativa e ha massimo nel punto $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; dunque è:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right] \sim \frac{1}{e} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right] \rightarrow 0.$$

Dunque: la successione $\{x_n\} \subseteq l^1$ converge, in l^∞ , a un elemento $x \in l^\infty$, ma $x \notin l^1$:

$$\sum \frac{1}{k} = +\infty.$$

Perciò l^1 non è chiuso in l^∞ . □

12.5. DISUGUAGLIANZA DI HOLDER IN SPAZI l^p

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

per $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q \in [1, +\infty]$.

Esercizio 14. Si dia una maggiorazione numerica della somma delle seguenti serie:

$$a. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n!}}; \quad b. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n^5}.$$

$$a. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n!}} \leq \left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{4^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{3}} \simeq 1,9.$$

$$b. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n^5} \leq \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{3^{\frac{5n}{4}}} \right)^{\frac{4}{5}} \leq \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{1 - 3^{\frac{5}{4}}} - 1 \right)^{\frac{4}{5}} \simeq 1,4$$

(si è applicato Hölder con $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{5}{4}$).

13. SPAZI DI HILBERT

13.1. ESERCIZI SULLA “GEOMETRIA” NEGLI SPAZI DI HILBERT

1. Nello spazio l^2 delle successioni reali $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tali che $\|x\|_2 = \left(\sum |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, si considerino:

$$x = \{2, 0, 0, 0, \dots\}; \quad y = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

a) Si calcoli l'angolo formato da x e y .

b) Si ortonormalizzi il sistema $\{x, y\}$.

a) Calcoliamo:

$$\|x\|_2 = 2; \quad \|y\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

$$\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \frac{2}{2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

L'angolo è: $\vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right) \simeq 0,21\pi$.

b) Sia $x_1 = \frac{x}{\|x\|_2} = \{1, 0, 0, \dots\}$.

$$y_1 = y - \langle x_1, y \rangle x_1 = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} - \{1, 0, 0, \dots\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\}.$$

$$\|y_1\|_2 = \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$y_2 = \frac{y_1}{\|y_1\|_2} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6} - 1} \cdot \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\}.$$

$\{x_1, y_2\}$ è un sistema ortonormale che genera lo stesso spazio di $\{x, y\}$. \square

2. Nello spazio di Hilbert $L^2(0, \pi)$ si considerino $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$,

$h(x) = x$. Determinare nello spazio generato da f e g , l'elemento di minima distanza da h .

Si può procedere così. Sia $P(h)$ la proiezione di h nello spazio generato da f e g . Sarà:

$$P(h) = af + bg$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Questo è l'elemento di minima distanza. Per determinare i coefficienti a e b , imponiamo che $h - P(h)$ sia ortogonale a f e g . Perciò:

$$\begin{cases} \langle h - (af + bg), f \rangle = 0 \\ \langle h - (af + bg), g \rangle = 0, \end{cases}$$

sistema che risolto ci dà a e b . Si ha:

$$\begin{cases} \langle h, f \rangle - a \|f\|^2 - b \langle f, g \rangle = 0 \\ \langle h, g \rangle - a \langle f, g \rangle - b \|g\|^2 = 0. \end{cases}$$

Si tratta ora di calcolare gli integrali:

$$\langle h, f \rangle = \int_0^\pi x e^x dx = (\pi - 1)e^\pi + 1;$$

$$\langle h, g \rangle = \int_0^\pi x \sin x dx = \pi;$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(1 + e^\pi);$$

$$\|f\|^2 = \int_0^\pi e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2};$$

$$\|g\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo i coefficienti nel sistema e risolvendolo si trova:

$$a = \frac{e^\pi(2 - \pi)}{\frac{(e^\pi + 1)^2}{2\pi} - \frac{e^{2\pi} - 1}{2}} \quad b = 2 - \frac{e^\pi + 1}{\pi} \left(\frac{e^\pi(2 - \pi)}{\frac{(e^\pi + 1)^2}{2\pi} - \frac{e^{2\pi} - 1}{2}} \right)$$

L'elemento di minima distanza è:

$$P(h) = ae^x + b \sin x, \text{ con } a \simeq 0,15, \quad b \simeq 0,85. \quad (\text{v. fig. 13.1}).$$

□

3. Osservazioni sul "teorema di Pitagora" in spazi di Hilbert e sull'uguaglianza di Perceval.

i. Siano v_n vettori ortogonali in H . Allora $\|\sum v_n\|^2 = \sum \|v_n\|^2$.

L'uguaglianza vale sempre se i v_n sono in numero finito; se sono una successione, se la serie a 2° membro converge, allora anche $\sum v_n$ converge in H e vale l'uguaglianza.

ii. Siano $\{v_n\}$ un sistema ortonormale.

Posto: $x_n = \langle x, v_n \rangle$ per un fissato $x \in H$, si ha che la serie:

$$\sum x_n v_n$$

converge a \bar{x} = proiezione di x sullo spazio generato dai vettori $\{v_n\}$; inoltre:

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum |x_n|^2.$$

iii. Se il sistema ortonormale è completo, $\bar{x} = x$ e $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$.

iv. Se i $\{v_n\}$ sono un sistema ortogonale completo (ma i v_n non sono normalizzati) si ha:

$$x = \sum x_n \frac{e_n}{\|e_n\|^2}, \quad \|x\|^2 = \sum \frac{|x_n|^2}{\|e_n\|^2}.$$

Esempio 4. $\{v_n\} = \{\sin nx\}$ è un sistema ortogonale completo in $L^2(0, \pi)$.

$$\|v_n\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Ponendo, per $f \in L^2(0, \pi)$, $b_n = \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$ si ha: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum b_n \sin nx$ e
 $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

13.2. UGUAGLIANZA DEL PARALLELOGRAMMA. NORME HILBERTIANE

Dato un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in uno spazio vettoriale, si può definire una norma ponendo

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

Viceversa, data una norma, come si può capire se esiste un prodotto scalare che la induce? Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché una norma “provenga” da un prodotto interno è che valga l'*uguaglianza del parallelogramma*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in H.$$

Esempio 5. Consideriamo gli spazi $L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$. Proviamo che solo per $p = 2$ la norma proviene da un prodotto interno.

Siano: $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

$$\|f+g\|_p = \|f-g\|_p = \left(\int_0^2 1^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}};$$

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1.$$

Quindi:

$$\|f + g\|_p^2 = \|f - g\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}};$$

$$2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) = 2 \cdot 2.$$

Le 2 espressioni coincidono solo se $2^{\frac{2}{p}} = 2$ cioè $p = 2$. Per $p \neq 2$ l'uguaglianza del parallelogramma è falsa.

Per $p = 2$, già sappiamo che $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$ è un prodotto scalare, che induce la norma $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

13.3. SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI FORMATI DA AUTOSOLUZIONI DI PROBLEMI DIFFERENZIALI. FUNZIONI SPECIALI

Consideriamo il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } (0, 1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Come è noto si trova che gli autovalori sono $\lambda = k^2\pi^2$ con $k = 1, 2, 3, \dots$ e le autofunzioni sono $y_k(x) = \sin k\pi x$. Le y_k , normalizzate, costituiscono un sistema ortonormale completo in $\mathcal{L}^2(0, 1)$.

Consideriamo ora le seguenti equazioni:

$$\textbf{Equazione di Legendre: } (1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{in } (-1, 1)$$

$$\textbf{Equazione di Laguerre: } xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 \quad \text{in } (0, +\infty)$$

$$\textbf{Equazione di Hermite: } y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{in } (-\infty, +\infty).$$

Sono tutti casi particolari di un'equazione del tipo:

$$\left(P(x)y' \right)' + \lambda \varrho(x)y = 0 \quad x \in (a, b) \quad (*)$$

come si vede moltiplicando l'equazione di

| | | | | | |
|--------------|------------|-----------|-------------------|---|---------------------------|
| Legendre per | 1 | e ponendo | $p(x) = 1 - x^2$ | e | $\varrho(x) = 1$ |
| Laguerre per | e^{-x} | e ponendo | $p(x) = xe^{-x}$ | e | $\varrho(x) = e^{-x}$ |
| Hermite per | e^{-x^2} | e ponendo | $p(x) = e^{-x^2}$ | e | $\varrho(x) = e^{-x^2}$. |

I polinomi di Legendre, Laguerre, Hermite, che definiremo in seguito, sono particolari autosoluzioni (polinomiali) delle corrispondenti equazioni, relative ad autovalori distinti.

Mostriamo che 2 autosoluzioni polinomiali u e v della (*) relative ad autovalori distinti λ e μ sono ortogonali nello spazio \mathcal{L}^2 "pesato" $\mathcal{L}^2(\varrho(x)dx)$ su (a, b) . Infatti:

$$(pu')' + \lambda \varrho u = 0$$

$$(pv')' + u\varrho v = 0.$$

Moltiplicando la 1^a equazione per v , la 2^a per u , sottraendo membro a membro si ha:

$$v(pu')' - u(pv')' + (\lambda - \mu)\varrho uv = 0.$$

Integrando su (a, b) e integrando per parti, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (u'pv' - v'pu') dx + [p(x)(u'v - uv')(x)]_a^b + (\lambda - \mu) \int_a^b uv\varrho dx = \\ &= [p(b)f(b) - p(a)f(a)] + (\lambda - \mu) \int_a^b uv\varrho dx, \end{aligned}$$

avendo posto $f = u'v - uv'$. Mostriamo che il termine tra parentesi quadre si annulla, da cui, se $\lambda \neq \mu$, si ha:

$$\int_a^b u(x)v(x)\varrho(x) dx = 0,$$

cioè u e v ortogonali in $\mathcal{L}^2(\varrho(x)dx)$.

u e v sono polinomi perciò f è un polinomio.

Caso di Legendre: $p(1)f(1) - p(-1)f(-1) = 0$ perché $p(1) = p(-1) = 0$ (e f è limitata in 1 e -1).

Caso di Laguerre. In 0 p si annulla e f è limitata.

Per $x \rightarrow +\infty$ $(pf)(x) = (\text{polinomio}) \cdot e^{-x} \rightarrow 0$.

Caso di Hermite. Per $x \rightarrow \pm\infty$ $f(x)p(x) = (\text{polinomio}) \cdot e^{-x^2} \rightarrow 0$.

Dunque:

i polinomi di Legendre sono ortogonali in $\mathcal{L}^2((-1,1), dx)$;

i polinomi di Laguerre sono ortogonali in $\mathcal{L}^2((0, +\infty), e^{-x}dx)$;

i polinomi di Hermite sono ortogonali in $\mathcal{L}^2((- \infty, +\infty), e^{-x^2}dx)$.

Si dimostra che questi sistemi, normalizzati, risultano anche completi negli spazi corrispondenti.

Vediamo ora come si determinano, dalle equazioni corrispondenti, i polinomi di Legendre, Laguerre, Hermite.

13.3.1. POLINOMI DI LEGENDRE

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Cerchiamo soluzioni sotto forma di serie di potenze:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k.$$

Sostituendo nell'equazione e raccogliendo i termini simili si trova:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} [(k+1)(k+2)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k]x^k +$$

$$+ 2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \lambda a_0 + \lambda a_1x = 0,$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{\lambda}{2} a_0 \\ a_3 = \frac{2-\lambda}{6} a_1 \\ a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Si vede che la 3^a equazione riassorbe le prime 2, se si

Fissati arbitrariamente a_0 e a_1 , risultano determinati tutti i coefficienti. Vogliamo scegliere a_0 , a_1 , λ in modo che la soluzione esista e abbia una forma piuttosto semplice. Anzitutto sciegliendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, o viceversa, otteniamo una serie con solo termini dispari, o pari. In secondo luogo, se poniamo $\lambda = n(n+1)$ si vede che $a_{n+2} = 0$, e dunque $a_{n+2+2k} = 0 \quad \forall k$. Se dunque scegliamo $\lambda = n(n+1)$ e

$$\begin{cases} a_0 = 0 & \text{se } n \text{ dispari;} \\ a_1 = 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ a_1 = 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (*)$$

troviamo una serie contenente solo termini di grado dispari o pari, che si arresta col termine di grado n , ossia un polinomio di grado n , contenente potenze pari o

dispari (a seconda che n sia pari o dispari).

Chiamiamo $P_n(x)$ questo polinomio, n -esimo polinomio di Legendre; per costruzione, $P_n(x)$ è autosoluzione dell'equazione di Legendre relativa all'autovalore $\lambda = n(n+1)$.

Determiniamo come esempio i primi polinomi di Legendre, usando le (*) e la formula:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k.$$

$$P_0(x) = 1.$$

$$P_1(x) = x.$$

Per P_2 , calcoliamo $a_2 = \{k=0 \ n=2\} = -\frac{2 \cdot 3}{2} = -3$.

$$P_2(x) = 1 - 3x^2.$$

Per P_3 , calcoliamo $a_3 = \{k=1 \ n=3\} = \frac{2 - 3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{3}$.

$$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3.$$

Per P_4 , calcoliamo $a_2 = \{k=0 \ n=4\} = -\frac{20}{2} = -10$;

$$a_4 = \{k=2 \ n=4\} = \frac{6 - 20}{3 \cdot 4} \cdot (-10) = \frac{35}{3}.$$

$$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

ecc.

Osservazione 6. I polinomi così trovati sono tra loro ortogonali, in quanto autosoluzioni dell'equazione di Legendre relative ad autovalori distinti. Non sono però normalizzati. (Potremmo chiamare n -esimo polinomio di Legendre qualunque polinomio del tipo $c \cdot P_n(x)$ con $c \neq 0$).

Vediamo ora un altro modo per caratterizzare i polinomi di Legendre. Consideriamo il polinomio x^n . Chiaramente questo si può scrivere come combinazione lineare di $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ ossia:

$$x^n \in \mathcal{L}\{P_0, P_1, \dots, P_n\}.$$

Ad esempio, da $P_0 = 1$, $P_2 = 1 - 3x^2$, si ricava: $x^2 = \frac{1}{3}(P_0 - P_2)$.

Perciò (poiché i P_n sono tra loro ortogonali) si ha che $x^k \perp P_n \forall k < n$. Da questo segue che:

i polinomi di Legendre si possono ottenere ortonormalizzando in $\mathcal{L}^2(-1,1)$ le potenze x^n .

Esercizio 7. Ottenere i primi polinomi di Legendre a questo modo.

$$\left(\int_{-1}^1 1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\int_{-1}^1 |x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$$\langle x^2, P_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$x^2 - \langle x^2, P_0 \rangle P_0 = x^2 - \frac{1}{3};$$

$$\left(\int_{-1}^1 |x^2 - \frac{1}{3}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$P_2(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1)$$

ecc.

Si possono dare altre formule di rappresentazione per i polinomi di Legendre. Una è l'espressione esplicita:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)! (k!)^2 2^k} (x-1)^k.$$

I $P_n(x)$ assegnati da questa formula *non sono già normalizzati*. Un'altra formula è la *formula di Rodriguez*:

$$P_n(x) = c_n \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

dove la costante c_n vale $\frac{1}{2^n n!}$ se i P_n sono assegnati dalla formula precedente, mentre $c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!}$ se si vogliono i P_n normalizzati. La formula di Rodriguez si dimostra al seguente modo.

1. Si prova che $\forall k < n$, x^k è ortogonale a $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$.

Questo si mostra mediante successive integrazioni per parti, per induzione su n .

2. Allora, poiché $\mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^k\} = \mathcal{L}\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$, si ha che, essendo

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

un polinomio di grado n , dev'essere multiplo di P_n . Dunque la formula è dimostrata, con c_n da determinarsi.

3. Confrontiamo il coefficiente del termine x^n nell'espressione esplicita dei P_n e in $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. Troviamo:

13. Spazi di Hilbert

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} = c_n \frac{(2n)!}{n!}, \text{ da cui } c_n = \frac{1}{2^n n!}.$$

4. Normalizziamo ora i P_n .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} x^n dx = \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n x^n dx. \end{aligned}$$

Con successive integrazioni per parti si trova:

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n x^n dx = (-)^n n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

Ancora con integrazioni per parti si trova:

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-)^n \frac{n! 2^n}{(2n-1)!!} \frac{2}{2n+1}$$

(dove il simbolo $(2n+1)!!$ indica $(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdots$). Osservare che

$(2n)! = (2n-1)!! \cdot 2^n \cdot n!$. Allora:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(2^n n!)^2} \cdot n! \frac{(n! 2^n)^2}{(2^n)!!} \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

Perciò i $P_n(x)$ normalizzati sono:

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Esercizio 8. Scrivere i primi polinomi di Legendre, in forma normalizzata, usando la formula di Rodriguez.

Si trova: (v. grafici fig. 13.2)

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x)$$

ecc.

Come abbiamo detto, i $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ sono un sistema ortonormale completo in $L^2(-1,1)$. Perciò ad ogni $f \in L^2(-1,1)$ si associa la serie:

$$\sum_0^{\infty} \langle f, P_n \rangle P_n$$

che converge in $L^2(-1,1)$. La somma parziale n -esima della serie rappresenta il polinomio di grado n che meglio approssima f in $L^2(-1,1)$.

Esercizio 9. Sia $f(x) = \sin \pi x$. Qual è il polinomio di 3º grado che dà la migliore approssimazione di f in $L^2(-1,1)$?

È la proiezione di f sullo spazio $L\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$.

Calcolo $\langle f, P_i \rangle$ per $i = 0, \dots, 3$.

$\langle f, P_0 \rangle = \langle f, P_2 \rangle = 0$ perché f è dispari;

$$\langle f, P_1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x \sin \pi x \, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{\pi};$$

$$\langle f, P_3 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x) \sin \pi x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \left\{ 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} \right) - 3 \cdot \frac{2}{\pi} \right\} = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{30}{\pi^3} \right).$$

Il polinomio cercato è:

$$\begin{aligned} L(x) &= \langle f, P_1 \rangle \cdot P_1 + \langle f, P_3 \rangle \cdot P_3 = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x + \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{30}{\pi^3} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x) = \\ &= x \left[\frac{3}{\pi} - \frac{21}{2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{15}{\pi^3} \right) \right] + \frac{35}{2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{15}{\pi^3} \right) x^3 \simeq 2,7 \cdot x - 2,9 \cdot x^3. \end{aligned}$$

È istruttivo confrontare il grafico di $\sin \pi x$ con il grafico del polinomio di Legendre approssimante e con il grafico del polinomio di Taylor (arrestato al 3° ordine, centrato nell'origine). Appare evidente la differenza tra un buon metodo di approssimazione globale e un buon metodo di approssimazione locale.
(v. fig. 13.3).

13.3.2. POLINOMI DI LAGUERRE

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Procediamo come nel caso dell'equazione di Legendre, cercando la soluzione nella forma di serie di potenze:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Fatti i calcoli, si trova per i coefficienti l'espressione:

$$c_{n+1} = \frac{n-\lambda}{(n+1)^2} c_n \quad \text{per } n \geq 0, \text{ che dà:}$$

$$c_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^n \frac{k-\lambda}{(k+1)^2} \right) \cdot c_0.$$

Se vogliamo avere soluzioni polinomiali, dovremo porre $\lambda = m$ con m intero non negativo. Si trova allora $c_n = 0 \quad \forall n > m$ e:

$$c_n = (-)^n \left(\frac{m}{n} \right) \frac{1}{n!} c_0 \quad \text{per } n \leq m$$

L' m -esimo polinomio di Laguerre, autosoluzione dell'equazione differenziale relativa all'autovalore $\lambda = m$, ha allora la forma:

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^m (-)^k \left(\frac{m}{n} \right) \frac{x^k}{k!}$$

(dove si è posto $c_0 = 1$).

Per quanto visto in precedenza questi polinomi sono tra loro ortogonali in $L^2((0, +\infty), e^{-x} dx)$. Risulta utile anche la seguente formula, che assegna i polinomi come derivate di una funzione generatrice:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Per dimostrare la formula, si procede analogamente al caso della formula di Rodriguez per i polinomi di Legendre:

1. Si osserva che lo spazio lineare generato da L_0, L_1, \dots, L_n coincide con quello generato da $1, x, \dots, x^n$.
2. Si mostra che $e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ è ortogonale a $x^k \quad \forall k < n$. (Perciò, essendo questo un polinomio di grado n , deve essere multiplo di L_n). Per fare questo si

calcola:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \cdot x^k dx$$

integrando per parti k volte.

3. Una volta noto che $L_n(x) = c_n \cdot e^x \frac{dx^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$, occorre determinare la costante c_n . Dall'espressione esplicita degli $L_n(x)$ si vede che $L_n(0) = 1$. Un calcolo diretto mostra che:

$$e^x \frac{dx^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)|_{x=0} = n!$$

Dunque $c_n = \frac{1}{n!}$.

Con ciò la formula è dimostrata.

Occorre ora calcolare i coefficienti di normalizzazione, cioè:

$$\|L_n\|_{L^2(0, +\infty), e^{-x} dx}^2 = \int_0^{+\infty} L_n(x)^2 e^{-x} dx.$$

Poiché $L_n(x) = \frac{(-)^n}{n!} x^n + (\text{termini di ordine inferiore})$ e $x^k \perp L_n(x)$ per $k < n$, l'integrale scritto è uguale a:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(-)^n}{n!} x^n \cdot L_n(x) e^{-x} dx &= \frac{(-)^n}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} x^n \frac{dx^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) dx = \\ &= (\text{con } n \text{ integrazioni per parti}) = \frac{(-)^n}{(n!)^2} \cdot n! \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \\ &= (\text{con } n \text{ integrazioni per parti}) = \frac{(-)^n}{n!} \cdot (-)^n \cdot n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \end{aligned}$$

Perciò

$$\|L_n\|^2 = 1,$$

ossia gli L_n assegnati dalle formule precedenti sono già normalizzati.

Esercizio 10. Scrivere i primi polinomi di Laguerre, utilizzando sia la 1^a che la 2^a formula vista.

Si trova:

$$L_0(x) = 1;$$

$$L_1(x) = 1 - x;$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2};$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6};$$

$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{24};$$

ecc.

Esercizio 11. Scrivere le prime potenze 1, x , x^2 , ..., come combinazione lineare di polinomi di Laguerre.

$$1 = L_0(x);$$

$$x = L_0 - L_1;$$

$$x^2 = 2L_2 - 2 + 4x = 2L_2 - 4L_1 + 2L_0;$$

$$x^3 = 6(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - L_3) = (...) = 6(-L_3 + 3L_2 - 3L_1 + L_0);$$

$$x^n = n! \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} L_k.$$

Esercizio 12. Approssimare la curva x^4 con un polinomio di 3^o grado, in $L^2((0, +\infty), e^{-x} dx)$.

Dobbiamo calcolare lo sviluppo fino al 3^o ordine di x^4 in serie di Polinomi

di Laguerre. Poiché:

$$x^4 = 4! (L_0 - 4L_1 + 6L_2 - 4L_3 + L_4),$$

lo sviluppo al 3° ordine sarà:

$$4! (L_0 - 4L_1 + 6L_2 - 4L_3) = (...) = 4! (-1 + 4x - 3x^2 + \frac{2}{3}x^3).$$

Questo è il polinomio $P(x)$ cercato.

Per visualizzare la distanza in $L^2((0, +\infty), e^{-x}dx)$ tra x^4 e $P(x)$, si possono confrontare i grafici di $e^{-x/2} x^4$ e $e^{-x/2} P(x)$. (v. fig. 13.5). (v. anche i grafici delle funzioni di Laguerre, $e^{-x/2} L_n(x)$, figg. 13.4).

13.3.3. POLINOMI DI HERMITE

Ricordiamo che l'equazione di Hermite è:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Invece di risolvere l'equazione per serie, come nei casi precedenti, verifichiamo che i polinomi di Hermite, definiti dalla formula:

$$H_n(x) = (-)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

sono autosoluzioni dell'equazione, relativa agli autovalori $\lambda = 2n$ (n intero non negativo). Per verificare questo, stabiliamo anzitutto la seguente formula di ricorrenza:

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \tag{*}$$

Infatti, dalla definizione di $H_n(x)$ si ha:

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-)^n e^{x^2} \left(2x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \right) \\ &= 2x H_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

□

Usando della (*), dimostriamo ora, per induzione su n , che H_n soddisfa l'equazione:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

Infatti: per $n = 0$ si ha $H_0 = 1$, e l'equazione è soddisfatta; sia vero che $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$, e dimostriamo l'analogia per H_{n+1} .

Dalla formula di ricorrenza ho:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n - H_n';$$

$$H_{n+1}'(x) = 2H_n + 2xH_n' - H_n'' = (\text{per l'ipotesi induttiva})$$

$$= -(H_n'' - 2xH_n') + 2H_n = 2(n+1)H_n;$$

$$H_{n+1}'' = 2(n+1)H_n';$$

$$H_{n+1}'' - 2xH_{n+1}' + 2(n+1)H_{n+1} =$$

$$= 2(n+1)H_n' - 2x \cdot 2(n+1)H_n + 2(n+1)(2xH_n - H_n') = 0.$$

□

Calcolo dei coefficienti di normalizzazione.

Dalla definizione di $H_n(x)$ si vede che $H_n(x) = c_n x^n + (\text{termini di ordine inferiore})$ con $c_n = (-)^n (-2)^n = 2^n$. Allora, poiché $H_n \perp x^k$ se $k < n$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx &= 2^n \int_{\mathbb{R}} H_n(x) x^n e^{-x^2} dx = \\ &= (-)^n 2^n \int_{\mathbb{R}} x^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx = (\text{con } n \text{ integrazioni per parti}) = \end{aligned}$$

$$= (-)^n 2^n \cdot (-)^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

Dunque

$$\| H_n \|_{L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)}^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

Data una funzione f , calcolati i coefficienti

$$\hat{f}_n = \langle f, H_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx,$$

$$\text{si ha che } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x).$$

Esercizio 13. Scrivere, in base alla definizione, i primi polinomi di Hermite.

Si trova:

$$H_0 = 1;$$

$$H_1 = 2x;$$

$$H_2 = 4x^2 - 2;$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x;$$

$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Esercizio 14. Scrivere le prime potenze di x come combinazione lineare dei polinomi di Hermite.

$$1 = H_0;$$

$$x = \frac{1}{2} H_1;$$

$$x^2 = \frac{1}{4}H_2 + \frac{1}{2}H_0;$$

$$x^3 = \frac{1}{8}H_3 + \frac{3}{4}H_1;$$

$$x^4 = \frac{1}{16}H_4 + \frac{3}{4}H_2 + \frac{3}{4}H_0.$$

Esercizio 15. Approssimare la funzione $y = x^4$ con un polinomio di 2º grado, in $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$.

Poiché $x^4 = \frac{1}{16}H_4 + \frac{3}{4}H_2 + \frac{3}{4}H_0$, la migliore approssimazione di 2º grado sarà:

$$P(x) = \frac{3}{4}H_2 + \frac{3}{4}H_0 = 3x^2 - \frac{3}{4}.$$

Per visualizzare la distanza tra $P(x)$ e x^4 in $L^2(e^{-x^2} dx)$ si possono confrontare i grafici di $P(x) e^{-x^2/2}$ e $x^4 e^{-x^2/2}$. (v. fig 14.7). (v. anche grafici funzioni di Hermite figg. 14.6).

fig. 13.1 (v. esercizio 2)

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = 0,15e^x + 0,85 \sin x$$

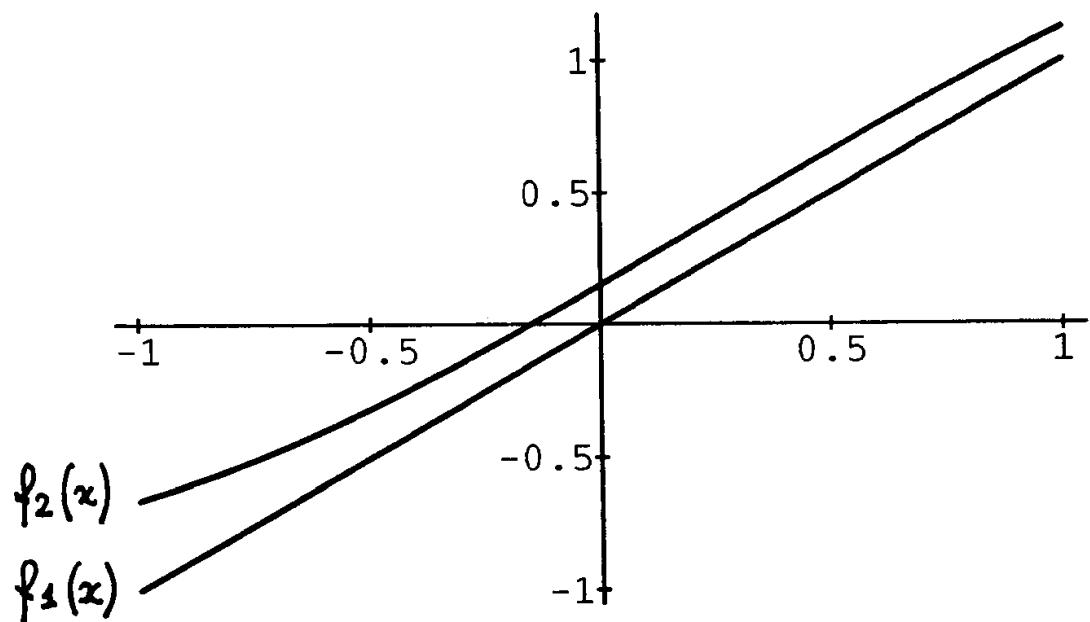


fig. 13.2

Grafici dei primi Polinomi di Legendre

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \simeq 1,22 x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) \simeq 2,37 x^2 - 0,79$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x) \simeq 4,68 x^3 - 2,81 x$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35x^4 - 30x^2 + 3) \simeq 9,28 x^4 - 7,95 x^2 + 0,8.$$

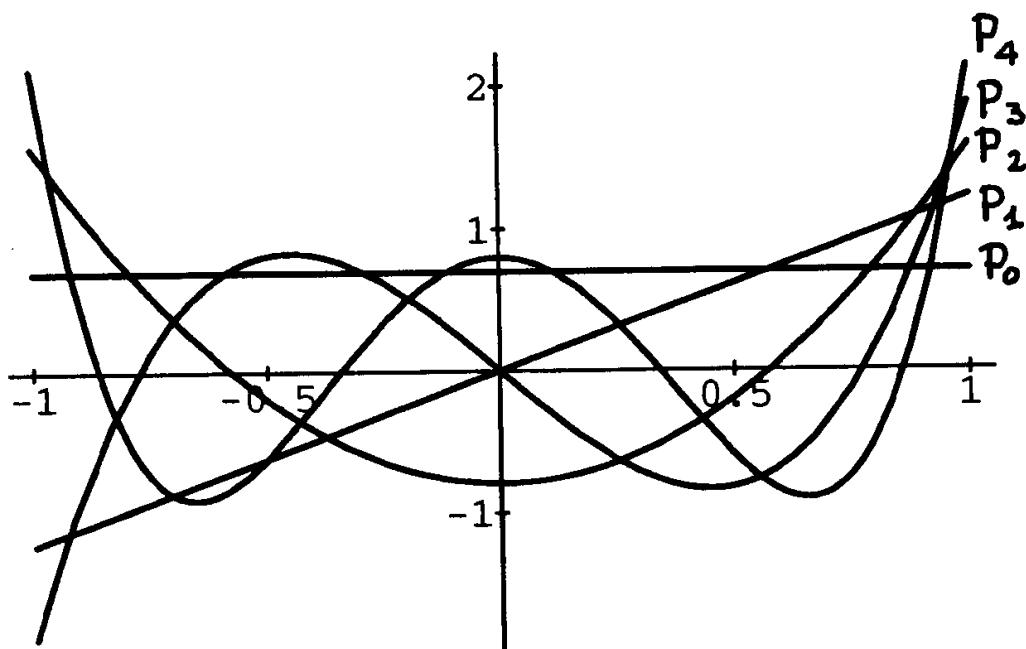


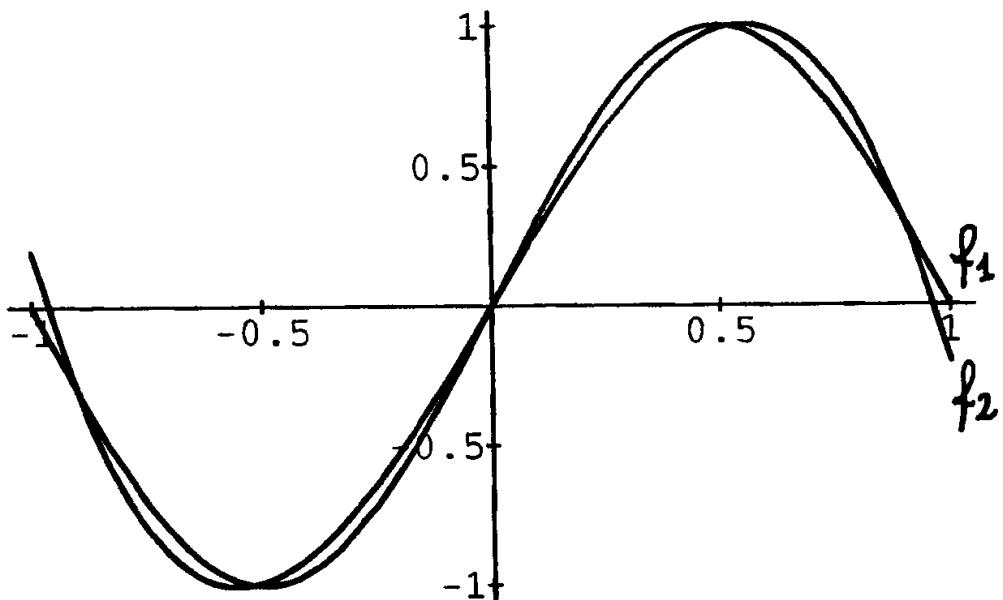
fig. 13.3 (v. esercizio 8)

$$f_1(x) = \sin \pi x$$

funzione da approssimare

$$f_2(x) = 2,7x - 2,9x^3$$

approssimante al 3^o ordine con polinomi di Legendre



$$f_1(x) = \sin \pi x$$

funzione da approssimare

$$f_2(x) = \pi x - \frac{\pi^3}{6} x^3$$

approssimante al 3^o ordine con polinomio di MacLaurin.

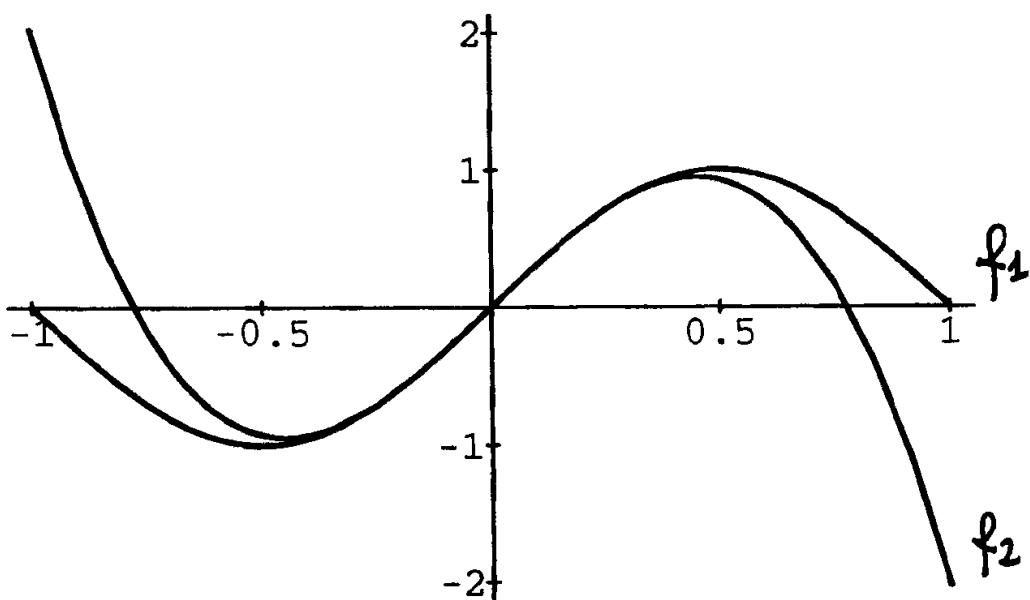
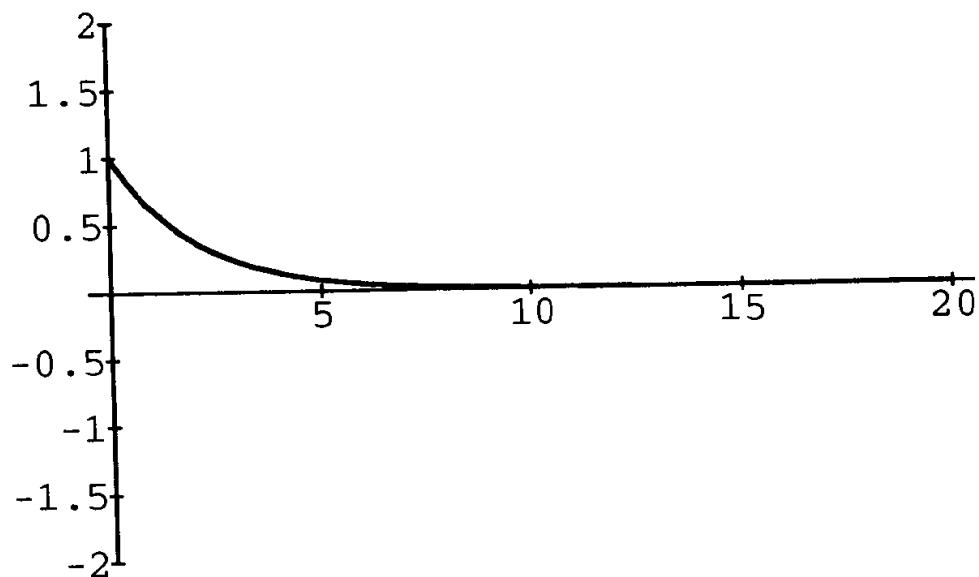


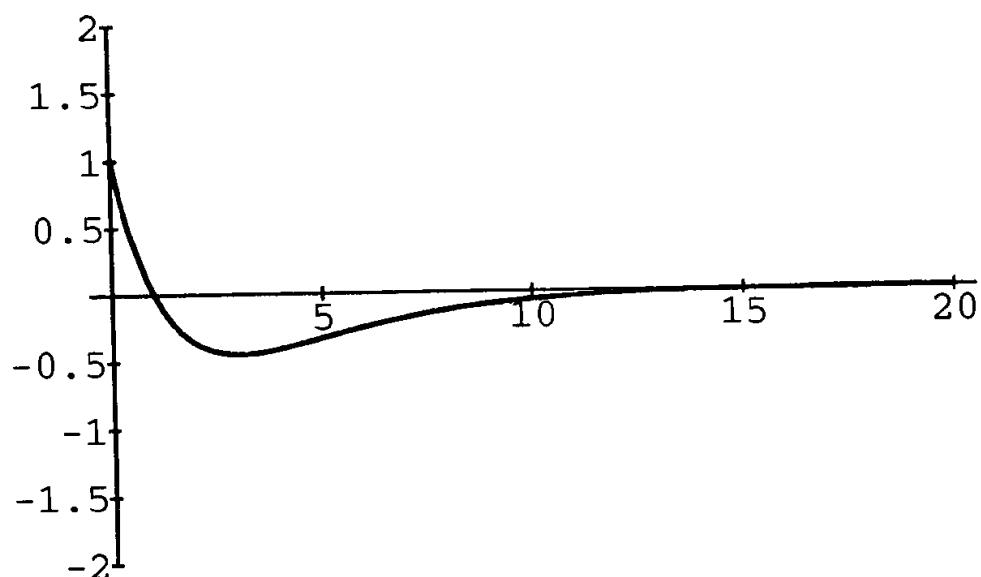
fig. 13.4

Grafici delle prime funzioni di Laguerre: $e^{-x/2} L_n(x)$

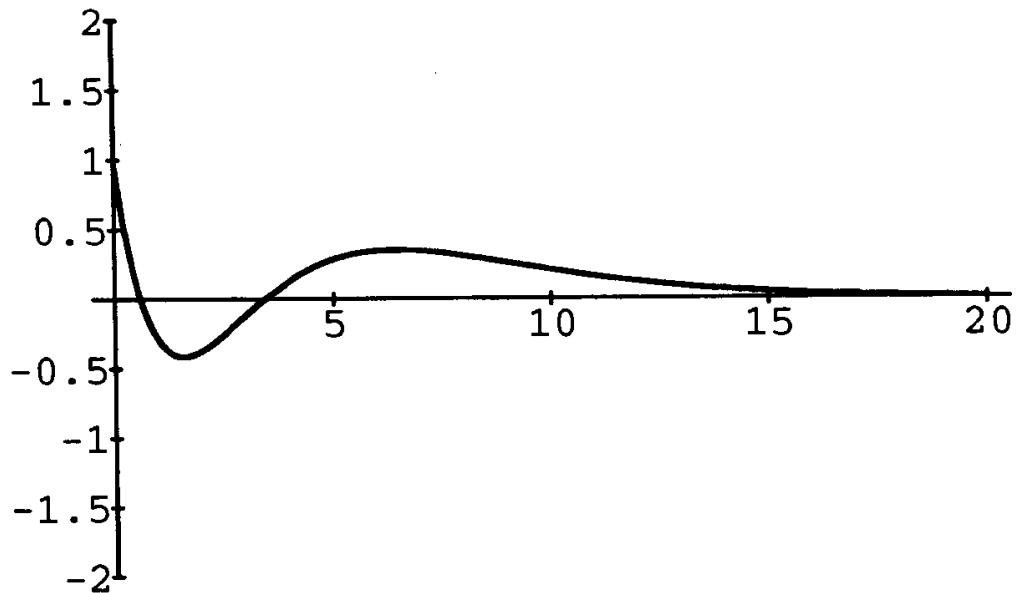
$$n=0 \quad e^{-x/2}$$



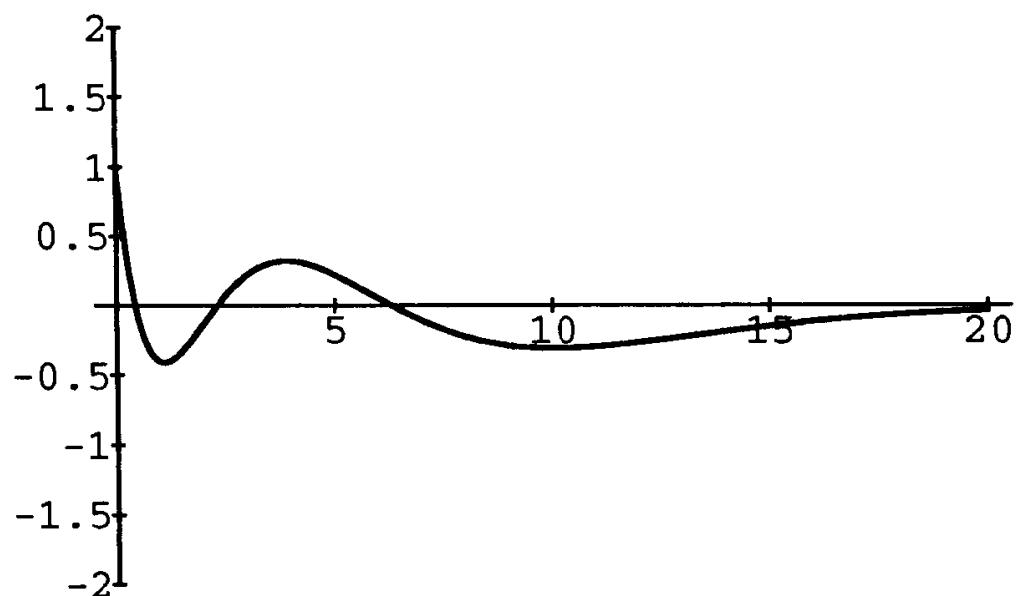
$$n=1 \quad e^{-x/2}(1-x)$$



$$n = 2 \quad e^{-x/2} \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2} \right)$$



$$n = 3 \quad e^{-x/2} \left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right)$$



$$n=4 \quad e^{-x/2} \left(1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{24} \right)$$

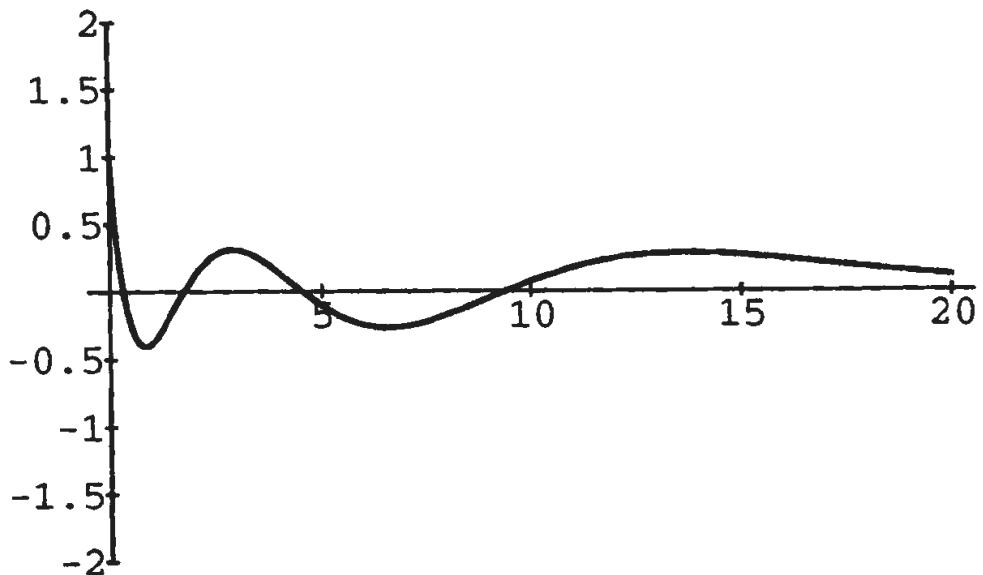


fig. 13.5 (v. esercizio 12)

$$f_1(x) = e^{-x/2} x^4$$

$$f_2(x) = e^{-x/2} (-24 + 96x - 72x^2 + 16x^3)$$

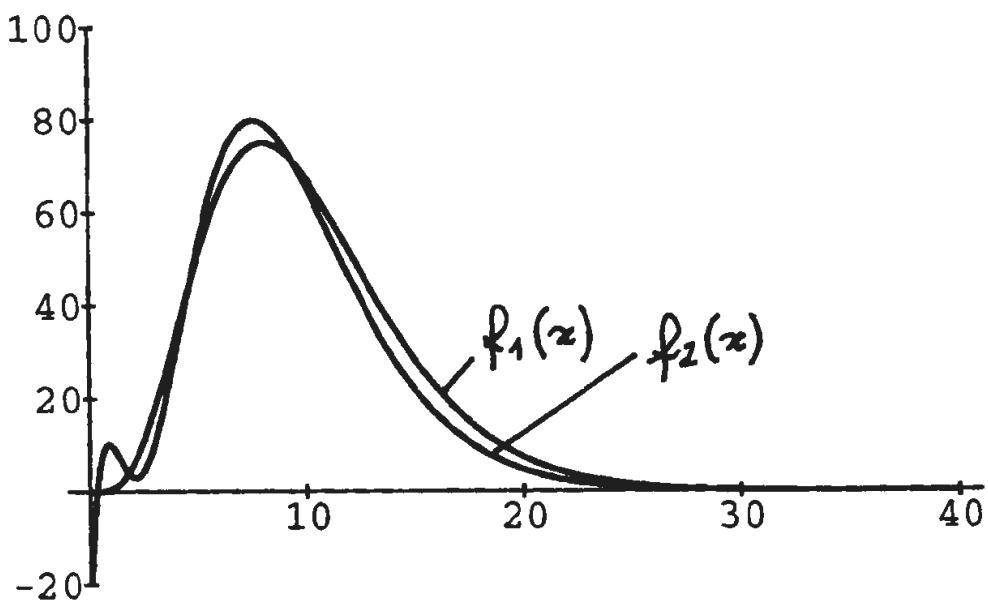
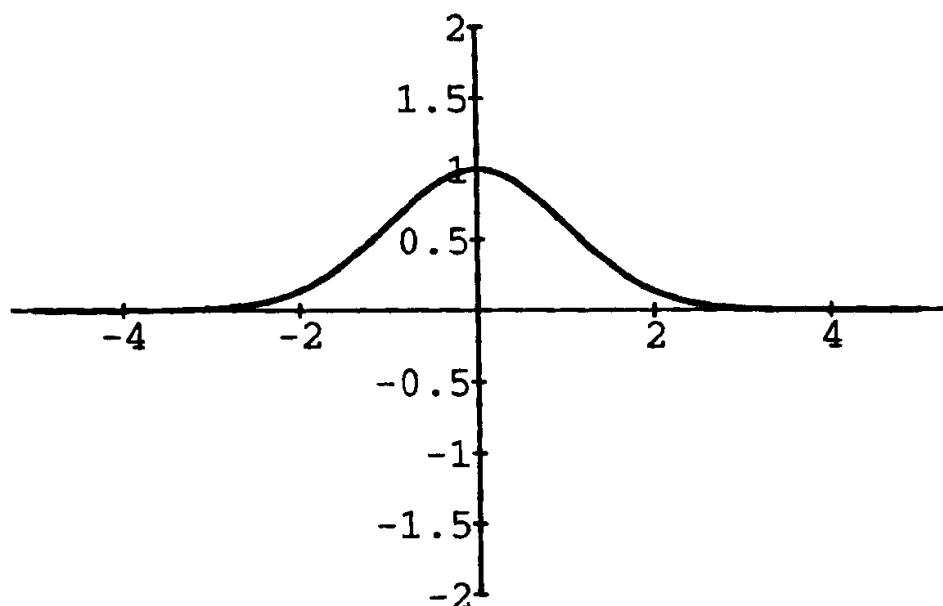
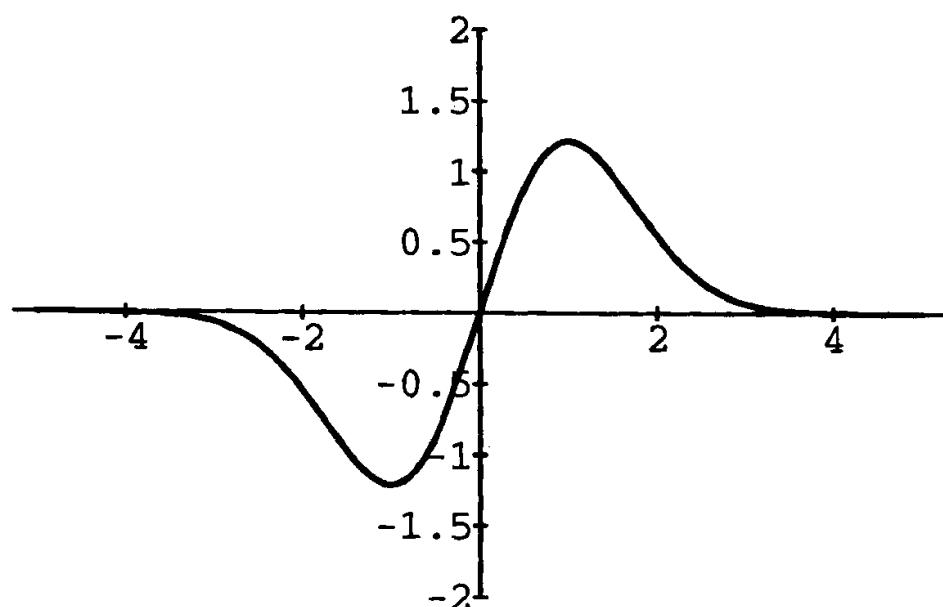


fig. 13.6
Grafici delle prime funzioni di Hermite: $e^{-x^2/2} H_n(x)$

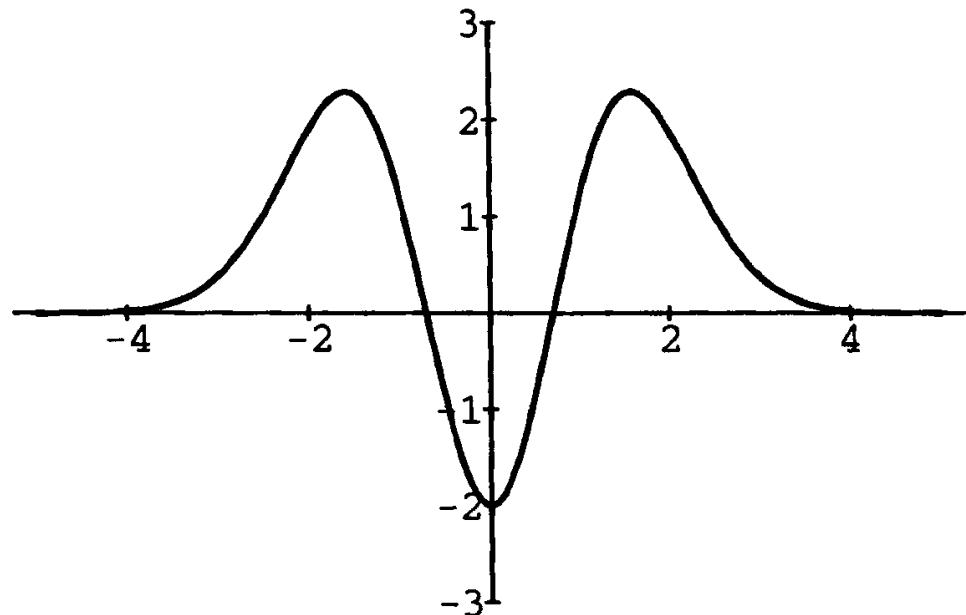
$$n = 0 \quad e^{-x^2/2}$$



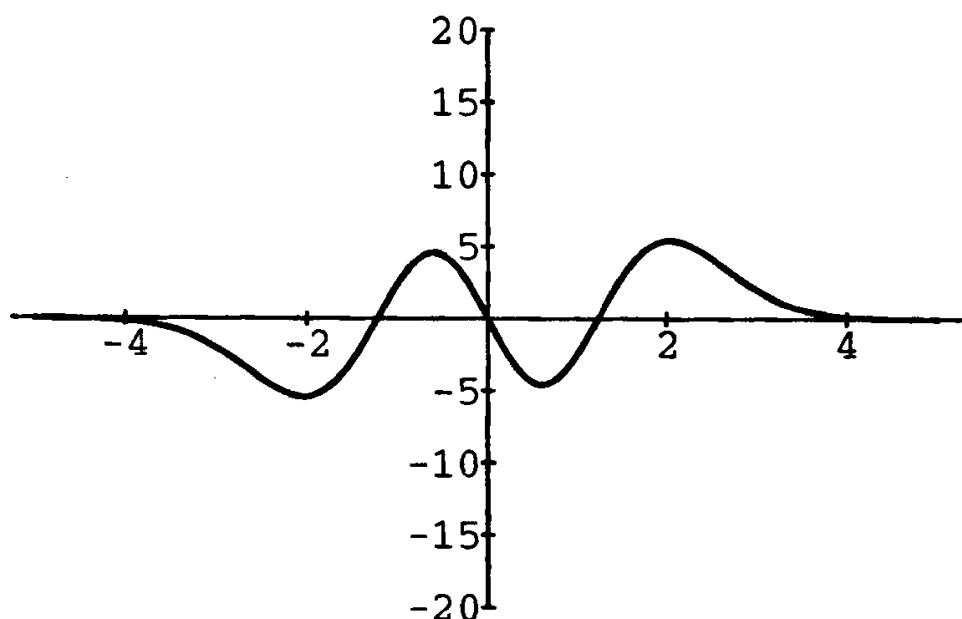
$$n = 1 \quad e^{-x^2/2}(2x)$$



$$n=2 \quad e^{-x^2/2} (4x^2 - 2)$$



$$n=3 \quad e^{-x^2/2} (8x^3 - 12x)$$



$$n = 4 \quad e^{-x^2/2} (16x^4 - 48x^2 + 12)$$

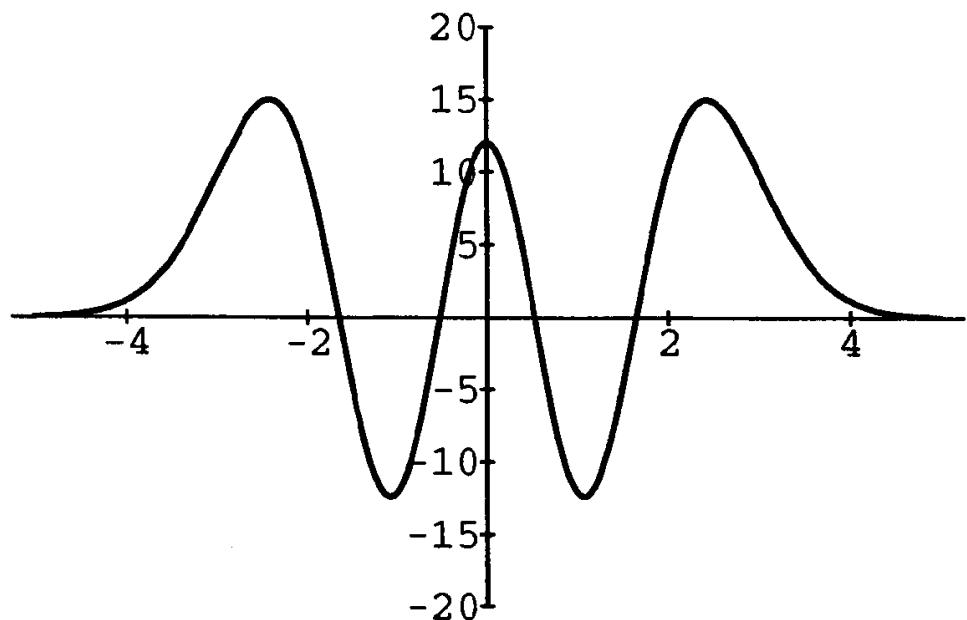
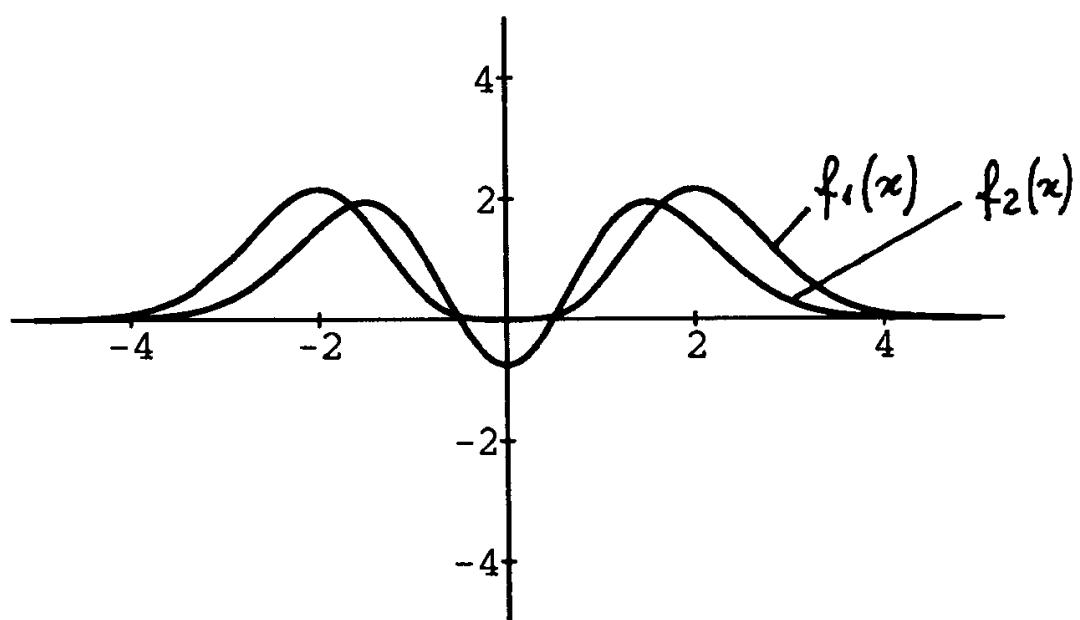


fig. 13.7 (v. esercizio 15)

$$f_1(x) = e^{-x^2/2} x^4$$

$$f_2(x) = e^{-x^2/2} \left(3x^2 - \frac{3}{4}\right)$$



14. LA TRASFORMATA DI LAPLACE

14.1 PRIME PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Quella che segue è una breve esposizione dei primi elementi della teoria della trasformata di Laplace. Nello schema qui seguito si farà uso costantemente delle proprietà dell'integrale di Lebesgue; tutti gli integrali scritti andranno intesi nel senso di Lebesgue; in particolare, questo significa che dovranno convergere assolutamente.

Sia $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) una funzione misurabile (oppure: sia $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tale che $f(x) = 0 \forall x < 0$). f si dice Laplace-trasformabile se esiste $s_0 \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 x} f(x) dx \quad (1)$$

converge. L'integrale (1) si chiamerà $\mathcal{L}f(s_0)$, trasformata di Laplace di f in s_0 . Poiché, per $x > 0$ e $s > s_0$, $e^{-sx} |f(x)| \leq e^{-s_0 x} |f(x)|$, se esiste $\mathcal{L}f(s_0)$ allora esiste $\mathcal{L}f(s) \forall s > s_0$. Poniamo dunque:

$$\lambda(f) = \inf\{s \in \mathbb{R}: \exists \mathcal{L}f(s)\}. \quad (2)$$

$\lambda(f)$ si dirà *ascissa di convergenza* di f .

Osserviamo che, per $s_0 = \lambda(f)$, $\mathcal{L}f(s_0)$ può esistere o non esistere, come si vede dai prossimi

esempi.

1. Sia $f(x) = 1$. Allora $\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx$ esiste $\forall s > 0$, ma non esiste per $s = 0$.

Dunque $\lambda(f) = 0$ e $\mathcal{L}f(0)$ non esiste.

2. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Allora $\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x^2} dx$ esiste se $s \geq 0$, non

esiste se $s < 0$.

Dunque $\lambda(f) = 0$ e $\mathcal{L}f(0)$ esiste.

Certamente però si può affermare che:

- Per ogni $s > \lambda(f)$, esiste $\mathcal{L}f(s)$.

Infatti: se $s > s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R}: \exists \mathcal{L}f(s)\}$, per definizione di estremo inferiore esiste \bar{s} tale che $s_0 \leq \bar{s} < s$, ed esiste $\mathcal{L}f(\bar{s})$. Allora, poiché $s > \bar{s}$, esiste anche $\mathcal{L}f(s)$. □

Vogliamo definire ora $\mathcal{L}f(s)$ anche per valori complessi di s . Poniamo allora $s = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}$) ed estendiamo la definizione di $\mathcal{L}f$ nel modo ovvio:

$$\mathcal{L}f(\sigma + i\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma + i\tau)x} f(x) dx \quad (3)$$

Poiché

$$|e^{-(\sigma + i\tau)x} f(x)| = |e^{-\sigma x} f(x)|$$

(in quanto $|e^{-i\tau x}| = 1$), il valore di τ è ininfluente sulla convergenza dell'integrale (3). Perciò se esiste $\mathcal{L}f(\sigma)$ per un certo $\sigma \in \mathbb{R}$, esiste anche $\mathcal{L}f(\sigma + i\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Si ha allora che:

- se $\lambda(f)$ è l'ascissa di convergenza di f , $\mathcal{L}f(s)$ esiste in tutto il semipiano $\{s \in \mathbb{C}: \Re s > \lambda(f)\}$. Questo semipiano si chiama *semipiano di convergenza*.

Osservazione 3. Quando f non è \mathcal{L} -trasformabile, cioè $\mathcal{L}f(s)$ non esiste per nessun s , diremo anche che $\lambda(f) = +\infty$, e che il semipiano di convergenza è vuoto. Quali sono le funzioni non trasformabili? Per rispondere a questa domanda, cominciamo a osservare che:

- se f è \mathcal{L} -trasformabile, f è localmente integrabile in $(0, +\infty)$ ($f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$), ossia $f \in \mathcal{L}^1(0, k)$ $\forall k < +\infty$. Infatti:

$$\int_0^{+\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \geq \int_0^k |e^{-sx} f(x)| dx \geq e^{-sk} \int_0^k |f(x)| dx$$

da cui, se esiste $\mathcal{L}f(s)$, e quindi il 1° membro è finito, anche l'ultimo membro è finito, ossia $f \in \mathcal{L}^1(0, k)$. \square

Perciò: se f non è localmente integrabile in $(0, +\infty)$, f non è \mathcal{L} -trasformabile.

Esempio 3.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Poiché $\frac{1}{x}$ è una singolarità non integrabile in 0, non esiste $\mathcal{L}f(s)$ per nessun s .

Un'altro motivo per cui $\mathcal{L}f$ può non esistere è il seguente: per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow \infty$ più rapidamente di qualunque funzione del tipo $e^{\alpha x}$.

Esempio 4.

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Si vede subito che $\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx+x^2} dx$ diverge $\forall s \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata di Laplace.

Proposizione 1. \mathcal{L} è un operatore lineare sullo spazio delle funzioni trasformabili. Ossia: se f, g sono \mathcal{L} -trasformabili, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora $c_1 f + c_2 g$ è \mathcal{L} -trasformabile (nell'intersezione dei semipiani di convergenza di f e g) e:

$$\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathcal{L}f + c_2 \mathcal{L}g.$$

(Questo fatto è una conseguenza ovvia della definizione).

Proposizione 2. Se f è \mathcal{L} -trasformabile, $\mathcal{L}f(s)$ è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza. Valgono inoltre le seguenti formule delle derivate:

$$\frac{d^k}{ds^k}(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\left((-x)^k f(x)\right)(s) \quad (4)$$

Dimostrazione. Sia s un punto nel semipiano di convergenza, ossia $\Re s > \lambda(f)$.

Scegliamo 2 numeri reali s_1, s_2 tali che $\Re s > s_1 > s_2 > \lambda(f)$.

Calcoliamo la derivata prima di $\mathcal{L}f$ usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per l'integrale di Lebesgue.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} \left(e^{-sx} f(x) \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-sx} dx = \mathcal{L}(-xf(x))(s). \end{aligned}$$

Per giustificare questo passaggio occorre provare che

$$|xe^{-\bar{s}x}f(x)| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1(0, +\infty)$$

almeno per \bar{s} in un certo intorno di s . Sia $\bar{s} > s_1$. Allora:

$$\begin{aligned} |-xe^{-\bar{s}x}f(x)| &= |xe^{-(\bar{s}-s_2)x} e^{-s_2x}f(x)| \leq \\ &\leq xe^{-(s_1-s_2)x} \cdot e^{-s_2x} |f(x)| \equiv g(x). \end{aligned}$$

Poiché $s_1 - s_2 > 0$, $xe^{-(s_1-s_2)x} \leq \text{cost. } \forall x \geq 0$. Poiché $s_2 > \lambda(f)$, $e^{-s_2x} |f(x)| \in \mathcal{L}^1(0, +\infty)$. Dunque la funzione $g(x)$ (che non dipende da s) è integrabile in $(0, +\infty)$ e $|-xe^{-\bar{s}x}f(x)| \leq g(x) \quad \forall \bar{s} > s_1$, ossia $\forall \bar{s}$ in un opportuno intorno di s .

Segue che $\mathcal{L}f(s)$ è derivabile in senso complesso nel semipiano di convergenza. Abbiamo dimostrato la (4) per $k = 1$; analogamente si dimostra per k qualunque. \square

Proposizione 3. Se f è \mathcal{L} -trasformabile, $\mathcal{L}f(s) \rightarrow 0$ per $\Re s \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Segue dal teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue. Se $\operatorname{Re} s > s_0 > \lambda(f)$ si ha:

$$|e^{-sx}f(x)| \leq e^{-s_0 x} |f(x)|$$

Il 2° membro è una funzione integrabile su $(0, +\infty)$ (perché esiste $\mathcal{L}f(s_0)$) e indipendente da s . Allora per il teorema citato si ha:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} e^{-sx} f(x) dx = 0$$

ossia:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(s) = 0. \quad \square$$

I prossimi risultati saranno fondamentali nelle applicazioni della trasformata di Laplace alle equazioni integro-differenziali.

Proposizione 4. Se f è una funzione assolutamente continua e f' è trasformabile, allora anche f è trasformabile e vale la:

$$\mathcal{L}(f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0). \quad (5)$$

Osservazione. Ricordiamo che le funzioni assolutamente continue (A. C.) sono le funzioni \mathcal{L}^1 derivabili quasi ovunque, con derivata localmente integrabile, e per le quali vale il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \quad \forall a, b$$

(Ad. es., se $f \in \mathcal{C}^1, f \in \text{A.C.}$). Se $f, g \in \text{AC}$, si dimostra che vale per esse la formula di integrazione per parti usuale:

$$\int_a^b f'g = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg'.$$

Dimostrazione della proposizione 4. Proviamo la proposizione sotto le 2 ipotesi

aggiuntive:

- a) f è trasformabile;
- b) $\forall s > \lambda(f), e^{-sx} f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Sotto queste ipotesi si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k f'(x) e^{-sx} dx = \\
 &= [\text{per parti}] = \lim_{k \rightarrow +\infty} [f(k) e^{-sk} - f(0) - \int_0^k f(x) \cdot (-s)e^{-sx} dx] = \\
 &= (\text{per l'ipotesi b}) = -f(0) + s \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k e^{-sx} f(x) dx = \\
 &= (\text{per l'ipotesi a}) = s \mathcal{L}f(s) - f(0).
 \end{aligned}$$

Si può dimostrare (non lo facciamo) che: se f' è trasformabile e $f \in AC$, allora necessariamente $e^{-sx} f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ (dunque vale la b) e f è trasformabile (dunque vale la a). Perciò la proposizione vale nella forma enunciata. \square

Proposizione 5. Sia $f \in C^{n-1}$, $f^{(n-1)} \in AC$, $f^{(n)}$ trasformabile. Allora f è trasformabile e:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n (\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) + \dots \\
 &\quad \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).
 \end{aligned} \tag{6}$$

(Segue dalla proposizione precedente).

Ad esempio si ha:

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 (\mathcal{L}f)(s) - s f(0) - f'(0).$$

Proposizione 6. Siano f, g trasformabili. Poniamo:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

Allora $f*g$ è trasformabile (con $\lambda(f*g) \leq \max(\lambda(f), \lambda(g))$) e vale la:

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s). \quad (7)$$

(Ricordiamo che il fatto che la *convoluzione finita* $(f*g)$ sia definita quasi ovunque e stia in $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$ ogniqualvolta $f, g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$ è stato provato nel § 11.7).

Dimostrazione. Questo fatto segue dal teorema di Fubini-Tonelli (v. § 11.4).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f*g)(s) &= \int_0^{+\infty} (f*g)(x)e^{-sx}dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx \int_0^x f(x-y)g(y)dy = \\ &\quad (\text{scambiando l'ordine di integrazione}) \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} g(y)dy \int_y^{+\infty} f(x-y)e^{-sx}dx =$$

[eseguendo il cambio di variabile nell'integrale interno:

$$x-y=t; \quad x \in (y, +\infty) \Rightarrow t \in (0, +\infty)]$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} g(y) dy \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} e^{-sy}dt = \\ &= \int_0^{+\infty} g(y)e^{-sy}dy \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = (\mathcal{L}g)(s) \cdot (\mathcal{L}f)(s) \end{aligned}$$

purché sia $\Re s > \lambda(f)$ e $\Re s > \lambda(g)$.

Rimane da giustificare il passaggio in cui abbiamo scambiato l'ordine di integrazione. Per il teorema di Fubini-Tonelli,

$$\int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx$$

quando

$$\int dx \int |f(x,y)| dy$$

converge. Se pensiamo allora di ripetere i passaggi fatti mettendo l'integrandi entro modulo, troviamo che:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} |g(y)| dy \int_y^{+\infty} |f(x-y)| e^{-sx} dx = (...) = \\ & = \int_0^{+\infty} |g(y)| e^{-sy} dy \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-st} dt \end{aligned}$$

e quest'ultima è una quantità finita, grazie alla convergenza assoluta dell'integrale che definisce la trasformata di Laplace. Dunque lo scambio dell'ordine di integrazione è giustificato, e il teorema provato. \square

Infine, enunciamo (senza dimostrazione) i cosiddetti “teoremi del valore iniziale e finale”. Si tratta di risultati che mettono in relazione il comportamento di f nell'origine con il comportamento di $\mathcal{L}f$ a $+\infty$, e viceversa, e sono utili nella determinazione di certe costanti che compaiono risolvendo mediante trasformata di Laplace certi problemi differenziali.

Proposizione 7. Sia $f \in L^1_{loc}(0, +\infty)$, e sia

$$f(x) \sim ax^\alpha \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

con $a \neq 0$, $\Re \alpha > -1$. Allora esiste $\mathcal{L}f(s)$ per $\Re s > 0$ e

$$\mathcal{L}f(s) \sim a \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \text{ per } s \rightarrow 0^+.$$

(Γ è la funzione di Eulero). Osserviamo che l'ipotesi $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ e $f \sim ax^\alpha$ per $x \rightarrow +\infty$ implicano immediatamente l'esistenza di $\mathcal{L}f(s)$ per $\Re s > 0$. Il contenuto del teorema, che non dimostriamo, è la stima asintotica per $\mathcal{L}f(s)$ nell'origine.

In particolare, dal teorema precedente per $\alpha = 0$ segue il:

Corollario 8. Se $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$ e $f(x) \rightarrow a$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $\mathcal{L}f(s) \sim \frac{a}{s}$ per $s \rightarrow 0$. Sinteticamente si può scrivere

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}f(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Proposizione 9. Sia f \mathcal{L} -trasformabile, e sia

$$f(x) \sim bx^\beta \text{ per } x \rightarrow 0,$$

con $b \neq 0$, $\Re \beta > -1$. Allora

$$\mathcal{L}f(s) \sim b \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta + 1}} \text{ per } s \rightarrow +\infty.$$

Per $\beta = 0$ si ha il:

Corollario 10. Sia f \mathcal{L} -trasformabile. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}f(s)$$

se il 1° limite esiste finito.

Una semplice dimostrazione dei due corollari, valida sotto ipotesi più restrittive, si può ottenere utilizzando le formule delle derivate. Supponiamo di essere nelle ipotesi sotto le quali

$$\mathcal{L}(f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0) \tag{8}$$

(v. Proposizione 4), con

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Per la proposizione 3, poiché f' è trasformabile, $\mathcal{L}(f')(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$, da cui (per la (8)) $s\mathcal{L}f(s) - f(0) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$, ossia $s\mathcal{L}f(s) \rightarrow f(0)$, che è il corollario 10. Se poi si passa al limite per $s \rightarrow 0$ nella (8) si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s(\mathcal{L}f)(s) - f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx \\ &= [\text{per il teorema della convergenza dominata, se esiste } \mathcal{L}(f')(0)] = \\ &= \int_0^{+\infty} f'(x) dx = f(+\infty) - f(0). \end{aligned}$$

Dunque:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(\mathcal{L}f)(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

che è il corollario 8. □

In questa breve panoramica sulla teoria della trasformata di Laplace, non ci siamo occupati del problema dell'antitrasformazione, ossia: data una funzione $F(s)$, si può determinare una funzione $f(x)$ tale che $\mathcal{L}f(s) = F(s)$? La risposta a questo problema è strettamente legata alla teoria della trasformata di Fourier, e sarà discussa pertanto in quel contesto (si veda il § 15.7). Non discuteremo perciò qui i risultati relativi all'antitrasformata di Laplace, ma ne faremo uso, rimandando a più tardi la giustificazione dei risultati stessi.

Dalle proprietà dell'antitrasformata di Laplace segue anche un fatto che useremo spesso implicitamente, nel seguito:

- una funzione f è determinata dalla sua trasformata, ossia se $\forall s$ $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s)$, allora $f = g$.

14.2. CALCOLO DI TRASFORMATE

Calcoliamo ora la trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari, e stabiliamo alcune formule operatoriali per il calcolo delle trasformate.

$$1. \quad \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{per } s > 0.$$

Infatti:

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

$$2. \quad \mathcal{L}(f(ax))(s) = \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right) \quad \forall a > 0.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(ax))(s) &= \int_0^{+\infty} f(ax)e^{-sx} dx = [ax = t, a > 0] = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\frac{s}{a}t} \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

$$3. \quad \mathcal{L}(e^{ax})(s) = \frac{1}{s-a} \quad s > a.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^x)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{x(1-s)} dx = \left[\frac{e^{x(1-s)}}{1-s} \right]_0^{+\infty} = \\ &= [\text{per } s > 1] = \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Allora per la (2),

$$\mathcal{L}(e^{ax})(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{\frac{s}{a}-1} = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } s > a.$$

$$4. \quad \mathcal{L}(\sin ax)(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{per } s > 0.$$

14. La trasformata di Laplace

Infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin x)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\left[\frac{e^{x(i-s)}}{1-s} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x(i+s)}}{i+s} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Da questa e la (2) segue la (4).

5. $\mathcal{L}(\cos ax)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ per $s > 0$.

(Si stabilisce in modo analogo alla 4).

6. $\mathcal{L}(\operatorname{Sh} ax)(s) = \frac{a}{s^2-a^2}$ per $s > a > 0$.

Per la (3) e la linearità di \mathcal{L} ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\operatorname{Sh} ax)(s) &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{ax}) - \mathcal{L}(e^{-ax})] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{per } s > a.\end{aligned}$$

7. $\mathcal{L}(\operatorname{Ch} ax)(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$ per $s > a > 0$.

Segue, analogamente alla (6), per linearità dalla (3).

8. $\mathcal{L}(e^{ax}f(x))(s) = (\mathcal{L}f)(s-a)$. (Se $\lambda(f) = s_0$, $\lambda(e^{ax}f(x)) = s_0 + a$).

$$\mathcal{L}(e^{ax}f(x))(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{x(a-s)} dx = \mathcal{L}f(s-a).$$

9. $\mathcal{L}(e^{ax} \sin bx)(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ per $s > a$.

Segue da (4) e (8).

$$10. \quad \mathcal{L}(e^{ax} \cos bx)(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad \text{per } s > a.$$

Segue da (5) e (8).

$$11. \quad \mathcal{L}(x^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{per } s > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^n)(s) &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-sx} dx = [\text{per parti}] = \\ &= \left. \frac{e^{-sx}}{-s} x^n \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{s} n x^{n-1} dx = \frac{n}{s} \mathcal{L}(x^{n-1})(s). \end{aligned}$$

Allora, posto $f_n(s) = \mathcal{L}(x^n)(s)$, sapendo che

$$\begin{cases} f_0(s) = \frac{1}{s} & (\text{v.(1)}) \\ f_n(s) = \frac{n}{s} f_{n-1}(s), \end{cases}$$

per ricorrenza si ottiene la (11).

12. Trasformata della primitiva.

Se f è trasformabile lo è anche la sua primitiva $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ e:

$$\mathcal{L}F(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(s).$$

Infatti. Per le proprietà dell'integrale di Lebesgue, se $f \in L^1_{\text{loc}}(0, +\infty)$, $F \in \text{AC}(0, +\infty)$ e $F'(x) = f(x)$ per q.o. x . Dalla formula delle derivate si ha

$$\mathcal{L}(F')(s) = s \mathcal{L}F(s) - F(0).$$

Ma $F(0) = 0$ e $F' = f$ perciò

14. La trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}f(s) = s\mathcal{L}F(s),$$

da cui la (12).

$$13. \quad \mathcal{L}(x^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad \text{per } s > 0, \operatorname{Re} \alpha > -1.$$

$$(\Gamma \text{ è la funzione di Eulero, } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx).$$

Questa formula generalizza la (11) perché per $\alpha = n$ intero ≥ 0 si ha $\Gamma(n+1) = n!$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^\alpha)(s) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-sx} dx = [sx = t, s > 0] = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{s^\alpha} e^{-t} \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

$$14. \quad \mathcal{L}(\log x)(s) = \frac{\Gamma'(1) - \log s}{s} \quad \text{per } s > 0.$$

Riprendiamo la (13) scritta nella forma:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-sx} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

e deriviamo ambo i membri rispetto ad α (la derivazione sotto segno di integrale si può giustificare). Si ha:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \log x e^{-sx} dx = \frac{\Gamma'(\alpha+1) s^{\alpha+1} - s^{\alpha+1} \log s \Gamma(\alpha+1)}{s^{2(\alpha+1)}}.$$

Se nella precedente si pone $\alpha = 0$ si ha:

$$\int_0^{+\infty} \log x e^{-sx} dx = \frac{\Gamma'(1) s - s \log s \Gamma(1)}{s^2} = \frac{\Gamma'(1) - \log s}{s},$$

che è la (14).

$$15. \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad \text{per } s > 0.$$

Per la (13) per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Si è utilizzato il valore notevole $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, che si ottiene così:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x} = t, \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt] =$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Dalla (15) segue, per la regola di trasformazione della convoluzione, il seguente fatto curioso:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{\pi}{s} = \mathcal{L}(\pi)$$

da cui:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{\sqrt{x}} = \pi \quad \forall x,$$

cioè

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)t}} dt = \pi \quad \forall x.$$

$$16. \quad \mathcal{L}(f(x-a))(s) = e^{-sa} \mathcal{L}f(s) \quad (a > 0).$$

$$\mathcal{L}(f(x-a))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x-a) dx = e^{-sa} \int_{-a}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt =$$

$$= [f \text{ si suppone nulla per } t < 0] = e^{-sa} \mathcal{L}f(s).$$

17. Trasformata di Laplace di funzioni periodiche.

Sia f una funzione periodica di periodo T , definita per $x > 0$ e integrabile su un periodo. Allora:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx \quad \text{per } s > 0.$$

(La formula consente cioè di calcolare l'integrale di Laplace su un periodo anziché su tutto \mathbb{R}^+).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-sx} f(x) dx = \\ &= [x = kT + t] = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-st} e^{-skT} f(kT + t) dt = \end{aligned}$$

[poiché f è periodica, $f(kT + t) = f(t)$]

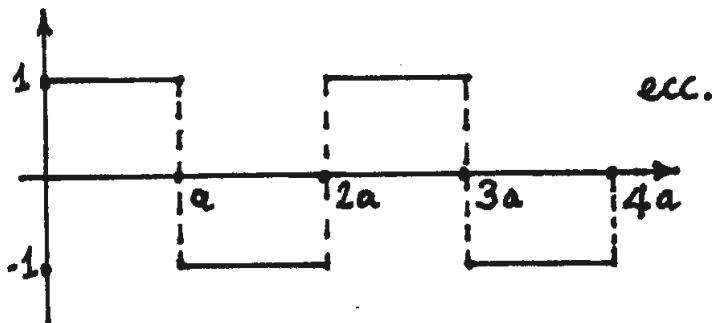
$$\begin{aligned} &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-sT})^k = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Esercizi.

18. Applicando la formula (17), calcolare $\mathcal{L}(|\sin x|)$.

[Soluzione: $\frac{1}{2(1+s^2)} \operatorname{Th}\left(\frac{s\pi}{2}\right)$, per $s > 0$].

19. Sia $f(x)$ l'onda quadra:



Servendosi della formula (17), calcolare $(\mathcal{L}f)(s)$.

$$[\text{Soluzione: } \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-as})^2}{(1 - e^{-2as})}, \text{ per } s > 0].$$

20. Calcolare $\mathcal{L}(\sin \alpha x \sin \beta x)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[Suggerimento: usare le formule di prostaferesi e la trasformata di $\cos(ax)$].

21. Calcolare $\mathcal{L}(x \sin x \sin 2x)$.

[Suggerimento: usare la formula delle derivate per avere:

$$\mathcal{L}(x \sin x \sin 2x)(s) = -\frac{d}{dx} \mathcal{L}(\sin x \sin 2x)(s)$$

e calcolare quest'ultima trasformata con il risultato dell'esercizio precedente]

22. Calcolare $\mathcal{L}(e^{2x} \sin^2 x)$.

[Suggerimento: calcolare $\mathcal{L}(\sin^2 x)$ scrivendo $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, e poi usare la formula per $\mathcal{L}(e^{ax} f(x))(s)$].

**14.3 APPLICAZIONI DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE
AD EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
ED EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI.**

**14.3.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI**

Esempio 1. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + 2u(x) = f(x) & \text{per } x > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

Applichiamo ad ambo i membri la trasformata di Laplace. Ricordando che:

$$\mathcal{L}(u')(s) = s(\mathcal{L}u)(s) - u(0),$$

$$\mathcal{L}(u'')(s) = s^2(\mathcal{L}u)(s) - su(0) - u'(0),$$

si ha, ponendo $U = \mathcal{L}u$ e $F = \mathcal{L}f$:

$$\begin{cases} s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 2sU(s) - 2u(0) + 2U(s) = F(s) \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

$$U(s) \cdot (s^2 + 2s + 2) = F(s)$$

$$U(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2}.$$

Così è determinata U , cioè $\mathcal{L}u$. Dobbiamo quindi antitrasformare il 2º membro. Procediamo così: si cerca una $g(x)$ tale che $\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$. Trovata la g , poiché

$\mathcal{L}u(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) = (\text{per il teorema sulla convoluzione}) = \mathcal{L}(f*g)(s)$, si ha:

$$u(x) = (f*g)(x).$$

Per antitrasformare $\frac{1}{s^2 + 2s + 2}$ osserviamo che

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Confrontando allora con la formula

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin bt)(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2},$$

per $a = -1$, $b = 1$, si ha:

$$\mathcal{L}(e^{-x} \sin x)(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}, \quad \text{quindi } g(x) = e^{-x} \sin x$$

e:

$$u(x) = \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) f(t) dt,$$

formula che assegna la soluzione u per ogni dato f .

Osservazioni. Nella formula finale il dato f compare direttamente, non mediante la sua trasformata. Ossia, la trasformata di Laplace è il metodo con cui si trova la formula risolutiva, la quale non richiede più il calcolo effettivo della trasformata di f e dell'antitrasformata di u .

Notiamo anche che un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti si può sempre risolvere con metodi elementari (integrale generale dell'equazione omogenea + integrale generale dell'equazione non omogenea, che si trova col metodo di variazione delle costanti arbitrarie). Quando f non è specificato però,

la determinazione di un integrale particolare dell'equazione non omogenea con questo metodo porta a calcoli piuttosto laboriosi. Il vantaggio della trasformata di Laplace è soprattutto nel trattare l'equazione non omogenea. Inoltre, si presta bene a risolvere un problema di Cauchy con dati nell'origine, perché questi dati compaiono nella formula delle derivate.

Esempio 2. Risolvere:

$$\begin{cases} u'' + cu = f(x) & \text{per } x > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

con $c \neq 0$.

Con le stesse notazioni dell'esempio precedente, si ha:

$$s^2U(s) + cU(s) = F(s)$$

da cui:

$$U(s) = \frac{F(s)}{s^2 + c}.$$

Per antitrasformare $\frac{1}{s^2 + c}$ distinguiamo 2 casi:

i) $c > 0$. Sia $c = \omega^2$. $\frac{1}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}(\frac{1}{\omega} \sin \omega t)(s)$, quindi:

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin [\omega(x-t)] f(t) dt.$$

ii) $c < 0$. Sia $c = -\omega^2$. $\frac{1}{s^2 - \omega^2} = \mathcal{L}(\frac{1}{\omega} \operatorname{Sh} \omega t)(s)$, quindi:

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{Sh} [\omega(x-t)] f(t) dt.$$

Esempio 3. Risolvere:

$$\begin{cases} u'' + 2u' + 2u = 0 & \text{per } x > 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 2. \end{cases}$$

Trasformando, e tenendo conto delle condizioni iniziali si ha:

$$\begin{aligned} s^2U(s) - s - 2 + 2[sU(s) - 1] + 2U(s) &= 0 \\ U(s) &= \frac{s+4}{s^2+2s+2} = \frac{s+4}{(s+1)^2+1} = \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{3}{(s+1)^2+1} = \mathcal{L}(e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x). \\ u(x) &= e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

(Per antitrasformare, si è usato il calcolo delle trasformate 9 e 10, svolto al §14.2). \square

Vediamo come si applica in generale in metodo a un'equazione di ordine n . Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = f(x) & x > 0 \\ u(0) = \alpha_0 \\ u'(0) = \alpha_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

Trasformando si ha:

$$\begin{aligned} s^nU - s^{n-1}\alpha_0 - s^{n-2}\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1} + a_{n-1}[s^{n-1}U - \dots - \alpha_{n-2}] + \dots \\ \dots + a_0V = F \end{aligned}$$

ossia:

$$P_n(s) \cdot U(s) + Q_{n-1}^\alpha(s) = F(s)$$

dove: $P_n(s)$ è un polinomio di grado n i cui coefficienti dipendono dai coefficienti dell'equazione ma non dalle condizioni iniziali; $Q_{n-1}^\alpha(s)$ è un polinomio di grado $(n-1)$ che dipende sia dai coefficienti dell'equazione sia dalle condizioni iniziali.

$$U(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} - \frac{Q_{n-1}^\alpha(s)}{P_n(s)}.$$

Il problema è determinare 2 funzioni $g(x)$, $h(x)$ tali che

$$\mathcal{L}g(s) = -\frac{Q_{n-1}^\alpha(s)}{P_n(s)} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}h(x) = \frac{1}{P_n(s)}.$$

Trovate g e h , si può scrivere:

$$u(x) = g(x) + (h*f)(x).$$

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle, $Q_{n-1}^\alpha \equiv 0$ e $g \equiv 0$.

In base ai criteri noti di antitrasformabilità, che discuteremo in dettaglio nel § 15.7, le funzioni $\frac{1}{P_n(s)}$ e $\frac{Q_{n-1}^\alpha(s)}{P_n(s)}$ sono sempre antitrasformabili.

Precisamente, l'antitrasformata di una funzione di tipo $\frac{Q(s)}{P(s)}$ con P , Q polinomi come sopra (grado di $P >$ grado di Q) è data da:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Q(s)}{P(s)}\right)(x) = \sum (\text{residui di } \frac{Q(s)}{P(s)} e^{sx} \text{ nei poli}).$$

Naturalmente in casi particolarmente semplici come quelli visti negli esempi, si può calcolare l'antitrasformata semplicemente usando opportunamente le tabelle

delle trasformate note.

Esercizi.

4. $\begin{cases} u'' + u' + u = \sin x & x > 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u''' + u'' + u' = xe^x & x > 0 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0. \end{cases}$

[Suggerimento: porre $u' = v$ e risolvere in v . Alla fine, porre $u(x) = \int_0^x v(t) dt$]

6. $\begin{cases} u'' + 5u' - 6u = e^{-t} & t > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$

14.3.2. ESEMPI DI EQUAZIONI INTEGRO-DIFFEREZIALI

Esempio 7. Risolvere:

$$u'(x) - u(x) + 2u * e^x = 0 \quad x > 0.$$

Applicando la trasformata di Laplace e usando la formula della derivata e della convoluzione si ha:

$$sU(s) - u(0) - U(s) + 2U(s) \cdot \mathcal{L}(e^x)(s) = 0;$$

$$\mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{s-1} \quad \text{per } s > 1.$$

Si ha allora:

$$U(s) \cdot \left(s - 1 + \frac{2}{s-1} \right) = u(0)$$

$$U(s) = u(0) \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2 + 2} = u(0) \cdot \mathcal{L}(e^x \cos \sqrt{2}x)(s)$$

$$u(x) = u(0) e^x \cos(\sqrt{2}x).$$

La soluzione dell'equazione dipende da una costante arbitraria (ad es. il valore $u(0)$)

Esempio 8. Risolvere:

$$\begin{cases} u' * u' = \frac{d}{dx} (u*u) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$\mathcal{L}(u') \cdot \mathcal{L}(u') = s\mathcal{L}(u*u)(s) - (u*u)(0)$$

(osservare che $(u*u)(x) = \int_0^x u(x-t) u(t) dt$, perciò $(u*u)(0) = 0$)

$$[s\mathcal{L}u(s) - u(0)]^2 = s\mathcal{L}u(s) \cdot \mathcal{L}u(s)$$

$$[sU(s) - 1]^2 = sU(s)^2$$

$$sU(s) - 1 = \pm \sqrt{s} U(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{s \pm \sqrt{s}}.$$

Per antitrasformare queste funzioni, cerchiamo di ricondurci alle 2 trasformate note:

$$\mathcal{L}(e^{ax})(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s \pm \sqrt{s}} &= \frac{s \mp \sqrt{s}}{s^2 - s} = \frac{s(1 \mp \frac{1}{\sqrt{s}})}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} \mp \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1} = \\ &= \mathcal{L}(e^x \mp \frac{1}{\sqrt{\pi x}} * e^x)(s). \end{aligned}$$

Dunque

$$u(x) = e^x \mp \int_0^x \frac{e^{x-t}}{\sqrt{\pi t}} dt = e^x \left(1 \mp \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} dt \right).$$

Esercizi.

9. $\begin{cases} u'(x) + x * u(x) = 1 & x > 0 \\ u(0) = 1. \end{cases}$

[Soluzione: $u(x) = e^{\frac{x}{2}} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$].

10. $\begin{cases} u' + u(x) * \cos x = g(x) \\ u(0) = 0. \end{cases}$

[Soluzione: $u(x) = (g * h)(s)$ con $h(x) = \frac{1 + \cos \sqrt{2}x}{2}$].

14.3.3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI A COEFFICIENTI POLINOMIALI

Usando le formule delle derivate:

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\frac{d^k}{ds^k} (\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}((-x)^k f(x))(s)$$

è possibile trattare delle equazioni lineari anche a coefficienti non costanti, purché

polinomiali. Esaminando la 2^a delle formule scritte, si vede che se un coefficiente contiene la potenza x^k , l'equazione trasformata conterrà la derivata k -esima di $\mathcal{L}f$. Quindi la trasformata di un'equazione differenziale a coefficienti polinomiali è ancora un'equazione differenziale. Affinché sia di ordine inferiore a quello dell'equazione di partenza (e quindi il metodo sia vantaggioso) è necessario che il massimo grado dei polinomi che compaiono nei coefficienti sia inferiore all'ordine dell'equazione differenziale di partenza.

Illustriamo questa tecnica su 2 esempi, riguardanti l'equazione di Laguerre e l'equazione di Bessel di ordine zero.

Esempio 11. L'equazione di Laguerre.

Consideriamo l'equazione:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \quad x > 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Si confronti il procedimento qui presentato con quello seguito nel § 13.3.2).

Per le formule delle derivate si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(xy'') (s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(y'') (s) = -\frac{d}{ds} (s^2 \mathcal{L}y(s) - sy(0) - y'(0)) = \\ &= -2sY(s) - s^2 Y'(s) + y(0) \quad [\text{con } Y(s) = \mathcal{L}y(s)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((1-x)y'(s)) &= \mathcal{L}(y')(s) + \frac{d}{ds} \mathcal{L}(y')(s) = \\ &= sY(s) - y(0) + \frac{d}{ds} (sY - y(0)) = sY - y(0) + Y + sY'. \end{aligned}$$

L'equazione trasformata è quindi:

$$(-s^2 + s)Y' + (\lambda + 1 - s)Y = 0,$$

cioè un'equazione differenziale del *primo* ordine. Risolvendo si ha

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{\lambda + 1 - s}{s^2 - s} = \frac{\lambda + 1}{s(s-1)} - \frac{1}{s-1} = \frac{\lambda}{s-1} - \frac{\lambda+1}{s}$$

$$\log Y(s) = -(\lambda + 1) \log s + \lambda \log(s-1) + c$$

$$Y(s) = c \cdot s^{-(\lambda + 1)} (s-1)^\lambda$$

$$Y(s) = c \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\lambda \frac{1}{s}.$$

La trasformata di y è quindi determinata, a meno della costante c . I teoremi sul valore iniziale e finale (v. § 1) permettono di interpretare c :

$$sY(s) = c \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\lambda \rightarrow c \quad \text{per } s \rightarrow +\infty \quad \text{perciò } c = y(0)$$

(v. corollario 10, § 1), e

$$Y(s) = y(0) \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\lambda \frac{1}{s}.$$

Si tratta ora di antitrasformare questa funzione. Il parametro λ è per ora indeterminato. Lo sceglieremo in modo che la soluzione y sia particolarmente semplice. La funzione di variabile complessa

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\lambda \frac{1}{z}$$

ha un polo nello zero; se $\lambda \geq 0$ non ha altre singolarità, mentre se $\lambda < 0$ ha anche un polo in 1. Se λ non è intero inoltre la funzione è polidroma. Scegliamo allora $\lambda = m = 0, 1, 2, \dots$. La formula di antitrasformazione dà allora:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\left(1 - \frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{z}\right)(x) = \text{Res}\left(\left(1 - \frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{z} e^{xz}, 0\right).$$

Per calcolare il residuo, scriviamo lo sviluppo di Laurent nell'origine.

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{z} = \frac{(z-1)^m}{z^{m+1}}.$$

Si ha allora:

$$(z-1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k (-)^{m-k}$$

$$\frac{(z-1)^m}{z^{m+1}} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{k-m-1} (-)^{m-k}$$

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$$

$$e^{xz} \frac{(z-1)^m}{z^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-)^{m-k} \frac{x^n}{n!} z^{k-m-1+n}.$$

Il termine in $\frac{1}{z}$ si ha per $k-m-1+n = -1$ cioè $k-m+n=0$; dunque il residuo è:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ n=m-k}}^m \binom{m}{k} (-)^{m-k} \frac{x^{m-k}}{(m-k)!} =$$

[poiché $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$, ponendo $h = m-k$]

$$= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} (-1)^h \frac{x^h}{h!}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che: la soluzione dell'equazione di Laguerre con condizione $y(0) = 1$, per $\lambda = m = 0, 1, 2, \dots$ è l' m -esimo polinomio di Laguerre:

$$L_m(x) = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} (-1)^h \frac{x^h}{h!}.$$

Riguardando i passaggi fatti si vede che le funzioni $L_m(x)$ sono le uniche possibili soluzioni polinomiali dell'equazione di Laguerre con $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti:

1º) ogni polinomio è \mathcal{L} -trasformabile, quindi ogni eventuale soluzione polinomiale dell'equazione di deve trovare trasformando l'equazione;

2º) se si sceglie λ non intero, si vede che lo sviluppo di $(z-1)^\lambda$ è una serie infinita, e l'antitrasformata risulta una serie di potenze e non un polinomio.

Esempio 12. Utilizzando la trasformata di Laplace, dimostriamo la seguente formula (già discussa nel § 13.3.2):

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (*)$$

Prendiamo la trasformata di Laplace del 2º membro si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \right) (s) &= \\ (\text{per la formula } \mathcal{L}[e^{ax} f(x)](s) = (\mathcal{L}f)(s-a)) \\ &= \frac{1}{n!} \mathcal{L} \left(\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \right) (s-1) = (\text{per la formula delle derivate}) = \\ &= \frac{1}{n!} \left((s-1)^n \mathcal{L}(e^{-x} x^n)(s-1) - (s-1)^{n-1} (e^{-x} x^n)(0) + \right. \\ &\quad \left. - (e^{-x} x^n)^{(n-1)}(0) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} (s-1)^n \mathcal{L}(e^{-x} x^n)(s-1) = \frac{1}{n!} (s-1)^n \mathcal{L}(x^n)(s-1+1) = \\ &= \frac{1}{n!} (s-1)^n \mathcal{L}(x^n)(s) = \frac{1}{n!} (s-1)^n \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(s-1)^n}{s^{n-1}} = \mathcal{L}(L_n(x))(s) \end{aligned}$$

per quanto dimostrato nel punto precedente. Dunque vale la (*).

Esempio 13. L'equazione di Bessel di grado zero.

Sapendo che la funzione di Bessel di ordine zero $J_0(x)$ soddisfa il problema:

$$\begin{cases} xu'' + u' + xu = 0 & x > 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

si determini $(\mathcal{L}J_0)(s)$.

(Le funzioni di Bessel saranno trattate diffusamente nei capp. 22 e 23).

Applicando le formule delle derivate si ha:

$$\mathcal{L}(xu'')(s) = (\text{v. esempio 11}) = -2sU - s^2U' + u(0) = -2sU - s^2U' + 1;$$

$$\mathcal{L}(u')(s) = sU - u(0) = sU - 1;$$

$$\mathcal{L}(xu)(s) = -\frac{d}{ds} U = -U'.$$

L'equazione trasformata è:

$$-s^2U' - 2sU + 1 + sU - U' = 0.$$

Risolviamo:

$$U'(s) \cdot (1 + s^2) = -sU(s)$$

$$\frac{U'}{U} = \frac{-s}{1 + s^2}$$

$$\log U = -\frac{1}{2} \log(1 + s^2) + c$$

$$U(s) = \frac{c}{\sqrt{1 + s^2}}$$

Per eliminare la costante c , osserviamo che

$$sU(s) = \frac{cs}{\sqrt{1+s^2}} \rightarrow c \quad \text{per } s \rightarrow +\infty$$

perciò (corollario 10, § 1) $c = u(0) = 1$ e

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}. \tag{**}$$

Questa è la trasformata di Laplace della funzione di Bessel $J_0(x)$, soluzione del problema considerato. Antitrasformando, si trova la serie di potenze che definisce $J_0(x)$. La (**) ha anche la seguente conseguenza:

$$U \cdot U = \frac{1}{1+s^2},$$

perciò per il teorema di convoluzione

$$\mathcal{L}(J_0 * J_0)(s) = \mathcal{L}(\sin x)(s)$$

da cui si ha:

$$\int_0^x J_0(x-t) J_0(t) dt = \sin x.$$

15. TRASFORMATA DI FOURIER

15.1. OSSERVAZIONI SULLE FORMULE DI TRASFORMAZIONE E ANTITRASFORMAZIONE. CALCOLO DI TRASFORMATE

Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, si definisce la trasformata di Fourier di f :

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Se inoltre $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vale la formula di inversione.

$$f(x) = (\widehat{f})^{\sim}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Scrivendo l'esponenziale complesso $e^{-ix\xi}$ come $\cos x\xi - i \sin x\xi$ si vede che:

- se f è reale e pari, \widehat{f} è reale e pari, e si ha:

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos xy dy$$

- se f è reale e dispari, \widehat{f} è immaginaria pura e dispari, e si ha:

$$\widehat{f}(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \sin xy dy.$$

(Analogamente, se f è immaginaria pura e pari, \widehat{f} è immaginaria pura e pari, se f è immaginaria pura e dispari, \widehat{f} è reale e dispari).

Esempi di calcolo di trasformate

1. $f(x) = e^{-x^2}.$

Per calcolare $\mathfrak{F}f$, occorre utilizzare il seguente integrale notevole, utile in vari tipi di calcolo:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad \forall \alpha > 0, \beta \in \mathbb{C} \quad (*)$$

Dimostriamo la (*). Cominciamo a supporre β reale. Dall'identità:

$$-\alpha x^2 + \beta x = -\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

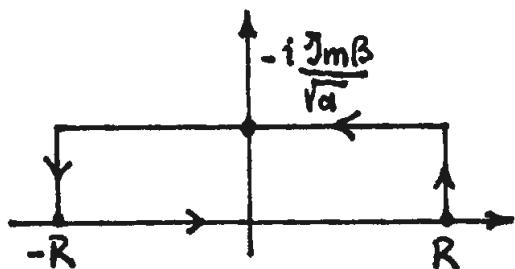
si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx &= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dx = \\ &= \left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} = t\right) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto: $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Se β fosse complesso, l'ultimo integrale scritto non sarebbe esteso a \mathbb{R} , ma alla retta, nel piano complesso, $\left(-\infty - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, +\infty - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)$.

Si dimostra facilmente, integrando la funzione di variabile complessa e^{-z^2} lungo un cammino del tipo:



e facendo tendere R a $+\infty$, che l'integrale considerato coincide con $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$.

La (*) è così dimostrata. □

Allora:

15. Trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - ix\xi} dx = (\text{per la } (*), \text{ con } \alpha = 1, \beta = -i\xi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.\end{aligned}$$

Più in generale:

$$2. \quad f(x) = e^{-a^2 x^2} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}.$$

In particolare per $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha che:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

cioè abbiamo una funzione che è la trasformata di se stessa.

$$3. \quad f(x) = e^{-|x|}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

In generale:

$$4. \quad \mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{a} (\mathcal{F}f)\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad \text{per } a > 0.$$

Infatti:

$$\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-ix\xi} dx = (ax = t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} f(t) e^{-it\frac{\xi}{a}} dt = \frac{1}{a} (\mathcal{F}f)\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Ad esempio:

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \frac{\xi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

5. $f(x) = H(x) e^{-ax}$ con $a > 0$ e

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{"funzione di Heaviside"}).$$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}.$$

6. $f(x) = H(1 - x^2) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-ix\xi} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos x\xi dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$

$$f(x) = f_1\left(\frac{x}{a}\right) \text{ con } f_1 \text{ come in (6).}$$

Perciò:

$$\widehat{f}(x) = a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{ax} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}.$$

8. $\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-ia\xi} (\mathcal{F}f)(\xi).$

Infatti:

$$\mathfrak{F}(f(x-a))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-a) e^{-ix\xi} dx = (x-a=t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} e^{-ia\xi} dx = e^{-ia\xi} (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

9. $f(x) = xe^{-a|x|}$ ($a > 0$).

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} xe^{-x(a+i\xi)} dx + \int_{-\infty}^0 xe^{x(a-i\xi)} dx \right) = \\ &= (\text{per parti}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x \frac{e^{-x(a+i\xi)}}{-(a+i\xi)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(a+i\xi)}}{(a+i\xi)} dx + \right. \\ &\quad \left. + x \frac{e^{x(a-i\xi)}}{a-i\xi} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{x(a-i\xi)}}{a-i\xi} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(a+i\xi)^2} - \frac{1}{(a-i\xi)^2} \right) = \frac{-4ai\xi}{\sqrt{2\pi} (a^2 + \xi^2)^2} = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ia\xi}{(a^2 + \xi^2)^2}. \end{aligned}$$

10. $f(x) = \begin{cases} \sin x & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}f(\xi) &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin x \sin x\xi dx = \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi (\cos[x(1+\xi)] - \cos[x(1-\xi)]) dx = \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin[x(1+\xi)]}{1+\xi} - \frac{\sin[x(1-\xi)]}{1-\xi} \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \pi\xi \left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi} \right) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \pi\xi}{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{\sin \pi\xi}{\xi^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$11. \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq a \\ -1 & -a \leq x < 0 \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}f(\xi) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin x\xi \, dx = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\cos x\xi}{\xi} \right]_0^a = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\cos a\xi) - 1}{\xi}.$$

Osservazioni. Riportiamo alcune delle formule di trasformazione dimostrate e commentiamole (v. figg. 15.1-15.7):

| | $f(x)$ | $\mathfrak{F}f(x)$ |
|------|---|---|
| (2) | $e^{-a^2 x^2}$ | $\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ |
| (4) | $e^{-a x }$ | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}$ |
| (5) | $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + ix}$ |
| (7) | $\begin{cases} 1 & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$ | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$ |
| (9) | $xe^{-a x }$ | $-2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{iax}{(a^2 + x^2)^2}$ |
| (10) | $\begin{cases} \sin x & x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$ | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$ |
| (11) | $\begin{cases} 1 & 0 < x \leq a \\ -1 & -a \leq x < 0 \\ 0 & x > a \end{cases}$ | $i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\cos ax) - 1}{x}$ |

i) Osservare le proprietà di simmetria e realtà delle funzioni. Tutte le $f(x)$ sono reali. (2), (4), (7) sono pari, e hanno trasformata reale pari; (9), (10), (11) sono dispari, e hanno trasformata immaginaria pura e dispari; 5 non è né pari né dispari, e ha trasformata complessa (né reale né immaginaria pura).

ii) È noto che $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, \widehat{f} è una funzione continua su \mathbb{R} e tende a zero per $x \rightarrow +\infty$. Osservare che tutte le $f(x)$ sono $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Notare che tutte le $\mathfrak{F}f(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow \pm\infty$ e continue su \mathbb{R} : osservare in particolare che (7) e (11) sono continue in 0, (10) è continua in ± 1 .

iii) Non tutte le $\mathfrak{F}f$ sono in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: (2), (4), (9), (10) sì, (5), (7), (11) no. Nei casi in cui $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ si può applicare la formula di inversione e ottenere così altre trasformate:

$$(4') \quad f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad \mathfrak{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|x|}$$

$$(9') \quad f(x) = \frac{ax}{(a^2 + x^2)^2} \quad \mathfrak{F}f(x) = -i\sqrt{\frac{\pi}{8}} x e^{-a|x|}$$

$$(10') \quad f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} \quad \mathfrak{F}f(x) = \begin{cases} -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin x & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

iv) Nei casi in cui $\mathfrak{F}f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ cosa si può dire sulla formula di inversione?

Osserviamo che nei casi (5), (7), (9), (11) $\mathfrak{F}f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ma $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Perciò la formula di inversione vale in senso \mathcal{L}^2 , cioè:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{R \rightarrow +\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-R}^R \mathfrak{F}f(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

dove l.i.m. = limite in norma $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché le $f(x)$ di partenza sono regolari a tratti, si può anche scrivere

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

dove l'integrale in valore principale è:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R$$

e l'uguaglianza vale nei punti in cui f è regolare.

Esempio.

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad \mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$$

f è regolare a tratti (regolare tranne in ± 1); $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$; si può scrivere:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi} e^{ix\xi} d\xi$$

$\forall x \neq \pm 1$. (Verificare per esercizio questa formula calcolando l'integrale in valor principale col metodo dei residui; osservare in particolare, che l'uguaglianza non vale per $x = \pm 1$).

15.2. FORMULE DELLE DERIVATE

Valgono le seguenti formule, che connettono l'operazione di derivazione e la trasformata di Fourier:

$$\boxed{\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](\xi)} \quad (a)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}(x)\right](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}f(\xi).} \quad (b)$$

Le formule si interpretano al modo seguente:

(a) Se $f \in L^1$ (per cui esiste $\mathcal{F}f$) e $x^n f(x) \in L^1$ (per cui esiste

$\mathcal{F}[-ix]^n f(x)](\xi)$, allora $\mathcal{F}f$ è derivabile n volte e vale la formula.

Ciò si può esprimere qualitativamente dicendo che:

- più rapidamente $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$, più regolare è $\mathcal{F}f(\xi)$.

(La rapidità di convergenza a zero di f all'infinito è espressa dall'integrabilità di $x^n f(x)$).

(b) Se $f \in L^1$, $\exists \frac{d^n f}{dx^n}$ e $\frac{d^n f}{dx^n} \in L^1$, allora la trasformata di $\frac{d^n f}{dx^n}$ si calcola come in (b). Da ciò segue che $(i\xi)^n \mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow \infty$, ossia che $\mathcal{F}f(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right)$ per $\xi \rightarrow \infty$, ossia che:

- più regolare è la $f(x)$, più rapidamente $\mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow \infty$.

Osserviamo queste proprietà negli esempi riportati nel § 1:

(4) $f(x) \rightarrow 0$ esponenzialmente, $\mathcal{F}f$ è infinitamente derivabile. Idem per (9).

(7) $f(x)$ è nulla per $|x| > a$; $\mathcal{F}f$ è infinitamente derivabile.

(4') $f(x) \rightarrow 0$ “debolmente” per $x \rightarrow \infty$ (precisamente, come $\frac{1}{x^2}$: perciò $xf(x) \notin L^1$). $\mathcal{F}f$ è continua ma non derivabile in 0. Idem per (10'): $\mathcal{F}f$ è continua ma non derivabile per $x = \pm \pi$.

(9') $f(x) \rightarrow 0$ come $\frac{1}{x^3}$ per $x \rightarrow \infty$: perciò $xf(x) \in L^1$ ma $x^2 f(x) \notin L^1$; $\mathcal{F}f \in C^1$ ma $\mathcal{F}f \notin C^2$.

(11) $f(x)$ è discontinua, $\mathcal{F}f \rightarrow 0$ “debolmente” (come $\frac{1}{x}$).

(2) $f(x)$ è infinitamente derivabile e tende a zero esponenzialmente, $\mathcal{F}f$ tende a zero più rapidamente di ogni potenza ed è infinitamente derivabile.

L'ultimo esempio illustra un fatto generale. Definiamo lo spazio di Schwarz

\mathfrak{F} delle funzioni a decrescenza rapida. $f \in \mathfrak{F}$ se:

- 1) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
- 2) $\forall n, m \quad \left| x^n \frac{d^m f}{dx^m}(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$

Si dimostra, in base alle proprietà (a) e (b), che se $f \in \mathfrak{F}$, anche $\mathcal{F}f \in \mathfrak{F}$. In simboli: $\mathcal{F}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$. Inoltre $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, perciò se $f \in \mathfrak{F}$ si può sempre scrivere

$$f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x).$$

Pertanto ogni funzione di \mathfrak{F} è trasformata di Fourier di una funzione di \mathfrak{F} , ossia: $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathfrak{F})$. In definitiva: $\mathcal{F}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ ossia: lo spazio \mathfrak{F} è trasformato in se stesso da \mathcal{F} . La funzione dell'esempio (2) è un esempio di funzione a decrescenza rapida.

15.3. LA TRASFORMATA DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Le proprietà dello spazio \mathfrak{F} rispetto ad \mathcal{F} sono importanti in quanto consentono di definire la trasformata di Fourier anche per funzioni $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, e dimostrare alcune proprietà notevoli. Cominciamo a provare la formula di Plancherel:

- se $f, g \in \mathfrak{F}$: $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ e $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

dove $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ è il prodotto scalare in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Infatti: se $g \in \mathfrak{F}$, anche $\hat{g} \in \mathfrak{F}$ e vale la formula di inversione:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{ixy} dy$$

da cui:

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(y) e^{-ixy} dy.$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(y) e^{-ixy} dy = \\
&= (\text{per Fubini}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(y) dy \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{g}}(y) dy = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Ponendo nella formula precedente $f = g$ si ha $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

□

Se ora $f \in L^2(\mathbb{R})$ si può definire \hat{f} come il limite, in norma L^2 , delle trasformate di Fourier di una successione di funzioni $f_n \in \mathfrak{F}$ che tendono a f in L^2 . Ciò è possibile in quanto:

se $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f_n \in \mathfrak{F}$, $f_n \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R})$, si ha:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0$$

per $n, m \rightarrow \infty$, perché $f_n \rightarrow f$ in L^2 . Dunque $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 \rightarrow 0$, ossia la successione $\{\hat{f}_n\}$ è fondamentale in $L^2(\mathbb{R})$, dunque converge a una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ che chiameremo \hat{f} e sarà, per definizione, la trasformata di Fourier di f . Si dimostra poi facilmente quanto segue:

1. Se $g_n \in \mathfrak{F}$ è un'altra successione approssimante f in L^2 , la successione \hat{g}_n tende allo stesso limite \hat{f}_n , ossia la definizione di \hat{f} è indipendente dalla successione approssimante usata.

2. Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, vale ancora la formula di Plancherel:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

3. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, vale sempre la formula di inversione:

$$f(x) = (\widehat{f})(-x).$$

15.4. TRASFORMATA DI FOURIER E CONVOLUZIONE

Per $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vale la formula:

$$\mathfrak{F}(f*g)(x) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}f(x) \cdot \mathfrak{F}g(x).$$

Esempio 12. Sia $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Abbiamo calcolato in precedenza:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \\ \text{e } (f*f)(x) &= (2 - |x|)^+ = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| \geq 2 \\ 2 - |x| & \text{per } |x| \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo affermare che, se $g(x) = (2 - |x|)^+$,

$$\widehat{g}(x) = \sqrt{2\pi} \left(\widehat{f}(x) \right)^2 = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Esercizio 13.

$$\text{Sia } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Calcolare $f*f$, $(f*f)\widehat{}$.

Per $x > 0$:

$$(f*f)(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} e^{-y} dy = \int_0^x e^{-x} dy = xe^{-x}$$

mentre per $x < 0$, $(f*f)(x) = 0$.

$$\text{Ossia: } (f*f)(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Sappiamo (esempio 5), § 1) che $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+ix}$, dunque:

$$(\widehat{f*f})(x) = \frac{1}{(1+ix)^2}.$$

Osservazione 14.

Sia $f_1(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

e $f_2(x) = f_1(-x)$. Chiaramente, $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \quad \forall x$. In base all'esercizio precedente, detto:

$$g(x) = \frac{1}{(1+ix)^2}$$

si ha: $\widehat{f}_1(x) = g(x)$. Ma allora, per la formula di inversione (poiché sia f_1 che g sono $L^1(\mathbb{R})$) si ha:

$$f_1(x) = \widehat{g}(-x) = [g(-x)]\widehat{}(x)$$

$$f_2(x) = \widehat{g}(x).$$

Allora l'uguaglianza $f_1(x) \cdot f_2(x) \equiv 0$ porta:

$$0 = \widehat{g}(x) \cdot [g(-x)]\widehat{} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [g(x)*g(-x)]\widehat{}(x).$$

Ma se la trasformata di Fourier di una funzione è identicamente nulla, significa che la funzione stessa è identicamente nulla. Ciò significa che, detto $h(x) = g(-x) = \frac{1}{(1-ix)^2}$ si ha: $(g*h)(x) \equiv 0$. Ossia:

abbiamo trovato due funzioni g e h , non identicamente nulle, appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$, tali che la loro convoluzione è la funzione identicamente nulla. Questo può

essere anche verificato direttamente, calcolando coi metodi dell'analisi complessa l'integrale di convoluzione:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{[1+i(x-y)]^2 (1-iy)^2}.$$

Osservazione 15. Nuclei approssimanti. Apriamo una parentesi che riguarda la convoluzione di funzioni, e che sarà utile per successive osservazioni sulla trasformata di Fourier. Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

φ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$, positiva, ha integrale 1 e tende a zero per $x \rightarrow \infty$.

$\forall \varepsilon > 0$ consideriamo ora la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}}{\sqrt{\pi}}.$$

Più piccolo è ε , più il grafico che φ_ε presenta un "picco" alto e stretto nell'origine. Si vede che $\forall \varepsilon > 0$ è:

$$\int \varphi_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \varphi_\varepsilon(x) > 0.$$

Consideriamo allora, per una certa fissata funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, gli integrali di convoluzione:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Per le proprietà viste di φ_ε , ognuno di questi integrali si può pensare come una "media pesata" di f , che privilegia i valori di f in un intorno di x . È ragionevole dunque aspettarsi che, per $\varepsilon \rightarrow 0$, questo integrale tenda ad $f(x)$. In effetti, si può dimostrare quanto segue:

$$\varphi_\varepsilon * f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\varphi_\varepsilon * f \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Inoltre, applicando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si vede che $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R})$, anche se f è solo $L^1(\mathbb{R})$. Perciò $\varphi_\varepsilon * f$ rappresenta una approssimante regolare di f . Le funzioni φ_ε si chiamano perciò *nuclei regolarizzanti*, o *nuclei approssimanti*.

Osservazione 16. Regolarizzata di una funzione e trasformata di Fourier.
Abbiamo visto (v. § 2) che la rapidità con cui $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$ dipende dalla regolarità di f . Ad esempio:

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ (che è C^∞) ha trasformata $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (che va a zero esponenzialmente, per $x \rightarrow \infty$) mentre $e^{-|x|}$ (che ha un punto angoloso in 0) ha trasformata $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$ (che tende a zero “solo” come $\frac{1}{x^2}$).

Si deve concludere che se noi “smussiamo” il grafico di $e^{-|x|}$ rendendolo regolare (C^∞) anche nell’origine, la trasformata di Fourier deve cambiare drasticamente il suo comportamento per $x \rightarrow +\infty$. Ci si può rendere conto di questo usando i nuclei regolarizzanti introdotti nel paragrafo precedente.

Sia $f(x) = e^{-|x|}$. La funzione $\varphi_\varepsilon * f$ è $C^\infty(\mathbb{R})$, per ε piccolo sarà molto vicina ad f : la differenza sarà sensibile soprattutto in un intorno di 0, ove f ha un punto angoloso. D’altra parte:

$$\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon * f) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(x) \cdot (\mathcal{F}f)(x).$$

Si vede che:

$$\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon)(x) = (\mathcal{F}\varphi)(\varepsilon x) = \frac{e^{-\varepsilon^2 x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Perciò:

$$\mathcal{F}(\varphi_\epsilon * f)(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\epsilon^2 x^2}}{1+x^2}.$$

Si vede quindi che per quanto piccolo sia ϵ , il comportamento di $\mathcal{F}(\varphi_\epsilon * f)$ per $x \rightarrow +\infty$ è radicalmente diverso dal comportamento di $\mathcal{F}f$: la decrescita nel 1° caso è esponenziale, nel 2° è algebrica. Ciò significa che una piccola alterazione della f , sensibile nell'intorno di un punto, può propagarsi in una alterazione della \hat{f} sensibile globalmente.

15.5. AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI DI \mathcal{F} SU $L^2(\mathbb{R})$

$$\text{Sia } f \in \mathcal{F}. \quad \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy.$$

Consideriamo le composizioni successive della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^2 f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y) e^{-ixy} dy =$$

$$= (\text{per la formula di inversione}) = f(-x).$$

$$\mathcal{F}^3 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^2 f(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(-y) e^{-ixy} dy =$$

$$= [y = -t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt = (\mathcal{F}f)(-x).$$

$$\mathcal{F}^4 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(-y) e^{-ixy} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y) e^{ixy} dy = f(x).$$

Ossia:

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}^4 f(x) = f(x).$$

Allora per densità questo è vero $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ossia:

$$\mathfrak{F}^4 = \text{Identità su } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Questo fatto ha una conseguenza importante nella ricerca degli autovalori di \mathfrak{F} su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Poniamoci il problema di determinare per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione

$$\mathfrak{F}f = \lambda f$$

ha soluzioni non identicamente nulle in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Se λ, f soddisfano l'equazione precedente, sarà:

$$\mathfrak{F}^2 f = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}(\lambda f) = \lambda(\mathfrak{F}f) = \lambda^2 f.$$

Analogamente:

$$\mathfrak{F}^3 f = \lambda^3 f; \quad \mathfrak{F}^4 f = \lambda^4 f.$$

Ma $\mathfrak{F}^4 f = f \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ perciò:

$$f = \lambda^4 f$$

e poiché f non è identicamente nulla: $\lambda^4 = 1$. Ossia: ogni eventuale autovalore di \mathfrak{F} su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una radice 4^a dell'unità in \mathbb{C} .

- *Dunque i possibili autovalori sono: 1, -1, i, -i.*

Proviamo ora che questi sono effettivamente autovalori, e determiniamo le autofunzioni relative. Siano $H_n(x)$ i polinomi di Hermite, introdotti nel § 13.3.3. Siano $f_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ le funzioni di Hermite ($n = 0, 1, 2, \dots$). Dimostriamo che:

$$(\mathfrak{F}f_n)(x) = (-i)^n f_n(x)$$

da cui segue che *le funzioni di Hermite sono autofunzioni della trasformata di Fourier*

Fourier.

Consideriamo anzitutto la formula di ricorrenza stabilita nel § 13.3.3 per i polinomi di Hermite:

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (*)$$

e ricaviamo da questa una formula analoga per f_n .

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} [-xH_n(x) + H'_n(x)] = \text{ per } (*) = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} [xH_n(x) - H_{n+1}(x)] = xf_n(x) - f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Dunque:

$$f'_n(x) = xf_n(x) - f_{n+1}(x). \quad (**)$$

Applichiamo ora la trasformata di Fourier ad ambo i membri di $(**)$ ed utilizziamo le formule delle derivate. Si ha:

$$\begin{aligned} ix\mathcal{F}f_n(x) &= i(\mathcal{F}f_n)'(x) - (\mathcal{F}f_{n+1})(x) \\ \mathcal{F}f_{n+1}(x) &= (-i)[-(\mathcal{F}f_n)'(x) + x(\mathcal{F}f_n)(x)]. \end{aligned} \quad (***)$$

Dimostriamo ora, per induzione su n , che:

$$\mathcal{F}f_n = (-i)^n f_n.$$

Per $n = 0$ si ha $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ed è noto che $\mathcal{F}f_0 = f_0$. Sia vero per n , e dimostriamolo per $n + 1$:

$$\mathcal{F}f_{n+1} = (\text{per } (**)) = (-i)[-(\mathcal{F}f_n)' + x\mathcal{F}f_n] =$$

(per ipotesi induttiva)

$$= (-i)^{n+1}[-f'_n + xf_n] = (\text{per } (**)) = (-i)^{n+1}f_{n+1}.$$

□

15.6. CALCOLO DI TRASFORMATE MEDIANTE METODI DI ANALISI COMPLESSA

Le trasformate di Fourier calcolate nel paragrafo 1 erano esempi particolarmente elementari, in cui il calcolo dell'integrale era possibile mediante ricerca di primitiva o riconducendosi all'integrale notevole di e^{-x^2} . Quando tali metodi elementari non sono applicabili, spesso è ancora possibile la determinazione esplicita della trasformata di Fourier, mediante metodi di variabile complessa. Daremo qui qualche esempio di tale tipo di calcolo.

Esempio 17.

Calcolare $\mathcal{F}\left(\frac{\cos x}{1+x^2}\right)$.

Anzitutto osserviamo cosa si può dire a priori su $\mathcal{F}f$ (questo sarà un elemento di verifica). $f(x)$ è reale e pari, dunque $\mathcal{F}f$ sarà reale e pari; $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, dunque $\mathcal{F}f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ più rapidamente di ogni potenza di x ; $x^n \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ solo per $n = 0$, perciò ci aspettiamo $\mathcal{F}f$ continua ma non necessariamente $C^1(\mathbb{R})$.

Veniamo ora al calcolo:

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos y}{1+y^2} e^{ixy} dy$$

(poiché $\mathcal{F}f$ è pari, scrivere e^{-ixy} o e^{ixy} è lo stesso).

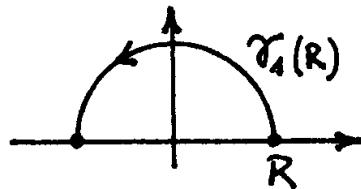
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Sia $f(z) = \frac{e^{iz(x+1)} + e^{iz(x-1)}}{2(1+z^2)} \equiv f_1(z) + f_2(z)$

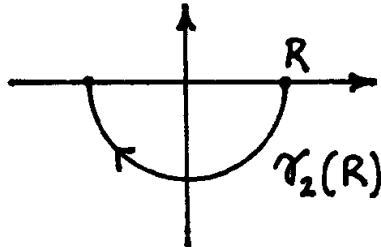
con $f_1(z) = \frac{e^{iz(x+1)}}{2(1+z^2)}$, $f_2(z) = \frac{e^{iz(x-1)}}{2(1+z^2)}$.

f_1, f_2 hanno poli del primo ordine in $z = \pm i$. Consideriamo $f_1(z)$. Per i lemmi di Jordan, se $(x+1) > 0$ so che per $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\gamma_1(R)} f_1(z) dz \rightarrow 0, \text{ con:}$$



mentre se $(x+1) < 0$ so che $\int_{\gamma_2(R)} f_1(z) dz \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$ con:



Ponendo $\Gamma_1(R) = [-R, R] \cup \gamma_1(R)$, $\Gamma_2(R) = [-R, R] \cup \gamma_2(R)$ si ha:

$$\text{se } x > -1 \quad \int_{\Gamma_1(R)} f_1(z) dz = 2\pi i R(f_1, i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f_1(x) dx$$

$$\text{se } x < -1 \quad \int_{\Gamma_2(R)} f_1(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f_1(x) dx = -2\pi i R(f_1, -i).$$

Ragionando analogamente su f_2 si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x) dx = \begin{cases} \text{se } x > 1 & 2\pi i R(f_2, i) \\ \text{se } x < 1 & -2\pi i R(f_2, -i). \end{cases}$$

Calcoliamo ora:

$$R(f_1, i) = \frac{e^{-(x+1)}}{4i} \quad R(f_1, -i) = \frac{e^x + 1}{-4i};$$

$$R(f_2, i) = \frac{e^{-(x-1)}}{4i} \quad R(f_2, -i) = \frac{e^x - 1}{-4i}.$$

Calcoliamo ora $\mathcal{F}f(x)$, per $x > 0$ (poiché sappiamo che è pari):

$$\text{se } 0 \leq x \leq 1, \quad \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\pi i [R(f_1, i) - R(f_2, -i)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{e} \left[\frac{e^{-x} + e^x}{2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Ch} x}{e}.$$

$$\text{Se } x \geq 1, \quad \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\pi i [R(f_1, i) + R(f_2, i)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi e^{-x} \left[\frac{e^{-1} + e}{2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ch} 1 e^{-x}.$$

$$\text{In definitiva è: } \mathcal{F}f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Ch} 1 \cdot e^{-|x|} & |x| \geq 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Ch} x}{e} & |x| \leq 1. \end{cases}$$

Osservare che $\mathcal{F}f$ è continua ma ha punti angolosi in ± 1 . (v. fig. 15.8).

Esempio 18.

$$\text{Calcolare } \mathcal{F}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+1}{x^4+1} e^{-ix\xi} dx.$$

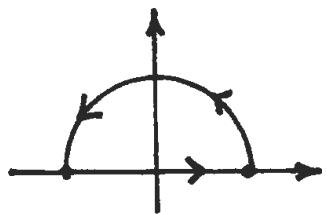
Sia $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1} e^{-iz\xi}$. $f(z)$ ha poli semplici nei quattro punti soluzione di

$$z^4 = -1: \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

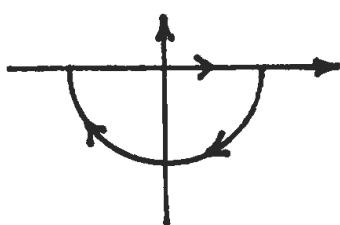
L'integrale vale

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot 2\pi i \cdot \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & [R(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}}) + R(f, \frac{-1+i}{\sqrt{2}})] \\ \text{se } \xi > 0 & -[R(f, \frac{1-i}{\sqrt{2}}) + R(f, \frac{-1-i}{\sqrt{2}})] \end{cases}$$

come si vede applicando il teorema dei residui e il lemma di Jordan all'integrale di $f(z)$ lungo cammini del tipo:



(se $\xi < 0$)



σ (se $\xi > 0$)

$$R(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}}) + R(f, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}) =$$

$$= e^{-i\xi(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} \frac{i+1}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)} + e^{-i\xi(\frac{-1+i}{\sqrt{2}})} \frac{-i+1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} = -ie^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right).$$

$$R(f, \frac{1-i}{\sqrt{2}}) + R(f, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}) = \dots \text{ non occorre calcolarlo perché } \mathcal{F}f \text{ deve}$$

risultare pari. Perciò:

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{v. fig. 15.9}).$$

Osservare che $\mathcal{F}f$ ha un punto angoloso in 0. Perciò è continua ma non C^1 . Difatti $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ solo se $n = 0$. Osservare che $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ perciò vale la

formula di inversione: detta

$$g(x) = e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

si ha:

$$\mathcal{F}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}.$$

Questa trasformata ($g \mapsto \mathcal{F}g$) è in realtà calcolabile elementarmente (l'integrale si calcola determinando la primitiva), mentre non lo era quello di partenza ($f \mapsto \mathcal{F}f$).

Esercizio 19. Dal calcolo della trasformata di $e^{-|x|}$ segue, mediante il teorema di inversione, che:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} \text{ (esempio (4'), § 1).}$$

Calcolare direttamente quest'ultima trasformata, mediante metodi di variabile complessa.

15.7. RELAZIONI TRA TRASFORMATA DI FOURIER E DI LAPLACE. ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Confrontiamo la formula che definisce la trasformata di Fourier $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con quella che definisce la trasformata di Laplace di una funzione $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$.

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-py} f(y) dy \quad p = s + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Si ha anche:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-sy} f(y) e^{-i\tau y} dy = \\ &= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}\left(\chi_{(0, +\infty)}(y) e^{-sy} f(y)\right)(\tau).\end{aligned}$$

Se la funzione $y \mapsto e^{-sy} f(y)$ sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ e la funzione $\tau \mapsto \mathcal{L}f(s + i\tau)$ sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, si può applicare la formula di inversione per la trasformata di Fourier e si ha:

$$\begin{aligned}(\forall y > 0) \quad e^{-sy} f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left(e^{-sx} f(x) \chi_{(0, +\infty)}(x)\right) e^{ixy} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(s + ix) e^{ixy} dx\end{aligned}$$

da cui:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(s + ix) e^{y(s + ix)} dx.$$

Ponendo $z = s + ix$, $dz = idx$, si ha:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s - i\infty}^{s + i\infty} \mathcal{L}f(z) e^{yz} dz$$

formula di antitrasformazione di Laplace.

Precisiamo ora le ipotesi di validità della formula. In pratica, accade di dover decidere se una certa funzione $F(t)$ (solitamente definita per t reale) è trasformata di Laplace di qualche funzione f , a priori incognita. Come si fa a verificare che $e^{-sy} f(y)$ sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, se f è ignota? Anzitutto, occorre estendere -quando ciò è possibile- la $F(t)$ a una $F(z)$ definita per $z = s + i\tau \in \mathbb{C}$, e $s > s_0$ per qualche s_0 , con $F(z)$ analitica.

Supponiamo poi che la $F(z)$ così trovata soddisfi la seguente stima:

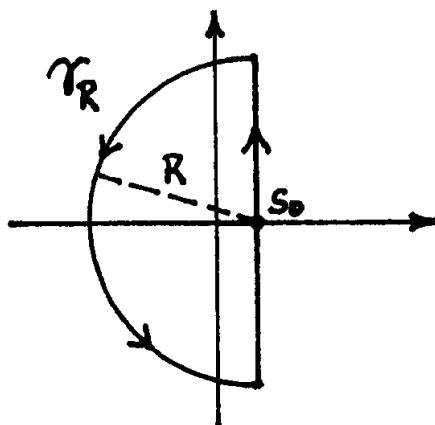
$$|F(z)| \leq \frac{M}{1 + |z|^{1+\alpha}} \quad (*)$$

per qualche costante positiva M, α , ogni $z = s + i\tau$ con $s > s_0$.

In questo caso la funzione $\tau \mapsto F(s + i\tau)$ è in $L^1(\mathbb{R})$; inoltre si dimostra che $F(z)$ è effettivamente la trasformata di Laplace della funzione f assegnata dalla formula di antitrasformazione. Dunque la (*) dà una condizione sufficiente affinché una assegnata funzione $F(z)$, analitica per $\Re z > s_0$, sia antitrasformabile. Osservare che la condizione non è necessaria: ad esempio $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{z}$, e la funzione $F(z) = \frac{1}{z}$ non soddisfa la (*).

Vediamo ora come si calcola in casi particolari l'integrale di antitrasformazione. Sappiamo che $\mathcal{L}f(z)$ è analitica per $\Re z > s_0$. Supponiamo che si possa estendere a una funzione analitica in \mathbb{C} tranne singolarità isolate. Calcoliamo allora, mediante il teorema dei residui:

$$\int_{\gamma_R} \mathcal{L}f(z)e^{yz} dz = 2\pi i \cdot \sum (\text{residui di } \mathcal{L}f(z)e^{yz} \text{ all'interno del semicerchio}).$$



Osservare che, per i lemmi di Jordan, se $\mathcal{L}f(z) \rightarrow 0$ uniformemente su questi

semicerchi, anche l'integrale sui semicerchi tende a zero per $R \rightarrow \infty$.

Si ha così:

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{s-iR}^{s+iR} \mathcal{L}f(z) e^{yz} dz = \\ & = 2\pi i \cdot \sum (\text{residui di } \mathcal{L}f(z) e^{yz} \text{ nel semipiano } \Re z < s_0). \end{aligned}$$

Dunque:

$$f(y) = \sum (\text{residui...}).$$

In particolare:

- sia $\mathcal{L}f(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$ quoziente di polinomi, con grado di $N >$ grado di M .

Una funzione di questo tipo è sempre antitrasformabile, infatti: per $z \in \mathbb{C}$, è una funzione olomorfa salvo un numero finito di poli, e quindi è olomorfa in un semipiano del tipo $\Re z > \lambda$. Per $\Re z \rightarrow +\infty$ è infinitesima, e si può scrivere nella forma:

$$\frac{c}{z} + F(z) \quad \text{con } c \text{ costante e } |F(z)| \leq \frac{k}{1 + |z|^{1+\alpha}},$$

per qualche $k, \alpha > 0$. Ora, $\frac{c}{z} = \mathcal{L}(c)$, mentre F è antitrasformabile per il criterio visto.

Supponiamo ora che $N(z)$ abbia radici semplici z_1, \dots, z_k . I residui di $\frac{M(z)}{N(z)} e^{zy}$ sono $\frac{M(z_k)}{N'(z_k)} e^{z_k y}$; si ha così la *formula di Heaviside*:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right)(t) = \sum_{j=1}^k \frac{M(z_j)}{N'(z_j)} e^{z_j t}.$$

Esempio 20.

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}. \text{ Determinare } f.$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{per} \quad z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$\mathcal{L}f(z)$ analitica per $\Re z > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N'(z_1)} e^{z_1 y} + \frac{1}{N'(z_2)} e^{z_2 y} &= \\ &= \frac{1}{(-1 + i\sqrt{3}) + 1} e^{-\frac{1}{2}y + i\frac{\sqrt{3}}{2}y} + \frac{1}{(-1 - i\sqrt{3}) + 1} e^{-\frac{1}{2}y - i\frac{\sqrt{3}}{2}y} = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{y}{2}} \left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}y} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}y} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right). \end{aligned}$$

Osservazione. Questa antitrasformata si poteva determinare anche così'.

Ricordando che:

$$\mathcal{L}(e^{-ax} \sin bx)(p) = \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-ax} \cos bx)(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$$

e scrivendo $p^2 + p + 1 = (p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ si trova dalla 1^a formula, con $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\mathcal{L}\left(e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)(p) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

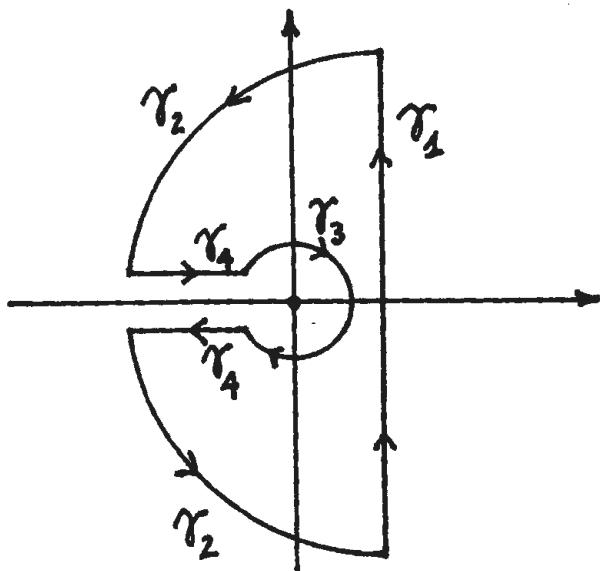
e dunque:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad \square$$

Vediamo un esempio in cui l'integrale di antitrasformazione va calcolato direttamente, con metodi di variabile complessa, ma non si può applicare la formula di Heaviside.

Esempio 21. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{z}})$.

La funzione $e^{-\sqrt{z}}$ ha un punto di diramazione in 0, quindi non si può ripetere la dimostrazione della formula di Heaviside, ma dobbiamo integrare lungo cammini del tipo:



L'integrale su γ_1 darà l'integrale cercato, quando il raggio della circonferenza maggiore tende a $+\infty$. L'integrale su γ_3 di $e^{-\sqrt{z}+zy}$ tende a 0 quando il raggio di γ_3 tende a zero, perché la funzione è limitata in un intorno dell'origine e la lunghezza di γ_3 tende a zero. L'integrale sui 2 archi γ_2 tende a zero quando il raggio di γ_2 tende a $+\infty$, perché:

$$\text{sia } z = \rho e^{i\theta}, \quad \sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned}\Re(z y - \sqrt{z}) &= \rho y \cos \vartheta - \sqrt{\rho} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ |e^{zy} - \sqrt{z}| &\leq e^{\rho y \cos \vartheta} - \sqrt{\rho} \cos \frac{\vartheta}{2}.\end{aligned}$$

Per ϑ discosto da π , $\cos \frac{\vartheta}{2}$ è discosto da zero, $-\sqrt{\rho} \cos \frac{\vartheta}{2} \leq -\text{cost.} \cdot \sqrt{\rho}$ mentre $\rho \cos \vartheta \leq s_0$, perciò:

$$|e^{zy} - \sqrt{z}| \leq e^{ys_0 - \text{cost.} \cdot \sqrt{\rho}} \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow \infty.$$

Se invece ϑ è vicino a π , $\cos \vartheta$ è negativo e:

$$e^{\rho y \cos \vartheta} - \sqrt{\rho} \cos \frac{\vartheta}{2} \rightarrow 0 \quad \text{per } \rho \rightarrow \infty.$$

Dunque l'integrale su γ_2 tende a zero. Infine, calcoliamo gli integrali lungo i segmenti γ_4 . Fissata la determinazione di $e^{-\sqrt{z}}$ per cui in $1/\sqrt{z}$ vale 1 si ha che sul segmento superiore è:

$$e^{-\sqrt{z}} = e^{-i\sqrt{|x|}}$$

mentre sul segmento inferiore è:

$$e^{-\sqrt{z}} = e^{i\sqrt{|x|}}$$

e la somma dei 2 integrali tende a:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^{xy} e^{-i\sqrt{|x|}} dx + \int_0^{-\infty} e^{xy} e^{i\sqrt{|x|}} dx &= \\ = -2i \int_{-\infty}^0 e^{xy} \sin \sqrt{|x|} dx &= -2i \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \sqrt{x} dx.\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$0 = \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{zy - \sqrt{z}} dz - 2i \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \sqrt{x} dx.$$

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{zy - \sqrt{z}} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \sqrt{x} dx.$$

La determinazione dell'antitrasformata è così ricondotta al calcolo dell'integrale reale:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \sqrt{x} dx = (\text{sostituendo } \sqrt{x} = t) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} t e^{-t^2 y} \sin t dt = (\text{per parti}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{y} e^{-t^2 y} \sin t \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-t^2 y} \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2y\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yt^2} e^{it} dt = (\text{integrale notevole calcolato nell'es. 1, § 1}) = \\ &= \frac{1}{2y\pi} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y}}. \end{aligned}$$

E in definitiva:

$$F(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{1}{4y}}.$$

15.8. SOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE O EQUAZIONI DI CONVOLUZIONE MEDIANTE TRASFORMATE

Esempio 22.

$$y'(x) - ay(x) = H(x)e^{-ax} \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Possiamo aspettarci una soluzione $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, data la discontinuità del termine noto. Supponendo che l'equazione abbia soluzione in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, trasformiamo con Fourier:

$$ix\hat{y} - a\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ix}$$

$$\hat{y} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-ix} \cdot \frac{1}{a+ix} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Poiché $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+x^2}$ si ha:

$$y(x) = -\frac{1}{2a} e^{-a|x|}.$$

Osservazioni. Operando a questo modo abbiamo trovato una sola soluzione. Se si integra l'equazione con metodi elementari, o con la trasformata di Laplace (per $x > 0$) si trova:

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{ax} & x < 0 \\ c_2 e^{ax} + \frac{\operatorname{Sh} ax}{a} & x > 0 \end{cases}$$

con c_1, c_2 arbitrarie. Se imponiamo che y sia continua trovo $c_1 = c_2$; se imponiamo che y sia $L^1(\mathbb{R})$ troviamo $c_2 = -\frac{1}{2a}$. Osservare che noi abbiamo supposto implicitamente $y \in L^1$ per calcolare \hat{y} , e y continua (anzi: assolutamente continua) per affermare che $(y')\hat{y} = ix\hat{y}$. (Infatti la dimostrazione di questa formula usa l'integrazione per parti, che vale per funzioni assolutamente continue).

Esempio 23.

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

È noto che quest'equazione ha soluzioni

$$y = \operatorname{arctg} x + \text{cost.}$$

Osservare che nessuna di queste funzioni sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Cosa succede se cerchiamo soluzioni con Fourier?

$$ix\hat{y} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

$$\hat{y} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|x|}}{x}.$$

\hat{y} è una funzione discontinua in 0, perciò non è trasformata di una funzione $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; non è neanche $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, quindi non è possibile antitrasformare, e il metodo fallisce.

Esempio 24.

$$y'' - \omega^2 y = f(x) \quad (\omega > 0).$$

Cerchiamo soluzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Trasformando si ha:

$$-x^2\hat{y} - \omega^2\hat{y} = \hat{f}$$

$$\hat{y} = -\frac{\hat{f}}{x^2 + \omega^2}$$

Poiché $\frac{1}{x^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e^{-\omega|x|})$, si ha:

$$y(x) = -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (f * e^{-\omega|x|}) = -(K * f)(x) \text{ con } K(x) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x|}.$$

Osservazioni. Se si risolve l'equazione col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, si trova:

$$y(x) = -(K * f)(x) + ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Questa soluzione sta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ solo se $a = b = 0$. Se si risolve

l'equazione, per $x > 0$, con la trasformata di Laplace, si ha:

$$s^2 \mathcal{L}y - sy(0) - y'(0) - \omega^2 \mathcal{L}y = \mathcal{L}f$$

$$\mathcal{L}y = \frac{\mathcal{L}f}{s^2 - \omega^2} + y(0) \frac{s}{s^2 - \omega^2} - \frac{y'(0)}{s^2 - \omega^2}$$

$$y(x) = \frac{1}{\omega} (\operatorname{Sh} \omega x * f) + y(0) \cdot \operatorname{Ch} \omega x - y'(0) \frac{\operatorname{Sh} \omega x}{\omega} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{Sh} \omega(x-y) f(y) dy + a \operatorname{Ch} \omega x + b \operatorname{Sh} \omega x$$

$$\text{con } a = y(0), \quad b = -\frac{y'(0)}{\omega}.$$

Questo metodo è più adatto a tener conto di condizioni iniziali.

Esempio 25.

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

Per trasformare xy' ricordiamo che:

$$\mathfrak{F}(xf(x)) = i(\mathfrak{F}f)'(x)$$

perciò:

$$\mathfrak{F}(xy') = i(\mathfrak{F}(y'))' = i(ix\hat{y})' = -(\hat{y} + x\hat{y}').$$

Dunque l'equazione diventa:

$$-x^2\hat{y} - 2\hat{y} - 2x\hat{y}' + 2\hat{y} = 0$$

$$\hat{y}' = -\frac{x}{2}\hat{y}$$

Integrando si ha:

$$\hat{y}(x) = ce^{-\frac{x^2}{4}}$$

e antitrasformando:

$$y(x) = ce^{-x^2} \quad (\text{con } c \text{ costante arbitraria}).$$

Abbiamo trovato una sola famiglia di soluzioni. Evidentemente la seconda famiglia di soluzioni dell'equazione di partenza consiste di funzioni non $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Osservare che il metodo usato ha abbassato di grado l'equazione in quanto i coefficienti erano polinomi di grado inferiore all'ordine dell'equazione.

Esempio 26.

$$xu'' + u' - xu = 0.$$

Anche qui si può usare il metodo dell'esempio precedente:

$$\begin{aligned} (xu'')\hat{} &= i[(u'')\hat{}]' = i[-x^2\hat{u}]' = -i(2x\hat{u} + x^2\hat{u}'); \\ (xu)\hat{} &= i\hat{u}'. \end{aligned}$$

L'equazione diventa:

$$-2ix\hat{u} - ix^2\hat{u}' + ix\hat{u} - i\hat{u}' = 0$$

$$(x^2 + 1)\hat{u}' = -x\hat{u}$$

$$\frac{\hat{u}'}{\hat{u}} = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$\log |\hat{u}| = -\frac{1}{2} \log (1+x^2) + c$$

$$\hat{u}(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Occorre ora antitrasformare. La funzione $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ non sta in $L^1(\mathbb{R})$, ma sta in $L^2(\mathbb{R})$.

Dunque esiste una famiglia di soluzioni $L^2(\mathbb{R})$, date da:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{\sqrt{1+y^2}} dy$$

dove l'integrale va inteso come limite in norma L^2 , per $R \rightarrow +\infty$, di $\int_{-R}^R \dots$, oppure come integrale in valore principale.

Esempio 27. Risolvere l'equazione integrale:

$$y + e^{-|x|} * y = e^{-|x|}.$$

Trasformando ho:

$$\hat{y} + \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} \cdot \hat{y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{y} \left(1 + \frac{2}{1+x^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3+x^2}.$$

Poiché

$$(e^{-a|x|})^\wedge = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+x^2}$$

si ha:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|x|}.$$

Esempio 28. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ può esistere soluzione in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione:

$$y + \alpha y * e^{-x^2} = f$$

con $f \in L^1(\mathbb{R})$ assegnato, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e scrivere y come integrale.

Trasformando si ha:

$$\hat{y} + \sqrt{2\pi} \alpha \hat{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} = \hat{f}$$

$$\hat{y} = \frac{\hat{f}}{1 + \alpha \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}}.$$

Se $\alpha \sqrt{\pi} > -1$, cioè $\alpha > -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, la funzione

$$\frac{1}{1 + \alpha \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}}$$

è continua e limitata, perciò il suo prodotto con \hat{f} è una funzione $L^1(\mathbb{R})$ e si può antitrasformare. Si ha:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(y) e^{ixy}}{1 + \alpha \sqrt{\pi} e^{-y^2/4}} dy.$$

La y così assegnata non sta ancora necessariamente in $L^1(\mathbb{R})$ (è trasformata di una funzione L^1). Se ad esempio $f \in \mathcal{I}$, anche

$$\frac{\hat{f}}{1 + \alpha \sqrt{\pi} e^{-y^2/4}} \in \mathcal{I} \text{ e ha pertanto trasformata in } \mathcal{I};$$

in particolare allora $y \in L^1(\mathbb{R})$.

Esempio 29.

$$y + \frac{1}{2} e^{-|x|} * y = e^{-|x|} \cos x.$$

Trasformando si ha:

Grafici di trasformate di Fourier

fig. 15.1. (v. esempio 2)

$$f(x) = e^{-x^2/2} = \mathcal{F}f(x)$$

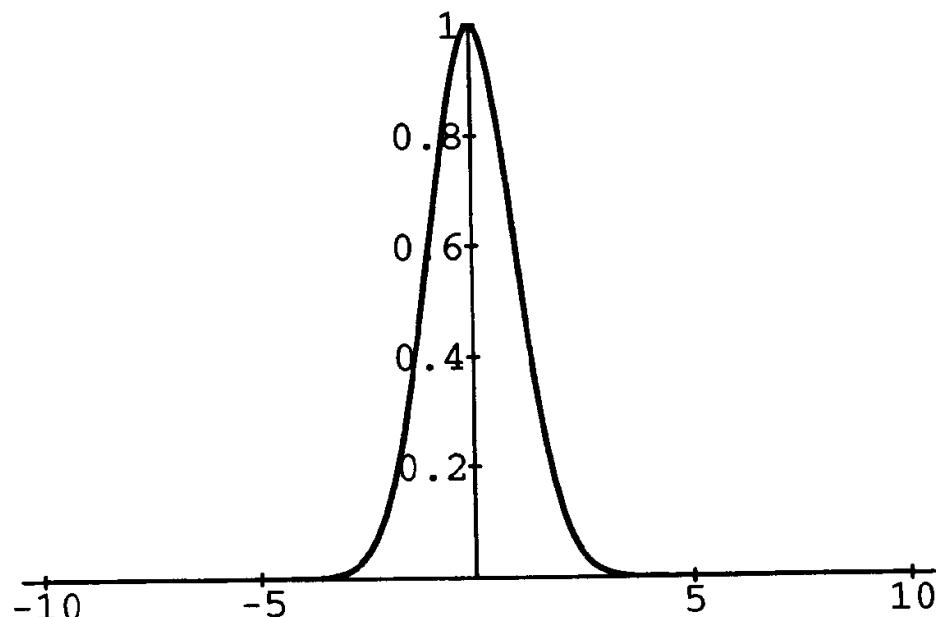
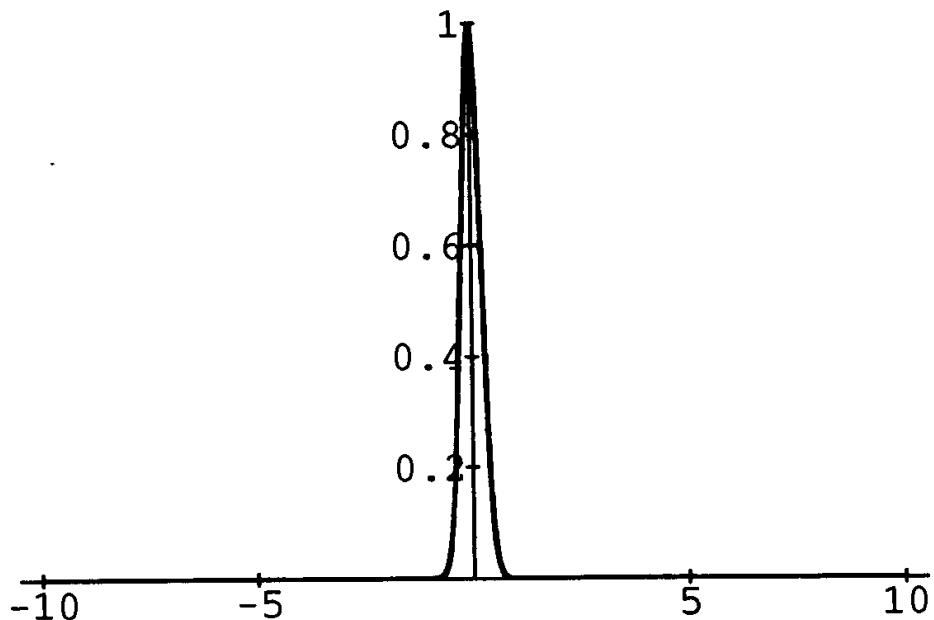


fig. 15.2. (v. esempio 2)

$$f(x) = e^{-10x^2}$$



$$\mathcal{F}f(x) = 0,07 e^{-0,0025 x^2}$$

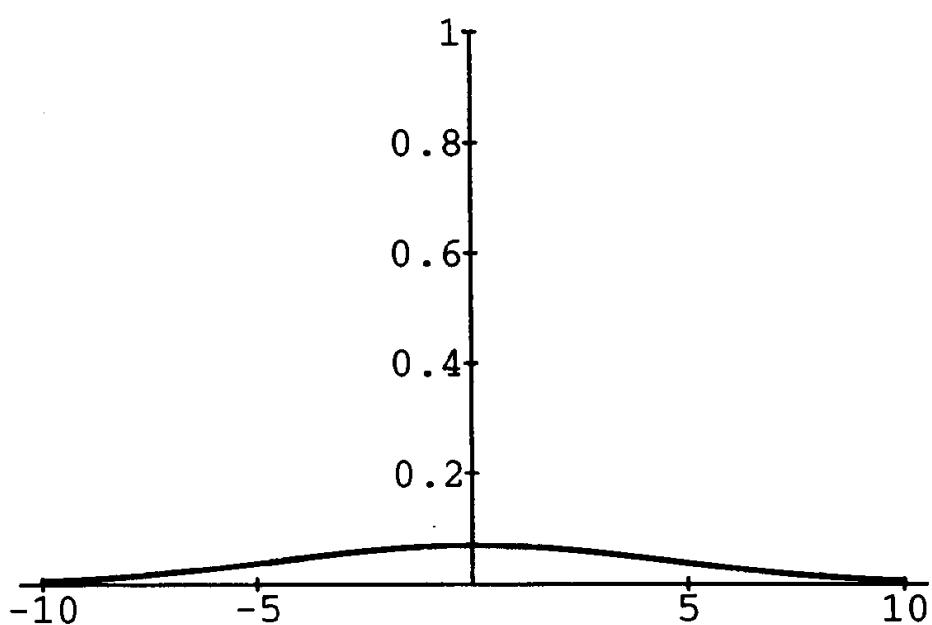
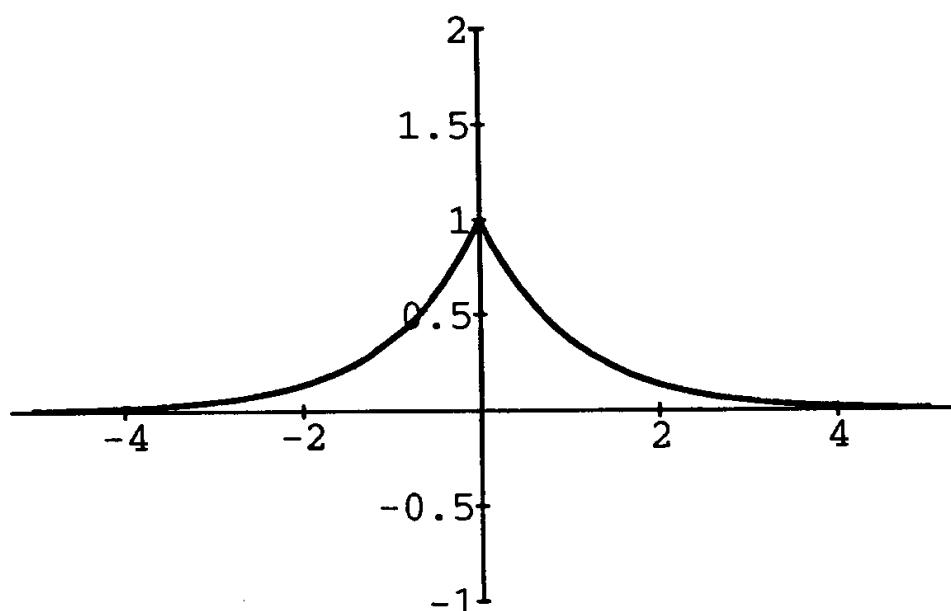


fig. 15.3. (v. esempio 4)

$$f(x) = e^{-|x|}$$



$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{0,8}{1+x^2}$$

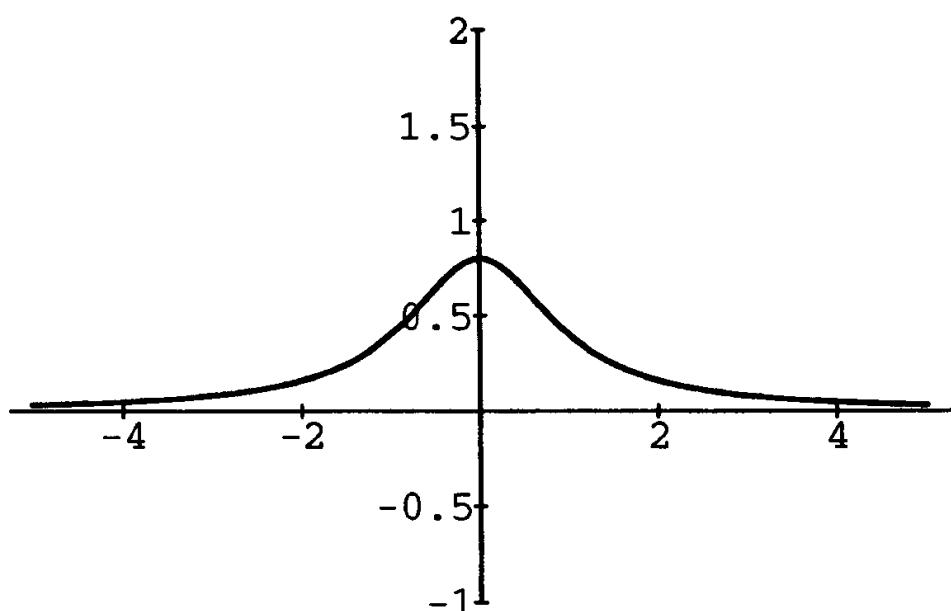
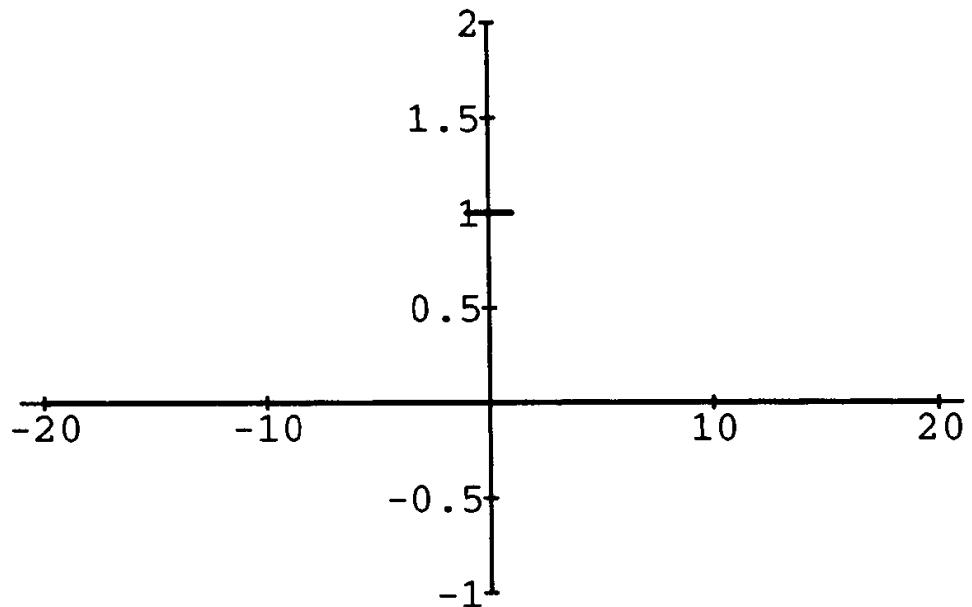


fig. 15.4. (v. esempio 7)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



$$\mathfrak{F}f(x) = 0.8 \frac{\sin x}{x}$$

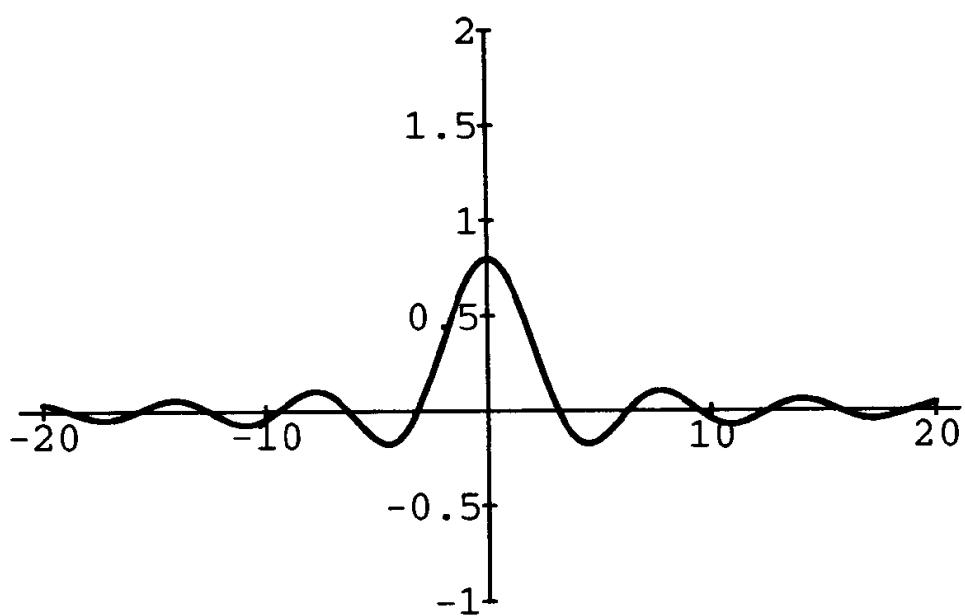
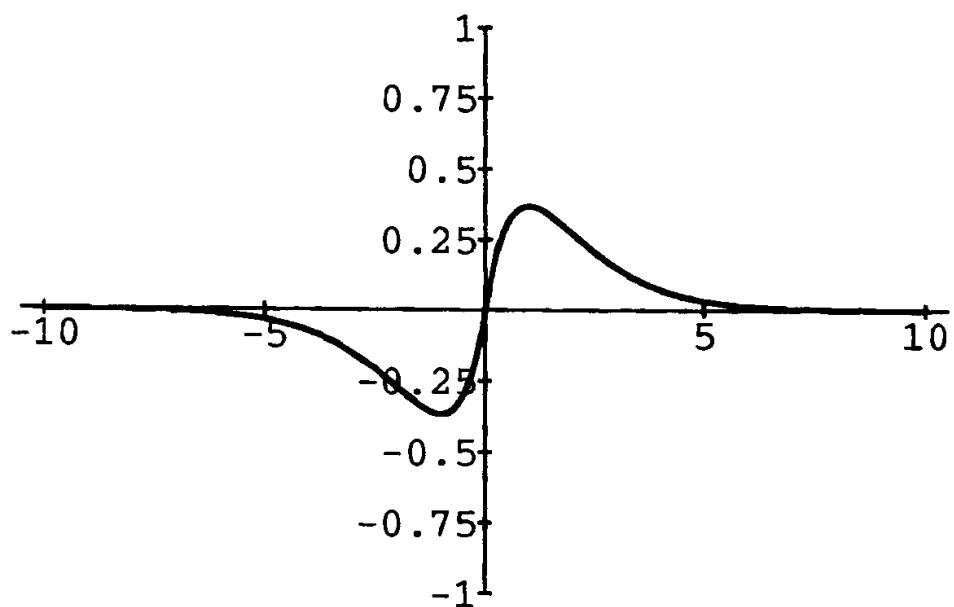


fig. 15.5. (v. esempio 9)

$$f(x) = xe^{-|x|}$$



$$Im \mathfrak{F}f(x) = -\frac{1,6x}{(1+x^2)^2} \quad (\mathfrak{F}f(x) = -\frac{1,6ix}{(1+x^2)^2})$$

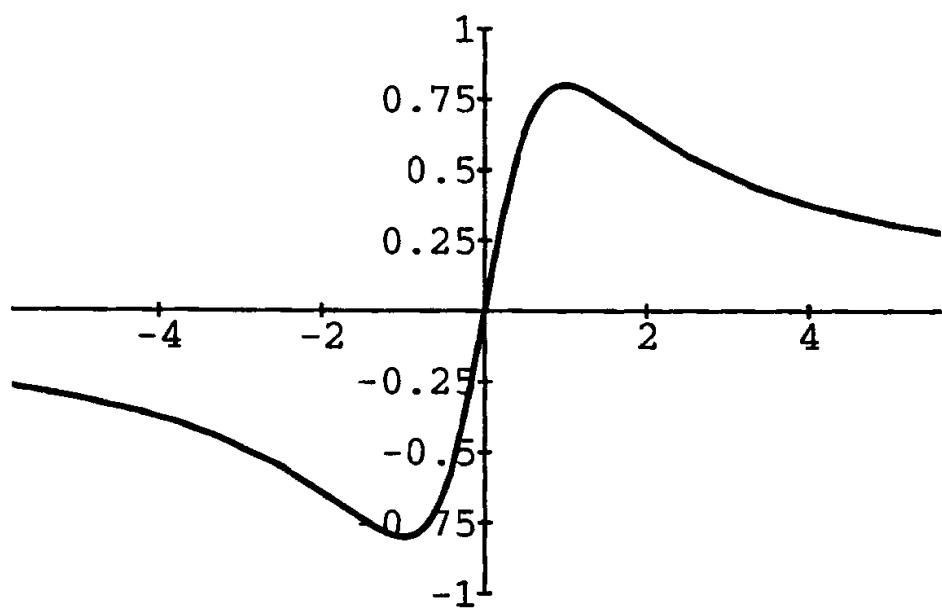
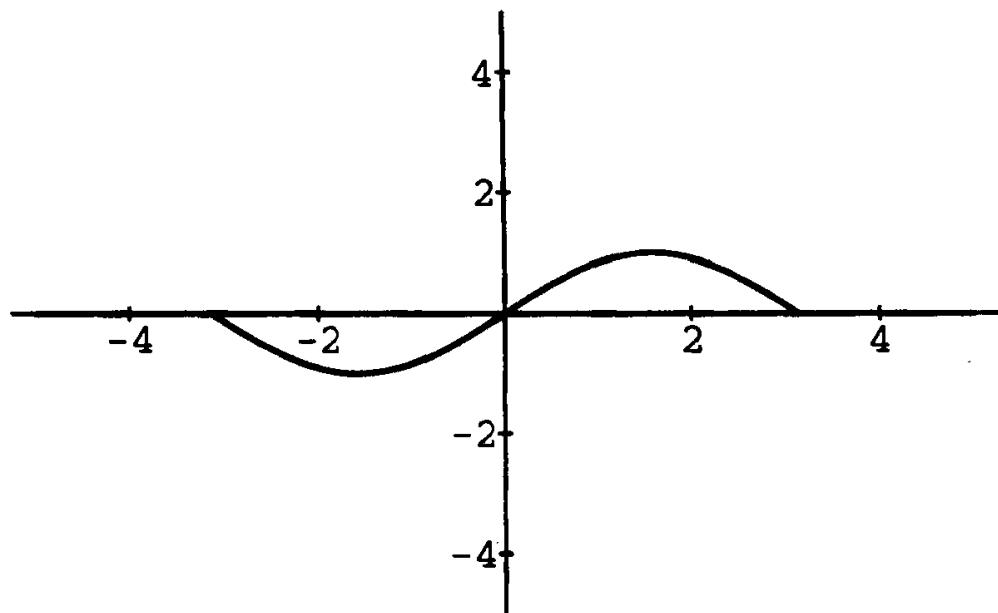


fig. 15.6. (v. esempio 10).

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$



$$\operatorname{Im} \mathfrak{F}f(x) = 0,8 \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} \quad (\mathfrak{F}f(x) = 0,8 i \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1})$$

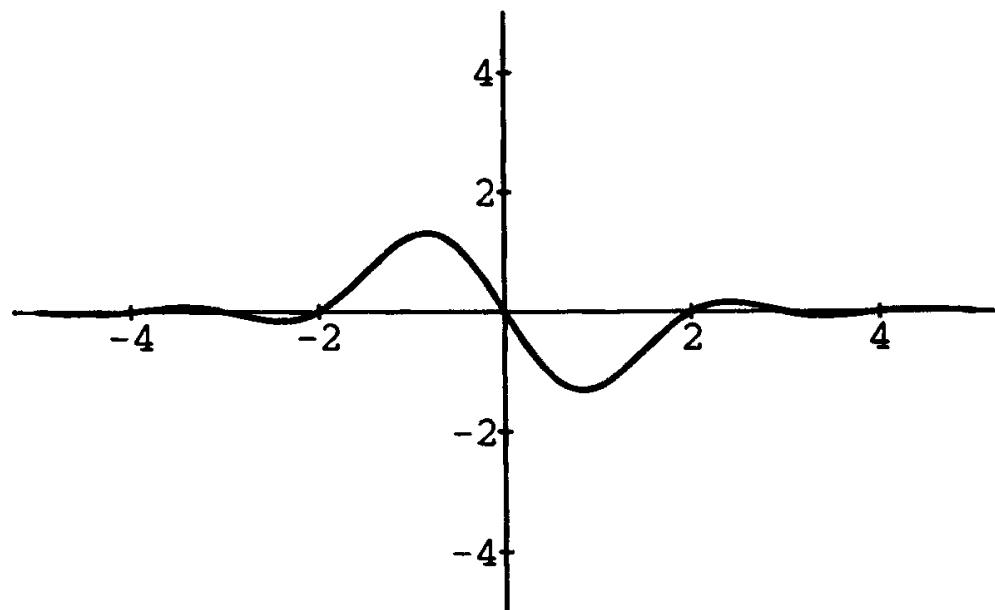
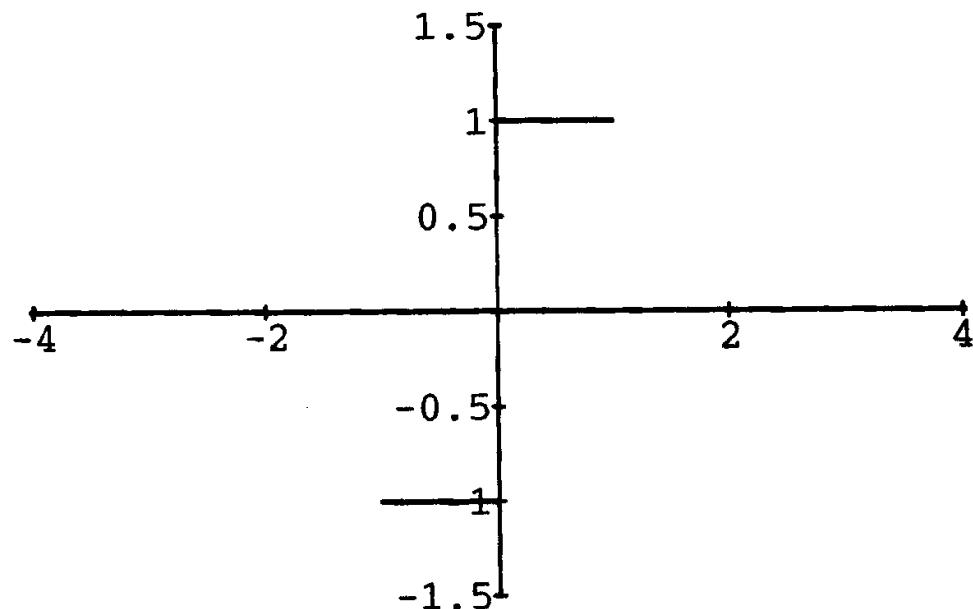


fig. 15.7. (v. esempio 11)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



$$Im \mathcal{F}f(x) = 0,8 \frac{\cos x - 1}{x} \quad (\mathcal{F}f(x) = 0,8 \frac{\cos x - 1}{x})$$

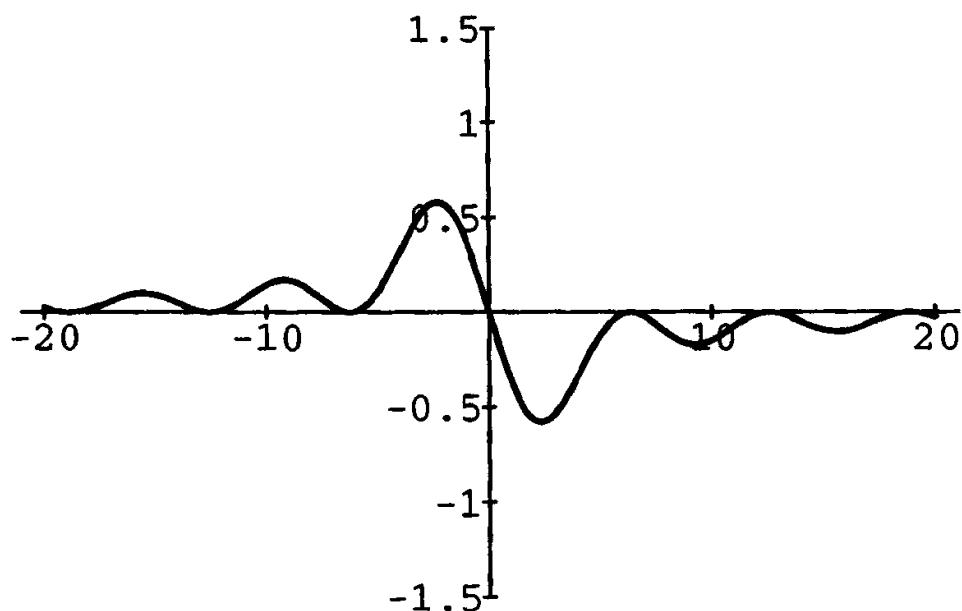
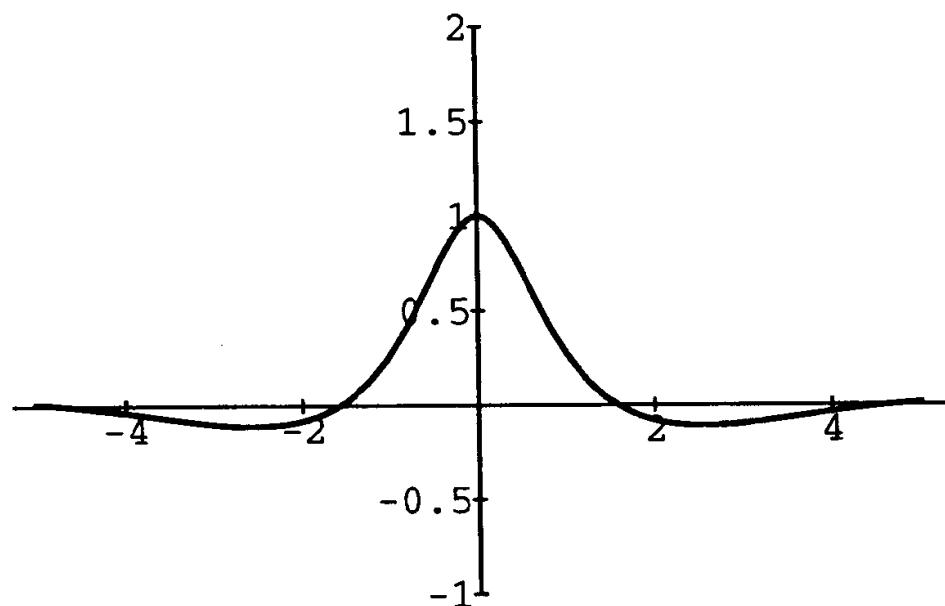


fig. 15.8. (v. esempio 17)

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$



$$\mathfrak{F}f(x) = \begin{cases} 1,9 e^{-|x|} & |x| \geq 1 \\ 0,46 \operatorname{Ch} x & |x| \leq 1. \end{cases}$$

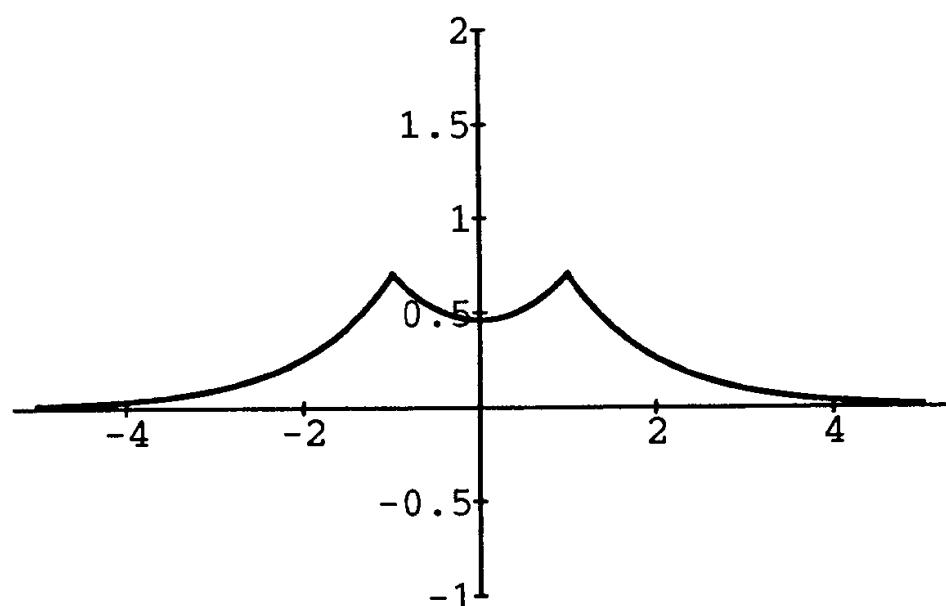
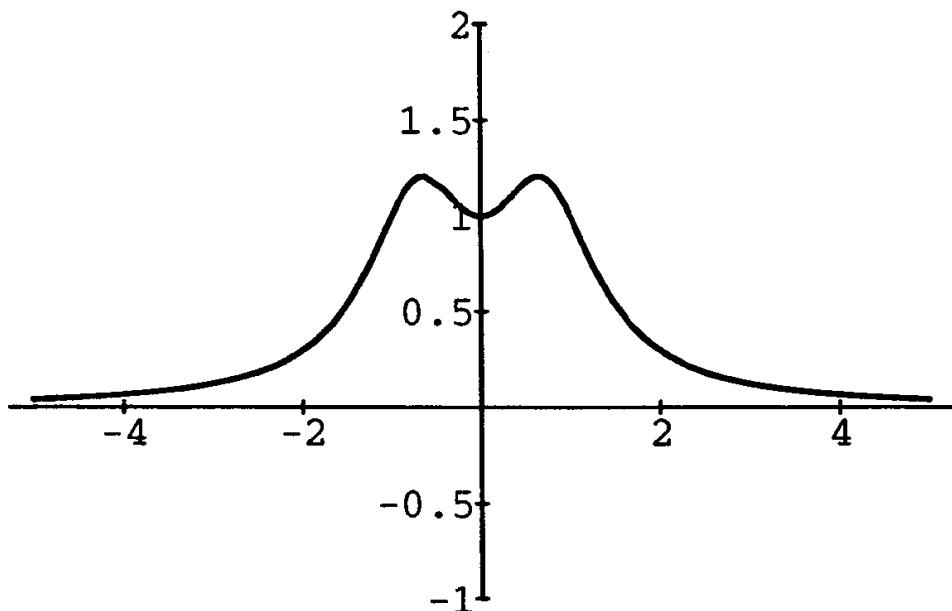
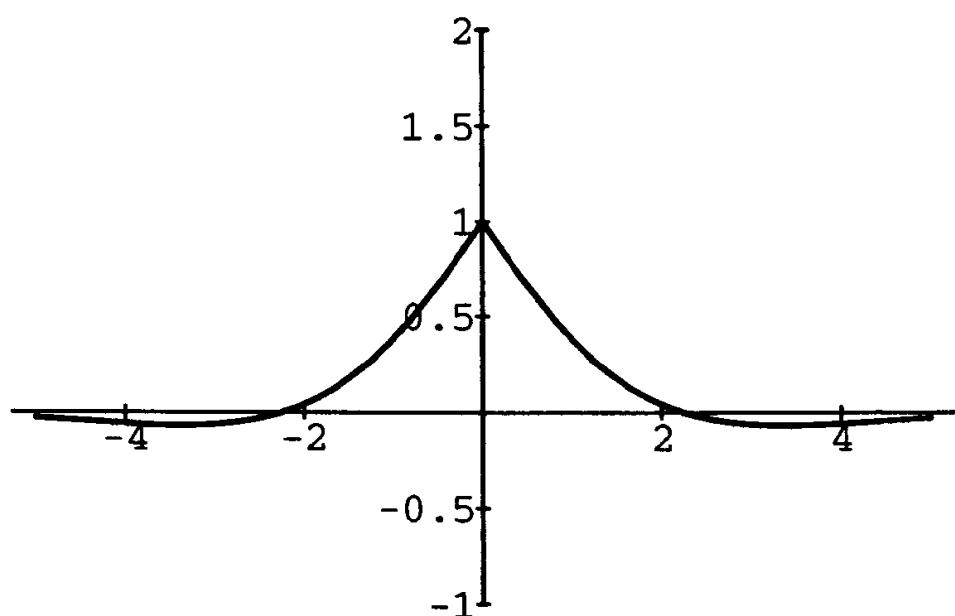


fig. 15.9. (v. esempio 18)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$



$$\mathfrak{F}f(x) = e^{-0.7|x|} \cos(0.7x)$$



Parte III

Equazioni a derivate parziali

16. EQUAZIONI QUASILINEARI DEL 1° ORDINE

16.1. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER EQUAZIONI QUASILINEARI DEL 1° ORDINE

Consideriamo in questo capitolo equazioni a derivate parziali del 1° ordine; per semplicità studieremo il caso di 2 variabili (cioè la funzione incognita è $u(x, y)$), ma ciò che diremo vale in generale per funzioni di n variabili; ci occupiamo però non della generica equazione del 1° ordine, ma solo di equazioni quasilineari, ossia del tipo:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (1)$$

Sono casi particolari di equazioni quasilineari le equazioni lineari:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y)$$

oppure equazioni che contengono effettive non linearità, come ad esempio:

$$u_x + u \cdot u_y = 0$$

$$u_x + u_y = u^2$$

ma non sono invece equazioni quasilineari le seguenti:

$$u_x^2 + u_y^2 = u$$

$$u_x u_y = f(x, y).$$

Per ricercare le soluzioni di (1) procediamo come segue. Rappresentiamo la soluzione $u(x, y)$ come una superficie $z = u(x, y)$ nello spazio xyz (“superficie integrale”) e consideriamo le funzioni a, b, c (assegnate) come un campo di vettori definito nello spazio xyz . Poiché il vettore $(u_x, u_y, -1)$ è il vettore normale alla superficie integrale, la (1) dice che il vettore (a, b, c) è ortogonale al vettore

normale alla superficie u , ossia il vettore (a, b, c) è tangente in ogni punto alla superficie $z = u(x, y)$. La direzione del vettore (a, b, c) si chiama direzione caratteristica; le superfici integrali sono dunque superfici tangenti in ogni punto alla direzione caratteristica. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x, y, u) \\ \frac{dy}{ds} = b(x, y, u) \\ \frac{du}{ds} = c(x, y, u). \end{cases} \quad (2)$$

Questa sistema definisce una famiglia di curve nello spazio xyu ; la famiglia di soluzioni $(x(s), y(s), u(s))$ dipende da tre costanti di integrazione, ma la famiglia di curve (grafico delle funzioni $(x, y, u)(s)$) dipende da due parametri: ad esempio per ogni punto del piano xy passerà una e una sola curva caratteristica (cioè di questa famiglia). Se ora una superficie S è unione di linee caratteristiche, in ogni suo punto P passa una caratteristica γ ; il vettore tangente a γ (che per definizione è un vettore caratteristico) è anche tangente a S ; pertanto S è una superficie integrale. Viceversa, sia S una superficie integrale, P_0 un punto di S e γ la caratteristica passante per P_0 . Si dimostra, in base al teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie (supponendo, come faremo sempre, che le funzioni $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ siano di classe C^1) che allora γ giace interamente su S . Da ciò segue che ogni superficie integrale è unione di linee caratteristiche.

In conclusione, le superfici integrali dell'equazione (1) sono tutte e sole le superfici che si ottengono prendendo l'unione di linee caratteristiche, ossia di linee che risolvono il sistema (2).

Ciò mostra che il problema di risolvere un'equazione quasilineare in 2 variabili (o in n variabili) è ricondotto al problema di risolvere un sistema di 3 (o $n+1$) equazioni differenziali ordinarie.

Vediamo ora come si risolve il problema di Cauchy per l'equazione (1). Sia Γ la linea portante il dato, nel piano x, y .

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di Cauchy:

$$u|_{\Gamma} = h,$$

con h funzione assegnata lungo Γ ; perciò possiamo considerarla una $h(t)$. Siamo interessati a soluzioni locali del problema di Cauchy (non potendo sperare di ottenere in generale soluzioni globali, in analogia a quanto accade per le equazioni differenziali ordinarie). Perciò vorremmo che il dato sia assunto lungo un arco della curva Γ passante per il punto $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$.

Risolviamo dunque il sistema (2) imponendo che la superficie integrale:

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \\ u = U(s, t) \end{cases} \quad (3)$$

soddisfi le condizioni:

$$\begin{cases} X(0, t) = \varphi(t) \\ Y(0, t) = \psi(t) \\ U(0, t) = h(t). \end{cases} \quad (4)$$

Ciò è possibile per t in un opportuno intorno di t_0 e s in un opportuno intorno di 0, se a, b, c sono funzioni \mathcal{C}^1 di x, y, u , in base ai teoremi sull'esistenza e dipendenza continua dai parametri delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Le (3) rappresentano, nello spazio xyu , le equazioni parametriche di una superficie che è unione di linee caratteristiche (perciò è una superficie integrale). In base alle (4) poi è assunto il dato iniziale.

Ora, per avere la effettiva soluzione della (1), ossia una $u = u(x, y)$, occorre ricavare dalle prime due equazioni di (3) s e t in funzione di x e y , e sostituire nella 3^a equazione. La condizione di invertibilità del sistema

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \end{cases}$$

in un intorno di $(0, t_0)$ è:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} X_s(0, t_0) & Y_s(0, t_0) \\ X_t(0, t_0) & Y_t(0, t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Ciò significa:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

con $(x_0, y_0, z_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0), h(t_0))$.

Questo si può interpretare dicendo che la proiezione sul piano (x, y) del vettore caratteristico in (x_0, y_0, z_0) non deve essere tangente in (x_0, y_0) alla linea portante il dato. Questa è la condizione di solubilità locale del problema di

Cauchy.

Osservazioni. In pratica, per risolvere l'equazione (1) si può procedere spesso così'.

1º. Si scrive l'integrale generale del sistema (2), che coinvolge 3 costanti di integrazione k_1, k_2, k_3 :

$$\begin{cases} x = x(s, k_1, k_2, k_3) \\ y = y(s, k_1, k_2, k_3) \\ u = u(s, k_1, k_2, k_3). \end{cases} \quad (5)$$

2º. Il dato di Cauchy è spesso una condizione del tipo $u(x, 0) = f(x)$. Perciò Γ ha equazioni:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ h(t) = f(t) \end{cases}$$

e si impongono le condizioni:

$$\begin{cases} x(0, k_1, k_2, k_3) = t \\ y(0, k_1, k_2, k_3) = 0 \\ u(0, k_1, k_2, k_3) = f(t) \end{cases} \quad (6)$$

ossia:

$$\begin{cases} y(0, k_1, k_2, k_3) = 0 \\ u(0, k_1, k_2, k_3) = f(x(0, k_1, k_2, k_3)). \end{cases}$$

3º. Queste sono 2 equazioni nelle 3 incognite k_1, k_2, k_3 . Ricavando 2 di queste funzioni dalla 3ª (oppure ricavando tutte e 3 in funzione di t) e sostituendo nelle

(5) si ottengono x, y, u in funzione di 2 parametri. (Equazioni di tipo (3)).

4º. Eliminando i 2 parametri tra le 3 equazioni si ottiene un'unica equazione in x, y, u che definisce, in generale implicitamente, $u(x, y)$.

Esempio 1. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_x + uu_y = u \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Il sistema (2) è:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = 1 \\ \frac{dy}{ds} = u \\ \frac{du}{ds} = u \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} x = s + k_1 \\ y = k_3 e^s + k_2 \\ u = k_3 e^s. \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali (ossia scrivendo le (6)) si ha:

$$\begin{cases} k_1 = t \\ k_3 + k_2 = 0 \\ k_3 = f(t). \end{cases}$$

Mediane queste le precedenti diventano:

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = f(t) [e^s - 1] \\ u = f(t) e^s. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni (3), che assegnano la superficie integrale in forma parametrica. Eliminiamo t ed s dalla 2^a e la 3^a:

$$\frac{y}{e^s - 1} = \frac{u}{e^s}$$

da cui si ricava:

$$s = \log\left(\frac{u}{u-y}\right).$$

Dalla 1^a:

$$t = x - \log\left(\frac{u}{u-y}\right)$$

dalla 3^a:

$$u = f\left(x - \log\left(\frac{u}{u-y}\right)\right) \cdot \frac{u}{u-y}$$

ossia:

$$u - y = f\left(x - \log\left(\frac{u}{u-y}\right)\right)$$

equazione che definisce implicitamente la soluzione u .

Sia ad es. $f(x) = e^x$. Si ha:

$$u - y = e^x \cdot \frac{u - y}{u},$$

$$u(x, y) = e^x \quad (\text{soluzione del problema su tutto } \mathbb{R}^2).$$

Sia invece, ad es., $f(x) = e^{-x}$. Si ha:

$$u - y = e^{-x} \cdot \frac{u}{u-y}$$

$$u^2 - u(2y + e^{-x}) + y^2 = 0$$

$$u(x, y) = \frac{2y + e^{-x} \pm \sqrt{e^{-2x} + 4y}}{2}.$$

Affinché sia $u(x, 0) = e^{-x}$ si deve scegliere il segno $+$. La soluzione del problema è allora:

$$u(x, y) = \frac{2y + e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 4y}}{2},$$

soluzione del problema, definita solo nella regione di piano $y > -\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Osservare che avvicinandosi alla frontiera del campo di esistenza, $y = -\frac{1}{4}e^{-2x}$, il gradiente di u diventa ∞ . Il comportamento della soluzione $u(x, y)$ si capisce meglio tornando a considerare le equazioni parametriche della superficie integrale, nel nostro caso:

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = e^{-t} [e^s - 1] \\ u = e^{-t} [e^s]. \end{cases}$$

Uno studio di questa superficie mostra che essa non è il grafico di una funzione di (x, y) , ma può essere descritta come unione dei grafici di 2 funzioni distinte (quelle che corrispondono ai segni \pm nel calcolo $\sqrt{e^{-2x} + 4y}$). La linea lungo la quale la superficie “si ripiega su se stessa” è quella lungo la quale il gradiente di u diventa infinito e oltre la quale la u non esiste.

16.2. EQUAZIONI LINEARI

Il fenomeno visto nell'esempio precedente, della superficie integrale che non è grafico di una funzione (globalmente) è tipico delle equazioni non lineari. Nel caso lineare la situazione è più semplice. Consideriamo un'equazione:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y).$$

Il sistema (2) diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \\ \dot{u} = c(x, y)u + d(x, y). \end{cases}$$

Le prime due equazioni formano un sistema in 2 incognite, che può essere risolto indipendentemente dalla 3ª equazione, dando:

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \end{cases} \quad \begin{cases} X(0, t) = t \\ Y(0, t) = 0. \end{cases}$$

Questo rappresenta una famiglia a un parametro di curve nel piano. All'interno di una certa regione Ω del piano in cui il sistema differenziale ha soluzione, ogni punto (x_0, y_0) individua una sola curva di questa famiglia, passante per esso. In altre parole queste curve non si intersecano (né autointersecano) mai.

L'equazione in u diventa:

$$\frac{du}{ds} = (X(s, t), Y(s, t))u + d(X(s, t), Y(s, t)).$$

Per ogni t fissato è un'equazione differenziale lineare in u , che avrà una e una sola soluzione soddisfacente:

$$U(0, t) = f(t)$$

Perciò ad ogni $(x, y) \in \Omega$ si associa una sola coppia (s, t) e dunque un solo valore di u , ossia: la superficie integrale è (ovunque è definita) grafico di una funzione. Questo discende dal fatto che le proiezioni sul piano xy delle linee caratteristiche non si intersecano mai.

Esempio 2. Equazioni lineari a coefficienti costanti.

$$\begin{cases} au_x + bu_y = cu + d \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Il sistema caratteristico è:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b \\ \dot{u} = cu + d \end{cases}$$

che ha soluzioni:

$$\begin{cases} x = as + k_1 \\ y = bs + k_2 \\ u = k_3 e^{cs} - \frac{d}{c}. \end{cases}$$

Imponendo

$$\begin{cases} k_1 = t \\ k_2 = 0 \\ k_3 - \frac{d}{c} = f(t) \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} x = as + t \\ y = bs \\ u = \left(f(t) + \frac{d}{c} \right) e^{cs} - \frac{d}{c} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} s = \frac{y}{b} \\ t = x - \frac{a}{b} y \end{cases}$$

e quindi:

$$u(x, y) = \frac{d}{c} [e^{\frac{cy}{b}} - 1] + e^{\frac{cy}{b}} f(x - \frac{a}{b}y).$$

Osservazione. La soluzione vale per $b \neq 0$. Infatti se $b = 0$ la retta $y = 0$ è caratteristica, e non si può assegnare il dato lungo questa.

16.3. EQUAZIONI OMOGENEE

Nel caso in cui $c \equiv 0$ (equazione omogenea), l'equazione (lineare o non lineare) ha proprietà particolari. Infatti l'equazione caratteristica risulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y, u) \\ \dot{y} = b(x, y, u) \\ \dot{u} = 0. \end{cases}$$

Risolvendo con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} X(0, t) = t \\ Y(0, t) = 0 \\ U(0, t) = f(t) \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \\ u = f(t). \end{cases}$$

Le prime due equazioni individuano una famiglia a un parametro di curve nel piano xy , proiezione delle linee caratteristiche. La 3ª dice che lungo ciascuna caratteristica il valore di u è costante. Ossia, se dalle prime 2 equazioni si ricava t

in funzione di x e y :

$$t = T(x, y)$$

la soluzione è del tipo

$$u(x, y) = f(T(x, y)) \quad \text{con } T(x, 0) = x.$$

Esempio 3.

$$\begin{cases} u_x + cu_y = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = c \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = s + t \\ y = cs \\ u = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{y}{c} \\ t = x - \frac{y}{c} \\ t = x - \frac{y}{c} \end{cases}$$

$$u(x, y) = f\left(x - \frac{y}{c}\right).$$

Lungo ogni linea $y = cx + \text{cost.}$ il valore di u è costante. Se y ha il significato di tempo e x di coordinata spaziale sulla retta, la u è un'onda che si muove con velocità $1/c$ mantenendo il suo "profilo" sempre uguale a quello della funzione $f(x)$.

16. Equazioni quasilineari del 1º ordine

Esercizi.

4. $\begin{cases} u_x + u_y = u^2 \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{u} = u^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = s + k_1 \\ y = s + k_2 \\ u = -\frac{1}{s + k_3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = t \\ k_2 = 0 \\ -\frac{1}{k_3} = h(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = s + t \\ y = s \\ u = -\frac{1}{s - \frac{1}{h(t)}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} s = y \\ t = x - y \\ u(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{h(x-y)} - y} \end{array} \right. \quad (\text{Soluzione})$$

5. $xu_x + yu_y = \alpha u \quad \alpha \text{ reale, } \neq 0.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = \alpha u \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = k_1 e^s \\ y = k_2 e^s \\ u = k_3 e^{\alpha s} \end{array} \right.$$

Dalle prime 2 equazioni si vede che tutte le rette uscenti dall'origine, nel piano xy , sono proiezioni di caratteristiche. Perciò il dato di Cauchy non può essere assegnato sulla retta $y = 0$ né su alcuna altra retta uscente dall'origine. Supponiamo allora di assegnare il dato ad es. sulla retta $y = 1$:

$$u(x, 1) = f(x).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = t \\ k_2 = 1 \\ k_3 = f(t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = te^s \\ y = e^s \\ u = f(t) e^{\alpha s} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} e^s = y \\ t = \frac{x}{y} \\ u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y^\alpha \end{cases} \quad \text{soluzione, valida per } y > 0.$$

Si osserva che se f è generica, u è una generica funzione omogenea di grado α ; l'equazione differenziale di partenza è infatti l'equazione di Eulero che determina le funzioni omogenee di grado α .

$$6. \quad \begin{cases} xu_x + yu_y + u_z = u \\ u(x, y, 0) = h(x, y). \end{cases}$$

In questo esempio l'equazione è in 3 variabili. Vedremo che il procedimento visto nel caso di 2 si ripete immutato:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 1 \\ \dot{u} = u \end{cases} \quad \begin{cases} x = k_1 e^s \\ y = k_2 e^s \\ z = s + k_3 \\ u = k_4 e^s \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \xi \\ k_2 = \eta \\ k_3 = 0 \\ k_4 = h(\xi, \eta) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi e^s \\ y = \eta e^s \\ z = s \\ u = e^s h(\xi, \eta) \end{cases} \quad \begin{cases} s = z \\ \xi = xe^{-z} \\ \eta = ye^{-z} \end{cases}$$

$u(x, y) = e^z h(xe^{-z}, ye^{-z}).$

16. Equazioni quasilineari del 1° ordine

7.
$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ \dot{u} = u \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -\dot{y} = -x$$

$$\begin{cases} x = k_1 \cos s + k_2 \sin s \\ y = -\dot{x} = k_1 \sin s - k_2 \cos s \\ u = k_3 e^s \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = t \\ -k_2 = 0 \\ k_3 = h(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \cos s \\ y = t \sin s \\ u = h(t)e^s \end{cases}$$

$$t = \sqrt{x^2 + y^2} \quad s = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$u(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

soluzione valida per $x > 0$.

16.4. EQUAZIONI QUASILINEARI CHE MODELLIZZANO PROBLEMI DI TRAFFICO

Consideriamo ora una classe di equazioni quasilineari omogenee, del tipo:

$$u_y + c(u) u_x = 0$$

Tali equazioni nascono in modo naturale da vari tipi di modelli. Prendiamo in esame, a titolo di esempio, il seguente modello di un problema di traffico

16. Equazioni quasilineari del 1º ordine

automobilistico. Consideriamo un certo tratto di autostrada, senza entrate e uscite, e introduciamo le 2 grandezze:

$\varrho(x, t)$ = densità di vetture, cioè n^o di vetture per unità di lunghezza all'istante t nel punto x ;

$q(x, t)$ = flusso di vetture, cioè n^o di vetture che transitano per il punto x nell'unità di tempo all'istante t .

Sia (x_1, x_2) il tratto di strada. Il n^o di vetture in questo tratto all'istante t è:

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x, t) dx.$$

Perciò:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x, t) dx$$

rappresenta il tasso istantaneo di variazione del n^o di vetture in (x_1, x_2) . D'altro canto questo tasso istantaneo di variazione è anche uguale a:

$$q(x_1, t) - q(x_2, t).$$

Uguagliando le 2 espressioni, dividendo per $x_2 - x_1$ e prendendo $\lim_{x_2 \rightarrow x_1}$ di ambo i membri si ha:

$$\varrho_t = -q_x$$

ossia:

$$\varrho_t + q_x = 0 \quad \text{"equazione di bilancio"}$$

Questa equazione da sola non può determinare p e q ; ma ci si può aspettare che tra le 2 grandezze intercorra una relazione, del tipo:

$$q = Q(\varrho)$$

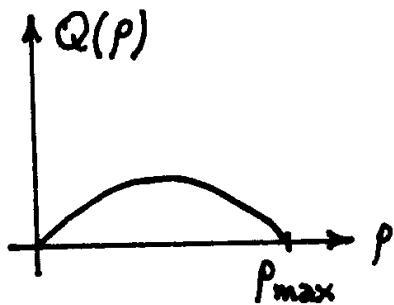
(il flusso di vetture dipende dalla loro densità). Ad esempio, si può supporre una relazione del tipo:

$$Q(\varrho) = a\varrho (\varrho_{\max} - \varrho)$$

oppure:

$$Q(\varrho) = a\varrho \left(\log \frac{\varrho_{\max}}{\varrho} \right)$$

Sono curve del tipo:



e dicono che all'aumentare della densità aumenta il flusso, fino a una certa densità critica oltre la quale il flusso diminuisce, fino a bloccarsi totalmente nel caso di una densità massima di "saturazione". (Vetture immobili incolonnate). Se $q = Q(\varrho)$, $q_x = Q'(\varrho) \cdot \varrho_x$ e l'equazione di bilancio diventa:

$$\varrho_t + Q'(\varrho) \varrho_x = 0$$

ossia:

$$\varrho_t + c(\varrho) \varrho_x = 0.$$

Salvo il modello banale in cui $Q(\varrho)$ è lineare ($Q = a\varrho$) e c risulta costante (dunque la soluzione $\varrho(t, x) = f(x - ct)$), l'equazione ottenuta è effettivamente non lineare. È omogenea, perciò ϱ sarà costante lungo le caratteristiche. Il

sistema caratteristico è:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = c(\varrho) \\ \dot{\varrho} = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} t = s + k_1 \\ x = c(k_3)s + k_2 \\ \varrho = k_3 \end{cases} & \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \tau \\ k_3 = f(\tau) \end{cases} \\ \begin{cases} x = c(f(\tau))t + \tau \\ \varrho = f(\tau). \end{cases} & & (1) \end{aligned}$$

Eliminando τ tra le (1) si ottiene:

$$\varrho = f(x - t \cdot c(\varrho))$$

equazione che definisce implicitamente ϱ ; le equazioni parametriche della superficie integrale sono invece:

$$\begin{cases} t = s \\ x = c(f(\tau))s + \tau \\ \varrho = f(\tau). \end{cases}$$

Si può comprendere qualitativamente il fenomeno osservando le (1). Sia

$$F(\tau) \equiv c(f(\tau)).$$

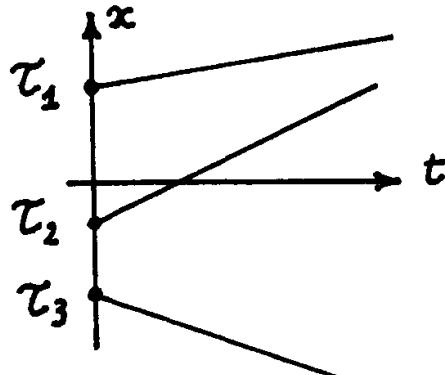
Le (1) sono:

$$\begin{cases} x = F(\tau)t + \tau \\ \varrho = f(\tau). \end{cases}$$

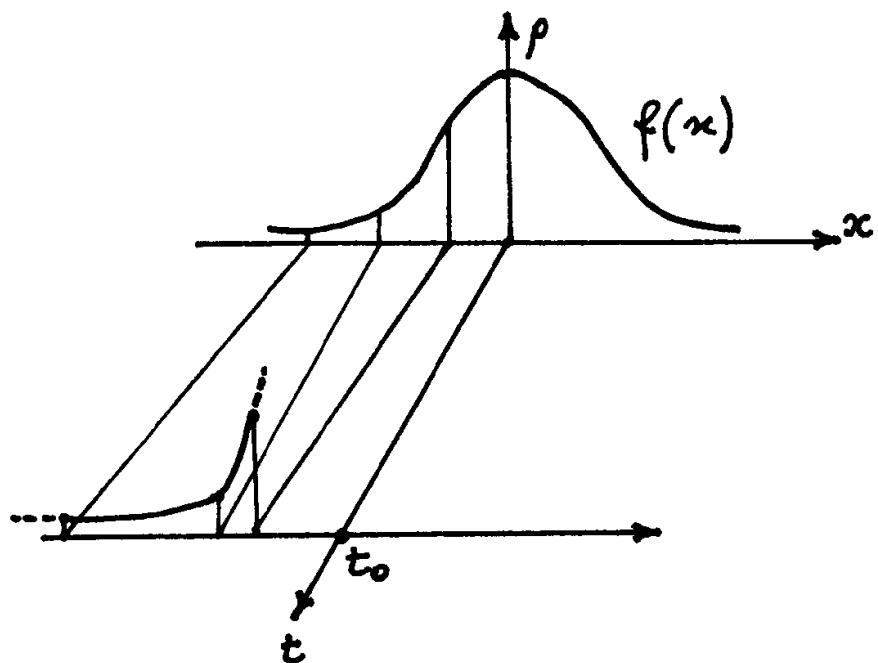
La 1ª equazione è l'equazione delle linee caratteristiche (o meglio: della loro proiezione sul piano (t,x)) al variare del parametro τ . Come si vede sono rette passanti per $(x,t) = (\tau, 0)$, di pendenza $F(\tau)$. Considerando $t > 0$, possiamo

16. Equazioni quasilineari del 1º ordine

rappresentarle in un grafico:



Ad ogni istante t il grafico di u si può ricostruire da quello di f : nel punto x il valore di u è quello che aveva f nel punto che sta sulla stessa caratteristica che passa per (x, t) .



Si vede che dove le caratteristiche, per t crescente, si aprono a ventaglio, il grafico di u risulta “meno ripido” del grafico di f ; dove le caratteristiche convergono il grafico di u diventa più ripido, fino ad essere verticale e quindi a “ripiegarsi su se

stesso”: in questo caso la superficie integrale dell’equazione cessa di essere il grafico di un’unica funzione.

Si possono ritrovare analiticamente questi fatti osservando che la condizione affinché nell’equazione

$$x = F(\tau)t + \tau$$

si possa esplicitare τ rispetto a (x, t) è che sia:

$$F'(\tau)t + 1 \neq 0.$$

Poiché t varia da 0 a $+\infty$, ciò è senz’altro vero se $F'(\tau) > 0 \quad \forall \tau$ (le caratteristiche divergono sempre); se invece per qualche τ è $F'(\tau) < 0$, per t abbastanza grande la quantità diventa nulla, ossia le caratteristiche si intersecano e si perde l’unicità della soluzione.

Interpretiamo ora questi fatti sul modello.

Con una funzione

$$Q(\varrho) = \varrho(\varrho_{\max} - \varrho)$$

si ha

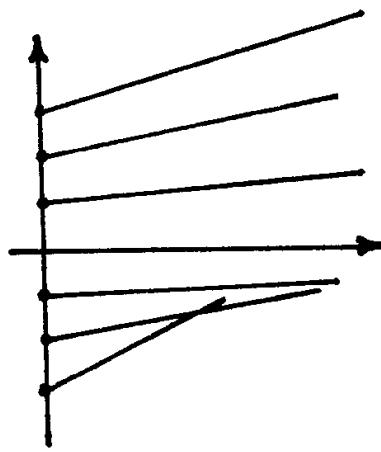
$$c(\varrho) = \varrho_{\max} - \frac{1}{2}\varrho.$$

Se la densità iniziale di vetture è distribuita come una gaussiana e^{-x^2} , $F(\tau) = c(f(\tau)) = \varrho_{\max} - \frac{1}{2}e^{-\tau^2}$. La funzione non è monotona, perciò $F'(\tau) < 0$ per qualche τ e si ha il fenomeno dell’intersezione delle caratteristiche.

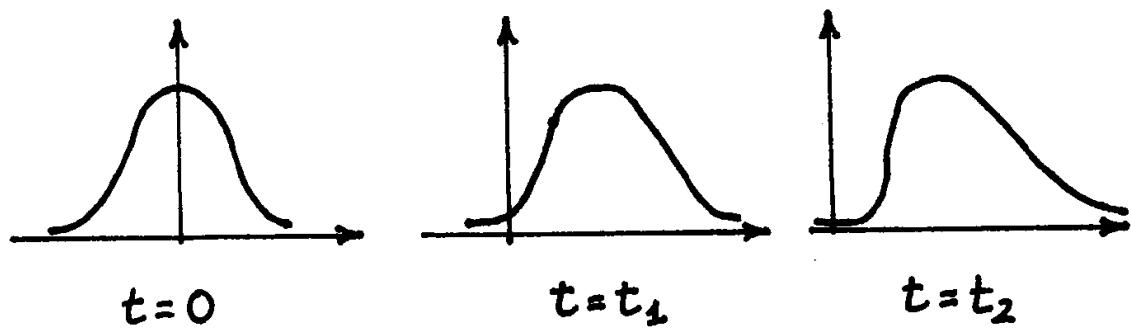
$$F'(\tau) = \tau e^{-\tau^2} \text{ è positivo per } \tau > 0 \text{ e negativo per } \tau < 0.$$

Le caratteristiche hanno andamento del tipo:

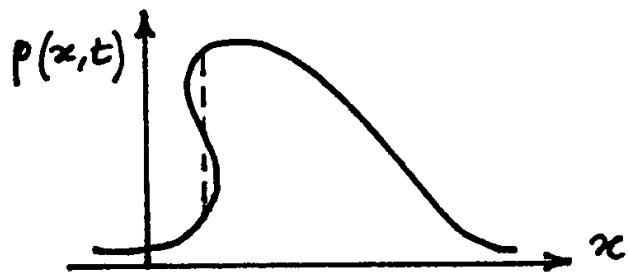
16. Equazioni quasilineari del 1º ordine



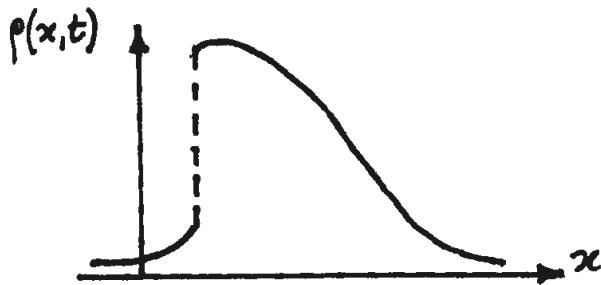
L'andamento di $\varrho(x, t)$ a successivi istanti è del tipo:



L'interpretazione nel modello è che le vetture che sopraggiungono da $x < 0$ trovano davanti a sé un brusco aumento della densità di vetture (ingorgo). Davanti all'ingorgo le vetture si allontanano, più veloci le prime e sempre più lente le successive. Oltre l'istante in cui la pendenza del grafico è verticale, la soluzione analitica dà una curva del tipo:



che non essendo una funzione non ha più significato fisico; bisogna piuttosto pensare di rimpiazzarla con una funzione discontinua del tipo:



Dalle (1) si ha anche:

$$\varrho_x = f'(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{f'(\tau)}{\frac{\partial x}{\partial \tau}} = \frac{f'(\tau)}{F'(\tau)t + 1}$$

da cui si vede che per $F'(\tau)t + 1 = 0$ (condizione di non invertibilità) $\varrho_x \rightarrow \infty$. Dall'equazione si vede poi che se $\varrho_x \rightarrow \infty$ anche $\varrho_t \rightarrow \infty$. Questo fenomeno tipico delle equazioni non lineari si chiama "catastrofe del gradiente".

Esercizio 7.

$$\begin{cases} u_y = xuu_x \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = xu \\ \dot{y} = -1 \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = k_3 \\ y = -s + k_2 \\ x = k_1 e^{k_3 s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = t \\ k_2 = 0 \\ k_3 = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = te^{ts} \\ y = -s \\ u = t \end{cases}$$

16. Equazioni quasilineari del 1º ordine

L'equazione

$$x = ue^{-yu}$$

definisce implicitamente $u(x, y)$.

Condizione di solubilità:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) \neq 0 \quad \text{con} \quad F(x, y, u) = -x + ue^{-yu}.$$

Quindi:

$$e^{-yu}[1 - yu] \neq 0, \quad yu \neq 1.$$

Per $u = \frac{1}{y}$ si ha $x = \frac{1}{y} e^{-1}$, $xy = \frac{1}{e}$.

Ad es. per $y > 0$ l'equazione $x = ue^{-yu}$ è solubile per $x \leq \frac{1}{ey}$, come si vede dal grafico seguente:

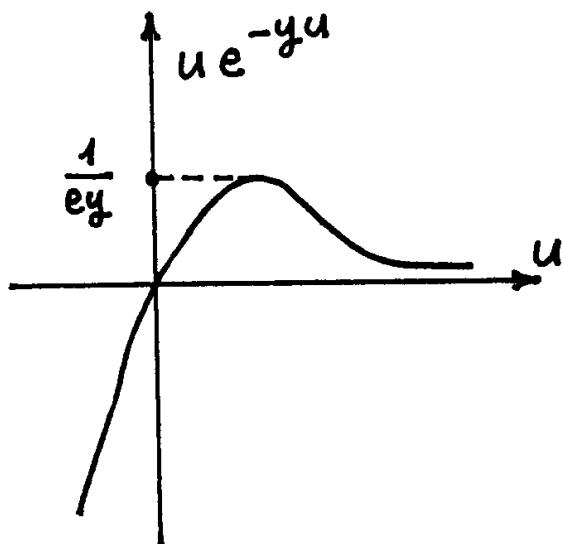
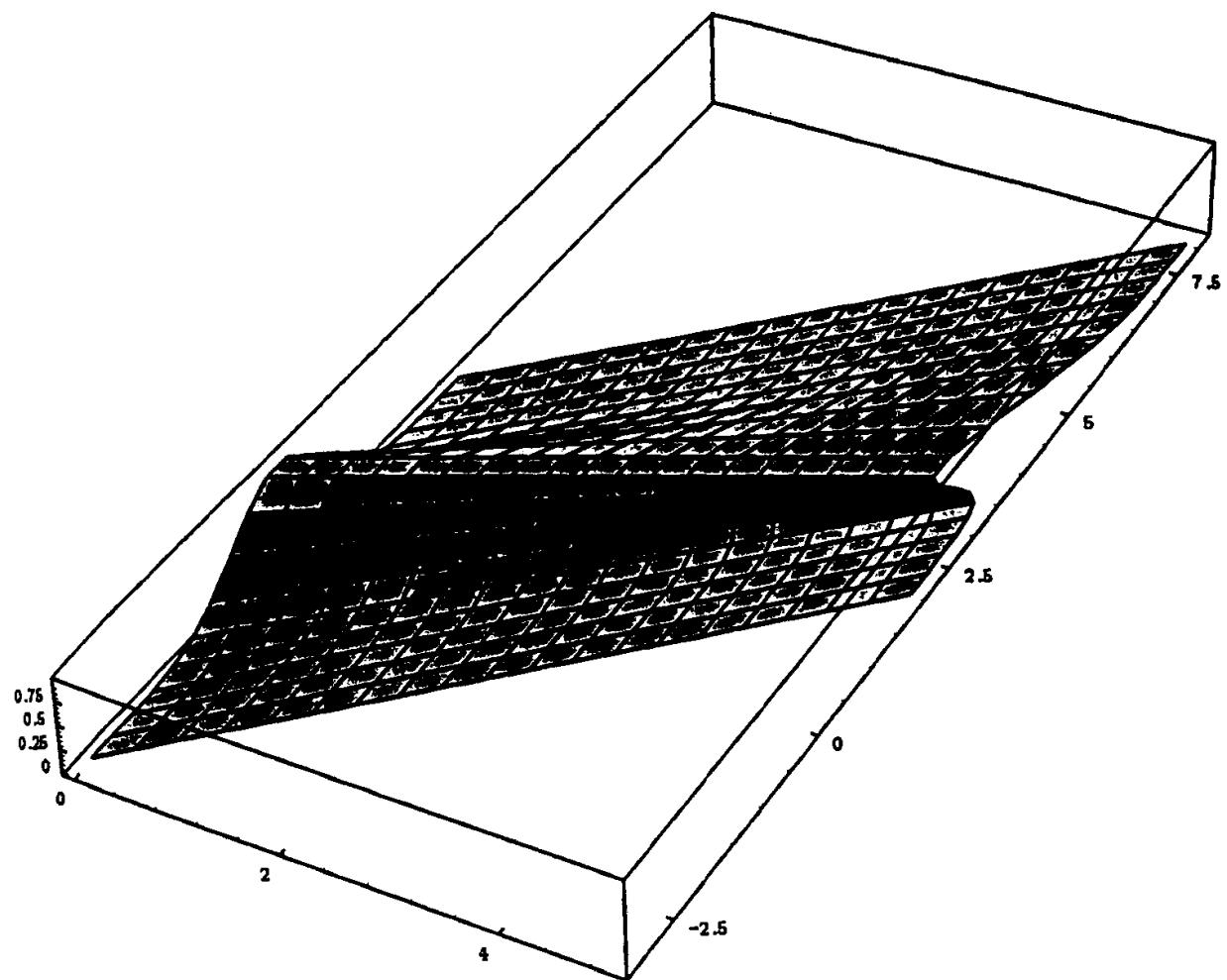


fig. 16.1.

Superficie integrale per il problema di traffico discusso nel § 16.3. ($c(\varrho) = 1 - \frac{1}{2}\varrho$; $f(x) = e^{-x^2}$). Si nota il “riplegamento dell’onda su se stessa”, con conseguente perdita dell’unicità della soluzione.



17. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL 2° ORDINE IN 2 VARIABILI

Consideriamo un'equazione del 2°ordine in 2 variabili, lineare nella parte principale (cioè nei termini che contengono le derivate 2^e), cioè:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + (\text{termini di ordine inferiore}) = 0. \quad (1)$$

Cerchiamo un opportuno cambiamento di variabili del tipo:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

mediante il quale l'equazione si riscriva in forma più semplice. Esprimendo le derivate rispetto a x e y in funzione delle derivate rispetto a ξ e η si ha:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) \cdot \xi_x + u_\xi \cdot \xi_{xx} + (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \cdot \eta_x + u_\eta \eta_{xx}$$

Analogamente si calcolano u_{xy} e u_{yy} . Sostituendo le espressioni trovate nella (1) si ha:

$$\begin{aligned} & au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = \\ & = (a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)u_{\xi\xi} + \\ & + (2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y)u_{\xi\eta} + \\ & + (a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)u_{\eta\eta} + \\ & + (\text{termini di ordine inferiore}) \equiv \\ & \equiv \mathcal{A}u_{\xi\xi} + \mathcal{B}u_{\xi\eta} + \mathcal{C}u_{\eta\eta} + (\text{termini di ordine inferiore}). \end{aligned} \quad (2)$$

Si verifica che vale la relazione:

$$\mathfrak{B}^2 = 4\mathcal{A}\mathcal{C} + (b^2 - 4ac) \cdot \text{Det}^2 \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Cerchiamo ora di scegliere le funzioni ξ ed η in modo da annullare qualcuno dei coefficienti \mathcal{A} , \mathfrak{B} , \mathcal{C} . Distinguiamo i 3 casi:

1. equazione iperbolica: $\Delta \equiv b^2 - 4ac > 0$;
2. equazione parabolica: $b^2 - 4ac = 0$;
3. equazione ellittica: $b^2 - 4ac < 0$.

17.1. IL CASO IPERBOLICO

Considero l'equazione

$$a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \quad (4)$$

Ponendo $\lambda = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ si ha

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siano:

$$f_1(x, y) = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f_2(x, y) = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Considero le equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y); \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y).$$

Scriviamo gli integrali generali delle 2 equazioni nella forma:

$$\xi(x, y) = \text{costante}; \quad \eta(x, y) = \text{costante}. \quad (5)$$

Derivando rispetto a x la prima delle (5) si ha:

$$\xi_x(x, y) + \xi_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ossia $y' = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ dunque poiché y risolve l'equazione $y' = f_1(x, y)$, ξ_x e ξ_y risolvono l'equazione (4). Analogio discorso per η .

Perciò il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (\text{con } \xi \text{ ed } \eta \text{ come in (5)})$$

annulla i coefficienti A e C . Se A e C sono nulli, dalla (3) leggiamo che $B \neq 0$.

L'equazione allora risulta:

$$B \cdot u_{\xi\eta} + (\text{termini di ordine inferiore}) = 0$$

equazione iperbolica ridotta a forma canonica

Le 2 famiglie di curve $\xi = \xi(x, y) = \text{cost.}$, $\eta = \eta(x, y) = \text{cost.}$, si dicono caratteristiche dell'equazione. Per ogni punto del piano passa una e una sola caratteristica di ogni famiglia, e queste due caratteristiche hanno nel punto tangenti diverse. (Le 2 pendenze sono $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$, che sono diverse tra loro per la condizione di iperbolicità).

Osservazione 1. Come si vede dall'espressione di u_{xx} , il cambiamento di variabili introduce in generale dei termini di ordine inferiore (del tipo $u_\xi \cdot \xi_{xx}$, $u_\eta \cdot \eta_{xx}$, ...) anche se l'equazione originaria non ne contiene. Se però l'equazione (1) ha solo parte del 2º ordine ed è a coefficienti costanti, si vede che f_1 e f_2 sono costanti, le linee caratteristiche sono rette e le funzioni $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ hanno perciò

17. Classificazione delle equazioni del 2^o ordine in 2 variabili

derivate seconde nulle. Perciò i termini del tipo $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ non compaiono, e l'equazione ridotta a forma canonica risulta semplicemente:

$$\mathfrak{B} \cdot u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{ossia } (\mathfrak{B} \neq 0) \quad u_{\xi\eta} = 0.$$

Quest'equazione ha per integrale generale:

$$u(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta)$$

con F_1, F_2 funzioni arbitrarie. Perciò l'integrale generale di (1) è, in questo caso:

$$u(x, y) = F_1(\xi(x, y)) + F_2(\eta(x, y)).$$

Esempio 21.

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0.$$

$\Delta > 0$, equazione iperbolica. Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = -5 & y = -5x + a \\ \lambda = 1 & y = x + b \end{cases} \quad \text{2 famiglie di caratteristiche}$$

$$\begin{cases} \xi = y + 5x \\ \eta = y - x. \end{cases}$$

Con questo cambiamento di variabili l'equazione diventa $u_{\xi\eta} = 0$ (v. osservazione 1). Perciò l'integrale generale dell'equazione di partenza è:

$$u(x, y) = f(y + 5x) + g(y - x)$$

con f e g funzioni arbitrarie (di classe \mathcal{C}^2).

17.2. IL CASO PARABOLICO

Questa volta l'equazione caratteristica

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

ha un'unica soluzione $\lambda = f(x, y)$, che dà una sola equazione differenziale $y' = f(x, y)$ e una sola famiglia di caratteristiche $\xi(x, y) = \text{costante}$. Scegliamo come cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = (\text{qualunque funzione di } (x, y) \text{ indipendente da } \xi(x, y)) \end{cases}$$

ad es. $\eta = x$ (se non è proprio $\xi(x, y) = kx + q$). Questo cambiamento di variabili annulla A . Dalla (3) segue allora, poiché $b^2 - 4ac = 0$, che anche $B = 0$, e l'equazione diventa:

$$C \cdot u_{\eta\eta} + (\text{termini di ordine inferiore}) = 0$$

equazione parabolica ridotta a forma canonica

Al solito, se l'equazione di partenza ha solo parte principale ed è a coefficienti costanti, si ha:

$$u_{\eta\eta} = 0$$

che ha per integrale generale:

$$u(\xi, \eta) = F_1(\xi) \cdot \eta + F_2(\xi)$$

(con F_1 e F_2 arbitrarie). L'integrale generale dell'equazione di partenza è: (se $\eta = x$, ad es.)

$$u(x, y) = xF_1(\xi(x, y)) + F_2(\xi(x, y)).$$

Esempio 3.

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

$\Delta = 0$, equazione parabolica. Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 0, \quad (\lambda x + y)^2 = 0, \quad \lambda = -\frac{y}{x}.$$

Risolviamo:

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \log |y| = -\log |x| + c$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$xy = \text{costante famiglia di caratteristiche}$ (sono iperboli equilatere).

Poniamo:

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial \xi} \end{cases}$$

$$u_{xx} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = xy u_{\xi\xi} + x u_{\xi\eta} + u_\xi.$$

Sostituendo si ha:

$$x^2 u_{\eta\eta} - 2xy u_\xi = 0$$

cioè:

$$\eta^2 u_{\eta\eta} - 2\xi u_\xi = 0.$$

Equazione ridotta a forma canonica.

Essendo i coefficienti non costanti, non si riduce alla forma $u_{\eta\eta} = 0$. In questo caso l'equazione non è immediatamente integrabile.

Esempio 4.

$$xu_{xx} - (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0.$$

$$\Delta = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2.$$

$\Delta > 0$ se $x \neq y$ (iperbolica)

$\Delta = 0$ se $x = y$ (parabolica).

L'equazione cioè è parabolica sulla retta $y = x$ e iperbolica altrove.

$$\lambda^2 x + \lambda(x+y) + y = 0$$

$$\lambda = \frac{-(x+y) \pm (x-y)}{2x} = \begin{cases} -\frac{y}{x} \\ -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = -\frac{y}{x} \quad \text{dà: } xy = \text{cost.} \\ y' = -1 \quad \text{dà: } x+y = \text{cost.} \end{array} \right\} \text{2 famiglie di caratteristiche.}$$

Osservare che per ogni punto del piano passano una retta e una iperbole equilatera caratteristiche. Però nei punti della retta $y = x$ queste 2 linee sono tra loro tangenti, cioè individuano un'unica direzione caratteristica. Questo è ciò che significa la "parabolicità" dell'equazione sulla retta $y = x$.

Poniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = xy \\ \eta = x+y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right.$$

$$u_{xx} = y^2 u_{\xi\xi} + 2y u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = x^2 u_{\xi\xi} + 2x u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = xy u_{\xi\xi} + (x+y) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + u_\xi.$$

L'equazione diventa:

$$[4xy - (x+y)^2]u_{\xi\eta} - (x+y)u_\xi = 0$$

ossia:

$$(4\xi - \eta^2)u_{\xi\eta} - \eta u_\xi = 0.$$

Equazione ridotta a forma canonica.

In questo caso, anche se vi sono termini di ordine inferiore, è possibile integrare l'equazione. Infatti ponendo $u_\xi = v$ si ha una equazione differenziale ordinaria in v :

$$(4\xi - \eta^2)v_\eta - \eta v = 0.$$

Integrando si ha:

$$v(\xi, \eta) = \frac{c(\xi)}{\sqrt{|4\xi - \eta^2|}} \quad \text{con } c \text{ funzione arbitraria.}$$

Integrando ora in ξ si ha:

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi \frac{c(t)}{\sqrt{|4t - \eta^2|}} dt + d(\eta) \quad \text{con } d \text{ funzione arbitraria.}$$

Infine sostituendo a ξ e η le loro espressioni in funzione di x e y si ha l'integrale generale dell'equazione di partenza:

$$u(x, y) = \int_0^{xy} \frac{c(t)}{\sqrt{|4t - (x+y)^2|}} dt + d(x+y) \quad \text{con } c \text{ e } d \text{ funzioni arbitrarie.}$$

17.3. IL CASO ELLITTICO

Nel caso $b^2 - 4ac < 0$, l'equazione $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ non ha soluzioni reali e non esistono linee caratteristiche reali. Procedendo come nel caso iperbolico si trovano 2 famiglie di caratteristiche complesse coniugate, cioè di equazioni:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \text{cost.} \\ \eta(x, y) = \text{cost.} \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \\ \eta(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y) \end{cases}$$

dove α, β sono funzioni reali. Il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

porta l'equazione nella forma:

$$u_{\xi\eta} + (\text{termini di grado inferiore}) = 0$$

L'ulteriore cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2i} \end{cases}$$

porta l'equazione nella forma:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + (\text{termini di ordine inferiore}) = 0$$

equazione ellittica ridotta a forma canonica

Se l'equazione di partenza ha solo parte principale e coefficienti costanti, si trova:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0$$

Cioè u è armonica come funzione di α e β . Dunque $u(\alpha, \beta) = \Re f(\alpha + i\beta)$ con f olomorfa. Ma $\alpha + i\beta = \xi$, perciò l'integrale generale dell'equazione di partenza è, in questo caso:

$$u(\alpha, \beta) = \Re f(\xi(x, y))$$

con f generica funzione olomorfa.

Esempio 3.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

$\Delta < 0$, equazione ellittica. Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \quad \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Rette caratteristiche (complesse coniugate):

$$\begin{cases} y = (-1 + i\sqrt{2})x + \text{cost.} \\ y = (-1 - i\sqrt{2})x + \text{cost.} \end{cases}$$

Cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \xi = y + (1 - i\sqrt{2})x \\ \eta = y + (1 + i\sqrt{2})x. \end{cases}$$

Allora

$$u(x, y) = \Re e f(y + (1 - i\sqrt{2})x)$$

è l'integrale generale dell'equazione, con f olomorfa. Se ad esempio scegliamo $f(z) = z^2$,

$$\begin{aligned} f(y + (1 - i\sqrt{2})x) &= x^2 + 2xy + y^2 - 2x^2 - 2\sqrt{2}ix(x + y) \\ u(x, y) &= -x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

è una particolare soluzione dell'equazione considerata.

17.4. IL PROBLEMA DI CAUCHY PER UN'EQUAZIONE IPERBOLICA

Supponiamo di avere un'equazione iperbolica con caratteristiche:

$$\begin{cases} y - g_1(x) = \text{cost.} \\ y - g_2(x) = \text{cost.} \end{cases}$$

e che ridotta a forma canonica risulti:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

L'integrale generale è:

$$u(x, y) = f_1(y - g_1(x)) + f_2(y - g_2(x))$$

con f_1, f_2 arbitrarie. Assegnamo ora dei dati alla Cauchy. Sia Γ la curva: $y = \psi(x)$ e imponiamo:

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = a(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = b(x). \end{cases}$$

La 1^a condizione si scrive:

$$u(x, \psi(x)) = a(x) \quad (1)$$

Per la 2^a, osservando che il versore normale a Γ è:

$$\frac{(-\psi'(x), 1)}{\sqrt{1 + \psi'^2(x)}}$$

si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = [-\psi'(x)u_x + u_y] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2(x)}}.$$

La 2^a condizione perciò è:

$$-\psi'(x)u_x(x, \psi(x)) + u_y(x, \psi(x)) = b(x)\sqrt{1 + \psi'^2(x)} \quad (2)$$

Utilizzando ora l'espressione di u data dall'integrale generale dell'equazione, la (1) e (2) diventano:

$$\begin{aligned} & \left\{ f_1(\psi(x) - g_1(x)) + f_2(\psi(x) - g_2(x)) = a(x) \right. \\ & \left. -\psi'(x) [f_1'(\psi(x) - g_1(x)) \cdot (-g_1'(x)) + f_2'(\psi(x) - g_2(x)) \cdot (-g_2'(x))] + \right. \\ & \left. + f_1'(\psi(x) - g_1(x)) + f_2'(\psi(x) - g_2(x)) = b(x) \cdot \sqrt{1 + \psi'^2(x)}. \right. \end{aligned}$$

Le funzioni incognite sono f_1 e f_2 , mentre g_1 , g_2 , ψ , a , b sono note. Poiché la 1^a equazione contiene f_1 e f_2 e la seconda contiene f_1' , f_2' , deriviamo la 1^a equazione. Eseguendo il calcolo, e ponendo per semplicità:

$$\begin{cases} F(x) = f_1'(\psi(x) - g_1(x)) \\ G(x) = f_2'(\psi(x) - g_2(x)) \end{cases}$$

il sistema diventa:

$$\begin{cases} F(x) \cdot [\psi'(x) - g_1'(x)] + G(x) \cdot [\psi'(x) - g_2'(x)] = a'(x) \\ F(x) \cdot [\psi'(x)g_1'(x) + 1] + G(x) \cdot [\psi'(x)g_2'(x) + 1] = b(x)\sqrt{1 + \psi'^2(x)} \end{cases}$$

Sistema lineare nelle incognite F, G . Il determinante del sistema è:

$$(g_2'(x) - g_1'(x)) \cdot (\psi'^2(x) + 1)$$

diverso da zero per la condizione di iperbolicità. Perciò $F(x)$ e $G(x)$ si ricavano in funzione dei dati. Consideriamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} f_1'(\psi(x) - g_1(x)) = F(x) \\ f_2'(\psi(x) - g_2(x)) = G(x) \end{cases}$$

dove ora F e G sono funzioni note, e vogliamo ricavare f_1 e f_2 . Poniamo $t = \psi(x) - g_1(x)$, $t = \psi(x) - g_2(x)$ nelle 2 equazioni, rispettivamente. Se sappiamo ricavare x in funzione di t il sistema diventa:

$$\begin{cases} f_1'(t) = \hat{F}(t) \\ f_2'(t) = \hat{G}(t) \end{cases}$$

con \hat{F}, \hat{G} funzioni note. f_1 e f_2 si determinano allora per quadratura, e u viene determinata a meno di una costante additiva, che si determina imponendo la condizione:

$$u(x, \psi(x)) = a(x)$$

(Quest'equazione era stata derivata, facendoci perdere un'informazione). In definitiva la condizione per la solubilità del problema è l'invertibilità delle funzioni $\psi(x) - g_i(x)$, $i = 1, 2$, ossia:

$$\psi'(x) - g_i'(x) \neq 0$$

condizione che esprime il fatto che la linea Γ portante i dati non sia tangente alle linee caratteristiche.

Un discorso analogo vale nel caso parabolico.

Esempio 6.

$$\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = e^x \end{cases}$$

L'equazione parabolica ha come integrale generale:

$$u(x, y) = f(y + 5x) + g(y - x)$$

(v. esempio 2). Le caratteristiche sono le famiglie di rette:

$$\begin{cases} y = -5x + c \\ y = x + d. \end{cases}$$

La linea portante i dati è la retta $y = 0$ che non ha una delle 2 pendenze "proibite". Quindi il problema è solubile. Imponendo i dati si ha:

$$\begin{cases} (5x) + g(-x) = 2x \\ f'(5x) + g'(-x) = e^x. \end{cases}$$

Derivando la 1^a si ha il sistema:

$$\begin{cases} 5f'(5x) - g'(-x) = 2 \\ f'(5x) + g'(-x) = e^x. \end{cases}$$

Poniamo $A = f'(5x)$, $B = g'(-x)$. Il sistema:

$$\begin{cases} 5A - B = 2 \\ A + B = e^x \end{cases}$$

ha soluzione:

17. Classificazione delle equazioni del 2^o ordine in 2 variabili

$$\begin{cases} A = \frac{1}{6}(e^x + 2) \\ B = \frac{1}{6}(5e^x - 2). \end{cases}$$

Risolviamo ora:

$$f'(5x) = \frac{1}{6}(e^x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}(e^{\frac{x}{5}} + 2)$$

$$f(x) = \frac{5}{6}e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{3}x + a.$$

$$g'(-x) = \frac{1}{6}(5e^{-x} - 2)$$

$$g'(x) = \frac{1}{6}(5e^{-x} - 2)$$

$$g(x) = -\frac{5}{6}e^{-x} - \frac{1}{3}x + b.$$

Infine imponendo $f(5x) + g(-x) = 2x$ si trova: $a + b = 0$, quindi:

$$u(x, y) = \frac{5}{6}e^x(e^{\frac{y}{5}} - e^{-y}) + 2x.$$

Esercizi.

7. $u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$. Classificare e ricondurre a forma canonica.

[iperbolica per $x \neq 0$, parabolica per $x = 0$; $\xi = y - \frac{1}{2}x^2$; $\eta = y + \frac{1}{2}x^2$;
 $4(\xi - \eta)u_{\xi\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$].

17. Classificazione delle equazioni del 2° ordine in 2 variabili

8. $y^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + x^2 z_{yy} = \frac{y^2}{x} z_x + \frac{x^2}{y} z_y.$

Classificare, determinare le caratteristiche e l'integrale generale.

[Parabolica. Caratteristiche: $\xi = x^2 + y^2 = \text{cost.}$ Suggerimento: porre $\eta = x^2 - y^2.$ Forma canonica: $z_{\eta\eta} = 0.$ Soluzione: $u(x, y) = a(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)b(x^2 + y^2)$ con a, b funzioni arbitrarie].

9. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = x. \end{cases}$$

[Soluzione: $u(x, y) = x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2.$]

10. Classificare e determinare le caratteristiche al variare di $\lambda \in \mathbb{R}:$

$$x^2 u_{xx} + \lambda xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

$|\lambda| > 2:$ iperbolica per $xy \neq 0,$ parabolica per $xy = 0;$ $|\lambda| = 2:$ parabolica; $|\lambda| < 2:$ ellittica per $xy \neq 0,$ parabolica per $xy = 0.$

Caratteristiche $yx^{-\alpha} = \text{cost.}$ con $\alpha = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ nel caso iperbolico, $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ nel caso parabolico].

11. Classificare:

$$2u_{xx} + xu_{xy} - xu_{yy} = 0.$$

[iperbolica per $x > 0, x < -8;$ parabolica per $x = 0, x = -8;$ ellittica per $-8 < x < 0].$

18. IL LAPLACIANO IN DUE DIMENSIONI

18.1. IL PROBLEMA DI DIRICHLET SUL CERCHIO

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } x^2 + y^2 < R^2 \\ u(x, y) = f(x, y) & \text{per } x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Introdotte le coordinate polari (ϱ, ϑ) il problema assume la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0 & \text{per } \varrho < R \\ u(R, \vartheta) = f(\vartheta). \end{cases}$$

Il problema si affronta col metodo di separazione delle variabili; illustriamo schematicamente il procedimento. Cerchiamo soluzioni del tipo particolare:

$$u(\varrho, \vartheta) = R(\varrho) \cdot \Theta(\vartheta)$$

(cioè "a variabili separate"). Sostituendo nell'equazione si ha:

$$R''\Theta + \frac{1}{\varrho} R'\Theta + \frac{1}{\varrho^2} R\Theta'' = 0$$

e quindi:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\left(\varrho^2 \frac{R''}{R} + \varrho \frac{R'}{R}\right).$$

Poiché il 1° membro dipende solo da ϑ e il 2° solo da ϱ , entrambi sono costanti.

Si ha allora:

$$\Theta'' = \lambda\Theta, \quad \varrho^2 R'' + \varrho R' + \lambda R = 0.$$

Imponendo che Θ sia periodica di periodo 2π si trova che dev'essere $\lambda = -n^2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ e Θ del tipo:

$$\Theta(\vartheta) = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta.$$

Risolvendo l'equazione in R per questa scelta di λ (equazione di Eulero, si cercano soluzioni del tipo $R(\varrho) = \varrho^\alpha$) si trova (se $n \neq 0$)

$$\alpha^2 = n^2; \quad R(\varrho) = a\varrho^n + b\varrho^{-n},$$

mentre per $n = 0$ l'equazione si integra direttamente e si ha:

$$R(\varrho) = a \log \varrho + b.$$

Poiché vogliamo una $u(\varrho, \vartheta)$ limitata sul cerchio, $R(\varrho)$ dovrà essere limitata su $[0, R]$. Questo porta a scartare le soluzioni ϱ^{-n} e $\log \varrho$. Rimangono in definitiva soluzioni a variabili separate del tipo:

$$u_n(\varrho, \vartheta) = \varrho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \quad (n > 0);$$

$$u_0(\varrho, \vartheta) = a_0.$$

Cerchiamo ora una soluzione del problema di partenza che abbia la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\varrho, \vartheta).$$

Imponendo che per $\varrho = R$ la soluzione rappresenti il dato $f(\vartheta)$ si trova:

$$u(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta) \quad (1)$$

con α_n, β_n coefficienti di Fourier di $f(\vartheta)$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta.$$

Quindi: noto lo sviluppo di Fourier del dato $f(\vartheta)$, si sa scrivere la soluzione $u(\varrho, \vartheta)$ come serie di funzioni del tipo $\varrho^n \cos n\vartheta$ e $\varrho^n \sin n\vartheta$. Queste funzioni si dicono *armoniche elementari*. Osserviamo che, introducendo la variabile complessa

$$z = (x + iy) = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

si ha:

$$z^n = (x + iy)^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta).$$

Perciò: $\rho^n \cos n\vartheta = \operatorname{Re} (x + iy)^n$; $\rho^n \sin n\vartheta = \operatorname{Im} (x + iy)^n$. Queste formule mostrano, per altra via, che le funzioni $\rho^n \cos n\vartheta$ e $\rho^n \sin n\vartheta$ sono armoniche, essendo parte reale e immaginaria della funzione olomorfa z^n , e danno anche un metodo pratico per scrivere le armoniche elementari in coordinate cartesiane. Si vede anche che, in coordinate cartesiane, le armoniche elementari sono polinomi omogenei di grado n . Le prime armoniche elementari sono le seguenti (v. fig. 18.1):

$$\begin{cases} \rho \cos \vartheta = x \\ \rho \sin \vartheta = y \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 \cos 2\vartheta = x^2 - y^2 \\ \rho^2 \sin 2\vartheta = 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^3 \cos 3\vartheta = x^3 - 3xy^2 \\ \rho^3 \sin 3\vartheta = 3x^2y - y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^4 \cos 4\vartheta = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ \rho^4 \sin 4\vartheta = 4x^3y - 4xy^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^5 \cos 5\vartheta = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ \rho^5 \sin 5\vartheta = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^6 \cos 6\vartheta = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 \\ \rho^6 \sin 6\vartheta = 6x^5y - 20x^4y^2 + 6xy^5 \end{cases} \quad \text{ecc.}$$

Se, nelle formule (1), si sostituiscono al posto dei coefficienti α_n, β_n le loro espressioni $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta$ e quindi si scambia la serie con gli integrali, si ha:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n (\cos n\vartheta \cos ns + \sin n\vartheta \sin ns) \right) ds.$$

L'espressione entro () si può effettivamente sommare e si ottiene la *formula integrale di Poisson*:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \frac{(R^2 - \varrho^2)}{R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos(\vartheta - s)} ds$$

Esempio 1. Risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < 1 \\ u(1, \vartheta) = \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

Dalle identità trigonometriche:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = 2 \cos^2 \vartheta - 1$$

si ha:

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \quad (\text{sviluppo di Fourier del dato}).$$

Allora dalla (1) si ha:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varrho^2 \cos 2\vartheta = (\text{in coordinate cartesiane}) = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2).$$

Osservare che la funzione è una "sella", che assume massimi e minimi sul bordo del cerchio, conformemente al principio di massimo per funzioni armoniche. Verifichiamo il teorema della media:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2};$$

$$u(0, \vartheta) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < 2 \\ u = x^4 & \varrho = 2. \end{cases}$$

Per $\varrho = 2$, $x^4 = (2 \cos \vartheta)^4 = 16 \cos^4 \vartheta$. Qualche calcolo trigonometrico mostra che:

$$16 \cos^4 \vartheta = 6 + 8 \cos 2\vartheta + 2 \cos 4\vartheta.$$

Allora la soluzione è:

$$u(\varrho, \vartheta) = 6 + 8 \left(\frac{\varrho}{2} \right)^2 \cos 2\vartheta + 2 \left(\frac{\varrho}{2} \right)^4 \cos 4\vartheta = 6 + 2\varrho^2 \cos 2\vartheta + \frac{1}{8} \varrho^4 \cos 4\vartheta.$$

In coordinate cartesiane:

$$u(x, y) = 6 + 2(x^2 - y^2) + \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{8} \quad (\text{v. fig. 18.2}).$$

Esercizio 3. Risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < 1 \\ u = y^3 & \varrho = 1. \end{cases}$$

[Soluzione: $u(x, y) = \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3$].

18.2. ALTRI PROBLEMI PER IL LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI

Esempio 4. Consideriamo il seguente problema di Dirichlet per il laplaciano su una corona circolare:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ per } 1 < \varrho < R \\ u(1, \vartheta) = 0 \\ u(R, \vartheta) = f(\vartheta). \end{cases}$$

Affrontiamolo col metodo di separazione delle variabili. Ripercorrendo i passaggi fatti nel caso del cerchio, si trovano le stesse equazioni differenziali in ϑ e R , e quindi le stesse soluzioni per Θ e R . La differenza è che ora la funzione $R(\varrho)$ è definita su $[1, R]$, non su $[0, R]$, e perciò non c'è più ragione di scartare le soluzioni del tipo ϱ^{-n} e $\log \varrho$. Si ha:

$$\Theta_n(\vartheta) = a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

$$R_n(\varrho) = c_n \varrho^n + d_n \varrho^{-n} \text{ per } n \neq 0$$

$$R_0(\varrho) = a \log \varrho + b$$

Imponendo $R_n(1) = 0 \quad \forall n$ si ha:

$$d_n = -c_n, \quad b = 0,$$

perciò:

$$R_n(\varrho) = \begin{cases} c_n (\varrho^n + \varrho^{-n}) & n \neq 0 \\ c_0 \log \varrho & n = 0 \end{cases}$$

e:
$$u(\varrho, \vartheta) = c_0 \log \varrho + \sum_{n=1}^{\infty} (\varrho^n - \varrho^{-n}) (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Infine, imponendo il dato $u(R, \vartheta) = f(\vartheta)$ si trova che:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} \frac{\log \varrho}{\log R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n - \varrho^{-n}}{R^n - R^{-n}} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)$$

dove α_n e β_n sono i coefficienti di Fourier di f :

$$f(\vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta).$$

Osservazione. Per scrivere in coordinate cartesiane le funzioni $\varrho^{-n} \cos n\vartheta$,

$\varrho^{-n} \sin n\vartheta$, osservare che:

$$\varrho^{-n} \cos n\vartheta = \frac{\varrho^n \cos n\vartheta}{\varrho^{2n}} = \frac{\Re(x+iy)^n}{(x^2+y^2)^n}.$$

L'armonicità di queste funzioni (fuori dall'origine) si può vedere anche dalle identità:

$$\begin{aligned} \frac{\Re(x+iy)^n}{(x^2+y^2)^n} &= \Re\left(\frac{z^n}{|z|^{2n}}\right) = \Re\left(\frac{z}{|z|^2}\right)^n = \Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^n = \\ &= \Re\left(\overline{\frac{1}{z^n}}\right) = \Re e \frac{1}{z^n}, \end{aligned}$$

e $\frac{1}{z^n}$ è olomorfa fuori dall'origine. Analogamente per $\varrho^{-n} \sin n\vartheta$.

Esempio 5. Risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < \varrho < 2 \\ u(1, \vartheta) = 0 \\ u(2, \vartheta) = 1 + \sin \vartheta. \end{cases}$$

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{\log \varrho}{\log 2} + \frac{2}{3} (\varrho - \varrho^{-1}) \sin \vartheta = \frac{\log(x^2+y^2)}{2 \log 2} + \frac{2}{3} y \left(1 - \frac{1}{x^2+y^2} \right).$$

Esempio 6. Consideriamo il problema di Neumann per il laplaciano sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < R \\ \frac{\partial u}{\partial \varrho}(R, \vartheta) = f(\vartheta). \end{cases}$$

Procedendo come nel caso del problema di Dirichlet sul cerchio, si trova una u del tipo:

$$u(\varrho, \vartheta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta).$$

Per imporre il dato, calcoliamo:

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} (R, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta).$$

Imponendo che questo coincida con lo sviluppo di Fourier di

$$f(\vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)$$

si trova:

$$\alpha_n = n R^{n-1} a_n \quad n \geq 1$$

$$\beta_n = R^{n-1} b_n$$

$$\alpha_0 = 0.$$

Perciò:

1. f deve soddisfare la *condizione di compatibilità* $\alpha_0 = 0$, cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) d\vartheta = 0.$$

2. La soluzione è allora:

$$u(\varrho, \vartheta) = a_0 + R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n \frac{1}{n} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)$$

con a_0 costante arbitraria.

Esempio 7.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \varrho} (1, \vartheta) = \sin^3 \vartheta. \end{cases}$$

Poiché $\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin 3\vartheta$, si ha:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{3}{4} \varrho \sin \vartheta - \frac{1}{12} \varrho^3 \sin 3\vartheta + \text{cost.}$$

$$u(x, y) = \frac{3}{4} y - \frac{1}{4} x^2 y - \frac{1}{12} y^3 + \text{cost.}$$

Osservazione. Come nel caso della formula risolutiva per il problema di Dirichlet, se nella serie che definisce u sostituiamo come coefficienti α_n, β_n i rispettivi integrali, e quindi scambiamo serie e integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} u(\varrho, \vartheta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n R^{n-1}} (\cos ns \cos n\vartheta + \sin ns \sin n\vartheta) \right) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n R^{n-1}} \cos [n(s - \vartheta)] \right) ds. \end{aligned}$$

Sfruttando ora il fatto che:

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \log(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

si può sommare la serie e ottenere la seguente *formula integrale*:

$$u(\varrho, \vartheta) = -\frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \log \left(1 + \frac{\varrho^2}{R^2} - 2 \frac{\varrho}{R} \cos(s - \vartheta) \right) ds.$$

Esempio 8. Consideriamo il seguente *problema di Dirichlet per il laplaciano sul semicerchio*.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } \varrho < 1, \quad 0 < \vartheta < \pi \\ u(\varrho, 0) = u(\varrho, \pi) = 0 \\ u(1, \vartheta) = \vartheta(\pi - \vartheta). \end{cases}$$

Seguendo il metodo di separazione delle variabili applicato nel caso del cerchio, si trovano ora le seguenti condizioni su Θ :

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0. \end{cases}$$

Questo implica $\lambda = -n^2$ e $\Theta_n(\vartheta) = \sin n\vartheta$. Per quanto riguarda $R(\varrho)$ il discorso si ripete inalterato e si ha così:

$$u(\varrho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho^n \sin n\vartheta.$$

Per imporre il dato al bordo bisogna quindi sviluppare il dato in serie di soli seni. Poiché

$$\vartheta(\pi - \vartheta) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^3}$$

si ha

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n^3} \sin n\vartheta.$$

18.3. L'EQUAZIONE DI POISSON SUL CERCHIO

Consideriamo ora il *problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace non omogenea* (equazione di Poisson) sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \varrho < R \\ u = 0 & \varrho = R. \end{cases}$$

La presenza del termine noto f rende qui inapplicabile il metodo di separazione delle variabili. Illustreremo su quest'esempio il *metodo degli sviluppi di Fourier*, utile per affrontare vari tipi di problemi non omogenei. Possiamo fare un'analogia

col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, con cui si ricerca la soluzione di un'equazione differenziale lineare non omogenea. Se $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono 2 soluzioni indipendenti di un'equazione:

$$ay'' + by' + c = 0,$$

l'integrale generale dell'equazione è:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

con c_1 , c_2 arbitrarie. Per risolvere allora l'equazione

$$ay'' + by' + c = f$$

si cercano soluzioni del tipo

$$c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x).$$

Analogamente, abbiamo visto che l'equazione $\Delta u = 0$ sul cerchio ha soluzione del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta);$$

cercheremo allora soluzioni di $\Delta u = f$ della forma:

$$u(\varrho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(\varrho) \cos n\vartheta + b_n(\varrho) \sin n\vartheta).$$

Se la u è abbastanza regolare si può scrivere:

$$\begin{aligned} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\varrho} u_{\rho} + \frac{1}{\varrho^2} u_{\theta\theta} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left([a_n''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} a_n'(\varrho) - \frac{n^2}{\varrho^2} a_n(\varrho)] \cos n\vartheta + \right. \end{aligned}$$

$$+ [b_n''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} b_n'(\varrho) - \frac{n^2}{\varrho^2} b_n(\varrho)] \sin n\vartheta \Big).$$

Sviluppando anche il termine noto nella forma:

$$f(\varrho, \vartheta) = \sum (A_n(\varrho) \cos n\vartheta + B_n(\varrho) \sin n\vartheta)$$

e uguagliando le 2 espressioni si ha:

$$\varrho^2 a_n'' + \varrho a_n' - n^2 a_n = \varrho^2 A_n$$

$$\varrho^2 b_n'' + \varrho b_n' - n^2 b_n = \varrho^2 B_n$$

con le condizioni $a_n(1) = b_n(1) = 0$.

Si tratta di infinite equazioni differenziali ordinarie, non omogenee; la parte omogenea è un'equazione di tipo Eulero. Per $n \neq 0$ la 1^a equazione ha, come integrale generale dell'equazione omogenea:

$$c_n \varrho^n + d_n \varrho^{-n}.$$

Cerchiamo le soluzioni della non omogenea col metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

$$a_n(\varrho) = c_n(\varrho) \varrho^n + d_n(\varrho) \varrho^{-n}.$$

Fatti i calcoli, si trova:

$$a_n(\varrho) = c_n \varrho^n + d_n \varrho^{-n} + \frac{\varrho^n}{2n} \int_1^\varrho r^{1-n} A_n(r) dr - \frac{\varrho^{-n}}{2n} \int_0^\varrho r^{n+1} A_n(r) dr$$

(con c_n, d_n costanti).

(La scelta di 1 come primo estremo di integrazione dell'integrale garantisce la convergenza).

Imponendo che per $\varrho \rightarrow 0$ $a_n(\varrho)$ sia limitato si trova $d_n = 0$. Imponendo poi $a_n(1) = 0$ si trova:

$$c_n = \frac{1}{2n} \int_0^1 r^{n+1} A_n(r) dr$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} a_n(\varrho) &= \frac{1}{2n} \left\{ (\varrho^n - \varrho^{-n}) \int_0^\rho r^{n+1} A_n(r) dr + \right. \\ &\quad \left. + \varrho^n \cdot \int_\rho^1 (r^{n+1} - r^{1-n}) A_n(r) dr \right\} \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Analoghe formule valgono per $b_n(\varrho)$. Quanto ad $a_0(\varrho)$, le soluzioni dell'equazione omogenea sono:

$$a \log \varrho + b.$$

Le soluzioni dell'equazione non omogenea, trovate col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, sono:

$$a_0(\varrho) = c_0 + d_0 \log \varrho - \int_0^\rho r \log r A_0(r) dr + \log \varrho \int_0^\rho r A_n(r) dr.$$

Imponendo che $a_0(0)$ sia limitato, trovo $d_0 = 0$. Imponendo $a_0(1) = 0$ trovo $c_0 = \int_0^1 r \log r A_0(r) dr$. In definitiva:

$$a_0(\varrho) = \log \varrho \int_0^\rho r A_0(r) dr + \int_\rho^1 r \log r A_0(r) dr. \quad (2)$$

La soluzione del problema è dunque:

$$u(\varrho, \vartheta) = a_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(\varrho) \cos n\vartheta + b_n(\varrho) \sin n\vartheta)$$

dove a_0, a_n, b_n sono assegnati dalle formule (1), (2), e le funzioni $A_n(r), B_n(r)$ sono:

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta$$

$$B_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta$$

Esempio 9.

$$\begin{cases} \Delta u = (1 - \rho^2) & \rho < 1 \\ u = 0 & \rho = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(\rho, \vartheta) &= a_0(\rho) = \log \rho \int_0^\rho r(1 - r^2) dr + \int_\rho^1 r \log r(1 - r^2) dr = \\ &= -\frac{3}{16} + \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{16}. \end{aligned}$$

$$u(x, y) = -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^2.$$

Esempio 10.

$$\begin{cases} \Delta u = \cos \vartheta & \rho < 1 \\ u = 0 & \rho = 1. \end{cases}$$

$$f(\rho, \vartheta) = \cos \vartheta;$$

$$A_1(\rho) = 1, \quad A_n(\rho) = 0 \quad \forall n \neq 1, \quad B_n(\rho) = 0 \quad \forall n.$$

$$u(\rho, \vartheta) = a_1(\rho) \cos \vartheta.$$

$$a_1(\rho) = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \int_0^\rho r^2 dr + \frac{\rho}{2} \int_\rho^1 (r^2 - 1) dr = \frac{\rho^2}{3} - \frac{\rho}{3}$$

$$u(\rho, \vartheta) = \cos \vartheta \left(\frac{\rho^2}{3} - \frac{\rho}{3} \right)$$

18. Il laplaciano in 2 dimensioni

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1).$$

Osservare che nell'origine la u non è regolare; infatti la f è discontinua.

Esempio 11.

$$\begin{cases} \Delta u = x & \varrho < 1 \\ u = 0 & \varrho = 1. \end{cases}$$

$$x = \varrho \cos \vartheta$$

$$u(\varrho, \vartheta) = (\dots) = \frac{1}{8}(\varrho^3 - \varrho) \cos \vartheta = \frac{x}{8}(x^2 + y^2 - 1).$$

Osservare che qui il termine noto è \mathcal{C}^∞ e la soluzione è \mathcal{C}^∞ .

18.4. L'EQUAZIONE DI LAPLACE SUL RETTANGOLO

Sia R il rettangolo $\{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < A\}$, e consideriamo il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } R \\ u = f \text{ su } \partial R. \end{cases}$$

Vediamo come questo problema si può risolvere col metodo di separazione delle variabili. Supponiamo per semplicità che il dato f sia diverso da zero solo su un lato (vedremo poi come ricondursi a questo caso in generale). Il problema è quindi:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < A \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & 0 < y < A \\ u(x, A) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

18. Il laplaciano in 2 dimensioni

Cercando soluzioni del tipo $u(x, y) = X(x) Y(y)$ si ha:

$$X''Y + XY'' = 0$$

da cui:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (= \text{costante}).$$

Tenendo conto anche delle condizioni al contorno si ha:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Perciò $\lambda = -n^2\pi^2$ e $X_n(x) = \sin n\pi x$. Quanto a Y si ha:

$$Y'' = n^2\pi^2 y$$

da cui:

$$Y(y) = ae^{n\pi y} + be^{-n\pi y}.$$

Imponendo $Y(A) = 0$ si ha:

$$b = -ae^{2n\pi A}$$

$$Y_n(y) = c_n \operatorname{Sh} n\pi(A - y).$$

Abbiamo quindi le soluzioni a variabili separate:

$$u_n(x, y) = \sin n\pi x \operatorname{Sh} n\pi(A - y).$$

Cerchiamo ora una soluzione del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y)$ che assuma il dato $f(x)$ per $y = 0$. Si trova:

$$c_n \operatorname{Sh} n\pi A = b_n$$

18. Il laplaciano in 2 dimensioni

dove:

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (\text{ossia } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x).$$

In definitiva:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \frac{\operatorname{Sh} n\pi(A-y)}{\operatorname{Sh} n\pi A}.$$

Osservazione. Se il dato f è diverso da zero su tutti i lati, per linearità si può trovare la soluzione u come somma di 4 funzioni u_1, u_2, u_3, u_4 , soluzioni di altrettanti problemi di Dirichlet con dati f_1, f_2, f_3, f_4 , dove ciascuna f_i è diversa da zero solo su un lato, e la somma delle f_i dà f .

18.5. L'EQUAZIONE DI LAPLACE NEL SEMIPIANO

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & -\infty < x < +\infty; \quad 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

La differenza fondamentale tra questo esempio e i precedenti è che qui il dominio su cui consideriamo l'equazione è *illimitato*. In particolare, la coordinata x varia su tutto \mathbb{R} . Ciò rende il problema adatto ad essere trattato mediante la *trasformata di Fourier*. Poniamo:

$\hat{u}(x, y) = \mathcal{F}_x u(x, y)$ = trasformata di Fourier di u rispetto a x ;

sia $\hat{u}' = \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}$.

Applicando la trasformata \mathcal{F}_x all'equazione e alle condizioni iniziali si ha:

18. Il laplaciano in 2 dimensioni

$$\begin{cases} -x^2\hat{u} + \hat{u}'' = 0 \\ \hat{u}(x, 0) = \hat{f}(x). \end{cases}$$

Risolvendo la 1^a equazione come equazione differenziale ordinaria in y (pensando x fissato) si ha:

$$\hat{u}(x, y) = a(x)e^{xy} + b(x)e^{-xy}.$$

Imponendo \hat{u} limitata per $y \rightarrow +\infty$ si ha:

$$a(x) = 0 \text{ per } x > 0; \quad b(x) = 0 \text{ per } x < 0;$$

ossia:

$$\hat{u}(x, y) = c(x)e^{-|x|y}.$$

Dalla 2^a equazione (dato al bordo) si ha allora:

$$\hat{u}(x, y) = \hat{f}(x)e^{-|x|y}.$$

Ricordando ora che

$$\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2 + x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|x|}$$

e ricordando il teorema sulla trasformata di Fourier della convoluzione di 2 funzioni si ha:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f * \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi.$$

La soluzione u è assegnata dunque dalla convoluzione del dato con il *nucleo di Poisson per il semipiano*:

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Osservazione. Sia

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

K ha le proprietà:

$$K \in C^\infty(\mathbb{R}); \quad k \geq 0; \quad \int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1.$$

Notare che:

$$K(x, y) = \frac{1}{y} K\left(\frac{x}{y}\right) \equiv K_y(x).$$

Le funzioni $K_y(x)$ ($y > 0$) sono *nuclei regolarizzanti* (cfr. osservazione 15, § 15.4).

Dalle proprietà generali valide per i nuclei regolarizzanti si ha che:

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}) \quad (1 \leq p < \infty), \quad (f * K_y)(x) \rightarrow f(x) \text{ in } L^p(\mathbb{R}), \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Quindi la formula di Poisson definisce per ogni dato $f \in L^p$ una funzione u che, oltre a risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ per $y > 0$ (come si verifica) assume il dato al bordo in senso L^p .

Esempio 12. Risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Si ha, in base alla formula precedente:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2} = \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{y}\right) \right\}.$$

(v. fig. 18.3). Osservare che calcolando $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y)$ in senso puntuale si trova:

$$u(x, y) \rightarrow \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & x = \pm 1 \end{cases}$$

In particolare, $u(x, y) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque (oltre che in senso $L^p(\mathbb{R})$). La convergenza puntuale c'è nei punti in cui f è regolare.

18.6. RELAZIONE TRA NUCLEO DI POISSON NEL SEMIPIANO E NEL CERCHIO

Il nucleo di Poisson per il semipiano si sarebbe potuto determinare anche al modo seguente.

Sappiamo che la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < 1 \\ u(1, \vartheta) = f(\vartheta) \end{cases}$$

è assegnata dalla convoluzione di f col nucleo di Poisson (per il cerchio unitario):

$$P(r, \vartheta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta}.$$

Introducendo la variabile complessa $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ si verifica che è:

$$P(r, \vartheta) = \Re e \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

Cerchiamo ora una *mappa conforme* che porti il semipiano nel cerchio (v. cap. 6).

Si trova che la mappa:

$$z = F(w) = \frac{i - aw}{i + aw} \quad \text{con } a > 0, \text{ qualunque}$$

va bene, ossia: $\Im m w \geq 0$ se e solo se $|z| \leq 1$. Applicando tale mappa conforme alla funzione $\frac{1+z}{1-z}$ si ha:

$$\Re e \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \Re e \left(\frac{1+F(w)}{1-F(w)} \right) = \Re e \left(\frac{1 + \frac{i - aw}{i + aw}}{1 - \frac{i - aw}{i + aw}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{Re} \left(\frac{i}{w} \right) = \frac{1}{a} \operatorname{Re} \left(\frac{i}{x+iy} \right) = \frac{1}{a} \frac{y}{x^2+y^2}.$$

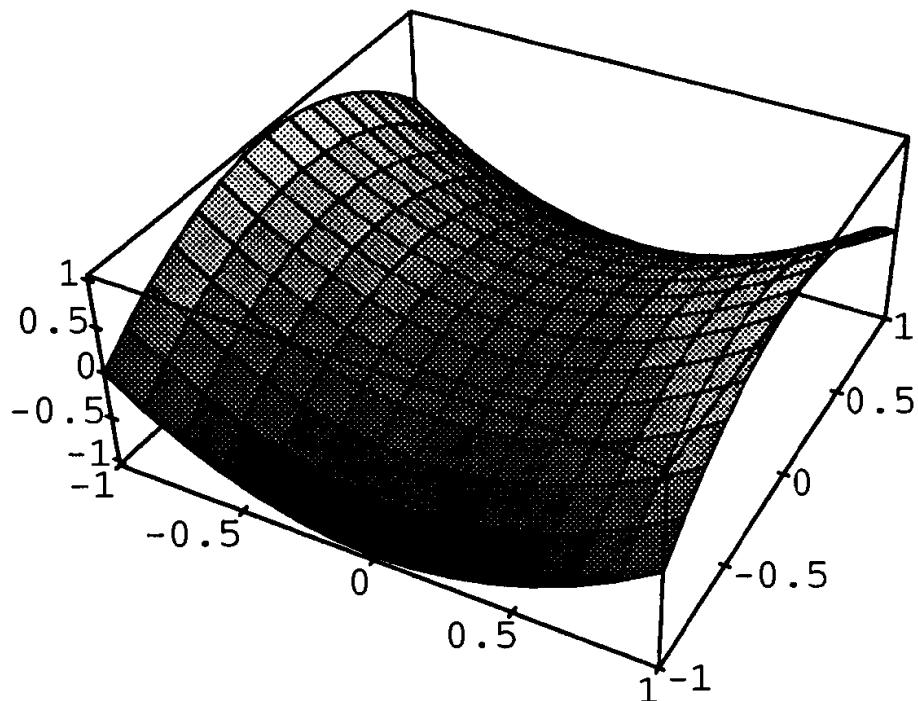
La rappresentazione conforme che porta il cerchio nel semipiano trasforma il nucleo di Poisson per il cerchio nel nucleo di Poisson per il semipiano.

Occorre solo scegliere il parametro $a > 0$ in modo da avere una funzione con integrale unitario:

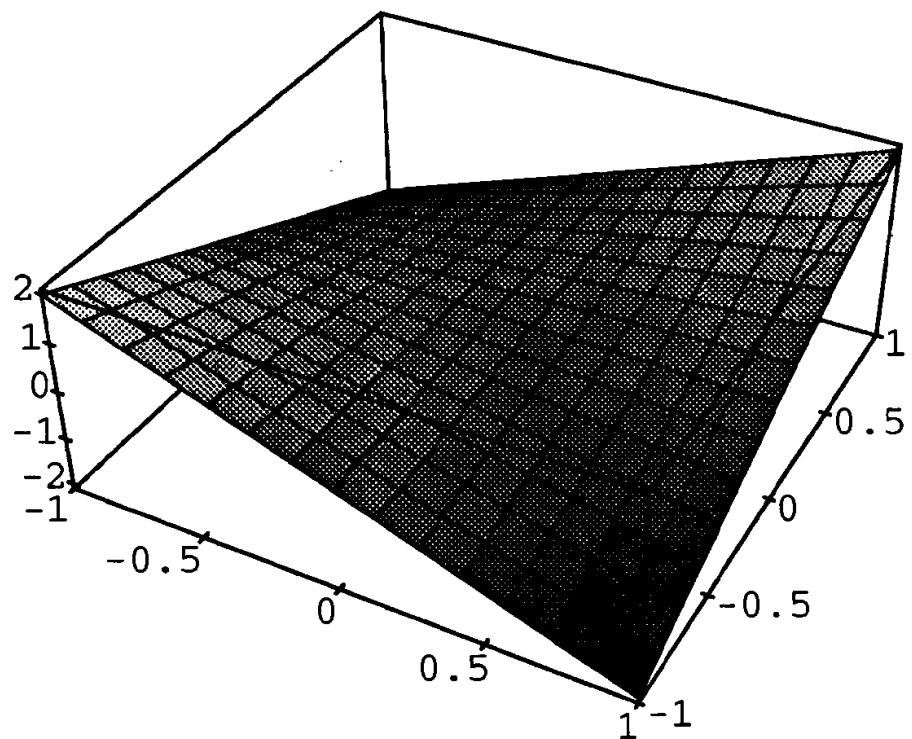
$$\frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{x^2+y^2} dx = 1. \quad \text{Si trova } a = \pi.$$

fig. 18.1. Grafici delle prime armoniche elementari nel piano

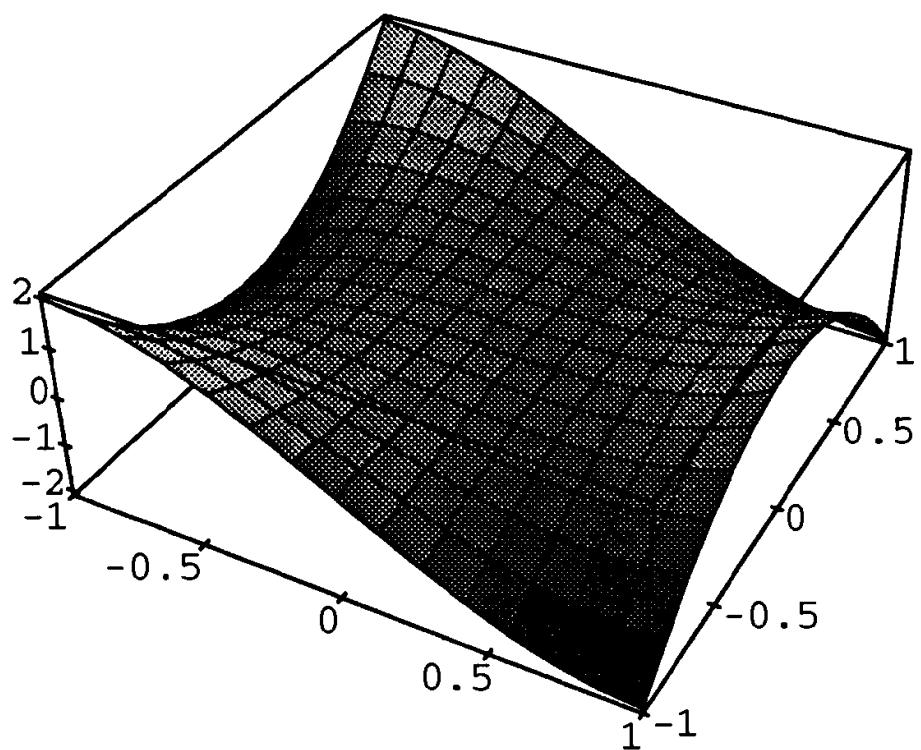
$$\rho^2 \cos 2\theta = x^2 - y^2$$



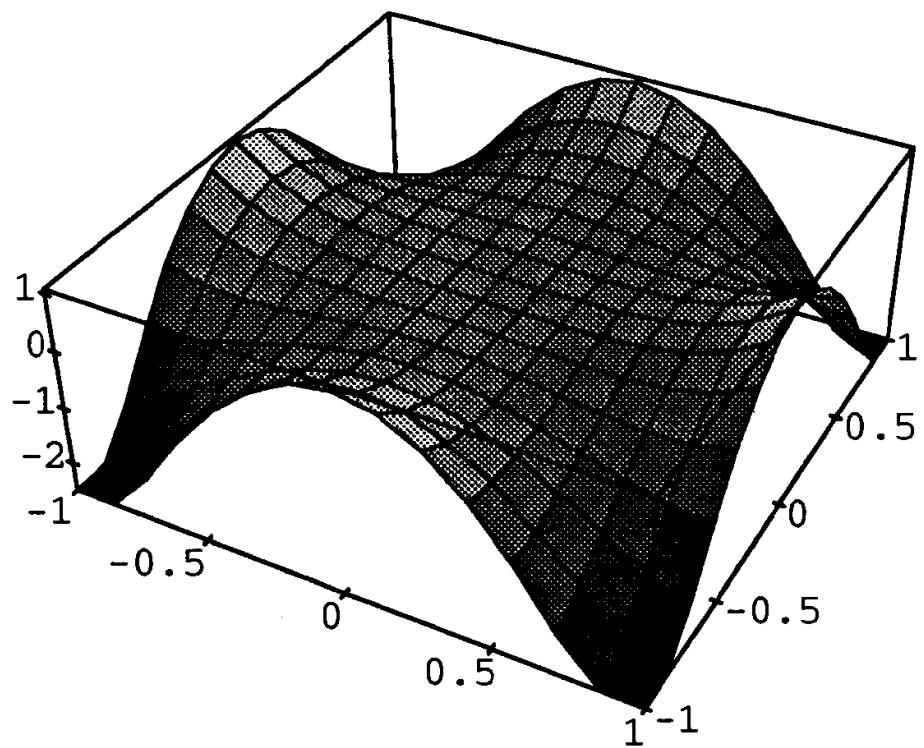
$$\rho^2 \sin 2\theta = 2xy$$



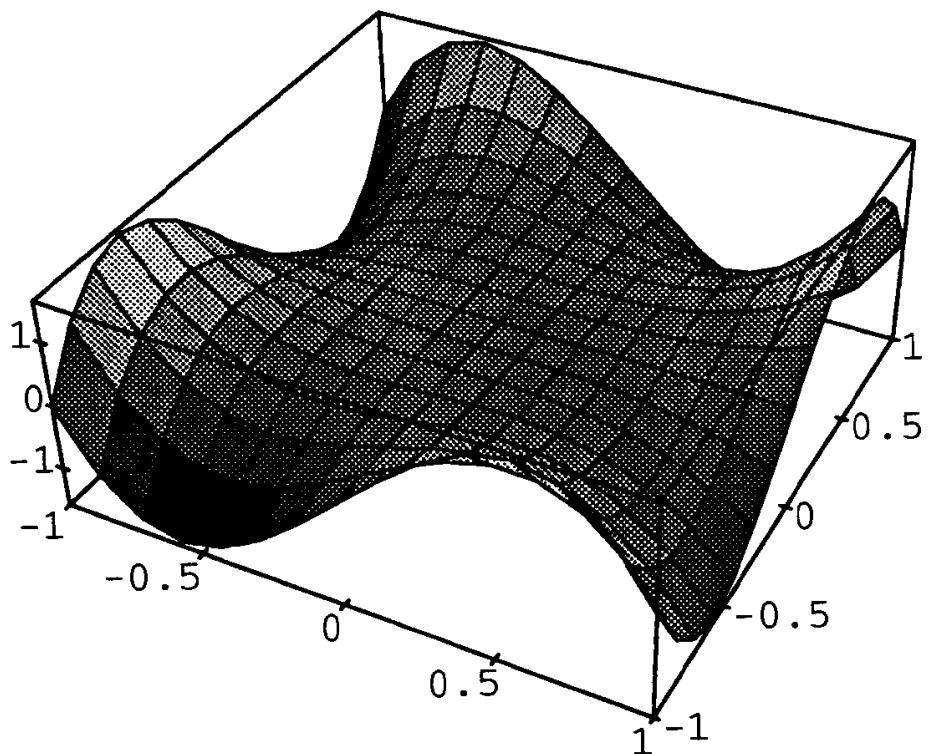
$$\rho^3 \cos 3\theta = x^3 - 3xy^2$$



$$\rho^4 \cos 4\theta = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$



$$\rho^4 \sin 4\theta = 4xy(x^2 - y^2)$$



$$\rho^5 \cos 5\theta = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

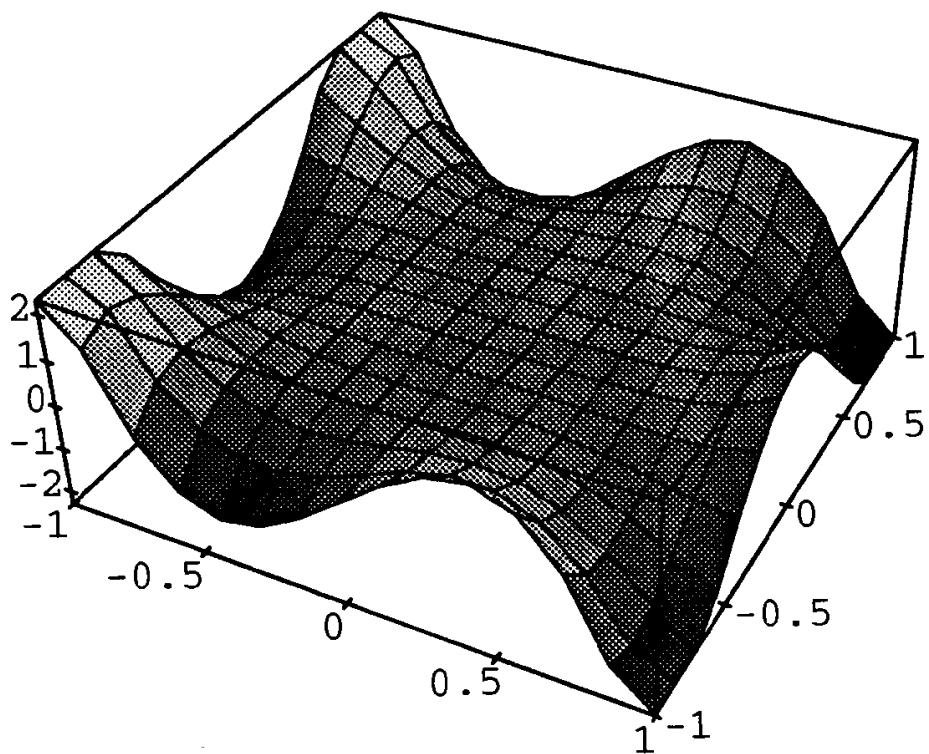


fig. 18.2. (v. esercizio 2)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varrho < 2 \\ u = x^4 & \varrho = 2. \end{cases}$$

$$u(x, y) = 6 + 2(x^2 - y^2) + \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{8}.$$

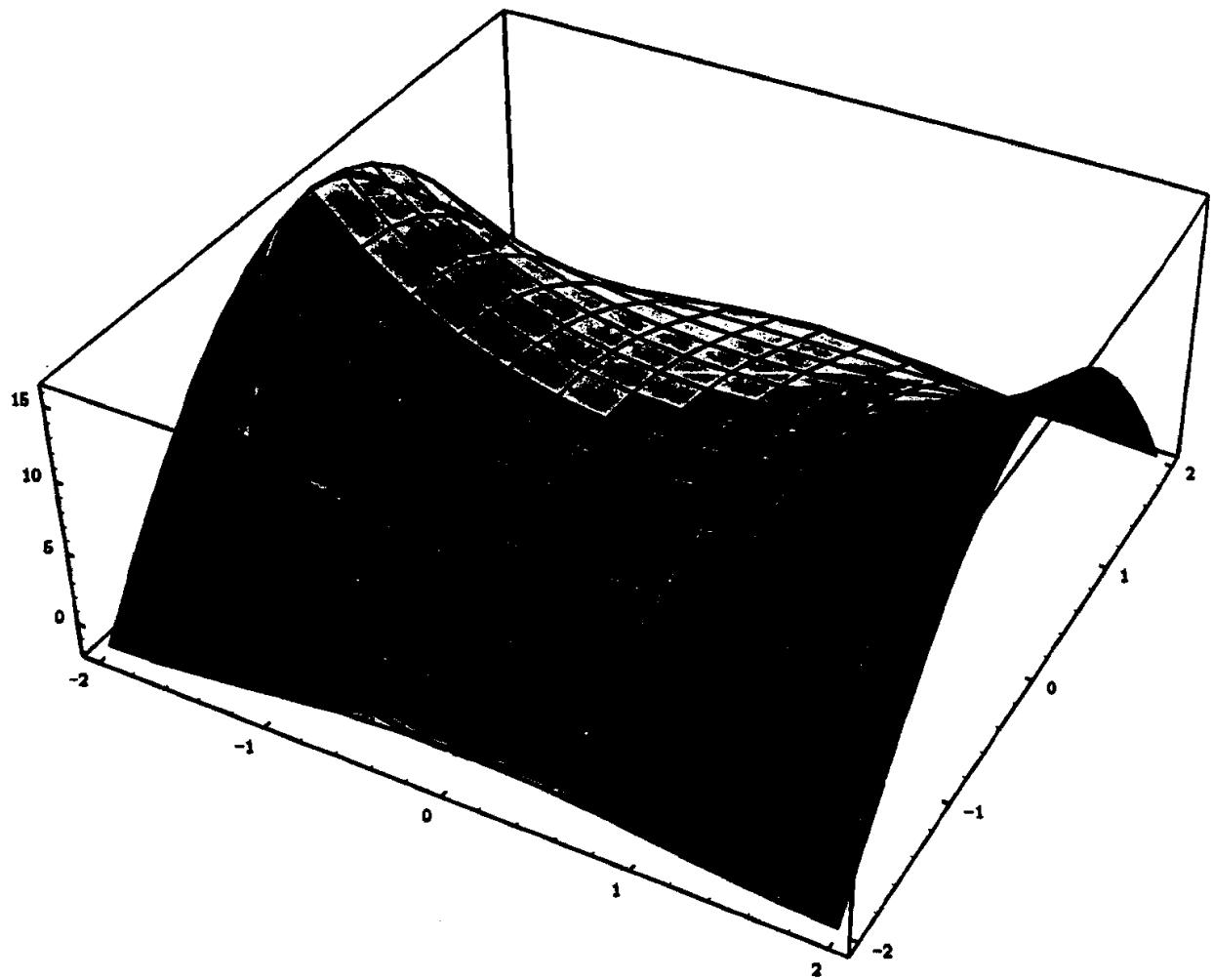
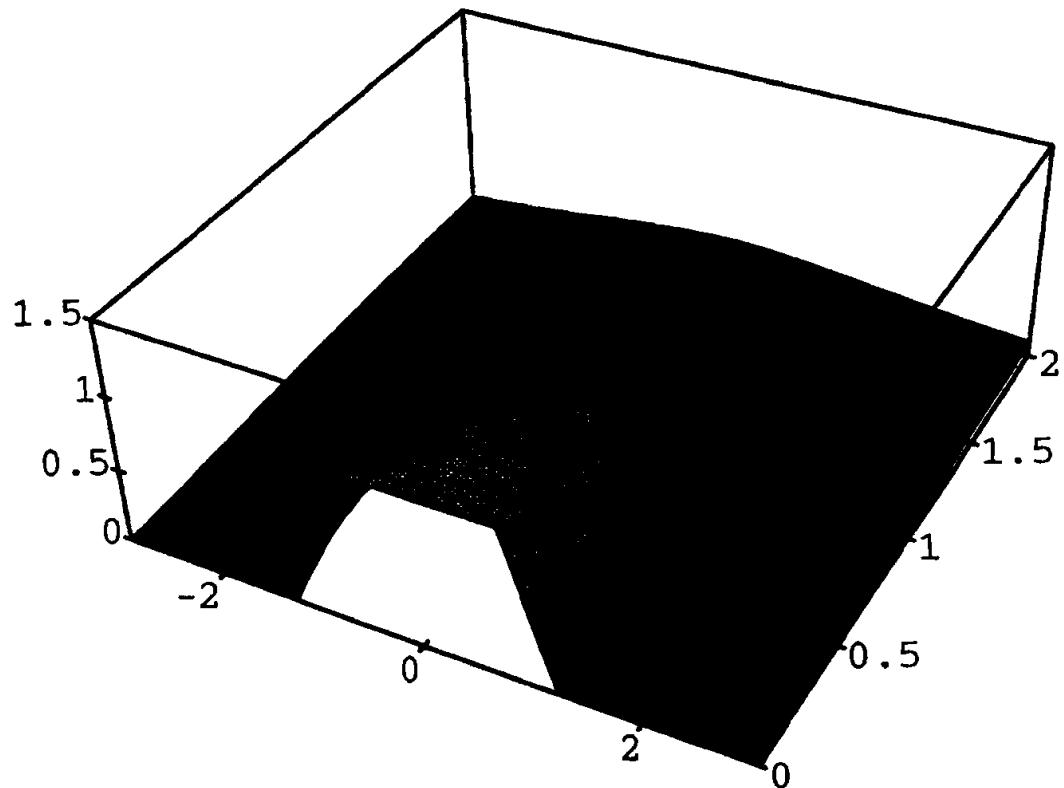


fig. 18.3. (v. esempio 12)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & y > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{y} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x}{y} \right) \right\}.$$



19. LAPLACIANO IN COORDINATE SFERICHE. ARMONICHE SFERICHE

19.1. L'EQUAZIONE DI LAPLACE IN COORDINATE SFERICHE. SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Introduciamo nello spazio tridimensionale xyz le coordinate sferiche r, ϑ, φ così definite:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

con $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi$.

Rispetto a queste coordinate, l'equazione $\Delta u = 0$ si scrive:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Cerchiamo soluzioni di questa equazione a variabili separate:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi).$$

Sostituendo nell'equazione e dividendo poi ambo i membri per $R \cdot \Theta \cdot \Phi$ si ha:

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \Theta' \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Moltiplicando per $r^2 \sin^2 \vartheta$ si vede, per il solito argomento sulla separazione di variabili, che dev'essere

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu = \text{costante.}$$

Poiché Φ dev'essere periodica di periodo 2π si ha:

$$\mu = -m^2 \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Phi(\varphi) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi.$$

L'equazione si può allora riscrivere:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta') - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = 0.$$

Poiché il 1° membro è somma di una funzione della sola r e una funzione della sola ϑ si può spezzare in:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} - \lambda = 0$$

e

$$\frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta') - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + \lambda = 0$$

con $\lambda = \text{costante}$. La 1^a equazione è un'equazione di Eulero:

$$r^2 R'' + 2r R' - \lambda R = 0$$

che sappiamo risolvere, una volta noto λ . La 2^a equazione si riscrive:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta') - \Theta \left(\frac{m^2}{\sin \vartheta} - \lambda \sin \vartheta \right) = 0.$$

Effettuiamo ora il cambiamento di variabili: $t = \cos \vartheta$. Poniamo:
 $\Theta(\vartheta) = P(\cos \vartheta)$, $\Theta'(\vartheta) = -\sin \vartheta \cdot P'(t)$. Perciò:

$$-\sin \vartheta \frac{d}{dt} (-\sin^2 \vartheta \cdot P') - P \cdot \left(\frac{m^2}{\sin \vartheta} - \lambda \sin \vartheta \right) = 0.$$

Dividendo per $\sin \vartheta$ e osservando che $\sin^2 \vartheta = 1 - t^2$:

$$\frac{d}{dt} [(1-t^2) P'] - P \cdot \left(\frac{m^2}{1-t^2} - \lambda \right) = 0 \quad \text{con } -1 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Per ogni m fissato ($m = 0, 1, 2, \dots$) abbiamo un *problema agli autovalori*, di tipo Sturm-Liouville, *singolare agli estremi*. (Il coefficiente di P' si annulla in ± 1). Discuteremo questo problema prima nel caso particolare $m = 0$ e poi in generale.

19.2. IL PROBLEMA DI DIRICHLET SULLA SFERA CON DATO INDIPENDENTE DALLA LONGITUDINE

Consideriamo ora il problema agli autovalori (1) per $m = 0$. Con riferimento al problema iniziale (ricerca di soluzioni a variabili separate dell'equazione di Laplace) ciò significa che $\Phi(\varphi)$ è costante, ossia che la soluzione u non dipende dalla longitudine φ .

Il problema (1) diventa:

$$\frac{d}{dt} [(1-t^2)P'] + \lambda P = 0 \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Si riconosce che questa è l'*equazione di Legendre* (cfr. § 13.3.1). Le uniche soluzioni limitate su $[-1, 1]$ di questa equazione sono i polinomi di Legendre $P_n(t)$, in corrispondenza dei valori $\lambda = n(n+1)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

La corrispondente equazione di Eulero per R è:

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0.$$

Cercando soluzioni del tipo $R(r) = r^\alpha$ si trova:

$$\alpha = n, \quad \alpha = -(n+1).$$

Se stiamo cercando una soluzione di $\Delta u = 0$ sulla sfera dovremo imporre che $R(r)$ sia limitata nell'origine; perciò le soluzioni $r^{-(n+1)}$ si scartano. In definitiva,

abbiamo soluzioni a variabili separate del tipo:

$$u_n(r, \vartheta) = r^n \cdot P_n(\cos \vartheta)$$

con $P_n(t)$ n -esimo polinomio di Legendre.

Osservazione. Se stessimo cercando una funzione armonica in un dominio a simmetria radiale *non* contenente l'origine, la soluzione $r^{-(n+1)}$ non sarebbe da scartare. Ad esempio, il potenziale elettrostatico tra 2 superfici sferiche concentriche di raggi R_1, R_2 che hanno rispettivamente potenziale U_1, U_2 , è la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & R_1 < r < R_2 \\ u = U_1 & r = R_1 \\ u = U_2 & r = R_2. \end{cases}$$

Per la simmetria, la soluzione sarà indipendente sia da φ che da ϑ , perciò $m = n = 0$ e $u = R(r)$ con $R = r^\alpha$ e $\alpha = 0, \alpha = -1$. La soluzione è del tipo:

$$u(r) = \frac{a}{r} + b.$$

Imponendo che sia $u(R_1) = U_1, u(R_2) = U_2$ si determinano a e b e si trova

$$u(r) = \frac{1}{R_1 - R_2} \left(\frac{R_1 R_2}{r} (U_2 - U_1) + U_1 R_1 - U_2 R_2 \right). \quad \square$$

Torniamo al problema. Se vogliamo risolvere un problema di Dirichlet sulla sfera, del tipo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < R \\ u(R, \vartheta) = f(\vartheta) \end{cases}$$

(cioè il dato dipende solo la ϑ , e quindi anche u dipende da r e ϑ ma non da φ),

cercheremo una u del tipo

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \vartheta)$$

che assume il dato al bordo.

Ricordiamo che i polinomi di Legendre, assegnati dalla formula:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

formano un sistema ortogonale completo in $L^2(-1, 1)$, e

$$\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}.$$

Il cambiamento di variabile $t = \cos \vartheta$ mostra che le funzioni:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\cos \vartheta) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

formano un sistema ortonormale completo in $L^2((0, \pi), \sin \vartheta d\vartheta)$. Posto

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

si ha che

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \vartheta)$$

e

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \vartheta)$$

risolve il problema di Dirichlet considerato.

Esempio 1.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u(x, y, z) = x^2 + y^2 & x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Poiché $\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \vartheta$, $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$ e, per $r = 1$, $x^2 + y^2 = \sin^2 \vartheta \equiv f(\vartheta)$.

Il dato al bordo (e quindi u) non dipende da φ . Poiché $t = \cos \vartheta$, $\sin \vartheta = 1 - t^2$.

Ricordando ora che (cfr. § 13.3.1)

$$P_0(t) = 1$$

$$P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

si ha:

$$1 - t^2 = \frac{2}{3} P_0 - \frac{2}{3} P_2$$

e:

$$u(r, \vartheta) = \frac{2}{3} P_0(\cos \vartheta) - \frac{2}{3} r^2 P_2(\cos \vartheta) = \frac{2}{3} (1 - r^2 + \frac{3}{2} r^2 \sin^2 \vartheta) =$$

$$= (\text{ritornando in coordinate cartesiane}) = \frac{2}{3} (1 - x^2 - y^2 - z^2) + x^2 + y^2$$

Dunque:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - 2z^2 + 1). \quad \square$$

Esempio 2.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < 1 \\ u(1, \vartheta) = \cos 3\vartheta. \end{cases}$$

$$\cos 3\vartheta = 4 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta = 4t^3 - 3t \quad \text{con } t = \cos \vartheta.$$

Ricordando che:

$$P_1(t) = t$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t$$

si trova:

$$4t^3 - 3t = \frac{8}{5} P_3(t) - \frac{3}{5} P_1(t).$$

Allora:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta) &= -\frac{3}{5} r P_1(\cos \vartheta) + \frac{8}{5} r^3 P_3(\cos \vartheta) = \\ &= -\frac{3}{5} r \cos \vartheta + r^3 \left(4 \cos^3 \vartheta - \frac{12}{5} \cos \vartheta\right). \end{aligned}$$

$$u(x, y, z) = \frac{8}{5} z^3 - \frac{12}{5} (x^2 + y^2)z - \frac{3}{5} z.$$

□

19.3. IL PROBLEMA DI DIRICHLET SULLA SFERA NEL CASO GENERALE. ARMONICHE SFERICHE

Cerchiamo ora le soluzioni dell'equazione

$$\left((1-t^2)P'\right)' + P \cdot \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right) = 0 \quad (1)$$

per m intero positivo qualunque. Si può procedere così. Consideriamo l'equazione

$$\left((1-t^2)P'\right)' + \lambda P = 0 \quad (2)$$

e differenziamola m volte. Si trova così la relazione:

$$(1-t^2)P^{[m+2]} - 2(m+1)tP^{[m+1]} - m(m+1)P^{[m]} + \lambda P^{[m]} = 0 \quad (3)$$

dove $P^{[m]}$ indica la derivata m -esima di P . (La (3) si dimostra facilmente per induzione su m). Poniamo ora

$$Q(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \cdot P^{[m]}(t). \quad (4)$$

Calcolando

$$\left((1-t^2)Q' \right)'$$

e usando la (3), si trova che Q soddisfa l'equazione (1). Ossia: se P è soluzione di (2), Q definita come in (4) è soluzione di (1). Allora ho trovato che, se $P_n(t)$ sono i polinomi di Legendre, la funzione:

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{[m]}(t)$$

risolve l'equazione:

$$\left((1-t^2)P_n^m \right)' + P_n^m \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) = 0$$

Questo vale per $0 \leq m \leq n$. (Osservare che, poiché P_n è un polinomio di grado n , $P_n^{[m]} \equiv 0$ se $m > n$). Si dimostra che le uniche soluzioni di (1) limitate in $[-1,1]$ si hanno per $\lambda = n(n+1)$ e $P = P_n^m$. Le funzioni P_n^m che risolvono il nostro problema agli autovalori si dicono *funzioni di Legendre associate*.

Esercizio 3. Scrivere, in base alla definizione di P_n^m e alla formula che assegna i polinomi P_n , le prime funzioni di Legendre associate.

Calcoliamole per $n = 0, 1, 2, 3$, $0 \leq m \leq n$.

$$P_0^0 = P_0 = 1$$

$$P_1^0 = P_1 = t$$

$$P_1^1 = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} P_1 = \sqrt{1-t^2}$$

$$P_2^0 = P_2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2^1 = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} P_2 = 3t \sqrt{1-t^2}$$

$$P_2^2 = (1 - t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_2 = 3(1 - t^2)$$

$$P_3^0 = P_3 = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t$$

$$P_3^1 = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} P_3 = \sqrt{1 - t^2} \left(\frac{15}{2} t^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$P_3^2 = (1 - t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_3 = (1 - t^2)(15t)$$

$$P_3^3 = (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^3}{dt^3} P_3 = 15 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$$

Con la stessa dimostrazione fatta per provare l'ortogonalità dei polinomi di Legendre (cfr. § 13.3) si prova che per ogni m intero, le funzioni $\{P_n^m\}_{n=m}^{\infty}$ sono tra loro ortogonali. Questo stesso sistema di funzioni si dimostra essere completo in $L^2(-1, 1)$, per ogni m fissato. I coefficienti di normalizzazione sono:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (n \geq m).$$

Le soluzioni a variabili separate dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche sono quindi:

$$r^n P_n^m (\cos \vartheta) \cos m\varphi \quad \text{per } m \geq 0 \text{ e } n \geq m$$

(in particolare per $m = 0$ si ha $r^n P_n(\cos \vartheta)$) e:

$$r^n P_n^m (\cos \vartheta) \sin m\varphi \quad \text{per } m \geq 1 \text{ e } n \geq m.$$

Queste funzioni si dicono *armoniche sferiche*. Sono funzioni armoniche e regolari in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , e giocano un ruolo analogo alle armoniche elementari nel piano ($r^n \cos n\vartheta, r^n \sin n\vartheta$). Che forma hanno queste funzioni in coordinate cartesiane?

- Le armoniche sferiche, espresse in coordinate cartesiane, sono polinomi omogenei di grado n in x, y, z .

Dimostrazione. Anzitutto, sono funzioni omogenee di grado n , ossia $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z) \quad \forall \lambda > 0$. Infatti $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (in\ coordinate\ sferiche) = f(\lambda r, \vartheta, \varphi) = \lambda^n f(r, \vartheta, \varphi)$ come si vede dalla presenza del fattore r^n nella definizione delle armoniche sferiche.

Dunque è sufficiente dimostrare che per x, y, z sulla sfera unitaria, le armoniche sferiche sono polinomi in x, y, z ; ossia, poniamo:

$$\begin{cases} x = \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \cos \vartheta \end{cases}$$

e consideriamo le funzioni $P_n^m (\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi, P_n^m (\cos \vartheta) \cdot \sin m\varphi$.

$P_n (\cos \vartheta)$ = polinomio di grado n in z .

$P_n^{[m]} (\cos \vartheta)$ = polinomio di grado $(n - m)$ in z .

$$\begin{aligned} P_n^m (t) &= (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n (t) = \\ &= (t = \cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \cdot (\text{polinomio di grado } (n - m) \text{ in } z). \end{aligned}$$

Se dimostriamo allora che le funzioni $(\sin^m \vartheta \cdot \cos m\varphi)$ e $(\sin^m \vartheta \cdot \sin m\varphi)$ sono polinomi di grado m in x, y, z , otteniamo che le armoniche sferiche sono polinomi di grado n .

Dimostriamo questo per induzione su m .

Per $m = 1$ si ha:

$$\sin \vartheta \cos \varphi = x \quad e \quad \sin \vartheta \sin \varphi = y.$$

19. Laplaciano in coordinate sferiche. Armoniche sferiche

Sia vero per $m = 1$.

$$\begin{aligned} \sin^m \vartheta \cos m\varphi &= [\underbrace{\sin^{m-1} \vartheta \cos(m-1)\varphi}_{\substack{\text{polinomio di grado } m-1, \\ \text{per ipotesi induttiva}}} \cdot \underbrace{(\sin \vartheta \cos \varphi)}_{=x} + \\ &\quad - [\underbrace{\sin^{m-1} \vartheta \sin(m-1)\varphi}_{\substack{\text{polinomio di grado } m-1, \\ \text{per ipotesi induttiva}}} \cdot \underbrace{(\sin \vartheta \sin \varphi)}_{=y}] = \text{polinomio di grado } m. \end{aligned}$$

(Analogamente per $\sin^m \vartheta \sin m\varphi$). □

Dunque le armoniche sferiche sono polinomi omogenei di grado n , armonici in \mathbb{R}^3 . Si dimostra inoltre che *ogni* polinomio omogeneo di grado n , armonico, è combinazione lineare delle armoniche sferiche $\{r^n P_n^m (\cos \vartheta) \cos m\varphi, r^n P_n^m (\cos \vartheta) \sin m\varphi\}_{m=0}^n$.

Esercizio 4. Esprimere le seguenti armoniche sferiche come polinomi in x, y, z :

$$(a) \quad rP_1(\cos \vartheta)$$

$$(b) \quad rP_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi$$

$$(c) \quad r^3 P_3^2(\cos \vartheta) \sin 2\varphi.$$

$$(a) \quad P_1(t) = t \quad rP_1(\cos \vartheta) = r \cos \vartheta = z.$$

$$(b) \quad P_1^1(t) = \sqrt{1-t^2} \quad (\text{v. esercizio 3}).$$

$$rP_1^1(\cos \vartheta) \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi = x.$$

$$(c) \quad P_3^2(t) = 15t(1-t^2) \quad (\text{v. esercizio 3}).$$

$$r^3 P_3^2(\cos \vartheta) \sin 2\varphi = 15 r^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi =$$

$$= 15 (r \sin \vartheta)^2 (r \cos \vartheta) \sin 2\varphi = 15 (x^2 + y^2) z \sin 2\varphi =$$

[ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ si ha: $\rho = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, perciò

$$\rho^2 \sin 2\varphi = \Im m(x + iy)^2 = 2xy]$$

$$= 30xyz.$$

□

Veniamo ora al *problema di Dirichlet sulla sfera*:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < R \\ u(R, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi). \end{cases}$$

Cercheremo una soluzione u che si esprima come serie di armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \vartheta) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \{a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi\}. \end{aligned} \tag{5}$$

(Notare che se $f = f(\vartheta)$ la soluzione è espressa dalla 1^a serie, come discusso nel § 2). Imponendo la condizione $u(R, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi)$ si trova:

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n P_n(\cos \vartheta) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \{R^n a_{n,m} \cos m\varphi + R^n b_{n,m} \sin m\varphi\} \end{aligned}$$

e i coefficienti si determinano, pur di saper sviluppare f come serie delle funzioni:

$$\left\{P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi\right\}_{m=0}^{\infty} \quad \left\{P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi\right\}_{m=1}^{\infty} \quad ; \quad \left\{P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi\right\}_{m=1}^{\infty} \quad ;$$

Che ciò sia possibile non è ovvio, ma discende dalle seguenti osservazioni. Sappiamo che:

- il sistema di funzioni $\{1, \cos m\varphi, \sin m\varphi\}_{m=1}^{\infty}$ è ortogonale completo in $L^2(0, 2\pi)$;
- il sistema $\{P_n(\cos \vartheta)\}_{n=0}^{\infty}$ è ortogonale completo in $L^2((0, \pi), \sin \vartheta d\vartheta)$ (polinomi di Legendre);
- per ogni $m \geq 1$ fissato, il sistema $\{P_n^m(\cos \vartheta)\}_{n=0}^{\infty}$ è ortogonale completo in $L^2((0, \pi), \sin \vartheta d\vartheta)$ (funzioni di Legendre associate).

Ora, si dimostrano in generale le seguenti proprietà riguardanti i sistemi ortonormali completi negli spazi di Hilbert $L^2(a, b)$.

Proposizione 1. Se $\{x_n(t)\}$ è un sistema ortonormale completo (s. o. n. c.) in $L^2(X)$ e $\{y_n(t)\}$ è una s. o. n. c. in $L^2(Y)$ (X, Y intervalli in \mathbb{R}) allora il sistema a 2 indici $\{x_n(t) \cdot y_m(t)\}_{n,m=0}^{\infty}$ è un s. o. n. c. in $L^2(X \times Y)$.

Proposizione 2. Se $\{x_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ è un s. o. n. c. in $L^2(X)$ e, per ogni m intero, $\{y_n^m(t)\}_{n=0}^{\infty}$ è un s. o. n. c. in $L^2(Y)$, allora $\{x_m(t) \cdot y_n^m(t)\}_{n,m=0}^{\infty}$ è un s. o. n. c. in $L^2(X \times Y)$.

(Omettiamo la dimostrazione, facile ma un po' laboriosa, di queste proposizioni).

Applicando la proposizione 2 alla nostra situazione abbiamo che il sistema

$$\{P_n(\cos \vartheta), P_n^m(\cos \vartheta) \cos n\varphi, P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi\}_{m=1}^{\infty} \quad n = m$$

è ortogonale completo in $L^2((0, 2\pi) \times (0, \pi), d\varphi \sin \vartheta d\vartheta)$. Si vede anche che:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |f(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta = \int_{x^2 + y^2 + z^2 = 1} |f(x, y, z)|^2 d\sigma(x, y, z).$$

Perciò: la restrizione alla superficie della sfera unitaria delle armoniche sferiche è un sistema ortogonale completo in L^2 della superficie stessa. La soluzione del problema di Dirichlet è quindi assegnata dalla (5), dove i coefficienti sono dati da:

$$c_n = \frac{1}{R^n} \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (n \geq 0)$$

$$a_{n,m} = \frac{1}{R^n} \frac{1}{\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \, d\varphi \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta$$

(per $m \geq 1$, $n \geq m$)

$b_{n,m}$ = analoga formula con $\sin m\varphi$ anziché $\cos m\varphi$.

Esercizio 5. Risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = x^3 & x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

$$x^3 = (r \sin \vartheta \cos \varphi)^3 = (\text{per } r = 1) = \sin^3 \vartheta \cos^3 \varphi$$

$$f(\vartheta, \varphi) = \sin^3 \vartheta \cos^3 \varphi.$$

f è a variabili separate, il che rende più facile svilupparla:

$$\cos^3 \varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi.$$

Perciò compaiono solo i termini per $m = 1$ e $m = 3$. Devo sviluppare $\sin^3 \vartheta$ sia in serie delle funzioni $\{P_n^1(\cos \vartheta)\}_{n=1}^\infty$ sia in serie delle funzioni $\{P_n^3(\cos \vartheta)\}_{n=3}^\infty$.

$$P_3^3(t) = 15(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$P_3^3(\cos \vartheta) = 15 \sin^3 \vartheta, \quad \sin^3 \vartheta = \frac{1}{15} P_3^3(\cos \vartheta t).$$

Per lo sviluppo rispetto a $\{P_n^1\}$, osservo che:

$$P_1^1(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad P_3^1 = \sqrt{1-t^2} \left(\frac{15}{2} t^2 - \frac{3}{2} \right)$$

Si vede allora che per a e b opportuni è:

$$aP_1^1 + bP_3^1 = \sqrt{1-t^2} (1-t^2) = (1-t^2)^{\frac{3}{2}} = \sin^3 \vartheta.$$

Precisamente:

$$aP_1^1 + bP_3^1 = \sqrt{1-t^2} \left(a + \frac{15}{2} bt^2 - \frac{3}{2} b \right) = \sqrt{1-t^2} (1-t^2)$$

se:

$$\frac{15}{2} b = -1; \quad a - \frac{3}{2} b = 1.$$

Risolvendo si ha:

$$(1-t^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5} P_1^1 - \frac{2}{15} P_3^1.$$

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \sin^3 \vartheta \cos^3 \varphi = \left(\frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi \right) \sin^3 \vartheta = \\ &= \frac{3}{4} \cos \varphi \left(\frac{4}{5} P_1^1(\cos \vartheta) - \frac{2}{15} P_3^1(\cos \vartheta) \right) + \frac{1}{4} \cos 3\varphi \left(\frac{1}{15} P_3^3(\cos \vartheta) \right). \end{aligned}$$

Confrontando con la (5) si ha:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta, \varphi) &= \\ &= \cos \varphi \left(\frac{3}{5} r P_1^1(\cos \vartheta) - \frac{1}{10} r^3 P_3^1(\cos \vartheta) \right) + \cos 3\varphi \left(\frac{1}{60} r^3 P_3^3(\cos \vartheta) \right) = \\ &= \frac{3}{5} r \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{3}{20} r^3 \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) \cos \varphi + \frac{1}{4} r^3 \sin^3 \vartheta \cos 3\varphi. \end{aligned}$$

Passando in coordinate cartesiane si ha:

$$u(x, y, z) = \frac{3}{5} x - \frac{3}{5} xz^2 + \frac{2}{5} x^3 - \frac{3}{5} xy^2.$$

□

20. L' EQUAZIONE DEL CALORE IN UNA DIMENSIONE

20.1. IL CASO DELLA SBARRA FINITA

20.1.1. *EQUAZIONE OMOGENEA*

CON CONDIZIONI AGLI ESTREMI OMOGENEE

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \quad (k \text{ costante positiva}) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Lo affrontiamo col metodo di separazione delle variabili:

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Sostituendo nell'equazione e dividendo per XT si ha:

$$\frac{T'}{T}(t) = k \frac{X''}{X}(x)$$

da cui:

$$T'(t) = \lambda k T(t)$$

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Si ha allora:

$$\lambda = -n^2\pi^2$$

$$X_n(x) = \sin n\pi x$$

$$T_n(x) = e^{-n^2\pi^2 kt}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 kt} \sin n\pi x. \quad (1)$$

Imponendo il dato iniziale $u(x, 0) = f(x)$ si trova che i c_n sono i coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ in serie di soli seni:

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx. \quad (2)$$

Osservazioni.

- *Proprietà regolarizzante dell'equazione del calore.*

Sia $f \in L^1(0, 1)$. Allora da (2) si vede che $|c_n| \leq 2 \|f\|_{L^1(0, 1)}$. La (1) mostra allora che per $t \geq t_0 > 0$ (comunque fissato t_0) la serie u converge uniformemente, e così pure le serie che si ottengono derivando termine a termine (rispetto a t o x , un numero qualunque di volte). Perciò la funzione u è infinitamente derivabile per $t > 0$, anche se per $t = 0$ è soltanto integrabile.

- *In che senso è assunto il dato iniziale?*

Se la serie di Fourier di f converge puntualmente in $(0, 1)$, il dato f è assunto puntualmente:

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (x_0, 0)} u(x, t) = f(x_0).$$

Ciò accade ad es. se f è regolare a tratti. Se f è solo $L^2(0, 1)$, il dato è assunto in senso L^2 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - f\|_{L^2(0, 1)} = 0.$$

- Dalla (1) e (2) si ottiene la seguente *formula di rappresentazione integrale*:

$$u(x, t) = \int_0^1 f(y) K(x, y, t) dy \quad (3)$$

con

$$K(x, y, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 k t} \sin n \pi x \sin n \pi y.$$

- Comportamento della soluzione per tempi lunghi.*

Dalla (1) o dalla (3) si vede facilmente che $u(x, t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Per linearità, questo implica che la soluzione di un problema del tipo:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = g(t, x) \\ u(0, t) = \varphi(t) \\ u(1, t) = \psi(t) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

per tempi lunghi tende a coincidere con la soluzione di un analogo problema con $f(x) \equiv 0$. (La soluzione “non risente” del dato iniziale dopo tempi lunghi).

- Problema di Neumann.*

Se affrontiamo con lo stesso procedimento il problema con condizioni di Neumann omogenee:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

troviamo:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 k t} \cos n \pi x$$

con

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx.$$

Osservare che questa volta per $t \rightarrow +\infty$ la soluzione non tende a zero, ma al valore costante:

$$\frac{1}{2} c_0 = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Ossia: se la sbarra è isolata la temperatura dopo tempi lunghi raggiunge comunque il valore medio della temperatura iniziale.

Esempio 1.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(1-x). \end{cases}$$

Poiché

$$x(1-x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^3}$$

la soluzione è (v. fig. 20.1):

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2\pi^2 t} \frac{\sin n\pi x}{n^3}. \quad \square$$

Esempio 2.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

Lo sviluppo in serie di coseni di $\sin x$ è:

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

perciò la soluzione è: (v. fig. 20.2)

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4kn^2 t} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

(osservare che nell'esponenziale compare n^2 anziché $n^2\pi^2$ perché siamo su $(0, \pi)$ anziché su $(0, 1)$).

20.1.2. IL CASO DELLA CONDUCIBITÀ NON COSTANTE

Se la sbarra non è omogenea, il coefficiente di conducibilità termica sarà in generale una funzione $k(x)$, anziché una costante k . Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t - (k(x) u_x)_x = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Mostriamo come affrontare anche questo caso col metodo di separazione delle variabili. Tale metodo *non* è quindi una prerogativa delle equazioni a coefficienti costanti. Cercando soluzioni $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ si trova (con lo stesso procedimento del paragrafo precedente):

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

$$\begin{cases} (k(x)X')' = \lambda X \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Quest'ultimo è un problema agli autovalori, del tipo di Sturm-Liouville. Se la

funzione $k(x)$ è regolare e inoltre $k(x) \geq k_0 > 0$ per $x \in (0, 1)$, il problema si dice regolare. In questo caso si dimostra quanto segue:

esiste una successione λ_n di autovalori, negativi, e una successione X_n di autofunzioni corrispondenti che forma un sistema ortonormale completo in $L^2(0, 1)$.

Poniamo: $\lambda_n = -\omega_n^2$. Cerchiamo allora una soluzione del tipo:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\omega_n^2 t} X_n(x).$$

Imponendo $u(x, 0) = f(x)$ si trova

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x).$$

Poiché le $X_n(x)$ sono un s. o. n. c. in $L^2(0, 1)$, per ogni $f \in L^2(0, 1)$ si potrà scrivere f in tale forma, pur di porre:

$$c_n = \int_0^1 f(x) X_n(x) dx.$$

Esempio 3.

$$\begin{cases} u_t - ((1+x)^2 u_x)_x = 0 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Il problema agli autovalori è:

$$\begin{cases} ((1+x)^2 X')' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Eulero. Cerchiamo soluzioni del tipo $(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Si trova:

$$\alpha^2 + \alpha + \lambda = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}.$$

Scrivendo $\alpha = a + ib$ si ha:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= (1+x)^a \cdot (1+x)^{ib} = (1+x)^a e^{ib \log(1+x)} = \\ &= (1+x)^a [\cos(b \log(1+x)) + i \sin(b \log(1+x))]. \end{aligned}$$

Dunque due soluzioni reali indipendenti dell'equazione sono:

$$X_1(x) = (1+x)^a \cos(b \log(1+x))$$

$$X_2(x) = (1+x)^a \sin(b \log(1+x)).$$

Per avere $X(0) = 0$ scartiamo X_1 . Per avere $X(1) = 0$, ossia $2^a \cdot \sin(b \log 2) = 0$, poniamo

$$b = \frac{k\pi}{\log 2}.$$

Imponiamo che λ sia reale (per avere soluzione $u_n = e^{-\lambda t} X_n(x)$ reale). Scrivendo $\lambda = -(\alpha^2 + \alpha)$ e $\alpha = a + ib$ si ha: $\lambda = -[a^2 - b^2 + a + ib(2a + 1)]$, da cui λ reale per: $b = 0$, che non è accettabile, in quanto dà $X \equiv 0$, e per $a = -\frac{1}{2}$, accettabile.

Dunque:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{in\pi}{\log 2}$$

$$\lambda = b^2 - a^2 - a = \frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\log^2 2}$$

$$X_n(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{\log 2} \log(1+x)\right).$$

Abbiamo quindi determinato autofunzioni e autovalori del problema di Sturm-Liouville. Calcoliamo i coefficienti di normalizzazione delle X_n :

$$\begin{aligned} \int_0^1 X_n(x)^2 dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\log 2} \log(1+x)\right) dx = \\ &= (\log(1+x) = t; \frac{1}{1+x} dx = dt) = \int_0^{\log 2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\log 2} t\right) dt = \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Dunque i “coefficienti di Fourier” di $f(x)$ rispetto alle X_n sono:

$$c_n = \frac{2}{\log 2} \int_0^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sin\left(\frac{n\pi}{\log 2} \log(1+x)\right) dx$$

e la soluzione del problema per l'equazione del calore è:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\log^2 2}\right)t}}{\sqrt{1+x}} \sin\left(\frac{n\pi}{\log 2} \log(1+x)\right).$$

Se, ad esempio $f(x) \equiv 1$, i coefficienti c_n si possono calcolare esplicitamente. Si ha:

$$c_n = \frac{8 n\pi (1 + (-)^{n+1}\sqrt{2})}{\log^2 2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Scrivendo i primi termini della serie che definisce u , si può tracciare il grafico di $u(x, t)$ per vari istanti t fissati. (v. fig. 20.3). Si può così visualizzare come la non omogeneità della sbarra influisce sulla modalità di diffusione del calore.

20.1.3. EQUAZIONE NON OMogenea

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t, x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Come abbiamo visto nel caso dell'equazione di Poisson (v. § 18.3), il metodo da utilizzare qui non è quello di separazione delle variabili ma quello degli *sviluppi in serie di Fourier*. Ossia, poiché la soluzione dell'equazione omogenea è del tipo:

$$\sum c_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

qui cercheremo soluzioni del tipo:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

(1)

Sviluppando anche il dato f come:

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx,$$

ossia ponendo $B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t, x) \sin nx dx$, e calcolando $u_t - u_{xx}$ dalla (1) si ha:

$$\begin{cases} b'_n(t) + n^2 b_n(t) = B_n(t) \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

dove si è tenuto conto della condizione $u(x, 0) = 0$. Risolvendo per ogni n l'equazione differenziale in b_n si ha:

$$b_n(t) = e^{-n^2 t} \left\{ b_n(0) + \int_0^t e^{n^2 \tau} B_n(\tau) d\tau \right\}$$

$$b_n(t) = \int_0^t B_n(\tau) e^{-n^2(t-\tau)} d\tau.$$

(2)

La (1) e (2) insieme assegnano la soluzione. Usando la definizione di $B_n(\tau)$ si può anche ottenere una *formula di rappresentazione integrale* per la soluzione:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\tau, y) \sin ny dy \right) d\tau = \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^{\pi} f(y, \tau) \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(t-\tau)} \sin nx \sin ny \right) dy = \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^{\pi} f(y, \tau) K(x, y, t-\tau) dy \end{aligned}$$

dove $K(x, y, t)$ è lo stesso nucleo che compare nella formula integrale che assegna la soluzione del problema con dato iniziale non nullo e termine noto nullo (v. § 1).

Esempio 4.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$f(t, x) = e^{-t} \sin x; \quad B_1(t) = e^{-t}; \quad B_n(t) = 0 \quad \forall n \neq 1.$$

$$b_1(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau = te^{-t}$$

$$u(t, x) = t e^{-t} \sin x$$

(osservare che in questo caso la "sorgente di calore" $f(t, x)$ si spegne per $t \rightarrow +\infty$, e così pure la temperatura $u(t, x) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$).

Esempio 5.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$B_1(t) = 1; \quad B_n(t) = 0 \quad \forall n \neq 1.$$

$$b_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

$$u(t, x) = (1 - e^{-t}) \sin x.$$

Osservare che in questo caso c'è una sorgente di calore costante nel tempo, e la temperatura $u(t, x)$ non tende a zero per $t \rightarrow +\infty$, ma tende alla soluzione dell'equazione stazionaria $-u_{xx} = \sin x$.

20.1.4. CONDIZIONI AGLI ESTREMI DIPENDENTI DAL TEMPO

Consideriamo ora un problema del tipo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = \varphi(t) \\ u(1, t) = \psi(t) \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

con φ, ψ funzioni assegnate. Vediamo come si può affrontare questo problema per mezzo della *trasformata di Laplace*.

Sia $U(x, s) = [\mathcal{L}u(x, \cdot)](s)$, cioè U è la trasformata di Laplace di u rispetto al tempo. Applicando \mathcal{L} all'equazione differenziale si ha (tenendo conto della condizione $u(x, 0) = 0$):

$$sU - U_{xx} = 0$$

equazione che (essendo $s > 0$) ha soluzioni:

$$U(x, s) = c_1(s) e^{\sqrt{s}x} + c_2(s) e^{-\sqrt{s}x}$$

con c_1, c_2 funzioni arbitrarie. Poniamo ora:

$$F(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s); \quad G(s) = (\mathcal{L}\psi)(s).$$

Applicando \mathcal{L} alle condizioni agli estremi si ha:

$$F(s) = U(0, s) = c_1(s) + c_2(s)$$

$$G(s) = U(1, s) = c_1(s) e^{\sqrt{s}} + c_2(s) e^{-\sqrt{s}}.$$

Risolvendo il sistema in c_1, c_2 si trova:

$$c_1(s) = \frac{G(s) - F(s) e^{-\sqrt{s}}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}; \quad c_2(s) = \frac{F e^{\sqrt{s}} - G}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}$$

e quindi:

$$U(x, s) = G(s) \cdot \frac{\text{Sh } \sqrt{s}x}{\text{Sh } \sqrt{s}} + F(s) \cdot \frac{\text{Sh } \sqrt{s}(1-x)}{\text{Sh } \sqrt{s}}.$$

Abbiamo così determinato la trasformata di Laplace (rispetto al tempo) della soluzione. Il problema ora è antitrasformare.

Supponiamo di conoscere una funzione $K(x, t)$ tale che

$$[\mathcal{L}(K(x, \cdot))](s) = \frac{\operatorname{Sh} \sqrt{s}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{s}}$$

allora, per il teorema sulla trasformata di Laplace della convoluzione, avremmo:

$$u(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) \psi(\tau) d\tau + \int_0^t K(1 - x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (1)$$

Occorre dunque antitrasformare il nucleo $\frac{\operatorname{Sh} \sqrt{s}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{s}}$. Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\operatorname{Sh} \sqrt{z}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{z}}.$$

Osserviamo che, nonostante la presenza della funzione \sqrt{z} , $f(z)$ non è polidroma (se sostituiamo \sqrt{z} con $-\sqrt{z}$ la funzione non cambia). f è regolare in $z = 0$, e ha dei poli semplici negli altri punti in cui si annulla $\operatorname{Sh} \sqrt{z}$, ossia: $\sqrt{z} = k\pi i$, $z = -k^2\pi^2$ ($k = 1, 2, \dots$). In base alla formula di inversione per la trasformata di Laplace (v. § 15.7) si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\operatorname{Sh} \sqrt{s}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{s}} \right)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{\operatorname{Sh} \sqrt{z}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{z}} e^{tz} dz = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left(\frac{\operatorname{Sh} \sqrt{z}x}{\operatorname{Sh} \sqrt{z}} e^{tz}, -k^2\pi^2 \right) = \end{aligned}$$

(poiché $\operatorname{Sh} \sqrt{z}x \cdot e^{tz}$ è regolare e $\frac{1}{\operatorname{Sh} \sqrt{z}}$ ha poli del 1° ordine)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Sh} \sqrt{z}x \cdot e^{tz}}{(\operatorname{Sh} \sqrt{z})'} \right)_{z=-k^2\pi^2} =$$

(utilizzando il fatto che $\sqrt{z} = k\pi i$, $\operatorname{Sh} ik\pi x = i \sin k\pi x$, $\operatorname{Ch} ik\pi = \cos k\pi$)

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-)^{k+1} k \sin k\pi x \cdot e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Abbiamo così determinato il nucleo K .

Osservazione. Il risultato trovato non è ancora soddisfacente, perché la serie che definisce K converge sempre più lentamente per $t \rightarrow 0$, e diverge in $t = 0$, ossia $K(x, t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow 0$. Notiamo però che il comportamento della serie migliora se noi la integriamo termine a termine in t . In altre parole, poniamo:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{K}(x, t) &= \int_0^t K(x, \tau) d\tau = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\int_0^t e^{-n^2 \pi^2 \tau} d\tau \right) \sin[n\pi(1-x)] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin[n\pi(1-x)] - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n} \sin[n\pi(1-x)]. \end{aligned}$$

Si nota che la 2ª serie converge anche per $t = 0$, mentre la 1ª non è altro che la serie di Fourier della funzione x . Si ha quindi:

$$\overset{\vee}{K}(x, t) = x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n} \sin[n\pi(1-x)].$$

Consideriamo ora la formula di rappresentazione (1), e riscriviamola, mediante integrazione per parti, facendo comparire la funzione $\overset{\vee}{K}$ anziché K .

$$\begin{aligned} \int_0^t K(x, t-\tau) \psi(\tau) d\tau &= \int_0^t K(x, \tau) \psi(t-\tau) d\tau = \\ &= \overset{\vee}{K}(x, \tau) \psi(t-\tau) \Big|_0^t + \int_0^t \overset{\vee}{K}(x, \tau) \psi'(t-\tau) d\tau = \\ &= \overset{\vee}{K}(x, t) \psi(0) - \overset{\vee}{K}(x, 0) \psi(t) + \int_0^t \overset{\vee}{K}(x, t-\tau) \psi'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Notiamo che $\overset{\vee}{K}(x, 0) = 0$ per definizione di $\overset{\vee}{K}$, $\psi(0) = u(1, 0) = 0$ (perché $u(x, 0) = 0 \forall x$). Ragionando analogamente su $K(1-x, t)$ si ha infine:

$$u(x, t) = x\psi(t) + (1-x)\varphi(t) + \int_0^t \varphi'(\tau)H(x, t-\tau)d\tau + \int_0^t \psi'(\tau)H(1-x, t-\tau)d\tau \quad (2)$$

con:

$$H(x, t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n} \sin n\pi x.$$

La formula di rappresentazione (2) ha il pregio che gli integrali scritti sono sicuramente convergenti, purché i dati φ, ψ siano funzioni C^1 ; inoltre mette bene in evidenza che la u assume effettivamente le condizioni agli estremi e la condizione iniziale.

- • -

Illustriamo ora un procedimento alternativo per risolvere lo stesso problema: l'uso degli *sviluppi di Fourier*. Per semplicità, supponiamo ora che sia $\psi(t) \equiv 0$, ossia:

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi(t) \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\pi x \quad \text{con } b_n(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin n\pi x \, dx.$$

Notiamo che, non essendo u nulla agli estremi, la serie non sarà derivabile termine a termine rispetto a x . Allora per scrivere un'equazione differenziale che determini b_n procediamo così:

20. L'equazione del calore in una dimensione

$$u_t - u_{xx} = 0 \Rightarrow \int_0^1 [u_t(t, x) - u_{xx}(t, x)] \sin n\pi x \, dx = 0.$$

Ora:

$$\int_0^1 u_t \sin n\pi x \, dx = \frac{1}{2} b'_n(t)$$

mentre

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{xx}(t, x) \sin n\pi x \, dx &= (\text{integrando per parti}) = \\ &= [u_x \sin n\pi x]_0^1 - n\pi \int_0^1 u_x \cos n\pi x \, dx = \\ &= -n\pi \left([u \cos n\pi x]_0^1 + \int_0^1 n\pi u \sin n\pi x \, dx \right) = n\pi \varphi(t) - \frac{n^2 \pi^2}{2} b_n(t) \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\begin{cases} b'_n(t) + n^2 \pi^2 b_n(t) = 2n\pi \varphi(t) \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$b_n(t) = 2n\pi \int_0^t \varphi(\tau) e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau.$$

La soluzione è dunque:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\pi x$$

con i b_n assegnati come sopra. Osservare che se si scambiano la serie e gli integrali si ritrova la formula di rappresentazione (1) ottenuta mediante trasformata di Laplace.

Esempio 6.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = t \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n(t) &= 2n\pi e^{-n^2\pi^2 t} \int_0^t \tau e^{n^2\pi^2 \tau} d\tau = \\ &= 2n\pi e^{-n^2\pi^2 t} \left(t \frac{e^{n^2\pi^2 t}}{n^2\pi^2} - \frac{e^{n^2\pi^2 t}}{n^4\pi^4} + \frac{1}{n^4\pi^4} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{n} - \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{n^3} + \frac{2}{\pi^3} \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}. \end{aligned}$$

La soluzione è:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3} \sin n\pi x - \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^3} = \\ &= t(1-x) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 t} - 1}{n^3} \sin n\pi x. \end{aligned}$$

La soluzione è somma di un termine che cresce con t , un termine che tende a zero per $t \rightarrow +\infty$, un termine indipendente da t .

20.2. PROBLEMI PER L'EQUAZIONE DEL CALORE SULLA RETTA

20.2.1. L'EQUAZIONE OMOGENEA

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Il fatto che x vari in tutto \mathbb{R} rende questo problema adatto ad essere trattato con

la *trasformata di Fourier*. Ponendo: $\hat{u}(x, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](x)$ e trasformando le equazioni si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + x^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(x, 0) = \hat{f}(x). \end{cases}$$

Equazione differenziale ordinaria (rispetto a t). Si ha:

$$\hat{u}(x, t) = \hat{f}(x) e^{-tx^2}.$$

Ricordando ora la regola della trasformata di Fourier della convoluzione, e antitrasformando il nucleo e^{-tx^2} si ha:

$$\hat{u}(x, t) = \hat{f}(x) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}})\right)(x).$$

Quindi:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

La funzione

$$K(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

rappresenta la temperatura in (x, t) relativa ad un impulso di calore unitario in $x = 0$ per $t = 0$. Se poniamo

$$K(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\pi}}}{\sqrt{\pi}}, \quad K_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} K\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

vediamo che $K(x, t)$ è $K_\epsilon(x)$ con $\epsilon = 2\sqrt{t}$. La famiglia di funzioni $\{K_\epsilon(x)\}_{\epsilon > 0}$ costituisce una famiglia di nuclei regolarizzanti (v. osservazione 15, § 15.4) il che ci assicura che $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $u(\cdot, t) \rightarrow f$ in senso \mathcal{L}^p , per $t \rightarrow 0$. ($1 \leq p < \infty$).

20.2.2. EQUAZIONE NON OMOGENEA

Consideriamo ora il problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t, x) & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Applicando ancora la trasformata di Fourier rispetto ad x si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + x^2 \hat{u} = \hat{F} \\ \hat{u}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$\hat{u}(x, t) = \int_0^t \hat{F}(x, \tau) e^{-(t-\tau)x^2} d\tau = \int_0^t \mathcal{F}\left(F * \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)(x) d\tau.$$

Perciò la soluzione è:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}} K(x - y, t - \tau) F(y, \tau) dy$$

con

$$K(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

(cioè K è lo stesso nucleo che compare nella soluzione dell'equazione omogenea).

20.3. PROBLEMI PER L'EQUAZIONE DEL CALORE SULLA SEMIRETTA

20.3.1. CONDIZIONI OMOGENEE ALL'ESTREMO

Consideriamo i seguenti problemi sulla semiretta:

3.1.a.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

3.1.b.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0 \\ u_x(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Mostreremo come questi problemi si possano ricondurre al problema per l'equazione omogenea sulla retta, discusso nel § 20.2.1. Questo grazie al *metodo di riflessione* che ora illustriamo. Cominciamo dalla seguente

osservazione. Sia u soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Allora se f è pari anche u è pari, se f è dispari anche u è dispari.

Dimostrazione. Sia ad es. f dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$. Poniamo $v(x, t) = -u(-x, t)$. Si osserva allora che: $v_t - v_{xx} = 0$. Inoltre $v(x, 0) = -u(-x, 0) = -f(-x) = f(x)$. Ma allora v risolve lo stesso problema che risolve u e, per l'unicità della soluzione, $u \equiv v$, ossia $-u(-x, t) = u(x, t)$, ossia u è dispari. Analogamente si prova che se f è pari u è pari. \square

Consideriamo ora il problema 3.1.a. Poiché $u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0$, per continuità $u(0, 0) = 0$, dunque $f(0) = 0$. Sia f^* la funzione dispari che estende f a tutto \mathbf{R} (“riflessione dispari di f ”). Poiché $f(0) = 0$, f^* è continua se f è continua. Sia u^* la soluzione (su \mathbf{R}) del problema:

$$\begin{cases} u_t^* - u_{xx}^* = 0 & x \in \mathbf{R} \\ u^*(x, 0) = f^*(x). \end{cases}$$

Poiché f^* è dispari, per l'osservazione precedente, u^* è dispari: $u^*(-x, t) = -u^*(x, t)$; in particolare (per la continuità di u^*), $u^*(0, t) = 0$. Dunque la restrizione di u^* a $[0, +\infty)$ risolve il problema 3.1.a. Dunque, in base alla (1) del § 20.2.1, si ha:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f^*(y) dy \quad \forall x > 0, t > 0.$$

In modo analogo si tratta il problema 3.1.b. Sia f^* la simmetrizzata pari di f , e u^* la soluzione di

$$\begin{cases} u_t^* - u_{xx}^* = 0 & x \in \mathbf{R} \\ u^*(x, 0) = f^*(x). \end{cases}$$

Poiché f^* è pari, u^* è pari. Ma una funzione pari, se è derivabile, ha derivata nulla nell'origine. Perciò $u_x^*(0, t) = 0$. Dunque la restrizione a $[0, +\infty)$ di u^* è la soluzione u del problema 3.1.b.

Infine, osserviamo che gli analoghi problemi per l'equazione non omogenea si risolvono in modo simile sfruttando la soluzione data nel § 20.2.2 del problema sulla retta per l'equazione non omogenea.

20.3.2. CONDIZIONE ALL'ESTREMO DIPENDENTE DAL TEMPO

Consideriamo ora il seguente problema sulla semiretta, con condizione non omogenea all'estremo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0 \\ u(0, t) = \varphi(t) \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Qui il metodo di riflessione non è applicabile. Affrontiamo il problema mediante la *trasformata di Laplace*. Applichiamo all'equazione la trasformata di Laplace rispetto al tempo. Sia

$$U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)](s).$$

L'equazione differenziale diventa:

$$sU - U(x, 0) - U_{xx} = 0$$

da cui:

$$U(x, s) = c_1(s)e^{\sqrt{s}x} + c_2(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

La condizione all'estremo diventa:

$$U(0, s) = (\mathcal{L}\varphi)(s) \equiv F(s).$$

Affinché U sia limitata per $x \rightarrow +\infty$, poniamo $c_1(s) \equiv 0$. Allora si ha:

$$U(x, s) = F(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

Conoscendo l'antitrasformata (v. esempio 21, § 15.7)

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{s}x})(t) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \equiv H(x, t)$$

si ha, per la formula sulla trasformata della convoluzione:

$$u(x, t) = \int_0^t H(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.$$

fig. 20.1. (v. esempio 1)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(1 - x). \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \frac{\sin n\pi x}{n^3}.$$

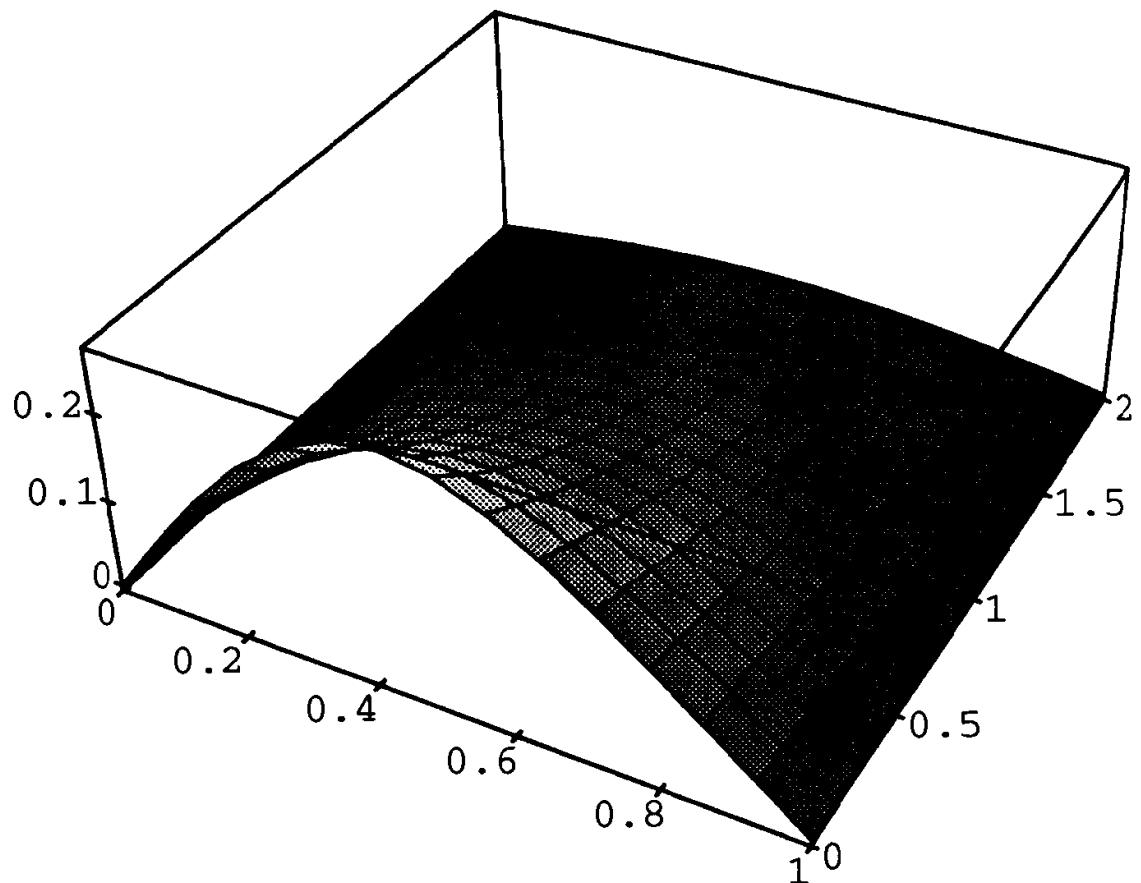


fig. 20.2. (v. esempio 2)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2 t} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

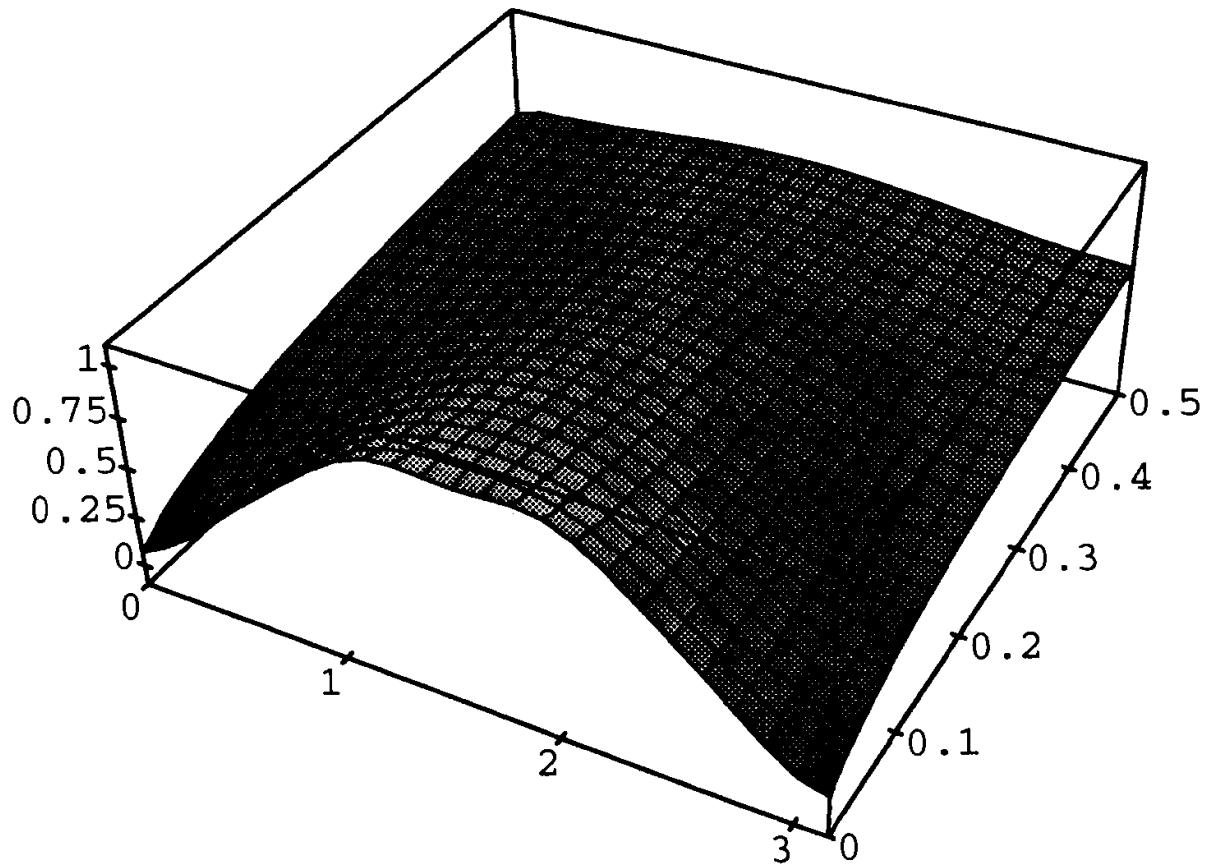


fig. 20.3. (v. esempio 3)

Grafico della temperatura di una sbarra non omogenea (conducibilità $k(x) = (1+x)^2$) in istanti successivi. Il problema corrispondente è:

$$\begin{cases} u_t - ((1+x)^2 u_x)_x = 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Notare la asimmetria della funzione, dovuta alla non omogeneità della sbarra; in particolare, il calore si trattiene di più nella zona in cui la conducibilità è minore.

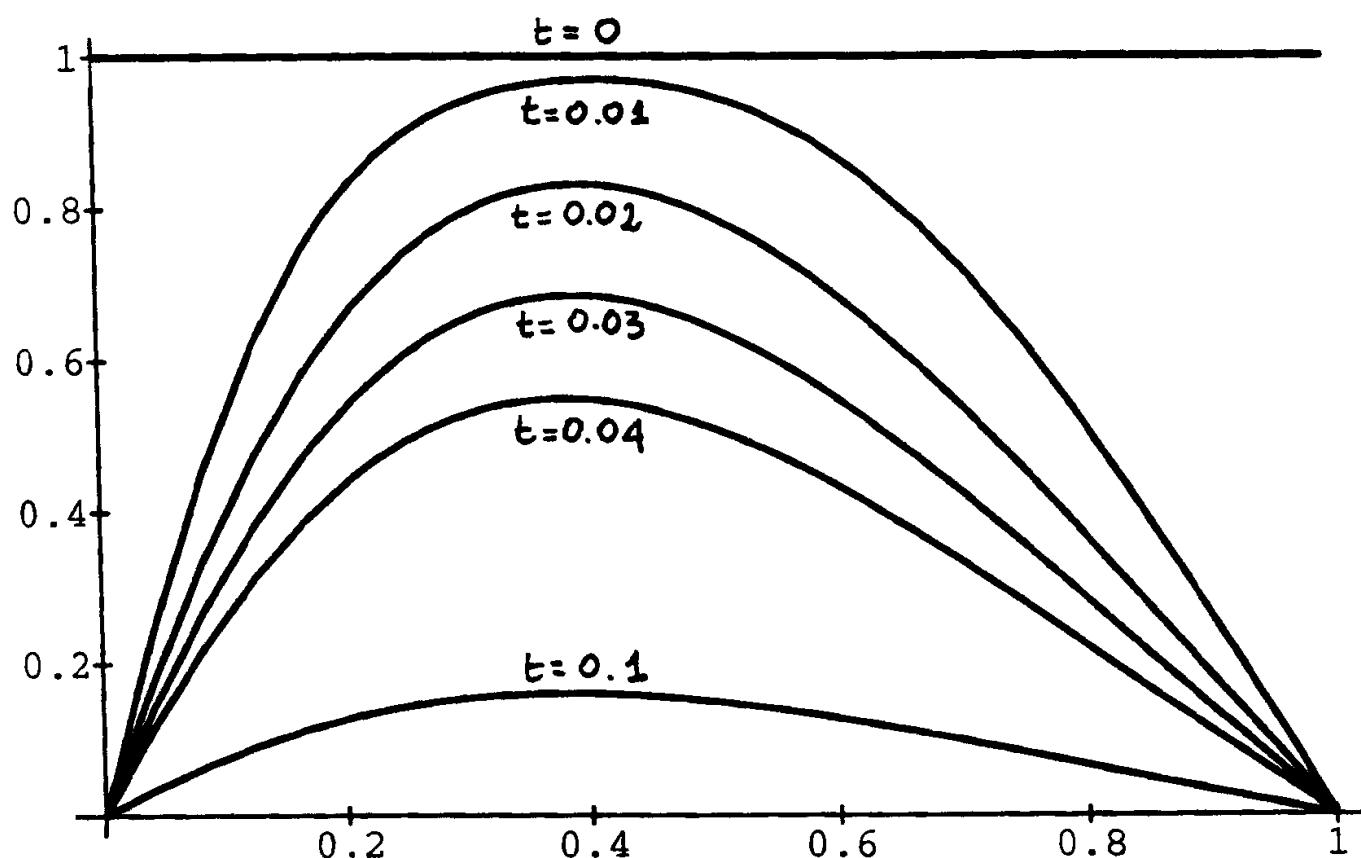


fig. 20.4. (v. esempio 4)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$u(t, x) = te^{-t} \sin x.$$

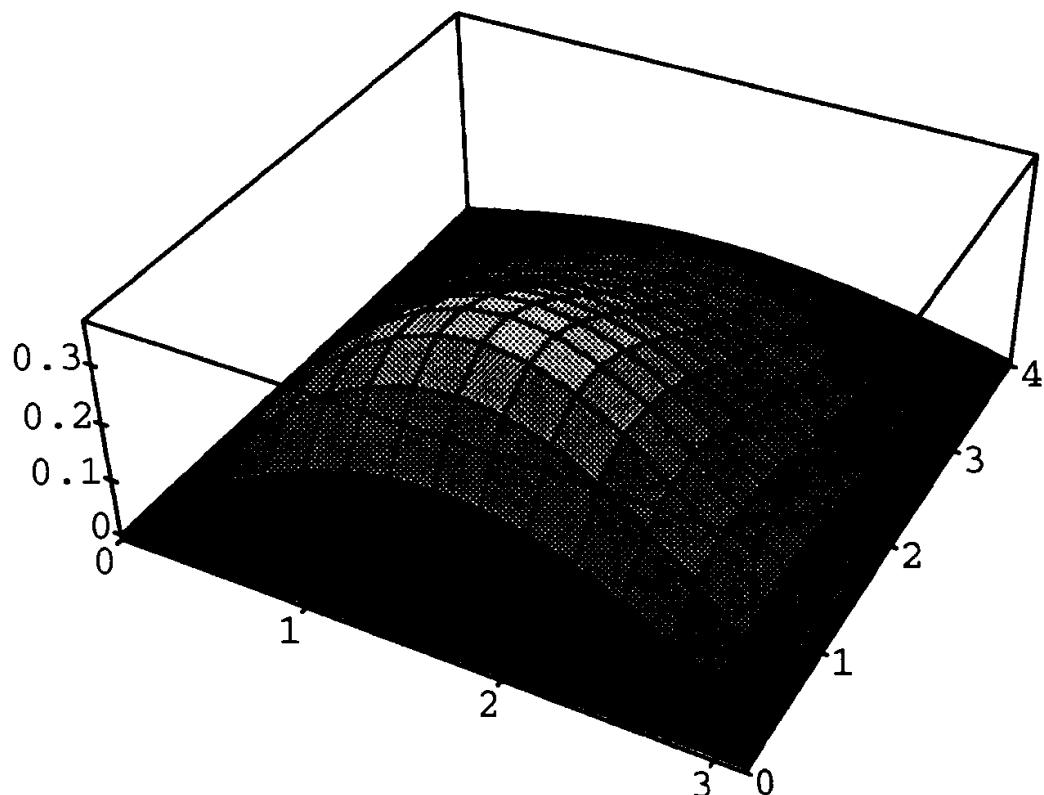


fig. 20.5. (v. esempio 5)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$u(t, x) = (1 - e^{-t}) \sin x.$$

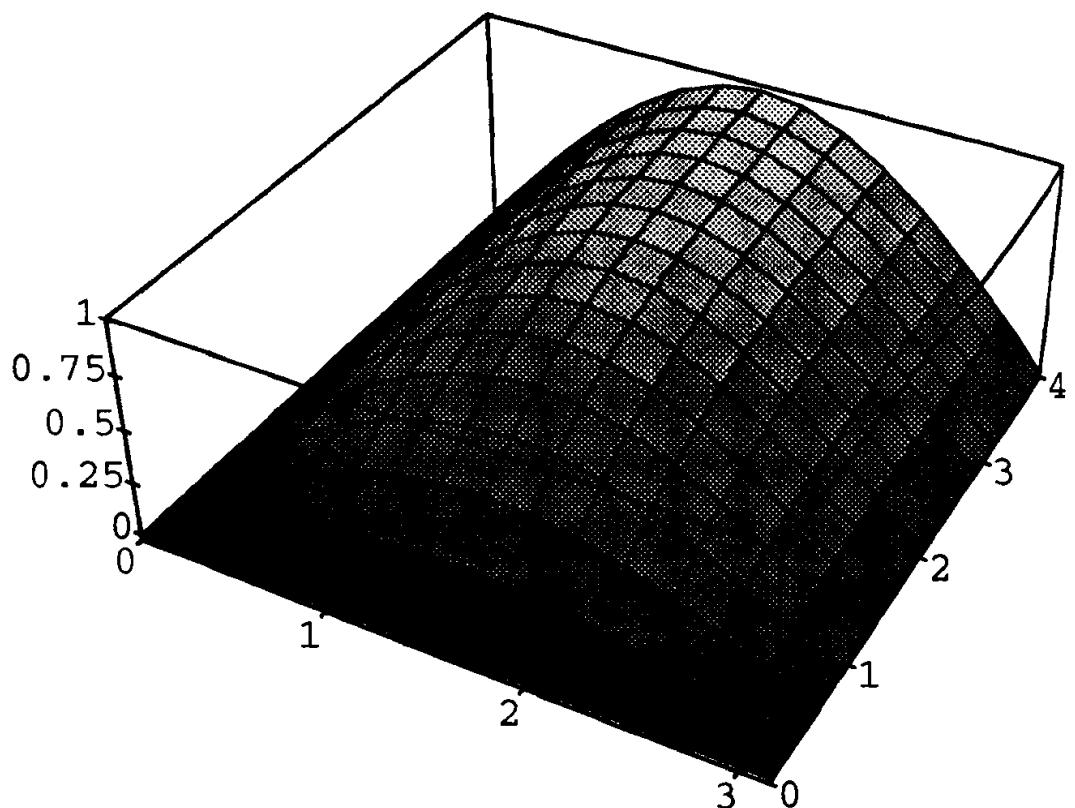


fig. 20.6. (v. esempio 6)

Soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = t \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$u(x, t) = t(1-x) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2t}}{n^3} \sin n\pi x.$$

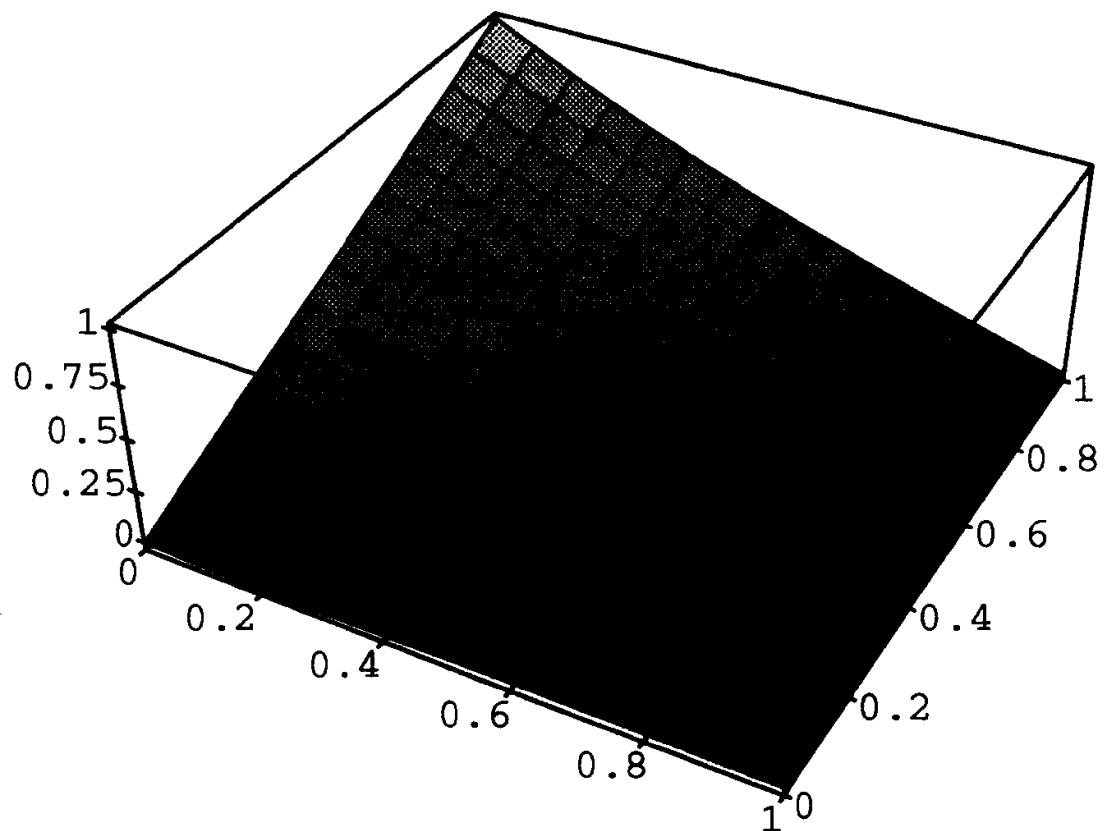
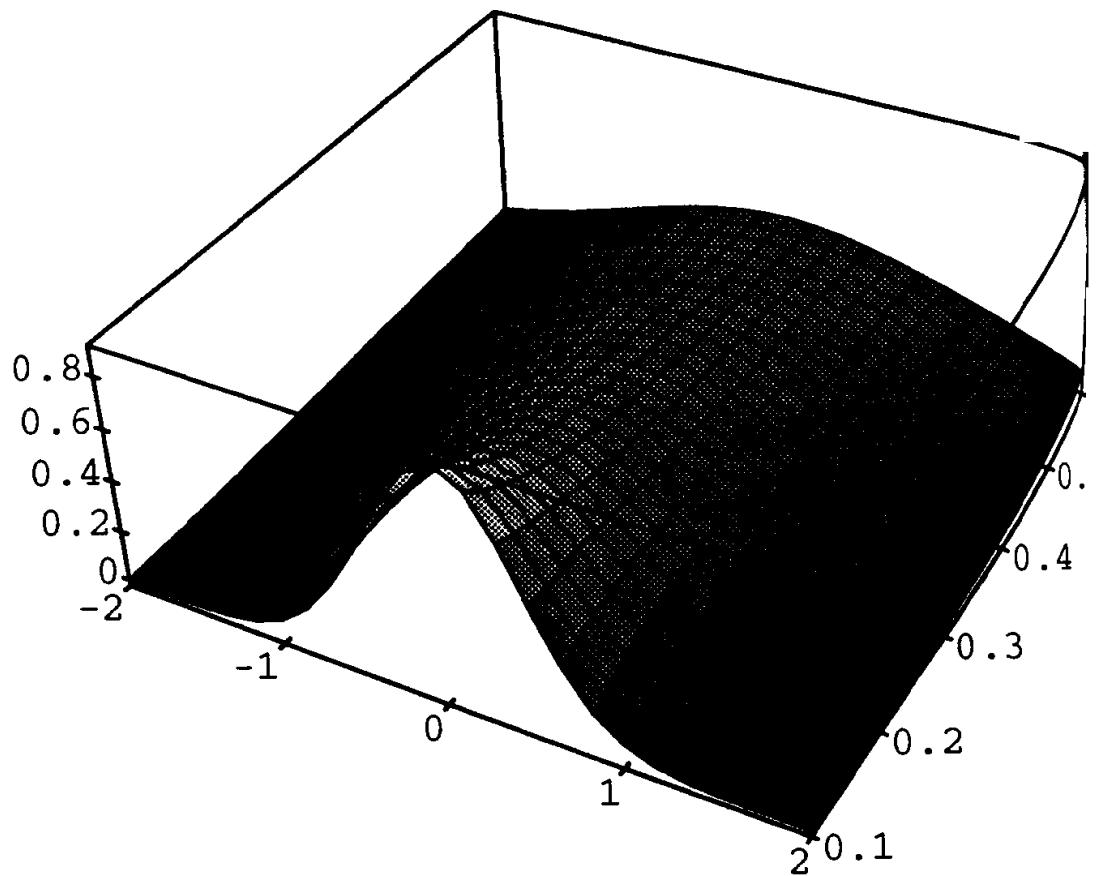


fig. 20.7.

Nucleo del calore: $K(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$

(Rappresenta la temperatura in (x, t) relativa ad un impulso di calore unitario in $x = 0$ per $t = 0$).



21. L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

21.1. IL PROBLEMA DI CAUCHY SULLA RETTA

Consideriamo il seguente problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale (equazione della corda vibrante):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Affrontiamo il problema con il *metodo di d'Alembert*, che consiste nel determinare prima l'integrale generale dell'equazione, mediante un opportuno cambiamento di variabili, e poi risolvere il problema di Cauchy. Poniamo:

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct. \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

e quindi:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta} = 0.$$

Perciò $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, con φ e ψ generiche funzioni (di classe C^2). Quindi:

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (1)$$

Se φ e ψ sono arbitrarie funzioni C^2 , la (1) assegna l'integrale generale

dell'equazione delle onde in \mathbb{R} . Il termine $\varphi(x + ct)$ si può interpretare come un'onda regressiva; il termine $\psi(x - ct)$ come un'onda progressiva, ossia: il grafico di $\varphi(x + ct)$ (o $\psi(x - ct)$) si ottiene da quello di $\varphi(x)$ traslandolo verso sinistra (destra) di una quantità ct ; c rappresenta quindi la velocità dell'onda.

Veniamo ora al problema di Cauchy. Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x). \end{cases}$$

Derivando la 1^a equazione si ha:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$$

che messa a sistema con la 2^a permette di ricavare $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(f'(x) + \frac{g(x)}{c} \right)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2} \left(f'(x) - \frac{g(x)}{c} \right).$$

Quindi:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + c_1$$

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + c_2$$

da cui:

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) =$$

$$= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x - ct}^{x + ct} g(\xi) d\xi + c_3.$$

Ricordando che $u(x, 0) = f(x)$ si ha $c_3 = 0$, dunque:

21. L'equazione della corda vibrante

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (2)$$

soluzione del problema di Cauchy.

Esercizio 1. Usare l'espressione dell'integrale generale dell'equazione della corda vibrante per risolvere il seguente problema di Cauchy, dove il dato è assegnato sulla linea $x = t$ anziché sulla linea $t = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, x) = f(x) \\ u_t(x, x) = 0. \end{cases}$$

(Significato fisico: la configurazione "iniziale" è rilevata da un osservatore che si muove verso destra con velocità 1). Sia:

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Imponendo le condizioni si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(x(c+1)) + \psi(x(1-c)) &= f(x) \\ c\varphi'(x(c+1)) - c\psi'(x(1-c)) &= 0. \end{aligned}$$

Derivando la 1^a equazione e mettendo a sistema con la 2^a si trova:

$$\varphi'(x(c+1)) = \frac{1}{2} f'(x) = \psi'(x(1-c)).$$

Da qui integrando si ricava:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left((1+c) f\left(\frac{x+ct}{c+1}\right) + (1-c) f\left(\frac{x-ct}{1-c}\right) \right).$$

Si vede che condizione perché il problema sia solubile è che sia $c \neq \pm 1$, il che

significa che la linea portante i dati non sia caratteristica. (Significato fisico: che l'osservatore si muova con velocità *diversa* da quella con cui si propaga l'onda).

Osservazione. L'equazione non omogenea. Se consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione non omogenea:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

il metodo di d'Alembert è ancora applicabile. Il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

porta l'equazione nella forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) = -\frac{1}{4c^2} F \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right).$$

Integrando in ξ si trova:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) &= \frac{\partial u}{\partial \eta} (\eta, 0) - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F \left(\frac{\bar{\xi} + \eta}{2}, \frac{\bar{\xi} - \eta}{2c} \right) d\bar{\xi} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} (\eta, 0) - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} (\eta, 0) - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F \left(\frac{\bar{\xi} + \eta}{2}, \frac{\bar{\xi} - \eta}{2c} \right) d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Integrando ora in η da η a ξ si ha:

$$u(\xi, 0) - u \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c} \right) =$$

$$= \int_{\eta}^{\xi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} (\bar{\eta}, 0) - \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} (\bar{\eta}, 0) \right) d\bar{\eta} - \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} d\bar{\eta} \int_{\bar{\eta}}^{\xi} F\left(\frac{\bar{\xi} + \bar{\eta}}{2}, \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{2c}\right) d\bar{\xi}.$$

Osserviamo che ora nel 1° integrale si ha:

$$\int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial x} (\bar{\eta}, 0) d\bar{\eta} = u(\xi, 0) - u(\eta, 0)$$

mentre nel 2° si può eseguire il cambio di variabili

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \bar{x} + c\bar{t} \\ \bar{\eta} = \bar{x} - c\bar{t} \end{cases}$$

ottenendo così:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) &= \frac{1}{2} [u(\xi, 0) + u(\eta, 0)] + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial t} (\bar{\eta}, 0) d\bar{\eta} + \frac{1}{2c} \int_0^{\frac{(\xi - \eta)}{2c}} d\bar{t} \int_{\eta + c\bar{t}}^{\xi - c\bar{t}} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Eseguendo le trasformazioni

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

e utilizzando le condizioni iniziali si ha infine:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x - ct}^{x + ct} g(y) dy + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^t d\bar{t} \int_{x - c(t - \bar{t})}^{x + c(t - \bar{t})} F(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Soluzione del problema di Cauchy per l'equazione non omogenea.

21.2. LA CORDA VIBRANTE CON UNO O DUE ESTREMI FISSATI. METODI DI RIFLESSIONE

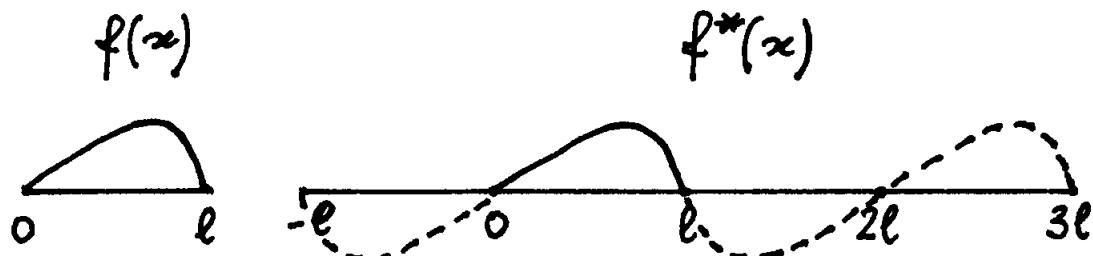
Consideriamo ora il problema di Cauchy per una corda vibrante di lunghezza l fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (4)$$

È possibile costruire la soluzione di questo problema a partire dalla soluzione di un opportuno problema di Cauchy su tutto \mathbb{R} , mediante un “*metodo di riflessione*” simile a quello visto per alcuni problemi relativi all’equazione del calore (v. § 20.3.1). Facciamo la seguente costruzione.

- Se f e g sono i dati iniziali, definiti su $[0, l]$, prolunghiamoli a $[-l, l]$ definendoli in modo da essere funzioni dispari: $f(-x) = -f(x)$, idem per g ; ora f e g sono definite su $[-l, l]$: prolunghiamole a tutto \mathbb{R} in modo che siano periodiche di periodo $2l$; chiamiamo f^* , g^* le funzioni così ottenute, definite su tutto \mathbb{R} .

Esempio:



Osservare che, poiché f soddisfa la condizione $f(0) = f(l) = 0$ (per compatibilità con i dati $u(0, t) = u(l, t) = 0$) la f^* risulta zero in l e continua su \mathbb{R} , se f è continua su $[0, l]$.

- Sia ora u^* la soluzione del problema di Cauchy su tutto \mathbb{R} , con dati iniziali f^*, g^* . Per quanto visto nel § 1 è:

$$u^*(x, t) = \frac{f^*(x + ct) + f^*(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(\xi) d\xi.$$

- Si dimostra che, poiché f^*, g^* sono dispari e periodiche di periodo $2l$, anche u ha queste proprietà. (Per far ciò basta considerare la funzione $v(x, t) = -u^*(-x, t)$ e provare che risolve lo stesso problema di Cauchy di u^* , da cui per l'unicità della soluzione $v = u^*$, ossia u^* è dispari. Poi si considera $v(x, t) = u^*(x + 2kl, t)$ e analogamente si prova che u^* è periodica).
- Essendo u^* dispari, periodica e continua in \mathbb{R} , in particolare $u^*(0, t) = u^*(l, t) = 0$. Allora la funzione $u \equiv (\text{restrizione di } u^* \text{ al segmento } [0, l])$ risolve il problema di Cauchy che ci interessa.

Esercizio 2. Calcolare u in $x = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{2}$ dove u è la soluzione di (4) con:

$$c = l = 1, f(x) = 0, g(x) = x(1-x).$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(\xi) d\xi$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 g^*(\xi) d\xi = (\text{per le simmetrie di } g^*) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = -\frac{1}{12}.$$

21. L'equazione della corda vibrante

Esercizio 3. Calcolare u in $x = \frac{3}{4}$, $t = 2$ dove u è la soluzione di (4) con $c = l = 1$ e:

$$f(x) = x(1-x), \quad g(x) = x^2(1-x).$$

$$u\left(\frac{3}{4}, 2\right) = \frac{f^*\left(\frac{11}{4}\right) + f^*\left(-\frac{5}{4}\right)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{11}{4}} g^*(x) dx.$$

Si vede che l'integrale di g^* è esteso a 2 periodi completi e perciò, per simmetria, è nullo, mentre

$$f^*\left(-\frac{5}{4}\right) = f^*\left(\frac{11}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right),$$

perciò:

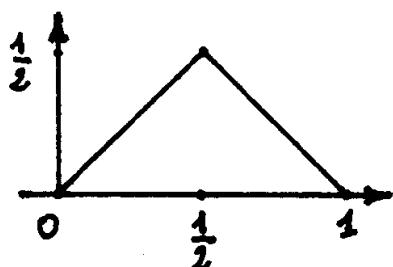
$$u\left(\frac{3}{4}, 2\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema (4) con $l = c = 1$, $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = 0$.

Poiché $\sin \pi x$ su \mathbb{R} è già dispari e periodica di periodo 2, $f^* = f$ e:

$$u(x, t) = \frac{\sin \pi(x+t) + \sin \pi(x-t)}{2} = \sin \pi x \cos \pi t.$$

Esercizio 5. Sia $l = c = 1$, $g(x) = 0$, $f(x)$:

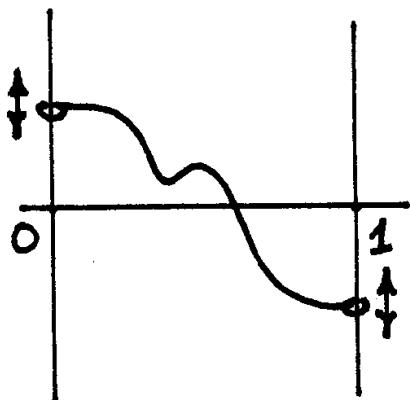


(corda pizzicata nel punto medio). Dedurre dal grafico $f^*(x)$ il grafico qualitativo di $u(\cdot, t)$ per successivi istanti t . (v. fig. 21.2).

Esempio 6. Corda a estremi liberi. Risolvere:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_t(x, 0) = \sin^3 \pi x \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \end{cases}$$

Le condizioni agli estremi $u_x = 0$ esprimono il fatto che la corda non è fissata agli estremi, ma piuttosto gli estremi sono vincolati a muoversi sulla verticale passante per $x = 0$, $x = 1$, senza attrito:



Ragionando come nel caso delle condizioni $u(0, t) = u(1, t) = 0$ si vede che ora occorre definire f^* e g^* come funzioni *pari*, di periodo $2l$, che estendono f e g . Quindi la formula di d'Alembert assegna la soluzione u , con f^* e g^* come dati.

Nel nostro caso:

$$f^*(x) = f(x) = 1$$

$$g^*(x) = |\sin \pi x|^3$$

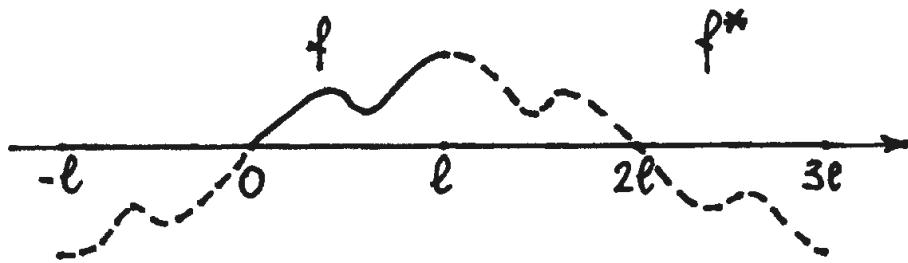
$$u(x, t) = 1 + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |\sin \pi \xi|^3 d\xi.$$

Analogamente se le condizioni agli estremi fossero del tipo

$$u(0, t) = 0$$

$$u_x(l, t) = 0$$

la simmetrizzazione da fare sarebbe la seguente:



Esempio 7. Corda semiillimitata. Consideriamo ora i problemi di Cauchy sulla semiretta:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \text{ oppure } u_x(0, t) = 0. \end{cases}$$

La soluzione si ottiene ancora per riflessione. Qui basterà definire f^* e g^* come il prolungamento di f e g a tutto \mathbb{R} , dispari se $u(0, t) = 0$, pari se $u_x(0, t) = 0$.

Esercizio 8. Se $u(0, t) = 0$, $g(x) = 0$ e $f(x)$ ha grafico del tipo:



tracciare, a partire dal grafico di f^* , un grafico qualitativo di $u(\cdot, t)$ per successivi istanti t . (v. fig. 21.3).

21.3. DECOMPOSIZIONE IN ARMONICHE PER LA VIBRAZIONE DI UNA CORDA FISSATA GLI ESTREMI

Consideriamo nuovamente il problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Abbiamo visto come si risolve questo problema col metodo di d'Alembert. Ora vedremo come risolvere alternativamente lo stesso problema col metodo di *separazione delle variabili*. Questo porterà ad alcune osservazioni interessanti, che il metodo precedente non permetteva di mettere in luce. Cerchiamo dunque soluzioni del tipo:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Dall'equazione si ha:

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \text{costante.}$$

Tenendo conto delle condizioni agli estremi si ha:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

che dà:

21. L'equazione della corda vibrante

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Quindi per $T(t)$ si ha:

$$T'' = -\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T$$

che dà:

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l}.$$

Cerchiamo quindi una soluzione del tipo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (1)$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{n\pi c}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ossia:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

(2)

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

La (1) fornisce quindi la soluzione, se a_n e b_n sono assegnati dalle (2).

Consideriamo ora un singolo termine delle serie (1):

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (3)$$

Un termine del genere rappresenta un'*onda stazionaria* ossia un modo di vibrazione in cui ogni punto x fissato oscilla con una legge periodica: infatti l'espressione tra () è una funzione del tempo periodica di periodo $\frac{2l}{nc}$. Quindi la (3) è un'onda stazionaria di frequenza $n \cdot \frac{c}{2l}$. Osserviamo che l'ampiezza della vibrazione di ciascun punto x_0 dipende dalla quantità $\sin \frac{n\pi x_0}{l}$. In particolare se $\frac{n\pi x}{l} = k\pi$, cioè se

$$x = \frac{k}{n} l \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

il punto x rimane fermo. Ci sono dunque $(n+1)$ nodi (ossia punti in cui la vibrazione ha ampiezza nulla), compresi i due estremi 0 e l . Per misurare l'ampiezza dell'onda, è meglio trascrivere la (3) nella forma seguente:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \left(\frac{n\pi ct}{l} + \vartheta_n \right) \quad (4)$$

con ϑ_n definito da:

$$\begin{cases} \sin \vartheta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \cos \vartheta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}. \end{cases}$$

Si vede così che l'ampiezza dell'onda è $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Torniamo ora alla soluzione (1). Si possono riassumere le osservazioni precedenti dicendo che la vibrazione (1) è sovrapposizione di infinite onde stazionarie, di frequenze $n \frac{c}{2l}$ e ampiezze $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Le frequenze sono quindi multiple intere della *frequenza fondamentale* $\frac{c}{2l}$; le ampiezze saranno in generale sempre più piccole (perché i coefficienti di Fourier

a_n e b_n tendono a zero). Le vibrazioni stazionarie che compongono la generica vibrazione si dicono *armoniche*.

Esempio musicale. Supponiamo che una corda di chitarra sia accordata in modo da emettere un DO come frequenza fondamentale. A seconda di come viene pizzicata, la corda vibrerà secondo una sovrapposizione di vibrazioni stazionarie di frequenza doppia, tripla, quadrupla ecc. del DO. Le note che la corda può quindi emettere (contemporaneamente) sono, in successione crescente: DO; SOL; DO (ottava superiore), MI, SOL, SIb, Questo giustifica il nome di armoniche dato alle vibrazioni stazionarie. Da notare che l'intensità di ciascuna armonica sarà sempre più piccola. (L'orecchio precepisce apparentemente un solo suono, ma le armoniche successive formano il “timbro” del suono stesso).

Esercizio 9. Determinare le ampiezze delle prime armoniche nella vibrazione di una corda pizzicata nel punto medio.

Il problema corrispondente è:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

con dato:

$$f(x) = \begin{cases} mx & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ m(l-x) & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Poiché $g \equiv 0$ i coefficienti b_n sono nulli. Calcoliamo i primi a_n .

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Si trova:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4ml}{\pi^2 n^2} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Ponendo $A = \frac{ml}{2}$ l'ampiezza iniziale (spostamento max della corda dalla linea di riposo) si ha:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{A}{n^2} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Rispetto all'ampiezza della vibrazione fondamentale vi vede quindi che le ampiezza delle armoniche successive decrescono abbastanza rapidamente. Notare anche il fatto che non ogni modo di pizzicare la corda produce tutte le armoniche: ad es. pizzicandola nel punto medio le armoniche di ordine pari sono assenti.

21.4. CORDA VIBRANTE CON CONDIZIONI AGLI ESTREMI DIPENDENTI DAL TEMPO

Consideriamo ora un problema di Cauchy del tipo:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} u(0, t) = g_1(t) \\ u(1, t) = g_2(t) \end{array} \right\} \text{ oppure} \quad \left. \begin{array}{l} u_x(0, t) = g_1(t) \\ u_x(1, t) = g_2(t) \end{array} \right\} \end{cases}$$

Vediamo come questi problemi si possono affrontare mediante *trasformata di Laplace* (rispetto a t). Per linearità, basta studiare il caso in cui una sola delle

funzioni $g(t)$ è diversa da zero. Supporremo quindi:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = g(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = g(t). \end{cases}$$

Sia $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)](s)$. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione.

$$s^2 U - su(x, 0) - u_t(x, 0) - U_{xx} = 0.$$

Quindi, utilizzando le condizioni iniziali,

$$U_{xx} = s^2 U,$$

ossia:

$$U(x, s) = a(s)e^{xs} + b(s)e^{-xs}.$$

Per imporre le condizioni agli estremi, trattiamo separatamente i 2 tipi di problemi.

4.1. Problema con condizioni

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = g(t). \end{cases}$$

Ponendo $G(s) = (\mathcal{L}g)(s)$ si ha:

$$\begin{cases} U(0, s) = 0 \\ U(1, s) = G(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(s) + b(s) = 0 \\ a(s)e^s + b(s)e^{-s} = G(s). \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$U(x, s) = G(s) \cdot \frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s}.$$

Occorre ora antitrasformare il nucleo $\frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s}$. Se $\mathcal{L}(K(x, \cdot))(s) = \frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s}$,

$$u(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa $\frac{\operatorname{Sh} xz}{\operatorname{Sh} z}$. È analitica tranne nei punti in cui è $\operatorname{Sh} z = 0$ cioè: $z = k\pi i$. I punti $z = k\pi i$ sono poli semplici per k intero $\neq 0$ (in $z = 0$ la funzione è regolare). Calcoliamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Sh} xz}{\operatorname{Sh} z} \cdot e^{tz}, k\pi i\right) &= \left(\frac{\operatorname{Sh} xz}{\operatorname{Ch} z} \cdot e^{tz}\right)_{z=k\pi i} \\ &= i \cdot (-)^k \sin k\pi x (\cos k\pi t + i \sin k\pi t). \end{aligned}$$

Per il teorema di inversione (v. § 15.7) e le successive osservazioni, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Sh} xz}{\operatorname{Sh} z}\right)(t) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Sh} xz}{\operatorname{Sh} z} e^{tz}, k\pi i\right) = \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} i \cdot (-)^k \sin k\pi x (\cos k\pi t + i \sin k\pi t). \end{aligned}$$

Purtroppo, questa serie diverge. Questo ci obbliga a ritoccare il procedimento seguito al seguente modo. Osserviamo che:

$$U = (\mathcal{L}g)(s) \cdot \frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s} = s \cdot (\mathcal{L}g)(s) \cdot \frac{\operatorname{Sh} xs}{s \operatorname{Sh} z}.$$

Ricordiamo che $[\mathcal{L}(g')](s) = s(\mathcal{L}g)(s) - sg(0)$. Nel nostro caso, poiché $u(x, 0) = 0 \forall x$, $g(0) = 0$ perciò $s(\mathcal{L}g)(s) = [\mathcal{L}(g')](s)$. Allora se riusciamo a scrivere:

21. L'equazione della corda vibrante

$$\frac{\operatorname{Sh} xs}{s \operatorname{Sh} s} = \mathcal{L}(K(x, \cdot))(s)$$

abbiamo:

$$u(x, t) = \int_0^t g'(\tau) K(x, t - \tau) d\tau.$$

Cioè: chiedendo qualcosa di più al dato g (ossia che sia \mathcal{C}^1) basta dar senso all'antitrasformata di $\frac{\operatorname{Sh} xs}{s \operatorname{Sh} s}$, anziché di $\frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s}$. Osserviamo che la funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{Sh} xz}{z \operatorname{Sh} z} e^{tz}$$

ha poli semplici in $z = k\pi i$ per k intero (relativo).

Il residuo in $z = 0$ è: $\operatorname{Res}(f(z), 0) = x$ (come si vede ad esempio dallo sviluppo di f), mentre

$$\operatorname{Res}(f(z), k\pi i) = \left. \frac{\operatorname{Sh} xz}{z \operatorname{Ch} z} \cdot e^{tz} \right|_{z=k\pi i} = \frac{i \sin k\pi x e^{ik\pi t}}{k\pi i \cos k\pi}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Sh} xs}{\operatorname{Sh} s}\right)(t) = x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-)^k}{k\pi} \sin k\pi x \cdot [\cos k\pi t + i \sin k\pi t] =$$

$$= x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-)^k}{k} \sin k\pi x \cos k\pi t.$$

Dunque:

$$K(x, t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-)^k}{k} \sin k\pi x \cos k\pi t \equiv x + H(x, t)$$

$$u(x, t) = \int_0^t g'(\tau) K(x, t - \tau) d\tau = xg(t) + \int_0^t g'(\tau) H(x, t - \tau) d\tau.$$

4.2 Problema con condizioni

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = g(t). \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$U_x(0, s) = sa(s) - sb(s) = 0$$

$$U_x(1, s) = sa(s)e^s - sb(s)e^{-s} = G(s).$$

Risolvendo si ha:

$$U(x, s) = G(s) \cdot \frac{\operatorname{Ch} xs}{s \operatorname{Sh} s}.$$

Calcoliamo $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Ch} xs}{s \operatorname{Sh} s}\right)(t)$. La funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ch} xz}{z \operatorname{Sh} z} e^{tz}$$

ha un polo doppio nell'origine e poli semplici nei punti $z = k\pi i$ con $k \neq 0$. Dallo sviluppo di f si ha: $\operatorname{Res}(f, 0) = t$. Si ha quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Ch} xs}{s \operatorname{Sh} s}\right)(t) = t + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \operatorname{Res}(f(z), k\pi i) =$$

$$= t + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-)^k \frac{\cos k\pi x}{k\pi i} (\cos k\pi t + i \sin k\pi t) =$$

$$= t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-)^k}{k} \cos k\pi x \sin k\pi t \equiv K(x, t).$$

21. L'equazione della corda vibrante

La soluzione è dunque:

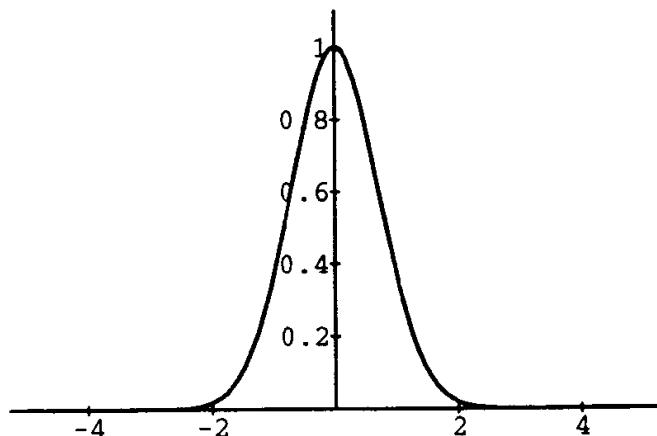
$$u(x, t) = \int_0^t g(\tau) K(x, t - \tau) d\tau.$$

fig. 21.1.

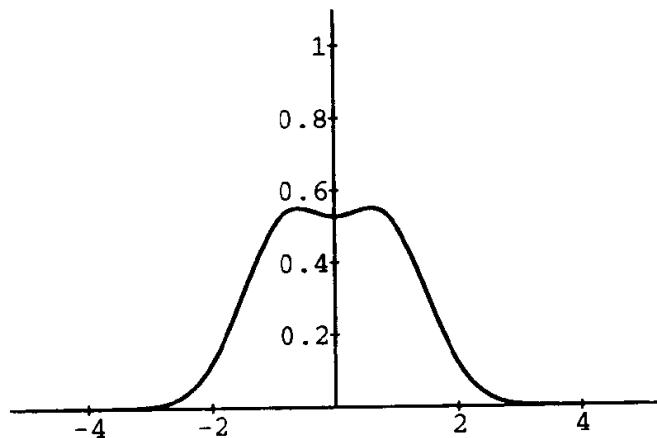
Onda in una corda illimitata: formula di D'Alembert (v. § 21.1)

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} \quad \text{con } f(x) = e^{-x^2}, c = 1.$$

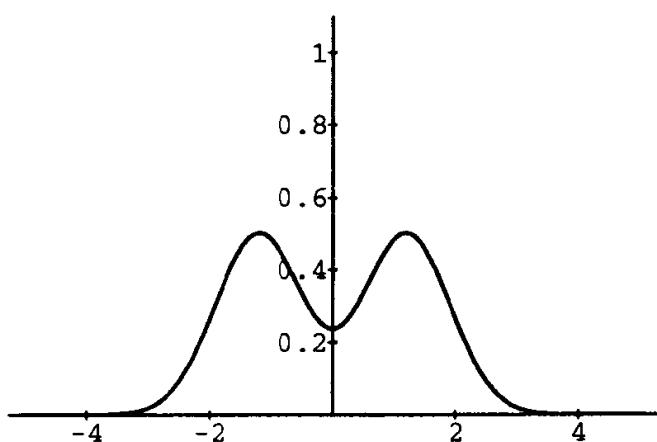
$t = 0$



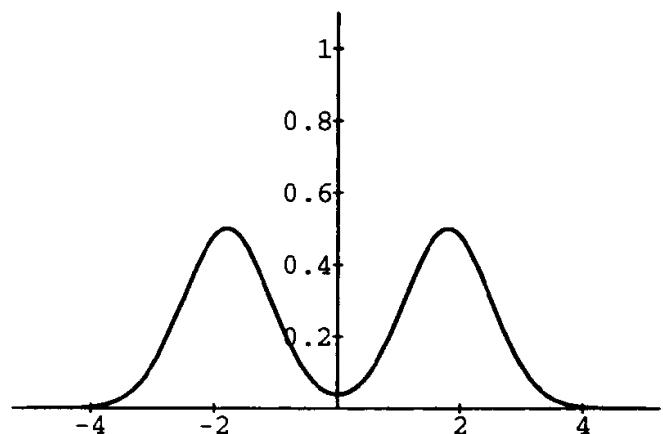
$t = 0,8$



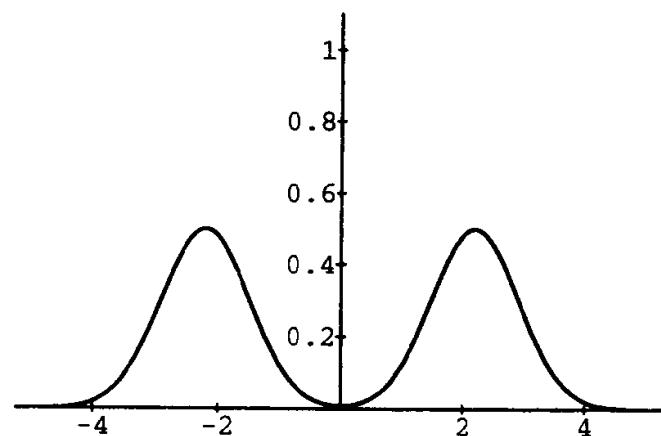
$t = 1,2$



$t = 1,8$



$t = 2,2$



$t = 3$

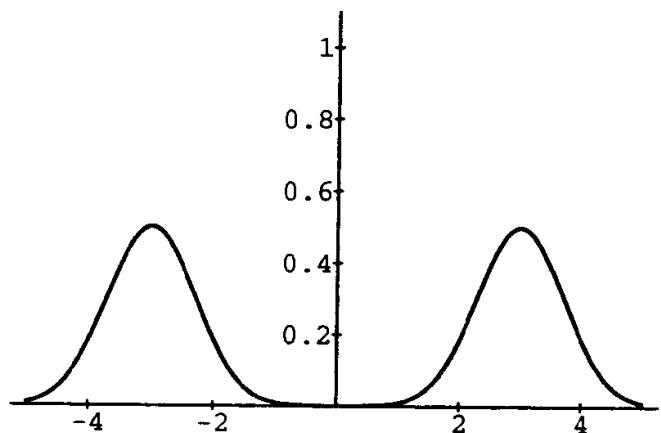
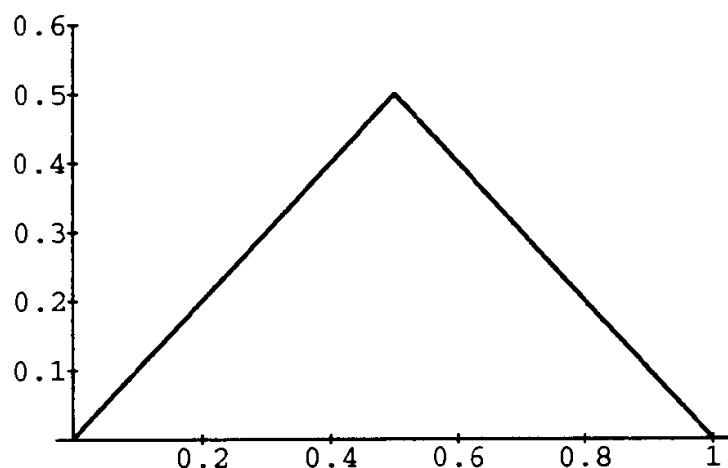


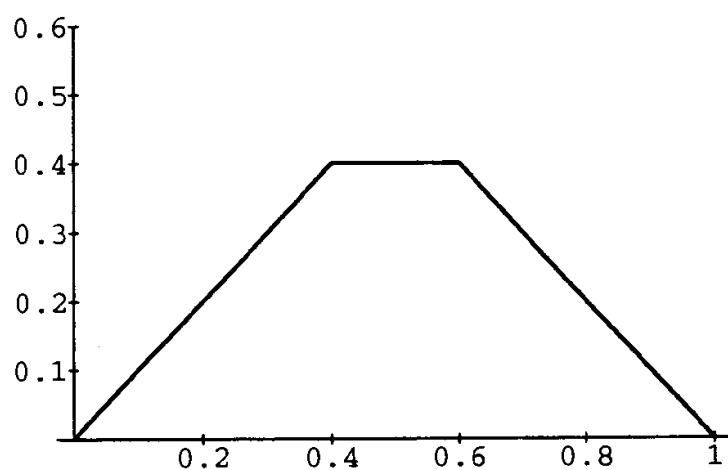
fig. 21.2.

Vibrazione di una corda a estremi fissi, pizzicata nel punto medio

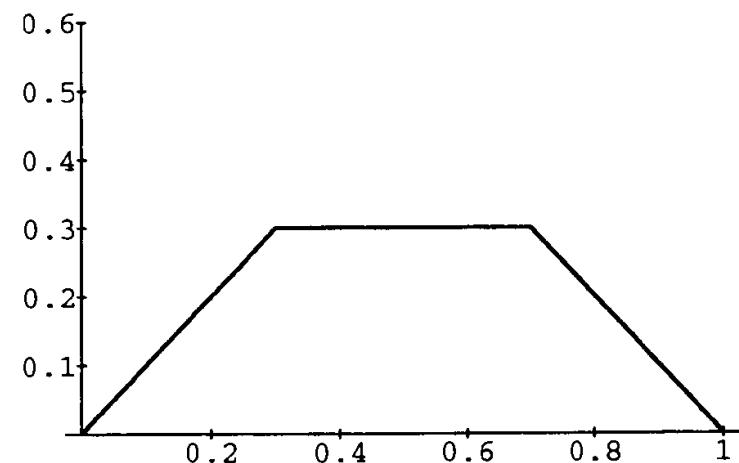
t=0:

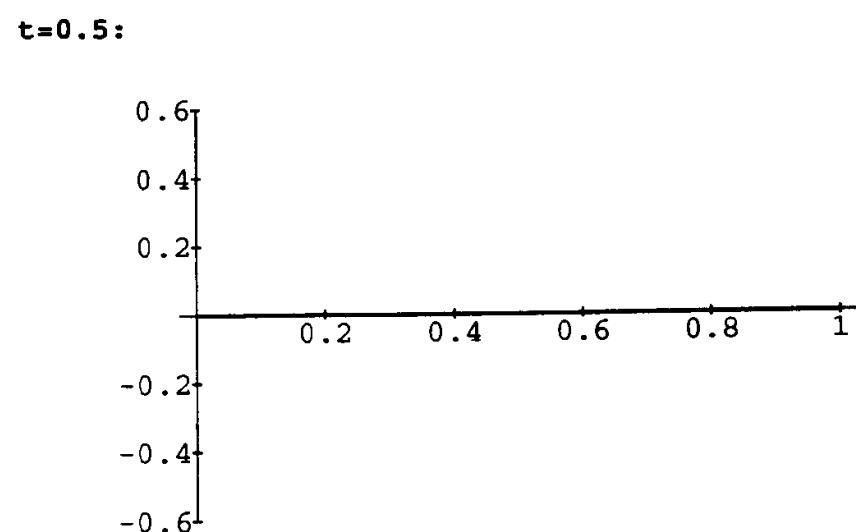
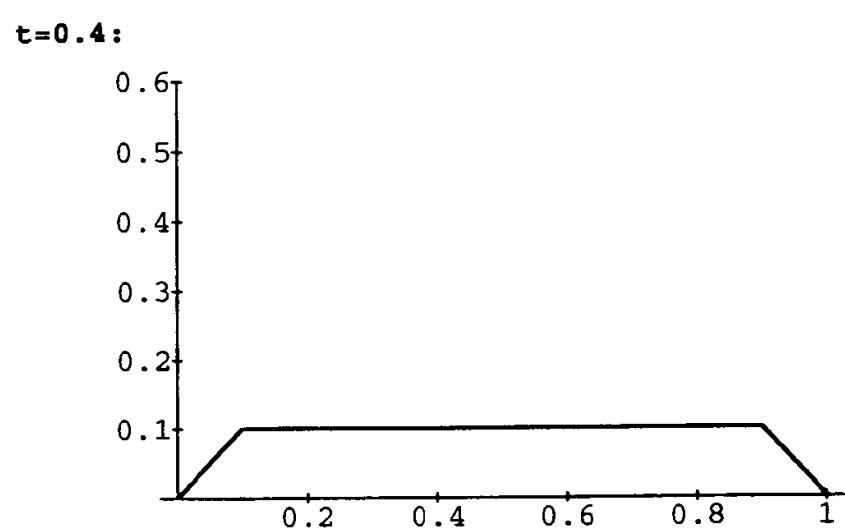
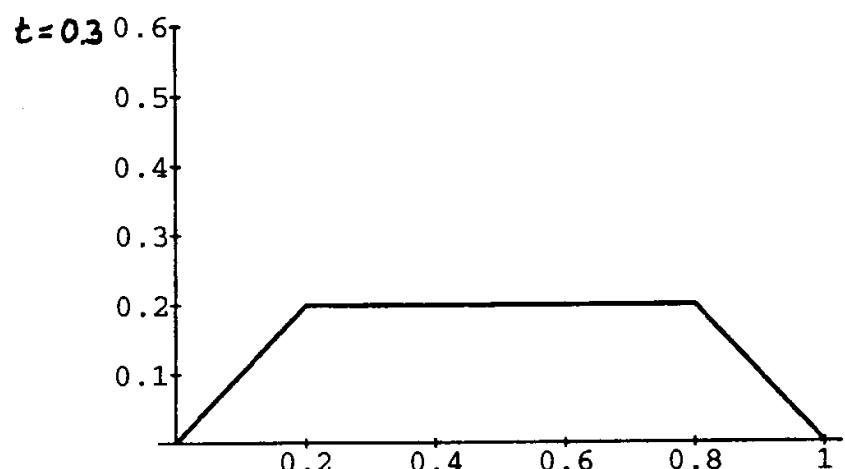


t=0.1:

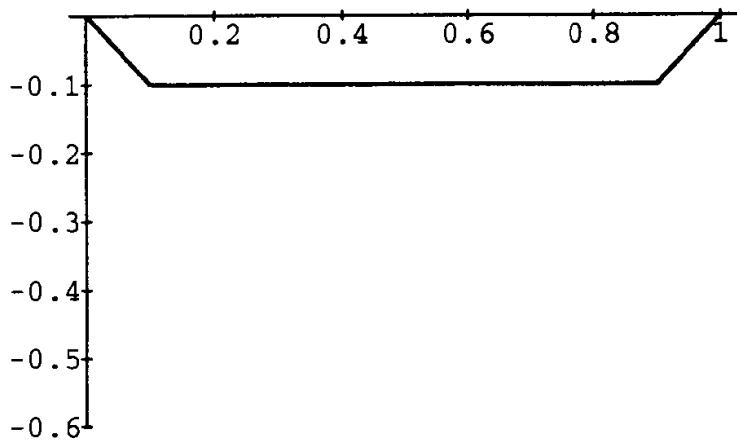


t=0.2:

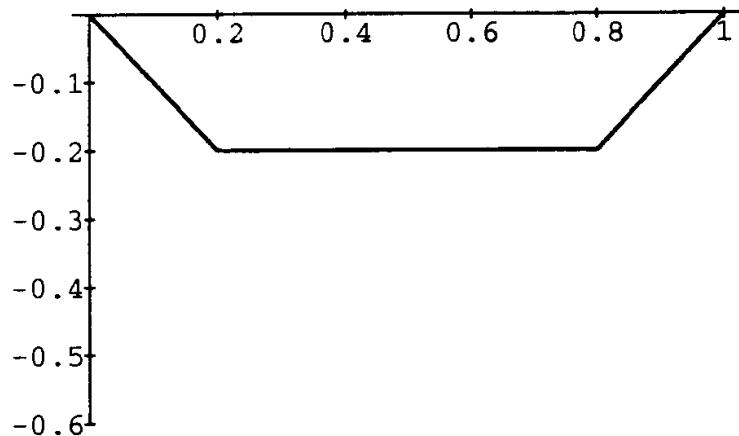




t=0.6:



t=0.7:



t=0.8:

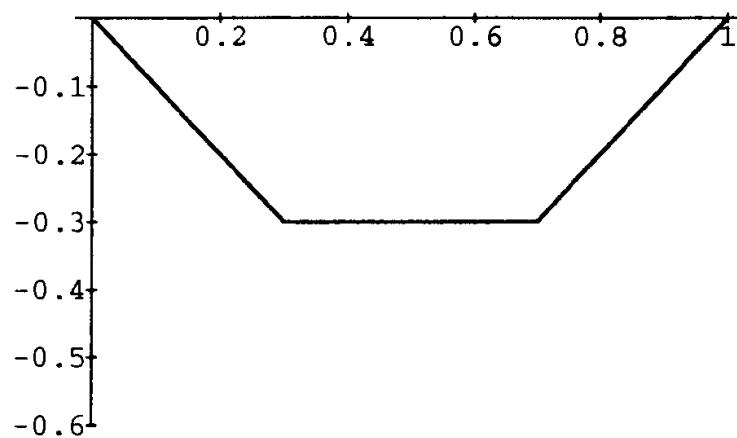
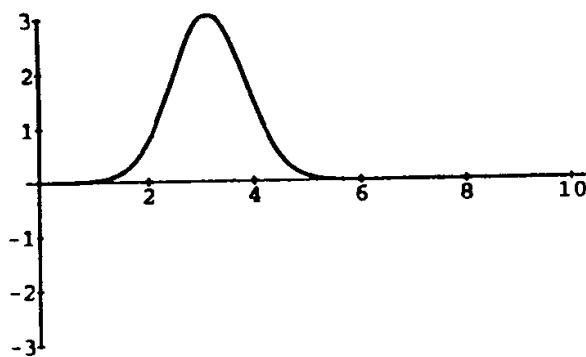


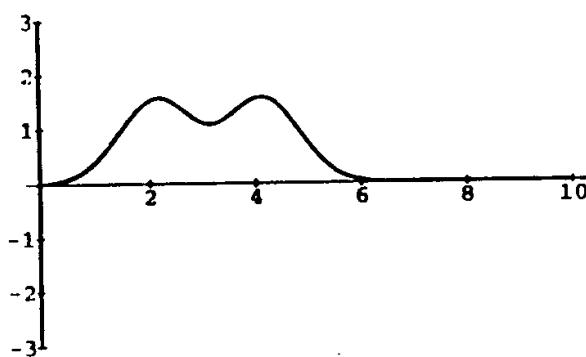
fig. 21.3.

Urto e capovolgimento di un'onda in una corda semiillimitata
con un estremo fisso (v. esercizio 8).

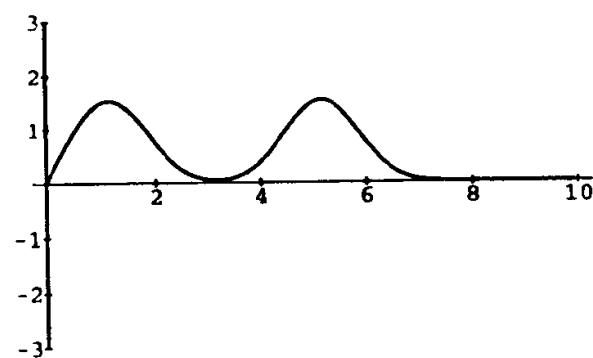
$t=0:$



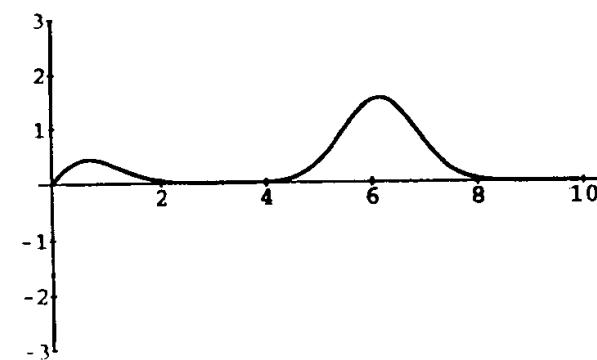
$t=1:$



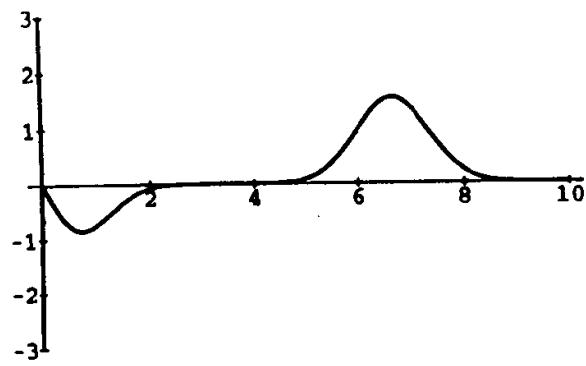
$t=2:$



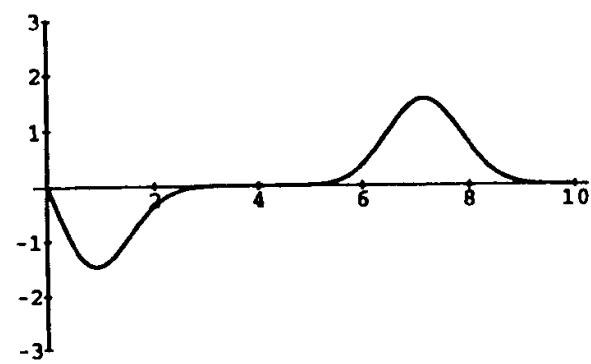
$t=3:$



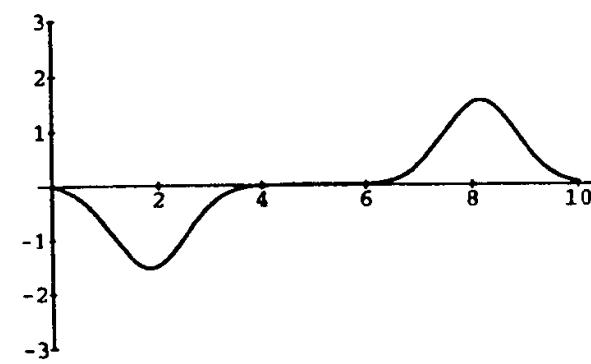
$t=3.5:$



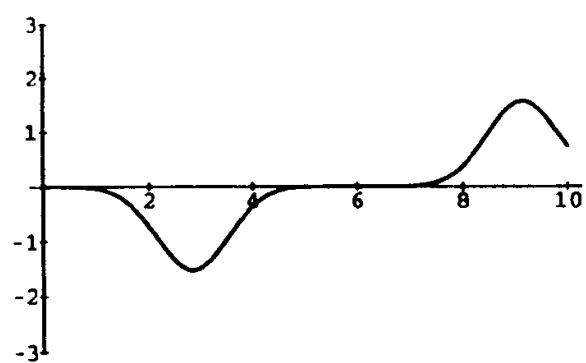
$t=4:$



$t=5:$



$t=6:$



22. PROBLEMI AI LIMITI PER L'EQUAZIONE DELLE Onde E DEL CALORE IN PIÙ DIMENSIONI. L'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ

22.1. SEPARAZIONE DI VARIABILI IN PROBLEMI AI LIMITI PER L'EQUAZIONE DELLE Onde E DEL CALORE

Consideriamo i seguenti problemi di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u = f & \text{per } t = 0 \end{cases} \quad (1.a)$$

$(k > 0)$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u = f & \text{per } t = 0 \\ u_t = g & \text{per } t = 0 \end{cases} \quad (1.b)$$

dove Ω è un dominio di \mathbb{R}^n . Cerchiamo soluzioni a variabili separate del tipo:

$$u(\underline{x}, t) = U(\underline{x}) \cdot T(t) \quad \text{con } t \geq 0, \underline{x} \in \Omega$$

Sostituendo nelle equazioni e separando le variabili si trova che T soddisfa, nei due casi, l'equazione:

$$(2.a) \quad T' = -\lambda k T$$

$$(2.b) \quad T'' = -\lambda c^2 T$$

mentre in entrambi i casi U soddisfa:

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

L'equazione $\Delta U + \lambda U = 0$ si chiama *equazione di Helmholtz*; (3) è un *problema agli autovalori*: una volta determinati λ e U si possono risolvere anche le (2) e scrivere così le soluzioni a variabili separate del problema (1). Nei prossimi paragrafi risolveremo esplicitamente il problema (3) in alcuni casi particolari. Ora vediamo invece alcune proprietà che si possono stabilire in generale per questo problema.

Anzitutto si possono considerare diversi tipi di condizioni al contorno:

- i) $U = 0$, oppure
- ii) $\frac{\partial U}{\partial \nu} = 0$, oppure
- iii) $\frac{\partial U}{\partial \nu} + \sigma U = 0$ con $\sigma > 0$.

($\frac{\partial}{\partial \nu}$ è la derivata secondo la normale eterna). Nel caso in cui il problema (3) provenga da un problema per l'equazione del calore ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$) il significato fisico delle tre condizioni è, rispettivamente:

- i) la temperatura del corpo Ω è fissata a zero sul bordo;
- ii) il corpo è termicamente isolato;
- iii) il corpo scambia calore con l'esterno per conduzione (cioè il flusso è proporzionale al salto di temperatura, dove la temperatura esterna è supposta zero).

Discussiamo quindi le proprietà di autovalori e autofunzioni, sotto queste diverse condizioni al contorno.

1. *Gli autovalori sono positivi.* Infatti, siano λ e U tali che $\Delta U + \lambda U = 0$.

$$\int_{\Omega} \Delta U \cdot U \, dx = -\lambda \int_{\Omega} U^2 \, dx.$$

Ma $U \cdot \Delta U = \operatorname{div}(U \cdot \nabla U) - |\nabla U|^2$ perciò:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} U^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(U \cdot \Delta v) dx = \\ &\quad (\text{per il teorema della divergenza}) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} \cdot U ds. \end{aligned}$$

Se la condizione al bordo è $U = 0$ oppure $\frac{\partial U}{\partial \nu} = 0$, l'ultimo integrale è zero e:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx}{\int_{\Omega} U^2 dx} > 0.$$

Se la condizione al bordo è $\frac{\partial U}{\partial \nu} + \sigma U = 0$ ($\sigma > 0$) si ha:

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} \cdot U ds = \sigma \int_{\partial\Omega} U^2 ds$$

e:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx + \sigma \int_{\partial\Omega} U^2 ds}{\int_{\Omega} U^2 dx} > 0.$$

□

2. Autofunzioni relative ad autovalori distinti sono ortogonali in $L^2(\Omega)$.

Siano: $\Delta U_1 + \lambda_1 U_1 = 0$

$$\Delta U_2 + \lambda_2 U_2 = 0.$$

Moltiplicando le 2 equazioni rispettivamente per U_2 , U_1 , sottraendo membro a membro e integrando su Ω si ha:

$$\int_{\Omega} (U_2 \Delta U_1 - U_1 \Delta U_2) \, dx = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\Omega} U_1 U_2 \, dx. \quad (4)$$

Il 1° integrale è uguale a:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(U_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla U_2) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) ds. \quad (5)$$

Ora, se

$$\begin{cases} U_1 = 0 & \partial\Omega \\ U_2 = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

l'integrale a secondo membro della (5) è zero. Lo stesso se

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega \\ \frac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega. \end{cases}$$

Infine, se

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial \nu} + \sigma U_1 = 0 & \partial\Omega \\ \frac{\partial U_2}{\partial \nu} + \sigma U_2 = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

si ha:

$$U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} = -\sigma U_1 U_2 + \sigma U_1 U_2 = 0.$$

Perciò in ogni caso l'integrale è zero. Quindi dalla (4) si ha:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} U_1 U_2 \, dx = 0$$

ossia, poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\int_{\Omega} U_1 U_2 \, dx = 0$, cioè U_1 e U_2 sono ortogonali. □

Torniamo ora ai problemi (1). Poiché gli autovalori sono positivi, poniamo $\lambda = \omega^2$. Le (2) hanno allora come soluzioni, rispettivamente:

$$(2.a) \quad T(t) = e^{-k\omega^2 t}$$

$$(2.b) \quad T(t) = a \cos \omega c t + b \sin \omega c t.$$

Queste, insieme alle U danno le soluzioni a variabili separate del problema (1).

Nei casi concreti che studieremo vedremo inoltre che:

- 1) esiste una successione ω_n^2 di autovalori;
- 2) le autofunzioni U_n corrispondenti formano un sistema ortognale completo in $L^2(\Omega)$.

Allora si potrà cercare una soluzione del tipo:

$$(caso 1.a) \quad u(\underline{x}, t) = \sum c_n e^{-\omega_n^2 k t} U_n(\underline{x})$$

$$(caso 1.b) \quad u(\underline{x}, t) = \sum U_n(\underline{x}) [a_n \cos \omega_n c t + b_n \sin \omega_n c t]$$

con i coefficienti a_n , b_n , c_n determinati dallo sviluppo dei dati iniziali in serie di autofunzioni U_n .

22. Problemi ai limiti per l'equazione delle onde e del calore in più dimensioni

Vediamo ora come applicare questo schema generale di lavoro nei casi: Ω rettangolo; Ω cerchio.

22.2. LA MEMBRANA VIBRANTE RETTANGOLARE

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(0, x, y) = f(x, y) \\ u_t(0, x, y) = g(x, y) \\ u(t, x, y) = 0 & \text{se } x = 0, \text{ o } x = a, \text{ o } y = 0, \text{ o } y = b. \end{cases}$$

Il problema descrive le vibrazioni di una membrana rettangolare fissata (a quota zero) lungo il suo perimetro. f e g sono la configurazione e la velocità iniziali. Per quanto visto nel § 1, il problema è ricondotto allo studio di:

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ U = 0 & x = 0, x = a, y = 0, y = a \end{cases}$$

Affrontiamo anche questo problema mediante separazione di variabili. Ponendo:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

si ha:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$

da cui:

$$\frac{X''}{X} = c, \quad \frac{Y''}{Y} = -(c + \lambda),$$

e in base al dato al bordo:

$$\begin{cases} X'' = cX \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' = -(c + \lambda)Y \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

22. Problemi ai limiti per l'equazione delle onde e del calore in piú dimensioni

Il 1º problema dà:

$$X_n(x) = \sin \frac{m\pi y}{a}, \quad c = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}.$$

Il 2º problema dà:

$$Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad -(c + \lambda) = -\frac{m^2\pi^2}{b^2}.$$

Da queste relazioni si ricava:

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

$$U_{n,m}(x,y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad \text{con } n,m = 1, 2, 3, \dots$$

Abbiamo quindi una successione a 2 indici di autofunzioni e autovalori. Le soluzioni a variabili separate del problema di partenza sono:

$$u_{n,m}(t,x,y) = \quad (6)$$

$$= \boxed{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \left(a_{nm} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct \right) + b_{nm} \sin \left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} ct \right) \right)}.$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t,x,y).$$

Imponendo le condizioni:

$$u(0,x,y) = f(x,y), \quad u_t(0,x,y) = g(x,y)$$

si trovano i coefficienti a_{nm} e b_{nm} . Posto:

$$f(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$g(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \beta_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

(ossia $\alpha_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} dx \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy$, e analogamente per β_{nm})

si ha:

$$a_{nm} = \alpha_{nm}$$

$$b_{nm} = \frac{\beta_{nm}}{\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}} c.$$

Con ciò il problema di Cauchy-Dirichlet è risolto.

Osservazioni. Torniamo ora a considerare le soluzioni u_{nm} date dalla (6). Esse rappresentano delle vibrazioni stazionarie della membrana (ossia tali che ogni punto oscilli con moto periodico), di frequenza $\frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$. Notare che, a differenza del caso della corda vibrante, queste frequenze *non* sono multiple intere della frequenza fondamentale; non si dicono perciò *armoniche* ma *parziali*.

Osserviamo anche che in ogni vibrazione stazionaria esistono “linee nodali” della membrana, linee cioè costituite di punti che restano immobili: sono quelle per cui

$$\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = 0$$

e cioè:

$$x = \frac{k}{n} a \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad y = \frac{h}{m} b \quad \text{con } h = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Anche per la vibrazione della membrana (come per quella della corda fissata agli estremi) accade che la generica vibrazione sia sovrapposizione di (eventualmente infinite) vibrazioni stazionarie. In generale la somma di due soluzioni stazionarie non è stazionaria, perché le frequenze sono diverse. Può accadere però anche il fenomeno seguente: se, per certi a e b (ossia per un dato rettangolo) esistono 2 diverse coppie di interi $(n_1, m_1), (n_2, m_2)$ tali che

$$\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} = \frac{n_2^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2}$$

le 2 soluzioni $u_{n_1 m_1}, u_{n_2 m_2}$ avranno la stessa frequenza, e così pure ogni loro combinazione lineare. Questo accade ad esempio se $a = b$ (*membrana quadrata*); in questo caso $u_{n,m}$ e $u_{m,n}$ sono due onde stazionarie diverse ma con ugual frequenza $\frac{c}{2a} \sqrt{n^2 + m^2}$. In questo caso ogni onda $\alpha u_{n,m} + \beta u_{m,n}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è stazionaria; tale onda ha come linee nodali le soluzioni dell'equazione

$$\alpha \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} + \beta \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = 0.$$

Queste possono essere complicate. Questo fenomeno (ossia l'esistenza di vibrazioni stazionarie di forma complicata) si chiama *degenerazione*.

Esercizio 1. Risolvere:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0, x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \\ u_t(0, x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ u(t, x, y) = 0 \quad \text{per } x = 0, x = a, y = 0, y = b. \end{cases}$$

22. Problemi ai limiti per l'equazione delle onde e del calore in più dimensioni

Si ha:

$$u(t, x, y) = \cos\left(\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}} ct\right) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b} + \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} ct\right)}{\pi c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

Esercizio 2. Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sul rettangolo:

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(0, x, y) = f(x, y) \\ u(t, x, y) = 0 & \text{per } x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b. \end{cases}$$

Per quanto visto nel § 1 e per quanto discusso in questo paragrafo la soluzione sarà del tipo:

$$u(t, x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} c_{n, m} e^{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) kt} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

con $c_{n, m}$ tali che:

$$f(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} c_{n, m} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

ossia:

$$c_{n, m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} dx \int_0^b f(x, y) \sin\frac{m\pi y}{b} dy.$$

22.3. LA MEMBRANA VIBRANTE CIRCOLARE

Consideriamo ora il problema di Cauchy-Dirichlet sul cerchio:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & r < 1 \\ u(1, \vartheta, t) = 0 \\ u(r, \vartheta, 0) = f(r, \vartheta) \\ u_t(r, \vartheta, 0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(abbiamo supposto per semplicità che la velocità iniziale sia nulla). Consideriamo quindi il problema agli autovalori

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 & r < 1 \\ U(1, \vartheta) = 0. \end{cases}$$

e affrontiamolo mediante separazione delle variabili (polari): poniamo

$v(r, \vartheta) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$, e otteniamo:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda = 0.$$

Con i soliti argomenti si vede che:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu = \text{costante}$$

il che per la periodicità di Θ implica:

$$\Theta(\vartheta) = a \cos n\pi + b \sin n\pi$$

e

$$\mu = -n^2.$$

Il problema agli autovalori per R diventa allora:

$$\begin{cases} \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} - \frac{n^2}{r^2} + \lambda = 0 \\ R(1) = 0 \quad R(0) \text{ limitato.} \end{cases}$$

Ricordandoci che gli autovalori del laplaciano (λ) sono senz'altro positivi, poniamo $\lambda = \omega^2$ e riscriviamo il problema come:

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \\ R(1) = 0 \quad R(0) \text{ limitato.} \end{cases}$$

Eseguiamo ora il cambiamento di variabili $\omega r = x$. Si ha $\frac{d}{dr} = \omega \frac{d}{dx}$, quindi:

$$\omega^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{\omega}{x} \cdot \omega \frac{dR}{dx} + \left(\omega^2 - \frac{n^2 \omega^2}{x^2}\right) R = 0$$

ossia:

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \\ R(\omega) = 0 \quad R(0) \text{ limitato} \end{cases} \quad (8)$$

Dobbiamo quindi risolvere, per ogni intero $n = 0, 1, 2, \dots$ l'equazione:

$$x^2 R'' + x R' + (x^2 - n^2) R = 0.$$

Ci interessa R sull'intervallo $[0, \infty]$, ma poiché ω è ancora indeterminato, diciamo che l'equazione ci interessa per $x \geq 0$. L'equazione trovata è l'*equazione di Bessel*. Nel prossimo capitolo ci occuperemo più estesamente delle sue proprietà e delle sue soluzioni. In questo momento ci limitiamo ad enunciare, senza dimostrazione, le proprietà di questa equazione e delle sue soluzioni che intervengono nella discussione del problema in esame.

- L'integrale generale dell'equazione di Bessel è dato dalla combinazione lineare delle 2 funzioni $J_n(x)$ e $Y_n(x)$, dette rispettivamente *funzione di Bessel di 1^a e 2^a specie, di ordine n*. Poiché J_n è regolare su tutto $[0, +\infty)$ mentre Y_n è illimitata in 0, la soluzione che ci interessa è $R(x) = J_n(x)$.
- La funzione J_n è limitata su \mathbb{R}^+ , tende a zero per $x \rightarrow +\infty$ e ha infinite oscillazioni; precisamente, si annulla in una successione di punti; la successione degli zeri di J_n (chiamiamola $\{k_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$) giocherà un ruolo importante nel seguito. $k_{n,m} \rightarrow +\infty$ per $m \rightarrow +\infty$ (Si vedano anche i grafici delle funzioni J_n riportate al termine del cap. 23).

Tornando al nostro problema agli autovalori, la condizione $R(\omega) = 0$ porta $J_n(\omega) = 0$, ossia $\omega = k_{n,m}$ per qualche $m = 1, 2, 3, \dots$. Dunque gli autovalori del laplaciano sul cerchio sono dati dalla successione a 2 indici $\{k_{n,m}^2\}_{n=0}^{\infty} {}_{m=1}^{\infty}$.

Tornando all'equazione nella variabile r , la soluzione è:

$$J_n(x) = J_n(k_{n,m} r)$$

e le soluzioni a variabili separate dell'equazione di Helmholtz sono:

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) = & \quad J_0(k_{0,m} r); \\ & J_n(k_{n,m} r) \cos n\vartheta; \\ & J_n(k_{n,m} r) \sin n\vartheta. \end{aligned}$$

Le soluzioni a variabili separate dell'equazione delle onde sul cerchio con dato al bordo nullo sono del tipo:

$$u_{n,m}(t, r, \vartheta) = T_{n,m}(t) \cdot U_{n,m}(r, \vartheta)$$

con $T_{n,m}(\vartheta) = A \cos(k_{n,m}ct) + B \sin(k_{n,m}ct)$.

La condizione $u_t(0, r, \vartheta) = 0$ dá $B = 0 \quad \forall n, m$, perciò cercheremo una soluzione del problema di Cauchy del tipo:

$$u(t, r, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} \cos(k_{0,m}ct) J_0(k_{0,m}r) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(k_{n,m}ct) J_n(k_{n,m}r) [a_{n,m} \cos n\vartheta + b_{n,m} \sin n\vartheta]. \quad (9)$$

Imponendo il dato iniziale $u(0, r, \vartheta) = f(r, \vartheta)$ si ha:

$$f(r, \vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{0,m}}{2} J_0(k_{0,m}r) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} J_n(k_{n,m}r) \cdot [a_{n,m} \cos n\vartheta + b_{n,m} \sin n\vartheta]. \quad (10)$$

I coefficienti si determinano quindi a patto di saper sviluppare f in una serie del tipo (10). Questo è possibile, se $f(x, y)$ è una funzione L^2 del cerchio unitario, in forza delle seguenti proprietà delle funzioni di Bessel:

- Per ogni intero $n = 0, 1, 2, \dots$ fissato, le funzioni $\{J_n(k_{n,m}r)\}_{m=1}^{\infty}$ costituiscono un sistema ortogonale completo in $L^2((0, 1), r dr)$.
- Di conseguenza, per un argomento già visto a proposito delle armoniche sferiche (v. § 19.3), le funzioni

$$\{J_0(k_{0,m}r), J_n(k_{n,m}r) \cdot \cos n\vartheta, J_n(k_{n,m}r) \cdot \sin n\vartheta\}_{m,n=1}^{\infty}$$

costituiscono un sistema ortogonale completo in $L^2((0, 1) \times (0, 2\pi), r dr d\vartheta)$ ossia (passando in coordinate cartesiane), L^2 (Cerchio unitario, $dx dy$).

- I coefficienti di normalizzazione delle funzioni di Bessel sono:

$$\int_0^1 J_n^2(k_{n,m}r) r dr = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(k_{n,m}).$$

In definitiva, allora, la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet (7) è dato dalla (9), con i coefficienti assegnati da:

$$a_{n,m} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(k_{n,m})^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\vartheta d\vartheta \int_0^1 f(r, \vartheta) J_n(k_{n,m}r) r dr$$

per $m = 1, \dots, \infty, n = 0, \dots, \infty;$

(11)

$$b_{n,m} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(k_{n,m})^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\vartheta d\vartheta \int_0^1 f(r, \vartheta) J_n(k_{n,m}r) r dr$$

per $m = 1, \dots, \infty, n = 1, \dots, \infty.$

I coefficienti $J_{n,m}(k_{n,m})$ possono essere tabulati numericamente (v. tabella riportata al termine cap. 23).

Osservazioni.

- Se il dato iniziale f è indipendente da ϑ , la soluzione sarà del tipo:

$$u(t, r) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} \cos(k_{0,m}ct) J_0(k_{0,m}r).$$

- La generica vibrazione è sovrapposizione di vibrazioni stazionarie del tipo:

$$\cos(k_{0,m}ct) J_0(k_{0,m}r);$$

$$\cos(k_{n,m}ct) J_n(k_{n,m}r) \cos n\vartheta;$$

$$\cos(k_{n,m}ct) J_n(k_{n,m}r) \sin n\vartheta.$$

La frequenza di ogni vibrazione stazionaria è:

$$\frac{k_{n,m}c}{2\pi}.$$

si osserva che, come già nel caso del rettangolo, queste non sono multiple intere della frequenza fondamentale; anche qui non si parla di “armoniche” ma di “parziali”. Le linee nodali, ad esempio della vibrazione

$$\cos(k_{n,m}ct) \cdot J_n(k_{n,m}r) \sin n\vartheta$$

sono date da:

$$J_n(k_{n,m}r) = 0$$

ossia:

$$r = \frac{k_{n,h}}{k_{n,m}} \quad \text{con } h = 1, 2, \dots, m$$

(m circonferenze concentriche, compreso il bordo della membrana) e da:

$$\sin n\vartheta = 0$$

ossia:

$$\vartheta = \frac{h}{n}\pi \quad \text{con } h = 1, 2, \dots, 2n$$

($2n$ raggi, ossia n diametri, della membrana circolare).

Esempio 3. Risolvere il problema (7) con $c = 1$ e

$$f(r, \vartheta) = J_1(k_{1,2}r) \cos \vartheta.$$

Si ha:

$$u(r, \vartheta, t) = \cos(k_{1,2}t) \cdot J_1(k_{1,2}r) \cos \vartheta$$

($k_{1,2} \approx 7,01559$, v. tabella alla fine del cap. 23).

Esempio 4. Risolvere il problema (7) con $c = 1$ e

$$f(r) = 1 - r^2.$$

Come si vedrà nel prossimo capitolo (esempio 4, § 23.5), utilizzando proprietà delle funzioni di Bessel è possibile scrivere esattamente lo sviluppo di $f(r)$ in serie delle $J_0(k_{0,m}r)$. Si ha:

$$1 - r^2 = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(k_{0,m})}{k_{0,m}^2 J_1(k_{0,m})^2} J_0(k_{0,m}r).$$

Di conseguenza la soluzione è:

$$u(r, \vartheta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(k_{0,m})}{k_{0,m}^2 J_1(k_{0,m})^2} J_0(k_{0,m}r) \cos(k_{0,m}t).$$

Esercizio 5. Scrivere la soluzione del *problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore sul cerchio*:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & r < 1 \\ u(t, 1, \vartheta) = 0 \\ u(0, r, \vartheta) = f(r, \vartheta). \end{cases}$$

Per quanto visto nel § 1, e in base alla discussione fatta sul problema agli autovalori per il laplaciano, si ha:

$$\begin{aligned} u(t, r, \vartheta) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0,m} e^{-k_{0,m}^2 t} J_0(k_{0,m}r) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_{n,m}^2 t} J_n(k_{n,m}r) [a_{n,m} \cos n\vartheta + b_{n,m} \sin n\vartheta] \end{aligned}$$

con $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ assegnati come nelle (11).

fig. 22.1.

Esempio di onda stazionaria in una membrana vibrante rettangolare:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \sin(\frac{3\pi y}{2}).$$

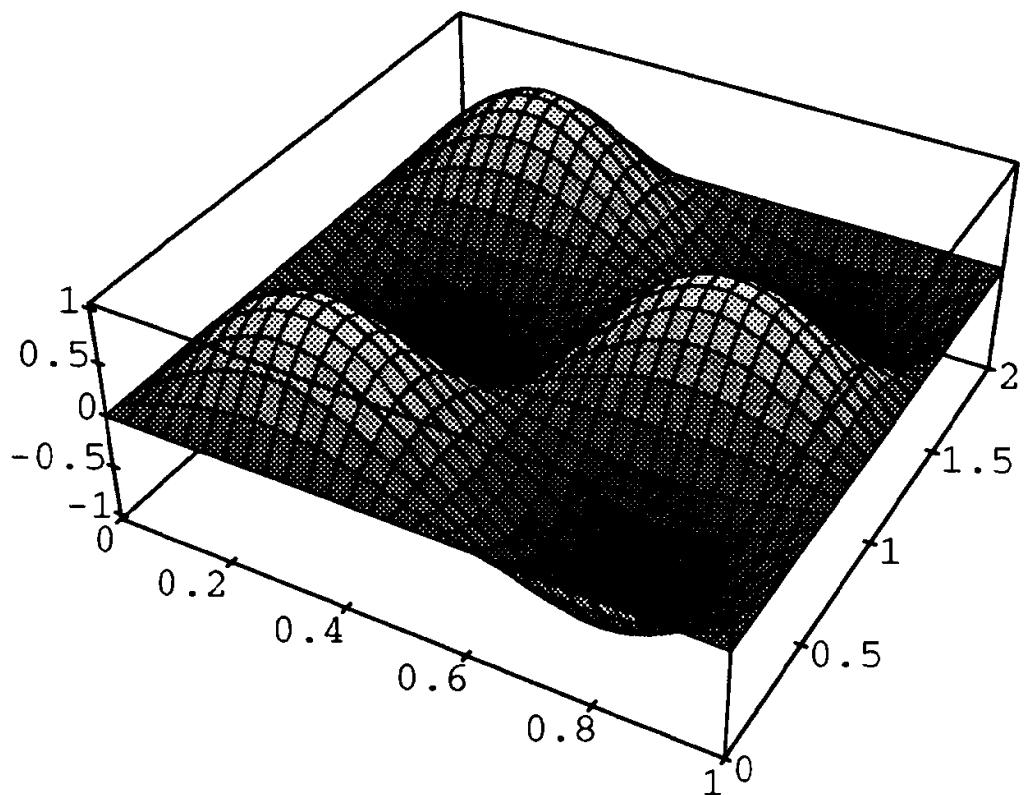


fig. 22.2.

Esempio di degenerazione per una membrana vibrante quadrata:
onde stazionarie "complicate":

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \sin(4\pi y) + 0,8 \sin(4\pi x) \sin(\pi y).$$

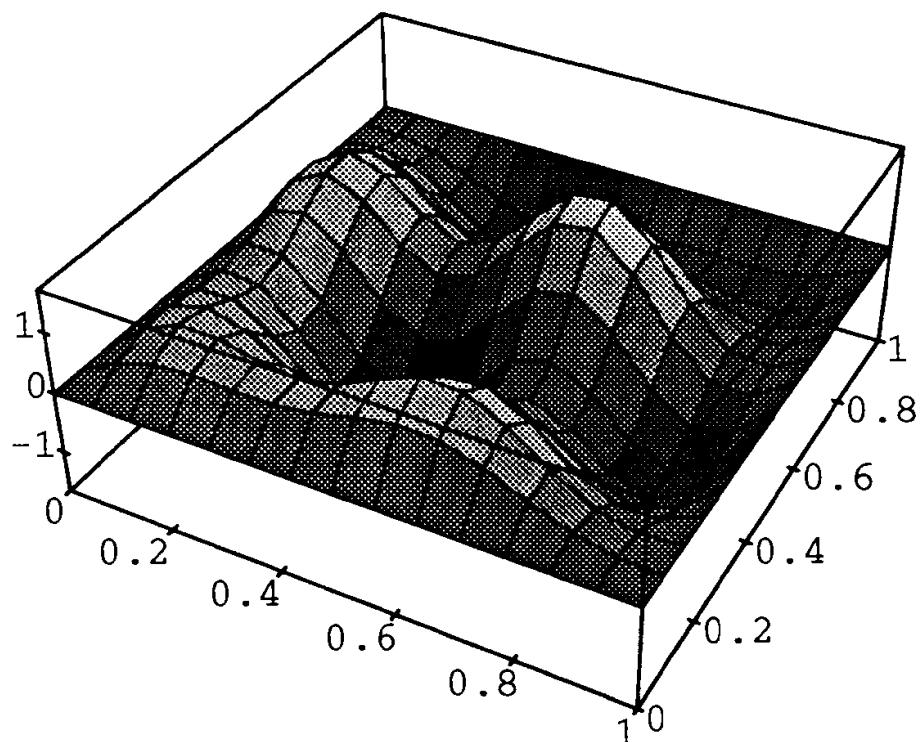


fig. 22.3.

Membrana vibrante circolare:

linee nodali delle vibrazioni fondamentali corrispondenti a $J_n(k_{n,m}r) \sin n\theta$.

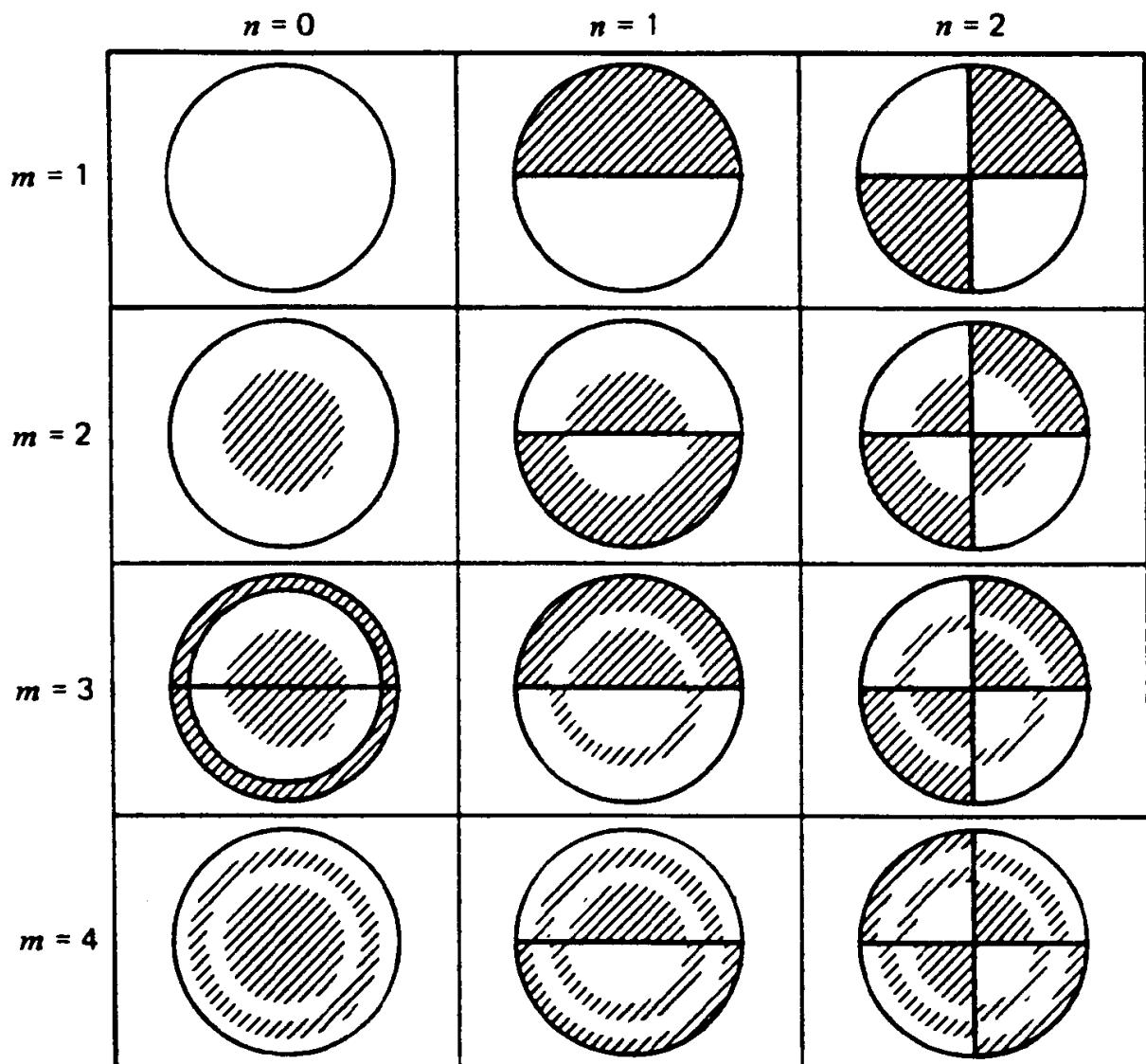
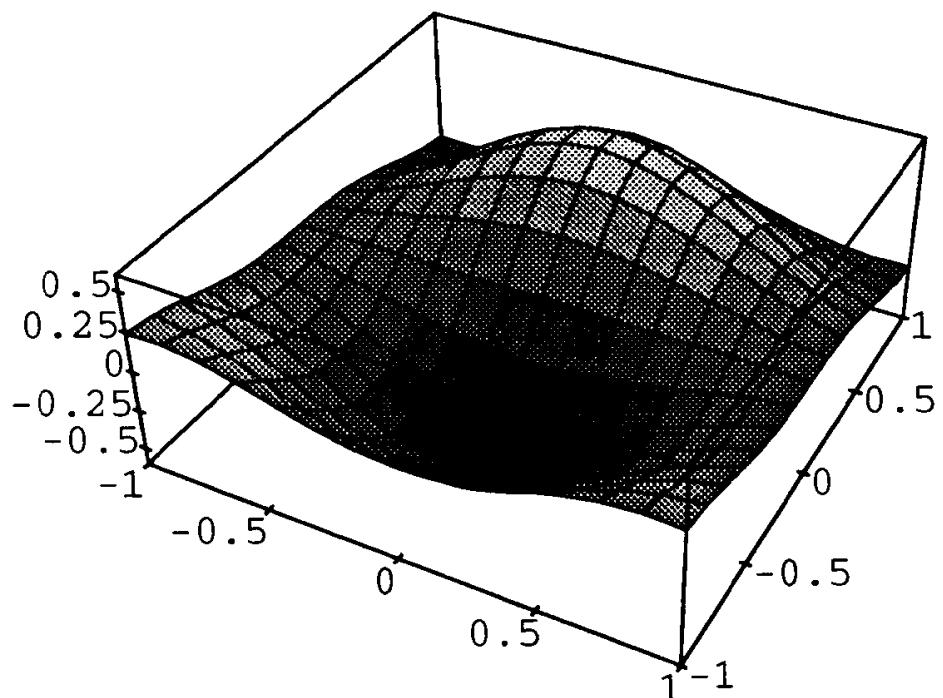


fig. 22.4.

Grafico di $J_1(k_{1,1}r) \sin \theta$.



23. FUNZIONI DI BESSSEL E APPLICAZIONI

23.1. EQUAZIONI DI BESSSEL E LORO INTEGRALE GENERALE

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \text{ per } x > 0 \quad (1)$$

con $\nu \geq 0$ numero reale fissato. La (1) si dice *equazione di Bessel di ordine ν* . Nel capitolo scorso abbiamo incontrato la (1) con ν intero; ora consideriamo più in generale ν reale. Siamo interessati a determinare l'integrale generale della (1), ossia 2 soluzioni linearmente indipendenti.

Risolviamo l'equazione per serie, ossia cerchiamo un integrale del tipo:

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con $c_0 \neq 0$, α da determinarsi. Calcolando

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n x^{n+\alpha-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n x^{n+\alpha-2} \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha)]c_n - \nu^2 c_n \right] x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha+2} = 0$$

che si può riscrivere così:

$$(\alpha^2 - \nu^2)c_0x^\alpha + [(\alpha+1)^2 - \nu^2]c_1x^{\alpha+1} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left([(n+\alpha)^2 - \nu^2]c_n + c_{n-2} \right) x^{n+\alpha} = 0.$$

Uguagliando a zero i coefficienti si trovano le relazioni:

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \nu^2)c_0 = 0 \\ [(\alpha+1)^2 - \nu^2]c_1 = 0 \\ [(n+\alpha)^2 - \nu^2]c_n = -c_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases} \quad (2)$$

Dalla 1^a condizione, poiché $c_0 \neq 0$, si ha $\alpha = \pm \nu$. Le altre diventano allora:

$$\begin{cases} (2\alpha+1)c_1 = 0 \\ n(n+2\alpha)c_n = -c_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

Consideriamo prima il caso $\alpha = \nu$. Poiché $\nu \geq 0$, $2\nu+1 \neq 0$, dunque $c_1 = 0$. La relazione di ricorrenza:

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(n+2\nu)}$$

dice allora che $c_n = 0$ per tutti gli n dispari, e assegna i c_n , con n pari, in funzione di c_0 :

$$c_{2n} = \frac{(-)^n c_0}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^n (k+\nu)}. \quad (3)$$

Osserviamo che, se ν è un intero,

$$\prod_{k=1}^n (k+\nu) = \frac{(n+\nu)!}{\nu!};$$

nel caso generale, si ha

$$\prod_{k=1}^n (k + \nu) = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}$$

dove Γ è la funzione di Eulero. Ricordiamo che Γ è definita da:

$$\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x > 0$$

e soddisfa la relazione

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0.$$

Questa relazione permette di definire Γ anche per $x < 0$, purché $x \neq -1, -2, \dots$

Si ha quindi:

$$y(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n c_0 x^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(n + \nu + 1)} \cdot \Gamma(\nu + 1).$$

Definendo

$$c_0 = \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}$$

otteniamo:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (4)$$

Si verifica che questa serie di potenze converge $\forall x \in \mathbb{R}$, definendo pertanto una funzione analitica (anzi se $x \in \mathbb{C}$ otteniamo una funzione analitica complessa, soluzione dell'equazione di Bessel). J_ν si dice *funzione di Bessel di 1ª specie di ordine ν* . Abbiamo così trovato, $\forall \nu \geq 0$, una prima soluzione dell'equazione di Bessel. Notare che J_ν è regolare per $x \geq 0$ e, per $x \rightarrow 0$, è asintotica a $c_0 x^\nu$. In particolare: $J_0(0) = 1$, mentre $\forall \nu > 0$ J_ν si annulla di ordine ν in 0.

Dobbiamo trovare ora un 2º integrale dell'equazione di Bessel, indipendente dal 1º. Consideriamo le (2) con $\alpha = -\nu$. Si ha:

$$\begin{cases} (1 - 2\nu)c_1 = 0 \\ n(n - 2\nu)c_n = -c_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

Se 2ν è un intero, per qualche n si ha $(n - 2\nu) = 0$, e non si può ricavare c_n .

- Cominciamo a considerare il caso in cui $2\nu \notin \mathbb{N}$. Allora si possono ripetere i passaggi di prima e trovare:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n! \Gamma(n - \nu + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \quad (5)$$

(Funzione di Bessel di 1ª specie di ordine $-\nu$). L'espressione scritta ha senso $\forall x > 0$; $J_{-\nu}(x)$ è regolare per $x > 0$ e per $x \rightarrow 0^+$ va all'infinito come $x^{-\nu}$; perciò è certamente indipendente da $J_\nu(x)$. Quindi in questo caso l'integrale generale dell'equazione di Bessel è:

$$c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \quad (6)$$

- Consideriamo ora il caso in cui $2\nu \in \mathbb{N}$ ma $\nu \notin \mathbb{N}$ (ossia: 2ν è un intero dispari). Le relazioni sui coefficienti mostrano che ora i coefficienti c_{2n} sono ancora determinati, mentre i coefficienti c_{2n+1} risultano nulli fino a $c_{2\nu-1}$, e indeterminati da $c_{2\nu+1}$ in poi. Nulla vieta di porre allora tutti i $c_{2n+1} = 0$. In questo modo si ottiene ancora l'espressione (5). Dunque:

per ogni ν reale, $\nu \geq 0$, ν non intero, l'integrale generale dell'equazione di Bessel è dato da (6).

- Il problema ora è determinare, quando ν è intero, un 2º integrale

23. Funzioni di Bessel e applicazioni

dell'equazione, indipendente da J_ν . Osserviamo per inciso che all'espressione (5) si può dar senso anche per $\nu = k \in \mathbb{N}$. Poiché $\Gamma(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow -k$ (intero negativo), poniamo $\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)} = 0$ per $n = 0, 1, \dots, \nu-1$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= \sum_{n=-\nu}^{\infty} \frac{(-)^n}{n! \Gamma(n-\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+\nu}}{(n+\nu)! \nu!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} = (-)^\nu J_\nu(x). \end{aligned}$$

Ossia: se ν è intero,

$$J_{-\nu}(x) = (-)^\nu J_\nu(x),$$

perciò $J_{-\nu}$ non fornisce un integrale indipendente da J_ν . Per trovare un integrale indipendente da J_ν quando ν è intero, si definiscono le *funzioni di Bessel di 2^a specie*, o *funzioni di Neumann*. Poniamo, $\forall \nu > 0$, ν reale non intero:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

(7)

Ovviamente la definizione non ha senso per ν intero. Possiamo porre però, quando $\nu = k \in \mathbb{N}$:

$$N_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow k} N_\nu(x).$$

Ogni N_ν , per ν non intero, è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine ν , in quanto, per definizione, è combinazione lineare di soluzioni dell'equazione; si può dimostrare che N_k è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine k . Calcolando il limite per $\nu \rightarrow k$ del quoziente (7) con la regola dell'Hospital, si ha:

$$N_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow k} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \cos \pi \nu - \pi \sin \pi \nu J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)}{\pi \cos \pi \nu} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-)^k \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right)_{\nu=k}.$$

Calcolando le derivate dall'espressione di J_ν si trova che $N_k(x)$ ha la forma seguente:

$$N_k(x) = \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2} \cdot J_k(x) + x^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \quad (8)$$

con $c_0 \neq 0$. Osserviamo che $N_k(x)$ è illimitata per $x \rightarrow 0^+$. Infatti:

se $k = 0$, $\frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2} \cdot J_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}$ per $x \rightarrow 0$ (mentre $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ è limitata),

dunque $N_0(x)$ ha una singolarità logaritmica in 0;

se $k \geq 1$, $\frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2} \cdot J_k(x) \sim \text{cost.} \cdot x^k \log \frac{x}{2} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$; $x^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \sim \frac{c_0}{x^k}$,

dunque $N_k(x)$ ha una singolarità di tipo $\frac{1}{x^k}$ in 0.

Poiché N_k è illimitata in 0, è indipendente da J_k ; quindi l'integrale generale dell'equazione di Bessel di ordine k intero è:

$$c_1 J_k(x) + c_2 N_k(x). \quad (9)$$

Da (6) e (9) segue che, qualunque sia ν reale ≥ 0 , l'unica soluzione limitata nell'origine dell'equazione di Bessel di ordine ν è $c \cdot J_\nu(x)$. Osserviamo infine che, come visto nel cap. 22, l'equazione:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(c^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (10)$$

viene trasformata nell'equazione di Bessel dal cambio di variabile $cx = t$. Perciò l'integrale generale della (10) è:

$$aJ_\nu(cx) + bJ_{-\nu}(cx) \quad \text{per } \nu \text{ non intero}$$

$$aJ_\nu(cx) + bN_\nu(cx) \quad \text{per } \nu \text{ intero.}$$

23.2. EQUAZIONI E FUNZIONI DI BESSEL MODIFICATE

In certi problemi capita di dover risolvere, anziché la (10), un'equazione del tipo:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(-c^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (11)$$

(ossia il segno di c^2 è cambiato). La (11) si dice equazione di Bessel modificata. Poiché tutte le funzioni $J_{\pm\nu}$, N_ν considerate hanno senso anche per x complesso (e risolvono l'equazione di Bessel), operiamo la sostituzione $ix = z$. Si ha:

$$\frac{d}{dx} = i \frac{d}{dz}; \quad \frac{d^2}{dx^2} = - \frac{d^2}{dz^2}$$

e l'equazione (11) si trasforma in:

$$-\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{i}{x} \frac{dy}{dz} + \left(-c^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

ossia:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(c^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) y = 0$$

(equazione di Bessel standard). Pertanto l'integrale generale di (11) è:

$$aJ_\nu(ciz) + bJ_{-\nu}(ciz) \quad (\nu \text{ non intero}),$$

$$aJ_\nu(ciz) + bN_\nu(ciz) \quad (\nu \text{ intero}).$$

Dall'espressione (4) per $J_\nu(x)$ si ha:

$$J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n (i)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} =$$

$$= (i)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

Si pone allora:

$$I_\nu(x) = (i)^{-\nu} J_\nu(ix).$$

I_ν si dice *funzione di Bessel modificata di 1^a specie, di ordine ν* . Rispetto a $J_\nu(ix)$, ha il vantaggio di essere una funzione reale, se x è reale. È dunque una soluzione, regolare per $x \geq 0$, dell'equazione (11), reale. Osserviamo anche che, dalla serie di potenze che la definisce, si vede subito che $I_\nu(x) > 0 \forall x > 0$. Perciò l'integrale generale della (11) può essere espresso nella forma reale:

$$aI_\nu(x) + bI_{-\nu}(x)$$

(se ν non è intero).

Analogamente si definiscono le *funzioni di Bessel modificate di 2^a specie*:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [i^n I_n(x) + i N_n(ix)].$$

Se $\nu = n$ intero, l'integrale generale della (11) è:

$$aI_n(cx) + bK_n(cx).$$

23.3. ANDAMENTO DELLE FUNZIONI DI BESSEL $J_\nu(x)$

Consideriamo ora le funzioni di Bessel di 1^a specie, $J_\nu(x)$. Vogliamo studiare qui alcune proprietà delle J_ν , in particolare relative agli zeri e al comportamento asintotico. Cominciamo con la seguente

osservazione 1. Se $y(x)$ soddisfa l'equazione di Bessel (1), la funzione $u(x) = \sqrt{x} \cdot y(x)$ soddisfa l'equazione:

$$u'' = \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4} - x^2\right)}{x^2} u. \quad (12)$$

Infatti: da $u(x) = \sqrt{x} \cdot y(x)$ si ha:

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{1}{4x^{3/2}} y + \frac{1}{\sqrt{x}} y' + \sqrt{x} y'' = \sqrt{x} \left(y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{4x^2} y \right) = \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{\nu^2 - x^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} \right) y = u \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4} - x^2\right)}{x^2}. \end{aligned} \quad \square$$

Questo fatto è importante per la seguente proprietà:

Proposizione 2. Se u è soluzione della (12), u si annulla in un insieme di punti $\lambda_n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Mostriamo che u ha infiniti zeri. Per assurdo, ne abbia al più un numero finito. Allora, ad es., è $u(x) > 0$ per $x > x_0$. Poiché

$$\frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4} - x^2\right)}{x^2} \rightarrow -1$$

per $x \rightarrow +\infty$, dall'equazione segue allora che $u''(x) < 0$ per x abbastanza grande, ad es. per $x > x_1 > x_0$. Dunque $u'(x)$ è decrescente per $x > x_1$, e pertanto ammette limite per $x \rightarrow +\infty$, sia esso l . Se $l < 0$, $u'(x)$ è negativa per $x > x_2 > x_0$, ma allora $u(x)$ deve tagliare ancora l'asse x alla destra di x_0 , contro l'ipotesi che $u(x) > 0 \forall x > x_0$. Dunque $l \geq 0$; in particolare $u'(x) > 0$ per $x > x_1$. Consideriamo ora l'identità:

$$\begin{aligned} u'(x) &= u'(x_1) + \int_{x_1}^x u''(t) dt = \\ &= u'(x_1) + \int_{x_1}^x \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4} - t^2\right)}{t^2} u(t) dt. \end{aligned}$$

Poiché per $x > x_1$ $u(x)$ è positiva e crescente, non può tendere a zero, perciò è $u(x) \geq 0 \forall x > x_0$; d'altra parte

$$\frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4} - t^2\right)}{t^2} \rightarrow -1 \text{ per } t \rightarrow +\infty;$$

perciò per $x \rightarrow +\infty$ l'integrandà è negativa e discosta da zero, e l'integrale tende a $-\infty$. Questo è assurdo perché invece il 1º membro dell'uguaglianza tende a $l \geq 0$.

Dunque u ha infiniti zeri. □

Osserviamo che gli zeri di u sono gli zeri di y ; se $y(x) = J_\nu(x)$, y è analitica. Allora se ha infiniti zeri, questi formano una successione tendente a $+\infty$; altrimenti ci sarebbe un punto di accumulazione di zeri e, per l'analiticità di y , y sarebbe identicamente nulla. Nel seguito indicheremo con $\{k_{\nu,m}\}_{m=1}^\infty$ la successione degli zeri di $J_\nu(x)$.

Ci ora occuperemo in particolare delle funzioni $J_n(x)$ di ordine intero. Stabiliamo ora le seguenti *formule di ricorrenza*:

$$\boxed{\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)}$$
(13)

$$\boxed{\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).}$$

Dimostriamo ad es. la prima. (Per la seconda si procede in modo analogo).

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ x^{-n} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k-1)! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \end{aligned}$$

23. Funzioni di Bessel e applicazioni

$$\begin{aligned}
 &= -x^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1+n} = \\
 &= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! (n+1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+1} = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Queste formule sono utili per vari scopi; per ora osserviamo che: tra 2 zeri della funzione $x^{-n}J_n(x)$ (ossia di $J_n(x)$) deve trovarsi un punto in cui si annulla la derivata della funzione stessa e quindi, per la 1^a formula, si annulla $-x^{-n}J_{n+1}(x)$, ossia $J_{n+1}(x)$. Analogamente la 2^a formula si dice che tra 2 zeri di J_n cade uno zero di J_{n-1} . Poiché questo vale $\forall n$ si ha che:

- gli zeri di 2 funzioni di Bessel J_n e J_{n+1} si separano a vicenda, ossia:

$$k_{n,m} \leq k_{n+1,m} \leq k_{n,m+1}$$

Si possono dimostrare varie stime relative agli zeri delle funzioni di Bessel:

- la diseguaglianza:

$$\pi(m-1) < k_{n,m} < \pi(m+n)$$

da cui segue in particolare che per n fissato e $m \rightarrow +\infty$,

$$k_{n,m} \sim \pi m.$$

- Si può dimostrare anche la stima più accurata:

$$k_{n,m} \simeq m\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \quad \text{per } m \rightarrow +\infty,$$

nel senso che $(k_{n,m} - m\pi) \rightarrow \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$ per n fissato e $m \rightarrow +\infty$.

- Infine, si può dimostrare la stima asintotica all'infinito per J_n :

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

che ci dice tra l'altro che all'infinito $J_n(x)$ è sempre infinitesima dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

23.4. FUNZIONI DI BESSEL DI ORDINE SEMIINTERO

Le funzioni di Bessel di ordine semiintero, ossia $n + \frac{1}{2}$, intervengono in problemi di equazioni a derivate parziali a simmetria sferica, e sono perciò chiamate anche *funzioni di Bessel sferiche*. Determinano esplicitamente, a titolo di esempio, le funzioni $J_{\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. Se poniamo $\nu = \pm \frac{1}{2}$ nella (12) vediamo che

$$u(x) = \sqrt{x} \cdot J_{\pm \frac{1}{2}}(x)$$

soddisfa l'equazione:

$$u'' = -u.$$

Da questo segue che, a meno di costanti, le funzioni $J_{\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ coincidono con $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ e $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Determinando le costanti (dall'espressione delle J_ν come serie) si trova:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Osservare che per $x \rightarrow 0^+$ è

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x}, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

(coerentemente al fatto generale che $J_\nu(x) \sim c \cdot x^\nu$ per $x \rightarrow 0^+$). In questo caso

inoltre gli zeri delle funzioni si determinano esattamente:

$$\begin{aligned} k_{\frac{1}{2}, m} &= (m-1)\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ k_{-\frac{1}{2}, m} &= -\frac{\pi}{2} + m\pi. \end{aligned}$$

(Confrontare con le stime asintotiche degli zeri riportate più sopra). Si può dimostrare che le funzioni $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ (n intero relativo) si possono esprimere al seguente modo:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-)^n \frac{(2x)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right). \quad (14)$$

(notare che $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$, ossia $\frac{\sin x}{x}$ si può pensare come funzione di x^2 .

Il simbolo $\frac{d^n}{d(x^2)^n}$ indica la derivata n -esima rispetto a x^2). Come conseguenza della formula precedente, si ha che $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ può essere espressa come funzione razionale di x , $\sin x$, $\cos x$, moltiplicata per \sqrt{x} .

Esempio 3. Calcolare $J_{3/2}$ in base alla (14).

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \frac{d}{d(x^2)} x = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cdot \frac{1}{2x} \\ J_{3/2}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

Osservare che gli zeri di $J_{3/2}$ sono le radici dell'equazione $x = \tan x$, che valgono

approssimativamente $\frac{\pi}{2} + m\pi$, in accordo con la stima asintotica data nel § 3.
Osservare anche che, per $x \rightarrow +\infty$,

$$J_{3/2}(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

in accordo con la stima asintotica valida in generale per le $J_\nu(x)$. □

23.5. FUNZIONI DI BESSEL COME SISTEMI ORTONORMALI

Nel cap. 22 abbiamo visto come lo studio del problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ U = 0 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

porti, per separazione di variabili, a soluzioni del tipo $R(r) \cdot \cos n\vartheta$, $R(r) \cdot \sin n\vartheta$, con R soluzione del problema agli autovalori:

$$\begin{cases} (rR')' - \frac{n^2}{r}R + \lambda rR = 0 & 0 < r < 1 \\ R(1) = 0 \quad R(0) < \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Come abbiamo visto, per ogni n intero fissato questo problema ha la successione di autovalori:

$$\lambda_m^{(n)} = k_{n,m}^2 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

e autofunzioni corrispondenti:

$$J_n(k_{n,m} r).$$

Le autofunzioni $\{J_n(k_{n,m} r)\}_{m=1}^{\infty}$ risultano a 2 a 2 ortogonali in $L^2((0,1), rdr)$. Questo si può dimostrare direttamente dalla (15), analogamente a come si è dimostrata l'ortogonalità dei polinomi di Legendre, Laguerre e Hermite (v. §

23. Funzioni di Bessel e applicazioni

13.3), ma segue anche dalla seguente osservazione: le funzioni

$$U_{n,m}(r, \vartheta) = \{J_0(k_{0,m}r), J_n(k_{n,m}r) \cdot \cos n\vartheta, J_n(k_{n,m}r) \cdot \sin n\vartheta\}$$

sono autofunzioni del laplaciano sul cerchio (con dato al bordo $U = 0$), perciò (v. § 22.1) sono a 2 a 2 ortogonali in \mathcal{L}^2 , sul cerchio. In particolare U_{n,m_1} e U_{n,m_2} sono ortogonali, ossia:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x^2 + y^2 \leq 1} U_{n,m_1}(x, y) U_{n,m_2}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 n\vartheta d\vartheta \int_0^1 J_n(k_{n,m_1}r) J_n(k_{n,m_2}r) r dr = \\ &= \pi \int_0^1 J_n(k_{n,m_1}r) J_n(k_{n,m_2}r) r dr \quad (\text{per } m_1 \neq m_2). \end{aligned}$$

Di più, si dimostra che, per ogni n fissato, il sistema ortogonale

$$\left\{J_n(k_{n,m}r)\right\}_{m=1}^{\infty}$$

è completo in $\mathcal{L}^2(0,1)$. Vogliamo calcolare i coefficienti di normalizzazione.

Dimostreremo che:

$$\int_0^1 J_n(k_{n,m}r)^2 r dr = \frac{1}{2} J_{n+1}(k_{n,m})^2.$$

(16)

Per dimostrare le (16) stabiliremo varie formule di ricorrenza. Partiamo dalle (13) del § 3:

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

Sviluppando a 1° membro la derivata del prodotto e moltiplicando quindi ambo i membri per x^n (1ª equazione) o x^{-n} (2ª equazione) si trovano le seguenti:

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \\ J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Proviamo ora la seguente:

$$\frac{d}{dx} [x^2(J_n(x)^2 - J_{n+1}(x) J_{n-1}(x))] = 2x J_n(x)^2. \tag{18}$$

Dalle (17) si ricava:

$$J_{n+1}(x) J_{n-1}(x) = \frac{n^2}{x^2} J_n(x)^2 - J'_n(x)^2$$

quindi:

$$x^2(J_n^2(x) - J_{n+1}(x) J_{n-1}(x)) = J_n(x)^2 \cdot (x^2 - n^2) + J'_n(x)^2 x^2.$$

Calcolando la derivata a primo membro della (17) tenendo conto dell'ultima equazione scritta si ha:

$$\begin{aligned} 2J_n(x) J'_n(x) \cdot (x^2 - n^2) + 2x J_n(x)^2 + 2J'_n(x) J''_n(x)x^2 + 2x J'_n(x)^2 &= \\ = 2x J_n^2(x) + 2J'_n(x) \cdot [x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x)] &= \\ = 2x J_n^2(x), \end{aligned}$$

perché l'espressione entro quadre è zero, in quanto J_n soddisfa l'equazione di Bessel. Si è così provata la (18). \square

Siamo ora in grado di calcolare i coefficienti di normalizzazione:

$$\int_0^1 J_n(k_{n,m}x)^2 x dx = [k_{n,m}x = t] = \frac{1}{k_{n,m}^2} \int_0^{k_{n,m}} J_n(t)^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{per le 18}) = \frac{1}{2k_{n,m}^2} [t^2(J_n(t)^2 - J_{n+1}(t)J_{n-1}(t))]_0^{k_{n,m}} = \\
 &= (\text{poiché } J_n(k_{n,m}) = 0) = -\frac{1}{2} J_{n+1}(k_{n,m}) J_{n-1}(k_{n,m}) = \\
 &\quad (\text{poiché dalle (17) si ha } J_{n-1}(k_{n,m}) = -J_{n+1}(k_{n,m})) \\
 &= \frac{1}{2} J_{n+1}(k_{n,m})^2 \quad (= \frac{1}{2} J_{n-1}(k_{n,m})^2).
 \end{aligned}$$

Con ciò la (16) è dimostrata. □

Perciò data $f \in \mathcal{L}^2((0, 1), x dx)$ si può scrivere

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(k_{n,m} x)$$

con

$$c_m = \frac{2}{J_{n+1}(k_{n,m})^2} \int_0^1 f(x) J_n(k_{n,m} x) x dx.$$

(Tutto ciò vale $\forall n$ fissato).

Esempio 4. Calcolare lo sviluppo di $f(x) = 1 - x^2$ rispetto a $\{J_0(k_{0,m} x)\}_{m=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned}
 c_m &= \frac{2}{J_1(k_{0,m})^2} \int_0^1 (1 - x^2) x J_0(k_{0,m} x) dx = (x = \frac{t}{k_{0,m}}) = \\
 &= \frac{2}{k_{0,m}^2 J_1(k_{0,m})^2} \int_0^{k_{0,m}} J_0(t) \left(t - \frac{t^3}{k_{0,m}^2} \right) dt.
 \end{aligned}$$

In base alla

$$\frac{d}{dt} [t^n J_n(t)] = t^n J_{n-1}(t)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{k_{0,m}} J_0(t) t dt &= [t J_1(t)]_0^{k_{0,m}} = k_{0,m} J_1(k_{0,m}). \\ \int_0^{k_{0,m}} t^3 J_0(t) dt &= (\text{per parti}) = [t^2 \cdot t J_1(t)]_0^{k_{0,m}} - \int_0^{k_{0,m}} 2 t^2 J_1(t) dt = \\ &= [t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t)]_0^{k_{0,m}} = k_{0,m}^3 J_1(k_{0,m}) - 2 k_{0,m}^2 J_2(k_{0,m}). \\ c_m &= \frac{2}{k_{0,m}^2 J_1(k_{0,m})^2} [k_{0,m} J_1(k_{0,m}) - k_{0,m} J_1(k_{0,m}) + 2J_2(k_{0,m})] = \\ &= \frac{4}{k_{0,m}^2} \cdot \frac{J_2(k_{0,m})}{J_1(k_{0,m})^2}. \\ (1-x^2) &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(k_{0,m})}{k_{0,m}^2 J_1(k_{0,m})^2} J_0(k_{0,m} x). \end{aligned}$$

□

23.6. APPLICAZIONI DELLE FUNZIONI DI BESSEL A PROBLEMI PER EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

Nel cap. 22 abbiamo visto come le funzioni di Bessel intervengano nello studio dell'equazione di Helmholtz sul cerchio, e quindi del problema di Cauchy-Dirichlet sul cerchio per l'equazione delle onde e del calore. Vediamo ora qualche altro esempio di utilizzo delle funzioni di Bessel.

23.6.1. EQUAZIONE DI HELMOLTZ SUL CILINDRO

Consideriamo il problema agli autovalori (in coordinate cilindriche (r, ϑ, z)):

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{per } r < 1, 0 < z < l, -\pi < \vartheta < \pi \\ u(1, \vartheta, z) = 0 \\ u(r, \vartheta, 0) = 0 \\ u(r, \vartheta, l) = 0. \end{cases}$$

(Questo problema nasce ad esempio come sottoproblema nello studiare l'equazione del calore o delle onde sul cilindro, con dato al bordo zero e dato iniziale assegnato). Separando le variabili:

$$u(r, \vartheta, z) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot Z(z)$$

si ha:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0.$$

Ragionando al solito modo si ha:

$$\begin{cases} Z'' = \mu Z \\ Z(0) = Z(l) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} Z = \sin \frac{k\pi z}{l} \\ \mu = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta'' = \nu \Theta \\ \Theta \text{ periodica } 2\pi \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} \Theta = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta \\ \nu = -n^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R'' + \frac{R'}{r} - \frac{n^2}{r^2} R + \left(\lambda - \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \right) R = 0 \\ R(1) = 0 \quad R(0) < \infty. \end{cases}$$

Quest'ultima è un'equazione di Bessel di ordine n ; le soluzioni sono:

$$R(r) = J_n(k_{n,m} r)$$

e

$$\lambda - \frac{k^2\pi^2}{l^2} = k_{n,m}^2.$$

Quindi gli autovalori del laplaciano sul cilindro sono la successione a 3 indici:

$$\left\{ \frac{k^2\pi^2}{l^2} + k_{n,m}^2 \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad n=0, \quad m=1, \quad \infty$$

(dove $k_{n,m}$ sono gli zeri delle funzioni di Bessel). Le autosoluzioni (a variabili separate) sono:

$$u_{k,n,m}(r, \vartheta, z) = \begin{cases} \sin \frac{k\pi z}{l} \cos n\vartheta J_n(k_{n,m} r) & \text{se } n \geq 1 \\ \sin \frac{k\pi z}{l} \sin n\vartheta J_n(k_{n,m} r) \\ \sin \frac{k\pi z}{l} J_0(k_{0,m} r) & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Scrivere la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & t > 0, \quad r < 1, \quad 0 < z < l, \quad -\pi < \vartheta < \pi \\ u(1, \vartheta, z, t) = 0 \\ u(r, \vartheta, 0, t) = 0 \\ u(r, \vartheta, l, t) = 0 \\ u(r, \vartheta, z, 0) = f(r, \vartheta, z). \end{cases}$$

(Significato fisico: diffusione del calore in un cilindro con temperatura iniziale f , tenuto a temperatura zero sul bordo).

In base al procedimento generale visto nel § 22.1, e in base alla discussione del problema agli autovalori per il laplaciano sul cilindro, si ha:

$$u(t, r, \vartheta, z) = \frac{1}{2} \sum_{m, k=1}^{\infty} a_{0, m, k} e^{-\left(k^2 \frac{\pi^2}{l^2} + k_{0, m}^2\right)t} \cdot \sin \frac{k\pi z}{l} J_0(k_{0, m} r) + \\ + \sum_{n, m, k=1}^{\infty} e^{-\left(k^2 \frac{\pi^2}{l^2} + k_{n, m}^2\right)t} \cdot \sin \frac{k\pi z}{l} J_n(k_{n, m} r) [a_{n, m, k} \cos n\vartheta + b_{n, m, k} \sin n\vartheta]$$

con:

$$a_{n, m, k} = \\ = \frac{4}{\pi l} \cdot \frac{1}{J_{n+1}^2(k_{n, m})} \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} dz \int_0^1 J_n(k_{n, m} r) r dr \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(r, \vartheta, z) \cos n\vartheta d\vartheta; \\ b_{n, m, k} = \text{analoga espressione con } \sin n\vartheta \text{ anziché } \cos n\vartheta. \quad \square$$

23.6.2. LAPLACIANO SUL CILINDRO

Consideriamo il seguente problema di Dirichlet per il laplaciano sul cilindro (il dato è nullo sulle basi e diverso da zero sulla superficie laterale).

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < 1, 0 < z < l, -\pi < \vartheta < \pi \\ u(r, \vartheta, 0) = u(r, \vartheta, l) = 0 \\ u(1, \vartheta, z) = f(\vartheta, z). \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(r, \vartheta, z) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot Z(z).$$

Ripercorrendo i passaggi del paragrafo precedente (ponendo $\lambda = 0$), si ha:

$$Z = \sin \frac{k\pi z}{l}; \quad \Theta = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{n^2}{r^2} R - \frac{k^2 \pi^2}{l^2} R = 0.$$

Quest'ultima è un'equazione di Bessel "modificata" (v. § 2), come si vede dal segno dell'ultimo termine. Le soluzioni limitate di questa equazione sono del tipo:

$$c \cdot I_n \left(k \frac{\pi}{l} r \right)$$

con I_n = funzione di Bessel modificata di 1^a specie. Le soluzioni a variabili separate sono quindi del tipo:

$$\sin \frac{k\pi z}{l} \cdot I_0 \left(k \frac{\pi}{l} r \right);$$

$$\sin \frac{k\pi z}{l} \cdot I_n \left(k \frac{\pi}{l} r \right) \cos n\vartheta;$$

$$\sin \frac{k\pi z}{l} \cdot I_n \left(k \frac{\pi}{l} r \right) \sin n\vartheta.$$

Cerchiamo una u del tipo:

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{0,k}}{2} \sin \frac{k\pi z}{l} \cdot I_0 \left(k \frac{\pi}{l} r \right) + \\ &+ \sum_{k,n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi z}{l} \cdot I_n \left(k \frac{\pi}{l} r \right) [a_{n,k} \cos n\vartheta + b_{n,k} \sin n\vartheta]. \end{aligned}$$

Imponendo che sia $u(1, \vartheta, z) = f(\vartheta, z)$ si trova:

$$a_{n,k} = \frac{\alpha_{n,k}}{I_n \left(k \frac{\pi}{l} \right)}; \quad b_{n,k} = \frac{\beta_{n,k}}{I_n \left(k \frac{\pi}{l} \right)}$$

con

$$\alpha_{n,k} = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} dz \int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta, z) \cos n\vartheta d\vartheta$$

$$\beta_{n,k} = (\text{analoga espressione con } \sin n\vartheta).$$

(Ricordiamo che le funzioni di Bessel modificate non si annullano mai, quindi le espressioni $I_n(k \frac{\pi}{l})$ a denominatore non danno problemi). \square

23.6.3. EQUAZIONE DI HELMHOLTZ SULLA SFERA

Consideriamo il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & r < 1, \ 0 < \vartheta < \pi, \ 0 < \varphi < 2\pi \\ u(1, \vartheta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

(r, ϑ, φ coordinate sferiche). Cercando u del tipo

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

si trova:

$$\frac{R''}{R} - \frac{2}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta') + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda = 0.$$

Ragionando in modo analogo a quanto visto nel caso dell'equazione di Laplace sulla sfera (v. cap 19) si ha:

$$\Phi(\varphi) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi;$$

$$\Theta(\vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta) \quad (\text{funzione di Legendre associata});$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + 2r R' - n(n+1)R + \lambda r^2 R = 0 \\ R(1) = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione "assomiglia" a un'equazione di Bessel, ma non lo è, per via del termine in R' che ha coefficiente $2r$ anziché r . Per riportarla ad una equazione

di Bessel si esegue la sostituzione:

$$R(r) = r^{-\frac{1}{2}} S(r).$$

Calcolando:

$$R'(r) = -\frac{1}{2} r^{-3/2} S(r) + r^{-1/2} S'(r)$$

$$R''(r) = \frac{3}{4} r^{-5/2} S(r) - r^{-3/2} S'(r) + r^{-1/2} S''(r)$$

e sostituendo queste espressioni di R , R' , R'' nell'equazione si trova:

$$r^{1/2} S'' + r^{1/2} S' - S \left([n(n+1) + \frac{1}{4}] r^{-1/2} - \lambda r^{3/2} \right) = 0.$$

Moltiplicando per $r^{1/2}$ si ha:

$$r^2 S'' + rS' - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 S + \lambda r^2 S = 0.$$

Quella trovata è un'equazione di Bessel di ordine $\left(n + \frac{1}{2} \right)$, ossia semiintero. La condizione $R(1) = 0$ dà $S(1) = 0$ e dunque determina gli autovalori λ :

$$\lambda_{n,h} = k_{n+\frac{1}{2},h}^2$$

Gli autovalori del laplaciano sulla sfera sono i quadrati degli zeri delle funzioni di Bessel "sferiche", $J_{n+\frac{1}{2}}$ (v. § 4). Le autofunzioni sono quindi:

$$u_{n,m,h}(r, \vartheta, \varphi) = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}} \left(k_{n+\frac{1}{2},h} r \right) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi;$$

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{n+\frac{1}{2}, h} r) P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi;$$

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{n+\frac{1}{2}, h} r) P_n(\cos \vartheta).$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = 1, 2, \dots$$

$$h = 1, 2, \dots$$

Osservare che le funzioni

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r)$$

sono regolari nell'origine, perché $J_{n+\frac{1}{2}}$ è dell'ordine di $r^{n+\frac{1}{2}}$, perciò $r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}$ è dell'ordine di r^n per $r \rightarrow 0$.

Esempio 6. Per $n = 0$ si ha:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Gli zeri di $J_{\frac{1}{2}}$ sono:

$$k_{\frac{1}{2}, h} = h\pi \quad (h = 1, 2, \dots).$$

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k_{\frac{1}{2}, h} r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(h\pi r)}{r}.$$

Il 1° autovalore del laplaciano sulla sfera unitaria è $\lambda_{0,1} = \pi^2$, e la 1ª delle (infinte) autofunzioni corrispondenti è (per $n = 0, m = 0, h = 1$):

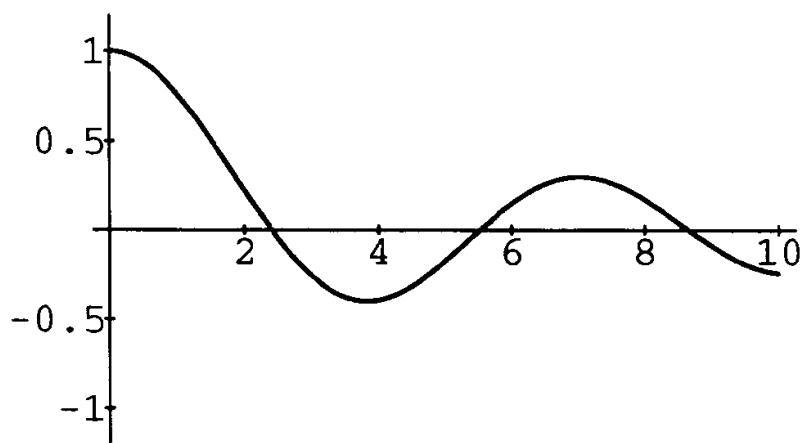
$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\sin \pi r}{r}.$$

□

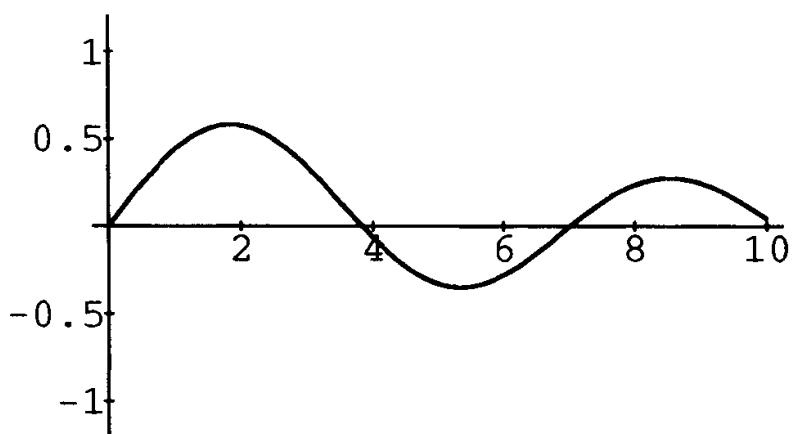
fig. 23.1.

Grafici delle funzioni di Bessel $J_n(x)$.

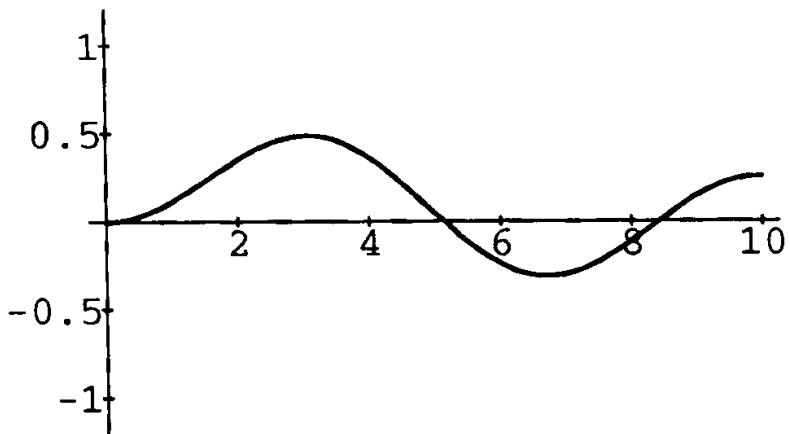
$n=0$:



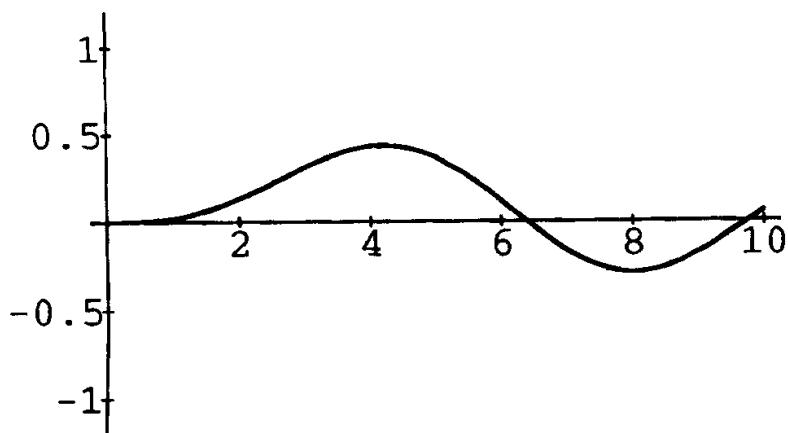
$n=1$:



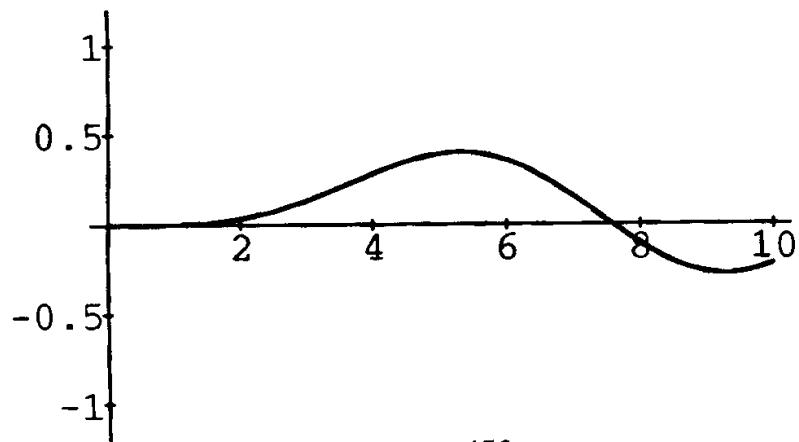
n=2:



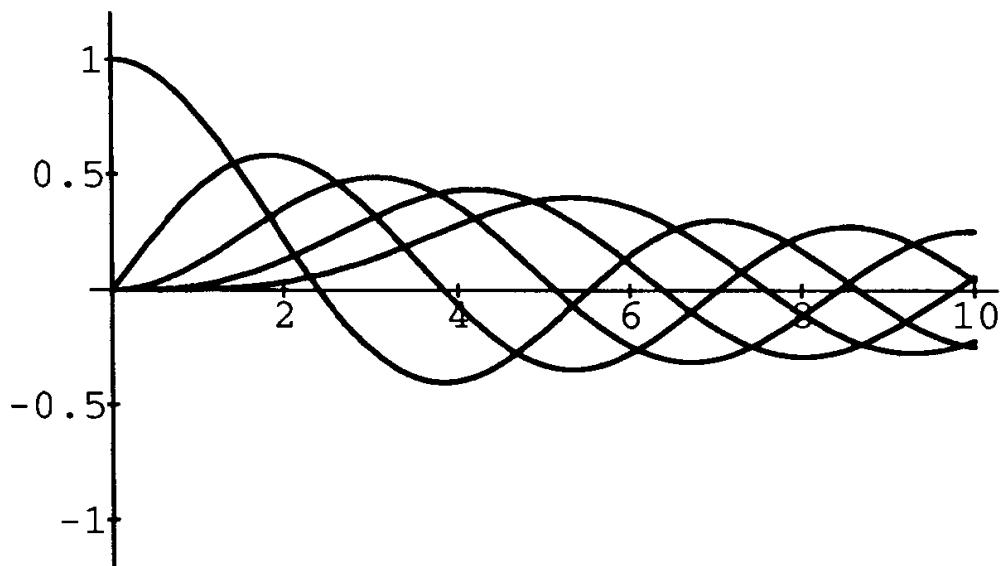
n=3:



n=4:



Confronto tra i grafici di $J_n(x)$ per $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

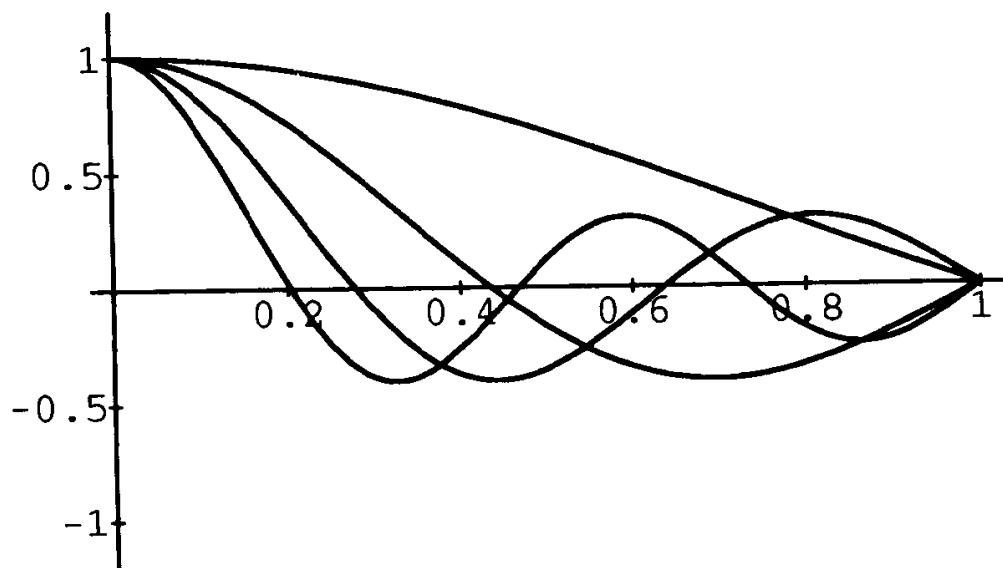


Zeri delle funzioni di Bessel $J_n(x)$.

| | $n=0$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $m=1$ | 2.40483 | 3.83171 | 5.13562 | 6.38016 | 7.58834 |
| $m=2$ | 5.52008 | 7.01559 | 8.41724 | 9.76102 | 11.0647 |
| $m=3$ | 8.65373 | 10.1735 | 11.6198 | 13.0152 | 14.3725 |
| $m=4$ | 11.7915 | 13.3237 | 14.796 | 16.2235 | 17.616 |
| $m=5$ | 14.9309 | 16.4700 | 17.9598 | 19.4094 | 20.8269 |

fig. 23.2.

Grafici di $J_0(k_{0,i}x)$ per $i = 1, 2, 3, 4$.



Grafici di $J_1(k_{1,i}x)$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

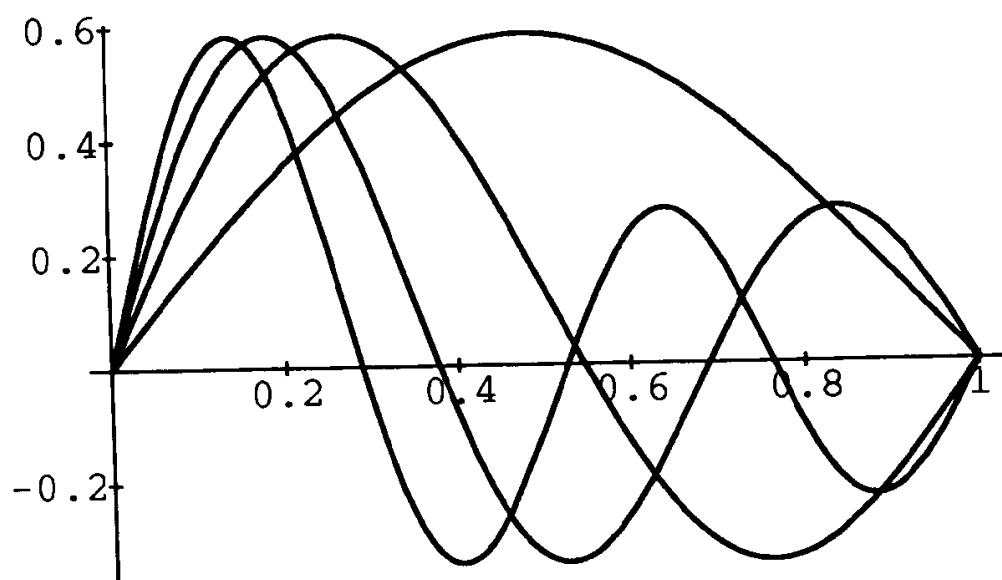
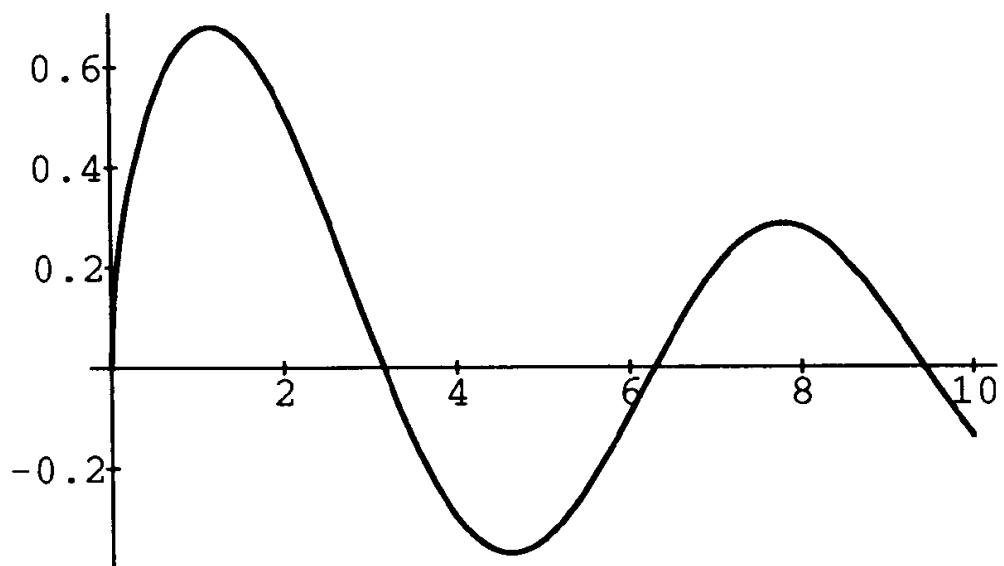


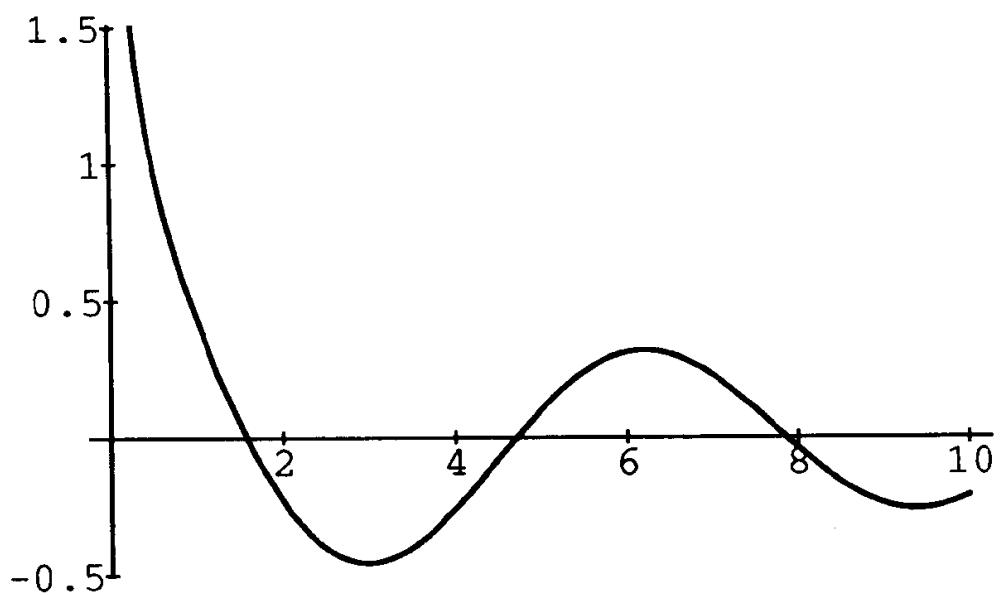
fig. 23.3.

Funzioni di Bessel di ordine semiintero.

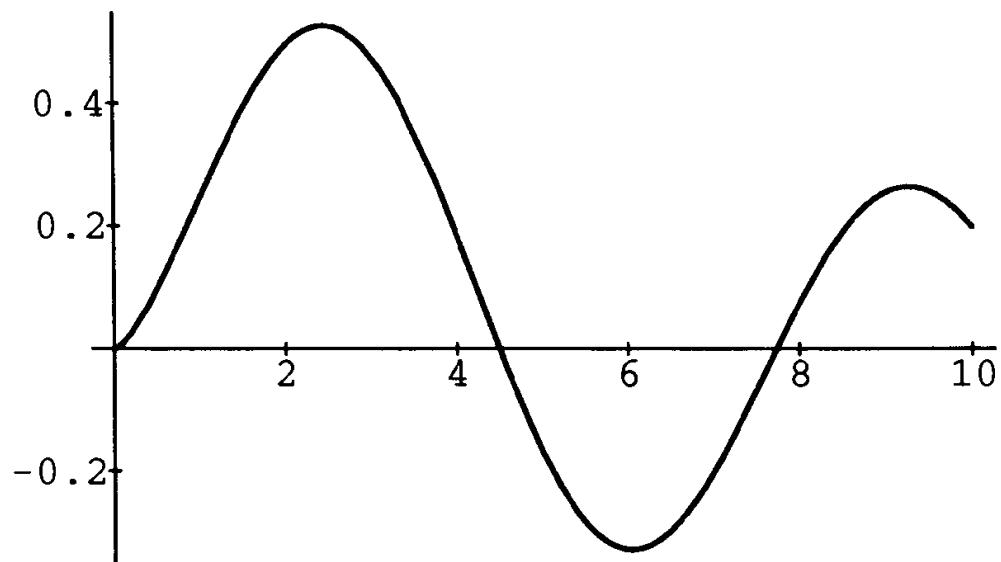
$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$



$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$



$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x} \right)$$



$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-3 \frac{\cos x}{x} - \sin x + 3 \frac{\sin x}{x^2} \right)$$

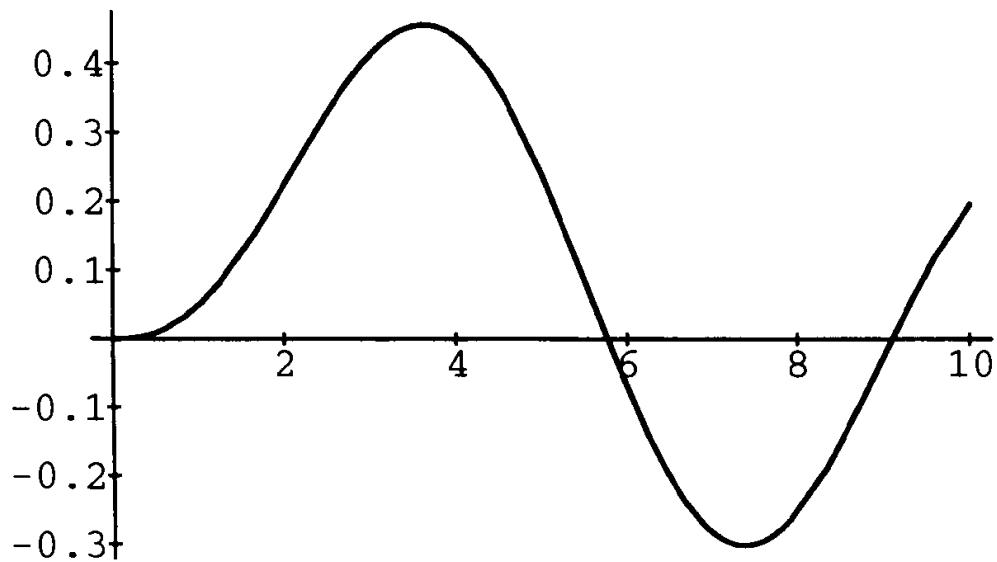


fig. 23.4.

Grafico d'insieme delle funzioni di Bessel $J_p(x)$ per p reale qualunque in $(0,2)$.

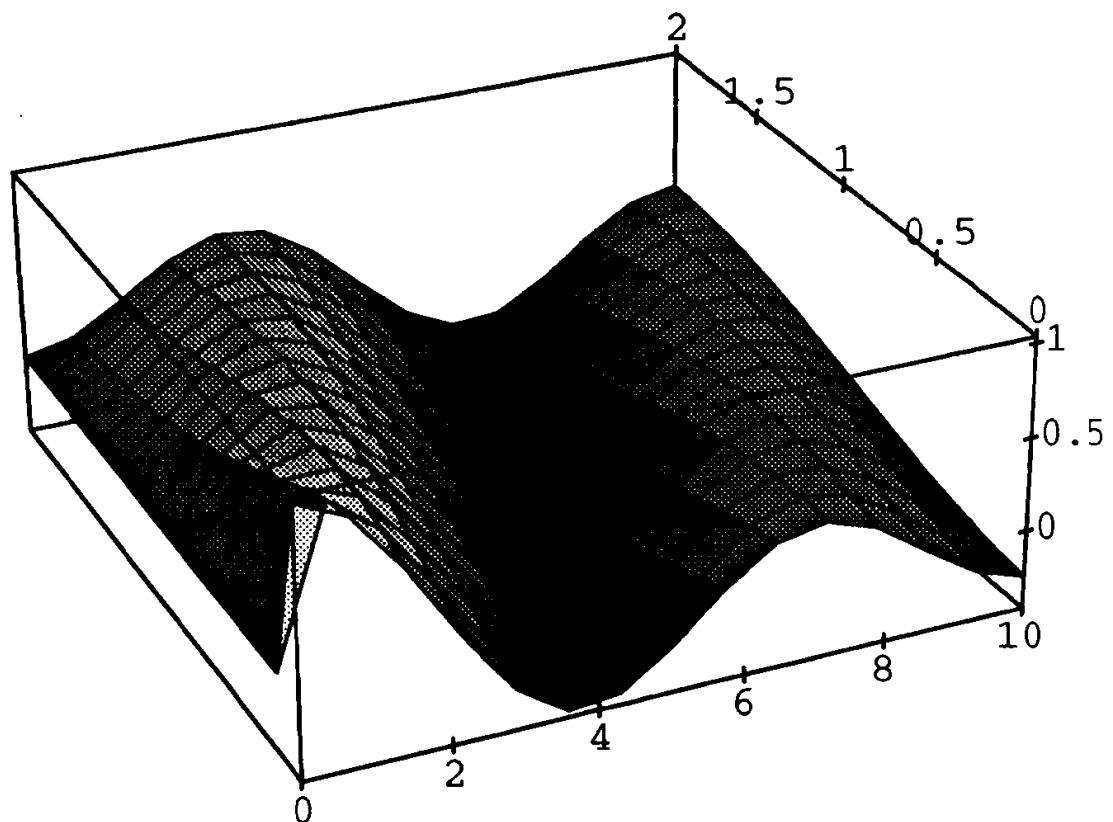


Grafico d'insieme delle funzioni di Bessel $J_p(x)$ per p reale qualunque in $(-2,0)$.

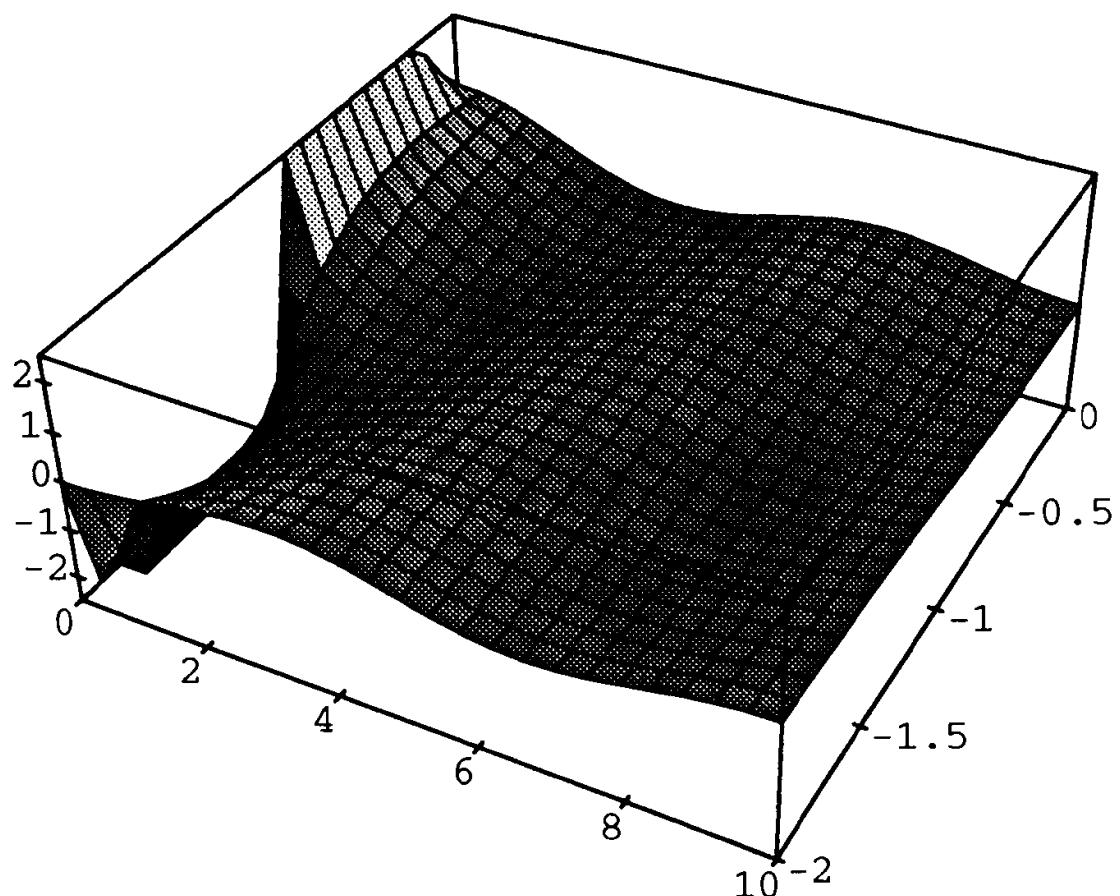
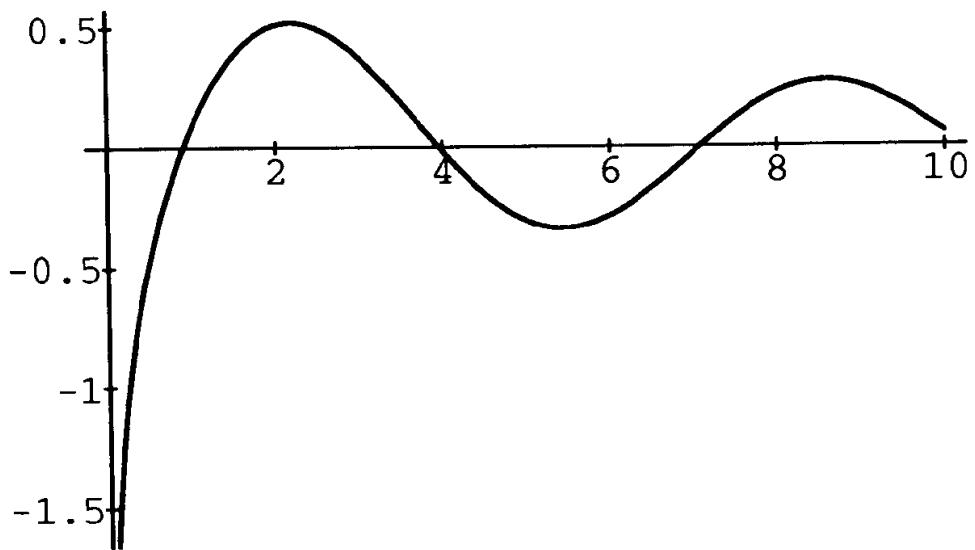


fig. 23.5.

Funzioni di Bessel di 2^a specie $Y_n(x)$.

$n = 0$



$n = 1$

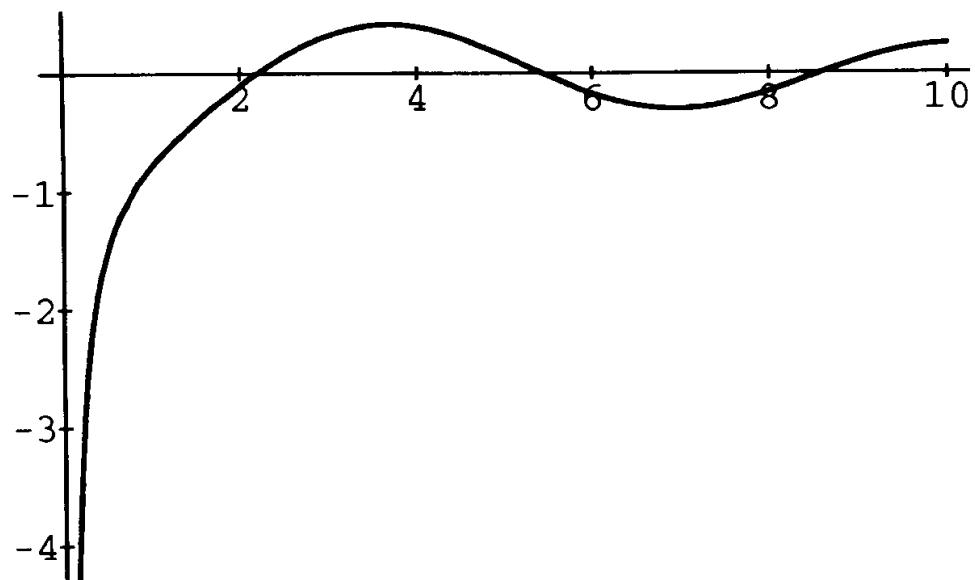


fig. 23.6.

Esempio di approssimazione mediante funzioni di Bessel.

Funzione da approssimare:

$$f(r) = 1 - r^2.$$

Sviluppo di Fourier-Bessel (primi 3 termini):

$$g(r) = 1,108 J_0(2,40483 r) - 0,14 J_0(5,52008 r) + 0,045 J_0(8,65373 r).$$

Poiché l'approssimazione deve valere in $(L^2(0,1), r dr)$, confrontiamo i grafici di $f(r) \cdot \sqrt{r}$ e $g(r) \cdot \sqrt{r}$: come mostra la figura, questi sono quasi indistinguibili.

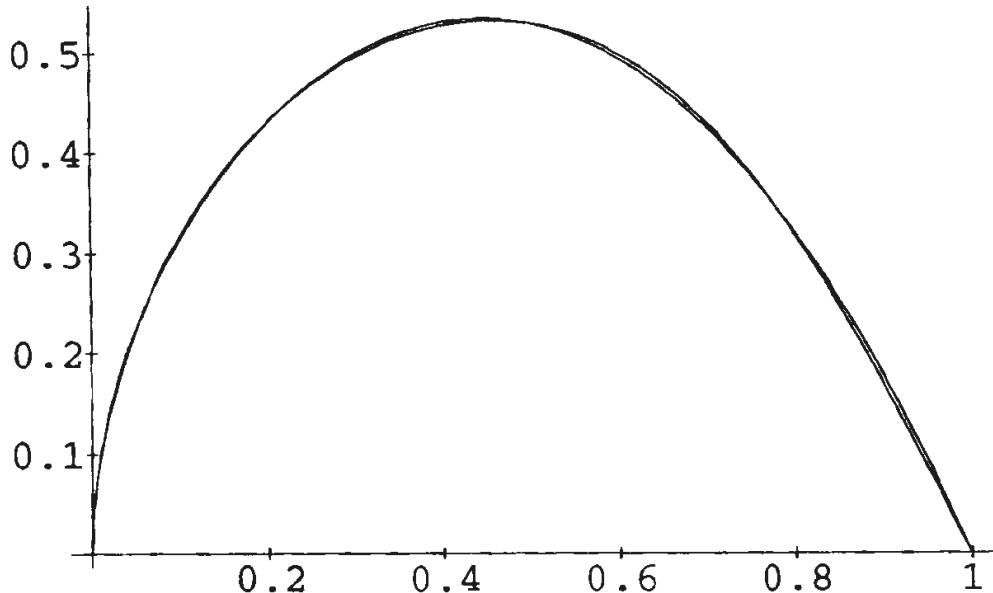


Tabella dei valori $J_{n+1}(k_{n,m})$

| | $n=0$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $m=1$ | 0.519147 | 0.402759 | 0.339669 | 0.298274 | 0.268364 |
| $m=2$ | -0.340265 | -0.300115 | -0.271383 | -0.249417 | -0.231877 |
| $m=3$ | 0.271452 | 0.249703 | 0.232446 | 0.218279 | 0.206367 |
| $m=4$ | -0.232461 | -0.218359 | -0.206539 | -0.196434 | -0.187654 |
| $m=5$ | 0.206547 | 0.196480 | 0.187727 | 0.180050 | 0.173233 |

Riferimenti bibliografici

I principali testi su cui è basata questa dispensa, sono i seguenti.

Buzzetti-Zaretti: Esercizi sulle funzioni analitiche. Masson, 1974.

Buzzetti-Zaretti: Esercizi sulla trasformata di Laplace. Masson 1974.

Buzzetti-Zaretti: Esercizi di analisi funzionale. Masson 1982. (Contiene tra l'altro: spazi astratti, misura e integrale di Lebesgue, polinomi di Legendre, Laguerre, Hermite).

Buzzetti-Zaretti: Esercizi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. Masson 1985.

Churchill: Fourier Series and Boundary Value Problems. Mc Graw Hill, 1963. (Soprattutto per il metodo di separazione delle variabili e gli sviluppi in serie, nella soluzione di equazioni a derivate parziali; tratta anche funzioni di Bessel e di Legendre).

Courant-Hilbert: Methods of Mathematical Physics, vol. I, John Wiley and Sons, 1989. (Contiene molto materiale su equazioni a derivate parziali e funzioni speciali).

Farlow: Partial Differential Equations for Scientists & Engineers. John Wiley & Sons, 1982.

Persico: Introduzione alla fisica matematica, Zanichelli 1941. (In particolare, si illustra qui il significato fisico delle equazioni a derivate parziali della fisica matematica, che vengono qui ricavate dai modelli corrispondenti).

Weinberger: A First Course in Partial Differential Equations. Ginn & Company, 1965. (Contiene materiale anche sulle trasformate di Fourier e Laplace, sulle funzioni analitiche e sulle funzioni di Bessel).

John: Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1986. (Discute, in particolare, le equazioni quasilineari del primo ordine).

Infine, per grafici e tavole relativi a funzioni di Bessel e di Legendre:

Jahnke-Emde: Tables of Functions with Formulae and Curves. Dover, 1945.