Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
II Appello invernale di Metodi Analitici (18-2-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Sia $m \in \mathbb{N}$, e sia

$$f(z) := \frac{\sinh z}{z^m}\,.$$

(i) Scrivere lo sviluppo di Laurent di f di centro $z_0 = 0$.

(ii) Stabilire per quali $m \in \mathbb{N}$ il punto $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile, un polo, e una singolarità essenziale; nei casi in cui z_0 è un polo, stabilirne l'ordine.

(iii) Calcolare il valore del residuo di f in z_0, al variare di $m \in \mathbb{N}$.

Soluzione.

(i) Lo sviluppo richiesto è dato da

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1-m}\,.$$

(ii) Poiché il termine di grado più basso dello sviluppo sopra si ottiene ponendo $n = 0$ ed è dato da z^{1-m}, si ha che

– se $1 - m \geq 0$ ovvero $m \in \{0, 1\}$, la parte singolare dello sviluppo è nulla, e quindi il punto $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile;

– se $1 - m < 0$, ovvero $m \geq 2$, la parte singolare dello sviluppo è data da un numero finito di termini, e quindi il punto $z_0 = 0$ è un polo (di ordine $m - 1$);

– non esistono valori di $m \in \mathbb{N}$ per i quali la funzione assegnata presenta nel punto $z_0 = 0$ una singolarità essenziale.

(iii) Per $m \in \{0, 1\}$ il residuo è nullo in quanto si ha una singolarità eliminabile. Per $m \geq 2$ il valore del residuo è il coefficiente di z^{-1}. Essendo $2n + 1 - m = -1 \Leftrightarrow 2n + 1 = m - 1 \Leftrightarrow n = \frac{m}{2} - 1$, tale coefficiente è non nullo soltanto nel caso in cui m è pari, e in tal caso vale

$$\frac{1}{(m-1)!}\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)+1\right]dx\,.$$

Soluzione. La successione di funzioni

$$f_n(x):=\cos\left(\sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)+1$$

converge puntualmente a 1 su tutto l'intervallo di integrazione. Inoltre si ha

$$|f_n(x)|\leq 2 \qquad \forall x\in[0,2\pi]\,.$$

Poiché la funzione costante $\varphi(x)\equiv 2$ appartiene a $L^1([0,2\pi])$, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si può passare al limite sotto il segno di integrale. Pertanto si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)+1\right]dx=\int_0^{2\pi}\lim_{n\to+\infty}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)+1\right]dx=\int_0^{2\pi}2\,dx=4\pi\,.$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Fornire la definizione di sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert.

(ii) Fornire la definizione di spazio di Hilbert separabile.

(iii) Fornire un esempio di spazio di Hilbert separabile.

(iv) Fornire un esempio di spazio di Hilbert non separabile.
(*Suggerimento:* cercare di costruire uno spazio che contenga una famiglia più che numerabile di elementi due a due ortogonali.)

Soluzione.

(i)-(ii) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(iii) Si può prendere ad esempio lo spazio di successioni quadrato sommabili ℓ^2, con il sistema ortonormale completo e numerabile dato, al variare di $i \in \mathbb{N}$, dalle successioni

$$e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

dove il numero 1 occupa il posto i-esimo, e tutti gli altri ingressi sono uguali a 0.

(iv) Si può ottenere uno spazio di Hilbert H non separabile prendendo il completamento dello spazio lineare generato dalle funzioni

$$t \mapsto e^{ist} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

al variare del parametro reale s. Muniamo tale spazio del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g}(t)\,dt\,.$$

Poiché le funzioni e^{ist} ed e^{irt} con $r \neq s$ sono ortogonali e sono una famiglia più che numerabile, lo spazio H non può essere separabile.