Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2015/2016
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Primo appello di Metodi Analitici (29-2-16) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Siano $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ la parte reale e la parte immaginaria di una funzione $f = f(x + iy)$ olomorfa su tutto il piano complesso.

(i) Dimostrare che, per ogni valore di α e β, le curve di livello $u(x, y) = \alpha$ e $v(x, y) = \beta$ sono ortogonali tra di loro nei punti in cui si intersecano.

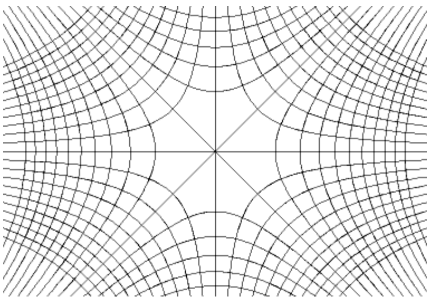
(ii) Disegnare le curve di livello nel caso $f(z) = z^2$.

Soluzione.
(i) Affinché le curve di livello siano ortogonali tra di loro, è condizione necessaria e sufficiente che siano ortogonali tra di loro i vettori normali, i quali sono diretti rispettivamente come ∇u e ∇v. Calcoliamo quindi il prodotto scalare $\nabla u \cdot \nabla v$. Utilizzando le condizioni di Cauchy Riemann, si ottiene

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = (v_y, v_x) \cdot (-v_x, v_y) = 0\,,$$

come volevasi dimostrare.

(ii) Si ha $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Pertanto un grafico qualitativo delle curve di livello è il seguente:



II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Mostrare che $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ e spiegare cosa significa che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Mostrare che, per ogni funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, posto $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$, si ha

$$(*) \qquad \lim_{\lambda \to 1} f_\lambda = f \qquad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}) \,.$$

(iii) Mostrare che la proprietà di convergenza $(*)$ è valida per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(i) Per ogni funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, posto K il supporto di f e $M = \max_K |f(x)|$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx = \int_K |f|^2 \, dx \leq M^2 |K| < +\infty \,.$$

Per la densità si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Sia λ_n una successione tendente a 1 per $n \to +\infty$. Chiaramente la successione $f_{\lambda_n}(x) = f(\lambda_n x)$ converge puntualmente a $f(x)$ per $n \to +\infty$. Per applicare il teorema di convergenza dominata, basta trovare una funzione integrabile, indipendente da n, che maggiora $|f_{\lambda_n}(x) - f(x)|^2$. Usando la disuguaglianza elementare $|a-b|^2 \leq 2(a^2+b^2)$ otteniamo, per n abbastanza grande:

$$|f_{\lambda_n}(x) - f(x)|^2 \leq 2\Big(|f_{\lambda_n}(x)|^2 + |f(x)|^2\Big) \leq M^2 \Big(\chi_{\frac{K}{\lambda_n}} + \chi_K\Big) \leq M^2 \Big(\chi_{2K} + \chi_K\Big) \,,$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il fatto che $\lambda_n \to 1$ e quindi $\frac{K}{\lambda_n} \subset 2K$ per n abbastanza grande.
Poiché la funzione $M^2\big(\chi_{2K} + \chi_K\big)$ è integrabile, per il teorema di convergenza dominata si ottiene che $f_{\lambda_n}(x)$ converge a $f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$, e quindi per l'arbitrarietà della successione $\lambda_n \to 1$, concludiamo che vale $(*)$.

(iii) Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\|g - f\|_2 < \varepsilon$. Si ha quindi

$$\|f - f_\lambda\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_\lambda\|_2 + \|g_\lambda - f_\lambda\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_\lambda\|_2 + 2\|g - f\|_2 \,,$$

dove l'ultima disuguaglianza si verifica valere, tramite cambio di variabile, per λ sufficientemente vicino a 1. Quindi, se $\lambda_n \to 1$, prendendo $\varepsilon = 1/n$, usando il punto (ii) e considerando una successione diagonale, si ha la tesi.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Per $x \in \mathbb{R}$, sia $u(x) := \max\{1 - |x|, 0\}$, e sia $\hat{u}(\xi)$ la sua trasformata di Fourier.

(i) Per ciascuna delle seguenti proprietà, dire giustificando al risposta se è possibile stabilire a priori che è vera, se è possibile stabilire a priori che è falsa, oppure se non è possibile stabilire a priori se è vera o falsa:

(a) $\hat{u}$ pari

(b) $\hat{u}$ dispari

(c) $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$

(d) $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$

(ii) Calcolare $\hat{u}$.

(iii) Per quelle tra le proprietà sopra per cui non era possibile stabilire a priori se erano vere o false, stabilire a posteriori (ovvero usando l'espressione esplicita di $\hat{u}$) se lo sono.

Soluzione.
(i)

(a) vera a priori (perché u è pari e reale e quindi $\hat{u}$ è pari e reale)

(b) falsa a priori (perché u è pari e reale e quindi $\hat{u}$ è pari e reale)

(c) impossibile da stabilire a priori se vera o falsa (perché in generale la trasformata di una funzione $L^1(\mathbb{R})$ può essere o no in $L^1(\mathbb{R})$)

(d) vera a priori (perché $u \in L^2(\mathbb{R})$ e in generale la trasformata di una funzione $L^2(\mathbb{R})$ appartiene sempre a $L^2(\mathbb{R})$)

(ii) Poiché si ha $u'(x) = -\chi_{(0,1)} + \chi_{(-1,0)}$, ricordando che $i\xi\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u')$, ricaviamo

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(u')}{i\xi} \,.$$

La trasformata di una funzione caratteristica è data da:

$$\mathcal{F}(\chi_{(a,b)}) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i\frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

da cui ricaviamo

$$\mathcal{F}(u') = 2i\frac{1 - \cos\xi}{\xi} \,.$$

e di conseguenza

$$\mathcal{F}(u) = 2\frac{1 - \cos\xi}{\xi^2} \,.$$

(iii) Si ha che la funzione $\hat{u}$ è limitata vicino a $\xi = 0$ (poiché $\cos\xi = 1 - \xi^2/2 + o(\xi^2)$), ed è integrabile in un intorno di $\pm\infty$ (poiché $\hat{u}$ è controllata in modulo da una costante per $\frac{1}{\xi^2}$). Quindi $\hat{u}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.