Funzioni di più variabili (3)

1) Verificare che l'equazione

$$e^{xy} - (1+x)y^2 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = 1$.
Tracciare un grafico qualitativo della funzione nell'intorno dell'origine.

2) Non esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e iniettiva.

3) Sia

$$g(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4$$

a) Trovare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sull'insieme

$$E \equiv \big\{(x,y) \,\big|\, g(x,y) = 0\big\}$$

.

b) Si consideri la trasformazione $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y) = (u,v)$ definita da

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$$

Scrivere la matrice Jacobiana della trasformazione; determinare la trasformazione inversa $\mathbf{T}^{-1}$. Calcolare $g(\mathbf{T}^{-1}(u,v))$ e descrivere l'insieme $\mathbf{T}(E)$ (immagine della trasformazione $\mathbf{T}$ ristretta ad E) nel piano delle variabili (u,v).

4) Si consideri la trasformazione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ definita da:

$$f_1(x,y) = x^2 - y^2, \quad f_2(x,y) = 2xy$$

Trovare in quali punti la trasformazione verifica le ipotesi del teorema di inversione locale. Verificare che la trasformazione *non* è invertibile in $\mathbb{R}^2$. Determinare l'immagine di $\mathbf{f}$.

Soluzioni

1) la funzione
$$f(x,y) = e^{xy} - (1+x)y^2$$
è di classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$) in tutto $\mathbb{R}^2$; inoltre, $f(0,1) = 0$ e $f_y(0,1) = -2 \neq 0$. Dunque, sono soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini. In un intorno dell'origine è allora definita un'unica funzione regolare $y = g(x)$, tale che $g(0) = 1$.

Per tracciare un grafico qualitativo della funzione, calcoliamo le derivate fino al secondo ordine della funzione g nel'origine. Per svolgere il calcolo, si può usare la relazione $e^{xy} - (1+x)y^2 = 0$, che è identicamente soddisfatta da $y = y(x) \equiv g(x)$ per tutti gli x di un opportuno intervallo. Derivando con la regola di derivazione delle funzioni composte si ottiene:

$$\big(y + xy'\big)e^{xy} - y^2 - 2(1+x)yy' = 0$$

Ponendo nell'equazione $x = 0, \quad y(0) = 1$ si trova il valore $y'(0) = 0$; dunque, l'origine è punto stazionario per la funzone implicita. Lo stesso risultato si può ricavare dal teorema del Dini :
$$g'(0) = -\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)} = -\frac{0}{-2} = 0$$
Derivando una seconda volta (sempre considerando $y = y(x)$):

$$\big[(y + xy')^2 + 2y' + xy''\big]e^{xy} - 4yy' - 2(1+x)\big[(y')^2 + yy''\big] = 0$$

Sostituendo rispettivamente

$$x = 0, \quad y = y(0) = 1, \quad y' = y'(0) = 0,$$

si ricava il valore
$$y''(0) = 1/2$$
Lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nell'intorno dell'origine è allora:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

da cui si può dedurre l'andamento della funzione implicita in un intorno dell'origine.

2) Per assurdo, se f è iniettiva non può essere costante; quindi, essendo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ esiste almeno un punto (x_0, y_0) in cui $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Per il teorema della funzione implicita, esiste allora una funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di x_0 (o una funzione $x = x(y)$ definita in un intorno di y_0) tale che $f(x, y(x)) = f(x_0, y_0)$ ($f(x(y), y) = f(x_0, y_0)$). In ogni caso, risulta che f ha un valore costante ($= f(x_0, y_0)$) lungo una curva in $\mathbb{R}^2$ e dunque non può essere iniettiva.

3)

a) Cerchiamo i punti di estremo tra i punti stazionari della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4)$$

Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda(6x - 2y) = 0 \\ 2y - \lambda(6y - 2x) = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che una soluzione (x, y, λ) deve avere tutte le componenti diverse da zero. Possiamo allora eliminare λ dalle prime due equazioni e ricavare la relazione

$$x^2 = y^2$$

Sostituendo $y = x$ e $y = -x$ nella terza equazione abbiamo, rispettivamente,

$$4x^2 - 4 = 0, \qquad \text{e} \qquad 8x^2 - 4 = 0$$

Troviamo quindi quattro punti critici vincolati

$$(1,1), \quad (-1,-1), \quad (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), \quad (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

La funzione f assume il valore massimo $(= 2)$ nei punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ e valore minimo $(= 1)$ in $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

b) La trasformazione è lineare. La matrice Jacobiana è

$$\mathbf{J_T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante $= -1$. Quindi la trasformazione è invertibile (globalmente). Ricavando (x, y) in funzione di (u, v) troviamo $\mathbf{T^{-1}}(u,v) = (x,y)$ dove

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v) \end{cases}$$

(osservare che $\mathbf{T^{-1}} = \mathbf{T}$). Sostituendo nell'espressione di $g(x,y)$ otteniamo

$$g(\mathbf{T}^{-1}(u,v)) = 4\Big(\frac{u^2}{2} + v^2 - 1\Big)$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(E) &= \{\mathbf{T}(x,y) \,|\, g(x,y) = 0\} \\ &= \{(u,v) \,|\, g(\mathbf{T}^{-1}(u,v)) = 0\} = \{(u,v) \,|\, u^2/2 + v^2 - 1 = 0\} \end{aligned}$$

Si tratta di un'ellisse con semiasse maggiore di lunghezza $\sqrt{2}$ e semiasse minore di lunghezza 1.

4) $\mathbf{f}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e $\det\big(\mathbf{J_f}(x,y)\big) = 4(x^2 + y^2)$. Le ipotesi del teorema di inversione locale sono soddisfatte per $(x,y) \neq (0,0)$; dunque, la trasformazione è invertibile in un intorno di ogni punto *diverso* dall'origine. Osservando poi che $\mathbf{f}(-x,-y) = \mathbf{f}(x,y)$, si deduce che la trasformazione *non* è iniettiva in *qualunque* intorno dell'origine (e quindi nemmeno in $\mathbb{R}^2$).

Infine, identificando $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con la variabile complessa $z = x + iy$, si vede che $f_1(x,y) + if_2(x,y) = z^2$. Dunque, l'immagine di $\mathbf{f}$ è tutto $\mathbb{R}^2$.