Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2008/2009
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
II Appello di Analisi Matematica D (1-7-09) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Stabilire, giustificando la risposta, quali di queste funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)(= f(x+iy))$. Nei casi affermativi, determinare esplicitamente l'espressione di una tale funzione f in termini della variabile complessa z.

i. $u(x, y) = \sin x\,(1 + y^2)$

ii. $u(x, y) = \sin x\,(e^y)$

iii. $u(x, y) = \sin x\,(1 - \cos y)$.

La sola funzione u che soddisfa la condizione richiesta è quella al punto ii. in quanto è l'unica tra le tre funzioni ad essere armonica (ovvero soddisfa $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$).

Per le condizioni di Cauchy Riemann, se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è una funzione olomorfa con parte reale u, si ha

$$v_y = u_x = (\cos x)e^y \qquad v_x = -u_y = -(\sin x)e^y \ .$$

Dalla prima di queste equazioni, si ricava $v(x, y) = (\cos x)e^y + h(x)$, e imponendo la seconda equazione si trova $h = costante$.

Una funzione olomorfa $f(x + iy) = f(z)$ avante parte reale u è data quindi da

$$f(x + iy) = u(x, y) + i(\cos x)e^y = e^y(\sin x + i\cos x) = ie^y(\cos x - i\sin x) = ie^y e^{-ix} = ie^{-i(x+iy)} = ie^{-iz} \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

1. Dimostrare che
$$\|f\|_* := \max_{x\in[0,1]} |(1+x^2)f(x)|$$
definisce su $C^0([0,1])$ una norma equivalente alla norma del massimo.
2. Dimostrare che, in uno spazio di Hilbert H con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, se due successioni x_n e y_n convergono rispettivamente a x e y, si ha $\lim_n(x_n, y_n) = (x, y)$.

1. Poiché $1 + x^2 \le 2 \ \ \forall\, x \in [0,1]$, si ha $\|f\|_* \le 2\|f\|_\infty$.
Viceversa, poiché $(1+x^2)^{-1} \le 1 \ \ \forall\, x \in [0,1]$, si ha

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \big|(1+x^2)\frac{f(x)}{(1+x^2)}\big| \le \|f\|_* \ .$$

Quindi $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme equivalenti.

2. Per la linearità del prodotto scalare e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, si ha

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| =: I + II \ .$$

Il primo termine I è infinitesimo in quanto per ipotesi $y_n \to y$ e la successione x_n resta limitata in norma essendo convergente.
Similmente il secondo termine II è infinitesimo in quanto per ipotesi $x_n \to x$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Sia

$$u(x) := |x|e^{-|x|} \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

1. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi)$ di u.
2. Stabilire, motivando la risposta, se u può essere ricostruita a partire da $\hat{u}$ tramite la formula di inversione.

1. Utilizzando a definizione di Fourier trasformata, ed essendo u una funzione pari, si ha

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}|x|e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\cos(\xi x)e^{-x}x\,dx \\ &= \int_0^{+\infty}(e^{i\xi x}+e^{-i\xi x})e^{-x}x\,dx = \int_0^{+\infty}(e^{(-1+i\xi)x}+e^{(-1-i\xi)x})x\,dx\end{aligned} \ .$$

Mediante un'integrazione per parti, si ottiene quindi

$$\hat{u}(\xi) = 2\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \ .$$

2. Poiché $\hat{u}$ è infinitesima di ordine 2 per $|\xi| \to +\infty$, essa appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ (come anche u). È pertanto possibile applicare la formula di inversione per riottenere u a partire da $\hat{u}$.