EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

15-4-2021

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Per determinare l'int. generale si deve determinare prima l'int. generale della omogenea associata: $ay'' + by' + cy = 0$

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Determinato l'int. gen. della omogenea si cerca un integrale particolare $y_p(t)$ applicando il METODO DI SOMIGLIANZA.

Tale metodo si applica solo in alcuni casi

1) $f(t) = P_n(t)$

$$y_p = \begin{cases} Q_n(t) & \text{se } \lambda = 0 \text{ non è sol. di } P(\lambda) \\ t\,Q_n(t) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è sol semplice di } P(\lambda) \\ t^2 Q_n(t) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è sol. doppia di } P(\lambda). \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.

Determinare l'int. generale dell'eq. $y'' - 4y = t - 1$ e determinare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

SOL. $y'' - 4y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 4$ $\qquad P(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm 2$ $(\Delta > 0)$

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerco una sol. particolare che "somigli" a un polinomio di primo grado : $y_p(t) = at + b$

$$y_p = at + b$$
$$y_p' = a$$
$$y_p'' = 0$$

e sostituisco nell'equazione:

$$y_p'' - 4y_p = t - 1$$
$$0 - 4(at+b) = t - 1$$
$$-4at - 4b = 1 \cdot t - 1$$

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ -4b = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1/4 \end{cases}$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

Int. generale: $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

Problema di Cauchy:

$$1 = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} \implies c_1 + c_2 = \frac{3}{4}$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}$$

$$0 = y'(0) = 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{4} \implies c_1 - c_2 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{8} \end{cases} \to \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \\ 2c_1 = \frac{7}{8} \end{cases} \to \begin{cases} c_2 = 5/16 \\ c_1 = \frac{7}{16} \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{7}{16} e^{2t} + \frac{5}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

2) $f(t) = A e^{\alpha t}$

$$y_p(t) = \begin{cases} k e^{\alpha t} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ non è sol. di } P(\lambda) \\ k t e^{\alpha t} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è sol. semplice di } P(\lambda) \\ k t^2 e^{\alpha t} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è sol. doppia di } P(\lambda) \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Determinare l'int. generale dell'eq. $y'' - 10y' + 26y = -5e^{5x} + 26x$

SOL.

OMOGENEA ASSOCIATA: $y'' - 10y' + 26y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$$

$$P(\lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-26} =$$

$$= 5 \pm 1 \cdot i \qquad (\Delta < 0)$$

$$y_0(x) = e^{5x}\left(c_1 \cos 1 \cdot x + c_2 \,\text{sen}\, 1 \cdot x\right)$$

SOL. PARTICOLARE:

$$f(x) = \underbrace{-5e^{5x}}_{f_1} + \underbrace{26x}_{f_2}$$

$$y_p(x) = ke^{5x} + ax + b$$

$$y_p'(x) = 5ke^{5x} + a$$

$$y_p''(x) = 25ke^{5x}$$

Sostituisco in $y'' - 10y' + 26y = -5e^{5x} + 26x$

$$25ke^{5x} - 10(5ke^{5x} + a) + 26(ke^{5x} + ax + b) = -5e^{5x} + 26x$$

$$e^{5x}(\underbrace{25k - 50k + 26k}_{k}) + 26ax - 10a + 26b = -5e^{5x} + 26x + 0$$

$$\begin{cases} k = -5 \\ 26a = 26 \\ -10a + 26b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ a = 1 \\ b = \frac{5}{13} \end{cases} \qquad y_p = -5e^{5x} + x + \frac{5}{13}$$

$$y(x) = e^{5x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - 5e^{5x} + x + \frac{5}{13}.$$

3) $f(t) = A\cos\beta t\,, \quad B \operatorname{sen}\beta t\,, \quad A\cos\beta t + B\operatorname{sen}\beta t$

$$y_p(t) = \begin{cases} h\cos\beta t + k\operatorname{sen}\beta t & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è sol. di } P(\lambda) \\ t(h\cos\beta t + k\operatorname{sen}\beta t) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è sol. di } P(\lambda). \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. Si consideri l'eq. diff.

$$y'' + 6y' + 9y = -6\operatorname{sen} 3t$$

1) Trovare l'int. generale dell'eq. Esistono soluzioni periodiche?

2) Determinare la sol. che soddisfa le condizioni $y(0) = y'(0) = 0$ e scriverne lo sviluppo

di Mc Laurin al terzo ordine.

SOL.

1) OMOGENEA: $\lambda^2+6\lambda+9=0 \qquad (\lambda+3)^2=0 \qquad \lambda=-3$

$(\Delta=0)$

$$y_0(t)=c_1e^{-3t}+c_2\,t\,e^{-3t}$$

PARTICOLARE: $y_p(t)=h\cos 3t+k\,\mathrm{sen}\,3t$

$y_p'(t)=-3h\,\mathrm{sen}\,3t+3k\cos 3t$

$y_p''(t)=-9h\cos 3t-9k\,\mathrm{sen}\,3t$

Sostituisco in $y''+6y'+9y=-6\,\mathrm{sen}\,3t$

$$\cancel{-9h\cos 3t}\,\cancel{-9k\,\mathrm{sen}\,3t}-18h\,\mathrm{sen}\,3t+18k\cos 3t\,\cancel{+9h\cos 3t}\,\cancel{+9k\,\mathrm{sen}\,3t}$$

$$=-6\,\mathrm{sen}\,3t+0\cos 3t$$

$$-18h\,\text{sen}\,3t + 18k\cos 3t = -6\,\text{sen}\,3t + 0\cos 3t$$

$$\begin{cases} -18h = -6 & \longrightarrow \quad h = 1/3 \\ 18k = 0 & \longrightarrow \quad k = 0 \end{cases}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{3}\cos 3t.$$

Int generale: $\quad y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \frac{1}{3}\cos 3t.$

C'è una sol. periodica per $c_1 = c_2 = 0$.

2)

$$y(t) = \sum_{n=0}^{3} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} t^n = \cancel{y(0)} + \cancel{y'(0)t} + \cancel{\frac{y''(0)}{2}} t^2 + \frac{y'''(0)}{6} t^3$$

$$+ o(t^3).$$

$$y'' + 6y' + 9y = -6\,\text{sen}\,3t$$

$$y'' = -6y' - 9y - 6\,\text{sen}\,3t$$

$$y''(0) = -6y'(0) - 9y(0) - 6\cdot \text{sen}\,0 \quad = 0$$

$$y''' = -6y'' - 9y' - 18\cos 3t$$

$$y'''(0) = -6y''(0) - 9y'(0) - 18\cdot\cos 0 \quad = -18.$$

$$y(t) = -\frac{18}{6}t^3 + o(t^3) = -3t^3 + o(t^3).$$

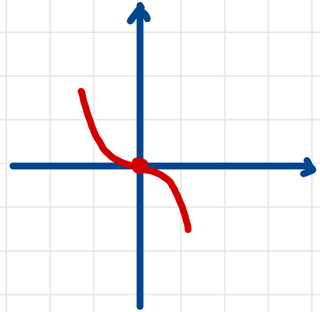
NOTA Domande alternative: tracciare un grafico locale della soluzione intorno a $t = 0$.

$y(0) = 0 \longrightarrow$ passa per $(0;0)$

$y'(0) = 0 \longrightarrow$ tg orizz. — massimo / minimo / flesso tg. oriz. asc. / " " " disc.

$y''(0) = 0$

$y'''(0) = -18$



ESERCIZIO 4. Trovare per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'int. generale di $y'' + ky = 1$

SOL.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + k \qquad P(\lambda) = 0 \qquad \lambda^2 = -k$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-k} & \text{se } k < 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \\ \pm i\sqrt{k} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$k < 0 \longrightarrow y_0(t) = c_1 e^{\sqrt{-k}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{-k}\,t}$$

$k = 0 \rightarrow \quad y_0(t) = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} = c_1 + c_2 t$

$k > 0 \rightarrow \quad y_0(t) = \cancel{e^{0t}}\left(c_1 \cos\sqrt{k}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{k}t\right)$

Sol particolare : $\quad y_p(t) = a \qquad y_p'(t) = 0$

$y_p''(t) = 0$

Sostituisco in $\quad y'' + ky = 1 \rightarrow 0 + ka = 1$

$ka = 1 \rightarrow a = \frac{1}{k} \quad (\underline{k \neq 0})$

Se $k \neq 0$ l'int. gen. è :

$k > 0 : \quad y(t) = c_1 \cos\sqrt{k}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{k}t + \frac{1}{k}$

$k < 0 : \quad y(t) = c_1 e^{\sqrt{-k}t} + c_2 e^{-\sqrt{-k}t} + \frac{1}{k}$

$k = 0$ l'eq. è $\quad y'' = 1 \qquad P(\lambda) = \lambda^2$

$\lambda = 0$ è radice doppia di $P(\lambda)$

$y_p(t) = at^2 \qquad y_p'(t) = 2at \qquad y_p'' = 2a$

sostituisco in $y'' = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2$$

L'int. generale nel caso $k = 0$ è

$$y(t) = c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2$$

oss.

$y'' = 1 \qquad y' = \int dt = t + c_2$

$$y = \int (t + c_2)\, dt = \frac{1}{2}t^2 + c_2 t + c_1$$

ESERCIZIO 5. (METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

Determinare l'integrale generale dell'eq.

$$y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x} = f(x)$$

SOL.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \qquad P(\lambda) = 0 \iff \lambda = -1. \quad (\Delta = 0)$$

$$z_1(x) = e^{-x} \qquad z_2(x) = x e^{-x}$$

$$y(x) = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, x e^{-x}$$

$$= c_1 z_1 + c_2 z_2$$

$$\begin{cases} c_1' z_1 + c_2' z_2 = 0 \\ c_1' z_1' + c_2' z_2' = f = \dfrac{\log x}{e^x} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix}}_{W} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix} \qquad W^{-1} = \frac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \begin{bmatrix} z_2' & -z_2 \\ -z_1' & z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \begin{bmatrix} z_2' & -z_2 \\ -z_1' & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-z_2 f}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \\[2ex] \dfrac{z_1 f}{z_1 z_2' - z_1' z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix}$$

$$z_1(x) = e^{-x} \qquad z_2(x) = x e^{-x}$$

$$z_1'(x) = -e^{-x} \qquad z_2'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f(x) = e^{-x} \log x$$

$$c_1'(x) = \frac{-xe^{-x} \cdot e^{-x}\log x}{e^{-2x}(1-x) + xe^{-2x}} = \frac{\cancel{e^{-2x}} \cdot (-x\log x)}{\cancel{e^{-2x}}(1 \cancel{-x} \cancel{+x})} =$$

$$= -x\log x$$

$$c_1'(x) = -x\log x \longrightarrow$$

$$c_1(x) = -\int x\log x\, dx = -\left(\frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + k_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\cancel{e^{-x}} \cdot \cancel{e^{-x}}\log x}{\cancel{e^{-2x}}} = \log x$$

$$c_2(x) = \int \log x\, dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + k_2$$

L'int. generale è:

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + k_1\right)e^{-x} + \left(x\log x - x + k_2\right)x e^{-x}$$

EQUAZIONI DI EULERO

$$x^2 y'' + a x y' + b y = f(x)$$

si svolgono ponendo $x = e^t$ se $x > 0$

$x = -e^t$ se $x < 0$

ESERCIZIO 6. Risolvere l'eq. $x^2 y'' + x y' - y = 1$ con $x > 0$.

SOL.

$x = e^t$ $\quad \cdot\, u(t) = y(e^t)$ $\quad u'(t) = e^t \cdot y'(e^t)$

$$\boxed{y'(e^t)} = \frac{u'(t)}{e^t}$$

- $u''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$

$$e^{2t} y''(e^t) = u''(t) - e^t \boxed{y'(e^t)} = u''(t) - \cancel{e^t} \cdot \frac{u'(t)}{\cancel{e^t}}$$

$$y''(e^t) = \frac{u''(t) - u'(t)}{e^{2t}}$$

Sostituisco nell' equazione $x^2 y'' + x y' - y = 1$
$(x = e^t)$

$$\cancel{e^{2t}} \cdot \frac{u'' - u'}{\cancel{e^{2t}}} + \cancel{e^t} \cdot \frac{u'}{\cancel{e^t}} - u = 1$$

$$u'' - \cancel{u'} + \cancel{u'} - u = 1$$

$$u'' - u = 1$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$$

$$u_0(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$$u_p(t) = a \qquad u_p' = u_p'' = 0$$

$$-a = 1 \rightarrow a = -1$$

$$u(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - 1 \qquad e^{t} = x$$

$$\boxed{y(x) = c_1 \underline{x} + c_2 \underline{x^{-1}} - 1}$$

oss. Le soluzioni di una eq. di Eulero sono sempre combinazioni lineari di potenze di x.

$$y = x^{\alpha_1} \qquad y = x^{\alpha_2}$$

ESERCIZIO 7. Risolvere l'eq. $y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ con $x > 0$.

SOL.

$$x^2 y'' - 4x y' + y = 0$$

$$y = x^\alpha \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad y'' = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}$$

$$x^2 \cdot \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} - 4x \cdot \alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) x^\alpha - 4\alpha x^\alpha + x^\alpha = 0$$

$$x^\alpha (\alpha^2 - \alpha - 4\alpha + 1) = 0$$

$$x^\alpha (\alpha^2 - 5\alpha + 1) = 0 \iff \alpha_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2}}$$

ESERCIZIO 8. Sia data l'eq. differenziale lineare (*) $y'' + \frac{2}{x} y' - y = 0$ con $x > 0$.

1) Posto $y = \frac{1}{x} u(x)$ $u \in C^2(0, +\infty)$ determinare l'eq. diff. a coeff. costanti che soddisfa la funzione $u(x)$.

2) Trovare l'int. generale di (*).

SOL.

1) $y = \frac{1}{x} u$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{x^2} u + \frac{1}{x} u'$

$$y'' = \frac{2}{x^3} u - \frac{1}{x^2} u' - \frac{1}{x^2} u' + \frac{1}{x} u'' =$$

$$= \frac{2}{x^3} u - \frac{2}{x^2} u' + \frac{1}{x} u''$$

Sostituisco in (*):

$$\frac{2}{x^3}u - \frac{2}{x^2}u' + \frac{1}{x}u'' + \frac{2}{x}\left(-\frac{1}{x^2}u + \frac{1}{x}u'\right) - \frac{1}{x}u = 0$$

$$\cancel{\frac{2}{x^3}u} - \cancel{\frac{2}{x^2}u'} + \frac{1}{x}u'' - \cancel{\frac{2}{x^3}u} + \cancel{\frac{2}{x^2}u'} - \frac{1}{x}u = 0$$

$$\frac{1}{x}\cdot\left(u'' - u\right) = 0 \qquad u'' - u = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1 \qquad u = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

2) $$y(x) = \frac{1}{x}u(x) = \underline{\frac{1}{x}\left(c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}\right)}$$