Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Preappello di Analisi III, 30 gennaio 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (12 punti)
Si consideri la funzione $u(x) := (1 - |x|)_+ = \max\{1 - |x|, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Stabilire a priori, giustificando la risposta, quali delle seguenti proprietà possiede la sua trasformata di Fourier $\hat{u}$.

(a) pari
(b) reale
(c) dispari
(d) puramente immaginaria

(ii) Calcolare $\hat{u}$, e verificare che ha le proprietà stabilite al punto precedente.

(iii) Calcolare $\hat{\hat{u}}$.

Soluzione.
(i) Poiché u è pari e reale, anche $\hat{u}$ è pari e reale.
(ii) Per definizione si ha

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - |x|) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-1}^{0} (1 + x) e^{-i\xi x}\, dx + \int_{0}^{1} (1 - x) e^{-i\xi x}\, dx\,,$$

da cui con semplici calcoli (integrando per parti) si ottiene

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{\xi^2}\,.$$

Si tratta chiaramente di una funzione pari, che è anche reale in quanto si verifica facilmente che

$$\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2}\Big(\sin\frac{\xi}{2}\Big)^2\,.$$

(iii) Poiché $u \in L^2(\mathbb{R})$, vale la formula di inversione, e pertanto (tenuto conto che u è pari)

$$\hat{\hat{u}} = 2\pi u = 2\pi(1 - |x|)_+\,.$$

ESERCIZIO 2. (12 punti)
Si consideri il seguente problema al contorno in dimensione 1:

$$\begin{cases} -u'' + 2(\sin^2 x)u' + 3e^x u = e^{-x^2} & 0 < x < L \\ u(0) = 0, u'(L) = \beta\,. \end{cases}$$

(i) Determinare la formulazione variazionale.

(ii) Dimostrare esistenza e unicità di una soluzione debole.

Soluzione.
(i) Sia $V = \{v \in H^!(0,L) : v(0) = 0\}$, dotato della norma

$$\|v\|_V^2 = \|v\|_{L^2(0,L)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,L)}^2;$$

moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $v \in V$ e integrando su $(0,L)$, otteniamo

$$\underbrace{\int_0^L (u'v') + 2\int_0^L (\sin^2 x\ u'v) + 3\int_0^L (e^x\ uv)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^L (e^{-x^2}v) + \beta v(L)}_{F(v)}.$$

(ii) Per ottenere esistenza e unicità di una soluzione debole, basta applicare il Teorema di Lax-Milagran. Verifichiamo che le ipotesi sono soddisfatte. Chiaramente B è una forma bilineare e F è un funzionale lineare.
Per quanto riguarda la limitatezza di F, ricordando che

$$v \in H^1(0,L) \Rightarrow |v(x)| \le C^*(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2}),$$

si ha:

$$|F(v)| \le \|v\|_{L^2} + |\beta| C^*(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2}) \le (1 + 2|\beta|C^*)\,\|v\|_V\,.$$

(poiché $\|v\|_{L^2} \le \|v\|_V$ e $\|v'\|_{L^2} \le \|v\|_V$)
Per quanto riguarda la continuità di B si ha:

$$|B(u,v)| \le \|u'\|_{L^2}\,\|v'\|_{L^2} + 2\,\|u'\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + 3e^L\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} \le 3(1+e^L)\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,,$$

Infine, per quanto riguarda la coercività di B, osservato che

$$2\int_0^L (\sin^2 x\ u'u) = \int_0^L [(\sin^2 x)(\tfrac{d}{dx}u^2)] = [\sin^2 x u^2(x)]_0^L - \int_0^L [\sin(2x)u^2]\,,$$

si ha

$$B(u,u) = \int_0^L (u')^2 + \sin^2(L)u^2(L) + \int_0^L [(3e^x - \sin 2x)u^2] \ge \|u'\|_{L^2}^2 + 2\,\|u\|_{L^2}^2 \ge \|u\|_V^2\,.$$

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

(i) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel per serie di Fourier in spazi di Hilbert.

(ii) Enunciare la formula di D'Alembert per la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante.