1.

Trovare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$$

nell'insieme

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}.$$

Discutere gli estremi di f nell'insieme $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ (chiusura del complementare di D).

2.

a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = \frac{1+y^2}{2\sqrt{t}}$$

e determinare la soluzione $\phi(t)$, che soddisfa la condizione $\phi(1) = 0$.
Specificare l' intervallo massimale di definizione della soluzione ϕ.

b) Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = 4 - 4\sin(2t)$$

3.

a) Sia Σ la superficie cartesiana di equazione

$$z = 1 - xy\,, \qquad\qquad (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]\,,$$

orientata in modo che la normale punti verso l'alto.
Trovare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

b) Calcolare il volume della regione di spazio sotto la superficie di equazione $z = 1 - y^2$ e sopra la superficie di equazione $z = x^2 - 1$.

4.

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n\,.$$

Calcolare la somma $f(x)$ della serie. (Suggerimento: calcolare una primitiva di f integrando la serie termine a termine).

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è continua e D è un insieme chiuso e limitato (compatto), dunque f assume massimo e minimo in D per il teorema di Weierstrass. Calcolando il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (4x - 2y)\,\mathbf{i} - (2x - 2y)\,\mathbf{j}\,,$$

si vede che l'unico punto critico ($\nabla f = \mathbf{0}$) è l'origine $(0,0)$. Derivate seconde:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 4\,, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -2 \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2\,.$$

Poiché in ogni punto $\det H_f(x,y) = 8 - 4 = 4 > 0$ e $\partial_{xx} f > 0$, la matrice Hessiana di f è definita positiva.
Dunque l'origine è un punto di minimo, con $f(0,0) = 0$.
Il massimo di f deve allora essere raggiunto sulla frontiera ∂D, ovvero sull'ellisse di equazione

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\,.$$

Parametrizzando l'ellisse con le equazioni

$$x = \cos t\,, \quad y = \sqrt{2}\sin t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

si ottiene

$$f(\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2 - 2\sqrt{2}\cos t \sin t = 2 - \sqrt{2}\sin(2t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Si trovano due punti di massimo $P_1(-\sqrt{2}/2, 1)$, $P_2(\sqrt{2}/2, -1)$, dove $f(P_1) = f(P_2) = 2 + \sqrt{2}$.
In alternativa, tali punti si trovano tra i punti stazionari della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x^2 - 2xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2/2 - 1)$$

.

b) poiché $f(x,y)$ è una forma quadratica definita positiva, si vede che all'esterno dell'ellisse f non è limitata superiormente (quindi non esiste il massimo) ma è limitata dal basso. Non essendoci punti critici di f in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ il minimo di f in $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ si troverà sulla frontiera, cioè sull'ellisse. Usando ancora la parametrizzazione si trovano i due punti $P_3(\sqrt{2}/2, 1)$, $P_4(-\sqrt{2}/2, -1)$, dove $f(P_3) = f(P_4) = 2 - \sqrt{2}$.

2.

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti, per cui tutte le soluzioni sono date (in forma implicita) dalla formula

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt + C\,,$$

Calcolando gli integrali si ottiene

$$\arctan y = \sqrt{t} + C\,.$$

Sostituendo i valori $t = 1$, $y = 0$, si determina $C = -1$. La soluzione cercata è allora

$$\phi(t) = \tan(\sqrt{t} - 1)\,.$$

L'intervallo di definizione si ricava con la seguente osservazione: il più grande intervallo che contiene il punto $t = 1$ e in cui ϕ è di classe C^1 è l'intersezione

$$\{t > 0\} \cap \{|\sqrt{t} - 1| < \pi/2\}\,.$$

Risolvendo le disequazioni si trova

$$0 < t < (1 + \pi/2)^2\,.$$

(b) L'equazione omogenea associata

$$z'' - 4z = 0\,,$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 4 = 0\,,$$

da cui le due radici reali e distinte $\lambda = \pm 2$.

L'integrale generale dell'omogenea è allora

$$z(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-2t}\,, \qquad c_1\,, c_2\, \in \mathbb{R}\,.$$

Applicando il metodo di somiglianza (e il principio di sovrapposizione) si cerca una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(t) = A + B\sin(2t) + C\cos(2t)\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene $A = -1$, $B = 1/2$, $C = 0$.

L'integrale generale dell'equazione completa è allora

$$y(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-2t} - 1 + \frac{1}{2}\sin(2t)\,,$$

definito per $t \in \mathbb{R}$.

3.

a)

$$\mathbf{n}\,dS = (y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dxdy$$

$$\mathbf{F}(x, y, 1 - xy) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + (1 - xy)^2\,\mathbf{k}$$

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[x^2y + xy^2 + (1 - xy)^2\right]dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[x^2y + xy^2 + 1 - 2xy + x^2y^2\right]dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(1 + x^2y^2\right)dxdy$$

(gli integrali dei termini con potenze dispari di x o di y si annullano per ragioni di simmetria). Infine

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(1 + x^2y^2\right)dxdy = 4 + \left(\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^2\,dy\right) = 4 + (2/3)^2 = 40/9\,.$$

b)

Detta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la regione considerata, nei punti di Ω devono valere le disuguaglianze

$$x^2 - 1 \le z \le 1 - y^2\,.$$

In particolare,

$$x^2 + y^2 \le 2\,.$$

Indicando con $D \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$, il volume della regione è allora

$$|\Omega| = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D\left(\int_{x^2-1}^{1-y^2} dz\right)dxdy = \int\int_D (2 - x^2 - y^2)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\rho\,d\rho d\theta = 2\pi\left[\rho^2 - \rho^4/4\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\,.$$

4.

Applicando il criterio del rapporto ai coeffcienti positivi $a_n = n + 1$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1\,,$$

da cui segue $R = 1$.
La serie converge (assolutamente) per $|x + 1| < 1$, ovvero nell'intervallo $(-2, 0)$.
Agli estremi dell'intervallo la serie non converge perchè in entrambi il termine generale non tende a zero.

Integrando la serie termine a termine tra gli estremi -1 e $x \in (-2, 0)$ si ottiene l'identità

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^{n+1} = (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^{n} =$$

$$= (x+1)\,\frac{1}{1-(x+1)} = -1 - \frac{1}{x}\,.$$

Calcolando la derivata, troviamo infine

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x \in (-2, 0)\,.$$