Marco Contedini

LEZIONE 7

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

30 ottobre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Funzioni a valori reali

1. Verificare che $f(x) = \text{tg } x$ è crescente in$(-\pi/2, \pi/2)$.

2. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

3. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
a. & f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5-1}{2-x}} - \sqrt{(2x-1)^2-(x-3)^2} \\
b. & f(x) = \left(\dfrac{x+|x+1|}{|x|+x-1}\right)^{\pi} \\
c. & f(x) = \sqrt{\sin 2x + \cos x} \\
d. & f(x) = \sqrt{\log \dfrac{1-x}{x}} \\
e. & f(x) = \sqrt{|x-3|-|x-6|} \\
f. & f(x) = \log\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})
\end{array}$$

4. Verificare che $f(x) = \text{Sh } x$ e $f(x) = \text{Th } x$ sono funzioni crescenti su tutto $\mathbb{R}$.

5. Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$. Determinare $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$.

6. Determinare l'inversa delle seguenti funzioni.

$$\begin{array}{ll}
a. & f(x) = \sqrt{4-x^2} \\
b. & f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2} \\
c. & f(x) = (\log x - 1)^2 \\
g. & f(x) = \sin x + \cos x
\end{array}$$

2 Soluzioni

1. Siano $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\tan x_2 - \tan x_1 &= \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_2 \cos x_1} \\ &= \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0\end{aligned}$$

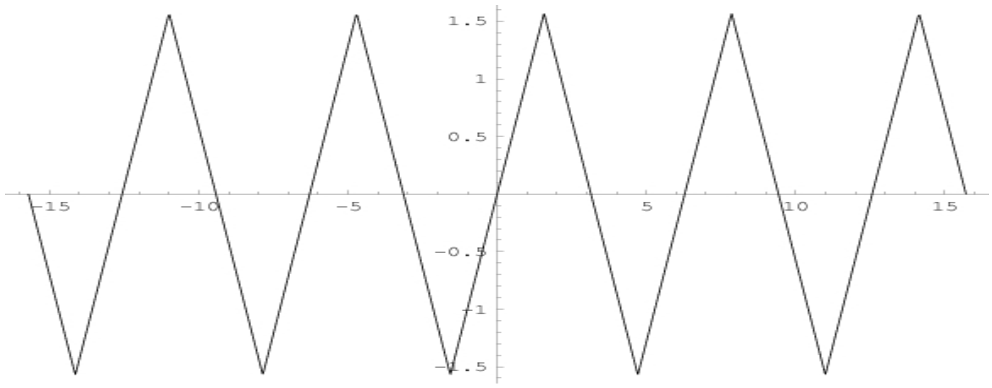
Infatti $\sin(x_2 - x_1) > 0$ perchè $0 < x_2 - x_1 < \pi$ e $\cos x_i > 0$, $i = 1, 2$, perchè $-\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2}$.

2. Sia $f(x) := \arcsin(\sin x)$.
La funzione $\sin x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ma risulta invertibile solo se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. La funzione $\arcsin x$ è definita per $x \in [-1, +1]$. La funzione composta $f(x)$ è dunque definita su tutto $\mathbb{R}$.
La funzione è periodica di periodo 2π, infatti:

$$f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ e sia $y = \sin x$. Allora: $\arcsin y = x$.
Quindi: $f(x) = x$ se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
Sia $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ e sia $y = \sin x$. Allora: $\arcsin y = \pi - x$, infatti vale anche: $y = \sin(\pi - x)$ e $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
Quindi: $f(x) = \pi - x$ se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Il grafico è rappresentato nella seguente figura:



3.

   a. $[4/3, 2)$

   b. $(-\infty, -1/2] \cup (1/2, +\infty)$

   c. $\left(-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), \qquad z \in \mathbb{Z}$

   d. $(0, 1/2]$

   e. $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$

   f. $[1, +\infty)$

4. (a) Sh x è crescente perchè somma di funzioni crescenti: $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ sono funzioni crescenti.

   (b) Siano $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Th } x_2 - \text{Th } x_1 &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} - \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} \\ &= \frac{2\left(e^{x_2 - x_1} - e^{x_1 - x_2}\right)}{e^{x_2 + x_1} + e^{x_2 - x_1} + e^{-x_2 + x_1} + e^{-x_2 - x_1}} > 0 \end{aligned}$$

   Infatti il denominatore è sempre positivo (in quanto somma di quattro termini positivi) ed anche il numeratore è positivo perchè:
   $e^{x_2 - x_1} > 1$ $(x_2 - x_1 > 0)$,
   $e^{x_1 - x_2} < 1$ $(x_1 - x_2 < 0)$.

5. $g \circ f(x) = 2^{x^2}$
   $f \circ g(x) = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$

6. Spesso f non è invertibile sull'insieme massimale di definizione, è invertibile invece $\tilde{f}$ restrizione di f su un opportuno sottoinsieme del dominio:

   a. $\tilde{f}^{-1} = \sqrt{4 - x^2}$ $\qquad \tilde{f} : [0, 2] \to [0, 2]$

   b. $\tilde{f}^{-1} = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ $\qquad \tilde{f} : [0, 1) \cup (1, +\infty) \to (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

   c. $\tilde{f}^{-1} = e^{\sqrt{x}+1}$ $\qquad \tilde{f} : [e, +\infty) \to [0, +\infty)$

   d. $\tilde{f}^{-1} = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad \tilde{f} : \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] \to \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

   Si osservi che: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.