SERIE NUMERICHE 8-4-2021

ESERCIZIO 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie e calcolarne la somma.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$

SOL.

RAGIONE DELLA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1<q<1 \text{ (CONVERGE)} \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \text{ (DIVERGE)} \\ \text{IRREGOLARE} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{25}{6}$$

la serie conv. e la sua somma è $\frac{25}{6}$.

1bis) Calcolare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^0 - \left(\frac{2}{5}\right)^1 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{5}} - 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{3} - 1 - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

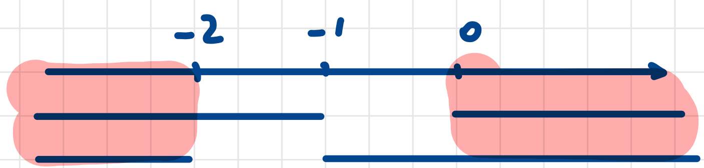
2) $\sum_{n=0}^{\infty} (\log \alpha)^n$ serie geom. di ragione $\log \alpha$.

- CONVERGE se $-1 < \log \alpha < 1 \longrightarrow e^{-1} < \alpha < e$
- DIVERGE se $\log \alpha \geq 1 \longrightarrow \alpha \geq e$
- IRREGOLARE se $\log \alpha \leq -1 \longrightarrow 0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$

↳ SOMMA: $\dfrac{1}{1-\log\alpha}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}$ converge se $-1<\dfrac{1}{1+\alpha}<1$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha}<1 \rightarrow \dfrac{-\alpha}{1+\alpha}<0 \rightarrow \alpha<-1 \vee \alpha>0 \\[2ex] \dfrac{1}{1+\alpha}>-1 \rightarrow \dfrac{2+\alpha}{1+\alpha}>0 \rightarrow \alpha<-2 \vee \alpha>-1 \end{cases}$$



$\alpha<-2 \vee \alpha>0$

SOMMA:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\alpha}}-1=\frac{1+\alpha}{\alpha}-1=\frac{1}{\alpha}$$

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$\not\Leftarrow$ NO

Infatti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche se $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

N.B. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow$ non converge.

ESERCIZIO 2. Verificare che le seguenti serie NON convergono:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = a_n$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{0^+} = +\infty \neq 0$$

$\Longrightarrow$ NON CONV.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} n \qquad \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} n =$ non esiste (non è zero!)

$\Rightarrow$ la serie non converge.

ESERCIZIO 3. Studiare il carattere delle seguenti serie:

1) (SERIE ARMONICA GENERALIZZATA)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{CONVERGE se } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{3n^2+1}{n^4+n+1}} = a_n \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ la serie PUÒ convergere

$$a_n = \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3\cancel{n^2}}{n^{\cancel{4}\,2}} = 3 \cdot \frac{1}{n^{2}} \quad 2 > 1 \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ la serie conv. per il criterio del confronto asintotico.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)}$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)} = 0$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/2}\cdot n^{1}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad 3/2 > 1 \Rightarrow \text{CONV}$$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} = 0$

$$0 < \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

la serie data converge perché converge $\sum \frac{1}{n^2}$. (CRIT. CONFRONTO)

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e\right)}_{a_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}-1} - 1\right) =$$

$$= e\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}-1}{n^2+1}} - 1\right) =$$

$$= e\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{2n-1}{n^2+1}} - 1\right)$$

$$a_n = e\left(e^{\frac{2n-1}{n^2+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e\cdot\frac{2n-1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e\cdot\frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{2n-1}{n^2+1} \to 0$$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$$= 2e\cdot\frac{1}{n^1}$$

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n\left(e^{1/n^2} - \cos\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \implies \text{DIVERGE.}$$

(CON TAYLOR)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k) \implies e^{1/n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = n\left(\cancel{1} + \frac{1}{n^2} \cancel{- 1} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n\cdot\left(\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \implies a_n \sim \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^1}$$

DIVERGE

ESERCIZIO 4 (USANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO)

Studiare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n n!}{n^n}}_{= a_n}$

N.B.: $(n+1)! = (n+1)\, n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \, \cancel{(n+1)} \, \cancel{n!}}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}} = \frac{2 n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{e}$$

Poiché $\frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$ la serie data **CONVERGE**.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^2} \longrightarrow 4 > 1$$

$\Rightarrow$ la serie data diverge.

ESERCIZIO 5. (USANDO IL CRITERIO DELLA RADICE)

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \cancel{\sqrt[n]{}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$$

$\Longrightarrow$ la serie conv. per il crit. della radice.

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{n/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ la serie conv.

3) ESAME: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^n \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \ \underline{a > 0}.$

Studiare il suo comportamento al variare di α e di a.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha a^n} = \lim_{n\to+\infty} a\, n^{\alpha/n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a \cdot e^{\frac{\alpha}{n}\ln n} = a$$

$e^{\frac{\alpha}{n}\ln n} \to 1$

- $a > 1$ DIVERGE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $a = 1$ IL CRIT. NON AIUTA
- $0 < a < 1$ CONV. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Se $a = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}}$$

- CONVERGE se $-\alpha > 1 \to \alpha < -1$
- DIVERGE se $-\alpha \leq 1 \to \alpha \geq -1$

Riassumendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n$$

- $a > 1$ diverge $\forall \alpha$
- $a = 1$ converge $\alpha < -1$
- $a = 1$ diverge $\alpha \geq -1$
- $0 < a < 1$ converge $\forall \alpha$

ESERCIZIO 6. Dopo aver verificato che la serie converge, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

SOL.

CR. RAPP.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n} = \frac{(n+1)\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}\, n} =$

$$= \frac{n+1}{n^2+2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \text{la serie}$$

conv. per il criterio del rapporto.

La serie è TELESCOPICA (una serie è tale se il suo n-esimo termine è differenza di un termine e il suo successivo):

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\, n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$s_1 = \left(1 - \frac{1}{2!}\right)$$

$$s_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \frac{1}{3!}\right)$$

$$s_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \frac{1}{4!}\right)$$

$$\vdots$$

$$s_k = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) \cancel{+} \cdots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{k!}} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$s_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

Per definizione la somma della serie è

$$S = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1.$$

SERIE A TERMINI A SEGNO ALTERNO

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

$\not\Longleftarrow$

DEF. Una serie si dice **ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE** se $\sum |a_n|$ converge.

2) CRITERIO DI LEIBNITZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \bullet\ a_n \geq 0 \\ \bullet\ a_n \text{ decrescente} \\ \bullet\ \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge.}$$

ESERCIZIO 8. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

- CONV. ASSOLUTA : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE

la serie data NON converge assolutamente.

- **CONV. SEMPLICE**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$

  - $a_n = \frac{1}{n} > 0$
  - $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente
  - $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

  $\Bigg\}\ \overset{\text{LEIBNITZ}}{\Longrightarrow}$ la serie converge (semplic.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

- **CONV. ASSOLUTA**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \underbrace{(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}_{} \Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \quad \text{crit. radice}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^{\cancel{n}}}\ {\color{red}{>0}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{la serie}$$

data converge assolutamente e
quindi anche semplicemente.