Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2010/2011
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Prova parziale sul modulo di Metodi Analitici (25-1-11) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: __________________

I. ANALISI COMPLESSA

Sia k un numero naturale e sia f_k la funzione di variabile complessa

$$f_k(z) := \frac{\cosh z - 1}{z^k} \ .$$

Stabilire per quali valori di k la funzione f_k ha nel punto $z_0 = 0$:
a. una singolaritá eliminabile;
b. una singolaritá essenziale;
c. un polo semplice.
In ciascuno dei tre casi calcolare il residuo di f_k in z_0.

Soluzione. Si ha

$$\cosh z - 1 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{z^2}{2} + o(z^2) \ .$$

Pertanto

$$f_k(z) = \frac{z^{2-k}}{2} + o(z^{2-k}) \ .$$

Dunque f non esistono valori di k per i quali f ha una singolaritá essenziale, f hauna singolaritá eliminabile (con residuo nullo) se e solo se $k \leq 2$, mentre f ha un polo semplice (con residuo $\frac{1}{2}$) se e solo se $k = 3$.

II. ANALISI FUNZIONALE

1. Dare la definizione di operatore lineare continuo tra spazi vettoriali normati.
2. Dire quali dei seguenti operatori lineari sono continui. Nei casi affermativi, calcolarne la norma.
   (i) $T_1 : L^2(0,1) \ni u \mapsto \int_0^1 f u \, dx \in \mathbb{R}$, dove f é una funzione fissata in $L^2(0,1)$;
   (ii) $T_2 : L^1(\mathbb{R}) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f * u| \, dx \in \mathbb{R}$, dove f é una funzione fissata in $L^1(\mathbb{R})$; ;
   (iii) $T_3 : (C^0[0,1], \| \cdot \|_1) \ni u \mapsto \|u\|_\infty \in \mathbb{R}$;

   Soluzione.

1. Si veda uno dei testi consigliati.

2.

(i) Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$|T_1(u)| \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \ ,$$

quindi T_1 é continuo. Inoltre poiché la disuguaglianza sopra diventa un'uguaglianza per $u = f$, si ha $\|T_1\| = \|f\|_2$.

(ii) Per le note proprietá del prodotto di convoluzione, si ha

$$|T_2(u)| \leq \|f\|_1 \|u\|_1 \ ,$$

quindi T_2 é continuo. Inoltre poiché tale disuguaglianza tende a diventare un'uguaglianza per $u = \rho_n$ (successione di mollificatori), si ha $\|T_2\| = \|f\|_1$.

(iii) L'operatore lineare T_3 non é continuo: infatti é facile costruire una successione di funzioni continue che hanno tutte norma L^∞ uguale a 1 ma norma L^1 infinitesima.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Trovare tutte le soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ della seguente equazione differenziale, dove H é la funzione di Heavyside:

$$u'(x) + 3u(x) = H(x)e^{-|x|} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Supponiamo che $u \in L^1(\mathbb{R})$ sia una soluzione. Poiché il termine noto dell'equazione é in $L^1(\mathbb{R})$, dall'equazione segue che anche $u' \in L^1(\mathbb{R})$, e quindi $u \in AC(\mathbb{R})$. Pertanto, applicando all'equazione la trasformata di Fourier, si ottiene

$$i\xi\mathcal{F}(u) + 3\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(H(x)e^{-|x|}) \ .$$

Pertanto

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(H(x)e^{-|x|})}{3+i\xi} = \mathcal{F}(H(x)e^{-|x|})\mathcal{F}(H(x)e^{-3|x|})$$

e quindi

$$u(x) = H(x)e^{-3|x|} * H(x)e^{-|x|} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} & \text{se } x > 0 \ , \end{cases}$$

é l'unica soluzione in $L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione assegnata.