| Analisi matematica 2 | | 22 luglio 2014 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

**1.** Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x, y) = x \log(y + 1)$$

a) Determinare l'insieme di definizione $D$ di $f$ e provare che la funzione è differenziabile in $D$. Descrivere *l'insieme di livello zero* di $f$ e trovarne tutti i punti di accumulazione.

b) Trovare i punti critici ed eventuali estremi locali della funzione.

c) Determinare per quale valore del parametro reale $k$ la forma differenziale

$$\omega_k = x \log(y + 1)\, dx + k \frac{x^2}{y + 1}\, dy$$

è esatta in $D$. Per il valore di $k$ trovato, calcolare un potenziale di $\omega_k$.

**2.**

a) Stabilire in quali regioni del piano $(t, y)$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = \frac{1}{ty}$$

Integrare l'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(1) = -1, \qquad \psi(-1) = 1$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = t - \sin t$$

**3.** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

i) calcolare il flusso di **rot F** attraverso la parte di superficie di equazione

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

appartenente al semispazio $z \geq 0$ e orientata in modo che la componente della normale lungo l'asse $z$ sia positiva.

ii) Verificare il risultato applicando il teorema di Stokes.

Esiste in $\mathbb{R}^3$ un *potenziale vettore* per il campo $\mathbf{F}$ ?

**4.**

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\,x^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x+1)^n$$

ii) Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin(2\pi n x)$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e definisce una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, periodica e dispari. Specificare il periodo.

SOLUZIONI

**1.**

a) La funzione $f$ è definita nell'insieme

$$D = \{(x,y) \,|\, y > -1\}$$

che è aperto. La funzione ha derivate parziali

$$f_x(x,y) = \log(y+1); \quad f_y(x,y) = \frac{x}{y+1}$$

che sono funzioni continue in $D$. Dunque, $f$ è di classe $\mathcal{C}^1(D)$ ed è differenziabile in ogni punto di $D$ per la condizione sufficiente di differenziabilità.

*Insieme di livello zero :*

$$\{(x,y) \,\big|\, x\log(y+1) = 0\}$$

L'equazione ha le soluzioni $(0,y)$ con $y > -1$ e $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. L'insieme è l'unione dell'asse $x$ con la parte di asse $y$ contenuta in $D$. I punti di accumulazione sono tutti i punti dell'insieme stesso e il punto $(0,-1)$.

b) I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \log(y+1)\,\mathbf{i} + \frac{x}{y+1}\,\mathbf{j}$$

Abbiamo l'unica soluzione $x=0$, $y=0$. Poiché $f(0,0)=0$ e $f$ cambia segno in ogni intorno dell'origine, abbiamo un punto di sella. La stessa conclusione segue dal calcolo delle derivate seconde

$$g_{xx}(x,y) = 0; \quad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = \frac{1}{y+1}; \quad g_{yy}(x,y) = -\frac{x}{(y+1)^2}$$

e valutando la matrice Hessiana nell'origine.

c) La forma $\omega_k$ è di classe $\mathcal{C}^1(D)$ e $D$ è un aperto stellato; dunque, la condizione necessaria e sufficiente perchè la forma sia esatta è

$$\partial_x\Big(k\frac{x^2}{y+1}\Big) = \partial_y\Big(x\log(y+1)\Big)$$

ovvero

$$2k\frac{x}{y+1} = \frac{x}{y+1}$$

da cui si ottiene $k = 1/2$. La forma esatta

$$\omega_{1/2} = x\log(y+1)\,dx + \frac{1}{2}\frac{x^2}{y+1}\,dy$$

è il differenziale della funzione

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2\log(y+1) + C$$

con $C$ costante arbitraria.

**2a.** Il secondo membro dell'equazione è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ per $ty \neq 0$; dunque il teorema di esistenza e unicità locale vale nei 4 quadranti (aperti) del piano $(t, y)$ al di fuori degli assi.

L'equazione è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti. Integrale generale:

$$\int y\, dy = \int \frac{1}{t}\, dt + C$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \log|t| + C$$

(rinominando la costante arbitraria)

$$y^2 = 2 \log|t| + C$$

$$y = \pm\sqrt{2\log|t| + C} \qquad \left(|t| > e^{-C/2}\right)$$

La curva integrale che passa per il punto $(1, -1)$ è

$$\phi(t) = -\sqrt{2\log t + 1}$$

definita nell'intervallo $(e^{-1/2}, +\infty)$.

La curva che passa per $(-1, 1)$ è

$$\psi(t) = \sqrt{2\log(-t) + 1}$$

definita nell'intervallo $(-\infty, -e^{-1/2})$.

**2b.** Equazione omoenea associata:

$$z'' - z = 0$$

Integrale generale omogenea:

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa: si cerca nella forma

$$\psi(t) = At + B + C\cos t + D\sin t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}$$

Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t + \frac{1}{2}\sin t$$

**3.** *Calcolo del flusso del rotore:*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + (1-z)\,\mathbf{k}$$

La superficie è la porzione $\Sigma$ del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \leq 1\}$$

del piano $xy$. Si tratta di una superficie cartesiana (regolare). Con la scelta assegnata della normale abbiamo:

$$\mathbf{n}\,dS = \big(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,dxdy$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{rot}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int\!\!\int_D \big(x\,\mathbf{i} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}\big)\cdot\big(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,dxdy \\ &= \int\!\!\int_D (3x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3\cos^2\theta + \sin^2\theta)\rho^3 d\rho\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}(3\pi + \pi) = \pi\end{aligned}$$

Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è uguale alla circolazione del campo lungo il bordo della superficie percorso in senso positivo rispetto all'orientazione scelta. In questo caso, il bordo $\partial^+\Sigma$ coincide con $\partial^+ D$, ovvero con la circonferenza nel piano $xy$ parametrizzata da

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = 0, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

*Calcolo della circolazione:*

$$\int_{\partial^+ D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial^+ D} x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$$

Il campo $\mathbf{F}$ ha divergenza nulla in $\mathbb{R}^3$, dunque ammette potenziale vettore.

**4.**

i) La serie (a) è centrata in $x_0 = 1$. Il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(0, 2)$. Gli estremi sono esclusi perchè in tali punti il termine generale della serie non tende a zero.

La serie (b) è centrata nell'origine. Raggio di convergenza :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{2/n}} = 2$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$. Agli estremi $x = 1/2$ e $x = -1/2$ abbiamo rispettivamente le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

che convergono. L'intervallo di convergenza è $[-1/2, 1/2]$.

La serie (c) è centrata in $x_0 = -1$ e ha raggio di convergenza 1, per cui converge nell'intervallo $(-2, 0)$. Per $x = -2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = 0$ abbiamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Dunque l'intervallo di convergenza è $[-2, 0)$.

ii) La serie data e la serie delle derivate convergono totalmente in $\mathbb{R}$; infatti:

$$\frac{1}{n^3} |\sin(2\pi nx)| \leq \frac{1}{n^3}$$

$$\left| \frac{d}{dx} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^3} \right| = \frac{2\pi}{n^2} |\cos(2\pi nx)| \leq \frac{2\pi}{n^2}$$

ed entrambe le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad\qquad 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sono convergenti. Per il criterio di Weierstrass, sia la serie data che la serie delle derivate convergono uniformemente in $\mathbb{R}$; applicando il teorema di derivazione per serie, si conclude che la somma della serie data è una funzione continua con derivata continua. Inoltre, per ogni $n$ vale

$$\sin\big(2\pi n(-x)\big) = -\sin(2\pi nx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dunque anche la somma della serie soddisfa la stessa condizione. Infine, il periodo $T$ è uguale al periodo del primo termine $\sin(2\pi x)$, per cui $T = 1$.