Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello d'esame di Analisi Matematica III, 14 giugno 2019 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{(1+x^2)(4+x^2)}\,.$$

Soluzione. Calcoliamo in primo luogo la trasformata di $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$. Applicando il teorema dei residui, per $\xi < 0$ si ha

$$\widehat{g}(\xi) = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(g,i) + \mathrm{Res} g(2i)\big] = 2\pi i\Big[\frac{e^{\xi}}{6i} - \frac{e^{2\xi}}{12i}\Big] = \frac{\pi}{3}e^{\xi} - \frac{\pi}{6}e^{2\xi}\,.$$

Procedendo in modo analogo anche per $\xi > 0$ si ottiene

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\pi}{3}e^{-|\xi|} - \frac{\pi}{6}e^{-2|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi, per le note regole di trasformazione,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\Big[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{(1+x^2)(4+x^2)}\Big] = \frac{1}{2i}\big[\widehat{g}(\xi-1) - \widehat{g}(\xi+1)\big] = -\frac{i}{2}\Big[\frac{\pi}{3}e^{-|\xi-1|} - \frac{\pi}{6}e^{-2|\xi-1|} - \frac{\pi}{3}e^{-|\xi+1|} + \frac{\pi}{6}e^{-2|\xi+1|}\Big]\,.$$

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Calcolare il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione di funzioni $u_n(x) = \sin(nx)$.

Soluzione. Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\varphi(x)\ \,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx\,,$$

dove nella seconda uguaglianza si è integrato per parti (tenendo conto che il termine di bordo è nullo visto che φ ha supporto compatto). La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)$ converge a zero puntualmente su $\mathbb{R}$ ed è dominata dalla funzione $\varphi'(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Pertanto per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

ovvero $u_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Sia $u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$, determinare tutte le funzioni olomorfe f di cui u è la parte reale.

Soluzione. Cerchiamo $f = u + iv$ e imponiamo le condizioni di Cauchy-Riemann

$$v_y = u_x = 2ax + 2by\,, \qquad v_x = -u_y = -2bx - 2cy\,.$$

Integrando la prima delle due si ottiene

$$v(x,y) = 2axy + by^2 + \varphi(x)\,;$$

derivando rispetto a x e imponendo la seconda equazione:

$$2ay + \varphi'(x) = -2bx - 2cy\,.$$

Ricaviamo quindi $c = -a$ e $\varphi(x) = -bx^2 + k$, con k costante arbitraria.
Dunque, se $c \neq -a$, non vi sono funzioni olomorfe come richiesto. Se invece $c = -a$, si ha

$$v(x,y) = -bx^2 + 2axy + by^2 + k\,.$$

e pertanto

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2 + i[-bx^2 + 2axy + by^2 + k] \\ &= a[x^2 - y^2 + 2ixy] - ib[x^2 - y^2 + 2ixy] + ik \\ &= (a - ib)z^2 + ik\,. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di k , concludiamo che $f(z) = (a - ib)z^2 + h$, con $h \in C$ arbitrario.

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Enunciare il teorema della proiezione su un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.

Enunciare poi come cambia la caratterizzazione della proiezione nel caso particolare in cui il convesso sia un sottospazio vettoriale.

(b) Fornire un esempio, se esiste, di ciascuno dei seguenti insiemi :

(i) un convesso non chiuso in uno spazio di Hilbert di dimensione finita;

(ii) un convesso non chiuso in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita;

(iii) un sottospazio vettoriale non chiuso in uno spazio di Hilbert di dimensione finita;

(iv) un sottospazio vettoriale non chiuso in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita.

Soluzione. (a) Si veda uno dei testi consigliati.
(b)
(i) $H = \mathbb{R}$, $K = \{x > 0\}$
(ii) $H = L^2(\mathbb{R})$, $K = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$
(iii) non esiste
(iv) vale lo stesso esempio (ii) in quanto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ è un sottospazio (non chiuso) di $L^2(\mathbb{R})$.