Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Quinto appello di Metodi Analitici (30-9-15) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} .$$

Soluzione. La funzione

$$f(z) := \frac{1}{1+z^{2n}}$$

è olomorfa sul piano complesso tranne che nei punti z_j che soddisfano $z_j^{2n} = -1$, per $j = 0, 1, 2n-1$ (radici $(2n)$-esime di -1). Tra essi, cadono nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$ i punti

$$z_j = e^{i\frac{(2j+1)\pi}{2n}} \qquad j = 0, \dots, n-1 .$$

Si tratta di poli del primo ordine, con

$$\mathrm{Res}(f, z_j) = \frac{1}{2n z_j^{2n-1}} = -\frac{z_j}{2n}$$

(nell'ultima uguaglianza si è usata la relazione $z_j^{2n} = -1$). Quindi, applicando il teorema dei residui, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx \quad &= 2\pi i \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}(f, z_j) = -\frac{\pi i}{n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \\
&= -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^j = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1-e^{\frac{in\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\
&= -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} ,
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si verifica immediatamente usando l'identità $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia B la sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^N$ e sia

$$u(x) := \frac{1}{|x|}$$

(dove $|x|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^N$).

(i) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la funzione u appartiene a $L^p(B)$.

(ii) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la funzione u appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N \setminus B)$.

Soluzione.
(i) Poiché $\lim_{x \to 0} u(x) = +\infty$, si ha $u \notin L^\infty(B)$.
Per $p \in [1, +\infty)$, si ha

$$\int_B |u|^p \, dx < +\infty \text{ se e solo se } \int_0^1 \frac{1}{\rho^p} \rho^{N-1} \, d\rho < +\infty$$

il che è verificato se e solo se

$$p - N + 1 < 1 \qquad i.e.\ p < N\,.$$

(i) Poiché $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$, si ha $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B)$.
Per $p \in [1, +\infty)$, si ha

$$\int_B |u|^p \, dx < +\infty \text{ se e solo se } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^p} \rho^{N-1} \, d\rho < +\infty$$

il che è verificato se e solo se

$$p - N + 1 > 1 \qquad i.e.\ p > N\,.$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Illustrare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt in uno spazio di Hilbert.

(ii) Applicare tale procedimento per rendere un sistema ortonormale le funzioni seguenti in $L^2([-1,1])$:

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x^2\,, \qquad f_3(x) = x^3$$

Soluzione. (i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) Il primo elemento del sistema ortonormale cercato è:

$$g_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

con

$$\|f_1\|_{L^2} = \Big(\int_{-1}^{1} x^2\,dx\Big)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Tenuto conto che f_1 e f_2 sono ortogonali in $L^2([-1,1])$ (poiché $\int_{-1}^{1} f_1 f_2 = 0$ essendo $f_1 f_2$ una funzione dispari), il secondo elemento del sistema ortonormale cercato è:

$$g_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}x^2$$

con

$$\|f_2\|_{L^2} = \Big(\int_{-1}^{1} x^4\,dx\Big)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,.$$

Infine, il terzo elemento del sistema ortonormale cercato è:

$$g_3 := \frac{af_1 + bf_2 + f_3}{\|af_1 + bf_2 + f_3\|_{L^2}}\,,$$

dove i coefficienti a e b sono determinati in modo che

$$\langle af_1 + bf_2 + f_3, f_1\rangle = 0\,, \qquad \langle af_1 + bf_2 + f_3, f_2\rangle = 0\,.$$

Tenuto conto che $\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = 0$, le relazioni sopra si traducono in

$$\langle af_1 + f_3, f_1\rangle = 0\,, \qquad b = 0\,.$$

Il calcolo del coefficiente a fornisce:

$$a = -\frac{\langle f_1, f_3\rangle}{\|f_1\|_{L^2}^2} = -\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

Poiché

$$\|-\frac{3}{5}x + x^3\|_{L^2} = \sqrt{\frac{8}{175}}\,.$$

si ottiene infine

$$g_3 = \sqrt{\frac{175}{8}}\Big(-\frac{3}{5}x + x^3\Big)\,.$$