TRASFORMATA DI FOURIER

IV.1 - TRASFORMATA DI FOURIER IN L^1

Si consideri una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama ***trasformata di Fourier*** di u una nuova funzione $\hat{u}(\xi)$ definita dal seguente integrale:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Si noti che tale definizione è ben data, in quanto l'integrale esiste per ogni $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \left| e^{-i\xi x} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < +\infty$$

da cui si vede anche che la funzione $\hat{u}(\xi) \in L^\infty$ essendo limitata e in particolare $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$.

Se si considera la trasformata di Fourier come operatore da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$, ovvero $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$, la precedente disuguaglianza mostra come esso sia lineare e continuo di norma minore o uguale a 1 (in realtà la norma è proprio uguale ad 1, come si può vedere dall'esempio di pag. 4).

Osservazioni:

- Si può in maniera analoga definire la trasformata di Fourier per funzioni $u:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$
- La funzione $\hat{u}(\xi)$ ha in generale valori in $\mathbb{C}$, e quindi $\hat{u}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Infatti l'integrale che definisce la trasformata può essere riscritto nel modo seguente:
$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\left[\cos(\xi x) - i\sin(\xi x)\right] dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\cos(\xi x)\, dx - i\int_{\mathbb{R}} u(x)\sin(\xi x)\, dx$$
- Più in generale si può prendere anche la funzione u a valori complessi.

Teorema di Riemann-Lebesgue: Sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{u}$ è limitata, continua e infinitesima all'infinito.

<u>*Dimostrazione:*</u>
La limitatezza è già stata dimostrata sopra. Rimangono quindi da controllare le ultime due tesi.

- Per la continuità bisogna dimostrare che per qualsiasi successione $\{\xi_k\}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\xi_k \to \xi$, allora: $\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi_k x}dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx$
  Ma poiché la successione degli integrandi $u(x)e^{-i\xi_k x}$ converge q.o., basta applicare il teorema di Lebesgue utilizzando come dominante $|u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, essendo proprio $\left|u(x)e^{-i\xi_k x}\right| = |u(x)|$.

- L’annullamento all’infinito può essere dimostrato per una famiglia di funzioni densa in $L^1(\mathbb{R})$, come le funzioni a scalino, poiché, se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni a scalino che tende ad una funzione $u \in L^1$, allora anche $\hat{u}_n \to \hat{u}$ in L^∞. Infatti $\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^\infty} \le \|u_n - u\|_{L^1} \to 0$ per $n \to +\infty$. In particolare, se $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{u}_n = 0 \;\; \forall n, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \hat{u}_n = \hat{u}$ in $L^\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{u} = 0$

Ma essendo le funzioni a scalino tutte combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di un intervallo, ed essendo la trasformata di Fourier lineare, basta fare la dimostrazione per $\chi_{(a,b)}$.

$$u(x)=\chi_{(a,b)}(x); \quad \hat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x) e^{-i\xi x} dx = \int_a^b e^{-i\xi x} = \int_a^b \left[\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)\right] dx =$$

$$=\left[\frac{\sin(\xi x)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi x)}{\xi}\right]_a^b = \frac{\sin(\xi b)-\sin(\xi a)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi b)-\cos(\xi a)}{\xi} \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0$$

<u>*Esempi:*</u>

- $u(x)=\chi_{(a,b)}(x); \quad \hat{u}(\xi)=\dfrac{\sin(\xi b)-\sin(\xi a)}{\xi} + i \dfrac{\cos(\xi b)-\cos(\xi a)}{\xi}$, come si è appena trovato.

  Si noti in particolare che $\hat{u}(\xi) \notin L^1(\mathbb{R})$, in quanto all'infinito si comporta come ξ^{-1}.

- $$u_1(x) = e^{-x}H(x); \quad \hat{u}_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x}e^{-i\xi x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x}dx = \left[-\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{(1+i\xi)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$u_2(x) = e^{x}H(-x); \quad \hat{u}_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}^-} e^{x}e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}dx = \left[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{(1-i\xi)}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-i\xi}$$

Dalle quali, per la linearità dell'operatore di trasformata, si ottiene che:

$$\left(u_1 + u_2\right)(x) = e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}); \quad \widehat{\left(u_1 + u_2\right)}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$$

- $$u(x)=\frac{1}{1+x^2};\quad \hat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}dx=\left\langle \begin{array}{l} \xi>0:\ -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},-i\right)=\pi e^{-\xi} \\ \\ \xi<0:\ 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},i\right)=\pi e^{\xi} \end{array}\right\rangle=\pi e^{-|\xi|}$$

  Nel calcolo dell'integrale si è utilizzato il lemma di Jordan e il teorema dei residui. È interessante notare a questo punto che:

  $$u(x)=e^{-|x|};\quad \hat{u}(\xi)=\frac{2}{1+\xi^2};\quad \hat{\hat{u}}(x)=\mathcal{F}\left[\hat{u}\right](x)=2\pi e^{-|x|}=2\pi u(x)$$

  In realtà ciò non vale solo in questo caso, ma è una proprietà più generale della trasformata di Fourier che verrà trattata più avanti.

IV.2 - Proprietà della Trasformata di Fourier

Ecco alcune proprietà della trasformata di Fourier che risultano utili soprattutto per calcolare trasformate a partire da quelle di alcune funzioni note.

Sia in particolare $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

1. $v(x) = u(x-y),\ \ y \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = e^{-i\xi \bullet y}\hat{u}(\xi)$
2. $v(x) = e^{ix \bullet y}u(x),\ \ y \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - y)$
3. $v(x) = \overline{u}(x) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \overline{\hat{u}}(-\xi)$
4. $v(x) = u(A^{-1}x),\ \ A \in \mathcal{M}(n \times n) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \left|\det A\right|\hat{u}(A^T\xi)$
    - Se $A = \lambda I$: $\quad v(x) = u(x/\lambda) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \left|\lambda^n\right|\hat{u}(\lambda\xi)$
    - Se $A = -I$: $\quad v(x) = u(-x) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \hat{u}(-\xi)$

    E da quest'ultima si ricava anche che:
    - Se u è pari [e reale], allora $\hat{u}$ è pari [e reale].
    - Se u è dispari [e reale], allora $\hat{u}$ è dispari [e puramente immaginaria].

L’importanza della trasformata di Fourier è in parte però dovuta alle due proprietà che seguono, che la rendono un utile strumento per la risoluzione di equazioni differenziali.

Proprietà 1: sia $u \in L^1 \cap AC$ (ovvero $\exists u'$ $q.o.$ con $u' \in L^1$), allora $\mathcal{F}\left[u'(x)\right](\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$. Si ha inoltre che se u è derivabile k volte e tali derivate stanno in L^1, allora $\hat{u}(\xi) = o\left(\left|\xi\right|^{-k}\right)$.

Dimostrazione:

La prima parte si dimostra con un'integrazione per parti, possibile grazie all'ipotesi di assoluta continuità, infatti:

$$\mathcal{F}\left[u'(x)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} u'(x)e^{-i\xi x}dx = \lim_{L\to+\infty}\int_{-L}^{L} u'(x)e^{-i\xi x}dx = \lim_{L\to+\infty}\left[\left.\frac{u'(x)e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L} + i\xi\int_{-L}^{L} u(x)e^{-i\xi x}dx\right] =$$

$$= \cancel{\lim_{L\to+\infty}\left.\frac{u'(x)e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L}} + \lim_{L\to+\infty} i\xi\int_{-L}^{L} u(x)e^{-i\xi x}dx = i\xi\int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx = i\xi\hat{u}(\xi)$$

Per dimostrare la seconda parte, basta notare che $\xi\hat{u}(\xi)$, a parte una costante moltiplicativa, è la trasformata di Fourier di una funzione integrabile e quindi è una funzione infinitesima all'infinito. Ma se $\xi\hat{u}(\xi)$ è infinitesima all'infinito, allora $\hat{u}(\xi)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $|\xi|^{-1}$.
Se poi la funzione $u(x)$ è derivabile k volte tali derivate sono integrabili, iterando lo stesso ragionamento si ottiene che è infinitesima all'infinito $\xi^k\hat{u}(\xi)$ e quindi $\hat{u}(\xi) = o\left(|\xi|^{-k}\right)$.

Proprietà 2: siano $u, xu \in L^1$, allora $\mathcal{F}\left[xu(x)\right](\xi) = i\frac{d}{d\xi}\left[\hat{u}(\xi)\right]$. Si ha inoltre che se $u(x) \sim Mx^{-\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > k \in \mathbb{N}$, allora $\hat{u} \in C^{k-1}$.

Dimostrazione:
La dimostrazione si basa su un corollario del teorema di Lebesgue utilizzato in $(*)$:

$$\frac{d}{d\xi}\hat{u}(\xi)=\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}}u(x)e^{-i\xi x}dx\overset{(*)}{=}\int_{\mathbb{R}}u(x)\frac{d}{d\xi}e^{-i\xi x}dx=-i\int_{\mathbb{R}}xu(x)e^{-i\xi x}dx=-i\mathcal{F}\left[xu(x)\right](\xi)$$

Le ipotesi per applicare tale corollario sono verificate in quanto:

- $x\mapsto u(x)e^{-i\xi x}$ è integrabile e quindi misurabile.
- $\partial_{\xi}\left[u(x)e^{-i\xi x}\right]$ esiste $\forall\xi\in\mathbb{R}$.
- $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u(x)e^{-i\xi x}\right]\right|=\left|-ixu(x)e^{-i\xi x}\right|=\left|xu(x)\right|\left|e^{-i\xi x}\right|=\left|xu(x)\right|\in L^1$.

Ora però $[\hat{u}(\xi)]'$ è una funzione continua, essendo la trasformata di Fourier di una funzione integrabile, e quindi $\hat{u}(\xi) \in C^1$. Se poi, con α e k come nelle ipotesi, $u(x) \sim Mx^{-\alpha}$, allora è integrabile anche $x^{k-1}u(x)$ e iterando il ragionamento appena fatto si vede che $\hat{u}(\xi) \in C^k$.

Teorema: sia $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, continua in x con $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, allora vale la seguente formula

$$u(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

Questo teorema afferma quindi che sotto determinate ipotesi è possibile ricavare una funzione a partire dalla sua trasformata e viene quindi chiamato formula di inversione.
Le ipotesi richieste dal teorema sono però troppo restrittive e ci si pone quindi a questo punto il problema di trovare uno spazio funzionale tale che la formula di inversione sia sempre utilizzabile senza ipotesi particolari. Detto X tale spazio, sicuramente deve valere che, se $u \in X$, allora anche la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}[u] \in X$.