Analisi matematica 2		14 gennaio 2020
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (\sqrt{y} - 1)\ \ln x$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Dire *se* D è aperto, chiuso, limitato, connesso. Descrivere l'insieme dei punti di frontiera ∂D.

b) Trovare gli eventuali punti critici di f e classificarli.

c) Trovare i massimi e i minimi di f nell'insieme

$$Q := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1\,.\big\}$$

2.

i) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{(y-1)^2}{\sqrt{t}}$$

a) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (motivare la risposta).

b) Risolvere l'equazione e determinare le soluzioni che soddisfano alle condizioni:

$$y(1) = 1/2\,, \quad y(1) = 1\,, \quad y(1) = 3/2\,.$$

Tracciare un grafico qualitativo di ciascuna delle soluzioni trovate.

ii) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = e^{-t}$$

3.

a) Calcolare l'area racchiusa dalla linea γ di equazione

$$\gamma: \ \mathbf{r}(t) = \sin(2t)\,\mathbf{i} - \sin(t)\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

b) La densità (massa per unità di volume) di una sfera solida centrata nell'origine e di raggio 1 è data dalla funzione

$$\delta(r) = 1 - r^2\,,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Determinare la massa della sfera e la sua densità *media*.

c) Dire cosa si intende per superficie regolare. Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$; verificare che la superficie cartesiana di equazione $z = f(x, y)$ è regolare.

d) Sia Σ la parte di superficie cartesiana di equazione

$$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$$

che si trova nel primo ottante dello spazio tridimensionale, orientata in modo che la normale punti *verso il basso*.

Calcolare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{y}{2}\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1}\,(x-3)^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}\,x^n$$

Calcolare la somma della serie b).

ii) Dare la definizione di *convergenza totale* di una serie di funzioni su un intervallo $[a,b]$. Verificare che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\,\sin(n\pi x)$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$. Detta $f(x)$ la somma della serie, dimostrare che f è una funzione continua, periodica e dispari. Determinare il periodo T e calcolare $\int_0^T f(x)\,dx$.

SOLUZIONI

1.

a)

Insieme di definizione:
$$D = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0\}\,.$$

Si tratta del primo quadrante incluso il semiasse delle x positive, ma senza quello delle y positive; quindi non è aperto, né chiuso, né limitato, ma è connesso. La frontiera ∂D è l'unione dei due semiassi (origine inclusa).

b) La funzione f ha derivate parziali

$$f_x(x, y) = \frac{\sqrt{y} - 1}{x}\,, \quad f_y(x, y) = \frac{\ln x}{2\sqrt{y}}\,,$$

nell'insieme aperto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ (insieme dei punti interni di D). Poiché le derivate sono funzioni continue in ogni punto dell'aperto, f è differenziabile in tutti i punti interni a D. I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{y}-1}{x} = 0\,, \\ \frac{\ln x}{2\sqrt{y}} = 0\,. \end{cases}$$

L'unica soluzione è $x = 1$, $y = 1$. Per studiarne la natura calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{\sqrt{y} - 1}{x^2}; \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{1}{2x\sqrt{y}}; \quad f_{yy}(x, y) = -\frac{\ln x}{4y^{3/2}}\,.$$

Dunque:
$$f_{xx}(1, 1) = 0; \quad f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = \frac{1}{2}; \quad f_{yy}(x, y) = 0\,.$$

Il determinante della matrice Hessiana nel punto critico vale $\det H_f((1, 1) = -1/4 < 0$; dunque, si tratta di un punto di sella.
Si arrivava alla stessa conclusione osservando che $f(1, 1) = 0$ e che il segno di f cambia in ogni intorno del punto $(1, 1)$.

c) La funzione non ha punti critici all'interno dell'insieme Q; dunque, gli estremi (che esistono per il teorema di Weierstrass) si devono trovare sulla frontiera ∂Q. Considerando le restrizioni di f ai quattro segmenti che formano la frontiera di Q troviamo

$$f(x, 0) = -\ln x\,,\ 1 \leq x \leq 2\,; \quad f(2, y) = \ln 2(\sqrt{y} - 1)\,,\ 0 \leq y \leq 1\,; \quad f(x, 1) = f(1, y) = 0\,.$$

Dunque la funzione assume il valore minimo $f(2, 0) = -\ln 2$ e il valore massimo zero sui segmenti $\{(x, 1)\,, 1 \leq x \leq 2\}$ e $\{(1, y)\,, 0 \leq y \leq 1\}$.

2 i)

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Il secondo membro dell'equazione

$$f(t,y) = -\frac{(y-1)^2}{\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nel semipiano aperto

$$D = \{(t,y)\,:\, t > 0\}.$$

Osserviamo che anche la derivata parziale

$$f_y(t,y) = -2\,\frac{y-1}{\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nello stesso semipiano; dunque, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate in D.

b) L'equazione ha la soluzione costante $y = 1$; essa è anche *l'unica curva integrale che soddisfa la condizione* $y(1) = 1$ per il teorema di esistenza e unicità. Le soluzioni non costanti si ottengono dalla formula risolutiva

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + C.$$

Abbiamo dunque

$$\frac{1}{y-1} = 2\sqrt{t} + C,$$

$$y = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t} + C}$$

Sostituendo $t = 1$ e $y = 1/2$, si trova la condizione

$$-1/2 = \frac{1}{2+C}\,,$$

da cui si ricava $C = -4$.
Sostituendo $t = 1$ e $y = 3/2$ si ottiene

$$1/2 = \frac{1}{2+C}\,,$$

da cui $C = 0$.
Le soluzioni degli altri due problemi di Cauchy sono dunque

$$\phi_1(t) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}-2}, \qquad \phi_2(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

definite rispettivamente negli intervalli massimali $(0,4)$ e $(0,+\infty)$.

2 ii)

L'equazione omogenea associata

$$z'' - z = 0$$

ha l'integrale generale

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

con C_1, C_2, costanti arbitrarie. Poiché -1 è radice dell'equazione caratteristica, una soluzone particolare dell'equazione completa va cercata nella forma $\psi(t) = At\,e^{-t}$.
Calcolando le derivate

$$\psi'(t) = A(1-t)\,e^{-t} \qquad \psi''(t) = A(t-2)\,e^{-t}$$

e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A(t-2)\,e^{-t} - At\,e^{-t} = e^{-t},$$

che è verificata per ogni t se e solo se $-2A = 1$, cioè $A = -1/2$.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\,.$$

3.

a) Detta A la regione racchiusa dalla curva, dalla formula di Green abbiamo:

$$|A| = \oint_{\partial^+ A} x \; dy \tag{1}$$

La frontiera di A coincide con il sostegno della curva γ. Osserviamo che la linea γ inizia e termina nell'origine, è contenuta nel semipiano dell y negative ed è percorsa in senso *negativo* rispetto a A; dalle equazioni parametriche

$$x = \sin(2t), \qquad y = -\sin t$$

abbiamo:

$$dy = -\cos t \, dt\,.$$

Pertanto, dalla formula (1) si ottiene:

$$|A| = -\int_0^{\pi} \sin(2t)(-\cos t)\, dt = 2\int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = \frac{2}{3}\big[-\cos^3 t\big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

Al posto della (1) si poteva usare la formula $|A| = -\oint_{\partial^+ A} y \; dx$ o la semisomma delle due.

b) Usando le coordinate sferiche

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\phi$$

la massa M è data dall'integrale

$$M = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (1-r^2)\, r^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr = 4\pi \Big[\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\Big]_0^1 = \frac{8}{15}\pi\,.$$

La densità media è uguale al valore medio dell'integrale, ovvero

$$\frac{3}{4\pi}M = \frac{2}{5}\,.$$

c) Scegliendo l'orientazione della normale sulla superficie come richiesto, abbiamo:

$$\mathbf{n}\, d\sigma = -\Big(2x\,\mathbf{i} + \frac{y}{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big) dxdy$$

La proiezione di Σ sul piano xy è il quarto di ellisse Ω di equazione:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \qquad x \ge 0, \quad y \ge 0\,.$$

Dunque

$$\int\!\!\int_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int\!\!\int_{\Omega} (xy - xy - 1)\, dxdy = -|\Omega| = -\frac{\pi}{2}$$

(l'area di Ω è *un quarto* dell'area dell'ellisse di semiassi $a = 1$, $b = 2$).

4.

i) La serie (a) è centrata in $x = 3$; per il criterio del rapporto, il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+2)} \, \frac{n+1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/(n+1)^2}{1+1/(n+1)} = 1\,.$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(2,4)$. Comportamento agli estremi: per $x = 2$ abbiamo la serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n+1}$$

Per $x = 3$ abbiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$$

In entrambi i casi, il termine generale non tende a zero, per cui le serie non convergono. L'intervallo di convergenza è dunque $(2,4)$.

La serie (b) è centrata nell'origine. Usando il criterio della radice, troviamo $R = 5$ e dunque la serie converge nell'intervallo $(-5,5)$. Agli estremi la serie non converge perchè il termine generale non tende a zero. Possiamo calcolare la somma scrivendo la serie nella forma di una serie geometrica di ragione $-x/5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{5}\right)^n = \frac{1}{1+x/5} = \frac{5}{x+5}, \qquad x \in (-5,5).$$

ii) La serie data converge totalmente in $\mathbb{R}$; infatti:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} |\sin(n\pi x)| \le \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

è convergente poiché $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Poiché tutti i termini della serie sono funzioni continue, si conclude che la somma $f(x)$ è pure una funzione continua. Inoltre, per ogni n vale

$$\sin\big(n\pi(-x)\big) = -\sin(n\pi x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque anche la somma della serie soddisfa la $f(-x) = -f(x)$. Inoltre, tutti i termini della serie sono periodici di periodo $T = 2$; dunque $f(x+2) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Infine, integrando termine a termine e osservando che $\int_0^2 \sin(n\pi x)\,dx = 0$ per ogni $n = 1, 2, ...$ otteniamo

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 0\,.$$