Lavagne Virtuali di Analisi III

A.A. 2021/22

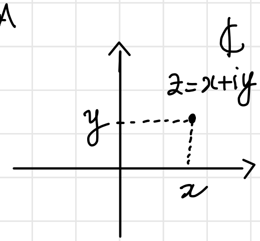
Ing. Fisica

Politecnico di Milano

I. FRAGALÀ

ANALISI COMPLESSA

<u>Def.</u> Una FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA è una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$



$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R} \qquad (i)^2 = -1$$

$$f(z) = u(z) + i\,v(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$f \rightsquigarrow u, v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Esempi</u>

- $f(z) = z_0 \in \mathbb{C} \qquad z_0 = x_0 + iy_0$

  $u(x,y) = x_0 \;, \quad v(x,y) = y_0$

- $f(z) = z \qquad z = x+iy$

  $u(x,y) = x \;, \quad v(x,y) = y$

- $f(z) = \operatorname{Re} z \qquad z = x+iy \Rightarrow f(z) = x$

  $u(x,y) = x \;, \quad v(x,y) = 0$

- $f(z) = \operatorname{Im} z \qquad z = x+iy \Rightarrow f(z) = y$

  $u(x,y) = y \;, \quad v(x,y) = 0$

- $f(z) = |z| \qquad z = x+iy \Rightarrow f(z) = \sqrt{x^2+y^2}$

  $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \;, \quad v(x,y) = 0$

- $f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $\quad a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$

Es. $z^2 + iz + 1 =$

$= (x+iy)^2 + i(x+iy) + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + ix - y + 1$

$= (\underbrace{x^2 - y^2 - y + 1}_{u(x,y)}) + i(\underbrace{2xy + x}_{v(x,y)})$

- $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, con P, Q funzioni polinomiali.

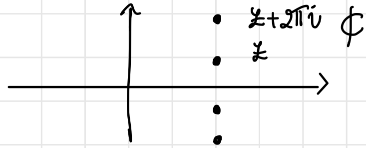
$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0 \}$

Es. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ $\qquad \Omega = \{ z \in \mathbb{C} : z \neq \pm 1 \}$

$f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ $\qquad \Omega = \{ z \in \mathbb{C} : z \neq \pm i \}$

- $f(z) = e^z, \ \sin z, \ \cos z, \ \sinh z, \ \cosh z.$

Funzione e^z



$$z = x+iy \Rightarrow e^z := e^x \cdot e^{iy} := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

- $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^x$ (la funzione exp in campo reale)
- $u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y$
- $e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} =$

$$= e^x \cdot (\cos(y+\cancel{2\pi}) + i \sin(y+\cancel{2\pi})) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$$

$\Rightarrow$ la funzione exp in $\mathbb{C}$ è PERIODICA di periodo $T = 2\pi i$

- <u>Es.</u> $\quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$(z_1 = x_1+iy_1, \quad z_2 = x_2+iy_2 \quad , \quad z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2))$

- $e^z = 0$?? $\iff |e^z| = 0$

$$\overset{\shortparallel}{e^x}(\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = |e^x| \, |\cos y + i \sin y| = e^x \underset{\neq}{>} 0$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \neq 0$$

Funzioni $\cos z$, $\sin z$

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right), \qquad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$$

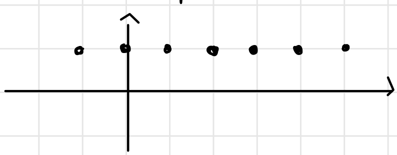
- $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos x + i\cancel{\sin x} + \cos(-x) + i\cancel{\sin(-x)}\right] = \cos x$$

- $\cos(z+2\pi) = \cos z$

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz+\cancel{2\pi i}} + e^{-iz\cancel{-2\pi i}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \cos z$$

$\Rightarrow$ $\cos z$ è periodica di periodo $T = 2\pi$.



- $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

- $\begin{cases} u(x,y) = \cos x \cosh y \\ v(x,y) = -\sin x \sinh y \end{cases}$

$\rightarrow$ Esercitazione.

- $x = 0 \Rightarrow \cos(iy) = \cosh y$.

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Per $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ valgono proprietà analoghe.

In particolare

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

- $$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\begin{cases} \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\ \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \end{cases}$$

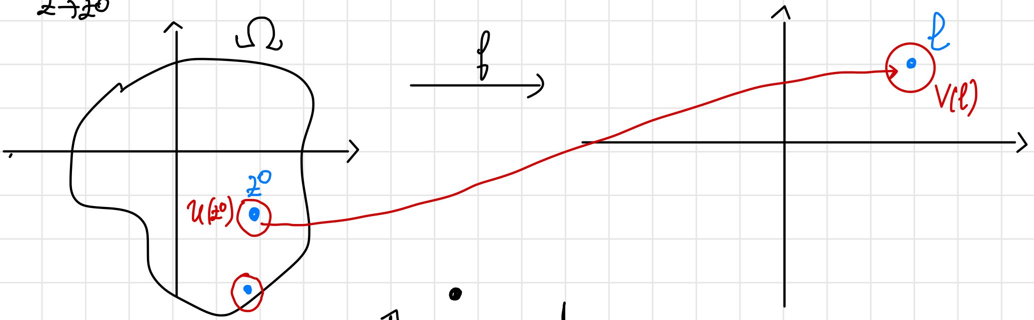
periodiche di periodo $2\pi i$

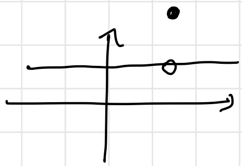
Limiti per funzioni di variabile complessa

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z^0 \in acc(\Omega)$, $\ell \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \ell \overset{def}{\iff} \forall V(\ell)\ \exists\, \mathcal{U}(z^0) \text{ tale che: }$$

$$\left(f(z) \xrightarrow[z \to z^0]{} \ell \right) \qquad \forall z \in \left(\mathcal{U}(z^0) \cap \Omega\right) \setminus \{z^0\},\ f(z) \in V(\ell).$$





$z^0 \in acc(\Omega) \iff$
$\forall \mathcal{U}(z^0),\ \mathcal{U}(z^0) \cap \left(\Omega \setminus \{z^0\}\right) \neq \emptyset$

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z^0 \in acc(\Omega) \cap \Omega$

$$f \text{ CONTINUA in } z^0 \overset{def}{\iff} \exists \lim_{z \to z^0} f(z) = f(z^0)$$

Osservazioni

- $z = x + iy$, $z^0 = x^0 + iy^0$, $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, $f = u + iv$

$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x^0,y^0)} u(x,y) = \ell_1 \\ \lim_{(x,y) \to (x^0,y^0)} v(x,y) = \ell_2 \end{cases}$$

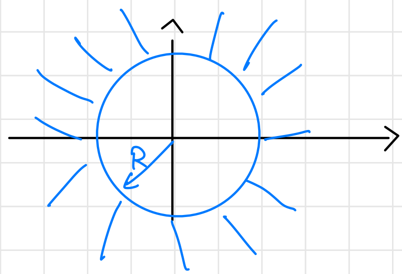
- con le stesse notazioni

  f continua in z^0 $\Longleftrightarrow$ u e v continue in (x^0, y^0).

- Sono continue (sul loro dominio di def) tutte le funzioni elementari introdotte in precedenza.

- Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta ($\Rightarrow$ composizione di continue è continua, Es: $\dfrac{\sin(3z)+z^2}{e^{2z}+1}$)

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\qquad$ $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



$z \to \infty \iff z \in \mathcal{U}(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \to +\infty$

$f(z) \to \infty \iff f(z) \in \mathcal{U}(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \to +\infty$

- Vale il teorema di unicità del limite.

Derivabilità per funzioni di variabile complessa

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z^0 \in acc(\Omega) \cap \Omega$

f derivabile (in senso complesso) in z^0 $\iff$

- $\exists \lim\limits_{z \to z^0} \dfrac{f(z) - f(z^0)}{z - z^0} \ (\in \mathbb{C})$, e tale limite si dice $f'(z^0)$
- $\exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z^0+h) - f(z^0)}{h} \ (\in \mathbb{C})$ // // //
- $f(z^0+h) = f(z^0) + \underbrace{\lambda}_{f'(z^0)} \cdot h + o(h)$ $\qquad \dfrac{o(h)}{h} \longrightarrow 0$

$$\Big(f(z^0+h) - f(z^0) - \lambda \cdot h = o(h) \iff$$
$$\frac{f(z^0+h) - f(z^0) - \lambda \cdot h}{h} \to 0 \iff \frac{f(z^0+h) - f(z^0)}{h} - \lambda \to 0 \Big)$$

Esempi

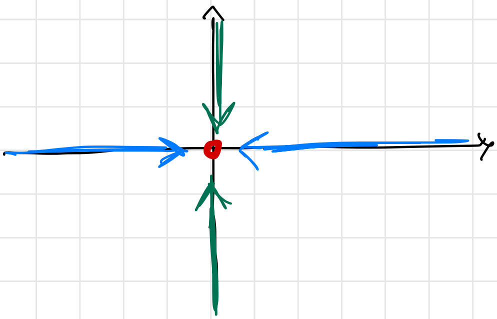
1) $f(z) = z^3$ derivabile in $z^0 \in \mathbb{C}$, $f'(z^0) = 3z_0^2$

$$\underbrace{(z^0+h)^3}_{f(z^0+h)} = \underbrace{z_0^3}_{f(z^0)} + \underbrace{3z_0^2}_{=\lambda} h \underbrace{+ 3z_0 h^2 + h^3}_{o(h)} \Rightarrow f'(z^0) = 3z_0^2$$

2) $f(z) = \operatorname{Im} z \qquad z = x+iy \Rightarrow f(z) = y$

NON è derivabile in $z_0 = 0$, poiché

$$\nexists \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - \cancel{f(0)}}{z - \cancel{0}} \quad \text{ovvero} \quad \nexists \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$$



- Lungo l'asse reale:

$$\lim_{z=x\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = 0$$

- Lungo l'asse immaginario:

$$\lim_{z=iy\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = \lim_{iy\to 0} \frac{\cancel{y}}{i\cancel{y}} = \frac{1}{i}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = y \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$ sono <u>differenziabili</u>

Recall $\quad u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentiabile in $(x^\circ, y^\circ) \overset{def}{\iff}$

$\exists \; du(x^\circ, y^\circ) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{u(x^\circ+h_1, y^\circ+h_2) - u(x^\circ,y^\circ) - du(x^\circ,y^\circ)[(h_1,h_2)]}{|h|} = 0$$

- u differentiabile in $(x^\circ, y^\circ) \Rightarrow \forall \nu, \; \exists \; \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x^\circ, y^\circ)$

In particolare $\begin{cases} \exists \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) \quad (u_x(x^\circ, y^\circ)) \\ \exists \; \dfrac{\partial u}{\partial y}(x^\circ, y^\circ) \quad (u_y(x^\circ, y^\circ)) \end{cases}$

e $\quad du(x^\circ,y^\circ)[(h_1,h_2)] = \nabla u(x^\circ,y^\circ) \cdot (h_1,h_2) =$

$= u_x(x^\circ,y^\circ)\, h_1 + u_y(x^\circ,y^\circ) \cdot h_2 .$

Teorema (caratterizzazione della derivabilità).

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z^0 \in \Omega \cap \operatorname{acc}(\Omega)$

$z^0 = x^0 + i y^0$, $\quad f = u + iv$.

$$f \text{ derivabile in } z^0 \iff \left[\begin{array}{l} u \text{ e } v \text{ differenziabili in } (x^0, y^0) \\ \qquad\qquad \text{E} \\ \begin{cases} u_x(x^0,y^0) = v_y(x^0,y^0) \\ u_y(x^0,y^0) = -v_x(x^0,y^0) \end{cases} \end{array}\right.$$

condizioni di Cauchy - Riemann.

Inoltre, in tal caso

$$f'(z^0) = u_x(x^0,y^0) - i\, u_y(x^0,y^0)$$
$$= v_y(x^0,y^0) + i\, v_x(x^0,y^0).$$

Oss.

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Def. f si dice **OLOMORFA** su Ω se è derivabile in z^0 per ogni $z^0 \in \Omega$.

Esempi

1) $f(z) = \operatorname{Im} z \qquad u(x,y) = y \;,\; v(x,y) = 0$

$z^0 = 0$

$u_x \stackrel{?}{=} v_y$ ✓ $\qquad u_x = 0 \;,\; v_y = 0$

$u_y = -v_x$ ✗ $\qquad u_y = 1 \;,\; v_y = 0$

2) $f(z) = e^{z} \qquad f'(z^0) = e^{z_0} \quad \forall z^0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^{x}\cos y \\ v(x,y) = e^{x}\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = e^{x}\cos y \\ v_y = e^{x}\cos y \end{cases} \qquad u_x = v_y \ \checkmark$$

$$\begin{cases} u_y = -e^{x}\sin y \\ v_x = e^{x}\sin y \end{cases} \qquad u_y = -v_x \ \checkmark$$

$$f'(z^0) = e^{x_0}\cos y_0 + i e^{x_0}\sin y_0 = e^{x_0}(\cos y_0 + i\sin y_0) = e^{z_0}$$

3) Si verifica che sono derivabili su tutto $\mathbb{C}$

$P(z)$, e^{z}, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$

e valgono le stesse formule valide in $\mathbb{R}$

Dimostrazione

$(\Rightarrow)$ Per ip. $\exists\ f'(z^0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$

(0) $f(z^0+h) = f(z^0) + f'(z^0)h + g$ con $g = o(h)$

$u(x^0+h_1, y^0+h_2) + i\,v(x^0+h_1, y^0+h_2) =$

$u(x^0,y^0) + i\,v(x^0,y^0) + (\alpha+i\beta)(h_1+ih_2) + g_1 + ig_2$

(1) $u(x^0+h_1, y^0+h_2) = u(x^0,y^0) + \underbrace{(\alpha h_1 - \beta h_2)}_{= (\alpha,-\beta)\cdot(h_1,h_2)} + \underbrace{g_1}_{= o(h_1,h_2)}$

(2) $v(x^0+h_1, y^0+h_2) = v(x^0,y^0) + \underbrace{(\beta h_1 + \alpha h_2)}_{= (\beta,\alpha)\cdot(h_1,h_2)} + \underbrace{g_2}_{= o(h_1,h_2)}$

$\Rightarrow u, v$ differenziabili in (x^0,y^0), con

$$\begin{cases} \nabla u(x^0,y^0) = (\alpha,-\beta) \\ \nabla v(x^0,y^0) = (\beta,\alpha). \end{cases}$$

$(\Leftarrow)$ Procedere al contrario! $\blacksquare$

Invertibilità locale

Teorema Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω,

e sia $z^0 \in \Omega$ tale che $f'(z^0) \neq 0$.

Allora f è "localmente invertibile in z^0"

($\exists\ U(z^0)$ tale che $f|_{U(z^0)}$ invertibile)

e la funzione inversa f^{-1} è derivabile in senso complesso

in $f(z^0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z^0)) = \frac{1}{f'(z^0)}$$

Esempi

1) $f(z) = e^{z}$, $z^0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(z^0) = e^{z_0} \neq 0$

$$(\log z)' \Big(\underbrace{e^{z_0}}_{w_0}\Big) = \frac{1}{e^{z_0}} \quad \left(\frac{1}{w_0}\right)$$

2) $f(z) = z^{n}$, $z^0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(z^0) = n z_0^{n-1} \neq 0 \quad \forall z^0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dim.

Recall. $C^1 \ni \Phi = (u, v)$ campo vettoriale: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x^0, y^0) \in \Omega$

$\det J\Phi(x^0, y^0) \neq 0 \Rightarrow \Phi$ "localmente invertibile in (x^0, y^0)" e

$$J\Phi^{-1}\left(\Phi(x^0, y^0)\right) = \left(J\Phi(x^0, y^0)\right)^{-1}$$

matrice inversa

$z^0 = x^0 + iy^0$, $f = u + iv \rightsquigarrow (x^0, y^0)$, $\Phi = (u, v)$.

$$J\Phi(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det J\Phi(x^0, y^0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z^0)|^2 \neq 0$$

$(f'(z^0) = \alpha + i\beta)$

$(f'(z^0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x)$

$$J\Phi^{-1}\left(\Phi(x^0, y^0)\right) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$$

$$(f^{-1})'(f(z^0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{\overline{f'(z^0)}}{|f'(z^0)|^2} = \frac{1}{f'(z^0)}$$

$\blacksquare$

Ricerca di primitive

(come determinarla?)

Problema: Data $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esiste? unica?

$F: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω tale che

$$F'(z) = f(z).$$

Una tale F si dice PRIMITIVA DI f.

[Recall: Data $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA
(Teorema fondamentale del calcolo)
allora una primitiva di f è data da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

e tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale.]

Riguardo l'unicità: una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

1) F primitiva di f, $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $F+\lambda$ primitiva di f

$$(F+\lambda)' = F' + \lambda' = f$$

2) F_1, F_2 primitive di f $\Rightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$.

$G := F_1 - F_2$ Tesi: G è costante

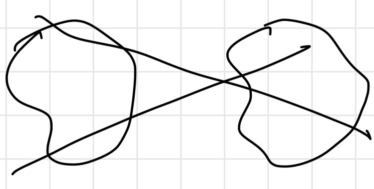
$$G' = (F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

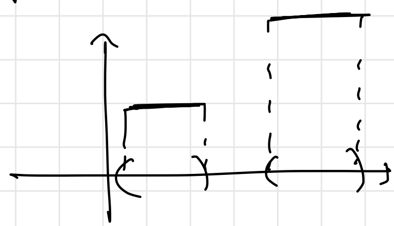
$G = u + iv$ $\quad G' = u_x - i u_y = v_y + i v_x$

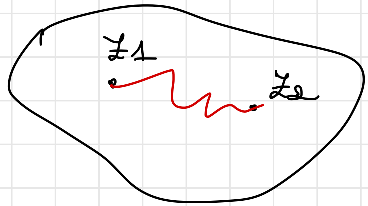
$G' = 0 \Rightarrow \nabla u(x^0, y^0) = \nabla v(x^0, y^0) = \underline{0}$

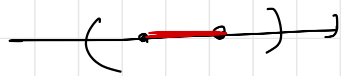
$\Rightarrow$ u costante, v costante.

N.B.: 2) vale se Ω è CONNESSO.









Esistenza

$f = u + iv$, $F = U + iV$

$\uparrow$ data $\qquad\qquad$ $\uparrow$ incognita

$$F' = U_x - i U_y = V_y + i V_x$$

$\shortparallel$

$$f = u + i v$$

Quindi U e V (affinché F sia primitiva di f) devono soddisfare:

$$\begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 := u\,dx - v\,dy \\ V \text{ potenziale per } \omega_2 := v\,dx + u\,dy. \end{cases}$$

Concludiamo che

f ammette primitive $\iff$ ω_1, ω_2 esatte.

$\qquad\not\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

f olomorfa. $\iff$ ω_1, ω_2 chiuse.

$$\left[\begin{array}{l} \omega_1 \text{ chiusa} \iff u_y = -v_x \\ \omega_2 \text{ chiusa} \iff v_y = u_x \end{array}\right]$$

$\oint_\gamma f = 0 \ \forall \gamma$ circuito $\subseteq \Omega$

$\Updownarrow$

f ammette primitive $\Leftrightarrow$ ω_i esatte $\Leftrightarrow$ $\oint_\gamma \omega_i = 0 \ \forall \gamma$ circuito $\subseteq \Omega$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$ (sì, se Ω è semplicemente connesso)

f olomorfa $\Leftrightarrow$ ω_i chiuse $\Rightarrow$ $\oint_\gamma \omega_i$ non cambia se sostituisco γ con un circuito OMOTOPO.

$\Updownarrow$

$\oint_\gamma f$ " " "

Osservazioni:

- Differenza rispetto al caso reale: in campo complesso se f ammette primitive, f è olomorfa.
- Su domini semplicemente connessi, le due proprietà sono equivalenti. In generale NO.

Es. $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. non sempl. connesso

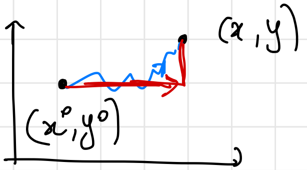
olomorfa ma non ammette primitive

$$\left(f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}, \quad \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \right)$$

u e v soddisfano CR, ma (almeno) una tra ω_1 e ω_2 non esatta].

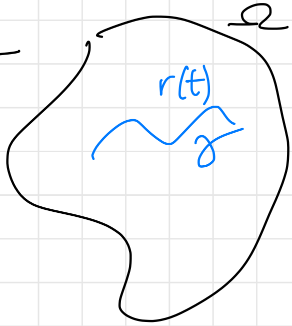
• Come calcolo F ? (se esiste).

$$F = U + iV, \quad \text{dove} \begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 \\ V \text{ potenziale per } \omega_2. \end{cases}$$



$$\begin{cases} U \text{ potenziale per } \omega_1 = \displaystyle\int_{\gamma : (x^\circ, y^\circ) \rightsquigarrow (x,y)} \omega_1 \\ V \text{ potenziale per } \omega_2 = \displaystyle\int_{\gamma : (x^\circ, y^\circ) \rightsquigarrow (x,y)} \omega_2 \end{cases}$$

• Def. Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dato γ cammino in Ω parametrizzato da $r : [a,b] \longrightarrow \Omega$
$r(t) = r_1(t) + i r_2(t)$.



$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(r(t))\, r'(t)\, dt}$$

$$= \int_a^b (u + iv)(r_1' + i r_2')\, dt$$

$$= \int_a^b (u r_1' - v r_2')\, dt + i \int_a^b (v r_1' + u r_2')\, dt$$

$$= \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2 .$$

- Riformulazione del calcolo di F

$$F(z) = \int_{\gamma : z^0 \rightsquigarrow z} f$$

- Teorema di Morera:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ circuito} \subseteq \Omega \Rightarrow f \text{ olomorfa}$$

- Teorema di Cauchy

f olomorfa in $\Omega \Rightarrow \oint_\gamma f$ non cambia se sostituisco un circuito $\gamma \subseteq \Omega$ con uno ad esso omotopo

(In particolare, se γ omotopo a 1 punto $\Rightarrow \oint_\gamma f = 0$)

$$\int_a^b (u r_1' - v r_2')\,dt = \int_a^b u(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t)\,dt - \int_a^b v(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)\,dt.$$

$$\int_a^b (u r_1' - v r_2')\,dt = \int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma u\,dx - v\,dy$$

per def di integrale di una forma

$$\int_a^b (v r_1' + u r_2')\, dt$$

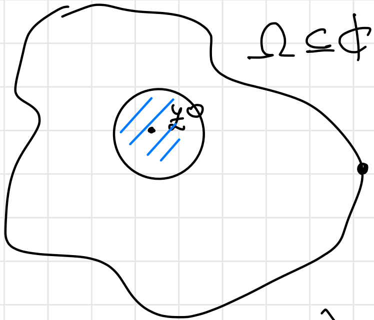
$$\int_\gamma \omega_2 = \int_a^b v\, dx + u\, dy = \int_a^b v(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t)\, dt$$

$$+ \int_a^b u(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)\, dt.$$

Funzioni analitiche in campo complesso

Def. $f: \Omega$ aperto* $\subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice ANALITICA su Ω se
$\forall z^0 \in \Omega$, $\exists\ \mathcal{U}(z^0)$ tale che:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \qquad \forall z \in \mathcal{U}(z^0)$$



(* Ω aperto $:= \forall z^0 \in \Omega\ \exists\ \mathcal{U}(z^0) \subseteq \Omega$)

Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$$

variabile $\in \mathbb{C}$

coeff. $\in \mathbb{C}$

$z_0 \in \mathbb{C}$

:= successione

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^{N} c_k (z - z_0)^k .$$

Vari tipi di convergenza:

- la serie conv. puntualmente in $z \in \mathbb{C}$ se $\exists \lim_{N\to+\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$.
- la serie conv. uniformemente in Ω a $S(z)$ se

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{z\in\Omega} |S_N(z) - S(z)| = 0.$$

- la serie conv. assolutamente in $z \in \mathbb{C}$ se converge

$$\sum_{k\geq 0} |c_k|\,|z-z_0|^k$$

$$D := \{ z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge puntualmente in } z \}$$

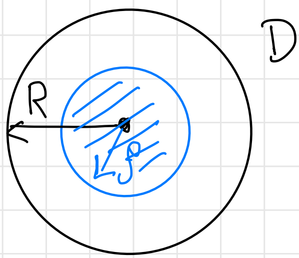
dominio di convergenza della serie

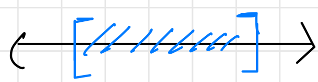
Proprietà

(1) $\operatorname{int}(D) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$ $R :=$ raggio di convergenza

→ la serie converge assolutamente in $\operatorname{int}(D)$

→ la serie converge uniformemente su $\{ |z-z_0| \leq \rho,\ \forall \rho < R \}$





(2) $R = \dfrac{1}{L}$ $\quad L = \limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$

con la convenzione $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

(3) La serie delle derivate n-esime

$$\sum_{k\geq 0} D^n\left(c_k(z-z_0)^k\right)$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

(4) Calcolo dei coeff. c_n:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^k = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{k\geq 1} k c_k (z-z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z-z_0) + \dots$$

$$f''(z) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) c_k (z-z_0)^{k-2}$$

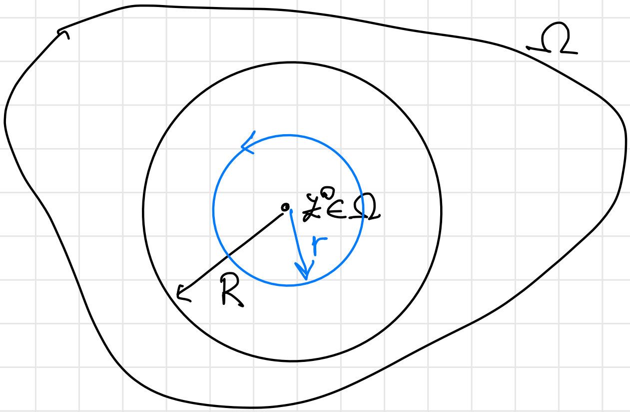
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\cdots(k-n+1) c_k (z-z_0)^{k-n}$$

$\Rightarrow f(z_0) = c_0$, $f'(z_0) = c_1$, $f''(z^0) = 2c_2$ ....

$f^{(n)}(z^0) = n!\, c_n$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_k = \dfrac{f^{(k)}(z^0)}{k!}}$

Un altro modo di calcolare i coeff c_k

Sia f analitica in Ω, sia $z^0 \in \Omega$, $R :=$ raggio di conv.

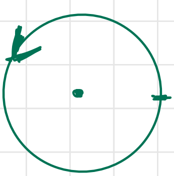


$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \qquad \forall z \text{ tale che } |z - z_0| < R.$$

Fissiamo $r \in (0, R)$, e fissiamo $k \geq 0$, calcoliamo

$$I_k := \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz.$$

$C_r(z^0) :=$ cerchio di centro $\overset{x_0 + i y_0}{\overset{\shortparallel}{z^0}}$ e raggio r percorso 1 volta in senso antiorario



parametrizzato da:

$$r(t) = z^0 + r e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$= (x^0 + r\cos t) + i(y_0 + r \sin t).$$

$$I_K = \int_{C_r(z^0)} \frac{\sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{K+1}}\, dz$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. per serie} \\ \text{(cv. uniforme)}}}{=} \sum_{n\geq 0} c_n \int_{C_r(z^0)} (z-z_0)^{n-K-1}\, dz =$$

[$\underline{\text{Es.}}$ $\int_{C_r(z^0)} (z-z_0)^m\, dz \underset{\substack{\uparrow \\ \forall m \in \mathbb{Z}}}{=} \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$]

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n-K-\cancel{1} = -\cancel{1} \\ \Leftrightarrow\ n = K.}}{=} c_K \cdot 2\pi i \Rightarrow c_K = \frac{I_K}{2\pi i} =$$

$$\boxed{c_K = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}}\, dz.}$$

$$\Downarrow$$

<u>Formula di Cauchy per la derivata K-esima:</u>

$$\left[\ f^{(K)}(z^0) = \frac{K!}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}}\, dz.\ \right]$$

In particolare, con $k=0$

$$\boxed{f(z^0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z^0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi}$$

(dove r è un qualsiasi raggio $\in (0,R)$).

Oss. $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ è olomorfa su $D \setminus \{z^0\}$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$ è indipendente

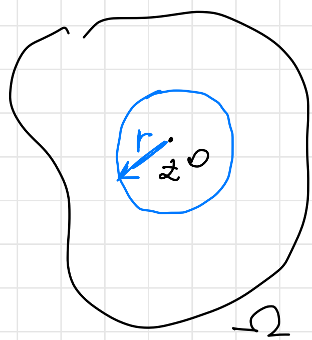
dalla scelta di $r \in (0,R)$. (Teo di Cauchy)

Per $k=0$, vale in realtà una proprietà più forte:

Formula di Cauchy. f olomorfa su $\Omega \supseteq \overline{B_r(z^0)}$

$\Rightarrow$ $\forall z \in B_r(z^0)$ vale:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z^0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$



$B_r(z^0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z^0| < r\}$.

Oss. $z \longmapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ $\left(z \longmapsto \dfrac{1}{1-z} = \sum_n z^n \right)$

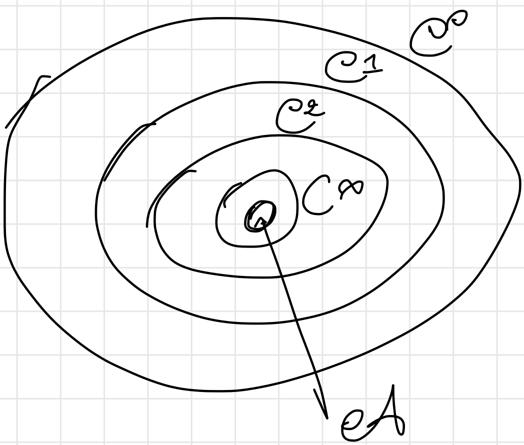
è una funzione analitica

Teorema (di analiticità delle funzioni olomorfe)

f olomorfa in Ω $\Rightarrow$ f analitica in Ω

Oss.

- $\Leftarrow$ l'implicazione inversa è OVVIA!
- Differenza rispetto al caso reale: in $\mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{A}(\mathbb{R}).$$

Esempi

- $$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- $$\cos z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\sinh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\cosh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\limsup_n a_n = \max\left\{ \lim_n a_{k(n)} \ : \ a_{k(n)} \text{ estratta da } a_n \right\}$$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

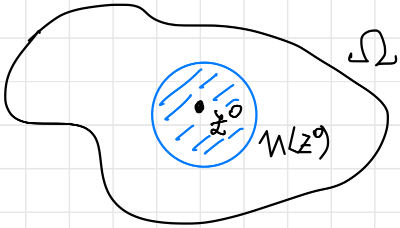
$$(-1)^n$$

Singolarità isolate e loro classificazione

Def. Sia $f: \Omega \setminus \{z^0\} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si dice che z è una SINGOLARITÀ ISOLATA per f se:

$\exists\, U(z^0) \subseteq \Omega$ tale che f sia olomorfa su $U(z^0) \setminus \{z^0\}$.

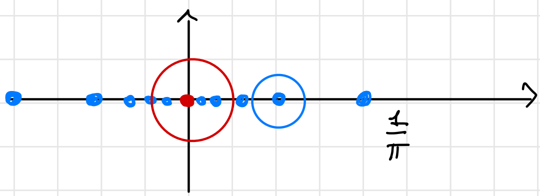


Esempi

1) $f(z) = \frac{1}{z}$ olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Rightarrow z_0 = 0$ è sing. isolata.

2) $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{$zeri dei denominatori$\}$.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0 \iff \frac{1}{z} \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff z \neq \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ z \neq 0 \end{cases}$$



L'origine è una singolarità non isolata!

Tutte le altre sì!

Sia z^0 una singolarità isolata per f.

Def 1 Si dice che z^0 è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE se

$\exists\ \mathcal{U}(z^0),\ \exists\ \tilde{f}: \mathcal{U}(z^0) \to \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}\big|_{\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}} = f$

e $\tilde{f}$ sia olomorfa in $\mathcal{U}(z^0)$.

Esempio $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z^0 = 0$ sing. eliminabile.

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & \forall z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$$\sin z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies$$

$$\frac{\sin z}{z} \underset{\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{=} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + o(z^2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Oss 1 Se esiste $\tilde{f}$, $\tilde{f}$ è unica.

Se una g è olomorfa, è anche continua:

$$\lim_{z\to z^0} \left[g(z) - g(z^0)\right] = \lim_{z\to z^0} \Bigg[\underbrace{\frac{g(z)-g(z^0)}{z-z^0}}_{g'(z^0)\in\mathbb{C}}\Bigg] \cdot \underbrace{[z-z^0]}_{0} = 0$$

Quindi $\tilde{f}(z^0) = \lim_{z\to z^0} \overset{(\sim)}{f}(z)$.

Oss 2 $\quad z^0$ sing. eliminabile per $f \Rightarrow f$ limitata (in modulo) vicino a z^0

$\exists\, \mathcal{U}(z^0),\ \exists\, M>0$ tale che
$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$

$\Uparrow$

Infatti;

z^0 sing. eliminabile per $f \Rightarrow \exists \lim_{z\to z^0} f(z) \in \mathbb{C}$

__Teorema rimozione della singolarità__

f limitata e olomorfa in $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\} \Rightarrow z^0$ è singolarità eliminabile

Quindi, in conclusione: (se f è olomorfa su $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$).

z^0 sing. eliminabili $\Leftrightarrow$ f limitata in $\mathcal{U}(z^0)\setminus\{z^0\}$

Def 2 Si dice che z^0 è un POLO per f se

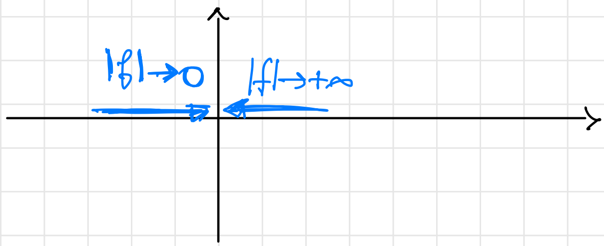
$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \infty \quad \text{ovvero} \quad \lim_{z \to z^0} |f(z)| = +\infty .$$

Esempio $f(z) = \frac{1}{z^m}$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $z^0 = 0$ polo

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{1}{z^m} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{1}{|z|^m} = +\infty$$

Def 3 Si dice che z^0 è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE per f se è una sing. isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio $f(z) = e^{1/z}$ $z^0 = 0$ sing. essenziale



$z = x \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty \Rightarrow \text{NO sing. eliminabile} \\ \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \Rightarrow \text{NO polo.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{z \to 0} e^{1/z}$$

Teorema (Picard) z^0 sing. essenziale per f $\Rightarrow$

$$\forall\, U(z^0),\quad \underbrace{f(U(z^0))}_{\substack{\text{immagine di } U(z^0) \text{ tramite per } f \\ =\{f(z)\,:\, z\in U(z^0)\}}} \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}\setminus\{1 \text{ punto}\}. \end{cases}$$

Esempio. $f(z) = e^{1/z}$. Fissiamo $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

vediamo che w è assunto in qualsiasi intorno dell'origine.

Cerchiamo z tali che $\left[e^{1/z} = w.\right]$

Chiamo $\frac{1}{z} = x+iy$, $\quad w = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

x, y: incognite; $\quad \rho \neq 0$; $\quad \rho$, θ: assegnati

Imponiamo:

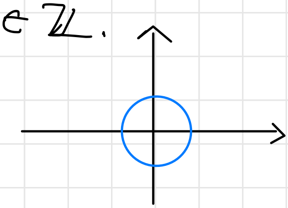
$$e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = \rho e^{i\theta}$$

$$e^x(\cos y + i\sin y) \iff \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y-\theta = 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log\rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

Quindi

$$z_k = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\log\rho + i(\theta+2k\pi)}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$



(es. $|z_k| \to 0$, $\left|\frac{1}{z_k}\right| \to +\infty$)

Sviluppi in serie di Laurent

<u>Teorema</u> f olomorfa su $\Omega \setminus \{z^0\}$ (Ω aperto) $\Rightarrow$

f "sviluppabile in serie di Laurent di centro z^0" ovvero

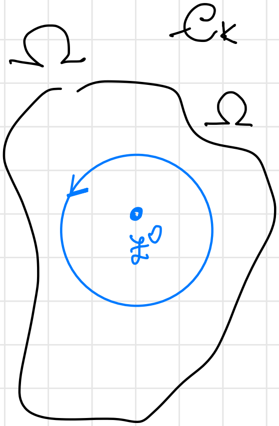
$\exists\, \mathcal{U}(z^0) \subseteq \Omega$ tale che $\forall z \in \mathcal{U}(z^0) \setminus \{z^0\}$.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_k}_{\in \mathbb{C}} (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k \geq 0}}_{k=0,\dots,+\infty} c_k (z-z_0)^k + \underbrace{\sum_{k<0}}_{k=-1,-2,\dots,-\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$= c_0 + c_1(z-z^0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots\dots$$ parte regolare

$$+ c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + \dots\dots$$ parte singolare

Inoltre:



$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{C_r(z^0)}} \frac{f(z)}{(z-z^0)^{k+1}}\, dz \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

<u>qualsiasi</u> circonferenza di raggio r e centro z^0 (param. da $r(t) = z^0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)

con $C_r(z^0) \subseteq \mathcal{U}(z^0)$

In particolare:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz$$

C'è una relazione tra c_{-1} e $\int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz$!!!...

Esempio

$f(z) = \frac{1}{z}$ $z^0 = 0$.

ha una sing. isolata in $z^0 = 0$

parte regolare $= 0$

parte singolare $= \underset{\underset{1}{\parallel}}{c_{-1}} (z - \underset{\underset{0}{\parallel}}{z^0})^{-1} = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \int_{C_r(z^0)} f(z)\, dz = 2\pi i \underbrace{c_{-1}}_{Res(f, z^0)} = 2\pi i.$$

c_{-1} (coeff di $(z-z^0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent)

:= RESIDUO DI f in z^0 $\quad (Res(f, z^0))$

$$Res\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 1.$$

Come riconoscere i vari tipi di singolarità dallo sv. Laurent?

- z^0 sing. eliminabile $\Longleftrightarrow$ parte singolare dello sviluppo $= 0$.
- z^0 polo?
- z^0 sing. essenziale?

Come riconoscere i vari tipi di singolarità dallo sv. Laurent ?

- z^0 sing. eliminabile $\iff$ parte singolare dello sviluppo $= 0$.
- z^0 polo ?
- z^0 sing. essenziale ?

Idea:

z^0 polo per f $\iff$ z^0 zero per $\frac{1}{f}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \infty \qquad\qquad \lim_{z \to z^0} \frac{1}{f} = 0$$

$$\left(\lim_{z \to z^0} |f(z)| = +\infty \right) \qquad\qquad \left(\lim_{z \to z^0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \right)$$

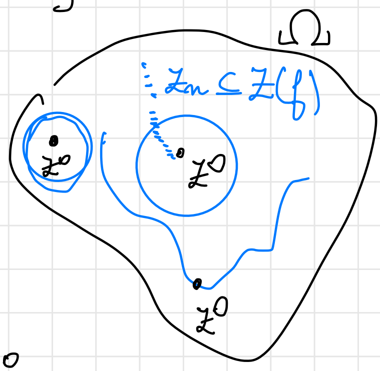
$$\frac{1}{|f(z)|} = \left| \frac{1}{f(z)} \right|$$

Principio di identità

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, e supponiamo Ω connesso $^{(*)}$

Sia $Z(f) = \{ z \in \Omega : f(z) = 0 \}$.

Sono equivalenti:



(1) $z^0 \in acc(Z(f))^{(**)}$

$\Updownarrow$

(2) $f^{(n)}(z^0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Updownarrow$

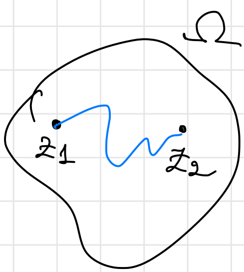
(3) $Z(f)$ contiene un intorno di z^0.

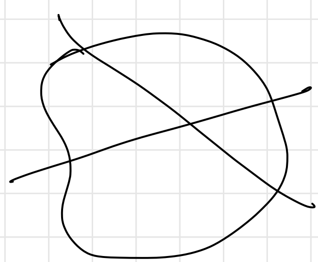
$\Updownarrow$

(4) $Z(f) \equiv \Omega \qquad (f \equiv 0 \text{ in } \Omega)$

Conclusione: $Z(f) =$
- è fatto da PUNTI ISOLATI (non ha PUNTI DI ACCUMULAZIONE)
- coincide con tutto Ω.

$(*)$





$(**)$ $\forall U(z^0) \quad \exists \quad z \in Z(f) \cap (U(z^0) \setminus \{z^0\})$.

$\exists \; z_n \subseteq Z(f) \setminus \{z^0\} : \quad \lim_n z_n = z^0$.

Ordine di zeri

Sia f olomorfa su Ω connesso, $f \not\equiv 0$ su Ω.
Sia $z^0 \in \mathcal{Z}(f)$ $\quad (f(z^0) = 0)$.
Per il principio di identità, z^0 è uno ZERO ISOLATO
Inoltre (2) falsa $\Rightarrow$ $\{ n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z^0) \neq 0 \} \neq \emptyset$.

$\nu := \min \{ n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z^0) \neq 0 \}$ ORDINE DELLO ZERO z_0

Esempio. • f ha uno zero di ordine 2 in z^0 $\iff$
$f(z^0) = f'(z^0)$ MA $f''(z^0) \neq 0$.

• f ha uno zero di ordine 4 in z^0 $\iff$
$f(z^0) = f'(z^0) = f''(z^0) = f'''(z^0)$ MA $f^{(IV)}(z^0) \neq 0$

Oss: ν è anche caratterizzato da:

• $$f(z) = \sum_{n \geq \nu} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{c_\nu}_{0 \neq} (z - z_0)^\nu + o(z - z^0)^\nu$$

• $$\exists \lim_{z \to z^0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

BUON ORDINAMENTO : $\forall A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min A$
(equivale al PRINCIPIO DI INDUZIONE).

Ordine di poli

z^0 polo per f $\iff$ z^0 zero per $\frac{1}{f}$

Def. Sia z^0 polo per f. Chiamiamo ORDINE DEL POLO z^0 l'ordine di z^0 come z^0 per $\frac{1}{f}$.

Esempio. $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ha un polo in $z^0 = 0$.

$\left(\lim_{z \to 0} \left| \frac{1}{z^2} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{1}{|z|^2} = +\infty \right)$.

Poiché $\frac{1}{f(z)} = z^2$ ha in $z^0 = 0$ uno zero di ORDINE 2, diremo che $\frac{1}{z^2}$ ha in $z^0 = 0$ un polo di ORDINE 2.

Def. In particolare si dice POLO SEMPLICE un polo di ordine 1

Esempio $f(z) = \frac{1}{z}$ ha un polo semplice in $z^0 = 0$

(poiché z ha nell'origine uno zero di ordine 1).

Oss. L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

- z^0 polo di ordine ν per f $\iff$

  z^0 zero di ordine ν per $\frac{1}{f}$ $\iff$

$$\exists \lim_{z \to z^0} \frac{1}{(z-z^0)^\nu} \cdot \frac{1}{f(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \iff$$

$$\exists \lim_{z \to z^0} (z-z^0)^\nu f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (*)$$

- z^0 polo di ordine ν per f $\iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \text{con } c_{-\nu} \neq 0.$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow$$

$$(z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+\nu}.$$

Quindi vale

$(*)$ $\iff$ tutti i coeff. c_n con $n+\nu < 0$ si annullano e il coeff. $c_{-\nu} \neq 0$.

Risposta alla domanda:
Come è fatto lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo??

La parte singolare ha un numero finito di termini

Es. Polo di ord 3 in 0:

$$\underbrace{c_{-3}\, z^{-3} + c_{-2}\, z^{-2} + c_{-1}\, z^{-1}} + c_0 + c_1 z + \ldots$$

$$\underbrace{c_{-\nu}\, z^{-\nu} + c_{-\nu+1}\, z^{-\nu+1} + \ldots\ldots} + c_0 .$$

Riassumendo, posso classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, ovvero guardando la parte singolare:

- p. singolare nulla $\iff$ ELIMINABILE
- p. singolare con un num. FINITO di termini $\iff$ POLO
- p. singolare con un num. INFINITO di termini $\iff$ ESSENZIALE.

Osservazioni su zeri e poli.

① Se f e g hanno { entrambe uno zero in z_0 / entrambe un polo in z_0 }.

Allora $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'}{g'}$. (DE L'HOPITAL IN $\mathbb{C}$)

(Caso dello zero:

$$f(z) = \underset{\neq 0}{c_\nu} (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$

$$g(z) = \underset{\neq 0}{c_\eta} (z - z_0)^\eta + o(z - z_0)^\eta \quad)$$

② { z^0 zero di ordine ν per f $\Leftrightarrow \lim_{z \to z^0} \frac{(z - z^0) f'(z)}{f(z)} = \nu$

z^0 polo di ordine ν per f $\Leftrightarrow \lim_{z \to z^0} \frac{(z - z^0) f'(z)}{f(z)} = -\nu$

(MODO PER CALCOLARE L'ORDINE).

$$f(z) = \underset{\neq 0}{c_\nu} (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$

$$f'(z) = \nu c_\nu (z - z_0)^{\nu - 1} + o(z - z_0)^{\nu - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(z - z^0) f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu}{c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu} \xrightarrow[z \to z_0]{} \nu$$

(3) z^0 zero di ordine ν per f, con $\nu \geq 1$ $\Rightarrow$
z^0 zero di ordine $\nu - 1$ per f'.

z^0 polo di ordine ν per f, con $\nu \geq 1$ $\Rightarrow$
z^0 polo di ordine $\nu + 1$ per f'

Es.

$$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = 2z$$

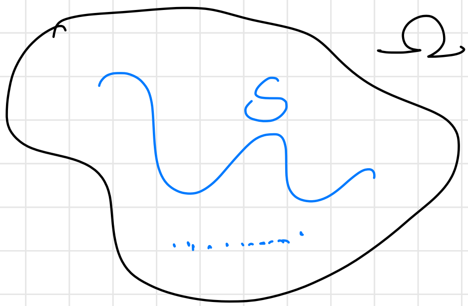
$$f(z) = \frac{1}{z^2} \longrightarrow f'(z) = -2z^{-3}$$

Teorema di unicità del prolungamento analitico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, e sia $S \subseteq \Omega$ tale che

$$[\mathrm{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset]$$

Data $f: S \to \mathbb{C}$, esiste al più una $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa (analitica) tale che $\tilde{f}|_S = f$.



Dim. Supponiamo $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ siano prolungamenti di f. TESI: $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$

Considero $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$. TESI: $g \equiv 0$.

olomorfa.

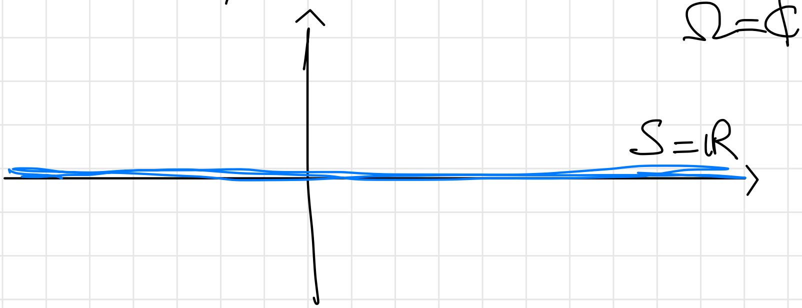
$Z(g) \supseteq S$ $\qquad g|_S = \tilde{f}_1|_S - \tilde{f}_2|_S = f - f = 0$

$\Rightarrow Z(g)$ ha punti di acc in Ω. $\xRightarrow{\text{PRINCIPIO DI IDENTITÀ}} Z(f) \equiv \Omega$ ∎

Esempio

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Omega = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{R}$.



$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\tilde{f}_1(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$

$\tilde{f}_2(z) = 0$.

$\Longrightarrow$ unicità prol. analitico

$\sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$.

- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$.

Motivazione: calcolo di integrali in campo complesso (e anche in campo reale)

- f olomorfa su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\oint_\gamma f(z)dz = 0$

  γ ← circuito omotopo a 1 punto

- f olomorfa su Ω tranne che in un n° finito di punti

$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = ???$$

Es. $\displaystyle\int_{C_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

$\frac{1}{z}$ ← olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Def. Se z^0 è una singolarità isolata per f, si dice **RESIDUO DI f in z^0** il coeff. c_{-1} dello sviluppo di Laurent di f di centro z^0 $\left(\operatorname{Res}(f, z^0)\right)$.

Oss. Nell'esempio sopra

$$c_{-1} = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{1}{z}\,dz$$

$$c_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right)$$

Più in generale esiste collegamento tra residui e integrali?

Come calcolare $\mathrm{Res}(f, z^0)$ (z^0 sing. isolata)

- z^0 sing. eliminabile $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}(f, z^0) = 0$
(parte singolare dello sviluppo $\equiv 0$)

- z^0 sing. essenziale $\Rightarrow$ non c'è modo diretto
(bisogna farsi lo sviluppo di Laurent)

- z^0 polo di ordine ν $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z^0) = \lim_{z \to z^0} \frac{1}{(\nu-1)!} D^{(\nu-1)}\left[(z-z_0)^{\nu} f(z) \right]}$$

In particolare, se z^0 è un polo semplice ($\nu = 1$)

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z^0) = \lim_{z \to z^0} \left[(z-z^0) f(z) \right].}$$

<u>Dim.</u> (nel caso del polo semplice)

z^0 polo semplice $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^n$, con $c_{-1} \neq 0$

$$(z-z_0) f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1 (z-z_0)^2 + o(z-z_0)^2.$$

$$\lim_{z \to z^0} \left[(z-z^0) f(z) \right] = c_{-1}. \quad \blacksquare$$

Esempi

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $\quad z^0 = 0$ sing. eliminabile $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$

2) $f(z) = e^{1/z}$ $\quad z^0 = 0$ sing. essenziale

$\forall w \in \mathbb{C}, \quad e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} \Rightarrow$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \Rightarrow$

$\rightarrow \mathrm{Res}\left(e^{1/z}, 0\right) = 1$

$f(z) = e^{1/z^2}, \quad z^0 = 0$ sing essenziale

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{2n}} \cdot \frac{1}{n!}$

$\rightarrow \mathrm{Res}\left(e^{1/z^2}, 0\right) = 0.$

3) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z^0 = 0$ polo di ordine 1

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = 1.$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ $\quad z^0 = 0$ polo di ordine 2

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = 0.$

4) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ $\qquad z=0 \qquad$ polo di ordine 2

$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \quad \Rightarrow \text{ l'ordine è } 2$$

$$\| $$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$\operatorname{Res}(f,0) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to 0} D\left[z^2 \cdot \frac{\sin z}{z^3} \right] = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z} \right]$$

formula con $\nu = 2$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \underset{[H]}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{\cos z} - \cancel{z}\sin z - \cancel{\cos z}}{2\cancel{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\lim_{z\to 0} \sin z}_{=0}\Big) = 0.$$

5) $f(z) = z\cot z = z\,\dfrac{\cos z}{\sin z}$

$$\sin z = 0 \iff z_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Caso $k=0$</u> $(z_0 = 0)$ $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{z}{\sin z} \cdot \cos z \qquad z \to 0$

$$\frac{z}{\sin z} \to 1, \qquad \cos z \to 1$$

$\Rightarrow$ Sing. eliminabile.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(f,0) = 0.$

Caso $k \neq 0$ $\quad z_k = k\pi$, con $k \neq 0$. poli semplici

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \cdot \frac{\overset{\overset{k\pi}{\uparrow}}{z} \; \overset{\overset{(-1)^k}{\uparrow}}{\cos z}}{\sin z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$= (k\pi)(-1)^k \cdot \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)}{\sin z}$$

$$\underset{\underset{z - k\pi = w}{\uparrow}}{=} (k\pi) \cancel{(-1)^k} \cdot \lim_{w \to 0} \frac{w}{\sin(w + k\pi)} = k\pi \neq 0.$$

$$\sin(w + k\pi) = \sin w \underbrace{\cos(k\pi)}_{\cancel{(-1)^k}} + \cancel{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\sin(k\pi)} \cos w}$$

$$\text{Res}(f, k\pi) = \lim_{z \to z^0} (z - k\pi) \cdot f(z) = k\pi.$$

Conclusione:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{Res}(f, k\pi) = k\pi.$$

Oss. $$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right) \overset{(*)}{=} \frac{g(z^0)}{h'(z^0)}}$$

con g olomorfa, h con uno zero di ordine 1 in z^0 ($\Rightarrow h'(z^0)\neq 0$).

Es. $f(z) = \dfrac{z\cos z}{\sin z}$ $\qquad g(z) = z\cos z$, $\; h(z) = \sin z$ $\qquad h(z_k)=0$, $h'(z_k)\neq 0$.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{z_k \cancel{\cos z_k}}{\cancel{\cos z_k}} = k\pi.$$

Dim. di (*) $\nearrow g(z^0)\neq 0$, $\searrow g(z^0)=0$

Caso $g(z^0)\neq 0$ $\Rightarrow z^0$ polo semplice.

$$(z-z^0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z^0)(z-z^0)+o(z-z^0)}{h'(z^0)(z-z^0)+o(z-z^0)} \longrightarrow \frac{g(z^0)}{h'(z^0)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right) = \frac{g(z^0)}{h'(z^0)}$$

formula per il residuo caso polo semplice

Caso $g(z^0)=0$ $\qquad$ Tesi: $\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right)=0$

Dico che z^0 sing. eliminabile:

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z^0)(z-z^0)+o(z-z^0)}{h'(z^0)(z-z^0)+o(z-z^0)} \longrightarrow \frac{g'(z^0)}{h'(z^0)} \in \mathbb{C}.$$

Def. e calcolo dell'indice di avvolgimento

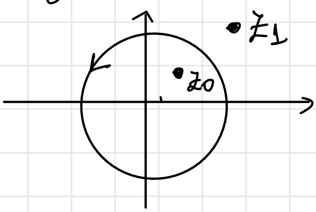
Def. (intuitiva) Sia γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$, e sia $z^0 \notin \gamma$

Si dice INDICE DI AVVOLGIMENTO DI γ RISPETTO A z^0

è il numero di volte che γ "gira" attorno a z^0, contate col segno + nel caso del verso antiorario.

Es.

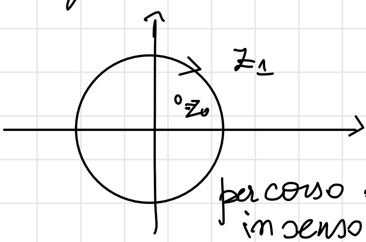
- $\gamma = C_1(0)$ $\qquad r(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z^0) = 1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z^1) = 0.$

- $\gamma = -C_1(0)$

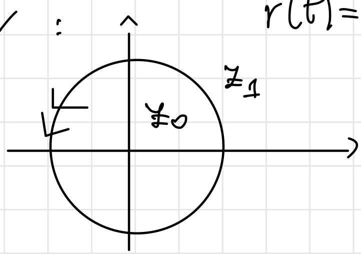


percorso 1 volta in senso orario

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = -1$

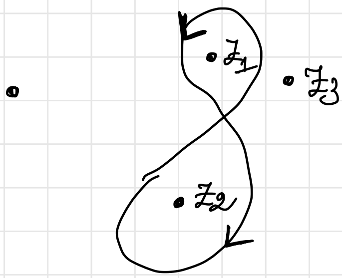
$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 0$

- γ : $\qquad r(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 4\pi]$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 2$

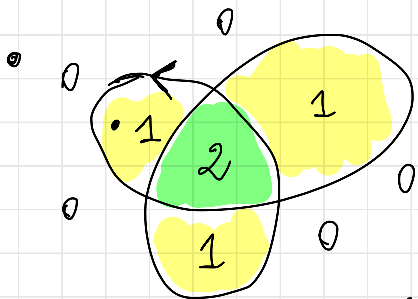
$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 0$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_2) = -1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_3) = 0.$

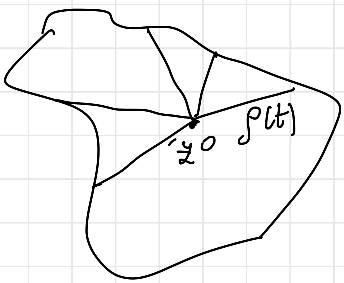


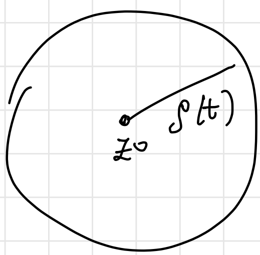
(γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$, $z^0 \notin \gamma$).

<u>Def.</u> (formale) Sia $r(t): [a,b] \to \mathbb{C}$ parametrizzazione di γ.

Sia $\rho(t) := |r(t) - z^0|$. Allora $\exists\, \theta: [a,b] \to \mathbb{C}$

tale che $r(t) = z^0 + \rho(t) e^{i\theta(t)}$





$$\mathrm{Ind}(\gamma, z^0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \quad \Big(\underset{(*)}{\in} \mathbb{Z} \Big).$$

$(*)\quad r(a) \overset{\text{CIRCUITO}}{=} r(b) \Rightarrow \rho(a) = |r(a) - z^0| = |r(b) - z^0| = \rho(b)$

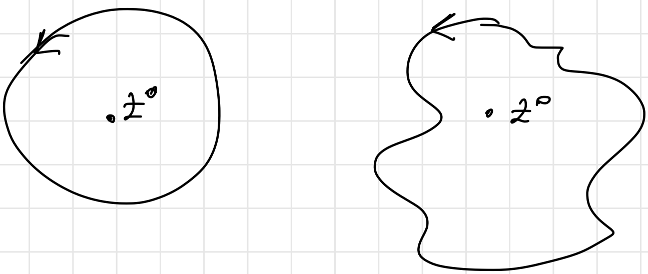
$$\begin{cases} r(a) = z^0 + \rho(a)e^{i\theta(b)} \\ r(b) = z^0 + \rho(b)e^{i\theta(b)} \end{cases} \Rightarrow e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$

$$\Rightarrow i\theta(a) - i\theta(b) = 2k\pi i \Rightarrow \theta(a) - \theta(b) = 2k\pi.$$

Oss.

(1) L'indice non cambia passando a una parametrizzazione equivalente (dello stesso circuito)

(2) L'indice non cambia sostituendo γ con un circuito omotopo a γ in $\mathbb{C} \setminus \{z^0\}$.



Modo analitico per calcolarsi l'indice

$$\boxed{\operatorname{Ind}(\gamma, z^0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz.}$$

<u>Dim.</u> $\quad r(t) = z^0 + \rho(t)\, e^{i\theta(t)}, \quad t \in [a,b].$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz = \int_a^b \frac{\rho'(t) e^{i\theta(t)} + \rho(t)\, i\, \theta'(t) e^{i\theta(t)}}{\cancel{z^0} + \rho(t) e^{i\theta(t)} - \cancel{z^0}}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\rho'(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}{\rho(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}\, dt + i \int_a^b \frac{\cancel{\rho(t)}\, \theta'(t)\, \cancel{e^{i\theta(t)}}}{\cancel{\rho(t)}\, \cancel{e^{i\theta(t)}}}\, dt$$

$$= \log \rho(t) \Big|_a^b + i\, [\theta(b) - \theta(a)].$$

$$\log \rho(b) - \log \rho(a) = 0 \quad \leftarrow \rho(a) = \rho(b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz = \frac{\cancel{i}\,[\theta(b) - \theta(a)]}{2\pi \cancel{i}} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \operatorname{Ind}(\gamma, z^0) \qquad \blacksquare$$

Teorema dei residui

Sia Ω aperto $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma \subseteq \Omega$ circuito omotopo a un punto (in Ω).

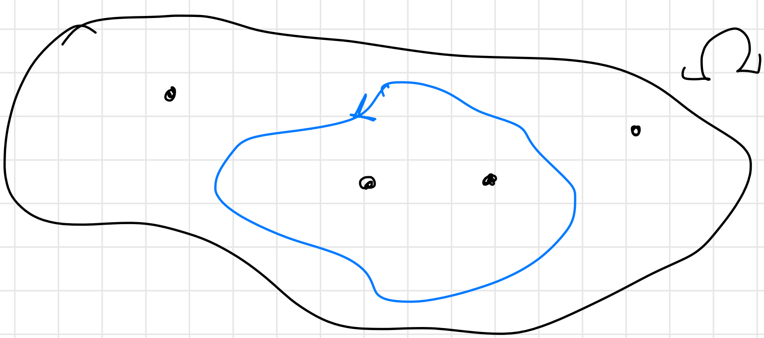
Sia $f: \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa, dove S ("insieme singolare") soddisfa

- $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$
- $acc(S) \cap \Omega = \emptyset$

Allora:

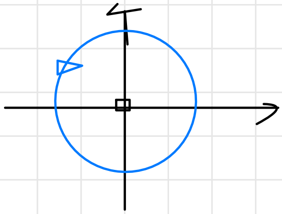
$Ind(\gamma, z^0) \neq 0$ per al più un n° finito di punti e vale

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \underbrace{Res(f, z^0)}_{\in\, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{Ind(\gamma, z^0)}_{\in\, \mathbb{Z}}}$$



Esempi:

- $f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad \gamma = C_1(0)$



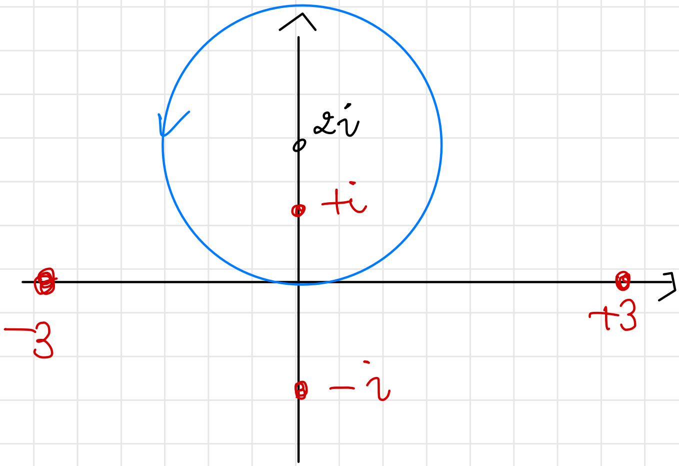
$$\int_\gamma f = 2\pi i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ Res(f,0)}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ Ind(\gamma,0)}}{1} = 2\pi i$$

- $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-9)}$ $\qquad \gamma = C_2(2i)$.

NOTAZIONE

$C_r(z^0)$

cerchio centro z^0 e raggio r percorso 1 volta in senso antiorario



$$\int_{C_2(2i)} f(z)\,dz = 2\pi i \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polo semplice}}}{Res(f, i)} \cdot \underbrace{Ind\,(C_2(2i), i)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = \dots\dots$$

$\boxtimes$

Applicazioni del teorema dei residui in campo reale

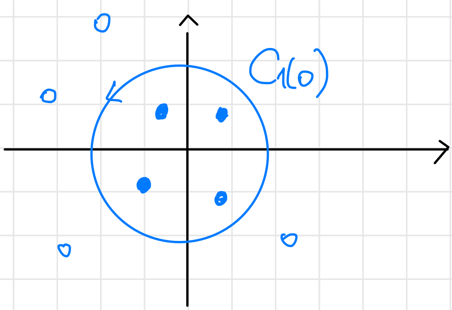
Tipo 1

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \underset{C}{g}(\underbrace{e^{it}}_{r(t)})\, \underbrace{ie^{it}}_{r'(t)}\, dt =$$

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ \sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \end{cases}$$

$$= \int_{C_1(0)} \underset{C}{g}(z)\, dz \underset{\uparrow}{=} 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \mathrm{Res}(\underset{C}{g}, z_0)$$

se g soddisfa le ip. del teorema dei residui su $\Omega \supseteq C_1(0)$, con $\gamma = C_1(0)$



Esempio

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\,dt \underset{\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\cancel{i}}{[4i+e^{it}-e^{-it}]} \frac{i e^{it}}{\cancel{i} e^{it}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{2}{4ie^{it}+e^{2it}-1}}_{\substack{g(r(t)) \\ \shortparallel \\ g(e^{it})}} \underbrace{i e^{it}}_{r'(t)}\,dt \quad \left(\Rightarrow g(z) = \frac{2}{4iz+z^2-1} \right)$$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}(g, z_0) = \text{[da completare]}$$

Valor principale

$$\underset{\text{valor principale}}{\mathrm{V.P.}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \underset{\text{con sing in } x_0}{:=} \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} f\right]$$

→ Se f è integrabile (secondo Riemann), allora
(in senso generalizzato)

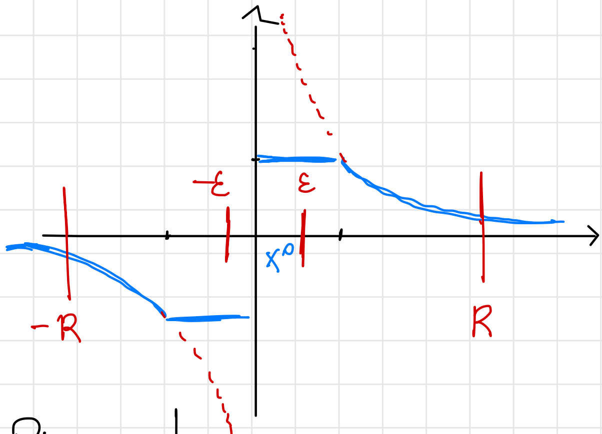
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

→ In generale, può accadere che

$$\mathrm{V.P.}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \in \mathbb{R}, \quad \text{ma } f \text{ non integrabile}$$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0,1] \\ -1 & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$



f non integrabile secondo Riemann!

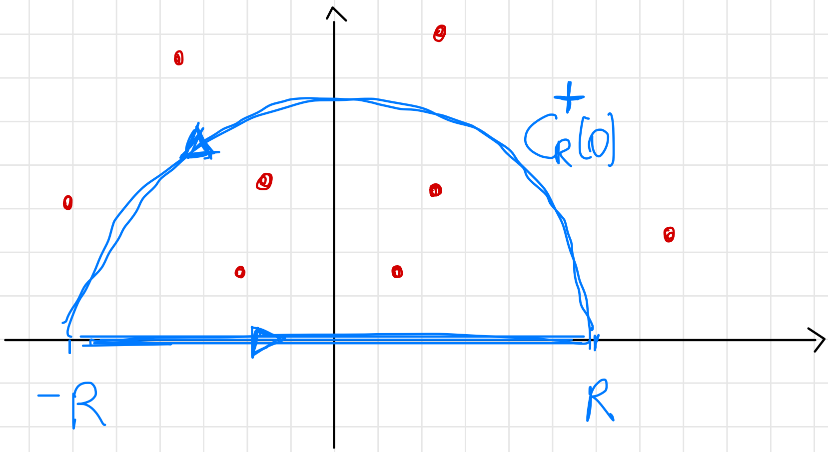
$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0 \quad \forall R \implies \mathrm{V.P.}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0.$$

Tipo 2

$$I = (V.P.)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{z^0 \in S \\ \operatorname{Im} z^0 > 0}} \operatorname{Res}(f, z^0)$$

[IPOTESI: $f = f(z)$ abbia un n° finito di singolarità su $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ + ipotesi (*) (e nessuna singolarità sull'asse reale).]

$$I = \lim_{R\to+\infty} \Big[\underbrace{\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz}_{} - \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz \Big]$$



$$\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right] - \underbrace{\cancel{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz}}_{=\,0}$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{z^0\in S\\ \operatorname{Im} z^0>0}} \operatorname{Res}(f, z^0)$$

$\uparrow$
teo residui
+
lemma di decadimento.

Lemma (di decadimento)

Se $\boxed{\exists\, \alpha>1 \text{ tale che } |f(z)| \le \frac{C}{|z|^\alpha}}$ $(*)$
(per $|z|$ abbastanza grande)

allora $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(t)\,dt = 0.$ $\quad 2\,\dfrac{R}{R^\alpha} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

Oss. Variante analoga nel semipiano $\{\operatorname{Im} z<0\}$.

Esempio

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

polinomi

$\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \right.$ con grado $Q \geq$ grado $P + 2$ e Q senza radici reali $\left. \right]$

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $S = \{\pm i\}$, $(*)$ vale con $\alpha = 2$ ipotesi lemma di decadimento.

$$\Rightarrow \quad I = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \pi \\ -2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) = \pi \end{cases}$$

DA COMPLETARE

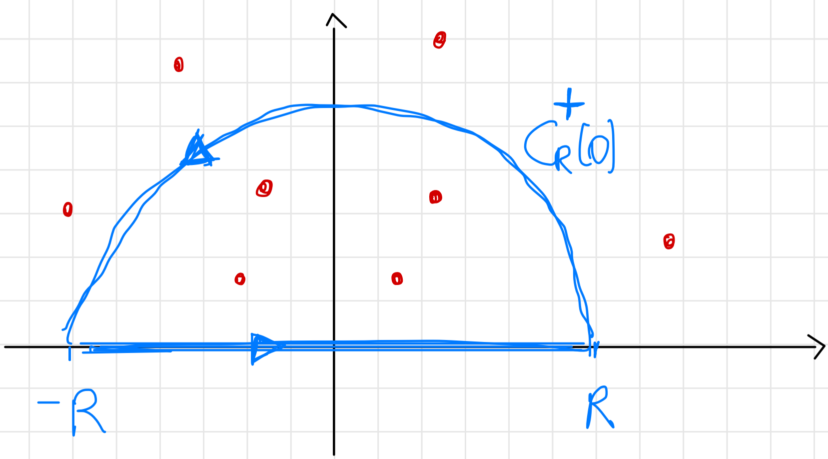
DA COMPLETARE

Tipo 3

$$I = (V.P.) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{i\underset{\in \mathbb{R}^+}{\omega} x}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z^0 \in S \\ \operatorname{Im} z^0 > 0}} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{i\omega z}, z^0\right)$$

<u>IPOTESI</u>: $f(z)e^{i\omega z}$ abbia un n° finito di singolarità su $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ + ipotesi (**) (e nessuna singolarità sull'asse reale).

$$I = \lim_{R \to +\infty} \left[\underbrace{\int_{-R}^{R} f(z) e^{i\omega z}\, dz + \int_{C_R^+(0)} f(z) e^{i\omega z}\, dz} - \int_{C_R^+(0)} f(z) e^{i\omega z}\, dz \right]$$



$$\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0).$$

$$I = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\omega t}\,dz\right] - \underbrace{\cancel{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega t}\,dz}}_{=\,0}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{teo residui}\\ +\\ \text{lemma di Jordan}}}{=} 2\pi i \sum_{\substack{z^0\in S\\ \operatorname{Im} z^0>0}} \operatorname{Res}\left(f_1(z)e^{i\omega t}, z^0\right)$$

<u>Lemma di Jordan</u>

Sotto l'ipotesi

$$\boxed{(**)\qquad \lim_{R\to+\infty}\ \sup_{z\in C_R^+(0)} |f(z)| = 0},$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{R}^+}}{\omega} z}\,dz = 0.$$

<u>Oss.</u> Variante analoga nel semipiano $\{\operatorname{Im} z<0\}$, <u>QUANDO $\omega\in\mathbb{R}^-$</u>

(Jordan vale anche per $\omega\in\mathbb{R}^-$ con $C_R^-(0)$).

Esempio

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \omega = 1$$

$$I = (\text{v.p.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x}\, dx \,, \qquad \text{con } f(z) = \frac{1}{1+z^2}\,, \ \omega = 1$$

$$= 2\pi i \ \text{Res}\left(f(z) e^{i\omega z}, i\right) = \text{COMPLETARE}$$

se sono OK le ip. ✓

- $S = \{\pm i\} \Rightarrow$ no singolarità su $\mathbb{R}$

- $$\sup_{z \in C_R^+(0)} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \xrightarrow[R \to +\infty]{?} 0 \iff \inf_{z \in C_R^+(0)} |1+z^2| \to +\infty$$

$$\sup_{z \in C_R^+(0)} \frac{1}{|1+z^2|} = \frac{1}{\inf_{z \in C_R^+(0)} |1+z^2|}$$

$$|1+z^2| \geq \left| |z^2| - 1 \right| = |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \longrightarrow +\infty$$

TRIANGOLARE

$$|z^2| \leq |z^2+1| + 1$$

$$\hookrightarrow |(z^2+1) - 1| = |z^2+1+(-1)|$$

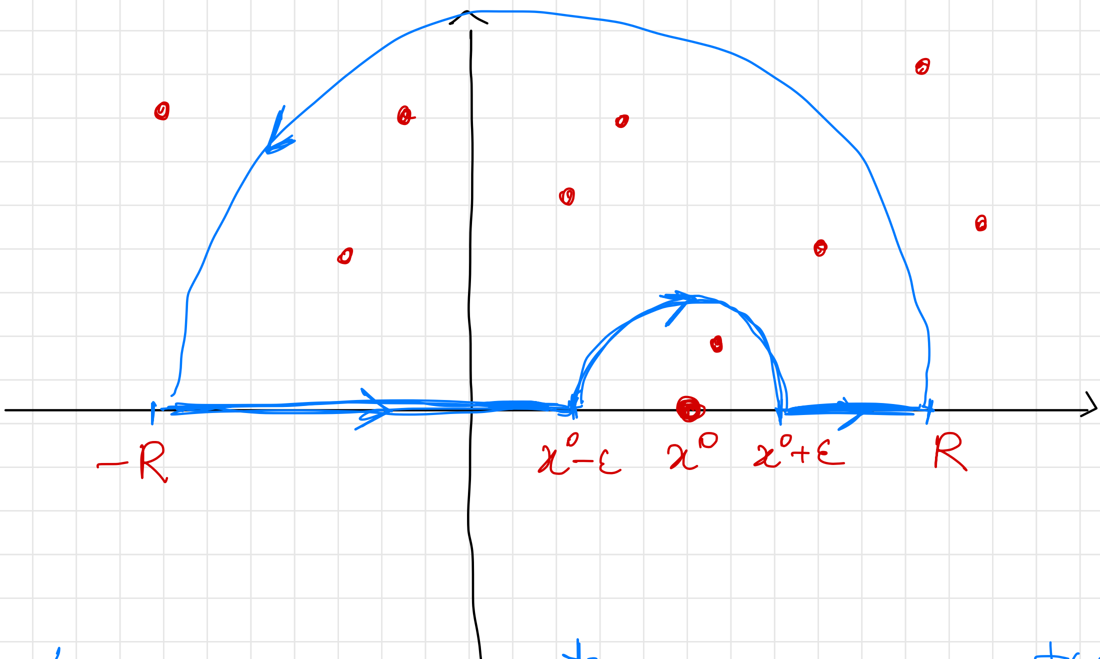
Tipo 4

$$I = (V.P.)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{z^0 \in S \\ \operatorname{Im} z^0 > 0}} \operatorname{Res}(f, z^0) + \pi i \sum_{\substack{x^0 \in \mathbb{R} \\ x^0 \text{ poli semplici}}} \operatorname{Res}(f, x^0)$$

<u>IPOTESI</u>: $f(z)$ abbia un n° finito di singolarità su $\{\operatorname{Im} z > 0\}$

+ $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz = 0$ $(***)$

abbia un n° finito di POLI SEMPLICI su $\mathbb{R}$



$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x^0-\varepsilon] - C_\varepsilon^+(x^0) + [x^0+\varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon^+(x^0)} f(z)\,dz$$

$$\cancel{- \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz}$$

<u>Lemma (polo semplice)</u>

Se x^0 polo semplice,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon^+(x^0)} f(z)\,dz = \pi i \operatorname{Res}(f, x^0).$$

<u>Oss.</u> Variante analoga su $\{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Esempio

$$I = (\text{v.p.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} (\text{v.p.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\,dx$$

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx = 0$$

$f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$z_0 = 0$ polo semplice $\left(\lim_{z\to 0} z f(z) \in \mathbb{C}\right)$

Devo verificare $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz = 0.$ $(\ast\ast\ast)$ ✓

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{2iz}}{z^2}$$

- $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{f_1(z)}\,dz = 0$ per il lemma di decadimento $|f_1(z)| \leq \dfrac{1}{|z|^{2}}$ $\leftarrow \alpha > 1$

- $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} \underbrace{\frac{e^{2iz}}{z^2}}_{f_2(z)}\,dz = 0$ per il lemma di Jordan (2: $\omega \in \mathbb{R}^+$)

$$\sup_{C_R^+(0)} \left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow I = \pi i \,\text{Res}(f, 0) =$ completare ...

Cenni su
→ Residuo all'infinito
→ Funzioni polidrome
→ Funzioni armoniche

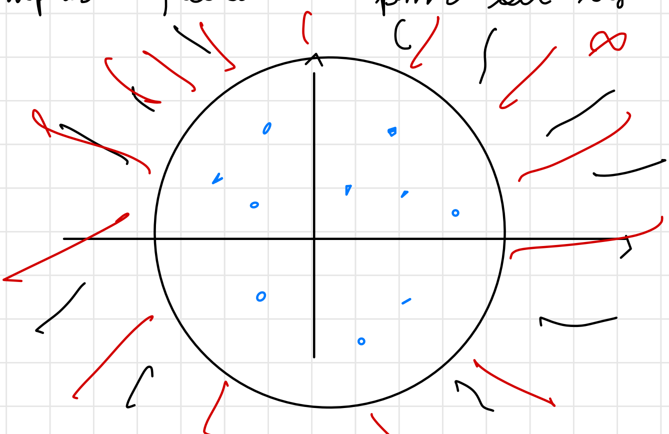
Residuo all'infinito

Def. Diciamo che ∞ è una sing. isolata per f se f olomorfa al di fuori di un disco (in $\mathcal{U}(\infty)$) o equivalentemente $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità isolata nell'origine (d. su $\left|\frac{1}{z}\right| < R \iff |z| > \frac{1}{R}$).

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Teorema: La somma di tutti* i residui di una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\text{un n° finito di punti}\}$ è zero.

(* compreso quello nel punto all'infinito).



Utilità: quando si deve calcolare la somma di molti residui al finito (stesso indice).

Funzioni polidrome

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \qquad \operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

argomento principale $\in [0, 2\pi)$.

- $$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} \right\}$$ ← n valori

$$= \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \left(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

- $$\log z = \{ \log|z| + i \operatorname{Arg} z \}$$ ← ∞ valori

$$\left(w = \log|z| + i \operatorname{Arg} z \Rightarrow e^{w} = e^{\log|z| + i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \right)$$

$z \longmapsto \sqrt[n]{z},\ \log z$ non sono funzioni!

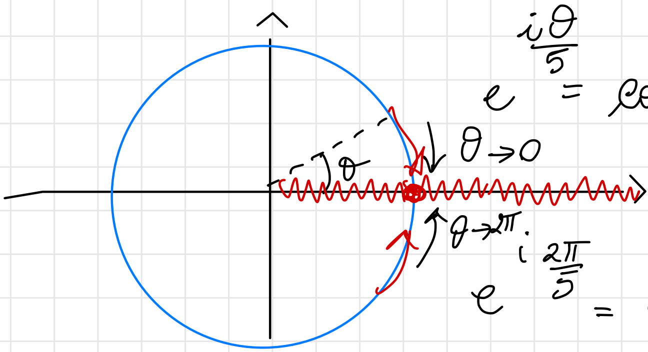
Per definire una radice n-esima, si può specificare l'intervallo di variabilità di $\operatorname{Arg} z$

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$$ con $\operatorname{Arg} z \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi)$

BRANCA della radice n-esima   es. $\bar{\theta} = 0$.

Oss. Una branca della radice n-esima non è continua su $\mathbb{C}$.

Su $|z|=1$.

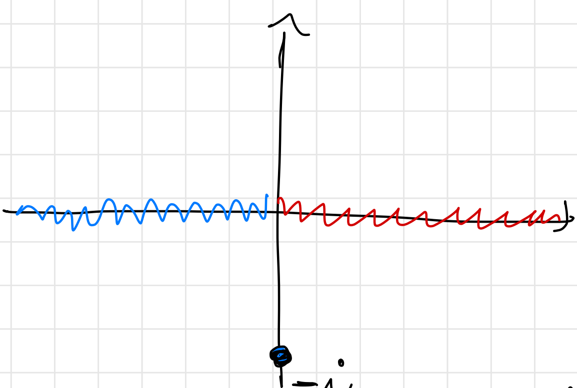


$$e^{i\frac{\theta}{5}} = \cos\left(\frac{\theta}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{5}\right) \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$$

$$e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

(è continua (olomorfa) su $\mathbb{C} \setminus \{\theta = \bar{\theta}\}$)

Oss. Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.



$$f_1(z) = |z|^{1/5} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{5}}$$
con $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi]$

$$f_1(z) = |z|^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{5}}$$
con $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$.

$$f_1(-i) = e^{i\frac{3\pi}{10}}, \quad f_2(-i)\ e^{i\frac{-\pi}{10}}$$

Funzioni armoniche

__Def__ $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice armonica se (u derivabile 2 volte).

$$\Delta u = 0$$

Laplaciano di u $= u_{xx} + u_{yy}$

$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$

$(+ u_{x_3x_3} + \dots + u_{x_nx_n})$.

__Oss 1__ $f = f(z)$ olomorfa, $f = u + iv$

$\Rightarrow$ u, v armoniche

$$(CR) \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \xrightarrow[D_y]{D_x} \begin{cases} u_{xx} = v_{\cancel{yx}} \\ u_{yy} = -v_{\cancel{xy}} \end{cases} + \Rightarrow \Delta u = 0$$

(Analogamente $\Delta v = 0$)

__Oss.2__ u armonica su Ω, Ω sempl. connesso

$\Rightarrow$ $\exists\, v$ armonica (coniugata di u) t.c.

$f = u + iv$ olomorfa.

ANALISI FUNZIONALE

<u>Def.</u> Uno SPAZIO VETTORIALE (su $\mathbb{R}$)

è un insieme V su cui sono definite

$$\begin{cases} \text{SOMMA } + : V \times V \longrightarrow V \\ \text{PRODOTTO PER SCALARE } \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \end{cases}$$

che godono delle proprietà seguenti

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

- $(ts)u = t(su)$
- $t(u+v) = tu + tv$
- $(t+s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

<u>Esempi</u>

(1) $V = \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. $\qquad t \in \mathbb{R}$

$\qquad \underline{y} = (y_1, \dots y_n)$

$$\begin{cases} \underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ t\underline{x} = (tx_1, \dots, tx_n) \end{cases}$$

dimensione finita (n).

<u>BASE</u> $\quad (1, 0, 0 \dots 0), (0, 1, 0, \dots 0) \dots (0, \dots 0, 1)$

② $V = \mathcal{C}^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$\begin{cases} (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ (tf)(x) := t \cdot f(x) \end{cases}$$

dimensione infinita

Es. x^n $n \in \mathbb{N}$ sono lin. indipendenti

$p(x) \equiv 0 \iff$ sono nulli tutti i coeff.

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una NORMA su V è una funzione
$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:

1) $\|v\| > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ POSITIVITÀ
2) $\|tv\| = |t|\|v\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ OMOGENEITÀ
3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ DIS. TRIANGOLARE.

Def: $(V, \|\cdot\|)$ SPAZIO VETTORIALE NORMATO

Oss. Seguono dalle 1) - 2) - 3):

4) $\|\underline{0}\| = 0$ (segue da 2) prendendo $t=0$)

5) $\big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u - v\|. \quad \forall u, v \in V$

(segue da 3):

$$\|u\| = \|u - v + v\| \overset{3)}{\leq} \|u - v\| + \|v\|$$

$$\Rightarrow \|u - v\| \geq \|u\| - \|v\|.$$

scambiare u, v)

Esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\quad\quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

NORMA EUCLIDEA.

Esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

NORMA EUCLIDEA.

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\qquad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ $\qquad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $\qquad p \in (1, +\infty)$

(La disug. triangolare per la norma p, ovvero disug. di Minkowski, richiede l'ipotesi $p \geq 1$).

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

2) $V = \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad , \quad d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx \quad , \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Def. Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. vettoriale normato.
Allora $d(u,v) := \|u-v\|$ definisce una DISTANZA su V, ovvero $d : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1) $d(u,v) \geq 0$ con $=0 \iff u=v$ POSITIVITÀ
2) $d(u,v) = d(v,u)$ SIMMETRIA.
3) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ DISUG. TRIANGOLARE.

Def (V, d) si dice SPAZIO METRICO.

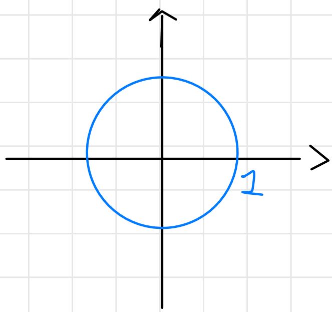
Oss. In uno spazio metrico, possiamo definire le SFERE: dato $r \geq 0$, $v_0 \in V$,

$$B_r(v_0) := \{ v \in V : d(v, v_0) \underset{(\leq)}{<} r \}$$

$$= \{ v \in V : \| v - v_0 \| \underset{(\leq)}{<} r \}$$

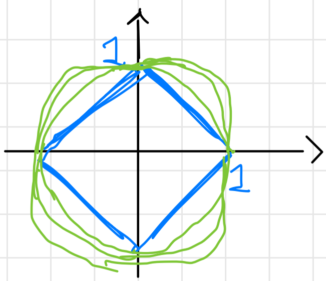
Esempi

1) $V = \mathbb{R}^2$ $\qquad B_1(0) = ?$



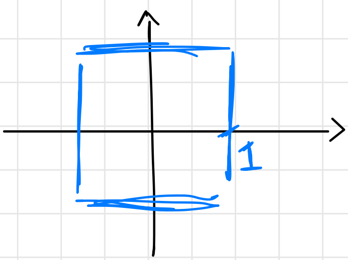
$\| \cdot \|_2 \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}_{\substack{\parallel \\ d_2(x,0) = \| x - \cancel{0} \|_2}} < 1 \}$$



$\| \cdot \|_1 \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1 \}$$



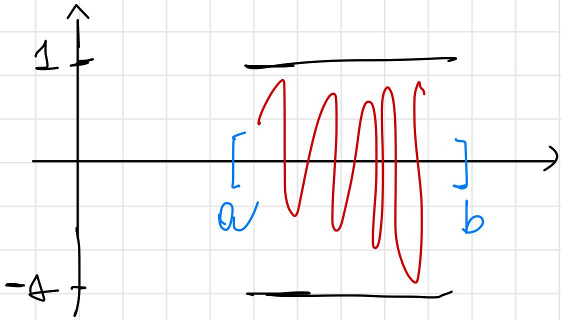
$\| \cdot \|_\infty \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x_1|, |x_2| \} < 1 \}$$

2) $V = C^0([a,b])$

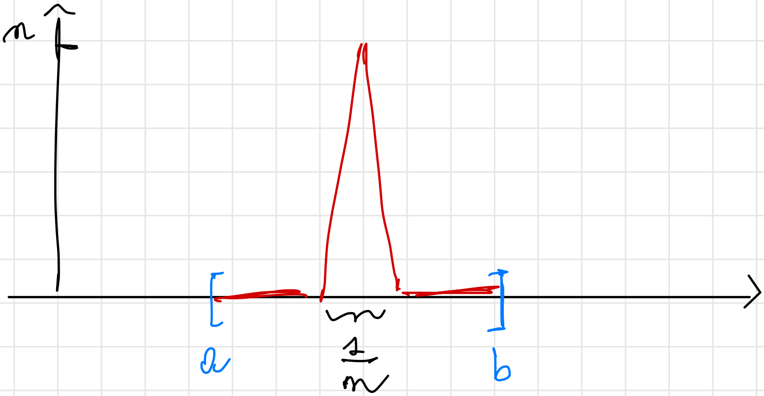
$B_1(0) = \{ f \in V : \|f\|_\infty < 1 \}$ se scelgo $\|\cdot\|_\infty$

$= \{ f \in V : \max |f| < 1 \}$.



$B_1(0) = \{ f \in V : \|f\|_1 < 1 \}$ se scelgo $\|\cdot\|_1$

$= \{ f \in V : \int_a^b |f| < 1 \}$



Def. Se $\{v_n\} \subseteq (V, \|\cdot\|)$, si dice che

$v_n \longrightarrow v$ in V (oppure $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v \in V$)

se:

$d(v_n, v) \longrightarrow 0$ o $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$

$$\left(\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \ d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu \right)$$
$$(v_n \in B_\varepsilon(v))$$

Alcuni fatti VERI in dim finita ma FALSI in dim infinita

1) Tutte le norme sono "EQUIVALENTI" fra loro

2) Tutte le successioni di Cauchy convergono

3) Tutti i sottospazi vettoriali sono CHIUSI.

1) Norme equivalenti

Def. Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), e consideriamo su V due norme $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$

Le norme si dicono EQUIVALENTI se:

(1) $\exists\, C > 0 : \forall v \in V, \ \|v\| \leq C\, |||v|||$

(2) $\exists\, C' > 0 : \forall v \in V, \ |||v||| \leq C' \|v\|$

(le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse

$\|v_n - v\| \leq C\, |||v_n - v||| \longrightarrow 0$

$|||v_n - v||| \leq C' \|v_n - v\| \longrightarrow 0$)

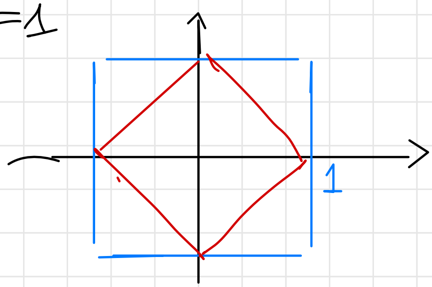
Esempio $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ sono equivalenti

(1) $\exists\, C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \underbrace{\|x\|_\infty}_{= \max\{|x_1|, |x_2|\}} \leq \underbrace{C}_{=1} \underbrace{\|x\|_1}_{= |x_1| + |x_2|}$

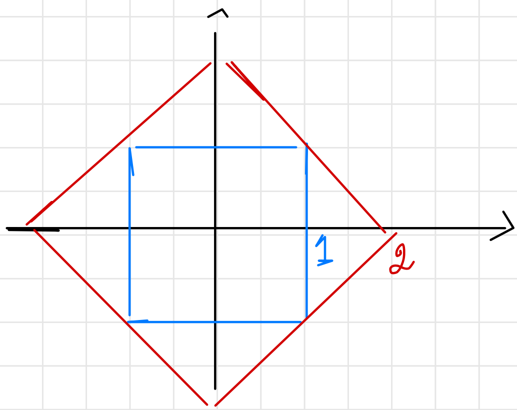
(2) $\exists\, C' > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \underbrace{\|x\|_1}_{= |x_1| + |x_2|} \leq \underbrace{C'}_{=2} \underbrace{\|x\|_\infty}_{= \max\{|x_1|, |x_2|\}}$

Interpretazione geometrica:

$$\|\cdot\|_\infty \underset{C=1}{\le} \|\cdot\|_1 \iff B^{1}_1(0) \subseteq B^{\infty}_1(0)$$



$$\|\cdot\|_1 \le 2\,\|\cdot\|_\infty \iff B^{\infty}_1(0) \subseteq B^{1}_2(0)$$



Teorema: se $\dim V < +\infty \Rightarrow$ tutte le norme su V sono fra loro equivalenti.

FALSO se $\dim V = +\infty$

Controesempio

$V = \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{[a,b]} |f(x)| \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\,dx \end{aligned}\right\}$$ non sono equivalenti

Infatti:

(1) $\|f\|_1 \leq C \, \|f\|_\infty \quad \left(\int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right)$

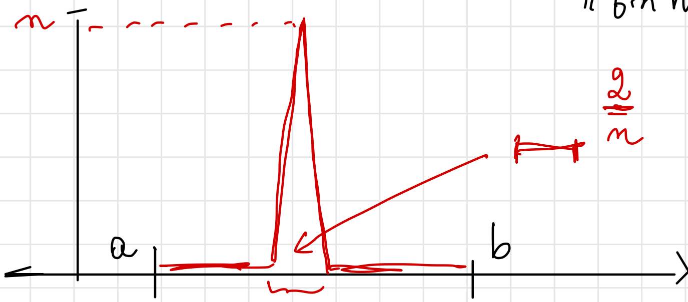
(2) $\nexists \, C' > 0 : \quad \|f\|_\infty \leq C' \|f\|_1 \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$

ovvero:

$\nexists \, C' > 0 : \quad \dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} \leq C' \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ con $\|f\|_1 \neq 0$ $(f \neq 0)$

ovvero:

$\exists \, \{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^0([a,b]) : \quad \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \longrightarrow +\infty.$



$\|f_n\|_1 = \dfrac{2}{n} \cdot n \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

$\|f_n\|_\infty = n \to +\infty$

2) Successioni di Cauchy

Def. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno sp. vett. normato
Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ si dice
SUCCESSIONE DI CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \underbrace{d(v_n, v_m)}_{\|v_n - v_m\|} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$$

Oss. Vale SEMPRE:

Se $\{v_n\}$ converge, allora è di Cauchy.

$$\left(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \underbrace{\|v_n - v\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|v_m - v\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right)$$

<u>Teorema</u> Se $\dim V < +\infty$, vale anche il viceversa, ovvero

$\{v_n\}$ converge $\iff$ $\{v_n\}$ di Cauchy

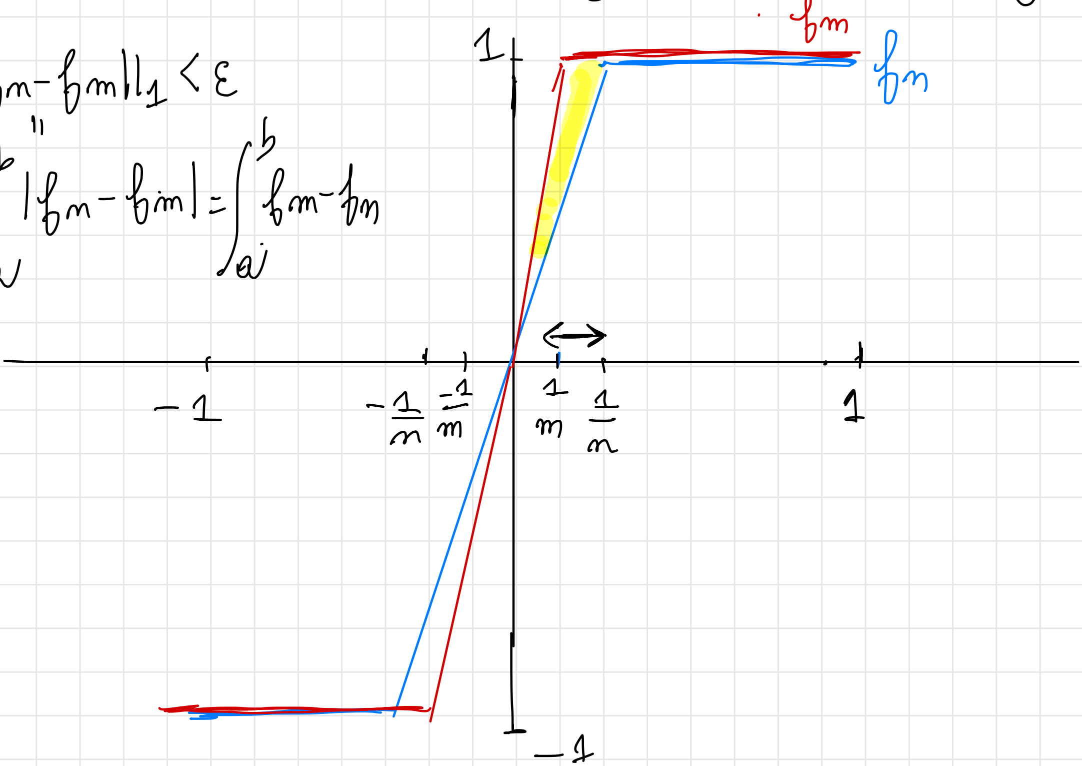
FALSO se $\dim V = +\infty$.

<u>Contraesempio</u> f_n

$V = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ si può costruire una successione di Cauchy che NON converge:

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$$

$$\| \quad \int_a^b |f_n - f_m| = \int_a^b f_m - f_n$$



Def. Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice COMPLETO o DI BANACH se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Esempi

- $\dim V < +\infty \Rightarrow V$ è di Banach
- $V = (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ NON è di Banach

Teorema

$V = (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach

Generalizzazioni: Sono di Banach:

$V = \mathcal{C}^1([a,b]) \quad \|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$V = \mathcal{C}^k([a,b]) \quad \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$

(e analogamente se $[a,b] \rightsquigarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$).

3) Sottospazi vettoriali

<u>Teorema</u>: Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio vett. normato
Se $\dim V < +\infty \Rightarrow$ tutti i sottospazi vettoriali W sono CHIUSI
$\left(\{v_n\} \subseteq W, \; v_n \to v \text{ in } V \right.$
$\left. \Rightarrow v \in W \right)$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^3, \; \|\cdot\|_2$

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
- $\{0\}, \; \mathbb{R}^3$
- rette per l'origine
- piani per l'origine

Il teorema diventa FALSO se $\dim V = +\infty$

Controesempio

$$V = \left(\mathcal{C}^0([a,b]),\ \|\cdot\|_\infty \right)$$

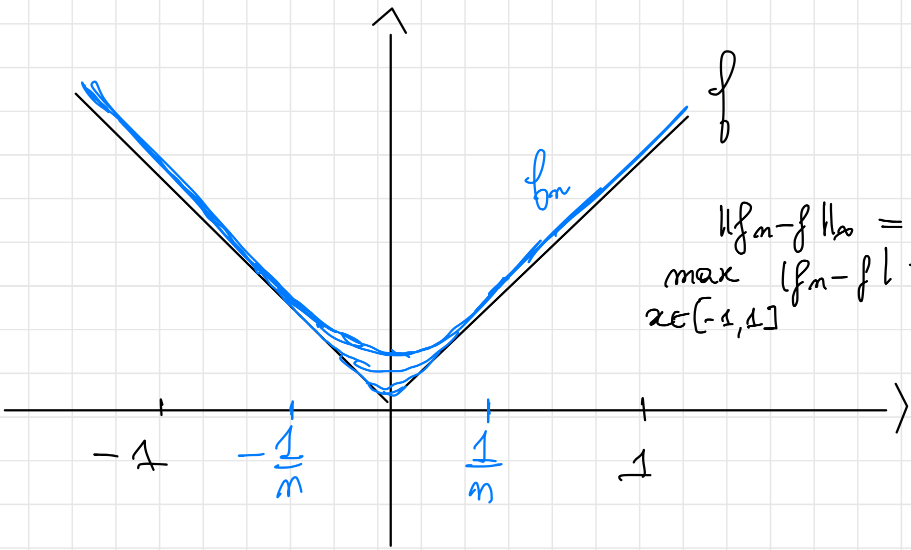
$W = \mathcal{C}^1([a,b])$ è un sottospazio

(es.: $f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$
$f \in W,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow tf \in W$)

NON è chiuso:

$\exists \{f_n\} \subseteq W : f_n \to f$ in V

MA $f \notin W$.

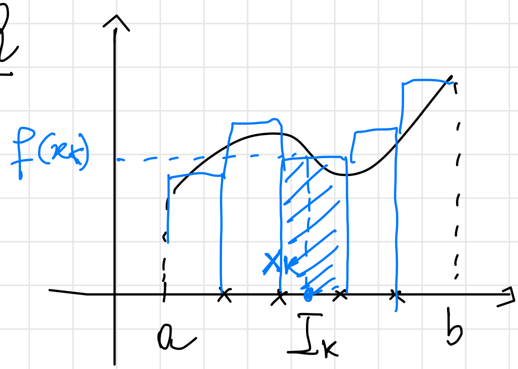


$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |f_n - f| \to 0$$

Integrazione secondo Lebesgue

1) misure e funzioni misurabili
2) def integrale di Lebesgue
3) confronto con Riemann
4) teoremi principali.

$\mathcal{R}$



$K=1,\dots,N$

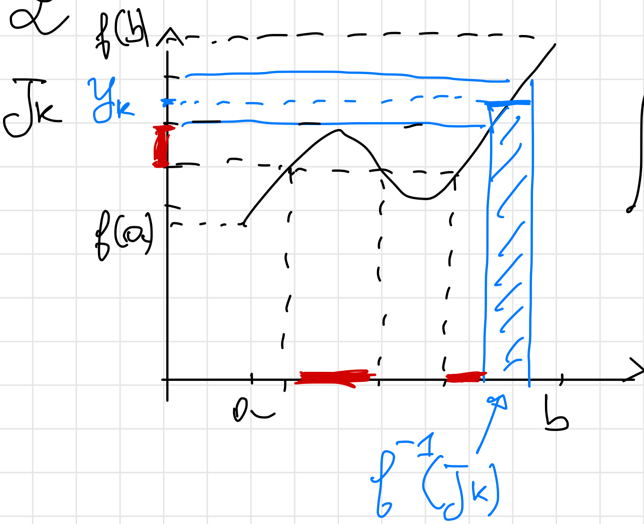
intervallo

$$\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\ell(I_K)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{f(x_K)}_{\text{altezza}}$$

$I_K = [a_K, b_K] \Rightarrow$

$\ell(I_K) = b_K - a_K$

$\mathcal{L}$



insieme

$$\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{K=1}^{N} \underbrace{\ell(f^{-1}(J_K))}_{\text{base}} \cdot \underbrace{y_K}_{\text{altezza}}$$

1) Misure e funzioni misurabili

Def. Sia X insieme, e sia $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{P(X)}_{\text{parti di } X}$ una collezione di sottoinsiemi di X.

$\mathcal{F}$ si dice una σ-ALGEBRA se:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ $\quad$ ($\emptyset :=$ INSIEME VUOTO)

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Oss/Es. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.

Esempi

- X qualsiasi, $\quad \mathcal{F} = P(X) =$ parti di X
- $X = \mathbb{R}^n$, $\quad \mathcal{F} =$ la più piccola σ-algebra contenente gli aperti (σ-algebra dei boreliani).

Def. $(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme}}}{X}, \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-algebra}}}{\mathcal{F}})$ SPAZIO MISURABILE.

Def. Sia $(X, \mathcal{F})$ spazio misurabile

Una MISURA POSITIVA su $(X, \mathcal{F})$ è una funzione

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ POSITIVITÀ

2) Se $\{A_n\}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi di $\mathcal{F}$ 2 a 2 disgiunti, allora

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_n A_n}_{\in \mathcal{F}}\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \qquad \sigma\text{-ADDITIVITÀ}$$

eventualmente $+\infty = +\infty$.

Esempi
- $(X, \mathcal{P}(X))$ $\quad \mu(A) = \mathrm{card}(A)$.
- $(X, \mathcal{P}(X))$ fissato $x_0 \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$

Oss. Seguono da 1) e 2):

3) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots\dots$, $A_i \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

4) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots\dots$, $A_i \in \mathcal{F}$, $\mu(A_1) < +\infty$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

Teorema Esistono su $\mathbb{R}^n$ una σ-algebra $\mathcal{M}$ (misurabili secondo Lebesgue) e una misura positiva m_n (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) tali che:

- tutti gli insiemi aperti appartengono a $\mathcal{M}$
- $A \in \mathcal{M}$ e $m(A) = 0 \Rightarrow \forall B \subseteq A$, $B \in \mathcal{M}$ e $m(B) = 0$ (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \quad i = 1, \dots n\}$
  $\Rightarrow m(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

(......)

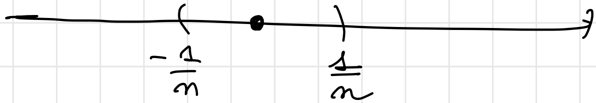
__Oss.__ Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue.

__Oss.__ La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ estende il concetto di volume n-dimensionale.

__Oss.__ Gli insiemi di misura nulla sono importanti

$\boxed{n=1}$

- $A = \{0\} = \bigcap_n \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{A_n}$

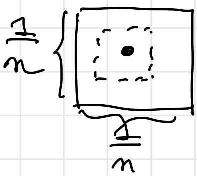


$m(A_n) = \frac{2}{n}$, $m(\{0\}) = 0$

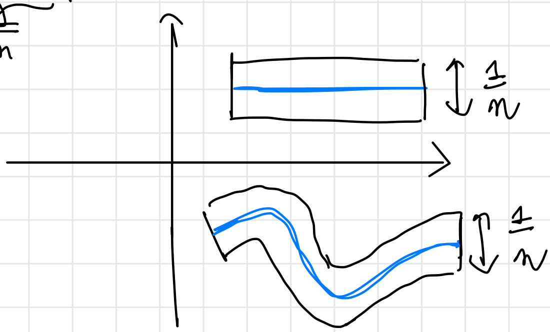
- $A = \{0, 1\} \Rightarrow m(A) = 0$
- $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \Rightarrow m(A) = 0$

$\boxed{n=2}$

- $A =$ unione num. di punti $\Rightarrow m(A) = 0$.



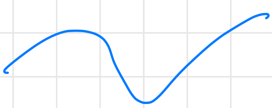
- $A =$



$\Rightarrow m(A) = 0$

$\boxed{n=3}$

-



Def. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice

MISURABILE SECONDO LEBESGUE se

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue

$\Updownarrow$

$\forall C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, $f^{-1}(C)$ misurabile secondo Lebesgue

Oss.

- f continua $\Rightarrow$ f misurabile secondo Lebesgue

(f continua $\Rightarrow$ $\forall A$ aperto, $f^{-1}(A)$ aperto
$\Rightarrow$ $\forall A$ aperto, $f^{-1}(A)$ misurabili).

- Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzioni continue (di funzioni misurabili)

[Più in generale, se
$f: E \to \mathbb{R}$, con E misurabile
f si dice misurabile secondo Lebesgue se
$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $E \cap f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue.]

2) Integrale secondo Lebesgue

Sia $f: E$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile.

① FUNZIONI SEMPLICI

S funzione semplice è una funzione (misurabile] che assume un n° finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile)

$$\left[S = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i} \right] \qquad \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

FUNZIONE CARATT. DI E

$E_i = S^{-1}(\{\alpha_i\})$

CHIUSO

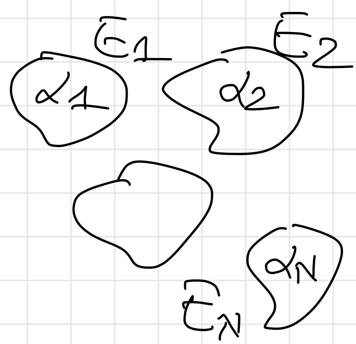
insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$x \in E_1 \Rightarrow S(x) = \alpha_1$

$x \in E_2 \Rightarrow S(x) = \alpha_2$

$\vdots$

$x \in E_N \Rightarrow S(x) = \alpha_N$



$$\int_E s := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, m(E_i)$$

Precisazione: con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$

es. $n=1$ $\quad A = (0,+\infty) \quad A = \bigcup_n \underbrace{(0,n)}_{A_n}$

$$m(A) = \lim_n m(A_n) = +\infty$$

② FUNZIONI MISURABILI $f \geq 0$

$$\int_E f := \sup_{\substack{s \text{ semplici} \\ s \leq f}} \int_E s \quad \left(= \inf_{\substack{s \text{ semplici} \\ s \geq f}} \int_E s \right)$$

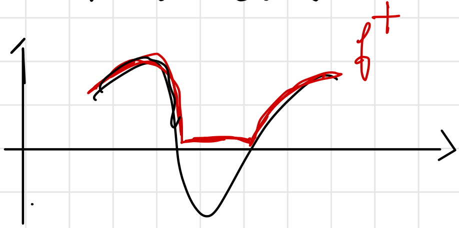
(3) FUNZIONI MISURABILI di segno qualsiasi

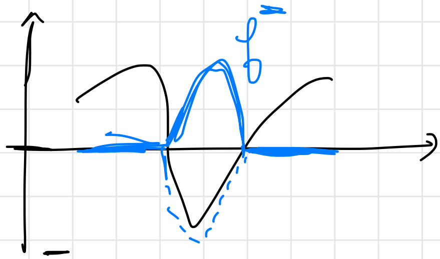
Data f misurabile su E misurabile, scriviamo

$$f = f^+ - f^- \quad \text{con } f^+, f^- \geq 0$$

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := -\min\{f, 0\}.$$

misurabili





$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

A PATTO CHE: almeno uno tra $\int_E f^+$ e $\int_E f^-$ sia finito

(eventualmente $\int_E f = \pm\infty$).

Def. $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile si dice INTEGRABILE SECONDO LEBESGUE se

$$\int_E f \in \mathbb{R}$$

Oss. f integrabile secondo Lebesgue

$$\Longleftrightarrow \int_E f^{+} \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ integrabile secondo Lebesgue} \\ \Longleftrightarrow |f| \text{ integrabile secondo Lebesgue.} \end{array}\right]$$

Infatti:

$$|f| = f^{+} + f^{-}$$

Proprietà dell'integrale di Lebesgue

1) LINEARITÀ: f, g Lebesgue integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) MONOTONIA: f, g Lebesgue integrabili

$$f \leq g \text{ q.o. su } E \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

3) MAGGIORAZIONE DEL MODULO:

f Lebesgue integrabile $\Rightarrow$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2):

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.

Sia S semplice $: E \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \setminus N \\ 1 & \text{su } N \end{cases} \qquad m(N) = 0$$

$$\int_E s = \underbrace{m(E \setminus N) \cdot 0}_{=0} + \underbrace{m(N)}_{=0} \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se f misurabile $: E \to \mathbb{R}$
se f si annulla su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se f, g misurabili $: E \to \mathbb{R}$
se $f = g$ su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

Def. Si dice che una proprietà $P(x)$ vale per q.o. $x \in E$ (q.o. su E) se $P(x)$ vale $\forall x \in E \setminus N$, con $m(N) = 0$

Quindi:

- $f = 0$ q.o. su E $\Rightarrow$ $\int_E f = 0$
- $f = g$ q.o. su E $\Rightarrow$ $\int_E f = \int_E g$

3) Confronto Riemann-Lebesgue

INTEGRALI "PROPRI" (f limitata e nulla fuori da un limitato)

- f R-integrabile $\Rightarrow$ f $\mathcal{L}$-integrabile ($\cancel{\Leftarrow}$)

In caso affermativo, i valori degli integrali coincidono

($\Rightarrow$) Le funzioni semplici secondo Lebesgue $S_{\mathcal{L}}$ sono una classe più ampia delle funzioni semplici secondo Riemann S_R

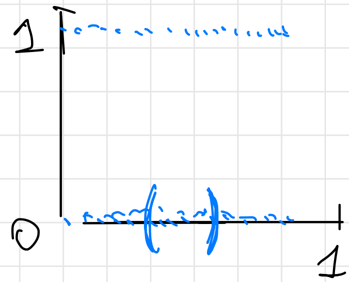
$$\sup_{\substack{s \in S_R \\ s \le f}} \int_E s \le \sup_{\substack{s \in S_L \\ s \le f}} \int_E s \le \inf_{\substack{s \in S_L \\ s \ge f}} \int_E s \le \inf_{\substack{s \in S_R \\ s \ge f}} \int_E s$$

se f R-integrabile, coincidono e sono finiti

$\cancel{\Leftarrow}$ Controesempio:

$\exists\, f$ Lebesgue integrabile ma <u>NON</u> Riemann-integrabile su $E = (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



FUNZIONE DI DIRICHLET $= \chi_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$

- NON R-integrabile

$s \in S_R$, $s \geq f \Rightarrow s \geq 1$ su $(0,1)$

$\Rightarrow \int_0^1 s \geq 1$

$s \leq S_R$ $s \leq f \Rightarrow s \leq 0$ su $(0,1)$

$\Rightarrow \int_0^1 s \leq 0$.

- f $\mathcal{L}$-integrabile, $\int_0^1 f = 0$ 1

$$\int_0^1 f = 1\,\underbrace{m\big((0,1)\cap\mathbb{Q}\big)}_{=0} + 0 \cdot m\big(\overset{=1}{(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}\big) = 0$$

INTEGRALI IMPROPRI f non limitata e/o definita su un non limitato

In $\mathbb{R}$:

Supponiamo che f limitata sia R-integrabile su $[-L, L]$ $\forall L>0$.

Allora: $\exists \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} |f| \in \mathbb{R}$

f $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $|f|$ R-integrabile (in senso improprio) su $\mathbb{R}$.

$\Updownarrow$

$|f|$ $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}$

$\Downarrow$ $\quad$ $\cancel{\Uparrow}$

f R-integrabile (in senso improprio su $\mathbb{R}$)

e in tal caso, l'integrale di Lebesgue di f coincide con l'integrale improprio di f.

Analogamente se f non limitata.

Controesempio: una funzione Riemann-integrabile (in senso impropio) ma non Riemann-integrabile (in senso impropio) in modulo, e quindi **non** Lebesgue integrabile

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{in } (0, +\infty)$$

- Riemann-integrabile in $(0, +\infty)$

Infatti

$$\exists \lim_{L \to +\infty} \int_0^L \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{finito}$$

(tramite analisi complessa)

- non Riemann-integrabile in modulo

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$$

(tramite serie)

$$\sum_{K=1}^{+\infty} \int_{(K-1)\pi}^{K\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \sim \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K}$$

Quindi

$\frac{\sin x}{x}$ NON Lebesgue integrabile su $[0,+\infty)$

4) Principali teoremi nella teoria di Lebesgue.

Def. Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{ f : E \to \mathbb{R} \text{ } \mathcal{L}\text{-integrabili} \} \Big/ \sim$$

spazio vettoriale: f, g $\mathcal{L}$-integrabili
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ $\mathcal{L}$-integrabile

$$\left(\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g \right)$$

Def. Data $f \in L^1(E)$, $\|f\|_{\underset{L^1(E)}{1}} := \int_E |f|$

- $\int_E |f| \geq 0$ $\quad\left[\int_E |f| > 0 \quad \forall f \neq \text{"}0\text{"} \right]$
- $\int_E |\lambda f| = |\lambda| \int_E |f|$
- $\int_E |f+g| \leq \int_E |f| + \int_E |g|$

$|f+g| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_E |f+g| \leq \int_E (|f| + |g|)$

$$\int_E |f| = 0 \;\not\Longrightarrow\; f = 0 \text{ su } E$$

$$\Longrightarrow \; f = 0 \text{ q.o. su } E$$

$$f \sim 0$$

Def. Date $f, g \in L^1(E)$, diciamo che
f è equivalente a g se $f = g$ q.o. su E.

(è una relazione di equivalenza:
$f \sim f$, $\quad f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$, $\quad f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$)

$\Rightarrow$ Identificheremo le funzioni equivalenti.

Teorema
$(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach
(tutte le successioni di Cauchy convergono).

Convergenza in $L^1(E)$

Def $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$, $f_n \to f$ in $L^1(E)$ $\iff$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0, \quad \text{ovvero}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \, dx = 0.$$

Consideriamo per semplicità $f = 0$

Q: $f_n \to 0$ puntualmente q.o. in E.

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_E f_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \overset{?}{=} \int_E \underbrace{\lim_n f_n}_{=\,0}$$

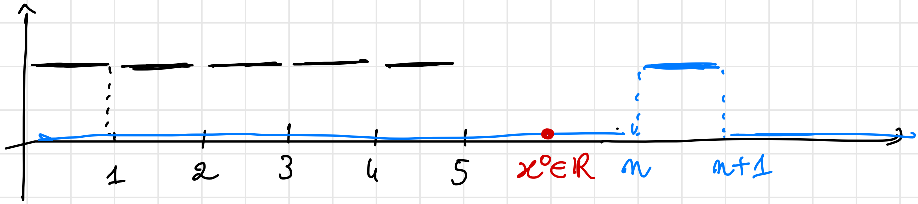
$\rightsquigarrow$ Teoremi di passaggio al limite sotto integrale

$$\boxed{\underline{Q}:\quad f_n \to 0 \text{ q.o. su } E \quad \overset{?}{\cancel{\Longrightarrow}} \atop \underset{?}{\cancel{\Longleftarrow}} \quad f_n \to 0 \text{ in } L^1(E)}$$

<u>Controesempio 1</u> $\quad \cancel{\Longrightarrow}$

$\exists\, f_n \subseteq L^1(\mathbb{R})$: $\begin{cases} f_n \to 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\to 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$

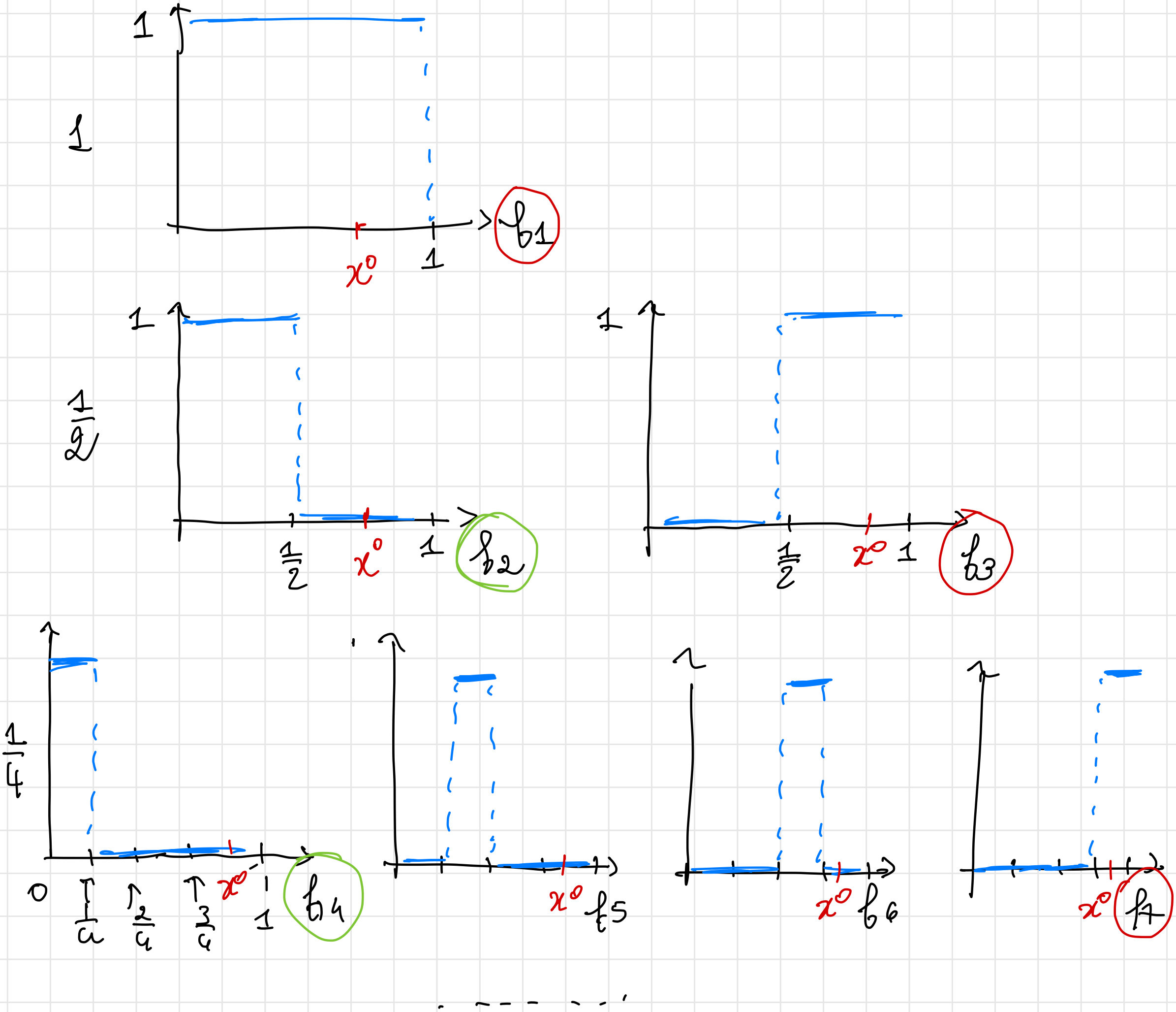
$$f_n = \chi_{(n,n+1)} = \begin{cases} 1 & x \in (n,n+1) \\ 0 & x \notin (n,n+1) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$



- Fissato $x^0 \in \mathbb{R}$, $f_n(x^0) = 0$ definitivamente (per $n \gg 1$)
- $\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,dx = \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

<u>Controesempio 2</u>

$\exists\, f_n \subseteq L^1(0,1)$: $\quad f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$
$\qquad f_n \not\to 0$ q.o. su $(0,1)$



- $f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$: $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f_n| \to 0$
- $f_n(x^0) \not\to 0 \quad \forall x^0 \in (0,1)$.

Fissato $x^0 \in (0,1)$, $\exists\, K(n)$: $f_{K(n)}(x^0) \equiv 1$.

Proposizione: Se $f_n \to 0$ in $L^1(E)$, allora $\exists\, f_{k(n)} \to 0$ q.o. in E.

Oss.

- Si può mettere f al posto di 0.
- Nell'esempio, è vero!
- Conseguenza:

  Se una successione f_n ammette limite in $L^1(E)$ allora questo limite deve coincidere col limite puntuale q.o. Infatti

  $f_n \to f$ in $L^1(E)$

  Allora $\exists\, f_{k(n)} \to f$ q.o. in E.

  (per la proposizione).

  limite puntuale (q.o.)

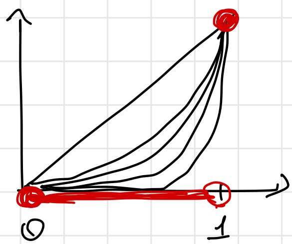
  Quindi se $f_n \to g$ q.o. in E.

  $\left(\Rightarrow f_{k(n)} \to g \text{ q.o. in } E \right.$

  Per l'unicità del limite puntuale q.o., $f = g$ q.o. in E)

Recall: per passare al limite sotto integrale nella teoria di Riemann, serve la cv. uniforme. È un'ip. molto forte: in molti casi, il teorema non si può applicare, anche se $\lim \int = \int \lim$.

Es. $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1]$.



$$x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 = \int_0^1 \lim f_n = \lim \int_0^1 f_n = \lim \underbrace{\int_0^1 x^n}_{= \frac{1}{n+1}}$$

ma non è vero che

$$f_n \to f \text{ uniformemente}$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n - f| \not\to 0$$

Teorema di conv. dominata (di Lebesgue)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ e sia $f_n \to f$ q.o. su E.

Supponiamo che $\exists\, g \in L^1(E)$ indip. da n tale che

(*) $\quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad$ q.o. $x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(definitivamente)

Allora $f_n \longrightarrow f$ in $L^1(E)$

Oss.

- La (*) è un'ip. molto più debole della cv. uniforme.
- In particolare per $f_n(x) = x^n$ su $(0,1)$, la (*) è immediatamente verificata, prendendo $g \equiv 1$
- Invece, nel controesempio 1, $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}$: se $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. su $\mathbb{R}$, $g \notin L^1(\mathbb{R})$ ($g \geq 1$ su una semiretta dx)
- È un teorema di passaggio al limite sotto $\int$

$$|f_n - f| \to 0 \text{ su } E \underset{(q.o.)}{} \overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \int_E |f_n - f| \to 0$$

$\Rightarrow$ il lim degli integrali $\equiv$ l'integrale del lim

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$. Supponiamo che:

(**) $\quad f_n \geq 0$ q.o. su E, $\quad f_{n+1} \geq f_n$ q.o. su E

Allora:

$$\int_E \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{\exists\ \text{q.o.}} \, dx \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n$$

eguaglianza in $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Oss.

- Il teo si applica anche se $f_n \leq 0$ $\searrow$

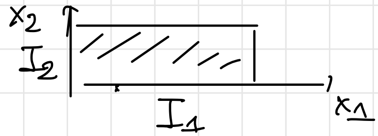
  Infatti considero $g_n = -f_n \geq 0$ $\nearrow$

  B.L. a g_n $\Rightarrow$ $\displaystyle \int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n$

  $$\int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$$

- Può valere anche come $+\infty = +\infty$.

Integrali multipli



Teorema Fubini

Sia f $\mathcal{L}$-integrabile su

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^{m+n} & & \mathbb{R}^{m} & & \mathbb{R}^{n}\\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ I & = & I_1 & \times & I_2\end{array}$$

Allora:

1) per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ $\mathcal{L}$-int. su I_2

2) $x_1 \longmapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$ $\mathcal{L}$-int. su I_1

3) $$\int_{\substack{I \\ \shortparallel \\ I_1 \times I_2}} f(x_1, x_2)\, \underbrace{dx_1 dx_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{misura di} \\ \text{Lebesgue} \\ \text{su } \mathbb{R}^2}} = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$$

Oss. Si può scambiare il ruolo delle variabili:

Quindi:

$$\int_I f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$$

$$= \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

Teorema Tonelli

Sia $f \geq 0$ misurabile su $I = I_1 \times I_2$.

Supponiamo che:

1) per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ $\mathcal{L}$-int. su I_2

2) $x_1 \longmapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$ $\mathcal{L}$-int. su I_1

Allora:

f $\mathcal{L}$-integrabile su $I_1 \times I_2$.

(e quindi, per Fubini, $$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2 \Big)$$

Oss.

Se ho una f che cambia segno,

posso provare a applicare Tonelli a $|f|$:

se $|f|$ soddisfa 1) e 2), Tonelli $\Rightarrow$

$|f|$ $\mathcal{L}$-integrabile $\Rightarrow$ f $\mathcal{L}$-integrabile

$\Rightarrow$ posso applicare Fubini.

Spazi di Lebesgue (o spazi L^p)

misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

Def. $L^1(E) = \{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ |f| \ \mathcal{L}\text{-integrabile} \}$

sp. vettoriale normato (di Banach)

$$\| f \|_1 := \int_E |f(x)| \, dx$$

$p \in [1, +\infty)$ $\qquad$ $p \in \mathbb{R}$

Def. $L^p(E) = \{ f : E \to \mathbb{R} \ : \ |f|^p \ \mathcal{L}\text{-integrabile} \}$

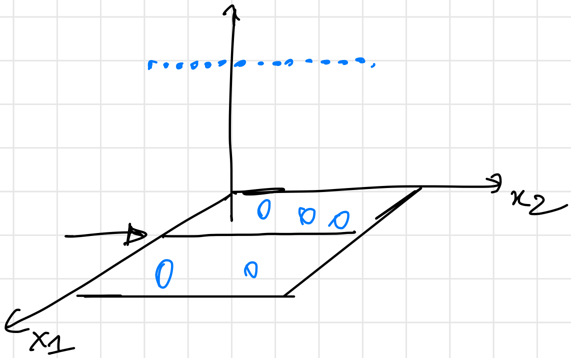
sp. vettoriale normato (di Banach)

$$\| f \|_p := \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

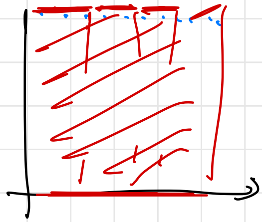
(identificando f e g se $f = g$ q.o. su E)

Teorema $(L^p(E), \| \cdot \|_p)$ è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante: $p = 2$.
- Caso "limite": $p = +\infty$.



$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 0$$



- Def. e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue).

$p \in [1, +\infty)$

- **Appartenenza a L^p:**

$$f \in L^p(E) \overset{\text{per def}}{\Longleftrightarrow} \int_E |f|^p < +\infty.$$

- **Convergenza in L^p:**

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E), \quad f \in L^p(E), \quad \underbrace{\left(\int_E |f_n - f|^p\right)}_{\substack{\| \\ \|f_n - f\| \\ \| \\ \text{dist}(f_n, f)}} \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

Candidato lim: f limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p \overset{?}{=} \int_E \underbrace{\lim |f_n - f|^p}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$\rightsquigarrow$ teo di passaggio al limite sotto integrale.

$$L^\infty(E) \overset{\text{def}}{:=} \Big\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \overbrace{\operatorname*{ess\text{-}sup}_{x \in E} |f(x)|}^{\|f\|_\infty} < +\infty \Big\} \Big/ \sim$$

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{x \in E} |f(x)| := \min \{ M : |f(x)| \leq M \ \ \cancel{\forall x \in E} \ \text{q.o. } x \in E \}$$

Teorema: $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach

- **Appartenenza a L^∞:**

$$f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty$$

- **Convergenza in L^∞:**

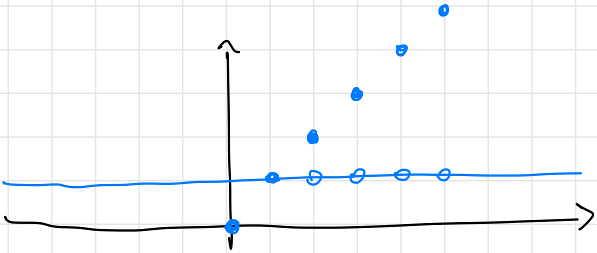
$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E), \quad f \in L^\infty(E): \quad \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

($\Leftrightarrow$ convergente unif. a meno di un insieme di mis. nulla)

Esempi di funzioni in $L^\infty(\mathbb{R})$.

- $f(x) = 1$ $\qquad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ $\qquad \left(\underset{g=f \text{ q.o.}}{g \sim f}\right)$

- $g(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$



g non è limitata
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = +\infty$$
$$g(n) \to +\infty$$

g è essenzialmente limitata
$$\operatorname*{ess-sup}_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| < +\infty.$$
$$|g(x)| \underset{\uparrow}{\leq} 1 \quad \text{per q.o. } x\in\mathbb{R}$$
falsa solo per $x\in\mathbb{N}$
$m(\mathbb{N}) = 0$

Oss. $f \in L^p(E)$ $\forall p \in [1,+\infty]$
$$\Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

(analogo di: in $\mathbb{R}^2$
$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to+\infty} \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es. An 1}}}{=} \overset{\substack{\|x\|_\infty \\ \|}}{\max\{|x_1|,|x_2|\}}\Big)$$

Risultati di confronto (al variare di p)

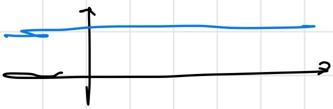
Q: $p \leq q \qquad p, q \in [1, +\infty] \overset{?}{\Longrightarrow} L^p(E) \not\subset L^q(E)$, $L^p(E) \not\supset L^q(E)$

In generale, la risposta è <u>NO</u>

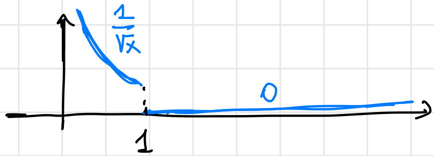
<u>Controesempi</u>: $L^1(0,+\infty)$, $L^2(0,+\infty)$, $L^\infty(0,+\infty)$

- $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$

$$f(x) \equiv 1, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{|f|}_{1} = \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{|f|^2}_{1} = +\infty$$



- $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$



$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty \ ; \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |f|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$$

- $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ma $f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| = +\infty \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty.$$

Disuguaglianza di Hölder

Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Siano $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$, con

p' := esponente coniugato di p definito da $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}$ (con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$)

(Oss: se $p < +\infty$ $\left[p' = \frac{p}{p-1}\right]$; se $p = +\infty$, $p' = 1$ // $\begin{cases} 1' = \infty \\ 2' = 2 \\ \infty' = 1 \end{cases}$)

Allora:

$$\boxed{\| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_p \, \| g \|_{p'}}$$

Esempi: $f, g \in L^2(E) \Rightarrow \| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_2 \, \| g \|_2$

$f \in L^1(E), g \in L^\infty(E) \Rightarrow \| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_1 \, \| g \|_\infty$

(Infatti: $\int_E |fg| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia dell'integrale}}}{\leq} \int_E \left(\operatorname{esssup}_{x \in E} |g(x)|\right) \cdot |f| = \| g \|_\infty \, \| f \|_1$.).

Conseguenze di Hölder sul confronto tra spazi L^p

PROPRIETÀ DI IMMERSIONE

(1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(E) < +\infty$ e sia $q \geq p$

Allora $L^q(E) \subseteq L^p(E)$, e

$$(*) \quad \|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E).$$

In particolare, se $q = +\infty$ ho che $\forall p \in [1, +\infty)$, $L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti:

$$\int_E |f|^p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia} \\ \text{dell'integrale}}}{\leq} \int_E \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f|\right)^p$$

elevando alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \leq (m(E))^{1/p} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Dim. (di $(*)$ a partire da Hölder) Suppongo $f \in L^q(E)$.

$$\int_E |f|^p = \int_E \underbrace{|f|^p}_{L^{q/p}} \cdot \underbrace{\overset{1}{\chi_E}}_{L^{(q/p)'}} \leq \||f|^p\|_{L^{q/p}} \cdot \|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}}$$

uso $q/p \geq 1$

- $f^p \in L^{q/p}$: Infatti $\int_E (|f|^p)^{q/p} = \int_E |f|^q < +\infty$
- $\chi_E \in L^{(q/p)'}$: Infatti $\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} \underset{\uparrow}{=} \int_E 1 = m(E) < +\infty$

$$\left(\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q-p}{p}} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q-p} = \frac{q}{q-p}. \right)$$

- $\| \, |f|^p \, \|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^{\cancel{p} \, q/\cancel{p}} \right)^{\frac{p}{q}} = \left(\int_E |f|^q \right)^{p/q}$
- $\| \chi_E \|_{L^{(q/p)'}} = \left(\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} \right)^{\frac{1}{(q/p)'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$

  $\uparrow$ conto sopra per $\left(\frac{q}{p}\right)'$

Quindi:

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_E |f|^q \right)^{p/q}$$

Elevo tutto alla $\frac{1}{p}$

$$\| f \|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \| f \|_{L^q(E)}.$$

PROPRIETÀ DI INTERPOLAZIONE

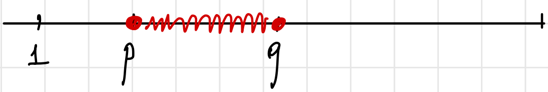
(2) Se $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, con $p \leq q$

$\Rightarrow f \in L^r(E) \quad \forall r \in [p, q]$ e

$$\| f \|_{L^r(E)} \leq \| f \|_{L^p(E)}^{\alpha} \cdot \| f \|_{L^q(E)}^{1-\alpha}$$

dove $\alpha \in (0,1)$ tale che $\quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}$

Es. $f \in L^1(E) \cap L^\infty(E) \Rightarrow f \in L^r(E) \quad \forall r \in [1, +\infty]$



Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E misurabile in $\mathbb{R}^n$)

$\underbrace{C_0^\infty(E)}_{\{f : E \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty \text{ e aventi supporto compatto in } \bar{E}\}}$ è un sottospazio DENSO in $L^p(E)$.

Ovvero:

- $\forall f \in L^p(E) \quad \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E)$ tale che
$$\| \varphi_n - f \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
- $\forall f \in L^p(E), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_0^\infty(E)$ tale che
$$\| \varphi - f \|_{L^p} < \varepsilon$$

Oss. Falso nel caso $p = +\infty$.

Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E aperto in $\mathbb{R}^n$)

$\underbrace{C_0^\infty(E)}_{\|}$ è un sottospazio DENSO in $L^p(E)$.

$\{ f : E \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e aventi supporto compatto in $E \}$

Ovvero:

- $\forall f \in L^p(E) \quad \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E)$ tale che

$$\| \varphi_n - f \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

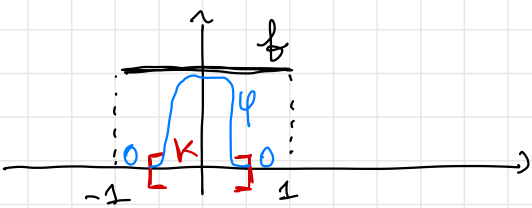
- $\forall f \in L^p(E), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_0^\infty(E)$ tale che

$$\| \varphi - f \|_{L^p} < \varepsilon$$

Oss. Falso nel caso $p = +\infty$.

Es. Basta prendere $f \in L^\infty(E)$, $f \equiv 1$, $E = (-1, 1)$

$\nexists \varphi \in C_0^\infty(E)$: $\quad \| f - \varphi \|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$



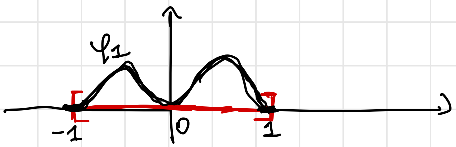
$$\underset{x \in (-1,1)}{\text{ess sup}} |f(x) - \varphi(x)| \geq 1$$

$$\| f - \varphi \|_{L^\infty(E)}$$

Def. Data $\varphi \in C^\infty(E)$ IL SUPPORTO DI φ è

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}}$$ = il più piccolo chiuso contenente $\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}$ (in particolare è un chiuso)

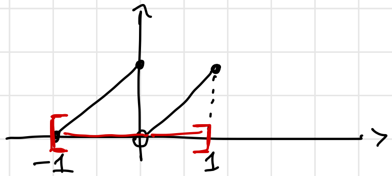
Esempi $E = \mathbb{R}$



$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} = (-1,0) \cup (0,1)$

$\mathrm{supp}(\varphi) = [-1, 1]$

$E = \mathbb{R}$



$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} = (-1, 1]$

$\mathrm{supp}(\varphi) = [-1, 1]$

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è COMPATTO se è limitato e chiuso.

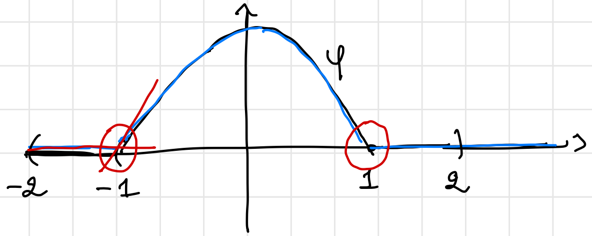
Def. $C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \to \mathbb{R}$ derivabili infinite volte tali che $\mathrm{supp}(\varphi)$ è un sottoinsieme compatto di $E\}$.

$\uparrow$ aperto di $\mathbb{R}^n$

Es. $\varphi_1 \notin C_0^\infty(-1, 1)$, perchè $\mathrm{supp}\,\varphi = [-1, 1]$ $E = (-1,1)$
quindi $\mathrm{supp}\,\varphi$ è compatto ma non è un sottoinsieme di E.

$\varphi_1 \in C_0^\infty(-2,2)$ perchè $\mathrm{supp}\,\varphi = [-1, 1]$ $E = (-2,2)$.
è un sottoinsieme compatto di E.

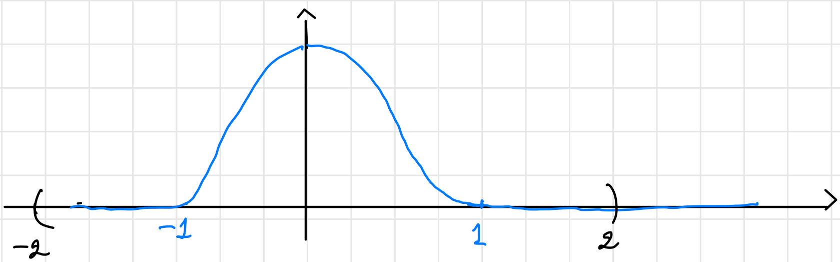
Es.



$\varphi \notin C_0^\infty(-2,2)$ $\qquad$ $\text{supp}\,\varphi = [-1,1]$ compatto $\subseteq (-2,2)$

Es.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [-1,1] \\ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & x \in (-1,1) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$



- φ è derivabile infinite volte in x^0, $\forall x^0 \in \mathbb{R}$
- $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} = \overline{(-1,1)} = [-1,1]$

Quindi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Oss. $\varphi \in C_0^\infty(-2,2)$

$\varphi \notin C_0^\infty(-1,1)$ $\qquad$ $[-1,1] \not\subseteq (-1,1)$.

Prodotto di convoluzione

Oss. $f, g \in L^1(E) \not\Rightarrow f \cdot g \in L^1(E)$

Es. $E = (0,1)$ $\quad f = g = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(E)$ ma $f \cdot g = \frac{1}{x} \notin L^1(0,1)$

Nel caso $E = \mathbb{R}$, si può definire un prodotto interno a $L^1(\mathbb{R})$:

Proposizione 1: Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto

$$\underbrace{f * g}_{\text{PRODOTTO DI CONVOLUZIONE TRA } f \text{ e } g}(x) := \int_{\mathbb{R}_y} f(\underset{\uparrow\ \text{parametro}}{x} - y)\, g(y)\, d\underset{\uparrow\ \text{variabile di integrazione}}{y}$$

(i) $f * g(x)$ esiste finito per q.o. $x \in \mathbb{R}$;
(ovvero per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $y \longmapsto f(x-y) g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}$)

(ii). $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

(iii) $\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ $(< +\infty)$.

Dim. Consideriamo $H(x,y) := f(x-y)\, g(y)$.

A priori non sappiamo se $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$.

$\Rightarrow$ non possiamo applicare direttamente Fubini.

Quindi consideriamo $|H(x,y)| \geq 0$

e applichiamo Tonelli a $|H|$.

Verifichiamo che $|H|$ soddisfa ip. Tonelli:

- Integro prima in dx:

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x,y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx = |g(y)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx}_{x-y=z}$$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)|\,dz = |g(y)| \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty$$

- Integro in dy.

$$\int_{\mathbb{R}_y} \left[\int_{\mathbb{R}_x} |H(x,y)|\,dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\, \|f\|_{L^1}\, dy$$

$$= \|f\|_{L^1} \cdot \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\,dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

Tonelli $\Rightarrow$ $|H| \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ $\Rightarrow$ $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$

A qs. punto posso applicare Fubini a $H(x,y) = f(x-y)g(y)$

Fubini $\Rightarrow$ per q.o. x, $y \longmapsto H(x,y) = f(x-y)\, g(y)$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}_y)$ $\Rightarrow$ vale (i)

ossia il prodotto $f * g$ è <u>ben definito</u>

Dimostriamo (iii):

$\downarrow$

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} = \int_{\mathbb{R}_x} |f * g(x)| \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y) \, g(y) \, dy \right| dx \leq$$

maggiorazione del modulo

$$\leq \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)| |g(y)| \, dy \, dx \leq$$

Fubini

$$\leq \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)| \, dx}_{= \|f\|_{L^1}} \, dy =$$

$$= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| \, dy = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

$\blacksquare$

Oss.:

- vale la def (Prop. 1) anche su $\mathbb{R}^n$
- $f * g = g * f$ (tramite cambio variabile)
- le funzioni devono essere definite su tutto lo spazio.

- Estensione: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$

(i) $f * g(x)$ esiste per q.o. x

(ii) $f * g \in L^p(\mathbb{R})$

(iii) $\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$.

$$H(x, y) = |f(x-y)|^p |g(y)|^p$$

Proposizione 2 Siano $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \left(\subseteq L^1(\mathbb{R})\right)$, e $g \in L^1(\mathbb{R})$

Allora:

(i) $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $(f*g)^{(K)} = f^{(K)} * g \quad \forall K$

Idea dim.

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$(f*g)'(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f'(x-y)\, g(y)\, dy$$

Oss. •) Vale con K al posto di ∞.

•) In generale nelle ip. della Prop. 2,

$f*g$ non è a supporto compatto

Idea della dim. del teo di approssimazione di funzioni L^p con regolari

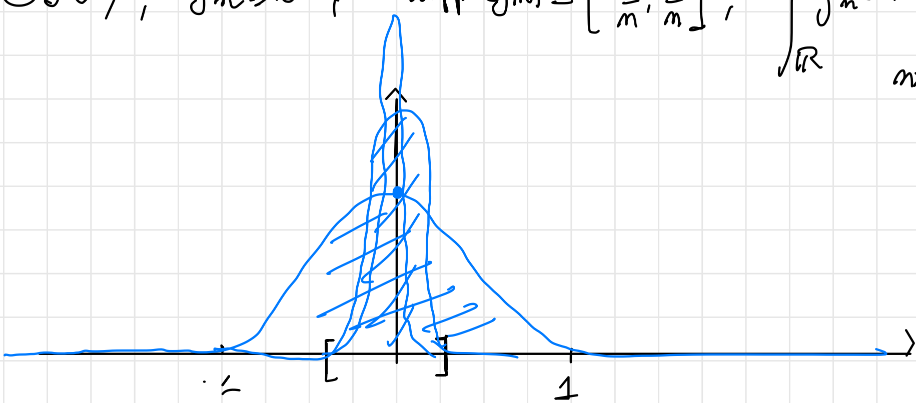
Prendiamo $p=1$, $n=1$.

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo costruire $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Prendiamo

$$\varphi_n := f * \underbrace{\rho_n}_{\text{SUCCESSIONE DI MOLLIFICATORI}}$$

$\rho_n(x) = n\,\rho(nx)$ dove ρ è NUCLEO DI CONVOLUZIONE.

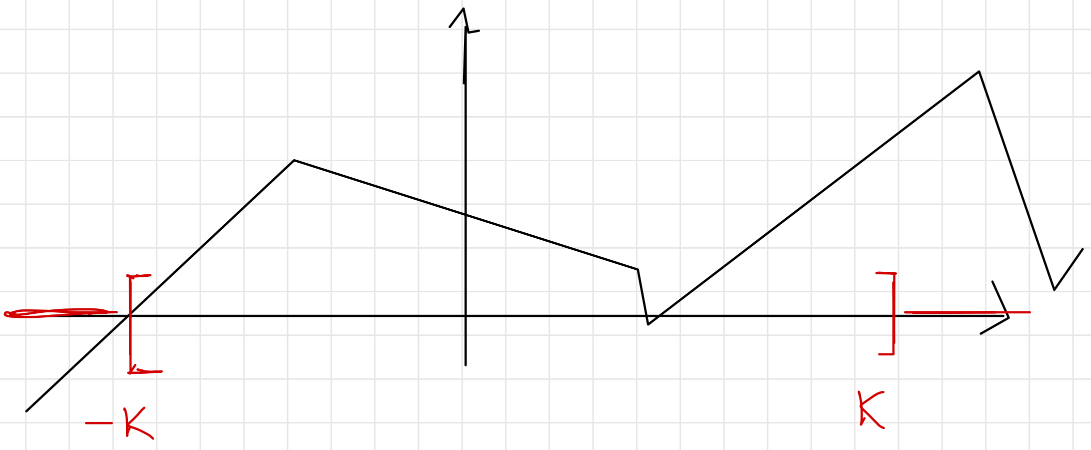
- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq [-1,1]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$.
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,dx = 1$ $\uparrow$ $nx = y$



Si può dim. che $\underbrace{\varphi_n}_{\text{successione di funzioni } C^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Oss. Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "troncare" f, cioè considerare

$$f_K = f \cdot \chi_{[-K,K]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-K,K] \\ 0 & \text{se } x \notin [-K,K]. \end{cases}$$



Approssimo f_K per convoluzione:

$$f_K * \rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$$\Big\downarrow_{\, n \to +\infty}$$

$$f_K$$

$$\varphi_n = f_{K(n)} * \rho_n \xrightarrow{L^1} f$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f\in C^0([a,b]) \Rightarrow \quad F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$

è derivabile in (a,b) e

$$F'(x)=f(x) \qquad \forall x\in(a,b) \qquad (F\in C^1([a,b]))$$

Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue

Sia $f\in L^1([a,b]) \Rightarrow \quad F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$

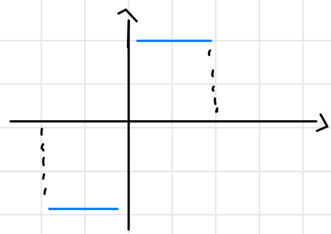
è derivabile q.o. in (a,b) e

$$F'(x)=f(x) \quad \text{per q.o. } x\in(a,b) \quad (F\in AC([a,b]))$$

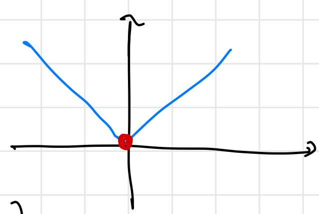
<u>Esempio</u>:

$$[a,b]=[-1,1]$$

$$f(x)=\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}+1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



$$F(x)=\int_0^x \operatorname{sign}(t)\,dt=\begin{cases}x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$$



$$\left.\begin{aligned} F'(x)&=f(x)\\ \frac{d}{dx}|x|&=\operatorname{sign}(x)\end{aligned}\right| \quad \begin{aligned}&\text{q.o. } x\in(-1,1)\\ &\forall x\in(-1,1)\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Def. Diciamo che $F \in A.C.([a,b])$
(spazio delle funzioni ASSOLUTAMENTE CONTINUE su $[a,b]$)
se $\exists\, f \in L^1([a,b])$ tale che
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$
$(\Rightarrow F'(x) = f(x)$ q.o. su $[a,b])$.

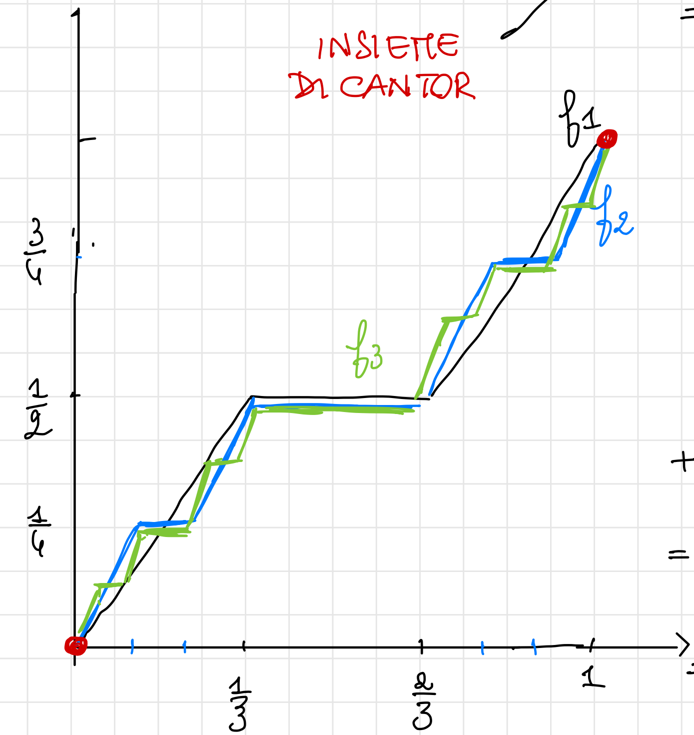
Oss 1 $A.C([a,b])$ è uno spazio vettoriale
$$\begin{cases} F, G \in AC([a,b]) \Rightarrow F+G \in AC([a,b]) \\ F \in AC([a,b]) \Rightarrow \lambda F \in AC([a,b]). \end{cases}$$

Oss 2 $F \in A.C([a,b]) \Rightarrow$
$$F(b) - F(a) = \left[\int_a^b f(t)\,dt + \cancel{c}\right] - \left[\cancel{\int_a^a f} + \cancel{c}\right] = \int_a^b f(t)\,dt$$

Oss 3 $F \in AC([a,b])$, $F' = 0$ q.o. su $[a,b]$
$$\Rightarrow \quad F(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$$
Falso se togliamo l'ipotesi $F \in AC([a,b])$:
esistono funzioni (non in $AC([a,b])$) che sono derivabili q.o. con derivata prima nulla q.o. ma non costanti.

Esempio: una funzione derivabile f continua con $f' = 0$ q.o. in $(0,1)$ ma f NON costante

SCALA DI CANTOR:



$C = \{x : f \text{ non derivabile in } x\} = (0,1) \setminus A$ soddisfa $|C| = 0$

$f' = 0$ in $A = \bigcup$ "pianerottoli"

$\uparrow$ aperto

$$|A| = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + \dots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \cancel{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{1-\frac{2}{\cancel{3}}} = 1$$

La successione $\{f_n\} \subseteq C^0([0,1])$ risulta di Cauchy in $\|\cdot\|_\infty$

Poiché $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ è un Banach

$\exists\ f = \lim_n f_n \in C^0([0,1])$.

$f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, con $f' = 0$ q.o. in $(0,1)$

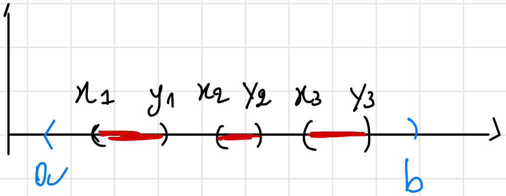
<u>Proposizione</u> (caratterizzazione di $AC([a,b])$)

$F \in AC([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$\forall$ famiglia $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,N}$ di intervalli

2 a 2 disgiunti $\subseteq (a,b)$ con

$\sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i| < \delta$, si ha $\sum_{i=1}^{N} |F(x_i) - F(y_i)| < \varepsilon$.



<u>Oss.</u> $N=1$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$\forall$ intervallo $(x,y) \subseteq (a,b)$ con

$|x-y| < \delta$, si ha $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

(continuità uniforme)

$\Rightarrow A.C.([a,b]) \subseteq \{$funzioni unif. continue su $[a,b]\}$

Conseguenze della Proposizione:

- $F, G \in A.C.([a,b]) \Rightarrow F \cdot G \in A.C.([a,b])$

- $F, G \in A.C([a,b]) \Rightarrow$ poiché $F.G \in AC([a,b])$

$$F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) = \int_a^b (F.G)'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b (f\,G + F\,g)\,dt$$ ovvero:

$F' = f$
$G' = g$

$$\boxed{\int_a^b f\,G = -\int_a^b F\,g + F.G\Big|_a^b}$$

$\Rightarrow$ vale in $A.C.([a,b])$ la formula di integrazione per parti.

(ovvero la formula sopra vale purché $f, g \in L^1([a,b])$ e F, G loro primitive).

Prossimi argomenti di analisi funzionale:

- Operatori lineari
- Distribuzioni
- Spazi di Sobolev
- Spazi di Hilbert

Operatori lineari

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali (normati)

Def. Un OPERATORE LINEARE DA V in W è una funzione $T: V \longrightarrow W$ tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^n$ $\qquad T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v \quad , \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

matrici $n \times n$ a coeff. reali.

$$A \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2$$

2) $V = \mathcal{C}^0([a,b])$, fisso $x^0 \in (a,b)$, $W = \mathbb{R}$

$T: V \to W$ definita da $T(f) = f(x^0)$.

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x^0) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

3) $V = \mathcal{C}^1([a,b])$, $W = \mathcal{C}^0([a,b])$

$T: V \to W$ definita da $T(f) = f'$

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

Oss. T op. lineare $\Rightarrow$ $T(0)=0$

(Infatti $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ $\forall v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
quindi prendendo $\lambda = 0$ si ha $T(0)=0$).

Def. $T: V \to W$ op. lineare si dice CONTINUO
se, $\forall v \in V$, T è continuo in v ovvero:

(*) $v_n \longrightarrow v$ $\Longrightarrow$ $T(v_n) \to T(v)$

$\left(\lim_n \|v_n - v\|_V = 0\right)$ $\left(\lim_n \|T(v_n) - T(v)\|_W = 0\right)$

Oss. Sia $T: V \to W$ op. lineare. Allora
T è continuo su V $\Longleftrightarrow$ T è continuo in $v=0$.

Dim.
($\Rightarrow$) immediato (se (*) vale $\forall v \in V$, in particolare (*) vale con $v=0$)

($\Leftarrow$). Verifichiamo che se (*) vale con $v=0$, vale per v qualsiasi.
Sia v qualsiasi, e sia $v_n \longrightarrow v$.

Considero $v_n - v \longrightarrow 0$. Quindi, per ip. $\underbrace{T(v_n - v)}_{= T(v_n) - T(v)} \longrightarrow \underbrace{T(0)}_{= 0}$

ovvero $T(v_n) - T(v) \longrightarrow 0$, cioè
$T(v_n) \longrightarrow T(v)$. $\blacksquare$

Def. Sia T op. lineare: $(V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$

Si dice che T è LIMITATO se:

- $\exists M>0$ tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$
  $(\forall v \in V \setminus \{0\})$

ovvero:

- $\exists M>0$ tale che $\dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$.

- $\exists M>0$ tale che $\displaystyle\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$.

<u>Esempi</u>:

1) $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da

$T(v) = v_0 \cdot v$ op. lineare

$$\big(T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = v_0 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$$
$$= \lambda_1 (v_0 \cdot v_1) + \lambda_2 (v_0 \cdot v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)\big)$$

T è limitato: $\exists M>0$ tale che

$|T(v)| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2}$ ovvero

$|v_0 \cdot v| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Infatti posso prendere $M = \|v_0\|$ per Cauchy-Schwartz.

2) $T: (\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$

$T(f) = f'$ op. lineare

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

T è limitato.

$$\underbrace{\|T(f)\|_{\mathcal{C}^0}}_{\|f'\|_{\mathcal{C}^0}} \leq M \|f\|_{\mathcal{C}^1}$$

ovvero:

$$\|f'\|_\infty \leq \underbrace{M}_{1} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

prendendo $M = 1$

Def. Sia T op. lineare: $(V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$

Si dice che T è LIMITATO se:

- $\exists M>0$ tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$
  $(\forall v \in V\setminus\{0\})$

ovvero:

- $\exists M>0$ tale che $\dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V\setminus\{0\}$.
- $\exists M>0$ tale che $\sup\limits_{v \in V\setminus\{0\}} \dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$.

<u>Esempi</u>:

1) $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da

$T(v) = v_0 \cdot v$ op. lineare

$\big(T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = v_0 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$

$= \lambda_1 (v_0 \cdot v_1) + \lambda_2 (v_0 \cdot v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)\big)$

T è limitato: $\exists M>0$ tale che

$|T(v)| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2}$ ovvero

$|v_0 \cdot v| \overset{(*)}{\leq} M \|v\|_{\mathbb{R}^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Infatti posso prendere $M = \|v_0\|$ per Cauchy-Schwarz.

$\|T\|_{V'} = \|v_0\|_{\mathbb{R}^2}$ perché $(*)$ vale come $=$ prendendo $v = v_0$

2) $T : (\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$

$T(f) = f'$ op. lineare

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

T è limitato.

$$\underbrace{\|T(f)\|_{\mathcal{C}^0}}_{\|f'\|_{\mathcal{C}^0}} \leq M \|f\|_{\mathcal{C}^1}$$

ovvero:

$$\|f'\|_\infty \leq \underbrace{M}_{1} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

prendendo $M = 1$

$\|T\|_{\mathcal{L}^1(C^1, C^0)} = 1$ perché $\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\frac{\|f'_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty} \longrightarrow 1. \quad \text{Es. } [a,b] = (0,1)$$

Possiamo prendere $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. $f'_n(x) = \cos(nx)$

3) $T: (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f \, dx \quad \text{dove} \quad f_0 \in L^2(0,1) \text{ fissato.}$$

è ben definito

T è lineare : $T(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 f_0(\alpha f + \beta g) =$

$$= \alpha \int_0^1 f_0 f + \beta \int_0^1 f_0 g = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

T è limitato : $\exists\, M > 0$ tale che

$$|T(f)| \leq M \|f\|_2$$

$$\left| \int_0^1 f_0 f \right| \leq M \|f\|_2$$

$\|f_0\|_{L^2} \|f_0\|_{L^2} = \int_0^1 f_0^2 \leftarrow$

$$\left| \int_0^1 f_0 f \right| \leq \int_0^1 |f_0 f| \overset{(*)}{\leq} \underbrace{\|f_0\|_2}_{= M} \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(0,1).$$

Hölder

Oss. Se considero $T: (L^p(0,1), \|\cdot\|_p) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da $T(f) = \int_0^1 f_0 f \, dx$ questo è lineare continuo prendendo $f_0 \in L^{p'}(0,1)$.

$$\|T\|_{\underbrace{\mathcal{L}(L^2, \mathbb{R})}_{= (L^2)'}} = \|f_0\|_{L^2}$$

perchè $(*)$ vale come uguaglianza prendendo $f = f_0$

Proposizione: Sia $T : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ lineare. Allora:

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

dim.

($\Leftarrow$) Supp. T limitato. Basta mostrare che T è continuo in 0,

ovvero: se $v_n \to 0$, allora $T(v_n) \to T(0) = 0$

$$\|T(v_n)\|_W \leq M \|v_n\|_V \longrightarrow 0$$

($\Rightarrow$) Supp T NON limitato e mostriamo T NON continuo in 0

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \Rightarrow \exists \{v_n\} \subseteq V \setminus \{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \longrightarrow +\infty$$

ovvero, siccome T è lineare:

$$\left\| T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V} \right) \right\|_W \longrightarrow +\infty$$

Quindi, se considero $u_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_V}$, ho che: $\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \to +\infty. \end{cases}$

Posso costruire una successione y_n tale che $\boxed{y_n \to 0}$ ma $\boxed{T(y_n) \not\to 0}$

Poniamo $y_n = \dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$

- $y_n \to 0$ $\qquad \|y_n\|_V = \left\| \dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right\|_V = \dfrac{\overbrace{\|u_n\|_V}^{=1}}{\underbrace{\|T(u_n)\|_W}_{\to +\infty}} \longrightarrow 0$

- $T(y_n) = T\left(\dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right) = \dfrac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W} \not\longrightarrow 0$ hanno norma 1 in W

■

Def. Dati $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ sp. vett. normati

$\mathcal{L}(V,W) := \{$ op. lineari limitati (continui) da V in W $\}$

è uno spazio vettoriale:

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \\ (\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v) \end{cases}$$

Possiamo introdurre su $\mathcal{L}(V,W)$ una NORMA ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

(ovvero la più piccola costante M tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \ \forall v \in V$)

Oss. Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

In particolare:

Def. Quando $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V'$ SPAZIO DUALE DI V.

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

Esempi: vedi casi 1) e 3).

Distribuzioni

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ \text{funzioni } C^\infty \text{ su } \Omega \text{ con supporto compatto in } \Omega \}$$

è uno spazio vettoriale

Muniamo $C_0^\infty(\Omega)$ di una CONVERGENZA

Def. Sia $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che

$$\varphi_h \longrightarrow 0 \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega) \quad \text{se}$$

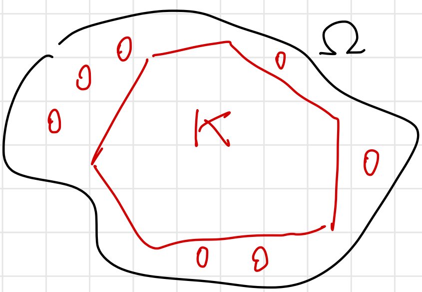
(1) $\exists\, K$ compatto (indipendente da h) tale che

$$\operatorname{supp}(\varphi_h) \subseteq K \quad \forall h \gg \nu$$

(2) $\varphi_h \longrightarrow 0$ unif. su K con tutte le derivate

$\forall \alpha$ multiindice $\quad D^\alpha \varphi_h \longrightarrow 0$ unif. su K.

(1)



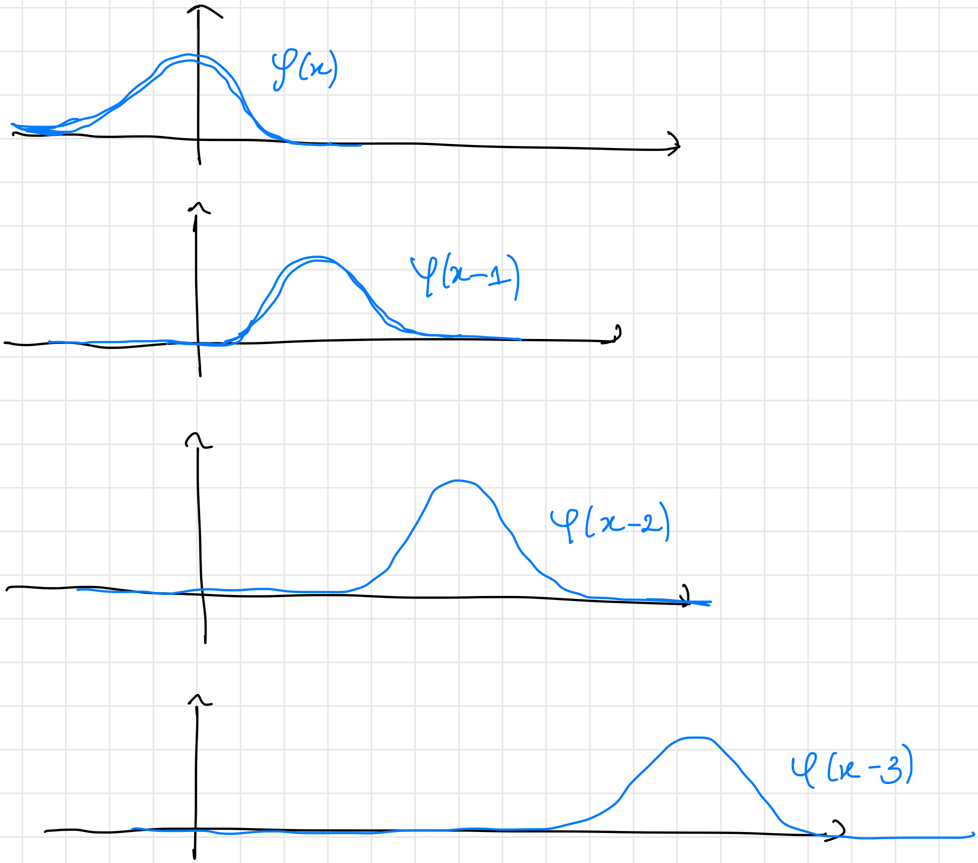
Notazione: $\alpha = (\overset{\mathbb{N}}{\alpha_1}, \overset{\mathbb{N}}{\alpha_2}, \overset{\mathbb{N}}{\alpha_3})$

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \, \partial^{\alpha_2} x_2 \, \partial^{\alpha_3} x_3}$$

$$D^{(2,1,4)} \varphi = \frac{\partial^7 \varphi}{\partial^2 x_1 \, \partial^1 x_2 \, \partial^4 x_3}$$

Def. $\varphi_h \to \varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$ se $\varphi_h - \varphi \longrightarrow 0$ in $C_0^\infty(\Omega)$

Esempio: $\varphi_h(x) := \varphi(x-h)$



Def. Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza definita sopra si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$ e si chiama SPAZIO DELLE FUNZIONI TEST

Def. Lo spazio delle distribuzioni su Ω che si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio degli operatori $T: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su $\mathcal{D}(\Omega)$

ovvero una DISTRIBUZIONE è un operatore

$$T: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che:}$$

- T lineare
- T continuo $\left(\varphi_n \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_n) \to 0 \text{ in } \mathbb{R} \right)$.

Esempi

1) Sia $u \in L^1(\Omega)$. Ad u posso associare $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- è ben definito:

$$\left|\int_\Omega u\varphi\right| \leq \int_{\cancel{\Omega}} |u\varphi| \leq \int_K \max|\varphi| \cdot |u| \leq \max_K |\varphi| \int_K |u| < +\infty$$

$\operatorname{supp}\varphi = K$

- è lineare:

$$T_u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_\Omega u(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha\int_\Omega u\varphi + \beta\int_\Omega u\psi$$

$$= \alpha\, T_u(\varphi) + \beta\, T_u(\psi).$$

- è continuo: $\{\varphi_n\} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Longrightarrow} T_u(\varphi_n) \to 0$

Sia $\{\varphi_n\} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$|T_u(\varphi_n)| = \left|\int_\Omega u\varphi_n\right| \leq \underbrace{\max_K |\varphi_n|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\int_K |u|}_{< +\infty} \longrightarrow 0$$

Osservazioni sull'esempio

- $u \rightsquigarrow T_u$ è iniettiva su $L^1(\Omega)$.

$\to u_1 = u_2$ q.o. su $\Omega \Rightarrow T_{u_1} = T_{u_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_{u_1}(\varphi) = \int_\Omega u_1 \varphi \underset{\substack{\uparrow \\ u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega}}{=} \int_\Omega u_2 \varphi = T_{u_2}(\varphi).$$

(*) $\left[T_{u_1} = T_{u_2} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega \right]$

$$\int_\Omega u_1 \varphi = \int_\Omega u_2 \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \text{ q.o. su } \Omega$$

- Notazione: $T_u(\varphi)$ equivale a $\langle u, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))}$

$$\langle u, \varphi \rangle = T_u(\varphi) = \int_\Omega u \varphi$$

- Per definire T_u, basta una condiz. più debole:

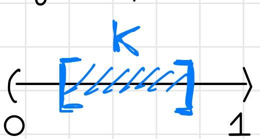
$u \in L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_K |u| < +\infty \ \forall K \text{ compatto} \subseteq \Omega \right\}$.

$L^1(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ $\left(\text{se } \int_\Omega |u| < +\infty \Rightarrow \forall K \subset\subset \Omega \int_K |u| < +\infty \right)$

$\cancel{\supseteq}$

Es. $\Omega = (0,1)$ $\quad u(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(\Omega)$ ma $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

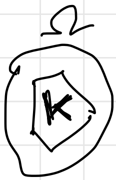
infatti, se $K \subset\subset \Omega$ (compatto $\subseteq \Omega$)



$u \in L^1(K)$.

- In particolare, possiamo associare una distribuzione a qualsiasi $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1,+\infty]$.

Infatti $L^p(\Omega) \not\subseteq L^1(\Omega)$, MA:



$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \quad \forall p \in [1,+\infty] :$$

$$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow u \in L^p(K) \ \forall K \subset\subset \Omega \to \int_K |u|^p < +\infty$$

$$\int_\Omega |u|^p < +\infty$$

$$\Rightarrow u \in L^1(K) \ \forall K \subset\subset \Omega \Rightarrow u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

perché $|K| < +\infty$.

Tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ possono essere viste come distribuzioni

$$u \in L^p(\Omega) \rightsquigarrow T_u$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))} := \int_\Omega u \varphi \, dx .$$

$$\boxed{\mathcal{D}'(\Omega) = \{ T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ distribuzioni} \}.}$$

- è uno spazio vettoriale

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(\varphi) := T_1(\varphi) + T_2(\varphi) & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ (\lambda T)(\varphi) := \lambda \cdot T(\varphi) & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

$$T_1 = T_{u_1}, \quad T_2 = T_{u_2} \Rightarrow \left((T_1+T_2)(\varphi) = \int_\Omega (u_1\varphi + u_2\varphi) = \int_\Omega (u_1+u_2)\varphi \overset{\Omega}{=} T_{u_1+u_2}(\varphi) \right)$$

$$\lambda T_u = T_{\lambda u} \qquad \left(\lambda T_u(\varphi) = \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega \lambda u \varphi = T_{\lambda u}(\varphi) \right).$$

- Introduciamo su $\mathcal{D}'(\Omega)$ una CONVERGENZA:

$\{T_h\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, $T_h \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}'(\Omega)} 0$ se

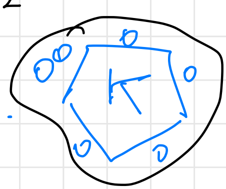
$$T_h(\varphi) \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$$\left(T_h \to T \quad \text{se} \quad T_h(\varphi) \to T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right):$$

<u>Esempio</u> $T_h = T_{u_h}$, con $u_h \subseteq L^1(\Omega)$

$$u_h \to 0 \text{ in } L^1(\Omega) \Rightarrow T_{u_h} \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

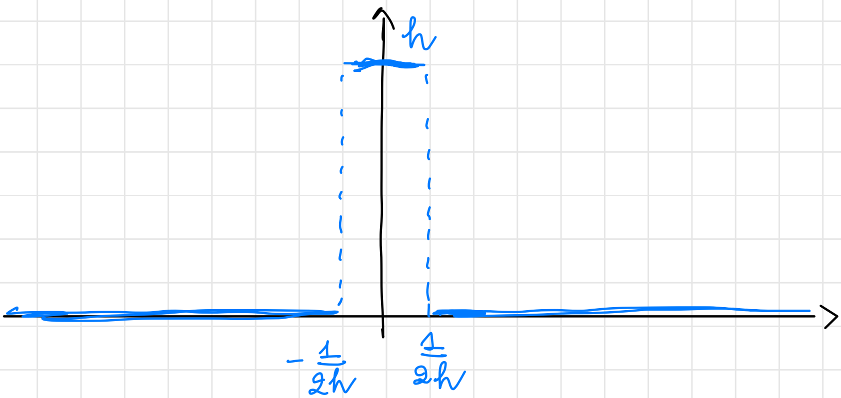
$$|T_{u_h}(\varphi)| = \left| \int_\Omega u_h \varphi \right| \leqslant \int_\Omega |u_h| |\varphi| \leqslant \max_{\cancel{\Omega}\, K} |\varphi| \cdot \underbrace{\int_\Omega |u_h|}_{\downarrow \atop 0}$$



Ω

2) La delta di Dirac.

$\{u_h\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$



- non converge in $L^1(\mathbb{R})$:

$u_h \longrightarrow 0$ q.o. su $\mathbb{R}$. $\left(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ u_h(x) \to 0\right)$

$\Rightarrow$ se $\exists \lim\limits_{h\to+\infty} u_h$ in $L^1(\mathbb{R})$,

$\lim\limits_{h\to+\infty} u_h = 0$, MA $\lim\limits_{h\to+\infty} u_h \neq 0$ in $L^1(\mathbb{R})$

perché
$$\|u_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} h = 1.$$

- converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle u_h, \varphi\rangle = T_{u_h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_h \varphi = \overbrace{h\int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \varphi}^{\text{media di } \varphi \text{ su } \left[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right]} \longrightarrow \varphi(0)$$

(MASSA)

Def. δ_0 DELTA DI DIRAC IN 0

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R}))} := \varphi(0)$$

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \delta_0(\varphi)$$

Osservazioni:

- Se $u_h = h \cdot \chi_{\left[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right]}$, allora $u_h \longrightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- Verifica che $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(i) lineare: $\underbrace{\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi)}_{} \overset{?}{=} \alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi)$

$$\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

$$\alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

(ii) continuo: $\varphi_h \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \delta_0(\varphi_h) \longrightarrow 0$

$$\delta_0(\varphi_h) = \varphi_h(0).$$

vero per def. di convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\mathrm{Supp}(\varphi_h) \subseteq K$ compatto

$\varphi_h \longrightarrow 0$ uniformemente.

$\Downarrow$

$\varphi_h(0) \longrightarrow 0.$

- Generalizzazioni ovvie

$\to 0 \rightsquigarrow x^0 \in \mathbb{R} \qquad \delta_{x^0}(\varphi) = \varphi(x^0).$

$\to$ caso n-dimensionale:

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \qquad \delta_{x^0}(\varphi) := \varphi(x^0) \qquad \delta_{x^0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

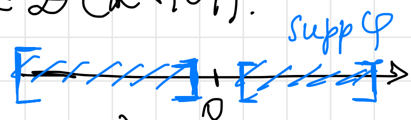
- δ_0 non è associata ad alcuna funzione di $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

$\not\exists\, T_u$

<u>Dim.</u> Supponiamo per assurdo $\delta_0 \overset{\text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} T_u$, con $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} u\,\varphi\,dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

In particolare, posso prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.



$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} u\varphi = \underbrace{\varphi(0) = 0}_{= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} 0\cdot\varphi}. \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Applico la proprietà $(*)$ con $\begin{cases} \Omega = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ u_1 = u \\ u_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u = 0$ q.o. su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\Rightarrow u = 0$ q.o. su $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u\,\varphi}_{= 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R}.}\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \text{ASSURDO.}$$

prendendo φ: $\varphi(0) = 1$ ▨

Derivazione di distribuzioni

Def. $(n=1)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definisco $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come:

$$\boxed{\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- è una distribuzione

(i) lineare

$$\langle T', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle \overset{?}{=} \alpha \underbrace{\langle T', \varphi \rangle}_{= -\langle T, \varphi' \rangle} + \beta \underbrace{\langle T', \psi \rangle}_{= -\langle T, \psi' \rangle}$$

$$\langle T', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = -\langle T, (\alpha\varphi + \beta\psi)' \rangle = -\langle T, \alpha\varphi' + \beta\psi' \rangle = -\alpha\langle T, \varphi' \rangle - \beta\langle T, \psi' \rangle$$

(ii) $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \underbrace{\langle T', \varphi_h \rangle}_{= -\langle T, \varphi_h' \rangle} \longrightarrow 0$

Infatti $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\varphi_h' \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$

($\exists K$ tale che $\operatorname{supp} \varphi_h' \subset K$ $\forall h$ e $\varphi_h' \longrightarrow 0$ unif. su K con tutte le derivate)

Quindi $\langle T, \varphi_h' \rangle \longrightarrow 0$ perché $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

• perché definirla in qs. modo?

Si consideriamo il caso $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$

$$(T_u)' \overset{\text{in } \mathcal{D}'(\Omega)}{=} T_{u'}$$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = \boxed{-\int_\Omega u\,\varphi'}$$

$$\langle T_{u'}, \varphi \rangle = \boxed{\int_\Omega u'\,\varphi}$$

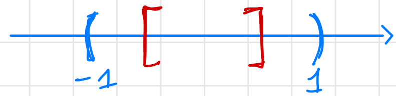
$=$ int. per parti.

se $\Omega = (-1,1)$

il termine

$$u\varphi \Big|_{-1}^{1} = 0$$

perché $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$



Esempi

1) $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \Rightarrow (T_u)' = T_{u'}$

2) $T = T_u$ con $u(x) = |x|$ su $\Omega = (-1,1)$.

$$< (T_u)', \varphi > \overset{\text{per def}}{=} - < T_u, \varphi' > = - \int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx =$$

$$= - \int_0^1 x\, \varphi'(x)\, dx + \int_{-1}^{0} x\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)\, dx + \cancel{x\,\varphi(x)}\Big|_0^1 - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx + \cancel{x\,\varphi(x)}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cdot \text{sign}(x)\, dx \quad \text{dove } \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

$$= < T_{\text{sign}(x)}, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(-1,1).$$

$$(T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

notazione:

$$(|x|)' = \text{sign}(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

più in generale: se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$

$u' = v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, significa $(T_u)' = T_v$

ovvero $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $< (T_u)', \varphi > = - < T_u, \varphi' > = < T_v, \varphi >$

$$\boxed{- \int_\Omega u\, \varphi' = \int_\Omega v\, \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).}$$

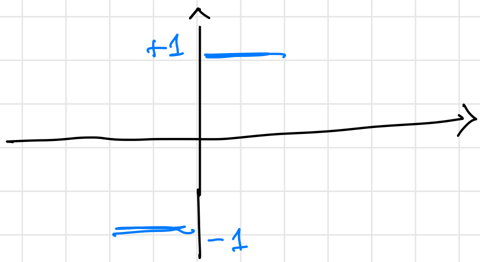
3) $u(x) = \text{sign}(x)$ $\qquad (T_u)' = ?$ $\qquad u' = ?$

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{\Omega} \text{sign}(x) \cdot \varphi'(x)$$

$$= -\int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^0 \varphi' = -\cancel{\varphi(1)} + \varphi(0) + \varphi(0) - \cancel{\varphi(-1)}$$

$$= 2\varphi(0) = 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

$$(\text{sign}(x))' = 2\,\delta_0$$



4) $T = \delta_0 \qquad T' = ?$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle$$

$$= -\varphi'(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Generalizzazioni

- $n = 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle := (-1)^{(k)} \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Oss. $T^{(k)}$ definisce una distribuzione

(i) è lineare

(ii) $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\langle T^{(k)}, \varphi_h \rangle \longrightarrow 0$

Infatti se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_h^{(k)} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$

$\Rightarrow$ $\langle T, \varphi_h^{(k)} \rangle \longrightarrow 0$ poiché $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ☒

$\qquad \overset{\shortparallel}{(-1)^{k} \langle T^{(k)}, \varphi_h \rangle}$.

Oss. se $T = T_u$ con $u \in C^k(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$

$$\Rightarrow (T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}.$$

Esempio $u(x) = |x|$ $\Rightarrow$ $u'' = 2\delta_0$

- $n \geq 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall \alpha$ multiindice

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|^{(*)}} < T, D^\alpha \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempio: $n=3$ $\alpha = (3,1,2)$

$$< \frac{\partial^6 T}{\partial^3 x_1 \partial^1 x_2 \partial^2 x_3}, \varphi > = (-1)^6 < T, \frac{\partial^6 \varphi}{\partial^3 x_1 \partial^1 x_2 \partial^2 x_3)} >$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(*) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Os. $D^\alpha T$ definiscono delle distribuzioni $\forall \alpha$

Os. Si possono calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualsiasi $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

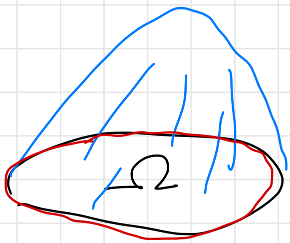
Os. Il risultato NON dipende dall'ordine di derivazione!

- Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si possono definire

∇T, ΔT, $\text{rot}\, T$ .....

Gli spazi di Sobolev.

Motivazione: sono gli spazi dove si trovano soluz. di pb. al contorno per P.D.E.'s.



$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \quad \text{eq. Poisson} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

condizione di Dirichlet.

(cf. ADAMS, LEONI).

<u>Def.</u> Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \; : \; \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{nel senso delle distribuzioni}} \in L^p(\Omega) \;\; \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \iff \exists \; v_i \in L^p(\Omega)$ tali che

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi = \int_\Omega v_i \, \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$$\parallel$$

$$-\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Esempi $(n=1, \quad \Omega=(-1,1))$

- $u \in C_0^1(\Omega) \Rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ Infatti:

(1) $p<+\infty$ $\quad \int_\Omega |u|^p < +\infty, \quad \int_\Omega |u'|^p < +\infty$

(2) $p=+\infty$ $\quad \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| < +\infty, \quad \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u'| < +\infty$

- $u(x)=|x| \Rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$. Infatti, per es. $p=2$

$$\begin{cases} \int_\Omega |u|^2 = \int_{-1}^{1} |x|^2 < +\infty \\ \int_\Omega |u'|^2 = \int_{-1}^{1} |\operatorname{sign} x|^2 < +\infty. \end{cases}$$

- $u(x)=\operatorname{sign} x \quad u \notin W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega |u|^2 = \int_{-1}^{1} |\operatorname{sign} x|^2 < +\infty \qquad (u \in L^2(\Omega))$$

MA: $\quad u'(x) = 2\delta_0 \notin L^2(\Omega)$

Def. Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall \alpha \text{ multi-indice con } |\alpha| \leq k \}$$

Caso particolare: $p = 2$

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ \forall i = 1, \dots, n \}$$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ \forall \alpha \text{ multiindice con } |\alpha| \leq k \}$$

Oss.

$W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi vettoriali

Es. $k = 1$ $\quad W^{1,p}(\Omega)$ spazio vettoriale

- $u, v \in L^p(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \Rightarrow$

  $u + v \in L^p(\Omega)$, $\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(u+v)}_{= \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}} \in L^p(\Omega)$.

- $u \in L^p(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \Rightarrow$

  $(\lambda u) \in L^p(\Omega)$, $\underbrace{\frac{\partial (\lambda u)}{\partial x_i}}_{= \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i}} \in L^p(\Omega)$

Def. Norma su $W^{1,p}(\Omega)$: sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

Def. Norma su $W^{k,p}(\Omega)$: sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

Teorema

Per ogni $p \in [1, +\infty]$, $W^{k,p}(\Omega)$ sono Banach.

Oss. $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ se

$$\|u_h - u\|_{1,p} \to 0$$

$$\| \; = \|u_h - u\|_p + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

ovvero
$$\begin{cases} u_h \to u & \text{in } L^p(\Omega) \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{in } L^p(\Omega) \end{cases}$$

"funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ « nulle al bordo di Ω »"

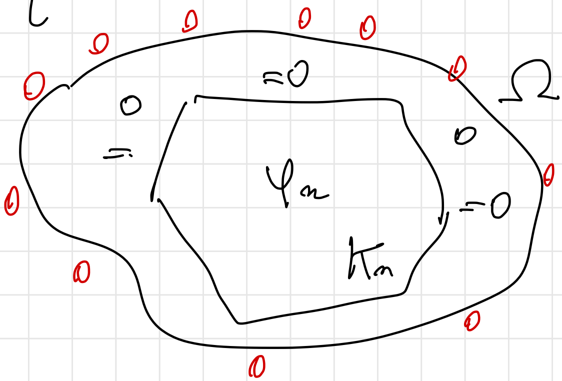
Def.

$W_0^{1,p}(\Omega) :=$ chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$

ovvero

$$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \xrightarrow{W^{1,p}} u \right\}.$$

$$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \begin{cases} \varphi_n \xrightarrow{L^p} u \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xrightarrow{L^p} u \end{cases} \right\}$$



Oss. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, allora

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff u = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Teorema (di disuguaglianza di Poincaré)

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Allora esiste una costante $C_p = C_p(\Omega)$ tale che, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\left[\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \right]$$

Quindi: su $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{cases} \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p & \text{norma su } W^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p \leftarrow \text{norma equivalente.} \end{cases}$$

(Infatti $\|u\|_{1,p} \leq C_p(\Omega) \|\nabla u\|_p + \|\nabla u\|_p$
$\leq (C_p(\Omega) + 1) \|\nabla u\|_p$).

Falso su $W^{1,p}(\Omega)$, prendendo $u = 1$.

Oss. $n=1$

$$u(x) = \cancel{u(0)} + \int_0^x u'(t)\, dt \Rightarrow \text{Hölder}$$

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq \left(\int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2}$$

integrando $\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$.

Spazi di Hilbert

- Definizioni, proprietà di base, esempi
- Teoremi di proiezione → su convessi chiusi
  → su sottospazi
  → decomposizione
- Teoremi di rappresentazione → Riesz
  → Lax-Milgram

Def. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Un PRODOTTO SCALARE su H è un'applicazione $(\ ,\ ): H \times H \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H$ con $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ POSITIVITÀ

(ii) $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in H$ SIMMETRIA

(iii) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$ BILINEARITÀ

Oss.
$$(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 (x, y_1) + \beta_2 (x, y_2)$$
$$\overset{(ii)}{=} (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x) \underset{(i)}{=} \beta_1 (y_1, x) + \beta_2 (y_2, x) \overset{(i)}{=}$$

Def. $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ NORMA INDOTTA DA $(\ ,\ )$.

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n \qquad \underbrace{(x,y)}_{x \cdot y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2$

- $H = L^2(\Omega) \qquad (f,g) := \int_\Omega f g \qquad \sqrt{(f,f)} = \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$

- $H = W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \qquad (f,g) := \int_\Omega f g + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}}_{\nabla f \cdot \nabla g}$

$$\sqrt{(f,f)} = \left(\int_\Omega f^2 + |\nabla f|^2\right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H, allora:

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x,y \in H$$

Inoltre vale $=$ $\Leftrightarrow$ $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dim. $\forall t \in \mathbb{R}$

$$0 \underset{(i)}{\le} (x-ty, x-ty) \underset{\substack{(iii)\\(ii)}}{=} \overbrace{(x,x)}^{\|x\|^2} - 2t(x,y) + t^2 \overbrace{(y,y)}^{\|y\|^2}$$

$$0 \le \|x\|^2 - 2t(x,y) + t^2 \|y\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \le 0 \Rightarrow \cancel{4}(x,y)^2 - \cancel{4}\|x\|^2 \|y\|^2 \le 0 \Rightarrow$$

$$|(x,y)| \le \|x\| \, \|y\|.$$

Se vale $=$, $\Delta = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x-\lambda y, x-\lambda y) = 0$

$$\Downarrow (i)$$

$$x - \lambda y = 0$$

Viceversa, se $x = \lambda y$.

$$\begin{cases} |(x,y)| = |(\lambda y, y)| = |\lambda| \, \|y\|^2 \\ \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \, \|y\|^2 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Proposizione: Se $(\, , \,) : H \times H \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare,

$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ è una norma.

Dim:

- $\|x\| \geq 0$ con $=$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ vera per la (i)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} \underset{(iii)}{=} \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} \underset{(iii)}{\overset{(ii)}{=}} \sqrt{\|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2}$

$$\underset{CS}{\leq} \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2}$$

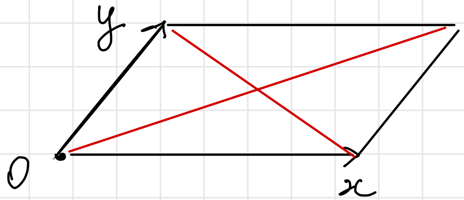
$$= \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare$$

Legge del parallelogramma

Sia H uno sp. vettoriale con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da esso. Allora:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x,y \in H.$$

In $\mathbb{R}^2$:



<u>Dim.</u>

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y,x+y) + (x-y,x-y) \\
&= \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2 \\
&\quad + \|x\|^2 - \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

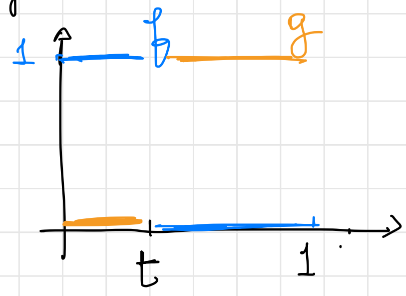
<u>Oss.</u> Può servire a verificare se una norma proviene da un prodotto scalare: le norme $\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p$ $p \neq 2$, $L^p(\Omega)$ $p\neq 2$, $W^{1,p}(\Omega)$ $p \neq 2$ non provengono da un prodotto scalare.

Esempio $\Omega = (0,1)$: In $L^p(0,1)$ con $p \neq 2$

la norma non proviene da un prodotto scalare:

Fisso $t \in (0,1)$, considero le funzioni:

$$f = \chi_{(0,t)}, \quad g = \chi_{(t,1)}$$



- $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^t 1\right)^{1/p} = t^{1/p}$
- $\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_t^1 1\right)^{1/p} = (1-t)^{1/p}$
- $\|f+g\|_p = \left(\int_0^1 1\right)^{1/p} = 1$
- $\|f-g\|_p = \left(\int_0^1 |f-g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 1\right)^{1/p} = 1$

Id. parallelogramma:

$$2 = 2t^{2/p} + 2(1-t)^{2/p}$$

$$\underset{\forall t \in (0,1)}{1 \;=\;} \underbrace{t^{2/p} + (1-t)^{2/p}}_{\varphi_p(t)} \qquad p=2 \text{ OK!}$$

$\varphi_p(t) \leftarrow$ non è una funzione costante di t.

Def. Uno SPAZIO DI HILBERT è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

Es. Sono di Hilbert:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$.
- $\mathcal{C}^0([a,b])$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$

  $(f,g) = \int_a^b f g$ non Banach

  $\Longrightarrow$ non Hilbert!

Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Sia H un Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso

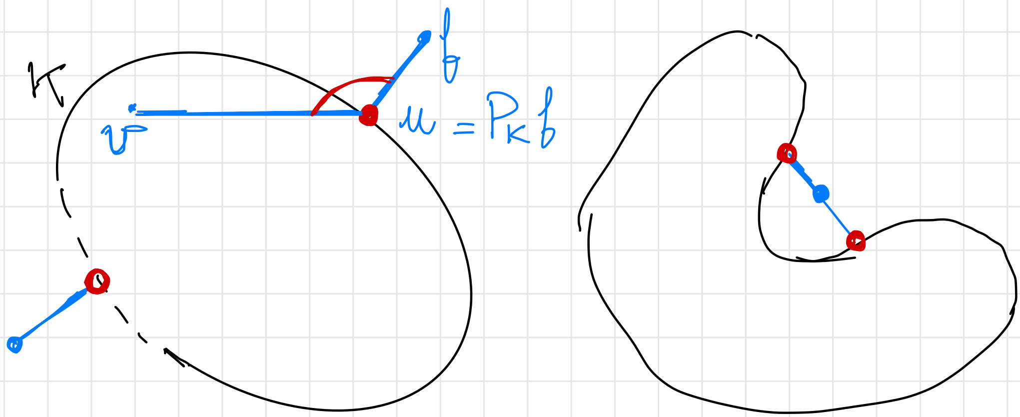
$$\left(\begin{array}{l} K \text{ convesso} := \forall x, y \in K,\ \forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K. \\ K \text{ chiuso} := \forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \to x \in H \Rightarrow x \in K. \end{array}\right)$$

Allora: $\forall f \in H$ esiste unico $u \in K$ tale che

$$\underset{d(f,u)}{\underset{\shortparallel}{\|f - u\|}} = \min_{v \in K} \underset{d(f,v)}{\underset{\shortparallel}{\|f - v\|}}$$

Tale elemento si dice PROIEZIONE DI f su K. $(u = P_K f)$

Inoltre: $\boxed{u = P_K f \iff (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K}$



Corollario (teorema di proiezione su un sottospazio chiuso)

Sia H Hilbert e M un sottospazio vettoriale chiuso.

(M sottospazio $\Rightarrow$ M è convesso! M non è necessariamente chiuso!)

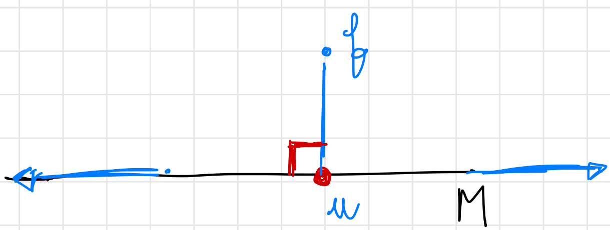
Allora:

$\forall f \in H$ $\exists$ unico $u = P_M f$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre

$$\boxed{u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M.}$$



$f - u \in M^{\perp}$

Def. Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y$ (x ORTOGONALE A y) $\overset{def}{\iff} (x,y)=0$

Es. $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\int_0^1 fg = 0$.

- $M^\perp := \{ x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in M \}$

ORTOGONALE DI M.

Es. $M = \{$funzioni costanti in $L^2(0,1)\}$

$$M^\perp = \{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0 \}.$$

Oss. $x \perp y \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Teorema di Pitagora!).

Dim.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$

$\blacksquare$

Def. Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y$ (x ORTOGONALE A y) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(x,y)=0$

Es. $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\int_0^1 fg = 0$.

- $M^\perp := \{x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in M\}$

ORTOGONALE DI M.

Es. $M = \{$funzioni costanti in $L^2(0,1)\}$

$$M^\perp = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0\}.$$

Oss. $x \perp y \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Teorema di Pitagora!).

Dim.

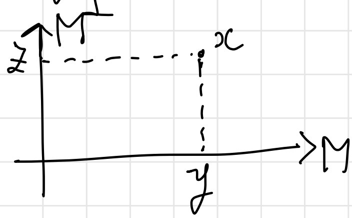
$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$

Oss. $M \cap M^\perp = \{0\}$. Infatti $x \in M \cap M^\perp \Rightarrow$

$$(\underset{M^\perp}{\underset{\uparrow}{x}}, \underset{M}{\underset{\uparrow}{x}}) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Teorema delle proiezioni

Sia H un Hilbert e M un sottospazio chiuso.
Allora $\forall x \in H$, esiste un'unica rappresentazione di x come: $x = y + z$ con $y \in M$ e $z \in M^\perp$



Inoltre, le applicazioni

$$\begin{cases} x \longmapsto y = P_M(x) \\ x \longmapsto z = P_{M^\perp}(x) \end{cases}$$

sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

Dim. Basta prendere $y = P_M x$ (che esiste dal teo precedente): sappiamo che $(x - P_M x, v) = 0$ $\forall v \in M$
$\Rightarrow x - P_M x \in M^\perp$, ovvero $z := x - y \in M^\perp$.

Unicità: $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Rightarrow \underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$.

P_M lineare: $P_M(x_1 + x_2) = P_M(x_1) + P_M(x_2)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \overset{P_M(x_1)}{\overset{\shortparallel}{y_1}} + \overset{P_{M^\perp}(x_1)}{\overset{\shortparallel}{z_1}} \\ x_2 &= \overset{P_M(x_2)}{\overset{\shortparallel}{y_2}} + \overset{P_{M^\perp}(x_2)}{\overset{\shortparallel}{z_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = \underbrace{y_1 + y_2}_{\in M} + \underbrace{z_1 + z_2}_{\in M^\perp}$$

$\Rightarrow$ per l'unicità $\overset{P_M(x_1)}{\overset{\shortparallel}{y_1}} + \overset{P_M(x_2)}{\overset{\shortparallel}{y_2}} = P_M(x_1 + x_2)$, $z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$

P_M limitato : $\quad x = y + z = P_M(x) + P_{M^\perp}(x) \Rightarrow$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2 \Rightarrow$$

$$\|P_M(x)\|^{\cancel{2}} \underset{K=1}{\leq} \|x\|^{\cancel{2}} \Rightarrow$$ P_M limitato con norma ≤ 1

$\|P_M\| = 1$: basta prendere $x \in M \Rightarrow x = P_M x = y$

$\Rightarrow$ vale l'uguaglianza $\|P_M(x)\| = \|x\|$. $\blacksquare$

Problema: dato H Hilbert, caratterizzare H'

$$H' = \{ \varphi : H \to \mathbb{R} \text{ lineari e continui} \} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R}).$$

spazio duale di H

Oss. Fissato $u \in H$, possiamo associargli $\varphi_u \in H'$ definito da

$$\varphi_u : H \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_u(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Verifica che $\varphi_u \in H'$:

- lineare: $\varphi_u(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$
$= \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2)$
$= \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2).$

- continuo (limitato): $\underbrace{|\varphi_u(v)|}_{= |(u,v)|} \leq M \|v\|$, con $M = \|u\|$ per Cauchy-Schwarz.

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioè $M = \|u\|$ è la costante miglior possibile $(v = u)$

In conclusione

$$\boxed{\begin{aligned} H &\subseteq H' \\ u &\longmapsto \varphi_u \end{aligned}}$$

(immersione isometrica)

$$\|u\|_H = \|\varphi_u\|_{H'}$$

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n \qquad (u,v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

  $\varphi_u(v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$

- $H = L^2(\Omega) \qquad (u,v) = \int_\Omega uv$

  $\varphi_u(v) = \int_\Omega uv \qquad \forall v \in L^2(\Omega)$

- $H = H^1(\Omega) \qquad (u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$

  $\varphi_u(v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$

Teorema di Riesz

Sia H un Hilbert, e sia $\varphi \in H'$.
Allora, esiste unico $u \in H$ tale che
$\varphi = \varphi_u$ ovvero
$$\varphi(v) = (u, v) \quad \forall v \in H.$$
Inoltre
$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H' \subseteq H \\ \varphi \longmapsto u \text{ (tale che } \varphi = \varphi_u) \end{array}}$$

Conclusione:

$$H \text{ “}=\text{” } H'$$

Forme bilineari

<u>Def.</u> Sia H Hilbert. Una FORMA BILINEARE su H è un'applicazione $a: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$
- $a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2)$.

<u>Esempi</u>

- In H Hilbert qualsiasi $a(u,v) = (u,v)$
- $H = H^1(\Omega)$ $\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \\ a(u,v) = \int_\Omega uv \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \end{cases}$

Def. Sia $a: H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare

- a SIMMETRICA se
$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in H$$
- a CONTINUA se $\exists\, C>0$ tale che
$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in H.$$
- a COERCIVA se $\exists\, \alpha>0$ tale che
$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Esempi

- In H Hilbert qualsiasi, $a(u,v) = (u,v)$ è
  - → simmetrica (per def. di prodotto scalare)
  - → continua ($|(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$ C.S.)
  - → coerciva ($(u,u) = \|u\|^2$, $\alpha = 1$)

- In $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

$\uparrow$ spazio di Hilbert, con Ω limitato.

→ simmetrica

→ continua:

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| \overset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \|\nabla u\|_2 \, \|\nabla v\|_2$$

$$\leq \|u\|_{H^1} \, \|v\|_{H^1} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

→ coerciva

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \overset{?}{\geq} \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

Ver per la disuguaglianza di Poincaré.

<u>Oss.</u> $a(u,v)$ NON sarebbe coerciva su $H^1(\Omega)$

Su $H^1(\Omega)$ è FALSO che

$$a(u,u) = \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2}_{=0} \geq \alpha \underbrace{\|u\|_{H^1}^2}_{>0}$$

Basta prendere u = costante > 0.

Teorema di Lax-Milgram.

Sia H Hilbert, e sia $\varphi \in H'$.

Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, continua e coerciva.

Allora esiste unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = a(u,v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre, u è CARATTERIZZATA dalla proprietà seguente: posto

$$E(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \qquad \forall v \in H,$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u).$$

<u>Esempio</u> (Ω limitato)

$H = H_0^1(\Omega)$, $\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$,

$\varphi(v) = \int_\Omega f v$ dove $f \in L^2(\Omega)$.

$$\Big(\varphi \in H^1 : \ \left|\int_\Omega f v\right| \le \int_\Omega |f v| \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le \underbrace{\|f\|_{L^2}}_{M} \|v\|_{H^1}\Big)$$

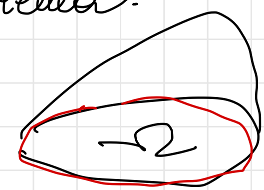
Lax-Milgram: $\exists$ unico $u \in H_0^1(\Omega)$

tale che $\varphi(v) = a(u,v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$(*) \quad \int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(è una "formulazione debole" del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Big)$$



Inoltre u risolve:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v\right)$$

Sulla proprietà variazionale di u

$$E(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2} a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - \varphi(u+\varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(u,u) + 2\varepsilon a(u,v) + \varepsilon^2 a(v,v)\right] - \varphi(u) - \varepsilon\varphi(v)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u)\right]}_{= E(u)} + \varepsilon\left[a(u,v) - \varphi(v)\right] + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v)$$

$$\Rightarrow E(u+\varepsilon v) - E(u) = \varepsilon\left[a(u,v) - \varphi(v)\right] + o(\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{E(u+\varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = \underbrace{a(u,v) - \varphi(v)}_{= 0}.$$

- Se $a(u,v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$,

$$E(u+\varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v) \geq 0.$$

Quindi u minimizza E.

- Viceversa, se u minimizza E:

$$E(u+\varepsilon v) \geq E(u) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a(u,v) - \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in H.$$

$\boxtimes$

PDE's (eq differenziali alle derivate parziali) 1/3

Formulazione variazionale di pb. ellittici.

(S. Salsa: Partial Differential Eqs. in Action, Springer).

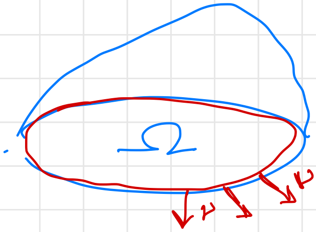
$$-a\,\Delta u + c u = f \quad \text{in} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$u = u(x_1, \dots, x_n)$

aperto limitato regolare

Ipotesi
$$\begin{cases} a > 0 & \text{costante} \\ c(x) \geq 0, & c \in L^\infty(\Omega) \\ f(x) \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

$c = 0, \quad a = 1 \qquad -\Delta u = f \qquad$ EQ. POISSON.



condizione di Dirichlet (omogenea) $\qquad u = 0$ su $\partial\Omega$.

condizione di Neumann (omogenea) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

(prototipo di PDE lineare ellittica del 2° ordine

<u>ODE</u> lineari del 2° ordine $\quad u = u(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$$a\,u'' + b\,u' + c\,u = f$$

<u>PDE</u> lineare del 2° ordine $\quad u = u(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

$$-A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + \underbrace{b(x)}_{} \cdot \underbrace{\nabla u(x)}_{} + c\,u = f$$

$$= (b_1, \dots, b_n) \cdot (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

$$A(x) \cdot \nabla^2 u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, u_{x_i x_j}$$

si dice ellittica se A è definita positiva:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare se $A(x) = Id \qquad A_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{A_{ij}(x)}_{=\delta_{ij}}\, u_{x_i x_j} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \Delta u$$

op. di Laplace

Formulazione variazionale del pb di Dirichlet

$(D)_C$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$(D)_V$ Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + c\,u\,v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Proposizione (D) Nelle ip. sopra:

(1) u sol. classica $\Rightarrow$ u sol. variazionale

(2) u sol. variazionale
$\left.\begin{array}{l} c, f \text{ continue} \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{array}\right] \Rightarrow u$ sol. classica.

Recall:

- $$\int_\Omega \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \qquad X \in C^1(\Omega)$$

$$X = v \nabla u \qquad v \in C^1, \; u \in C^2$$

$$\operatorname{div}(v \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) =$$

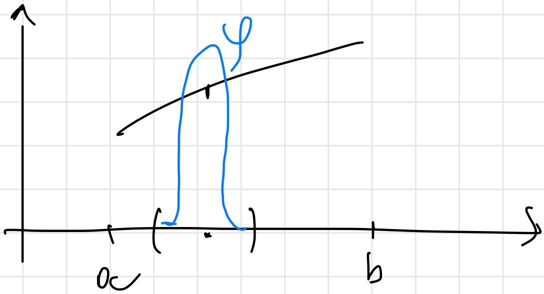
$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u$$

G.G.
$$\boxed{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad v \in C^1, \; u \in C^2}$$

- Lemma di Du Bois-Raymond:

Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è tale che:

$$\int_\Omega u \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$



Dim. Prop. (D)

(1) Sia u sol. di $(D)_c$. Allora per ip. $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e risolve:
$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
Allora $u \in H_0^1(\Omega)$ $\left(u, \nabla u \in C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega),\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right)$

Moltiplico l'eq. per $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integro:
$$\int_\Omega -a\Delta u \cdot v + cuv = \int_\Omega f v \qquad \text{in } \Omega$$
$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v - \cancel{\int_{\partial\Omega} a\, v \frac{\partial u}{\partial \nu}} \implies$$
$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_\Omega f v_n \qquad \forall v_n \in C_0^\infty(\Omega)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Data $v \in H_0^1(\Omega)$, $\exists \{v_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$: $v_n \xrightarrow{H^1} v$
(per def. di $H_0^1(\Omega)$)
$$\left|\int_\Omega f v_n - f v\right| \le \int_\Omega |f(v_n - v)| \underset{H}{\le} \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \to 0$$
analogamente si verificano le altre convergenze.

(2) Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. variazionale,

supponendo $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ($c$, f continue $\underset{\text{su } \overline{\Omega}}{}$).

$u = 0$ su $\partial\Omega$ ✓

Sappiamo che:

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c\, u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

in particolare $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$

Usiamo eq. eq:

$$\int_\Omega \left(-a \Delta u \cdot v + c\, u v - f v \right) = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega \underbrace{(-a \Delta u + c u - f)}_{\text{continua su } \overline{\Omega}} v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \quad -a \Delta u + c u - f = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

D.B.R.

☒

$$\left(+ \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \forall v \in C^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ su } \partial\Omega. \right)$$

analogo di DBR su $\partial\Omega$.

Formulazione variazionale del pb di Neumann

$(N)_C$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f \text{ in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

$(N)_V$ Trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c\, u\, v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Proposizione (N) Nelle ip. sopra:

(1) u sol. classica $\Rightarrow$ u sol. variazionale

(2) u sol. variazionale
$\left.\begin{array}{l} c, f \text{ continue} \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{array}\right] \Rightarrow u$ sol. classica.

Teorema di esistenza e unicità per $(D)_V$

Nelle ip. sopra, il problema $(D)_V$:
trovare $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

ammette una e una sola soluzione.

Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:
u risolve:

$$\min_{v \in H^1_0(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a|\nabla v|^2 + c v^2\right) - \int_\Omega f v$$

Dim.

Considero $H = H^1_0(\Omega)$, munito di $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$

- $\varphi(v) := \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$
- $b(u,v) := \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + c u v$

$$\begin{cases} \varphi \text{ è lineare continuo} \\ b(u,v) \text{ è bilineare simm. continua coerciva} \end{cases}$$

Lax-Milgram: $\exists$ unico $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che
$$\varphi(v) = b(u,v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$
ovvero:
$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$
Inoltre u risolve
$$\min_{H^1_0(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} b(v,v) - \varphi(v)$$
Verifica ip. Lax-Milgram:

- φ è (lineare) continuo: $|\varphi(v)| \leq M \|v\|_H$
$$\left| \int_\Omega f v \right| \leq \int_\Omega |f v| \underset{(H)}{\leq} \|f\|_2 \|v\|_2$$
$$\underset{(P)}{\leq} \underbrace{C_p(\Omega) \|f\|_2}_{M} \underbrace{\|\nabla v\|_2}_{= \|v\|_H}$$

- $b(u,v)$ è (bilineare simmetrica)

$$\begin{cases} \text{continua} & |b(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \\ \text{coerciva} & b(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \end{cases}$$

continua:

$$|b(u,v)| = \left|\int_\Omega a\nabla u\cdot\nabla v + euv\right| \leq$$

$\uparrow$ magg. modulo

$$\leq \int_\Omega |a\nabla u\cdot\nabla v + euv|$$

$$\leq \int_\Omega a\,|\nabla u\cdot\nabla v| + e\,|uv| \leq \int_\Omega a|\nabla u\cdot\nabla v| + \|e\|_\infty \int_\Omega |uv|$$

$$\leq a\,\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|e\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2$$

$$\underset{(P)}{\overset{(H)}{\leq}} a\,\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|e\|_\infty C_P^2(\Omega) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

$$= \underbrace{\left(a + \|e\|_\infty C_P^2(\Omega)\right)}_{C} \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

$$\|\nabla u\|_2 \downarrow \|u\|_H \qquad \|\nabla v\|_2 \downarrow \|v\|_H$$

coercività:

$$b(u,u) = \int_\Omega a|\nabla u|^2 + eu^2 \geq$$

$$\geq \int_\Omega a|\nabla u|^2 = \underbrace{a}_{\alpha} \|\nabla u\|_2^2$$

$$\|\nabla u\|_2^2 \uparrow \|u\|_H^2$$

$\blacksquare$

Teorema di esistenza e unicità per $(N)_V$

Nelle ip. sopra, supponiamo anche che
$c(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega$
il problema $(N)_V$:
trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che
$$\int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$
ammette una e una sola soluzione.
Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:
u risolve:
$$\min_{v \in H^1(\Omega)} \quad E(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega (a |\nabla v|^2 + c v^2) - \int_\Omega f v$$

dim. Analoga al caso (D) lavorando su
$H = H^1(\Omega)$ munito di $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$.
Tranne che per la coercività di b:
$$b(u,u) = \underbrace{\int_\Omega a |\nabla u|^2 + c\, u^2}_{} \overset{?}{\geq} \alpha \|u\|^2_{H^1}$$
$$\geq \int_\Omega a |\nabla u|^2 + c_0 u^2 \geq \underbrace{\min\{a, c_0\}}_{:= \alpha} \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2}_{\|u\|^2_{H^1}}$$

Serie di Fourier in spazi di Hilbert

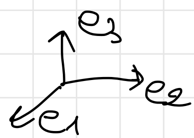
Def. Sia H un Hilbert.
Una famiglia di vettori $\{u_n\} \subseteq H$ si dice

SISTEMA ORTOGONALE se $(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$

SISTEMA ORTONORMALE se è ortogonale e $(u_n, u_n) = 1 \quad \forall n$

Es. • $H = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1,0,0)$$
$$e_2 = (0,1,0)$$
$$e_3 = (0,0,1)$$



• $H = \ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \sum_{n\geq 0} x_n^2 < +\infty \right\}$

è uno spazio vettoriale normato

$$\begin{cases} (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \\ (\lambda x_n) = \lambda x_n \end{cases} \qquad \left(\sum_{n\geq 0} x_n^2 \right)^{1/2} := \|x\|_{\ell^2}$$

è di Hilbert $\quad ((x_n), (y_n)) = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$

$$\mathbb{R}^N \qquad (x_1, \dots, x_N)$$
$$(y_1, \dots, y_N) \qquad (N \to +\infty)$$

$$e_n = (0, \_\_ 0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } n}}{1}, 0 \quad 0 \quad) \qquad n \in \mathbb{N}$$

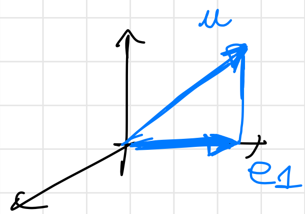
Def. Sia H Hilbert, sia (u_n) sistema ortonormale

Dato $u \in H$, definiamo:

- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$ — COEFF. DI FOURIER DI u (rispetto a (u_n))
- $\sum_n (u, u_n)\, u_n$ — SERIE DI FOURIER DI u (rispetto a (u_n))

__Esempi__

- $H = \mathbb{R}^3$



$\{e_1\}$ $\quad (u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$

$\{e_1, e_2\}$ $\quad (u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 = P_{\langle e_1, e_2 \rangle}(u)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad (u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 + (u, e_3)e_3 = u$

- $H = \ell^2$

$\{e_1\}$ $\quad (1, 0, 0, \ldots, 0) \quad (u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$

$\{e_i\}$ con i pari $\quad \sum_k (u, e_{2k})\, e_{2k}$

$\{e_n\}$ con n qualsiasi $\quad \sum_n (u, e_n)\, e_n = u$

Teorema di convergenza per serie di Fourier

Sia H Hilbert, e sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale.
Dato $u \in H$, la serie di Fourier di u
CONVERGE in $H^{(*)}$ e

$$\sum_n (u, u_n) u_n = u'$$

dove u' è la PROIEZIONE ORTOGONALE di u su M,
dove M è la chiusura del sottospazio
generato$^{(**)}$ dal sistema $\{u_n\}$.

$(*)$ $\sum_{n \geq 0} (u, u_n) u_n$ converge in H $\leftrightsquigarrow$ $S_N(u) = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n) u_n$

$\exists \lim_{N \to +\infty} S_N(u) = u'$

$\lim_{N \to +\infty} \|S_N(u) - u'\| = 0$

$(**)$ $\langle u_n \rangle := \{$comb. lineari degli $u_n\}$.

$M = \overline{\langle u_n \rangle} := \{$limiti di comb. lineari degli $u_n\}$

è un sottospazio chiuso.

Disuguaglianza di Bessel

Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale

Dato $u \in H$,

$$\sum_n \underbrace{(u, u_n)^2}_{} \le \|u\|^2$$

quadrati dei coeff. di Fourier

Dim. Fisso $N \in \mathbb{N}$, e mostriamo

$$\sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2 \le \|u\|^2 \quad (\Rightarrow \text{tesi passando al lim per } N \to +\infty)$$

$$0 \le \Big\| u - \sum_{n \le N} (u, u_n) u_n \Big\|^2 =$$

$$= \Big(u - \sum_{n \le N} (u, u_n) u_n ,\ u - \sum_{n \le N} (u, u_n) u_n \Big) =$$

$$= \|u\|^2 - \cancel{2} \sum_{n \le N} (u, u_n)^2 + \cancel{\sum_{n \le N} (u, u_n)^2} \qquad \blacksquare$$

$$\big((u,u_1)u_1 + (u,u_2)u_2 ,\ (u,u_1)u_1 + (u,u_2)u_2 \big) =$$

$$(u,u_1)^2 + (u,u_2)^2$$

Dim Teo convergenza per serie di Fourier

Per dimostrare la cv. della serie, basta mostrare che $S_N(u)$ è di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \| S_N(u) - S_M(u) \|^2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu$.

ovvero: (supponiamo $N > M$)

$$\| S_N(u) - S_M(u) \|^2 = \left(S_N(u) - S_M(u) , \ S_N(u) - S_M(u) \right) =$$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n) u_n , \ \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n) u_n \right)$$

$$= \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n)^2 = | T_N(u) - T_M(u) | \quad \text{dove}$$

$$T_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$$

Bessel $\Rightarrow \{ T_N(u) \}$ è di Cauchy!

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \ | T_N(u) - T_M(u) | < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu$.

Quindi, poiché siamo in un Hilbert,

$S_N(u)$ converge!

Sia $u' := \sum_n (u, u_n) u_n$

Per dimostrare $u' = P_M(u)$, basta mostrare:

1) $u' \in M$
2) $u - u' \in M^\perp$

$\Rightarrow \quad u = \underbrace{u'}_{\in M} + \underbrace{(u-u')}_{\in M^\perp}$

$\Rightarrow$ per l'unicità nel teo delle proiezioni,

$u' = P_M(u)$, $\quad u - u' = P_{M^\perp}(u)$.

Infatti:

1) $u' \in M$ vale per costruzione:

$$u' = \underbrace{\lim_{N \to +\infty} S_N(u)}_{\in \overline{\langle u_n \rangle}}$$

u' è limite di comb. lineari degli u_n.

$$S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n$$

$S_N(u) \in \langle u_n \rangle$

sono comb. lineari degli u_n

2) Per mostrare che $u - u' \in M^\perp$,

basta far vedere che $(u - u', u_m) = 0 \ \forall m$

($\Rightarrow$ $u - u'$ sarà ortogonale ai limiti delle comb. lineari degli u_n, ovvero a tutti gli el di M)

$$(u-u', u_m) = \left(u - \sum_n (u,u_n)u_n,\ u_m\right)$$

$$= (u, \cancel{u_m}) - (u, \cancel{u_m})\underbrace{(u_m, u_m)}_{= 1}$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

Def. Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale.

Si dice che (u_n) è un SISTEMA COMPLETO

se è massimale rispetto all'inclusione

ovvero: $\nexists$ (v_n) sistema ortonormale

che contenga propiamente (u_n) $\left((u_n) \subsetneq (v_n)\right)$

Proposizione (Caratterizzazione sistemi ortonormali completi)

Sia (u_n) un sistema ortonormale in H Hilbert.

Sono equivalenti:

(1) (u_n) è completo

(2) $u \in H : \ (u, u_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow u = 0$

(3) Posto $M := \overline{\langle u_n \rangle}$, si ha $M \equiv H$.

(4) $\sum_n (u, u_n) u_n = u \quad \forall u \in H$.

(5) $\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v) \quad \forall u, v \in H$

IDENTITÀ DI PARSEVAL

(6) $\sum_n (u, u_n)^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in H$

IDENTITÀ DI BESSEL

Dim.

$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$

Dim. • (6) $\Rightarrow$ (2) Se $(u, u_n) = 0 \ \forall n$, $\sum 0 = 0$.

• (1) $\Rightarrow$ (2) ovvero non (2) $\Rightarrow$ non (1).

$\exists u \in H : \ (u, u_n) = 0 \ \forall n$ MA $u \neq 0$.

Allora (u_n) NON massimale.

• (2) $\Rightarrow$ (1) ovvero non (1) $\Rightarrow$ non (2)

se (u_n) NON massimale, posso aggiungerci almeno un elemento $\Rightarrow \exists u \in H$ per cui la (2) è falsa.

• (2) $\Rightarrow$ (3). Per mostrare $M \equiv H$, basta mostrare $M^\perp = \{0\}$. vero per (2)

((2) $\Rightarrow$ se $u \in M^\perp$ allora $u = 0$).

• (3) $\Rightarrow$ (4). Se $M \equiv H$, allora $u' = P_M(u) = u$

• (4) $\Rightarrow$ (5)

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum (u, u_n) u_n \\ v &= \sum (v, u_n) u_n \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$(u, v) = \left(\sum (u, u_n) u_n , \sum (v, u_n) u_n \right) =$$

$$= \sum (u, u_n)(v, u_n) \underbrace{(u_n, u_n)}_{= 1}$$

• (5) $\Rightarrow$ (6) Prendere $u = v$ in Parseval. $\blacksquare$

Serie di Fourier in $L^2(I)$ $\quad I=\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$

prodotto scalare $(f,g)=\int_I f(x)g(x)\,dx$

Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici

$$p_0=\frac{1}{\sqrt{T}}\,,\quad p_k=\frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}\,,\quad q_k=\frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}\quad (k\geq 1)$$

dove $\xi_k=\left(\frac{2\pi}{T}\right)k$ $\quad$ (se $T=2\pi$, $\xi_k=k$)

formano un sistema ortonormale.

$\Downarrow$

Data $f\in L^2(I)$ la sua serie di Fourier rispetto a q.s. sistema è la serie:

$$\underbrace{(f,p_0)}_{\int_I f p_0}p_0+\sum_{k\geq 1}\underbrace{(f,p_k)}_{\int_I f p_k}p_k+\underbrace{(f,q_k)}_{\int_I f q_k}q_k\qquad (*)$$

Modi equivalenti di scrivere (*):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K \geq 1} a_K \cos(\xi_K x) + b_K \sin(\xi_K x) \qquad (**)$$

$$\begin{cases} a_K = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_I f(x) \cos(\xi_K x)\, dx & K \geq 0 \\ b_K = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_I f(x) \sin(\xi_K x)\, dx & K \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_K \underbrace{e^{i\xi_K x}}_{\cos(\xi_K x) + i \sin(\xi_K x)} \qquad (***)$$

$$\hat{f}_K = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\xi_K x} \, dx \qquad K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \hat{f}_K = \dfrac{a_K - i b_K}{2} & K \in \mathbb{N} \\ \hat{f}_{-K} = \dfrac{a_K + i b_K}{2} \end{cases}$$

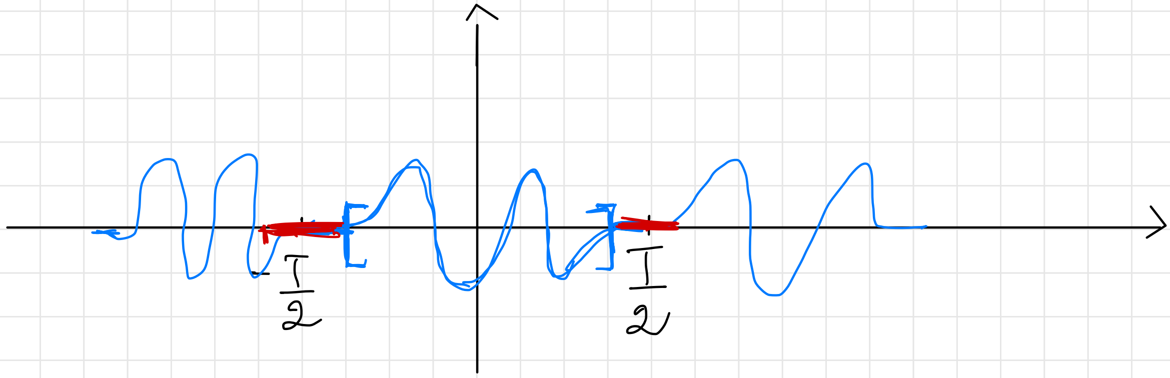
Teorema: Il sistema $(p_0, p_k, q_k)_{k\geq 1}$ è ortonormale completo in $L^2(I)$.

Dim. Usiamo la 3) e mostriamo che $\overline{\langle p_0, p_k, q_k \rangle} = L^2(I)$.

$\subseteq$ sempre vero. $(\overline{M} \subseteq H)$

$\supseteq$ $\forall f \in L^2(I)$, f può essere approssimata con elementi di $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$.

Passo 1 Mostriamo che quanto sopra è vero se $f = \varphi \in C_0^\infty(I)$. Infatti, posso estendere φ a $\tilde{\varphi} \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.



Sappiamo (Analisi B) che la serie di F. di $\tilde{\varphi}$ converge a $\tilde{\varphi}$ unif. su $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

$\Rightarrow$ in $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ la successione delle somme parziali della serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ fornisce una successione in $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$ che converge a $\tilde{\varphi} = \varphi$ in $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$

<u>Passo 2</u> Data $f \in L^2(I)$, posso approssimarla con una successione $\varphi_k \subset C_0^\infty(I)$.

$$\varphi_k \xrightarrow{L^2(I)} f$$

Concludo prendendo una successione diagonale.

oppure:

$$\| f - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme parziale} \\ \text{della serie di F} \\ \text{di } \varphi}}{S} \| \leq \underbrace{\| f - \varphi \|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\| \varphi - S \|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Osservazioni / commenti

- Data $f \in L^2(I)$, per il teorema sopra:

$$f = (f, p_0) p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k) p_k + (f, q_k) q_k .$$

- Data $f \in L^2(I)$, vale l'id. di Bessel:

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = (f, p_0)^2 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)^2 + (f, q_k)^2$$

(id Bessel : $f \in L^2(I) \Leftrightarrow$ i suoi coeff di Fourier $\in \ell^2$)

- Possiamo "sostituire" $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con

$$L^2_T(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) \ : \ T\text{-periodiche} \}.$$

$\uparrow$

è uno spazio di Hilbert, con $(f, g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f g$

- I coeff di F. hanno senso anche per $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$:

$$|a_k| = \frac{2}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\xi_k x) \, dx \right| \leq \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| < +\infty$$

lo stesso per i b_k.

- Se $f \in A.C.([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$

posso estenderla a una funzione continua periodica su $\mathbb{R}$

(l'estensione f appartiene a $L^2_T(\mathbb{R})$).

Ha senso calcolare i coeff di Fourier sia di f che di f'

$$\begin{cases} a_k, b_k & \text{siano i coeff di Fourier di } f \\ a'_k, b'_k & \text{" " " " } f' \end{cases}$$

$$a'_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\cos(\xi_k x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=} \frac{2}{T}\cancel{f(x)\cos(\xi_k x)}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T}\xi_k\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\xi_k x)\,dx = \xi_k b_k$$

$$\begin{cases} a'_k = \xi_k b_k \\ b'_k = -\xi_k a_k \end{cases}$$

relazioni tra i coeff di Fourier di f e di f'

$$\left\{ \widehat{f'}_k = i\xi_k \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \right.$$

Applicazioni delle serie di Fourier a eq. differenziali

→ ODE

→ PDE → posposto.

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari tramite serie di Fourier

Consideriamo un'ODE su $\mathbb{R}$ della forma

$$\sum_{j=0}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. cti}}}{a_j} u^{(j)} = \underset{\substack{\uparrow \\ f \in L^2_T(\mathbb{R})}}{f} \qquad x \in \mathbb{R}$$

ODE in u

Problema: esistono soluzioni T-periodiche (in $L^2_T(\mathbb{R})$)?

La ns eq. differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n} a_j (i\xi_k)^{(j)}\right]}_{P(i\xi_k)} \hat{u}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

sistema di (infinite) eq. algebriche in $\hat{u}_k$

Indicando con P il polinomio caratteristico dell'ODE di partenza $\left(P(\lambda)=\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right)$, l'ODE risulta equivalente al sistema:

$$P(i\xi_k)\,\hat{u}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ciascuna eq. è un'eq. lineare di 1° grado in $\hat{u}_k$!

$$\left(ax = b \;\begin{cases} \nearrow a \neq 0 \Rightarrow \text{unica solut. } x = \frac{b}{a} \\ \searrow a = 0 \begin{cases} \nearrow b = 0 \quad \text{infinite soluz.} \\ \searrow b \neq 0 \quad \text{nessuna solut.} \end{cases} \end{cases} \right)$$

- Caso 1 $\quad P(i\xi_k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad \hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)}$$ unica sol. (in L^2_T).

- Caso 2 $\quad P(i\xi_k) = 0$ per $k = k_1^*, \ldots, k_p^*$

$\nearrow$ $\hat{f}_k = 0$ per $k = k_1^*, \ldots, k_p^*$ $\Rightarrow$ infinite solut.

ovvero $$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} & k \neq k_1^*, \ldots, k_p^* \\ \text{arbitrari} & k = k_1^*, \ldots, k_p^* \end{cases}$$

$\searrow$ $\hat{f}_k \neq 0$ per qualche $k \in \{k_1^*, \ldots, k_p^*\}$ $\Rightarrow$ no soluz.

Oss/commento: Ci sono altri sistemi ortonormali completi in $L^2(I)$,

$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3 \quad \ldots\ldots$

$\rightsquigarrow$ polinomi di Legendre.

Es. in $L^2(-1,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right), \quad \ldots\ldots$$

Dato $f \in L^2(I)$, per minimizzare la distanza in $L^2(I)$ da un polinomio di grado ≤ 3, dovrò considerare la somma della serie di F. di f fatta rispetto ai polinomi di Legendre.

Trasformata di Fourier

Def. Sia $u = u(x) \in L^1(\mathbb{R})$. La sua TRASFORMATA DI FOURIER è la funzione definita per $\xi \in \mathbb{R}$ da:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_x} u(x) e^{-i\xi x} \, dx \quad , \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Commenti.

- la dipendenza da ξ appare in $e^{-i\xi x} \implies$ $\hat{u}(\xi)$ è un integrale dip. dal parametro
- formalmente c'è analogia coi coeff di Fourier

$$\hat{u}_K = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) e^{-i\xi_K x} \, dx \qquad K \in \mathbb{Z}$$

- la def di $\hat{u}(\xi)$ è "ben posta" grazie all'ipotesi $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$|\hat{u}(\xi)| \underset{\uparrow}{\leq} \int_{\mathbb{R}_x} |u(x)| \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} \, dx = \int_{\mathbb{R}_x} |u(x)| dx < +\infty.$$

- $$e^{-i\xi x} = \cos(-\xi x) + i \sin(-\xi x)$$
$$= \cos(\xi x) - i \sin(\xi x)$$

$\Rightarrow \hat{u}(\xi)$ è a valori in $\mathbb{C}$ $(\hat{u}: \mathbb{R} \to \mathbb{C})$

$$\hat{u}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x)\cos(\xi x)\,dx}_{\operatorname{Re}\hat{u}} - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x)\sin(\xi x)\,dx}_{\operatorname{Im}\hat{u}}$$

- Generalizzazioni: si può partire da
  - $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
  - $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(u \in L^1(\mathbb{R}^n))$

    $$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_x} u(x) e^{-i\xi \cdot x}\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$
  - $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

NON SI TRASFORMANO FUNZIONI DEFINITE SU SOTTOINSIEMI PROPRI DI $\mathbb{R} / \mathbb{R}^n$.

- Varianti in letteratura:

$$e^{-i\xi x} \rightsquigarrow e^{i\xi x}, \quad e^{i 2\pi \xi x}$$

- La TRASFORMATA $\mathcal{F}$ DI FOURIER

è l'operatore che manda u in $\hat{u}$

$$\mathcal{F}: \underset{u=u(x)}{u} \longrightarrow \underset{\hat{u}=\hat{u}(\xi)}{\hat{u}}$$

Oss.: $\mathcal{F}$ è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u+\beta v) = \alpha \mathcal{F}(u)+\beta \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{F}(\alpha u+\beta v) = \int_{\mathbb{R}} (\alpha u+\beta v)(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$\alpha \mathcal{F}(u)+\beta \mathcal{F}(v) = \alpha \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} v(x) e^{-i\xi x} dx$$

Trasformate notevoli

1) $u(x) = \chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i\,\frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

$(a,b) = (-1,1) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \dfrac{2\sin\xi}{\xi}$

(In generale $\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R})$).

2) $u(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

(In qs. caso $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$)

3) $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$

(Oss: $u(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{\hat{u}}(x) = 2\pi e^{-|x|}$)

Teorema di Riemann-Lebesgue

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{u}$ ha le seguenti proprietà:

1) $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\left(\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lineare continuo con } \|\mathcal{F}\| \leq 1\right)$

2) $\hat{u}$ è continua

3) $\hat{u}$ è "infinitesima all'infinito"

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0.$$

Dim. 1) Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ vale:

$$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ passo all'ess-sup al variare di ξ

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$M = 1$

2) Facciamo vedere $\hat{u}(\xi)$ è continua in ξ fissato in $\mathbb{R}$, ovvero $\xi_n \to \xi \Rightarrow \hat{u}(\xi_n) \to \hat{u}(\xi)$

$$\hat u(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-i\xi_n x}\, dx$$

? $\downarrow$

$$\hat u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

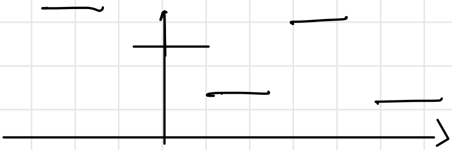
$$f_n(x) = u(x)\, e^{-i\xi_n x} \longrightarrow u(x)\, e^{-i\xi x} = f(x)$$

ok per conv. dominata, perché

$$|f_n(x)| = |u(x)|\,\underbrace{|e^{-i\xi_n x}|}_{=1} = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

3) VERO se $u = \chi_{(a,b)}(x)$

VERO se u è "a scalino", $u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{I_i}$



$$\Downarrow$$

$$\hat u = \sum_{i=1}^{N} c_i \widehat{\chi_{I_i}}$$

VERO $\forall u \in L^1(\mathbb{R})$: $\exists\, \varphi_n$ "a scalino" $\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$

Sappiamo che $\mathcal{F}: L^1 \longrightarrow L^\infty$ op. continuo.

$$\varphi_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u \Longrightarrow \hat\varphi_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \hat u$$

So che che $\hat\varphi_n$ sono "infinitesime all'infinito"

$\Rightarrow$ anche $\hat u$ ha la stessa proprietà.

Proprietà algebriche

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x-a) \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = e^{-i\xi a}\,\hat{u}(\xi)$

- $v(x) = e^{iax}\,u(x) \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - a)$

Es. $u(x)\cos(ax) = u(x)\left[\dfrac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right] \xrightarrow{\mathcal{F}}$

$= \dfrac{1}{2}\left[\hat{u}(\xi-a)+\hat{u}(\xi+a)\right]$

- $v(x) = u\left(\dfrac{x}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = |a|\,\hat{u}(a\xi)$

(In particolare $a = -1 \Rightarrow$

$\begin{cases} u \text{ pari} \Rightarrow \hat{u} \text{ pari} \quad (\text{reale}) \\ u \text{ dispari} \Rightarrow \hat{u} \text{ dispari} \quad (\text{puramente immaginaria}) \end{cases}$

Es. Calcolare $\mathcal{F}$ di: $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{1+(x+3)^2}$, $\dfrac{1}{4+x^2}$

Proprietà differenziali

Proposizione 1 Sia $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap A.C.(\mathbb{R})$
($\Rightarrow$ u derivabile q.o. su $\mathbb{R}$, con $u' \in L^1(\mathbb{R})$). Allora

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi\, \hat{u}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ip. della prop

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \underset{\text{R.L.}}{\Longrightarrow} \lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{u'}(\xi) = 0$$

ovvero $\displaystyle\lim_{\xi \to \pm\infty} \xi\, \hat{u}(\xi) = 0$ ovvero $\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \xi\, \hat{u}(\xi) = \lim_{\xi \to \pm\infty} \frac{\hat{u}(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

Iterando: $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$, $u' \in AC(\mathbb{R})$

$$\widehat{u''}(\xi) = (i\xi)^2\, \hat{u}(\xi) = -\xi^2\, \hat{u}(\xi)$$

e $\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$

Morale: maggior regolarità di u $\rightsquigarrow$ maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di $\hat{u}$

Dim

$$\widehat{u'}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\, e^{-i\xi x}\, dx =$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} \underbrace{u'(x)}_{f}\, \underbrace{e^{-i\xi x}}_{G}\, dx$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \cancel{u(x)\, e^{-i\xi x}\Big|_{-L}^{L}} - (-i\xi)\int_{-L}^{L} u(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= i\xi \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x}\, dx = i\xi\, \hat{u}(\xi).$$

$u(L)\, e^{i\xi L} \longrightarrow 0$ per $L \to +\infty$.

(infatti per $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$, $u(L) \xrightarrow[L\to+\infty]{} 0$

$$u(L) = u(0) + \int_0^L u'(t)\, dt$$

$$= u(0) + \int_0^{+\infty} \underbrace{u'(t)\, \chi_{(0,L)}(t)}_{f_L(t)}\, dt \longrightarrow$$

$$u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t)\, dt$$)

Proposizione 2 Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $xu \in L^1(\mathbb{R})$

Allora:

$$(\hat{u})'(\xi) = -i\,\widehat{xu}\,(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare:

siccome la trasformata di xu è continua (per RL) $\Rightarrow (\hat{u})'$ continua, cioè $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R})$.

Iterando:

- $u \in L^1(\mathbb{R})$: $xu \in L^1(\mathbb{R})$, $x^2u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in C^2(\mathbb{R})$
- $u \in L^1(\mathbb{R})$: $u \sim \dfrac{M}{x^\alpha}$ con $\alpha > K \Rightarrow$

  per $x \to \pm\infty$

$$x^{K-1}u(x) \sim \frac{M}{x^{\alpha - K + 1}} \quad \alpha - K + 1 > 1 \qquad \Rightarrow x^{K-1}u \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \hat{u} \in C^{K-1}(\mathbb{R}).$$

Morale: maggior rapidità di decrescenza a 0 per u $\rightsquigarrow$ maggior regolarità di $\hat{u}$.

Dim. (cenno)

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

posso derivare sotto $\int$:

$$\left(\hat{u}(\xi)\right)' = \int_{\mathbb{R}} \left(u(x) e^{-i\xi x}\right)' dx$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}} x u(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

$$\widehat{x u(x)}\,(\xi).$$

$\blacksquare$

Idea per applicare $\mathcal{F}$ alla risoluzione di eq. differenziali

eq. differenziale in $u = u(x)$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

eq. algebrica in $\hat{u} = \hat{u}(\xi)$

$$\Big\downarrow$$

ricavo $\hat{u}$

$$\Big\downarrow$$

trovo u a partire da $\hat{u}$

Esempio

$$u'(x) - u(x) = e^{-x} H(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Cerco soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$.

$$\widehat{u'} - \hat{u} = \widehat{e^{-x} H(x)}$$

$$i\xi \hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$(i\xi - 1)\hat{u} = \frac{1}{1+i\xi} \quad \leftarrow \text{ eq. algebrica in } \hat{u}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \qquad \left(u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{i\xi_k x}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad u(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

↑
trasformate notevoli

Formule di inversione per $\mathcal{F}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora:

$$\boxed{u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\check{u}(x) := u(-x) \qquad\qquad \check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}.$$

Pb. Esiste uno spazio X tale che

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow X$$

e valga in X la formula d'inversione?

R. $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Formula di inversione per $\mathcal{F}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Allora $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e vale:

$$\boxed{u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n}$$

Ma .... chi è $\hat{u}$ in $L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$?

Es. $u(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx \underset{\uparrow}{<} +\infty$$

se $u \in L^1(\mathbb{R})$

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Spazio delle funzioni a decrescenza rapida

Def. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che

$\forall \alpha, \beta$ multiindici $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \}$

(Es. In $\mathbb{R}^2$ $\alpha = (1,2)$ $\beta = (3,3)$

$$x^\alpha D^\beta u = x_1^1 x_2^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^3 \partial^3 x_2}$$)

Esempi/Osservazioni

- $$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\subset} C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

es. $u(x) = e^{-x^2}$ es. $u(x) = 1$

- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\gamma u,\ D^\gamma u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$

  $\Rightarrow$ posso calcolare $\mathcal{F}$ per $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Valgono in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le formule:

(1) $\widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|}\, \xi^\alpha\, \hat{u}$

(2) $D^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha u}$

- <u>Formule di inversione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$</u>

  Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n}\, \hat{\hat{u}}.$$

<u>Dim.</u> Se dimostro che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora vale la formula di inversione. (come conseguenza di quella in $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$).

- $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ perchè $\forall \alpha$, $x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$(u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ per la prop. 2. $\hat{u}$ ha derivate d'ogni ordine)

- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta$

perchè $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modulo} \\ \text{coeff.}}}{\sim} \xi^\alpha \widehat{x^\beta u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modulo} \\ \text{coeff.}}}{\sim} \widehat{D^\alpha(x^\beta u)}$$

e $D^\alpha(x^\beta u)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ perchè appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow$ per Riemann-Lebesgue la sua trasformata sta in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\blacksquare$

Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- $$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, v = \int_{\mathbb{R}^n} u\, \hat{v}$$

- $$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2}$$

IDENTITÀ DI PLANCHEREL

- $$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

- $$\widehat{u v} = (2\pi)^{-n}\, \hat{u} * \hat{v}$$

Def. Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e sia $\{u_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \longrightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.$^{(*)}$

Considero $\hat{u}_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e definisco

$$\hat{u} := \lim_h \hat{u}_h \qquad (\text{in } L^2(\mathbb{R}^n))$$

Idea:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \ni u_h \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & u \in L^2 \\ \mathcal{S} \ni \hat{u}_h \arrow[r] & \hat{u} \in L^2 \end{tikzcd}$$

(*) esiste una tale u_h perché $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Osservazioni:

1) $\exists \lim_h \hat{u}_h$ (in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

perché $\hat{u}_h$ è di Cauchy: infatti

$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_h - u_k\|_2$$

id di Plancherel in $\mathcal{S}$

e la successione u_h è di Cauchy.

2) $\lim_h \hat{u}_h$ è indip. dalla scelta di u_h:

$u_h \xrightarrow{L^2} u$, $v_h \xrightarrow{L^2} u$ $\Longrightarrow$

$\lim_h \hat{u}_h = \lim_h \hat{v}_h$ perché

$u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0 \underset{\text{Plancherel}}{\Longrightarrow} \hat{u}_h - \hat{v}_h \longrightarrow 0$

3) Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

Allora $\hat{u} = \overset{\text{db}}{u}$.

Infatti prendendo $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$ (possibile tramite mollificatori)

si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} & \text{(perché } \mathcal{F}: L^1 \to L^\infty \text{ continua)} \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \overset{\text{db}}{u} & \text{(per def di } \mathcal{F} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)\text{).} \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{u} = \overset{\text{db}}{u}$ q.o.

4) Vale l'id. di Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\| u \|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \| \hat{u} \|_{L^2}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Infatti, presa $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $u_h \xrightarrow{L^2} u$:

$$\| u_h \|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \| \hat{u}_h \|_{L^2}^2 \quad \forall h$$

passando al limite per $h \to +\infty$, ho la tesi

5) Come calcolare in pratica $\hat{u}$ (in dim 1):

Basta osservare che la successione

$$u_h = \underset{\sim}{u} \cdot \chi_{(-h,h)} = \begin{cases} u & \text{su } (-h,h) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$u_h \longrightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R})$

(cv. puntuale q.o., $|u_h|^2 \leq u^2 \in L^1(\mathbb{R})$.)

$\Rightarrow \hat{u_h} \longrightarrow \hat{u}$ in $L^2(\mathbb{R})$

(per Plancherel in $L^2(\mathbb{R})$,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\hat{u_h} - \hat{u}\|_{L^2}} = \frac{1}{2\pi} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|u_h - u\|_{L^2}} \quad)$$

Quindi $\qquad \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{u}(\xi) = \lim_h \hat{u}_h(\xi)$$

$$\boxed{\hat{u}(\xi) = \lim_h \int_{-h}^{h} u(x) e^{-i\xi x} \, dx}$$

Esempio:

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \pi \chi_{(-1,1)}$$

Inoltre

$$\|u\|^2_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|^2_{L^2} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$$

6) Perché vale la formula di inversione in L^2?

Basta prendere $u_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\underline{u_h \xrightarrow{L^2} u}$

Sappiamo:

$$\check{u}_h = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}_h \qquad \forall h$$

Basta passare al limite per $h \to +\infty$.

$$\check{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}$$

Esempio:

$u(x) = e^{-x^2}$ cf. ESERCITAZIONE.

Trasformata di Fourier di distribuzioni

Problema: Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, come definire $\hat{T}$?

Idea: scaricare $\mathcal{F}$ sulle funzioni test

Sappiamo: $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, v = \int_{\mathbb{R}^n} u\, \hat{v} \quad \forall u, v \in \mathcal{S}$

Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potremmo definire $\hat{T}$

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

"Inconveniente": la def sopra è mal posta, perché

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

cioè $\mathcal{F}$ NON manda $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in sé stesso

(la trasformata di una $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è analitica, quindi non può avere supporto compatto).

Per rimediare: usare funzioni test in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A tale scopo, introduco una convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n$

~~Def.~~ Data $\{\varphi_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

diciamo che $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se

$\forall \alpha, \beta$, $\quad x^\alpha D^\beta \varphi_k \longrightarrow x^\alpha D^\beta \varphi$ unif. su $\mathbb{R}^n$

Oss. 1) Data $\{\varphi_k\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\varphi_k \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\uparrow$

(Recall: $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se $\exists$ K compatto t.c.

supp $\varphi_k \subseteq K$ $\forall k$ e $\varphi_k \to \varphi$ unif. su K con tutte le derivate).

2). $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lineare e' CONTINUO:

ovvero $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}_k \to \hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\Big(\; \underbrace{\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}_k}_{\widehat{D^\alpha(x^\beta \varphi_k)}} \longrightarrow \underbrace{\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}}_{\widehat{D^\alpha(x^\beta \varphi)}} \text{ unif. su } \mathbb{R}^n$$

perché $D^\alpha(x^\beta \varphi_k) \longrightarrow D^\alpha(x^\beta \varphi)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$

es. $n=1$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|D^\alpha(x^\beta \varphi_k) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|\,(1+x^2)}{1+x^2} \longrightarrow 0$$

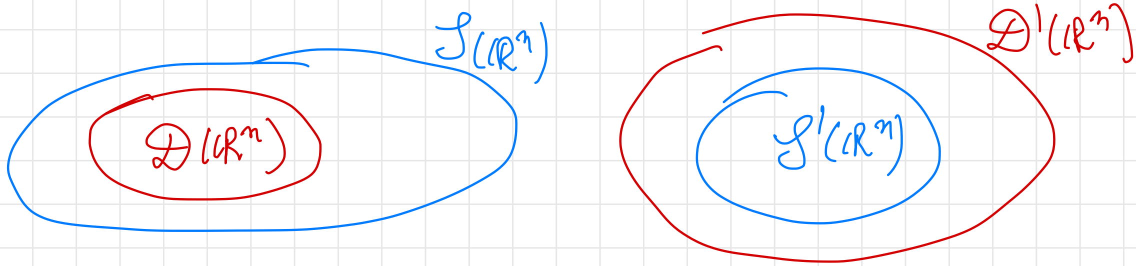
$$\wedge\!\!\wedge$$

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \Big| |D^\alpha(x^\beta \varphi_k) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|(1+x^2) \Big| \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Def. Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si dice **DISTRIBUZIONE TEMPERATA** se

$$\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \quad \varphi_h \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \longrightarrow 0$$

Def. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{$ distribuzioni temperate $\}$.



Esempi $(n=1)$

1) $u(x) = p(x)$ polinomio $\in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Dico che $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \cdot \varphi_h \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u}{p} \cdot p \varphi_h \right| dx \leq \left\| \frac{u}{p} \right\|_{L^1} \| p \varphi_h \|_{L^\infty}$$

dove p polinomio tale che $\frac{u}{p} \in L^1(\mathbb{R})$.

Quindi: se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\| p \varphi_h \|_{L^\infty} \longrightarrow 0$

e quindi $\int_{\mathbb{R}} u \varphi_h \longrightarrow 0$.

2) $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si dice A CRESCITA LENTA se $u = q\,w$, con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$

Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u\,\varphi_h\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |w\,q\,\varphi_h| \leq \|w\|_{L^1}\,\|q\,\varphi_h\|_{L^\infty}$$

Quindi: se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|q\,\varphi_h\|_{L^\infty} \to 0$

e quindi $\int_{\mathbb{R}} u\,\varphi_h \to 0$

3) Come caso particolare: $u \in L^p(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ u è a crescita lenta, e quindi sta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Data $u \in L^p(\mathbb{R})$, $u = q\,w$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$.

- $u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ prendo $q = 1$, $w \in u$
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow$ prendo q: $\frac{1}{q} \in L^1(\mathbb{R})$

$$u = q \cdot \frac{u}{q} \qquad w = \frac{u}{q} \underset{\text{Hölder}}{\in} L^1(\mathbb{R})$$

• $u \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$ prendo q: $\frac{1}{q} \in L^{p'}(\mathbb{R})$

$$u = q \cdot \frac{u}{q} \qquad w = \frac{u}{q} \underset{\uparrow \text{Hölder}}{\in} L^1(\mathbb{R})$$

4) $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $D^{(k)}\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \underset{\varphi_h(0)}{\underbrace{\langle \delta_0, \varphi_h \rangle}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(perché ho cv. unif. } \Rightarrow \text{ puntuale)}$$

<u>Altre osservazioni su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$</u>

1) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T$ può agire più in generale su funzioni test di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \qquad \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$$

Infatti, se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, posso <u>definire</u> $\langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ come

$\lim_h \langle T, \varphi_h \rangle$ dove $\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\varphi_h \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2) Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora vale:
$\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$\Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$.

Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Def. Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definisco
$\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$\boxed{\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

Oss.

1) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Quindi $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ ha senso perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2) Verifichiamo che $\hat{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
$\{\varphi_n\} \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \langle \hat{T}, \varphi_n \rangle \to 0$
Infatti $\{\varphi_n\} \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$\varphi_h \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \hat{\varphi}_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \langle T, \hat{\varphi}_h \rangle \longrightarrow 0$ perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3) Si ha anche $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(cf. sopra).

<u>Proprietà</u>: valgono in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
tutte le proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\check{T} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{T}} \quad \text{F. INVERSIONE.}$$

(dove $\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$)

<u>Dim.</u>

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle =$$
$$= (2\pi)^{-n} \langle \hat{\hat{T}}, \varphi \rangle$$

$\blacksquare$

Esempi ($n=1$)

1) $T = \delta_0$ $\qquad \widehat{\delta_0}$ $\qquad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx$

$$\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx =$$

metto $\xi = 0$ nella def di $\hat{\varphi}(\xi)$

($\langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) =$)

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{1}_{u} \cdot \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{\delta_0} = 1$$

2) $\hat{1} = \hat{\hat{\delta_0}} = (2\pi) \check{\delta_0} = (2\pi) \delta_0$

$$\langle \check{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \underbrace{\check{\varphi}}_{\varphi(-x)} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

3) $\hat{x} = \mathcal{F}(x \cdot 1) = i (\hat{1})' = 2\pi i (\delta_0)'$

$$\left(\langle \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi' \rangle = \varphi'(0) \right).$$

Recap:

$$\mathcal{F}: \quad L^1 \longrightarrow L^\infty$$

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$\mathcal{F}: \quad L^2 \longrightarrow L^2$$

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$$