Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

PRIMA PROVA IN ITINERE (A)

11 novembre 2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$.
   (a) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) = 0$.
   (b) Determinare per quali $w \in \mathbb{C}$ si ha $f\left(\frac{2\pi w}{1+w^2}\right) = 0$.
   (c) Determinare, per ciascuno dei w calcolati al punto precedente, quanto vale $|w|$, e rappresentare l'insieme di tali w nel piano complesso.

2. Data la famiglia di vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} t+2 \\ t-1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) scrivere l'equazione cartesiana del piano π_1 ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ e passante per il punto $P_1 = (2, 2, 1)$, l'equazione cartesiana del piano π_2 ortogonale a $\boldsymbol{v}_2$ e passante per il punto $P_2 = (6, 0, -1)$, l'equazione cartesiana del piano π_3 ortogonale a $\boldsymbol{v}_3$ e passante per il punto $P_3 = (0, -6, 2)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro t l'intersezione dei piani π_1, π_2 e π_3 NON sia formata da un singolo punto e, per tali valori, determinare esplicitamente tale intersezione.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \alpha-3 & \alpha-1 & 0 \\ 2\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale α
   (a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare dei parametro α;
   (b) determinare α affinchè A sia singolare e per tale valore di α determinare gli autovettori di A.

4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 - 1}{2n+1} \log\left(\frac{n^\alpha + 2n}{n^\alpha - n + 1}\right).$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.

6. Dare la definizione di serie numerica convergente ed enunciare i principali criteri per la convergenza di una serie a termini positivi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

PRIMA PROVA IN ITINERE (B)

11 novembre 2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$.
   (a) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) = 0$.
   (b) Determinare per quali $w \in \mathbb{C}$ si ha $f\left(\frac{4\pi w}{4+w^2}\right) = 0$.
   (c) Determinare, per ciascuno dei w calcolati al punto precedente, quanto vale $|w|$, e rappresentare l'insieme di tali w nel piano complesso.

2. Data la famiglia di vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4t+4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} t+3 \\ t \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) scrivere l'equazione cartesiana del piano π_1 ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ e passante per il punto $P_1 = (2, 2, 1)$, l'equazione cartesiana del piano π_2 ortogonale a $\boldsymbol{v}_2$ e passante per il punto $P_2 = (6, 0, -1)$, l'equazione cartesiana del piano π_3 ortogonale a $\boldsymbol{v}_3$ e passante per il punto $P_3 = (0, -6, 2)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro t l'intersezione dei piani π_1, π_2 e π_3 NON sia formata da un singolo punto e, per tali valori, determinare esplicitamente tale intersezione.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha-1 & 0 \\ -2\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale α
   (a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare dei parametro α;
   (b) determinare α affinchè A sia singolare e per tale valore di α determinare gli autovettori di A.

4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 - 1}{3n^3 + 1} \log\left(\frac{n^\alpha + 3n}{n^\alpha - n + 1}\right).$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.

6. Dare la definizione di serie numerica convergente ed enunciare i principali criteri per la convergenza di una serie a termini positivi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

PRIMA PROVA IN ITINERE (C)

11 novembre 2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$.
   (a) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) = 0$.
   (b) Determinare per quali $w \in \mathbb{C}$ si ha $f\left(\frac{4\pi w}{1+4w^2}\right) = 0$.
   (c) Determinare, per ciascuno dei w calcolati al punto precedente, quanto vale $|w|$, e rappresentare l'insieme di tali w nel piano complesso.
2. Data la famiglia di vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t-2 \\ 4t-4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) scrivere l'equazione cartesiana del piano π_1 ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ e passante per il punto $P_1 = (2, 2, 1)$, l'equazione cartesiana del piano π_2 ortogonale a $\boldsymbol{v}_2$ e passante per il punto $P_2 = (6, 0, -1)$, l'equazione cartesiana del piano π_3 ortogonale a $\boldsymbol{v}_3$ e passante per il punto $P_3 = (0, -6, 2)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro t l'intersezione dei piani π_1, π_2 e π_3 NON sia formata da un singolo punto e, per tali valori, determinare esplicitamente tale intersezione.
3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \alpha-4 & \alpha-1 & 0 \\ 3\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale α
   (a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare dei parametro α;
   (b) determinare α affinchè A sia singolare e per tale valore di α determinare gli autovettori di A.
4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 - 1}{4n + 1} \log\left(\frac{n^\alpha + 4n}{n^\alpha - n + 1}\right).$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.
6. Dare la definizione di serie numerica convergente ed enunciare i principali criteri per la convergenza di una serie a termini positivi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

PRIMA PROVA IN ITINERE (D)

11 novembre 2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$.
   (a) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) = 0$.
   (b) Determinare per quali $w \in \mathbb{C}$ si ha $f\left(\frac{6\pi w}{9+w^2}\right) = 0$.
   (c) Determinare, per ciascuno dei w calcolati al punto precedente, quanto vale $|w|$, e rappresentare l'insieme di tali w nel piano complesso.

2. Data la famiglia di vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} t+2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t+1 \\ 4t+8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} t+4 \\ t+1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) scrivere l'equazione cartesiana del piano π_1 ortogonale a $\boldsymbol{v}_1$ e passante per il punto $P_1 = (2, 2, 1)$, l'equazione cartesiana del piano π_2 ortogonale a $\boldsymbol{v}_2$ e passante per il punto $P_2 = (6, 0, -1)$, l'equazione cartesiana del piano π_3 ortogonale a $\boldsymbol{v}_3$ e passante per il punto $P_3 = (0, -6, 2)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro t l'intersezione dei piani π_1, π_2 e π_3 NON sia formata da un singolo punto e, per tali valori, determinare esplicitamente tale intersezione.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \alpha+2 & \alpha-1 & 0 \\ -3\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale α
   (a) discutere la diagonalizzabilità di A al variare dei parametro α;
   (b) determinare α affinchè A sia singolare e per tale valore di α determinare gli autovettori di A.

4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^5 - 1}{n^4 + 1} \log\left(\frac{n^\alpha + 5n}{n^\alpha - n + 1}\right).$$

5. Dimostrare che le successioni monotone ammettono limite.

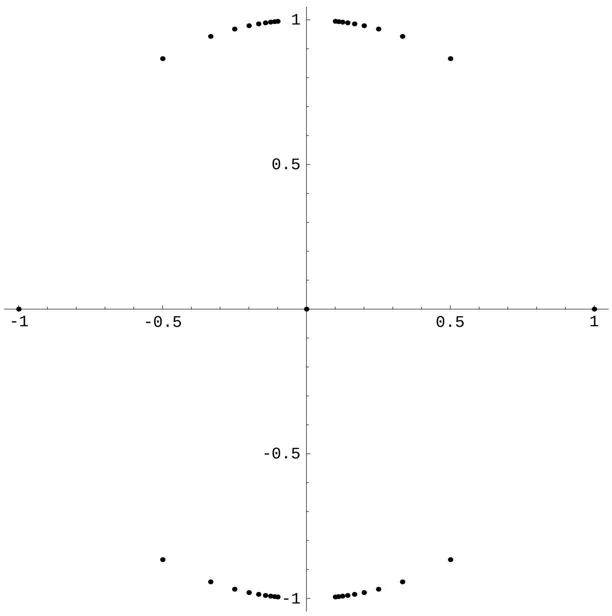
6. Dare la definizione di serie numerica convergente ed enunciare i principali criteri per la convergenza di una serie a termini positivi.

Soluzioni-versione A

1. (a) Sia $z = a + ib$. Si ha che $f(z) = 0$ se $e^{2iz} = 1$. Ciò si scrive, posto $z = a + ib$, nella forma $e^{-2b}e^{2ia} = 1 = e^{i0}$. Quindi deve essere $b = 0$ e $a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto z deve essere reale e uguale a $k\pi$.

   (b) Dal punto (a) segue che $f\left(\frac{2\pi w}{1+w^2}\right) = 0$ se $\frac{2\pi w}{1+w^2} = k\pi$, dunque w è un numero complesso soluzione dell'equazione:
$$kw^2 - 2w + k = 0$$
   Se $k = 0$ l'equazione ha un'unica soluzione $w_0 = 0$. Se $k = \pm 1$ risulta $w = \pm 1$. Se $|k| > 1$ abbiamo due soluzioni complesse coniugate per ogni k:
$$w_{k,1} = \frac{1}{k} + i\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}, \qquad w_{k,2} = \frac{1}{k} - i\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

   (c) Si ha: $|w_{k,1}| = |w_{k,2}| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{k^2-1}{k^2}} = 1$ per ogni k, dunque tutti i punti trovati (salvo $z = 0$) si trovano sulla circonferenza goniometrica. Inoltre $w_{k,1}$ appartiene al primo quadrante se $k > 0$ e al terzo quadrante se $k < 0$, mentre $w_{k,2}$ appartiene al quarto quadrante se $k > 0$ e al secondo quadrante se $k < 0$. Inoltre
$$\begin{array}{ll}
\lim_{k\to+\infty} \text{Re } w_{k,1} = 0 & \lim_{k\to+\infty} \text{Im } w_{k,1} = 1 \\
\lim_{k\to-\infty} \text{Re } w_{k,1} = 0 & \lim_{k\to-\infty} \text{Im } w_{k,1} = -1 \\
\lim_{k\to+\infty} \text{Re } w_{k,2} = 0 & \lim_{k\to+\infty} \text{Im } w_{k,2} = -1 \\
\lim_{k\to-\infty} \text{Re } w_{k,2} = 0 & \lim_{k\to-\infty} \text{Im } w_{k,2} = 1.
\end{array}$$
   In conclusione $w_{k,1}, w_{k,2}$ danno luogo quattro successioni sulla circonferenza goniometrica con punti di accumulazione $\pm i$ (a tali punti vanno aggiunti i punti $z = 0$ e $z = \pm 1$).



2. (a) Un piano ortogonale ad una direzione $\boldsymbol{v}$ e passante per il punto $P = (P_x, P_y, P_z)$ ha equazione cartesiana: $v_x(x - P_x) + v_y(y - P_y) + v_z(z - P_z) = 0$. Di conseguenza:
$$\begin{aligned}
\pi_1 : \quad & t(x-2) + 0(y-2) + 2(z-1) = 0 \\
\pi_2 : \quad & 2(x-6) + (t-1)(y-0) + 4t(z+1) = 0 \\
\pi_3 : \quad & (t+2)(x-0) + (t-1)(y+6) + 6(z-2) = 0
\end{aligned}$$

vale a dire:

$$\begin{aligned} &\pi_1 \quad tx + 2z = 2 + 2t \\ &\pi_2 \quad 2x + (t-1)y + 4tz = 12 - 4t \\ &\pi_3 \quad (t+2)x + (t-1)y + 6z = 18 - 6t \end{aligned}$$

(b) Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} tx + 2z = 2 + 2t \\ 2x + (t-1)y + 4tz = 12 - 4t \\ (t+2)x + (t-1)y + 6z = 18 - 6t \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa associata al sistema

$$M|b = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & 2 & 2+2t \\ 2 & t-1 & 4t & 12-4t \\ t+2 & t-1 & 6 & 18-6t \end{array}\right).$$

Si ha che $\det M \neq 0$ se $t \neq 1 \vee t \neq 0$. In questi casi il rango di M coincide con il rango di $M|b$ ed è uguale a tre. Quindi se $t \neq 1 \vee t \neq 0$ il sistema ammette una sola soluzione.

Sia $t = 1$. La matrice completa diventa:

$$M|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

In questo caso $\mathrm{Rk}(M) = \mathrm{Rk}(M|b) = 1$, infatti tutte le colonne sono proporzionali alla prima (o nulle).
Quindi se $t = 1$ i piani π_1, π_2 e π_3 sono tutti coincidenti e abbiamo ∞^2 soluzioni, ovvero il piano π_1 stesso.

Sia $t = 0$. La matrice completa diventa:

$$M|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 6 & 18 \end{array}\right).$$

Dal fatto che esiste un minore - $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - con determinante non nullo, e dal fatto che $\det M = 0$, segue: $\mathrm{Rk}(M) = 2$.
Per determinare il rango di $M|b$ è sufficiente orlare il minore con la quarta colonna.Poichè

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 12 \\ -1 & 6 & 18 \end{array}\right) = 0,$$

anche $\mathrm{Rk}(A|b) = 2$: il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Per $t = 0$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2z = 2 \\ 2x - y = 12 \\ 2x - y + 6z = 18 \end{cases}$$

la cui soluzione è la retta

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 12 \,, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$$

3. (a) Determiniamo innanzitutto gli autovalori di A

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ \alpha-3 & \alpha-1-\lambda & 0 \\ 2\alpha & \alpha & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(\alpha-\lambda) = 0$$

Gli autovalori della matrice sono 1, 2 e α. Se $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq 2$ allora ci sono 3 autovalori distinti con molteplicità algebrica uno, quindi A è diagonalizzabile.

Sia $\alpha = 1$. Allora:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice ha spettro $\{1, t\}$ e l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice associata vale evidentemente 1, quindi abbiamo ∞^2 soluzioni: la molteplicità algebrica dell'autovalore coincide con la molteplicità geometrica e la matrice A è diagonalizzabile.
Sia $\alpha = 2$. Allora:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ha ancora spettro $\{1, 2\}$ ma è l'autovalore 2 ad avere molteplicità algebrica 2. L'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che il rango della matrice associata vale 2 da cui si evince che ci sono ∞^1 soluzioni. Quindi per tale valore di α la matrice A non è diagonalizzabile.

(b) Se A è singolare, necessariamente deve avere un autovalore nullo, quindi $\alpha = 0$.

Lo spettro di A è $\{0, 1, 2\}$.
Determino i relativi autovettori:

$$\lambda_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

$$\lambda_3 = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

4. Notiamo in primo luogo che, detto a_n il termine generale della serie, a_n non è definito per n sufficientemente grande quando $\alpha \in (0, 1)$, quindi tali valori del parametro non vanno considerati.

Se $\alpha \geq 1$ la serie data è chiaramente a termini positivi. Inoltre quando $\alpha = 1$ vale $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, quindi la serie data diverge. Se invece $\alpha > 1$ vale:

$$\begin{aligned} a_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^4}{2} \log\left(\frac{n^\alpha + 2n}{n^\alpha - n + 1}\right) = \frac{n^4}{2} \log\left(1 + \frac{3n-1}{n^\alpha - n + 1}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^4}{2} \frac{3n-1}{n^\alpha - n + 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{n^4}{2} 3n^{1-\alpha} = \frac{3}{2} n^{5-\alpha}, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usato il fatto che, per ipotesi, $\alpha > 1$ cosicché $\frac{3n-1}{n^\alpha - n+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ ed è dunque possibile utilizzare la relazione $\log(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$, valida quando $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Per confronto con la serie armonica generalizzata si ha quindi che la serie converge se e solo se $\alpha - 5 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > 6$. Se invece $\alpha \in (1, 6]$ la serie diverge.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

SECONDA PROVA IN ITINERE (A)

2 febbraio 2012

1. Calcolare, al variare del parametro $a > 0$, il limite per $x \to 0^+$ della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{1}{x^a}\left[\frac{\sin(2x)}{1+\sin(x^2)} - \frac{2x}{\cos x}\right].$$

2. Studiare la funzione
$$f(x) = 2x + \arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right).$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, le eventuali simmetrie, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, il segno. Lo studio della derivata seconda è facoltativo.

3. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x+4}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_5^s f(x)\,\mathrm{d}x$, eventualmente inteso in senso generalizzato, esiste finito;
   - Stabilire se l'integrale generalizzato
   $$\int_5^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   esiste finito.

4. Enunciare e dimostrare il teorema di valutazione per l'integrale definito.

5. Discutere il concetto di sviluppo di Taylor, enunciandone le principali applicazioni.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

SECONDA PROVA IN ITINERE (B)

2 febbraio 2012

1. Calcolare, al variare del parametro $a > 0$, il limite per $x \to 0^+$ della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{1}{x^a}\left[\frac{2x}{1+\sin(x^2)} - \frac{\sin(2x)}{\cos x}\right].$$

2. Studiare la funzione
$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{2x}{x^2-4}\right).$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, le eventuali simmetrie, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, il segno. Lo studio della derivata seconda è facoltativo.

3. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x + 2\sqrt[3]{4-x}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_{-5}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x$, eventualmente inteso in senso generalizzato, esiste finito;
   - Stabilire se l'integrale generalizzato
   $$\int_{-\infty}^{-5} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   esiste finito.

4. Enunciare e dimostrare il teorema di valutazione per l'integrale definito.

5. Discutere il concetto di sviluppo di Taylor, enunciandone le principali applicazioni.

Soluzioni-versione A

1. Si noti che, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2x)}{1+\sin(x^2)} - \frac{2x}{\cos x} &= \frac{\cos x \sin(2x) - 2x[1+\sin(x^2)]}{[1+\sin(x^2)]\cos x} \\
&= \frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right] - 2x\left[1+x^2+o(x^2)\right]}{[1+\sin(x^2)]\cos x} \\
&= \frac{-\frac{13}{3}x^3+o(x^3)}{[1+\sin(x^2)]\cos x} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{13}{3}x^3.
\end{aligned}$$

Dunque il limite cercato vale zero se $a \in (0,3)$, vale $-\infty$ se $a > 3$ e vale $-13/3$ se $a = 3$.

2. Notiamo prima di tutto che la funzione è dispari. Ci limitiamo quindi allo studio della stessa per $x > 0$. Si noti che, in tale insieme, la funzione è definita solo se $x \neq 1$. Vale inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = 2 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Quindi f ha una discontinuità a salto in $x = 1$. Inoltre $\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \to 0$ per $x \to +\infty$, quindi la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$. Si noti che $f(0) = 0$. Non è immediato stabilire il segno di f quando $x \in (0,1)$, tale analisi è dunque rimandata a un passo successivo, mentre è chiaro che $f(x) > 0$ se $x > 1$. Calcoliamo la derivata. Vale:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 + \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x^2-1)^2}} \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= 2 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2+x^2} \\
&= \frac{2x^4-3x^2+1}{x^4-x^2+1}.
\end{aligned}$$

Si noti che l'ultima espressione scritta è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché il denominatore non si annulla mai, tuttavia la funzione *non è derivabile* per $x = 1$ in quanto f non è neppure definita in tale punto. Si ha inoltre che

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = 0,$$

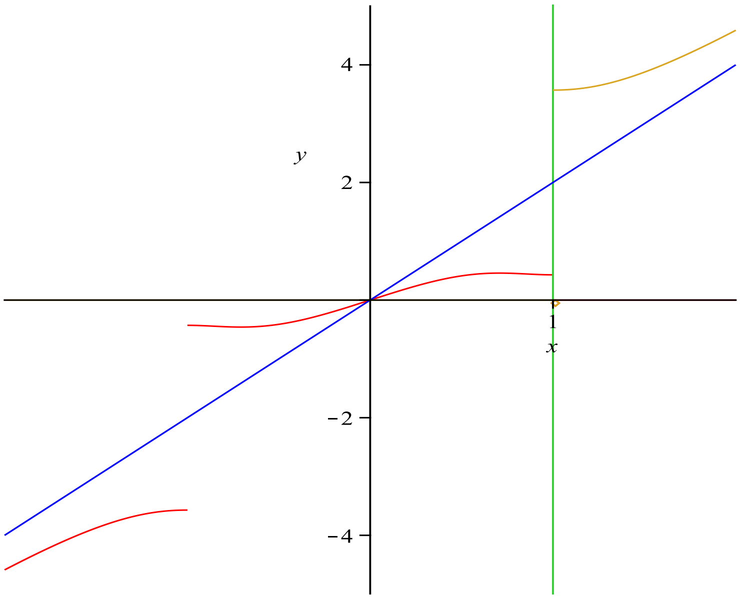
dunque la funzione si avvicina ai propri limiti sinistro e destro con tangente che tende a diventare orizzontale. Posto $t = x^2$, il numeratore che compare nell'ultima espressione data della derivata si annulla solo se $t = 1, t = \frac{1}{2}$. Il primo caso non è accettabile (corrisponde a $x = 1$). Il secondo corrisponde a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lo studio del segno di f' è immediato: in effetti il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è positivo se e solo se $x > 1$ oppure $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dunque la funzione è crescente in tali intervalli ed è decrescente se $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Ne segue che $x = x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di massimo relativo. Si noti inoltre che $f'(0) = 0$, fatto che ci aiuterà a disegnare correttamente il grafico anche per $x < 0$, quando useremo la simmetria della funzione a tale fine. Infine, notiamo che le proprietà di monotonia di f appena dimostrate mostrano, ricordando che $f(0) = 0$ e che $f(x) \to 2 - \frac{\pi}{2}(> 0)$ quando $x \to 1^-$, che f è positiva per $x \in (0,1]$.

(Facoltativo) Calcoliamo infine la derivata seconda di f. Ricordando che $f'(x) = 2 - \frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}$, calcoli elementari mostrano che, sempre per $x \neq 1$,

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+2x^2-2)}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

Ne segue che $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure, posto $t = x^2$, $t = -1 \pm \sqrt{3}$. Solo la soluzione $t = \sqrt{3}-1$ è accettabile, e corrisponde a $x = x_2 = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ (si ricordi che stiamo considerando il caso $x > 0$). Tale punto è chiaramente nell'intervallo $(0,1)$, e si vede facilmente che vale $x_2 > x_1$. Lo studio del segno della derivata seconda mostra che f è concava se $x \in [0, x_2]$, mentre essa è convessa negli intervalli $[x_2, 1)$ e $(1, +\infty)$. Il punto $x = x_2$ è quindi un punto di flesso per f. Lo stesso vale anche per il punto $x = 0$.

Completando lo studio della funzione notando che il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi, possiamo quindi dedurre che il grafico qualitativo di f è il seguente:



3. *i)* Poniamo $\sqrt[3]{x+4} = t$. Quindi $x = t^3 - 4$ e $\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$. Si ha:

$$\int \frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3t^2}{t^3 - 2t - 4}\,\mathrm{d}t.$$

Il polinomio di terzo grado a denominatore si annulla per $t = 2$. La regola di Ruffini mostra che $t^3 - 2t - 4 = (t-2)(t^2+2t+2)$, e il polinomio t^2+2t+2 non ha radici reali. Cerchiamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che valga:

$$\frac{3t^2}{t^3 - 2t - 4} = \frac{a}{t-2} + \frac{bt + c}{t^2 + 2t + 2} = \frac{(a+b)t^2 + (2a - 2b + c)t + 2(a-c)}{t^3 - 2t - 4}.$$

Uguagliando i termini di ugual grado a numeratore, si vede che $b = \frac{9}{5}$ e $a = c = \frac{6}{5}$. Quindi

$$\frac{3t^2}{t^3 - 2t - 4} = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{t-2} + \frac{3t+2}{t^2+2t+2}\right).$$

L'integrale del primo termine a membro di destra è immediato. Calcoliamo inoltre:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t &= \frac{3}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\log(t^2+2t+2) - \int \frac{1}{1+(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\log(t^2+2t+2) - \arctan(t+1) + c,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $t^2 + 2t + 2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\int \frac{3t^2}{t^3 - 2t - 4}\,\mathrm{d}t = \frac{6}{5}\log|t-2| + \frac{9}{10}\log(t^2+2t+2) - \frac{3}{5}\arctan(t+1) + c.$$

Tornando alla variabile originaria si ha

$$\int \frac{1}{x-2\sqrt[3]{x+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\log|\sqrt[3]{x+4}-2| + \frac{9}{10}\log\left((x+4)^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{x+4}+2\right) + \\ -\frac{3}{5}\arctan(\sqrt[3]{x+4}+1)+c$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

ii) Occorre trovare gli eventuali punti in cui la funzione integranda è singolare. Ciò accade, dalla discussione precedente, se e solo se $t = 2$, cioè se e solo se $x = 4$ (si noti che per arrivare a tale conclusione non è necessario aver svolto interamente la prima domanda, basta aver operato correttamente il cambio di variabile). Quindi prima di tutto è chiaro che l'integrale considerato è ben definito se $x > 4$. Occorre determinare il tipo di singolarità di $f(x)$ quando $x \to 4$. A tal fine basta notare che, posto $g(x) = x-2\sqrt[3]{x+4}$, vale $g(4) = 0$, $g'(x) = 1-\frac{2}{3(x+4)^{2/3}}$ per ogni $x \neq -4$, e dunque $g'(4) = 5/6$. La formula di Taylor mostra allora che $g(x) = g(0)+g'(4)(x-4)+o(x-4) \underset{x\to 4}{\sim} \frac{5}{6}(x-4)$. Quindi

$$\frac{1}{x-2\sqrt[3]{x+4}} \underset{x\to 4}{\sim} \frac{6}{5(x-4)}.$$

La singolarità di $f(x)$ in $x = 4$ non è dunque integrabile, e quindi l'integrale assegnato non esiste per $x = 4$. A maggior ragione esso non esisterà se $x < 4$. Dunque occorre richiedere che $x > 4$ affinché l'integrale assegnato esista.

Alternativamente, la forma esplicita della primitiva ottenuta al punto precedente mostra chiaramente che ogni primitiva di f tende a $-\infty$ quando $x \to 4$. Dunque il teorema di valutazione mostra che l'integrale proposto non esiste per $x = 4$ (l'argomento del primo logaritmo che compare in tale primitiva tende a zero in tale limite), dunque esso non esiste nemmeno per $x < 4$.

iii) Non vi sono singolarità di f nell'intervallo di integrazione. Inoltre $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Si noti esplicitamente che f ha segno costante in tale limite. Il criterio del confronto asintotico permette quindi di stabilire che l'integrale in questione non esiste.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta - 17 febbraio 2012 - versione A

1.
   - Determinare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z-2|+|z+2|=6$ e rappresentarlo nel piano complesso.
   - Determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = iz, z \in A\}$ e rappresentarlo nel piano complesso.

2. Sia data, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice
$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   - Determinare a in modo che L_a non sia suriettiva.
   - Per tale valore di a, determinare una base per $\mathrm{Im}\,(L_a)$ e $\mathrm{Ker}\,(L_a)$.
   - Sempre per tale valore di a, determinare $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tale che l'equazione $L_a\mathbf{v} = \mathbf{w}$ non abbia nessuna soluzione $\mathbf{v}$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}-1} + \log\left|\sqrt[3]{2x}-1\right|.$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del proprio dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, gli intervalli di concavità e di convessità, gli eventuali flessi. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione. Lo studio qualitativo del segno di f è facoltativo.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} x^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 x^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

6. Dare la definizione di serie convergente ed enunciare i principali risultati al riguardo.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta - 17 febbraio 2012 - versione B

1. - Determinare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z-1|+|z+1|=8$ e rappresentarlo nel piano complesso.
   - Determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = iz, z \in A\}$ e rappresentarlo nel piano complesso.

2. Sia data, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice
$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Determinare a in modo che L_a non sia suriettiva.
   - Per tale valore di a, determinare una base per $\mathrm{Im}\,(L_a)$ e $\mathrm{Ker}\,(L_a)$.
   - Sempre per tale valore di a, determinare $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tale che l'equazione $L_a\mathbf{v} = \mathbf{w}$ non abbia nessuna soluzione $\mathbf{v}$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \log\left|\sqrt[3]{x}-1\right|.$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del proprio dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, gli intervalli di concavità e di convessità, gli eventuali flessi. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione. Lo studio qualitativo del segno di f è facoltativo.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} x^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 x^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

6. Dare la definizione di serie convergente ed enunciare i principali risultati al riguardo.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta - 17 febbraio 2012 - versione C

1.
   - Determinare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z-1|+|z+1|=6$ e rappresentarlo nel piano complesso.
   - Determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = iz, z \in A\}$ e rappresentarlo nel piano complesso.

2. Sia data, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice
$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
   - Determinare a in modo che L_a non sia suriettiva.
   - Per tale valore di a, determinare una base per $\mathrm{Im}\,(L_a)$ e $\mathrm{Ker}\,(L_a)$.
   - Sempre per tale valore di a, determinare $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tale che l'equazione $L_a\mathbf{v} = \mathbf{w}$ non abbia nessuna soluzione $\mathbf{v}$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \left(\log\left|\sqrt[3]{x}+1\right|\right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}.$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del proprio dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, gli intervalli di concavità e di convessità, gli eventuali flessi. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione. Lo studio qualitativo del segno di f è facoltativo.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} x^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 x^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

6. Dare la definizione di serie convergente ed enunciare i principali risultati al riguardo.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta - 17 febbraio 2012 - versione D

1. - Determinare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z-2|+|z+2|=8$ e rappresentarlo nel piano complesso.
   - Determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = iz, z \in A\}$ e rappresentarlo nel piano complesso.

2. Sia data, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $L_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ rappresentata, nella base canonica, dalla matrice
$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   - Determinare a in modo che L_a non sia suriettiva.
   - Per tale valore di a, determinare una base per $\mathrm{Im}\,(L_a)$ e $\mathrm{Ker}\,(L_a)$.
   - Sempre per tale valore di a, determinare $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tale che l'equazione $L_a\mathbf{v} = \mathbf{w}$ non abbia nessuna soluzione $\mathbf{v}$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \left(\log\left|\sqrt[3]{2x}+1\right|\right) - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}+1}.$$
Determinarne in particolare il dominio di definizione, i limiti alla frontiera del dominio di definizione, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, la derivata, i limiti della derivata alla frontiera del proprio dominio di definizione, gli insiemi di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di estremo relativo o assoluto, gli intervalli di concavità e di convessità, gli eventuali flessi. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione. Lo studio qualitativo del segno di f è facoltativo.

4. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}.$$
   - Calcolare una primitiva di f;
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} x^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$
   - Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 x^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

6. Dare la definizione di serie convergente ed enunciare i principali risultati al riguardo.

Soluzioni - versione A

1. • Si tratta evidentemente di un ellisse, con fuochi in $z = \pm 2$ e semiassi posti sull'asse reale e su quello immaginario. Per trovarne l'equazione cartesiana scriviamo $z = x + iy$ e notiamo l'equazione richiesta si scrive come

$$\begin{aligned}
&\left[(x-2)^2+y^2\right]^{1/2} + \left[(x+2)^2+y^2\right]^{1/2} = 6 \iff \\
&\left[(x-2)^2+y^2\right]^{1/2} = 6 - \left[(x+2)^2+y^2\right]^{1/2} \overset{(*)}{\iff} \\
&(x-2)^2+y^2 = 36 + (x+2)^2 + y^2 - 12\left[(x+2)^2+y^2\right]^{1/2} \iff \\
&2x+9 = 3\left[(x+2)^2+y^2\right]^{1/2} \overset{(**)}{\iff} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1,
\end{aligned}$$

dove il passaggio $(*)$ è valido se $\left[(x+2)^2+y^2\right]^{1/2} \leq 6$, cioè se z dista dal punto (-2,0) (uno dei fuochi) meno di 6 o equivalentemente se z appartiene al cerchio di centro (-2,0) e raggio 6, e il passaggio $(**)$ è valido se $x = \mathrm{Re}\, z \geq -\frac{9}{2}$. Si vede facilmente che entrambe tali condizioni sono soddisfatte da tutti i punti dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Questa è dunque la descrizione analitica dell'insieme A, che mostra per inciso come il semiasse posto sul'asse reale abbia lunghezza 3 mentre quello posto sull'asse immaginario abbia lunghezza $\sqrt{5}$.

• Moltiplicare un numero complesso z per $i = e^{i\pi/2}$ significa ruotare z attorno all'origine di $\theta = \pi/2$ in senso antiorario. Quindi B è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2. • Il rango di A_a è, per ogni a, almeno pari a due, come si vede considerando il minore 2x2 in alto a destra o notando che le due ultime colonne non sono proporzionali. Affinché esso non sia pari a tre, così che A_a non abbia rango massimo e quindi L_a non sia suriettiva, occorre e basta che $\det A_a = 0$. Ciò accade se e solo se $a = 2$.

• Una base dell'immagine, per $a = 2$, è data (nella base canonica) da una qualunque coppia di colonne di A_2, ad esempio da $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$. Per il teorema di nullità più rango il nucleo è monodimensionale. Posto $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e usando, ad esempio, z come parametro libero, si ottengono le equazioni indipendenti

$$\begin{cases} 2x + y = z \\ x + 2y = -z. \end{cases}$$

Le soluzioni sono della forma $(z, -z, z)$, dunque una base per il nucleo è data ad esempio dal vettore $\mathbf{v_3} = (1, -1, 1)$ (non normalizziamo alcun vettore in quanto ciò non è richiesto).

• I vettori $\mathbf{w}$ con la proprietà richiesta sono quelli che non appartengono all'immagine prima determinata. Essendone chiesto uno solo, basta ad esempio prendere $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$, che sarà addirittura ortogonale all'immagine. Si calcola $\mathbf{w} = (1, -1, 1)$. La coincidenza di tale vettore con quello calcolato al punto precedente non è casuale (è legata alla simmetria della matrice) ma ciò non è importante qui.

3. La funzione è definita per $x \neq \frac{1}{2}$. Non vi sono proprietà di simmetria. Vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

Non vi sono asintoti obliqui perché la crescita della funzione all'infinito è logaritmica. Calcoliamo la derivata prima, che è ben definita se $x \neq 1/2$, $x \neq 0$:

$$f'(x) = -\frac{2}{3(\sqrt[3]{2x}-1)^2(2x)^{2/3}} + \frac{2}{3(\sqrt[3]{2x}-1)(2x)^{2/3}} = \frac{2(\sqrt[3]{2x}-2)}{3(\sqrt[3]{2x}-1)^2(2x)^{2/3}}.$$

Ciò mostra immediatamente che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 4$, che $f'(x) > 0$ per $x > 4$ (dunque f è ivi crescente) mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ (dunque f è decrescente su $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ e su $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$). Quindi $x = 4$ è punto di minimo relativo. Si noti anche che

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = -\infty.$$

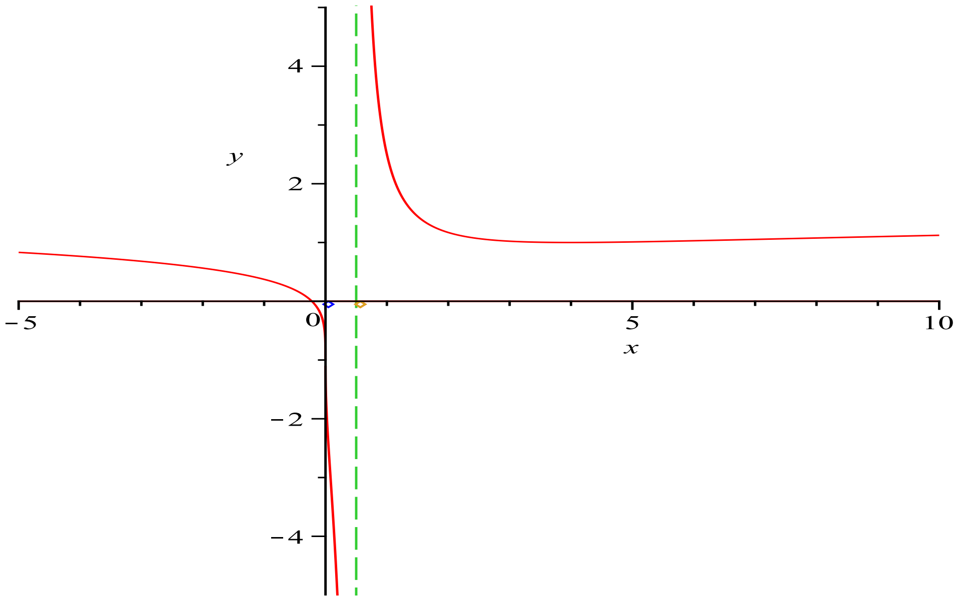
Ne segue che $x = 0$ (in cui il valore di f è -1) è punto di flesso a tangente verticale.

Studiamo ora la derivata seconda. Alcuni calcoli mostrano che, sempre per $x \neq \frac{1}{2}, x \neq 0$, vale

$$f''(x) = \frac{4\left[-3(2x)^{\frac{2}{3}} + 9(2x)^{\frac{1}{3}} - 4\right]}{9(2x)^{\frac{5}{3}}((2x)^{\frac{1}{3}} - 1)^3}.$$

Il numeratore è un polinomio di grado due in $t = (2x)^{\frac{1}{3}}$, e si annulla se e solo se $t = (9 \pm \sqrt{33})/6$, cioè se e solo se $x = x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}\right)^3$. E' immediato verificare che $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, mentre $x_2 > \frac{1}{2}$. Lo studio del segno della derivata seconda è parimenti immediato e mostra che $f''(x) > 0$ se $x \in (0, x_1) \cup \left(\frac{1}{2}, x_2\right)$, quindi f è convessa in ciascuno dei due intervalli appena scritti, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup \left(x_1, \frac{1}{2}\right) \cup (x_2, +\infty)$, quindi f è concava in ciascuno dei tre intervalli appena scritti. In particolare x_1 e x_2 sono punti di flesso.

Affrontiamo ora lo studio facoltativo del segno. Se $x > \frac{1}{2}$, notiamo subito che $f(4) = 1$. Le precedenti considerazioni sugli intervalli di monotonia e il fatto che $x = 4$ è punto di minimo relativo mostrano che non vi sono zeri di f in tale intervallo. Se invece $x < \frac{1}{2}$, la funzione ha (per il teorema degli zeri) esattamente uno zero, localizzato in un punto $x_0 < 0$ (tale disuguaglianza segue dal fatto che $f(0) = -1$). In conclusione il grafico qualitativo delle funzione è il seguente.



4. • Si effettui il cambio di variabile $\sqrt[4]{x} = t$, così che $dx = 4t^3 dt$. Si ha allora

$$\int \frac{\sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\sqrt[3]{3+t}}{t^2} 4t^3\, dt = 4 \int t\sqrt[3]{3+t}\, dt.$$

Quest'ultimo integrale puè essere svolto per parti. In effetti

$$4\int t\sqrt[3]{3+t}\, dt = 3(3+t)^{\frac{4}{3}} - 3\int (3+t)^{\frac{4}{3}}\, dt = 3t(3+t)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}(3+t)^{\frac{7}{3}}.$$

In conclusione

$$\int \frac{\sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 3\sqrt[4]{x}(3 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}(3 + \sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}$$

(si è posta per comodità uguale a zero la costante di integrazione, visto che è chiesta una sola primitiva).

- Non essendovi singolarità nell'intervallo di integrazione occorre solo verificare il comportamento all'infinito. Si ha che $x^a f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{a-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}} = x^{a-\frac{5}{12}}$. L'integrale esiste finito se e solo se $\frac{5}{12} - a > 1$, cioè se e solo se $a < -\frac{7}{12}$.
- L'unica singolarità nell'intervallo in integrazione si trova in $x = 0$. Si ha $x^a f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3^{\frac{1}{3}} x^{a-\frac{1}{2}}$. Dunque l'integrale esiste finito se e solo se $\frac{1}{2} - a < 1$, cioè se e solo se $a > -\frac{1}{2}$.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta del 29/6/2012 (A)

1. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $L_a : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare rappresentato, nelle basi canoniche, dalla matrice A_a così definita:
$$A_a = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare, al variare del parametro a, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L_a)$, $\mathrm{Ker}\,(L_a)$. Determinare inoltre una base per tali spazi.
   (b) Stabilire se esistono valori del parametro a per i quali A_a *non* ha rango massimo e per i quali il vettore $\mathbf{v}$ di componenti $(2,-1,1)^{\mathrm{t}}$ (nella base canonica) appartiene a $\mathrm{Im}\,(L_a)$. In caso di risposta affermativa, calcolare per tali valori di a la controimmagine di $\mathbf{v}$.

2. Determinare i numeri complessi z per i quali la quantità $\frac{z+2-i}{z+1}$ sia puramente reale. Rappresentare l'insieme di tali valori di z nel piano complesso.

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = e^{x \log |x|}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali. Lo studio qualitativo della derivata seconda e la ricerca di eventuali flessi sono facoltativi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4.
   - Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = x^2 \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$
   - Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)
$$\int_0^x t^2 \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \mathrm{d}t.$$
   - Calcolare, al variare del parametro $a > 0$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x t^2 \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \mathrm{d}t.$$

5. Enunciare e dimostrare la proprietà della media per l'integrale inferiore.

6. Dare le definizioni di serie convergente, divergente, indeterminata. Discutere le principali condizioni necessarie e quelle sufficienti per la convergenza di una serie numerica.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta del 29/6/2012 (B)

1. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $L_a : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare rappresentato, nelle basi canoniche, dalla matrice A_a così definita:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2a-1 & 0 \\ a-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare, al variare del parametro a, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L_a)$, $\mathrm{Ker}\,(L_a)$. Determinare inoltre una base per tali spazi.

   (b) Stabilire se esistono valori del parametro a per i quali A_a *non* ha rango massimo e per i quali il vettore $\mathbf{v}$ di componenti $(-1, 2, 1)^{\mathrm{t}}$ (nella base canonica) appartiene a $\mathrm{Im}\,(L_a)$. In caso di risposta affermativa, calcolare per tali valori di a la controimmagine di $\mathbf{v}$.

2. Determinare i numeri complessi z per i quali la quantità $\frac{2-i-z}{1-z}$ sia puramente reale. Rappresentare l'insieme di tali valori di z nel piano complesso.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x \log|x|}.$$

   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali. Lo studio qualitativo della derivata seconda e la ricerca di eventuali flessi sono facoltativi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4.
   - Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = x^2 \log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

   - Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)

$$\int_0^x t^2 \log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \,\mathrm{d}t.$$

   - Calcolare, al variare del parametro $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x t^2 \log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \,\mathrm{d}t.$$

5. Enunciare e dimostrare la proprietà della media per l'integrale inferiore.

6. Dare le definizioni di serie convergente, divergente, indeterminata. Discutere le principali condizioni necessarie e quelle sufficienti per la convergenza di una serie numerica.

Soluzioni (versione A)

1. Il rango della matrice non può essere inferiore a due (vi sono, per ogni a, sottomatrici 2x2 a determinante non nullo) né può essere superiore a tre (il numero di righe è pari a tre). Orlando nei vari modi possibili una delle sottomatrici 2x2 a determinante non nullo, si vede facilmente che esiste una sottomatrice 3x3 a determinante non nullo salvo che per $a = 0$ e $a = 1$. Per tali valori di a il rango è dunque pari a due, per $a \neq 0, a \neq 1$ invece il rango è pari a tre. In quest'ultimo caso l'immagine di L_a coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^3$ e dunque si può prendere come base dell'immagine, ad esempio, la base canonica. Per il Teorema di nullità più rango il nucleo di L_a ha dimensione uno e, risolvendo esplicitamente per $a \neq 0, a \neq 1$ il sistema $A_a\mathbf{v} = 0$, si ottiene lo spazio monodimensionale generato dal vettore $(1, 0, 0, 2 - a)^{\mathrm{t}}$. Se $a = 0$ o $a = 1$ una base dell'immagine è data ad esempio dalle prime due colonne della matrice (nessuno dei due vettori è identicamente nullo per tali valori di a, e tali due colonne non sono proporzionali). Per $a = 0$ si ottiene, risolvendo esplicitamente il sistema corrispondente, che una base del nucleo è data ad esempio dai vettori $(1, 0, 0, 2)^{\mathrm{t}}$, $(0, 1, 1, 0)^{\mathrm{t}}$. Per $a = 1$ si ottengono invece, ad esempio, i due vettori $(1, 0, 0, 1)^{\mathrm{t}}$, $(0, 1, -1, 0)^{\mathrm{t}}$.

   Circa il secondo punto, abbiamo visto come i valori di a per i quali A_a non ha rango massimo sono $a = 0$ e $a = 1$. Per $a = 1$ si vede che il vettore assegnato non sta nell'immagine di L_1. Per $a = 0$ il corrispondente sistema è invece risolubile e fornisce come controimmagini i vettori $(x, y, y + 1, 2 + 2x)^{\mathrm{t}}$.

2. Posto $z = x + iy$ si ha

$$\frac{z + 2 - i}{z + 1} = \frac{[(x + 2) + i(y - 1)][x + 1 - iy]}{(x + 1)^2 + y^2}$$

   la cui parte immaginaria è

$$\frac{(x + 1)(y - 1) - y(x + 2)}{(x + 1)^2 + y^2} = \frac{-y - x - 1}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

   Essa si annulla se e solo se $y = -x - 1$. Il luogo dei punti cercati è dato dagli $z \in \mathbb{C}$ della forma $z = x - i(x + 1)$. Si tratta evidentemente di una retta di coefficiente angolare -1 e passante per il punto $z = -i$.

3. La funzione è definita per $x \neq 0$. Non vi sono simmetrie. Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

   Dunque si può prolungare la funzione per continuità a $x = 0$ ponendo $f(0) = 1$. Non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ in quanto la crescita di f è più che esponenziale. La funzione è sempre positiva.

   La derivata prima vale, per $x \neq 0$:

$$f'(x) = e^{x \log |x|} (1 + \log |x|) .$$

   Essa si annulla per $x = \pm e^{-1}$, è positiva per $|x| > e^{-1}$, negativa altrimenti. Dunque $x = -e^{-1}$ è punto di massimo relativo, $x = e^{-1}$ è punto di minimo relativo. La funzione è crescente in $(-\infty, -e^{-1})$ e in $(e^{-1}, +\infty)$, decrescente in $(-e^{-1}, e^{-1})$. Si ha inoltre $f'(x) \to_{x\to 0} -\infty$, e dunque il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale per f.

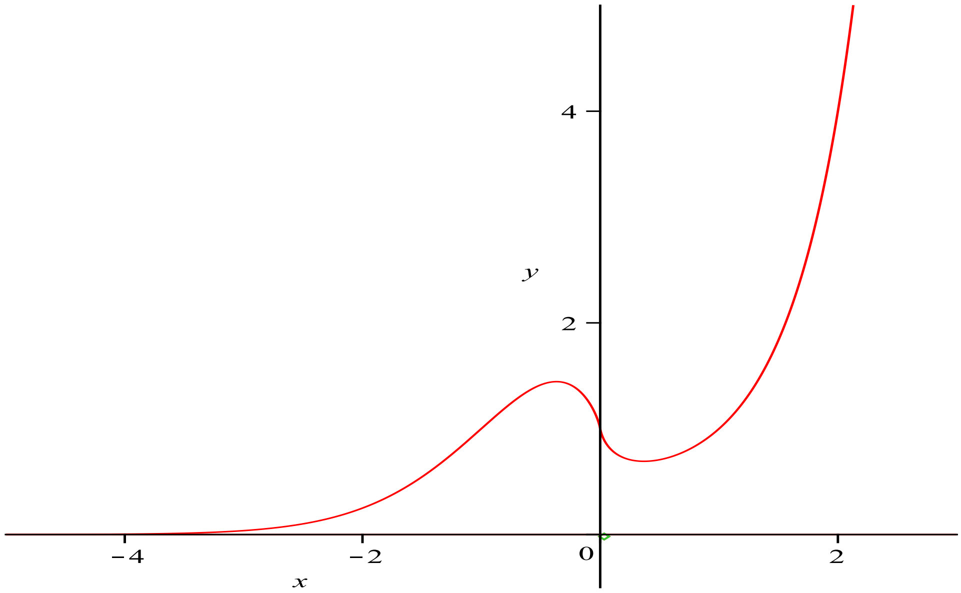
La derivata seconda (facoltativa) vale, per $x \neq 0$,

$$f''(x) = e^{x \log |x|} \left(\frac{1}{x} + (1 + \log |x|)^2 \right).$$

Chiaramente $f''(x) > 0$ se $x > 0$, dunque f è convessa in tale intervallo. Se invece $x < 0$ la derivata seconda si annulla se e solo se

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} = |1 + \log |x|| \, ,$$

cioè se e solo se, posto $s = \sqrt{|x|}$, si ha $s = \frac{1}{|1+2\log s|}$. Lo studio grafico di tale equazione mostra che vi è esattamente un punto $x_0 < 0$ in cui la derivata seconda si annulla, e che f è convessa per $x < x_0$, concava per $x \in (x_0, 0)$. Il punto x_0 è dunque punto di flesso. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



4. Calcoliamo, integrando per parti:

$$\int x^2 \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \, dx = \frac{x^3}{3} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \int \frac{x^3}{3} \frac{2}{1-x^2} \, dx.$$

Si noti ora che $\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int x^2 \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \, dx &= \frac{x^3}{3} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{2}{3} \int \left(x - \frac{x}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} \log |1-x^2|, \end{aligned}$$

dove si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva, e dove si intende la primitiva scritta definita per $x \neq \pm 1$ (a rigore, si dovrebbe scrivere la medesima espressione sui tre intervalli $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$).

Per quanto riguarda il secondo punto, malgrado sia possibile affrontarlo studiando il limite della primitiva appena scritta, basta notare che l'integrale inteso in senso improprio esiste finito per ogni x, in quando la funzione integranda è singolare se e solo se $t = \pm 1$ e le corrispondenti singolarità, entrambe di tipo logaritmico, sono integrabili.

Per quanto riguarda il terzo punto, di nuovo esso potrebbe essere affrontato usando l'espressione esplicita per la primitiva. Tuttavia, anche senza conoscere l'espressione di quest'ultima, è facile notare che $\int_0^x t^2 \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \, dt \to +\infty$ se $x \to +\infty$, e quindi per la regola di de l'Hospital si ha:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x t^2 \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}{a x^{a-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a} x^{3-a} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a} x^{3-a} \log\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{a} \frac{x^{3-a}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{a} x^{2-a}.
\end{aligned}
$$

Quindi il limite cercato vale uno per $a = 2$, zero per $a \in (0, 2)$, $+\infty$ se $a > 2$.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12/9/2012 (A)

1. Sia L l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice A così definita, al variare del parametro reale a:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ \frac{3}{16}(a-2)^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare, al variare del parametro a, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L)$, $\mathrm{Ker}\,(L)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro a la matrice risulta diagonalizzabile.

2. Determinare, al variare del parametro $a > 0$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^a)}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}.$$

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2+1} + 2\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

   Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali: lo studio qualitativo della derivata seconda degli intervalli di concavità e convessità e degli eventuali flessi è facoltativo. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4.
   - Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)}.$$

   - Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)

$$\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$

   - Calcolare,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$

5. Enunciare e dimostrare la formula per la matrice inversa di una matrice quadrata invertibile.

6. Discutere il concetto di spazio vettoriale e quello di base e dimensione di uno spazio vettoriale. Dire, sempre nel contesto di uno spazio vettoriale, cos'è un prodotto scalare e cosè una norma, indicandone le principali proprietà.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2011-2012

Prova scritta del 12/9/2012 (B)

1. Sia L l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice A così definita, al variare del parametro reale a:
$$A_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ \frac{3}{16}(a-1)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare, al variare del parametro a, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L)$, $\mathrm{Ker}\,(L)$.
   (b) Stabilire per quali valori del parametro a la matrice risulta diagonalizzabile.

2. Determinare, al variare del parametro $a > 0$, il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^a)}{\sqrt{n^2-n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali: lo studio qualitativo della derivata seconda degli intervalli di concavità e convessità e degli eventuali flessi è facoltativo. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

4.
   - Calcolare una primitiva della funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)}.$$
   - Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)
$$\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$
   - Calcolare,
$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$

5. Enunciare e dimostrare la formula per la matrice inversa di una matrice quadrata invertibile.

6. Discutere il concetto di spazio vettoriale e quello di base e dimensione di uno spazio vettoriale. Dire, sempre nel contesto di uno spazio vettoriale, cos'è un prodotto scalare e cosè una norma, indicandone le principali proprietà.

Prova scritta del 12/9/2012 (B)-soluzioni

1. Sia L l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice A così definita, al variare del parametro reale a:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ \frac{3}{16}(a-1)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare, al variare del parametro a, le dimensioni di $\mathrm{Im}\,(L)$, $\mathrm{Ker}\,(L)$.

   (b) Stabilire per quali valori del parametro a la matrice risulta diagonalizzabile.

   Soluzione. Il rango della matrice non è inferiore a due per alcun valore di a: infatti le ultime due colonne della matrice sono tra loro indipendenti. Per verificare se il rango vale due oppure tre, basta calcolare il determinante di A, che vale $a + \frac{3}{16}(a-1)^2$. Tale determinante si annulla se e solo se $a = -3, a = -1/3$. Per tali valori di a il rango è due, per tutti gli altri valori di a il rango è tre. Dunque per $a = -3, a = -1/3$ si ha $\dim(\mathrm{Im}\,(L)) = 2$ e quindi $\dim(\mathrm{Ker}\,(L)) = 1$, mentre per tutti gli altri valori di a si ha $\dim(\mathrm{Im}\,(L)) = 3$ e quindi $\dim(\mathrm{Ker}\,(L)) = 0$.

   Circa il secondo punto si verifica che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda(a+1) + a + \frac{3}{16}(a-1)^2\right].$$

   Tale determinante si annulla per $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{4}(3a+1)$, $\lambda = \frac{1}{4}(a+3)$. Si vede facilmente che, se $a \neq 1$, gli autovalori sono distinti: dunque la matrice è diagonalizzabile. Se invece $a = 1$ vi è il solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità uguale a tre. Si vede immediatamente che l'equazione $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ ammette, quando $a = 1$, le soluzioni $\mathbf{v} = (x, 0, z)$ con x, z arbitrari. Quindi l'autospazio ha dimensione due e la matrice non è diagonalizzabile per $a = 1$.

2. Determinare, al variare del parametro $a > 0$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^a)}{\sqrt{n^2-n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

   Soluzione. La serie è a termini positivi. Si ha

$$\frac{\sin(1/n^a)}{\sqrt{n^2-n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sin(1/n^a)}{\sqrt{n^2-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2\sqrt{n})(1/n^a)}{n} = \frac{2}{n^{a+\frac{1}{2}}}.$$

   La serie data converge quindi se e solo se $a + \frac{1}{2} > 1$, cioè se e solo se $a > \frac{1}{2}$. Essa diverge altrimenti.

3. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali: lo studio qualitativo della derivata seconda degli intervalli di concavità e convessità e degli eventuali flessi è facoltativo. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -1$. Si ha $\lim_{x\to -1^\pm} = -\frac{1}{2} \pm \pi$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. La retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è dunque asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. La funzione presenta una discontinuità a salto in $x = -1$. Vale, sempre per $x \neq -1$:

$$f'(x) = -2\frac{x(2x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Tale derivata si annulla per $x = 0, x = \frac{1}{2}$, è negativa per $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, dunque f è decrescente in ciascuno di tali intervalli, è positiva per $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, dunque f è crescente in tale intervallo. Il punto $x = -\frac{1}{2}$ è di minimo relativo, il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Si noti che $f(0) = 1 + (\pi/2) < \pi - (1/2) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$: quindi f non ammette estremi assoluti. Si ha inoltre che $\lim\limits_{x\to -1\pm} f'(x) = -1/2$: dunque il grafico di f ha tangente che, per $x \to -a^\pm$, ha coefficiente angolare che tende a $-1/2$. Possiamo, a posteriori, studiare il segno di f e notare subito che f è negativa per $x < -1$. Inoltre, essendo $f(-1/2) > 0$, ne segue anche che esiste esattamente un punto $\widetilde{x} > 0$ tale che $f(\widetilde{x}) = 0$, e che f è positiva per $x \in (-1, \widetilde{x})$ e negativa per $x > \widetilde{x}$. Calcoliamo infine (facoltativo), sempre per $x \neq -1$:

$$f''(x) = 2\,\frac{4x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{(x^2+1)^3}.$$

Determinare gli zeri di tale quantità non è immediato. Si definisca però $g(x) := 4x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ (il numeratore che appare nella formula per la derivata seconda). Si noti che $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$ e che si ha $g'(x) = 12x^2 + 6x - 4$. Quindi g' si annulla in $x_1 = (-3 - \sqrt{57})/12$ (tale numero è nell'intervallo $(-1, -1/2)$) e in $x_2 = (-3 + \sqrt{57})/12$ (tale numero è ovviamente maggiore di zero). Lo studio del segno di g' mostra che x_1 è di massimo per g e che x_2 è di minimo per g. Si osservi ora che $g(-1) = 2 > 0$ e che $g(0) = -1 < 0$. Il grafico di g può quindi essere agevolmente tracciato e mostra in particolare che g ha tre zeri: un primo zero in un punto $x_3 < -1$, un secondo in un punto $x_4 \in (-1, 0)$, un terzo in un punto $x_5 > 0$. Tutti e tre tali punti corrispondono a un cambio di segno di f'', quindi a un flesso. Va notato che, per costruzione, x_4 deve necessariamente appartenere all'intervallo $(-1/2, 0)$, visto che $x = -1/2$ è punto di minimo per f e $x = 0$ è punto di massimo per f. Quindi f è convessa in $(x_3, -1) \cup (-1, x_4) \cup (x_5, +\infty)$, ed è concava se $x \in (-\infty, x_3) \cup (x_4, x_5)$.

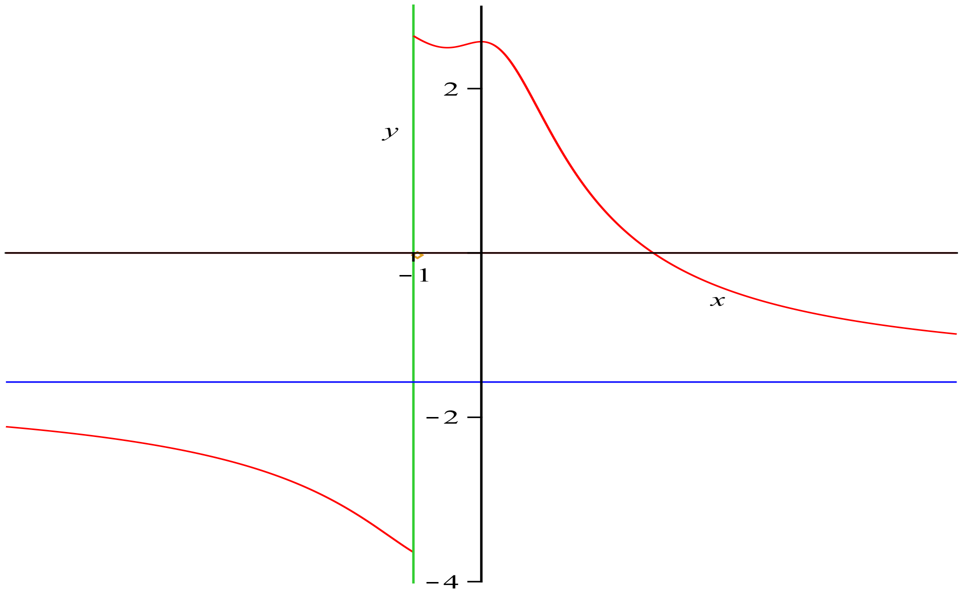
In conclusione il grafico della funzione è quello indicato alla pagina seguente.

4.
- Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)}.$$

- Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)

$$\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$



- Calcolare,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt[4]{t}-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Soluzione. Si ha, con la sostituzione $\sqrt[4]{x}=t$ (cosicché $\mathrm{d}x = 4t^3\mathrm{d}t$):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{t^5}{(t^2+1)(t-1)}\,\mathrm{d}t = 4\int\left(t^2+t+\frac{t}{(t^2+1)(t-1)}\right)\mathrm{d}t$$

Scomponendo in fratti semplici abbiamo

$$\frac{t}{(t^2+1)(t-1)} = \frac{1-t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2(t-1)}.$$

Quindi, ponendo d'ora in poi uguale a zero la costante d'integrazione:

$$\int \frac{t}{(t^2+1)(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2(t-1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\log(t^2+1) + \frac{1}{2}\log|t-1|.$$

Dunque

$$4\int\left(t^2+t+\frac{t}{(t^2+1)(t-1)}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 2\arctan t - \log(t^2+1) + 2\log|t-1|.$$

Infine

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^{3/4} + 2\sqrt{x} + 2\arctan(\sqrt[4]{x}) - \log(\sqrt{x}+1) + 2\log|\sqrt[4]{x}-1|.$$

Circa la seconda domanda, si noti che la funzione integranda è singolare in $x=1$. Usando la formula precedente per la primitiva o, più semplicemente, notando che $f(t)\sim c/(t-1)$ quando $t\to 1$ (per un opportuna costante $c\neq 0$), si vede che f non è integrabile in $t=1$. Quindi l'integrale richiesto esiste finito se e solo se $x>1$. Infine, $f(t)\sim 1/t^{1/4}$ per $t\to+\infty$. Quindi f non è integrabile all'infinito, e il limite cercato (si osservi che $f(t)>0$ per $t>1$) vale $+\infty$.