Las Mágicas

Problema 1 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

Se reescribe la ecuación en la forma $(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$ y se observa que $(x+y)^2 \geq 0$ para todo par de enteros x y y. Por lo tanto, $3x + 2y - 1 \geq 0$, de donde $3x + 2y \geq 1$.

Por la desigualdad triangular, $|x+y| \leq |x| + |y|$, y entonces

$$(x+y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2.$$

Por lo tanto

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1.$$

Como $x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$, se tiene

$$3x + 2y - 1 \geq 0.$$

Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$, entonces $3x + 2y \geq 1$ y $x + y \geq 1$. Por lo tanto, $(x+y)^2 \geq x + y$. Entonces $x + y \geq 3x + 2y - 1$, de donde $2x + y \leq 1$. Como $x \geq 0$ y $y \geq 0$, se tiene $x = 0$ y $y = 1$.

Si $x \geq 0$ y $y < 0$, entonces $3x + 2y \geq 1$ y $x + y \geq 1$. Por lo tanto, $(x+y)^2 \geq x + y$. Entonces $x + y \geq 3x + 2y - 1$, de donde $2x + y \leq 1$. Como $x \geq 0$ y $y < 0$, se tiene $x = 1$ y $y = -1$.

Si $x < 0$ y $y \geq 0$, entonces $3x + 2y \geq 1$ y $x + y \geq 1$. Por lo tanto, $(x+y)^2 \geq x + y$. Entonces $x + y \geq 3x + 2y - 1$, de donde $2x + y \leq 1$. Como $x < 0$ y $y \geq 0$, se tiene $x = -1$ y $y = 1$.

Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces $3x + 2y \geq 1$ y $x + y \geq 1$. Por lo tanto, $(x+y)^2 \geq x + y$. Entonces $x + y \geq 3x + 2y - 1$, de donde $2x + y \leq 1$. Como $x < 0$ y $y < 0$, se tiene $x = -1$ y $y = -1$.

Por lo tanto, $(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.

Problema 2 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 3 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 4 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 5 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 6 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 7 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 8 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 9 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

Problema 10 (Olimpiada Iberoamericana 2006)

Hallar todos los números enteros x y y que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 2y - 1.$$

Solución

$$(x+y)^2 = 3x + 2y - 1$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 3x + 2y - 1$$

$$x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$$

$$3x + 2y - 1 \geq 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$x + y \geq 1$$

$$(x+y)^2 \geq x + y$$

$$x + y \geq 3x + 2y - 1$$

$$2x + y \leq 1$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$(x, y) = (0, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$