1.

a) Trovare il massimo e il minimo della funzione :

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

nell'insieme $D := \{(x, y) \,|\, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

nel punto $P(1, -1, 1)$.
(*) Trovare una parametrizzazione regolare della superficie e calcolare l'elemento di area dS in P.

2.

Scrivere l'integrale generale del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Discutere la stabilità dell'origine.

(*) Descrivere le traiettorie nel piano xy.

3.

a) Calcolare

$$\int\int_D \frac{x+y}{xy}\,dxdy\,,$$

dove D è la regione piana definita da

$$D = \{(x,y)\,|\,1 < x+y < 2, \quad x < y < 2x\}$$

(Si consiglia la sostituzione $u = x+y$, $v = y/x$).

b) Verificare il teorema della divergenza per il campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

nella palla di raggio 1 centrata nell'origine.

4.

Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}\,(x-1)^n \qquad\qquad ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}$$

(*) Calcolare la somma della seconda serie.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è continua e D è un insieme compatto, dunque g assume massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Calcolando il gradiente

$$\nabla f(x,y) = 4x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}\,,$$

si vede che l'unico punto critico è l'origine $(0,0)$. Poiché la funzione f è una forma quadratica definita positiva, l'origine è un punto di minimo, con $f(0,0)=0$. Il massimo di f deve allora essere raggiunto sulla frontiera ∂D, ovvero sull'ellisse di equazione $x^2+2y^2=1$.
Cercando i punti stazionari della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - \lambda(x^2+2y^2-1)$$

o parametrizzando l'ellisse con le equazioni

$$x = \cos t\,, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,,$$

si trovano due punti di massimo $(\pm 1, 0)$ dove $f(\pm 1,0)=2$.

b) Nell'intorno del punto considerato, l'equazione si può risolvere rispetto a z ricavando la superficie in forma cartesiana

$$z = \sqrt{x^2+y^2-1}$$

Le derivate parziali sono

$$\partial_x \sqrt{x^2+y^2-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}; \quad \partial_y \sqrt{x^2+y^2-1} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

Valutando le derivate nel punto $(1,-1)$, si trova che il piano tangente ha equazione

$$z = 1 + (x-1) - (y+1)$$

ovvero

$$x - y - z = 1\,.$$

Soluzione alternativa: per il teorema della funzione implicita, dall' equazione

$$g(x,y,z) := x^2+y^2-z^2-1 = 0\,,$$

si ottiene l'equazione del piano tangente nella forma

$$g_x(1,-1,1)(x-1) + g_y(1,-1,1)(y+1) + g_z(1,-1,1)(z-1) = 0\,.$$

(*)

$$x = \sqrt{v^2+1}\,\cos u\,, \quad y = \sqrt{v^2+1}\,\sin u\,, \quad z = v\,, \qquad (u,v)\in[0,2\pi)\times\mathbb{R}\,.$$

$$dS = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|dudv = \sqrt{2v^2+1}\,dudv$$

2.

La prima equazione non contiene la funzione incognita y; l'integrale generale è allora

$$x(t) = C_1 e^{-t}.$$

Sostituendo nella seconda equazione, otteniamo

$$\dot{y} = y - C_1 e^{-t},$$

che è un'equazione *non* omogenea del primo ordine per la y. Applicando la formula risolutiva, si ottiene

$$y(t) = \frac{C_1}{2} e^{-t} + C_2 e^{t}$$

L'integrale generale del sistema si scrive dunque

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

I due vettori in questa espressione sono autovettori della matrice dei coefficienti del sistema, corrispondenti rispettivamente agli autovalori -1 e 1.

(*) Le traiettorie del sistema si possono ricavare eliminando t nelle due equazioni che esprimono l'integrale generale, oppure risolvendo l'equazione differenziale delle traiettorie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + 1, \qquad x \neq 0,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine. Integrando, si ricava la famiglia di curve

$$y = \frac{1}{2} x + C \frac{1}{x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

a cui occorre aggiungere la retta $x = 0$, che si ottiene dall'integrale generale del *sistema* nel caso $C_1 = 0$, ma che non si può rappresentare come grafico di una funzione di x.
Poichè il sistema ha un autovalore positivo, l'origine è *instabile*.

3.

a) La regione D è un quadrilatero (trapezio) intersezione della striscia tra le rette parallele $y = 2 - x$ e $y = 1 - x$ con il settore di piano compreso tra le rette $y = 2x$ e $y = x$. La trasformazione

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y/x \end{cases}$$

mappa il dominio D nel quadrato $Q = (1, 2) \times (1, 2)$ del piano (u, v). La trasformazione inversa si scrive

$$\begin{cases} x = u/(v + 1) \\ y = uv/(v + 1) \end{cases}$$

Determinate Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{u}{(v + 1)^2}$$

Dunque

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int\int_Q f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, dudv$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 \frac{(v + 1)^2}{uv} \frac{u}{(v + 1)^2}\, dudv = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v}\, dv = \ln 2$$

b) Osserviamo che la normale alla superficie sferica Σ coincide con il raggio vettore $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Il flusso è allora:

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_\Sigma \big(yx - xy + 2z^2\big)\, dS = 2 \int\int_\Sigma z^2\, dS$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos\phi)^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi = \frac{8}{3}\pi\,.$$

Verifica teorema della divergenza:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2\,,$$

per cui l'integrale della divergenza del campo nella palla vale $2\,\frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$.

4.

Applicando i criteri della radice o del rapporto si ottiene per la serie $i)$: $R = 3/2$.
Scriviamo la serie $ii)$ (lacunare) nella forma $x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}$ e poniamo $x^2 = t$; applicando ora i criteri alla serie in t, si ricava $R = 1$ e quindi anche per la serie data avremo $R = 1$.
Valutando le serie agli estremi si vede che in nessun caso il termine generale tende a zero; dunque, gli intervalli di convergenza sono rispettivamente $(-1/2, 5/2)$ e $(-1, 1)$.

(*) Integrando termine a termine tra 0 e x lo sviluppo

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \qquad |t| < 1\,,$$

si ottiene

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \qquad |x| < 1\,.$$