6.37. Centroide di una superficie semisferica. Calcolare le coordinate del centroide della superficie semisferica omogenea di raggio R e centro l'origine, compresa nel semispazio $z \geq 0$. Fornire un risultato *esplicito*, dipendente dall'unico parametro R che figura nel testo dell'esercizio.

6.38.★ Area e momento d'inerzia di una superficie torica. Si consideri la superficie torica

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Calcolare l'area di Σ.

b. Calcolare il momento d'inerzia di Σ, supponendola una superficie materiale omogenea di massa M, rispetto all'asse z, oppure:

c. rispetto all'asse x.

6.39.★ Area e momento d'inerzia della superficie di un paraboloide. Si consideri la superficie Σ

$$z = x^2 + y^2 \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

a. Si calcoli l'area della superficie.

b. Si calcoli il momento d'inerzia della superficie rispetto all'asse z, supponendola una superficie materiale omogenea di massa M.

6.40.★ Area della superficie della pseudosfera. Si calcoli l'area della superficie della *pseudosfera*, che si ottiene facendo attorno all'asse x la curva (*trattrice*), di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R(t - \tanh t) \\ y = \frac{R}{\cosh t} \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Esempio 6.8. Campo elettrico generato da una superficie sferica carica. Si consideri una superficie sferica Σ di raggio R e centro l'origine, su cui vi sia una distribuzione uniforme di carica elettrica, cioè una densità di carica pari a $Q/4\pi R^2$, dove Q è la carica totale. Calcoliamo l'intensità del campo elettrico nel generico punto dello spazio esterno alla superficie.

Possiamo scegliere il riferimento in modo che il punto in cui ci interessa calcolare il campo sia $(0, 0, L)$, con $L > R$. Il campo elettrico sarà assegnato dall'integrale di superficie:

$$\underline{F} = k \int\int_{\Sigma} \frac{(x, y, z - L)}{\left(x^2 + y^2 + (z - L)^2\right)^{3/2}} \frac{Q}{4\pi R^2} dS$$

(dove k è la costante di Coulomb). Per simmetria sarà $F_x = F_y = 0$, calcoliamo perciò

$$F_z = \frac{kQ}{4\pi R^2} \int\int_{\Sigma} \frac{z - L}{\left(x^2 + y^2 + (z - L)^2\right)^{3/2}} dS =$$

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]; \quad dS = R^2 \sin\varphi d\varphi d\vartheta$$

$$= \frac{kQ}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{R\cos\varphi - L}{\left(R^2 \sin^2\varphi + (R\cos\varphi - L)^2\right)^{3/2}} R^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{kQ}{4\pi} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R\cos\varphi - L}{(R^2 + L^2 - 2LR\cos\varphi)^{3/2}} \sin\varphi d\varphi =$$

$$[\cos\varphi = t] = \frac{kQ}{2} \int_{-1}^{1} \frac{Rt - L}{(R^2 + L^2 - 2LRt)^{3/2}} dt.$$

Da qui in poi il calcolo è identico a quello fatto nel Cap.5, §5.2, Esempio 5.17 (calcolo del campo gravitazionale generato da una sfera piena). L'ultimo integrale scritto vale $-\frac{2}{L^2}$, perciò si conclude

$$F_z = -\frac{kQ}{2} \frac{2}{L^2} = -\frac{kQ}{L^2},$$

che è uguale al campo generato nello stesso punto da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera.