Politecnico di Milano, Corso di Laurea in Ingegneria Fisica

ANALISI MATEMATICA I E GEOMETRIA
Prof. G. Grillo - A.A. 2020/2021

PROGRAMMA DEFINITIVO

1. Insiemi numerici. Numeri naturali, interi, razionali. $\sqrt{2}$ non è razionale. Estremo superiore. Allineamenti decimali illimitati e numeri reali. Operazioni sui numeri reali. Insiemi infiniti, numerabilità. L'insieme dei numeri razionali è numerabile, l'insieme dei numeri irrazionali non è numerabile. Il principio di induzione.

2. Numeri complessi. Piano di Argand-Gauss. Operazioni sui numeri complessi, struttura algebrica di $\mathbb{C}$. Forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi. Identità di Eulero. Formula di de Moivre per il prodotto($*$) e per il rapporto. Coniugato e modulo di un complesso. Estrazione di radici. Teorema fondamentale dell'algebra. Esponenziale nel campo complesso.

3. Geometria elementare nel piano e nello spazio. Operazioni sui vettori: somma, differenza, prodotto scalare, prodotto vettoriale. Combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti. Rette e piani nello spazio. Equazioni cartesiane, equazioni parametriche. Parallelismo, ortogonalità.

4. Spazi vettoriali. Definizione di spazio vettoriale. Basi e dimensione. Spazi vettoriali con prodotto scalare. Modulo, distanza. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz($*$) e disuguaglianza triangolare in spazi vettoriali astratti. Basi ortonormali. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali.

5. Matrici, determinanti, e sistemi lineari. L'algebra delle matrici: operazioni di somma e prodotto. Matrice trasposta. Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari($*$). Determinante e sue proprietà($*$). Determinante di un prodotto di matrici. Relazione del concetto di determinante con il calcolo di aree e volumi. Rango di una matrice, Teorema di Kronecker. Matrici invertibili, matrice inversa. Formula esplicita per l'inversa($*$). Inversa di un prodotto di matrici. Sistemi lineari: generalità. Il caso di sistemi associati a matrici quadrate e invertibili: Teorema di Cramer. Immagine e nucleo di applicazioni lineari. La dimensione dell'immagine di una mappa lineare coincide con il rango di ogni matrice che la rappresenta. Il Teorema di nullità più rango($*$). Mappe lineari iniettive e suriettive. Il Teorema di Rouché-Capelli. Struttura delle soluzioni di un sistema non omogeneo. Cambiamenti di base. Matrici diagonalizzabili. Autovalori e autovettori di una matrice. Condizione di diagonalizzabilità in termine degli autovettori($*$). Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Matrici ortogonali e loro proprietà. Rotazioni. Il caso di matrici simmetriche: diagonalizzabilità con matrici ortogonali.

6. Funzioni, limiti e continuità. Cenni di topologia in $\mathbb{R}^n$. Insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, sequenzialmente compatti. Teorema di Bolzano-Weierstrass ($*$), Teorema di Heine-Borel ($*$). Equivalenza tra compattezza e compattezza sequenziale in $\mathbb{R}^n$. Definizione topologica di limite per funzioni, definizioni "$\epsilon - \delta$". Limiti destro, sinistro, per eccesso, per difetto. Algebra dei limiti e forme di indecisione. Unicità del limite, permanenza del segno, criterio del confronto. Limite della funzione composta. Limiti notevoli. Equivalenza asintotica, simbolo di "o piccolo". Successioni convergenti e loro limite. Le successioni monotone hanno limite. Limiti notevoli. Il numero e($*$). Gerarchia degli infiniti. Funzioni continue. Punti di discontinuità. Funzioni continue su insiemi compatti. Teorema degli zeri($*$) e dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass. Algebra delle funzioni continue. Continuità della funzione composta. Continuità della funzione inversa. Punti di discontinuità. Continuità uniforme, teorema di Heine-Cantor($*$).

7. Calcolo differenziale. Derivabilità di una funzione. Retta tangente a una curva in un punto. Differenziabilità. Una funzione è derivabile in x_0 se e soltanto se è ivi differenziabile. Le funzioni derivabili sono continue. Derivate di funzioni elementari. Derivata destra e sinistra. Punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi, flessi a tangenti verticale. Algebra delle derivate: derivata della somma, del prodotto, del rapporto. Derivata della funzione composta($*$). Derivata della funzione inversa. Punti di massimo e di minimo locali o globali. Teorema di Fermat. Teorema del valor medio o di Lagrange. Applicazioni: funzioni a derivata nulla, test di monotonia, proprietà dei valori intermedi per le derivate. Ricerca di massimi e minimi. Il Teorema di de l'Hôpital($*$, caso 0/0). Concavità, convessità e loro relazioni con proprietà delle derivate. Polinomi di McLaurin-Taylor. La formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor con resto di Lagrange($*$). Determinazione della natura dei punti stazionari in termini delle derivate successive. Sviluppi di McLaurin delle principali funzioni elementari. Cenno al calcolo approssimato e alla serie di Taylor.

8. Calcolo integrale e serie numeriche. Partizioni, somme di Riemann. Proprietà elementari delle somme di Riemann. Funzioni integrabili secondo Riemann, integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile. Integrabilità delle funzioni continue($*$) o con un numero finito di punti di discontinuità, integrabilità delle funzioni monotone. Proprietà elementari dell'integrale. Teorema della media integrale. Primo($*$) e secondo($*$) teorema fondamentale del calcolo integrale. Cambiamento di variabili negli integrali definiti e indefiniti. Integrazione per parti. Integrazione generalizzata al finito e all'infinito. Teoremi del confronto, del confronto asintotico, dell'integrabilità assoluta. Serie numeriche: definizione, prime proprietà ed esempi. Serie geometrica, serie armonica generalizzata. Condizione necessaria per la convergenza. Serie a termini positivi: criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice, del rapporto. Serie a termini di segno qualunque: convergenza assoluta, criterio di Leibniz.

NOTA: ($*$) con dimostrazione