

# GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

2019-2020

## PROGRAMMA SVOLTO MODALITÀ D'ESAME

MAURIZIO CITTERIO, MARCO BOELLA, ALAN CIGOLI

### PROGRAMMA

**Vettori, rette e piani.** Vettori geometrici; somma e prodotto esterno. Spazio vettoriale reale: definizione generale. Rappresentazione analitica dei vettori geometrici; espressione analitica di somma e prodotto esterno. Modulo di un vettore. Vettori paralleli. Rappresentazione parametrica della retta; retta per due punti. Condizione di parallelismo tra rette. Reciproca posizione di rette. Dipendenza e indipendenza lineare; base; versori fondamentali di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Rappresentazione parametrica del piano; piano per tre punti. Prodotto scalare standard; modulo di un vettore, coseno dell'angolo tra due vettori. Rappresentazione analitica del prodotto scalare. Vettori ortogonali; proiezione ortogonale. Equazione cartesiana del piano. Parallelismo e ortogonalità tra rette; parallelismo e ortogonalità tra piani; parallelismo e ortogonalità tra retta e piano. Prodotto vettoriale. Rappresentazione analitica del prodotto vettoriale. Rappresentazione cartesiana della retta. Fascio di piani. Prodotto misto. Aree e volumi. Distanze: punto-punto, punto-retta, punto-piano, retta-retta, retta-piano, piano-piano.

**Algebra Lineare, introduzione.** Dai vettori geometrici del piano e dello spazio agli spazi vettoriali. Definizione di spazio vettoriale; esempi: spazi dei vettori geometrici, spazi di  $n$ -uple ordinate, spazi di polinomi, spazi di matrici, spazi di funzioni a valori in un campo numerico, spazi di funzioni a valori in uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali; esempi. Definizione di applicazione lineare; esempi.

**Spazi vettoriali.** Combinazioni lineari. Generatori di un sottospazio. Dipendenza ed indipendenza lineare. Base di uno spazio vettoriale. Base e coordinate (\*). Teorema di esistenza della base (\*). Dimensione. Lemma (senza dimostrazione) e Teorema della dimensione (\*). Teorema del completamento della base (\*). Somma di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. Somma diretta. Caratterizzazione della somma diretta. Prodotto e proiezioni di spazi vettoriali.

**Applicazioni lineari.** Applicazioni lineari; osservazioni, esempi. Costruzione di applicazioni lineari (\*). Linearità e dipendenza (\*). Iniettività e indipendenza (\*). Iniettività e nucleo (\*). Suriettività e immagine. Nullità e rango di un'applicazione lineare. Teorema delle dimensioni ("nullità + rango") (\*). Isomorfismi e dimensioni (\*). Coordinate. Dimostrazioni della formula di Grassmann (\*) e della caratterizzazione della somma diretta (\*). Fibra di un'applicazione lineare. Teorema di struttura delle fibre. Fibre e sottospazi affini (cenni).

**Matrici, rango e sistemi lineari.** Applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . La matrice  $M_F$  di un'applicazione lineare  $F$ . L'applicazione lineare  $L_A$  associata ad una matrice  $A$ . Composizione di applicazioni lineari e definizione di prodotto di matrici. Proprietà del prodotto di matrici. Matrice identica e matrici invertibili. Calcolo del prodotto di matrici. Rango di un insieme di vettori. Rango di una matrice. Rango di matrici e di applicazioni lineari. Calcolo del rango, matrici a scala, operazioni elementari, riduzione. Rango e invertibilità (\*). Calcolo della matrice inversa. Sistemi lineari: il teorema di Rouché-Capelli (\*); il teorema di Cramer (\*).

**Il determinante.** Forme multilineari alternanti. Determinante di un endomorfismo. Determinante di una matrice. Proprietà del determinante. Determinante della trasposta. Teorema di Binet (\*). Invertibilità e determinante (\*). Calcolo del determinante: sviluppo di Laplace e metodo di riduzione. Determinante e rango. Teorema di Kronecker.

**Il teorema di rappresentazione.** Lo spazio vettoriali delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali e lo spazio delle matrici di tipo fissato. Matrice rappresentativa. Rango, immagine, nucleo dell'applicazione lineare e matrice rappresentativa. Teorema di rappresentazione. Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici rappresentative. Cambio di base. Matrici simili.

**Diagonalizzazione.** Autovettori ed autovalori di endomorfismi e matrici. Basi di autovettori e matrici diagonali. Diagonalizzabilità. Matrici simili. Polinomio caratteristico. Matrici simili e polinomio caratteristico (\*). Teorema dell'equazione caratteristica (\*). Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Indipendenza degli autovettori relativi ad autovalori distinti. Criterio di diagonalizzabilità nel campo reale: una matrice è diagonalizzabile se e solo se tutti gli autovalori sono reali e regolari (\*). Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile.

**Spazi euclidei.** Definizione di prodotto interno; esempi. Ortogonalità e norma. I teoremi di Carnot e Pitagora (\*). Disuguaglianza di Schwarz (\*). Angolo tra due vettori. La disuguaglianza triangolare. Basi ortogonali e basi ortonormali. Proiezione ortogonale e distanza minima (\*). Complemento ortogonale. Il rango delle righe coincide con il rango delle colonne (\*). Coordinate di un vettore rispetto una base ortonormale. Il procedimento di Gram-Schmidt.

**Proiezioni, isometrie, auto-aggiunti. Il teorema spettrale.** Matrice di una proiezione ortogonale. Caratterizzazione delle matrici di proiezioni ortogonali. Isometrie lineari e matrici ortogonali (\*). Operatori auto-aggiunti e matrici simmetriche (\*). Il teorema spettrale. Il teorema di scomposizione spettrale.

**Forme quadratiche.** Definizione. Classificazione delle forme quadratiche. Forme quadratiche diagonali. Cambio di coordinate in una forma quadratica. Matrici congruenti. Diagonalizzazione di forme quadratiche (\*). Legge di inerzia di Sylvester. Segnatura di una forma quadratica. Test degli autovalori. Studio delle forme quadratiche in due variabili. Metodo dei minori nord-ovest; il caso generale di ordine  $n$ , il caso  $n = 2$ , il caso  $n = 3$ . Cenno alle proprietà estremali degli autovalori e all'analisi delle forme quadratiche sulle sfere unitarie.

**Affinità e isometrie.** Sistema di riferimento del piano e dello spazio; riferimento cartesiano, riferimento affine. Cambiamento di coordinate nel piano e nello spazio. Affinità, isometrie, movimenti rigidi.

**Coniche.** Le sezioni coniche. Richiami delle principali proprietà delle coniche in forma canonica. Definizione generale. Riduzione a forma canonica. Coniche a centro, coniche non a centro. Gli invarianti ortogonali.

**Quadriche.** Generalità sulle superfici nello spazio. La sfera, il cono, il cilindro, le superfici di rotazione. Superfici del secondo ordine: quadriche. Cenno al piano tangente, natura dei punti della quadrica. Forma canonica delle quadriche; quadriche a centro, quadriche non a centro. Gli invarianti ortogonali. Cenno ai sistemi di rette sulle quadriche.

#### Principali riferimenti, testi ed eserciziari:

1. Appunti del corso.
2. Slide delle lezioni, file PDF disponibile su Beep.
3. F. Lastaria, M. Saita, *Appunti di algebra lineare*. 2011, file PDF disponibile su Beep.
4. Claretta Carrara, *Esercizi di Algebra Lineare*, file PDF disponibile su Beep.
5. Enrico Schlesinger, *Algebra lineare e geometria*, Zanichelli, 2018.
6. L. Mauri, E. Schlesinger, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli, 2012.
7. Marco Boella, *Analisi Matematica 1 e Algebra lineare. Esercizi*, Pearson, 2012.

Per approfondimenti:

- in Algebra Lineare:
  1. I. M. Gelfand, *Lectures on Linear Algebra*, Dover, Dover Books on Mathematics, nuova edizione: 1989.
  2. Serge Lang, *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri, terza edizione: 2014.
- in Geometria (affine, euclidea e proiettiva):
  1. Renato Betti, *Lezioni di geometria, parte seconda. Geometria analitica*, Masson, 1996.
  2. Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, seconda edizione: 2000.

## MODALITÀ D'ESAME

L'esame consiste di due parti: una scritta e l'altra orale.

Nello scritto sono proposti esercizi. Le risposte e i passaggi principali dello svolgimento degli esercizi devono essere motivati. Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni. In particolare, lo studente non deve avere cellulari, smartphone, tablet o altri apparecchi elettronici che possano essere connessi alle reti. È concessa la consultazione di un foglio (in formato A4) sulle cui facciate (fronte e retro) lo studente abbia scritto le principali formule.

La prova orale consiste nella discussione della prova scritta e in una interrogazione (eventualmente scritta) sull'intero programma del corso. Lo studente deve saper presentare con precisione tutte le definizioni e tutti i risultati in programma e conoscere esempi che illustrino la teoria. È inoltre richiesta la dimostrazione dei risultati che, nel presente programma, sono indicati con un asterisco (\*).

L'esame può essere superato presentandosi a due prove in itinere, oppure a uno degli appelli previsti dal calendario accademico. Gli studenti che non superano l'esame con le prove in itinere devono comunque sostenere l'esame completo in un appello successivo. Con la prima modalità, non obbligatoria ma fortemente consigliata, vengono assegnate due prove scritte, dette prove in itinere, riguardanti parti distinte dell'insegnamento, una circa alla metà dell'insegnamento e l'altra al termine dello stesso, e strutturate in esercizi di varia tipologia. Soltanto una valutazione positiva conseguita nella prima prova in itinere consente di accedere alla seconda. Qualora lo studente non si presenti alla prima prova in itinere, non ha comunque diritto di accedere alla seconda. Nel caso in cui entrambe le prove in itinere vengano svolte in maniera soddisfacente, viene conseguito un voto uguale alla media aritmetica dei risultati parziali e lo studente viene convocato a sostenere una prova orale. Detta prova è obbligatoria e può portare a una modifica del voto o anche a un esito negativo. A questo punto si procederà alla fase di consuntivazione, con registrazione in carriera del voto conseguito in caso di esito positivo, o rinvio dello studente agli appelli d'esame altrimenti.

Gli appelli d'esame comprendono una prova scritta e una prova orale. L'accesso alla prova orale è comunque subordinato a uno svolgimento soddisfacente della prova scritta. Nel caso in cui anche la prova orale, obbligatoria, risulti positiva, si procederà alla fase di consuntivazione con registrazione in carriera del voto conseguito. In caso di prova scritta o di eventuale prova orale non soddisfacente, lo studente è rinviato agli appelli d'esame successivi. Possono sostenere il singolo appello tutti e soli gli studenti che si sono regolarmente prenotati usando le modalità previste. Non è tecnicamente possibile ai docenti registrare voti per studenti che non risultano iscritti all'appello in questione.

Sia per le prove in itinere, sia per gli appelli d'esame, è facoltà dello studente rifiutare il voto proposto.

Chi non supera l'esame o rifiuta il voto proposto può presentarsi ad un appello successivo e ripetere l'intero esame; non sono previste prove di recupero scritte o orali, neppure parziali.

L'insegnamento deve essere ripetuto se non viene raggiunta una valutazione sufficiente in alcuno degli appelli previsti dal calendario accademico.