1.

a) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x - y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Verificare che la curva di livello $f = 0$ è regolare e trovarne una parametrizzazione.

2.

a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = -2\sqrt{y+1}$$

e determinare la soluzione $\phi(t)$ che soddisfa la condizione $\phi(0) = 0$.

b) Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + ky = 1$$

(distinguere i casi $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$).

3. Calcolare direttamente ed usando il teorema della divergenza il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - (z-1)^2\,\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie del cilindro

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}\,.$$

Calcolare rot$\mathbf{F}$ e dire se il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} (x-1)^n; \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}\, x^n$$

Calcolare la somma della serie b).

ii) Verificare che la *successione* di funzioni

$$f_n(x) = x\, e^{-nx^2}\,, \quad n = 1, 2, \dots,$$

converge *uniformemente* a zero su tutto $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI

1.

a) Derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 1 + x; \quad f_y(x,y) = -1 + y$$

I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (x+1)\,\mathbf{i} + (y-1)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}\,.$$

Risolvendo troviamo l'unica soluzione $P_0(-1,1)$. Il punto P_0 è interno al disco D.
Calcolando le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 1; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0; \quad f_{yy}(x,y) = 1$$

e valutando la matrice Hessiana si deduce che si tratta di un punto di minimo; il *valore* della funzione nel punto è $f(-1,1) = -1$. Gli estremi sulla frontiera di D si trovano con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, oppure studiando la restrizione di f alla curva di equazioni parametriche $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
Consideriamo quindi la funzione composta

$$g(\theta) := f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 2(\cos\theta - \sin\theta + 1), \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

La funzione g ha un punto di minimo per $\theta = 3\pi/4$ con valore $g(3\pi/4) = -2(\sqrt{2}-1)$ e uno di massimo per $\theta = 7\pi/4$, con valore $g(7\pi/4) = 2(\sqrt{2}+1)$.
Abbiamo quindi sulla frontiera i punti $P_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, con

$$f(P_1) = -2(\sqrt{2}-1) \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = 2(\sqrt{2}+1)\,.$$

Si conclude che P_0 è il punto di minimo assoluto e P_2 è il punto di massimo assoluto della funzione in D.

b) Poiché l'unico punto critico di f è P_0, dove $f(P_0) = -1$, sulla curva di livello $f = 0$ non ci sono punti singolari. L'equazione $f(x,y) = 0$ si può scrivere

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0\,,$$

che è l'equazione della circonferenza (passante per l'origine) di centro P_0 e raggio $r = \sqrt{2}$.
Abbiamo allora le equazioni parametriche:

$$x = -1 + \sqrt{2}\cos t\,, \qquad y = 1 + \sqrt{2}\sin t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

2.

a) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione costante $y = -1$ è soluzione dell'equazione; le soluzioni non costanti si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y+1}}\, dy = -\int dt + C,$$

da cui si ricavano le soluzioni in forma implicita

$$\sqrt{y+1} = C - t\,, \qquad C - t > 0\,.$$

Risolvendo rispetto a y si ottiene

$$y = -1 + (C-t)^2, \qquad t < C\,.$$

La curva integrale passante per $(0,0)$ si ottiene scegliendo $C = 1$. Dunque

$$\phi(t) = -1 + (1-t)^2 = t^2 - 2t\,, \qquad t < 1\,.$$

b) Per $k > 0$ l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $z'' + kz = 0$, è

$$z(t) = C_1 \sin(\sqrt{k}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{k}\, t)\,.$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y} = \frac{1}{k}\,,$$

per cui l'integrale generale si scrive

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{k}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{k}\, t) + \frac{1}{k}\,.$$

Per $k = 0$ l'equazione diventa $y'' = 1$. Integrando due volte si ottiene+

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

Per $k < 0$ l'integrale generale dell'omogenea è

$$z(t) = C_1\, e^{\sqrt{-k}\, t} + C_2\, e^{-\sqrt{-k}\, t}\,.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è allora

$$y(t) = C_1\, e^{\sqrt{-k}\, t} + C_2\, e^{-\sqrt{-k}\, t} + \frac{1}{k}\,.$$

3.

La superfice del cilindro è l'unione di 3 superfici regolari: la *superfice laterale*

$$S \equiv \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2=1, \quad 0 \le z \le 2\}$$

e le due basi

$$D_1 \equiv \{(x,y,0) \,|\, x^2+y^2 \le 1\}, \qquad D_2 \equiv \{(x,y,2) \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$$

Usando la parametrizzazione

$$x=\cos u, \quad y=\sin u, \quad z=v, \qquad 0 \le u < 2\pi, \quad 0 \le v \le 2,$$

la normale esterna *sulla superfice laterale* S è

$$\mathbf{n}_e = \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j}$$

Su S abbiamo

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\Big|_S = v\cos^2 u + v\sin^2 u = v\,,$$

per cui

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int_0^2\int_0^{2\pi} v\,dudv = 2\pi\int_0^2 v\,dv = 4\pi\,.$$

Sulle due basi abbiamo

$$\mathbf{n}_e = -\mathbf{k} \quad \text{su } D_1, \qquad \mathbf{n}_e = \mathbf{k} \quad \text{su } D_2$$

Dunque:

$$\int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\!\!\int_{x^2+y^2\le 1} (-\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k})\,dxdy = \pi;$$

$$\int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\!\!\int_{x^2+y^2\le 1} (-\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\,dxdy = -\pi;$$

In definitiva:

$$\int\!\!\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = \int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS + \int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS + \int\!\!\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\,dS = +\pi - \pi + 4\pi = 4\pi\,.$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z + z - 2(z-1) = 2\,.$$

Abbiamo allora

$$\int\!\!\int\!\!\int_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \int\!\!\int\!\!\int_D 2\,dxdydz =$$

$$= 2\int\!\!\int\!\!\int_D dxdydz = 2|D| = 4\pi\,.$$

Calcolo del rotore

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}\,.$$

Non valendo la condizione necessaria $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, il campo *non* è conservativo.

4.

i) Applicando il criterio della radice ai coefficienti della serie a), calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1\,,$$

da cui si deduce che la serie ha raggio di convergenza $R = 1$. Avendo centro in $x_0 = 1$, la serie converge (assolutamente) per $0 < x < 2$.
Agli estremi dell'intervallo abbiamo le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Nessuna delle due converge poiché $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1/e \neq 0$.

La serie b) ha centro nell'origine e raggio di convergenza $R = \infty$ come si verifica applicando il criterio del rapporto. Dunque la serie converge in tutto $\mathbb{R}$.
La somma della serie si calcola osservando che si può scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(-3x)^n\,,$$

e riconoscendo al secondo membro l'espressione della serie esponenziale calcolata in $-3x$.
Dunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}\, x^n = e^{-3x}\,.$$

ii) Per ogni fissato $n \geq 1$, la funzione $f_n(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, dispari, regolare e tende a zero per $x \to \pm\infty$; la derivata

$$f_n'(x) = (1 - 2nx^2)\, e^{-nx^2}\,,$$

si annulla per $x = \pm 1/\sqrt{2n}$. Dallo studio del grafico di f_n, si ricava che $x = 1/\sqrt{2n}$ è punto di massimo assoluto e $x = -1/\sqrt{2n}$ è punto di minimo assoluto. Abbiamo allora

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq |f_n(\pm 1/\sqrt{2n})| = \frac{1}{\sqrt{2e}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Poiché $1/\sqrt{n} \to 0$ per $n \to \infty$, la successione f_n converge uniformemente a zero su $\mathbb{R}$.