FORME BILINEARI

Una **forma bilineare** è una funzione definita sul prodotto cartesiano tra due spazi vettoriali e a valori in un campo, tale da essere lineare in entrambe le componenti. Più esplicitamente, se V, W sono due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, una forma bilineare è un'applicazione $F: V \times W \to \mathbb{K}$ che è lineare sia in V che in W.

In questa lezione daremo la **definizione di forma bilineare** più generale possibile e, dopo aver visto qualche esempio, ci concentreremo sulle forme bilineari del tipo $F: V \times V \to \mathbb{K}$, in cui il dominio è un prodotto cartesiano definito su uno stesso spazio vettoriale V.

Proseguiremo introducendo la nozione di **matrice associata a una forma bilineare**, per poi mostrare il legame che sussiste tra matrici rappresentative di una stessa forma bilineare rispetto a basi diverse. Concluderemo infine con le definizioni di *forma bilineare degenere* e di *forma bilineare simmetrica*, corredando il tutto con numerosi esempi.

Definizione di forma bilineare

Siano $\mathbb{K}$ un campo e V, W spazi vettoriali finitamente generati su $\mathbb{K}$, rispettivamente di dimensione n, m. L'applicazione

$$F: V \times W \to \mathbb{K}$$

che alla coppia ordinata di vettori $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times W$ associa lo scalare $F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{K}$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ \mapsto F(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

è detta **forma bilineare** se è lineare sia in V che in W, ossia se per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V,\ \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ valgono le seguenti proprietà:

(a) Additività e omogeneità rispetto alla prima componente

$$F(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}) = \alpha F(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \beta F(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$$

(b) Additività e omogeneità rispetto alla seconda componente

$$F(\mathbf{v},\ \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2) = \alpha F(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \beta F(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$$

In particolare, se $V = W$, la trasformazione $F: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta **forma bilineare su V**.

Osservazione

Se uno dei due vettori preimmagine di una forma bilineare è il vettore nullo, allora l'immagine è lo zero del campo. Più esplicitamente, indichiamo con $\mathbf{0}_V$ e con $\mathbf{0}_W$ il vettore nullo di V e quello di W. Se $F: V \times W \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare, allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $\mathbf{w} \in W$ si ha che

$$F(\mathbf{0}_V, \mathbf{w}) = 0 = F(\mathbf{v}, \mathbf{0}_W)$$

Questa proprietà è una conseguenza delle condizioni di omogeneità ed è assunta come condizione necessaria per stabilire se un'applicazione è bilineare.

Esempi di forme bilineari e non bilineari

1) L'applicazione $F:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$F((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2))=x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1-y_2)+x_3y_1$$

è una forma bilineare.

Dimostriamolo. Consideriamo

$$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$$

$$(x_1,x_2,x_3),\ (x'_1,x'_2,x'_3)\in\mathbb{R}^3$$

$$(y_1,y_2),\ (y'_1,y'_2)\in\mathbb{R}^2$$

e verifichiamo che F soddisfa le proprietà richieste dalla definizione di forma bilineare:

$$F(\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(x'_1,x'_2,x'_3),\ (y_1,y_2))=$$

$$=F((\alpha x_1+\beta x'_1,\ \alpha x_2+\beta x'_2,\ \alpha x_3+\beta x'_3),\ (y_1,y_2))=\text{per com'è definita } F$$

$$=(\alpha x_1+\beta x'_1)(y_1+y_2)+(\alpha x_2+\beta x'_2)(y_1-y_2)+(\alpha x_3+\beta x'_3)y_1=$$

$$=\alpha x_1(y_1+y_2)+\beta x'_1(y_1+y_2)+\alpha x_2(y_1-y_2)+\beta x'_2(y_1-y_2)+\alpha x_3y_1+\beta x'_3y_1=$$

$$=\alpha[x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1-y_2)+x_3y_1]+\beta[x'_1(y_1+y_2)+x'_2(y_1-y_2)+x'_3y_1]=$$

$$=\alpha F((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2))+\beta F((x'_1,x'_2,x'_3),\ (y_1,y_2))$$

Abbiamo così dimostrato la proprietà (a), ossia la linearità di F rispetto alla prima componente. Procedendo allo stesso modo lasciamo a voi il compito di verificare la proprietà (b), ossia di provare che

$$F((x_1,x_2,x_3),\ \alpha(y_1,y_2)+\beta(y'_1,y'_2))=$$

$$=\alpha F((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2))+\beta F((x_1,x_2,x_3),\ (y'_1,y'_2))$$

2) Consideriamo la trasformazione $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tale che

$$F((x_1,x_2),\ (y_1,y_2,y_3))=x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1-y_3+2)$$

Tale applicazione non è bilineare. Per giungere a questa conclusione è sufficiente osservare che per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$F((x_1,x_2),\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3})=F((x_1,x_2),\ (0,0,0))=$$

$$=x_1(0+0)+x_2(0-0+2)=0+2x_2=2x_2$$

Sebbene uno dei due vettori preimmagine sia il vettore nullo, l'immagine tramite F non è 0, e quindi F non è bilineare.

Nota bene: da qui in poi lavoreremo con forme bilineari definite su uno stesso spazio vettoriale V, ossia con forme del tipo $F:V\times V\to\mathbb{K}$. Potrebbe sembrare un'ipotesi restrittiva, ma in realtà non lo è più di tanto. Come vedremo, infatti, la maggior parte della teoria sulle forme bilineari si sviluppa su applicazioni di questo tipo.

Matrice associata a una forma bilineare

Per definire la **matrice associata a una forma bilineare** e vedere come si costruisce consideriamo una forma bilineare $F:V\times V\to\mathbb{K}$ definita su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n.

Detta $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ una base di V, la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è quella matrice $A=(a_{ij})$ i cui elementi sono le immagini tramite F delle coppie ordinate di vettori $(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$, al variare di i,j in $\{1,2,...,n\}$.

In altri termini, se $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ è una base di V, la matrice $A_F^{\mathcal{B}}$ associata alla forma bilineare $F:V\times V\to\mathbb{K}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è quella matrice $A=(a_{ij})$ tale che per ogni $i,j\in\{1,2,...,n\}$:

$$a_{ij}=F(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$$

Più esplicitamente

$$A_F^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) & F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) & \cdots & F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_n)\\ F(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) & F(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) & \cdots & F(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_1) & F(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_2) & \cdots & F(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n)\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^{n,n}$$

Se indichiamo con

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\ \mathbf{w}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ di due vettori $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, allora l'immagine mediante F della coppia $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ si individua tramite la matrice associata secondo la formula

$$F(\mathbf{v},\mathbf{w})=(\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^T\ A_F^{\mathcal{B}}\ \mathbf{w}_{\mathcal{B}}$$

A ogni forma bilineare è quindi associata una matrice che dipende dalla scelta della base di V.

Viceversa, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, a ogni matrice $A\in Mat(n,n,\mathbb{K})$ si può associare una forma bilineare $F:V\times V\to\mathbb{K}$ data da

$$F(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathbf{x}^TA\mathbf{y}$$

dove $\mathbf{x},\mathbf{y}$ sono i vettori colonna delle coordinate di $\mathbf{v},\mathbf{w}$ espresse rispetto alla base $\mathcal{B}$ fissata.

In definitiva, proprio come accade per la matrice associata a un'applicazione lineare, per determinare la matrice rappresentativa di una forma bilineare o per risalire a una forma bilineare da una matrice, è determinante la scelta della base.

Esempi sul calcolo della matrice rappresentativa di una forma bilineare

1) Determinare la matrice associata alla forma bilineare $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$F((x_1,x_2),\ (y_1,y_2))=x_1y_1+2x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, e successivamente rispetto alla base $\mathcal{B}=\{(1,2),\ (3,-1)\}$

Svolgimento: indichiamo con

$$\mathcal{C}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}=\{(1,0),(0,1)\}$$

la base canonica di $\mathbb{R}^2$. La matrice $A_F^{\mathcal{C}}$ che rappresenta F rispetto a $\mathcal{C}$ è una matrice quadrata di ordine 2, i cui elementi sono

$a_{11} = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = F((1,0),\ (1,0)) =$

$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$a_{12} = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = F((1,0),\ (0,1)) =$

$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2$

$a_{21} = F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = F((0,1),\ (1,0)) =$

$= 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -3$

$a_{22} = F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = F((0,1),\ (0,1)) =$

$= 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

dunque

$$A_F^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine, detti $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ e $\mathbf{v}_2 = (3,-1)$ i vettori di $\mathcal{B}$, gli elementi della matrice $A_F^{\mathcal{B}}$ associata a F rispetto a $\mathcal{B}$ sono

$a_{11} = F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = F((1,2),\ (1,2)) =$

$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 - 6 + 4 = 3$

$a_{12} = F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = F((1,2),\ (3,-1)) =$

$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 - 18 - 2 = -19$

$a_{21} = F(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = F((3,-1),\ (1,2)) =$

$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 3 + 12 + 3 - 2 = 16$

$a_{22} = F(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = F((3,-1),\ (3,-1)) =$

$= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 9 - 6 + 9 + 1 = 13$

e quindi

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -19 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

2) Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali e di grado al più 2. Calcolare, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$, la matrice rappresentativa della forma bilineare

$$F : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$$

$$F(p(x), q(x)) = 2p(0)q(0) + p'(0)q(1) + 3p(1)q'(0)$$

dove l'apice indica la derivata prima di un polinomio rispetto a x.

Svolgimento: per calcolare la matrice rappresentativa di F conviene ricavare dapprima la sua esplicita. A tal proposito siano

$$p(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$$

$$q(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$$

due elementi di $\mathbb{R}_2[x]$. Allora:

$$p'(x) = b_1 + 2c_1 x$$

$$q'(x) = b_2 + 2c_2 x$$

e quindi

$p(0) = a_1, \quad q(0) = a_2$

$p'(0) = b_1, \quad q'(0) = b_2,$

$p(1) = a_1 + b_1 + c_1, \quad q(1) = a_2 + b_2 + c_2$

di conseguenza possiamo riprendere la definizione della forma bilineare assegnata

$$F(p(x), q(x)) = 2p(0)q(0) + p'(0)q(1) + 3p(1)q'(0)$$

e riscriverla nella forma

$$F(p(x), q(x)) = 2a_1a_2 + b_1(a_2 + b_2 + c_2) + 3b_2(a_1 + b_1 + c_1)$$

A questo punto fissiamo la base canonica di $\mathbb{R}^2[x]$, ossia $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$, e determiniamo gli elementi della matrice rappresentativa di F rispetto a tale base.

Il suo primo elemento è

$$a_{11} = F(p(x), q(x)) \quad \text{con } p(x) = q(x) = 1$$

Attenendoci alle notazione scelte, $p(x) = 1$ è un polinomio della forma

$$p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 = 1 \quad \iff \quad a_1 = 1, \ b_1 = c_1 = 0$$

Allo stesso modo $q(x) = 1$ è un polinomio della forma

$$q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 = 1 \quad \iff \quad a_2 = 1, \ b_2 = c_2 = 0$$

Dunque per calcolare $F(1, 1)$ è sufficiente sostituire tali valori nell'espressione esplicita di F, ottenendo

$$a_{11} = F(1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + 0 + 0) + 3 \cdot 0 \cdot (1 + 0 + 0) = 2$$

Calcoliamo ora l'elemento $a_{12} = F(1, x)$

$$p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 = 1 \iff a_1 = 1, \ b_1 = c_1 = 0$$

mentre

$$q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 = x \iff b_2 = 1, \ a_2 = c_2 = 0$$

Dunque

$$a_{12} = F(1, x) = 0 + 0 + 3 = 3$$

Proseguiamo con $a_{13} = F(1, x^2)$

$$p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 = 1 \iff a_1 = 1, \ b_1 = c_1 = 0$$

Di contro

$$q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 = x^2 \iff c_2 = 1, \ a_2 = b_2 = 0$$

Pertanto

$$a_{13} = F(1, x) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Procedendo allo stesso modo si verifica facilmente che

$$a_{21} = F(x, 1) = 1, \quad a_{22} = F(x, x) = 4, \quad a_{23} = F(x, x^2) = 1,$$

$$a_{31} = F(x^2, 1) = 0, \quad a_{32} = F(x^2, x) = 3, \quad a_{33} = F(x^2, x^2) = 0$$

di conseguenza

$$A_F^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso particolare: matrice associata a una forma bilineare rispetto alla base canonica

Come risulta evidente dal precedente esempio 1), se $A = (a_{ij}) \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ rappresenta una forma bilineare del tipo $F: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^n$, allora a_{ij} è il coefficiente di $x_i y_j$, e viceversa.

Relazione tra matrici associate alla stessa forma bilineare

Nella lezione sulla formula del cambiamento di base per applicazioni lineari abbiamo dimostrato che matrici associate allo stesso endomorfismo rispetto a basi differenti sono matrici simili. Cerchiamo ora di capire qual è il **legame tra matrici associate alla stessa forma bilineare rispetto a basi distinte**.

Come di consueto consideriamo uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

Prendiamo due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V e siano

$A := A_F^{\mathcal{B}}$ la matrice associata a F rispetto a $\mathcal{B}$;

$A' := A_F^{\mathcal{B}'}$ la matrice rappresentativa di F riferita a $\mathcal{B}'$.

Vogliamo determinare il legame esistente tra queste due matrici. Indichiamo con

$M := M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Sia quindi $\mathbf{v} \in V$ e rappresentiamo con $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ e con $\mathbf{v}_{\mathcal{B}'}$ i vettori colonna delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Dalla definizione di matrice di cambiamento di base segue che

$$(1)\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = M\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}'}$$

mentre dalla definizione di matrice associata a una forma bilineare si ha che

$$F(\mathbf{v},\mathbf{v}) = (\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^T\ A\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}}$$

$$F(\mathbf{v},\mathbf{v}) = (\mathbf{v}_{\mathcal{B}'})^T\ A'\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}'}$$

dunque

$$(\mathbf{v}_{\mathcal{B}'})^T\ A'\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}'} = F(\mathbf{v},\mathbf{v})$$

$$= (\mathbf{v}_{\mathcal{B}})^T\ A\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \text{ per } (1)$$

$$= (M\mathbf{v}_{\mathcal{B}'})^T\ \ A\ \ (M\mathbf{v}_{\mathcal{B}'}) =$$

$$= (\mathbf{v}_{\mathcal{B}'})^T\ \ M^T\ A\ M\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}'}$$

Dall'arbitrarietà della scelta di $\mathbf{v} \in V$ segue che

$$A' = M^T\ A\ M$$

ossia

$$A_F^{\mathcal{B}'} = (M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}})^T\ \ A_F^{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$$

La precedente formula è detta **formula del cambiamento di base per forme bilineari** e da essa si evince che matrici associate alla stessa forma bilineare rispetto a basi differenti sono matrici congruenti.

Esempio di applicazione della formula del cambiamento di base per forme bilineari

Partiamo dalla matrice rappresentativa di una forma bilineare $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, scritta rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1,-1),\ (0,2)\}$.

Svolgimento: determiniamo la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, che è quella matrice che ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$

$$M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $A_F^{\mathcal{B}'}$ con la formula del cambiamento di base per forme bilineari

$$A_F^{\mathcal{B}'} = (M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}})^T \ \ A_F^{\mathcal{B}} \ M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Volendo verificare la correttezza del risultato ottenuto possiamo risalire alla forma esplicita della forma bilineare dalla matrice associata, per poi determinare $A_F^{\mathcal{B}'}$.

La matrice assegnata è riferita alla base canonica, dunque la forma esplicita di F è tale che a_{ij} uguagli il coefficiente di $x_i y_j$:

$$F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 =$$

$$= x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2$$

Detti $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,2)$ i vettori di $\mathcal{B}'$, si ha che

$$A_F^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) & F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \\ F(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) & F(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Come potete osservare si ottiene lo stesso identico risultato.

Forme bilineari degeneri e non degeneri

Consideriamo, ancora una volta, una forma bilineare

$$F : V \times V \to \mathbb{K}$$

$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto F(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in \mathbb{K}$$

Subito dopo aver dato la definizione di forma bilineare abbiamo osservato che se almeno uno tra i vettori della coppia $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ è il vettore nullo di V, allora $F(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$

Se esiste almeno un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V,\ \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ tale che per ogni $\mathbf{w} \in V$ risulta $F(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$ allora F è detta **forma bilineare degenere**

$$F \text{ degenere se } \exists\ \mathbf{v} \in V,\ \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V \text{ t.c. } \forall\ \mathbf{w} \in V \text{ risulta } F(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$$

In caso contrario, cioè se

$$F(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}_V \text{ oppure } \mathbf{w} = \mathbf{0}_V$$

allora F è una **forma bilineare non degenere**.

Più in generale, data una forma bilineare $F: V \times V \to \mathbb{K}$ si introduce il *radicale* o *nucleo* di F come il sottoinsieme di V definito da

$$V^{\perp} := \{\mathbf{v} \in V \text{ t.c. } F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \ \ \forall \ \mathbf{w} \in V\}$$

Alla luce di tale definizione possiamo affermare che una forma bilineare è non degenere se e solo se ha nucleo (o radicale) banale, ossia

$$F \text{ forma bilineare non degenere } \iff V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$$

Il nome *nucleo* non è stato scelto a caso; i più attenti, infatti, avranno notato una certa corrispondenza tra la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e nucleo di una forma bilineare.

All'atto pratico, per stabilire se una forma bilineare è degenere o non degenere è sufficiente determinare una delle matrici rappresentative di F: se il rango della matrice è massimo, ossia se ha determinante diverso da zero, la forma è non degenere, in caso contrario è degenere.

Esempi di forme bilineari degeneri e non degeneri

A) Tutte le forme bilineari introdotte fin qui sono non degeneri; potete infatti verificare che il determinante delle matrici a esse associate sono non nulli.

B) La forma bilineare $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ data da

$$F((x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3)) = x_1(y_1 + 2y_2) + x_2(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2 + 3y_3)$$

è degenere. Per verificarlo determiniamo la matrice associata a F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Procedendo con la regola di Sarrus lasciamo a voi l'onere di calcolarne il determinante e vedere che è nullo, il che conferma che F è degenere.

Forme bilineari simmetriche

$F: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta **forma bilineare simmetrica** se per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta che

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

Detta $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base di V, dalla definizione segue che se F è una forma bilineare simmetrica allora per ogni $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ vale

$$F(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = F(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)$$

Se ben ricordate, $F(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ è l'elemento a_{ij} della matrice associata a F rispetto a $\mathcal{B}$, quindi le matrici associate a una forma bilineare simmetrica rispetto a qualsiasi base sono matrici simmetriche, e viceversa.

Avremo modo di trattare approfonditamente le forme bilineari simmetriche nella prossima lezione, dove introdurremo il concetto di prodotto scalare. Nel frattempo, per dubbi o domande, vi raccomandiamo di usare la barra di ricerca interna: qui su YM ci sono migliaia di esercizi risolti e altrettante spiegazioni fornite dallo Staff. ;)

Buon proseguimento su YouMath,