

I teoremi di Green, Gauss e Stokes



Formula di Gauss-Green nel piano

Iniziamo ad analizzare la relazione tra integrali doppi e integrali di linea.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato, la cui frontiera ∂D sia una curva di Jordan regolare a tratti orientata positivamente ($\partial^+ D$).

Denotiamo con $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vettoriale tale che $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$.

Lemma

a) Se D è y -semplice, allora

$$\int \int_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

b) Se D è x -semplice, allora

$$\int \int_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy$$

Dimostrazione

a) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$; dalle formule di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_D P_y(x, y) dx dy &= \\ \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x, y) dy \right) dx &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale di $P dx$ sulla frontiera osservando che $dx = 0$ sui tratti rettilinei dove $x = a$ e dove $x = b$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} P dx &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx = \\ &= - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx. \end{aligned}$$

b) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$; dalle formule di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_D Q_x(x, y) dx dy &= \\ \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} Q_x(x, y) dx \right) dy &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale di $Q dy$ sulla frontiera osservando che $dy = 0$ sui tratti rettilinei dove $y = c$ e dove $y = d$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} Q dy &= \int_c^d Q(h_2(y), y) dy + \int_d^c Q(h_1(y), y) dy = \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Abbiamo subito una prima versione del teorema di Gauss-Green nel piano:

Teorema (Formula di Gauss-Green)

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti e che sia *semplice rispetto ad entrambi gli assi*.

Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j} \in \mathcal{C}^1(D)$, vale la formula

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy.$$

Dimostrazione

Nelle ipotesi del teorema valgono entrambe le relazioni a) e b) del precedente lemma. Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene il risultato. \square

La formula di Gauss-Green vale in domini più generali.

Tra i cosiddetti domini *ammissibili* rientrano i domini D la cui frontiera ∂D è unione disgiunta di un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti e che sono *decomponibili* in un numero finito di sottoinsiemi semplici rispetto ad entrambi gli assi:

$$D = \bigcup_{j=1}^k D_j, \quad \overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

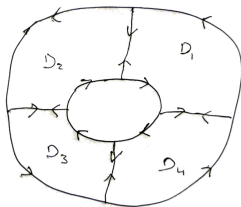
Infatti, per le proprietà degli integrali e dei domini D_j abbiamo:

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \sum_{j=1}^k \int \int_{D_j} (Q_x - P_y) dx dy = \sum_{j=1}^k \int_{\partial^+ D_j} P dx + Q dy.$$

Gli archi di curva che fanno parte della frontiera di due domini adiacenti compaiono due volte nella somma,

$$\sum_{j=1}^k \int_{\partial^+ D_j} P dx + Q dy ,$$

ma sono percorsi con orientazioni opposte, per cui i relativi integrali si elidono.



Rimangono solo gli integrali lungo le curve che fanno parte della frontiera $\partial^+ D$:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy .$$

Esempi

Scegliendo nella formula $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 0$ (cioè il campo $\mathbf{F} = -y \mathbf{i}$) otteniamo

$$\int \int_D dx dy = \int_{\partial^+ D} -y dx.$$

Se invece $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x$ (cioè $\mathbf{F} = x \mathbf{j}$)

$$\int \int_D dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy.$$

Abbiamo dunque due formule per il calcolo dell'area $|D|$ mediante integrali curvilinei lungo la frontiera ∂D .

Una terza formula si ottiene facendo la semisomma delle due:

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} -y dx + x dy$$

Esercizio

Calcolare l'area racchiusa dall'ellisse parametrizzata con le equazioni $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Significato del rotore di un campo piano.

Se $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}$ è un campo piano di classe \mathcal{C}^1 in un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$, ricordiamo che

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \mathbf{k},$$

Sia $B_r = B_r(x_0, y_0) \subset D$ un disco di raggio r e centro in (x_0, y_0) ; scriviamo la formula di Gauss-Green in B_r e dividiamo entrambi i membri per $|B_r| = \pi r^2$.

$$\frac{1}{\pi r^2} \int \int_{B_r} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial^+ B_r} F_1 dx + F_2 dy.$$

A sinistra abbiamo la media di $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ su B_r , a destra la circolazione di \mathbf{F} lungo ∂B_r divisa per l'area del cerchio.

Per $r \rightarrow 0$ abbiamo la relazione

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k})(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial^+ B_r} F_1 dx + F_2 dy.$$

Dunque, la componente lungo \mathbf{k} del rotore di \mathbf{F} in un punto del piano si interpreta come la *densità superficiale di circolazione* del campo nel punto stesso.

Invarianza della circolazione di un campo irrotazionale per deformazioni della traiettoria.

Siano γ_1 e γ_2 curve di Jordan regolari a tratti orientate positivamente e supponiamo che γ_1 racchiuda γ_2 al suo interno.

Sia D la regione piana compresa tra le due curve e supponiamo che $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ sia irrotazionale ($\partial_x F_2 = \partial_y F_1$) in D .

Allora

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Infatti, poiché $\partial^+ D = \gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$, dove $\tilde{\gamma}_2$ è la curva *opposta* a γ_2 , dall'irrotazionalità di \mathbf{F} e dalla formula di Gauss-Green abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \int_{\partial^+ D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\tilde{\gamma}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

da cui il risultato.

Area di una superficie e integrali di superficie

Consideriamo una superficie regolare Σ parametrizzata da

$$\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. Supponiamo che la superficie sia *semplice*, cioè tale che \mathbf{r} sia iniettiva in \mathring{D} .

Definizione

Se $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|$ è limitato in D si dice **area di** Σ il numero

$$A(\Sigma) := \int \int_D |\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv.$$

La definizione si giustifica con un argomento analogo a quello utilizzato per valutare il rapporto tra gli elementi di area nelle trasformazioni di coordinate.

Consideriamo l'immagine sulla superficie Σ di un piccolo rettangolo del piano (u, v) compreso tra le rette $u = u_0$, $u = u_0 + du$ e $v = v_0$, $v = v_0 + dv$.

Questa porzione di Σ è approssimata dal parallelogramma di lati $\partial_u \mathbf{r}(u_0, v_0) du$, $\partial_v \mathbf{r}(u_0, v_0) dv$, la cui area è uguale a:

$$|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{r}_v(u_0, v_0)| du dv.$$

L'espressione

$$dS := |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| du dv$$

si chiama *elemento d'area della superficie*. L'area totale si può anche scrivere

$$A(\Sigma) = \int \int_{\Sigma} dS = \int \int_D |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| du dv.$$

Esempi

Per calcolare l'area della superficie sferica S_R , parametrizzata con gli usuali angoli ϕ , θ , ricordiamo che

$$|\mathbf{r}_\phi(\phi, \theta) \wedge \mathbf{r}_\theta(\phi, \theta)| = R^2 \sin \phi,$$

per cui

$$dS = R^2 \sin \phi \, d\phi d\theta.$$

Abbiamo dunque

$$A(S_R) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi R^2 \sin \phi \, d\phi \right) d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = 4\pi R^2.$$

L'area della superficie di un toro Σ di parametrizzazione

$$\mathbf{r}(u, v) = (R + r \cos v) \cos u \mathbf{i} + (R + r \cos v) \sin u \mathbf{j} + r \sin v \mathbf{k},$$

con $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$, si ottiene integrando l'elemento d'area

$$dS = r(R + r \cos v) du dv$$

nel quadrato $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Dunque:

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} r(R + r \cos v) dv \right) du = \\ &= 2\pi \left(2\pi rR + r^2 \int_0^{2\pi} \cos v \right) = 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$

L'area di una superficie cartesiana di equazione $z = f(x, y)$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$, si calcola con la formula

$$\int \int_{\Sigma} dS = \int \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy.$$

Integrali di superficie

Sia Σ una superficie regolare di parametrizzazione $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|$ limitato.

Sia f una funzione continua e limitata definita in una regione dello spazio che contiene Σ .

Il numero

$$\int \int_{\Sigma} f \, dS := \int \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv$$

si dice **integrale di superficie** di f in Σ .

Si può dimostrare che gli integrali di superficie (ed in particolare l'area di una superficie regolare) sono invarianti per cambi regolari di parametrizzazione.

Esempio

Calcoliamo

$$\int \int_{S_R} (x^2 + y^2) dS,$$

dove S_R è la superficie sferica di raggio R centrata nell'origine.

Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = R \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + R \cos \phi \mathbf{k}, \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_{S_R} (x^2 + y^2) dS &= \int \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi)} (R^2 \sin^2 \phi) R^2 \sin \phi d\phi d\theta = \\ &= R^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi = 2\pi R^4 \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi d\phi = \frac{8}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

($= \frac{2}{3} M R^2$ se è una sfera omogenea di *densità superficiale* $\sigma = 1$).

Superfici orientate e flusso di un campo vettoriale

Il concetto di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie gioca un ruolo importante nella formulazione di diverse leggi fisiche.

Per definirlo correttamente, occorre prima precisare la nozione di *superficie orientata*.

Data una superficie regolare

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

sono definiti in ogni punto $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \tilde{D}$, due versori normali

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)|} \quad \text{e} \quad -\mathbf{n}(u, v).$$

La scelta coerente della direzione della normale in un intorno di un dato punto definisce localmente un campo *continuo* di normali che 'privilegia' uno dei due 'lati' della superficie.

Diremo che una superficie Σ è *orientabile* se questo campo continuo di normali si può definire globalmente su Σ .

Si può anche dire che una superficie è orientabile se, percorrendo una qualsiasi curva continua e *chiusa* $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ ($t \in [a, b]$) sulla superficie, si ha $\mathbf{n}(u(a), v(a)) = \mathbf{n}(u(b), v(b))$.

Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane, la sfera, il cilindro.

Una superficie regolare *non* orientabile è il nastro di Möbius parametrizzato da

$$\mathbf{r}(u, v) = (R + v \cos(u/2)) \cos u \mathbf{i} + (R + v \cos(u/2)) \sin u \mathbf{j} + v \sin(u/2) \mathbf{k},$$

per $0 \leq u \leq 2\pi$, $-h \leq v \leq h$.

Percorrendo la curva chiusa $\mathbf{r}(t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, si verifica che per $t \rightarrow 2\pi^-$ $\mathbf{n}(t, 0) \rightarrow -\mathbf{n}(0, 0)$.

La scelta di uno dei due possibili campi di normali $\pm \mathbf{n}$ su una superficie orientabile Σ definisce *l'orientazione* di Σ .

Una superficie per cui sia stata scelta un'orientazione si dice **superficie orientata**.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Data una superficie regolare e orientata Σ con vettore normale \mathbf{n} e dato un campo vettoriale \mathbf{F} di classe \mathcal{C}^1 in un aperto che contiene Σ , si definisce **flusso di \mathbf{F} attraverso Σ** nella direzione e verso di \mathbf{n} il numero

$$\Phi_{\Sigma}(F) := \int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Interpretazioni fisiche:

il flusso attraverso una superficie del campo di velocità $\mathbf{v}(x, y, z)$ di un liquido che scorre in un canale rappresenta la *portata volumetrica* del liquido attraverso la superficie.

il flusso attraverso una superficie del vettore densità di corrente $\mathbf{J}(x, y, z)$ di una distribuzione spaziale di cariche è *l'intensità di corrente* che attraversa la superficie.

Osserviamo che il segno del flusso dipende dalla scelta della normale \mathbf{n} su Σ , cioè *dipende dall'orientazione della superficie*.

Se Σ è parametrizzata da

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D,$$

(con D misurabile e $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|$ limitato)
e la normale scelta è

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)|},$$

(normale indotta dalla parametrizzazione) si ottiene, ricordando l'espressione dell'elemento d'area dS :

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)) du dv.$$

Esempio

Sia Σ la parte di superficie di equazione

$$z = 1 - x^2 - \frac{1}{4}y^2,$$

che si trova nel primo ottante dello spazio tridimensionale, orientata in modo che la normale punti verso l'alto.

Trovare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} - 4x \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}.$$

Sulla superficie abbiamo:

$$\mathbf{n} dS = \left(2x \mathbf{i} + \frac{y}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy$$

La proiezione di Σ sul piano xy è la regione D di equazione: $x^2 + y^2/4 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Dunque

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_D (2xy - 2xy + 2) dx dy = 2|D|$$

L'area di D è un quarto dell'area racchiusa da un'ellisse di semiassi $a = 1$, $b = 2$, per cui $|D| = \pi/2$.

Troviamo allora

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \pi.$$

A volte, nel calcolo di flussi attraverso particolari superfici, si può individuare direttamente un campo di normali senza ricorrere alle equazioni parametriche.

Per esempio, sulla superficie sferica S_R abbiamo dalla geometria elementare

$$\mathbf{n}_{\pm} = \pm \frac{1}{R} \mathbf{r}, \quad \text{dove } \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \in S_R.$$

Calcoliamo il flusso *uscente da* S_R del campo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}), \quad (r = |\mathbf{r}|)$$

(campo elettrostatico nel vuoto generato da una carica puntiforme q nell'origine).

Osserviamo che su S_R ,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^4} (x^2 + y^2 + z^2) \Big|_{S_R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int \int_{S_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_+ dS &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int \int_{S_R} dS = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} A(S_R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Bordo di una superficie orientata

Iniziamo a definire la nozione di bordo per una classe particolare di superfici. Supponiamo che $D \subset \mathbb{R}^2$ sia chiuso, limitato e connesso e che $\mathbf{r} : D \rightarrow \Sigma$ sia biunivoca (la superficie non presenta autointersezioni).

Il **bordo o contorno** della superficie è allora il sottoinsieme

$$\Gamma := \mathbf{r}(\partial D).$$

Se $\partial D = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$, con γ_i curve di Jordan nel piano, avremo

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \mathbf{r}(\gamma_i).$$

Una superficie Σ che ammette una parametrizzazione con le proprietà sopra descritte si dice *invertibile*. Ogni superficie invertibile, se è anche regolare, è orientabile.

Rientrano in questa classe le superfici cartesiane definite da una funzione $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

Esempio

Consideriamo la superficie cartesiana

$$\mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (x^2 - y^2) \mathbf{k}, \quad (x, y) \in D,$$

dove $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

La frontiera ∂D è l'unione delle due circonferenze di raggi 1 e 2 centrate nell'origine.

Il bordo della superficie è allora $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 = 4\} \cdot \diamond$$

La scelta di un'orientazione per superfici di questo tipo *induce un'orientazione su ciascuna delle curve che compongono il bordo*, nel modo che segue:

Definiamo lato positivo di una superficie orientata il lato al di fuori del quale punta la normale scelta \mathbf{n} .

Diremo allora che il bordo Γ è *orientato positivamente* se percorrendo una curva Γ_i nella direzione della sua orientazione, il lato positivo della superficie resta sempre sulla sinistra.

Supponiamo di scegliere, per la superficie dell'esempio precedente, la normale che punta verso l'alto:

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{i} + \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathbf{k}.$$

Allora il bordo è orientato positivamente se

$$\Gamma_1 : \quad \mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cos(2t) \mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\Gamma_2 : \quad \mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos(2t) \mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nel caso generale in cui $\mathbf{r}(u, v)$ è biunivoca solo in \mathring{D} , il bordo può essere strettamente contenuto in $\mathbf{r}(\partial D)$ come nel caso del cilindro finito

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1],$$

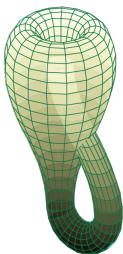
o anche essere l'insieme vuoto, nel qual caso la superficie è priva di bordo.

Una superficie priva di bordo e limitata si dice *chiusa*.

Sono superfici chiuse la sfera, l'ellissoide, il toro, che dividono lo spazio in due regioni (interno ed esterno) e risultano orientabili, potendo scegliere la normale uscente o quella entrante.

Il flusso di un campo vettoriale attraverso tali superfici si dirà allora uscente o entrante.

Esistono superfici chiuse e non orientabili (bottiglia di Klein).



Superfici regolari a pezzi

Le nozioni di integrale di superficie e di flusso si estendono al caso di superfici non regolari, ma che sono 'composte' da superfici regolari, come la superficie di un poliedro o quella di un cilindro (finito) con le sue basi.

Si dice che Σ è *regolare a pezzi* se esiste un numero finito di curve regolari a tratti, dette spigoli, che suddividono Σ in un numero finito di superfici regolari Σ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, dette facce.

Il *bordo* di una superficie regolare a pezzi è l'unione dei bordi delle facce Σ_j *esclusi* gli spigoli comuni ai bordi di due facce adiacenti.

Esempio

La superficie di un cubo consiste delle sei facce piane collegate a coppie lungo gli spigoli del cubo. Si tratta di una superficie *chiusa*, in quanto tutti i bordi delle facce sono formati da spigoli comuni a facce adiacenti.

Se si rimuove la faccia superiore del cubo, si ottiene la superficie di una scatola aperta che ha come bordo l'unione dei lati superiori delle quattro facce laterali.

Le definizioni di area e di integrale di superficie si estendono senza problemi al caso di superfici regolari a pezzi:

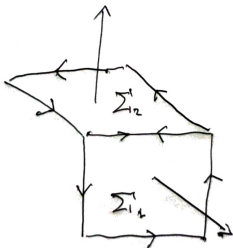
si sommano gli integrali calcolati su tutte le facce.

Osserviamo che non sarà necessario (e nemmeno conveniente) usare una stessa parametrizzazione per tutte le facce.

Per definire il flusso di un campo vettoriale, occorre estendere alle superfici regolari a pezzi la nozione di orientazione.

Diremo che una superficie liscia a pezzi è *orientabile* se è possibile scegliere la normale *su ogni faccia* in modo che l'orientazione indotta (vedi pag. 27) sul bordo della faccia conduca, lungo gli spigoli comuni a facce adiacenti, ad orientazioni *opposte*.

Esempio di superficie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ regolare a pezzi orientata:



Analogamente, la superficie di un cubo è orientabile e le due orientazioni corrispondono alla scelta su ogni faccia della normale uscente o entrante.

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie regolare a pezzi e orientata è allora la somma dei flussi attraverso le facce.

I teoremi della divergenza e del rotore

Definizione

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$) la *divergenza* di \mathbf{F} è l'operatore definito da

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) := \partial_x F_1(x, y, z) + \partial_y F_2(x, y, z) + \partial_z F_3(x, y, z).$$

Per questo operatore si usa anche la notazione $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

Si noti che la divergenza di un campo vettoriale è una funzione a valori in \mathbb{R} (scalare). Il suo integrale in una regione dello spazio risulta uguale al flusso uscente del campo attraverso la frontiera della stessa regione:

Teorema (Gauss)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitato, semplice rispetto ai tre assi cartesiani, la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare a pezzi, orientata con la scelta della normale esterna \mathbf{n}_e .

Se $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ vale la formula

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

Per la dimostrazione ci serviremo del seguente risultato valido nel caso di Ω insieme semplice rispetto all'asse z :

Lemma

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\},$$

dove D è un dominio regolare e semplicemente connesso del piano e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(D)$.

Se $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, vale la formula

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_z F_3 \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e \, dS.$$

Dimostrazione

Dalla formula di riduzione per gli integrali tripli (integrazione per fili) si ha

$$\begin{aligned}\int \int \int_{\Omega} \partial_z F_3(x, y, z) \, dx dy dz &= \int \int_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \partial_z F_3 \, dz \right) dx dy = \\ &= \int \int_D [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] \, dx dy .\end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale a destra. La frontiera $\partial\Omega$ è l'unione di tre superfici regolari:

la superficie cartesiana Σ_1 di equazione $z = \varphi_1(x, y)$, dove il prodotto della normale esterna per l'elemento di area è

$$\mathbf{n}_e \, dS = (\partial_x \varphi_1 \, \mathbf{i} + \partial_y \varphi_1 \, \mathbf{j} - \mathbf{k}) \, dx dy ;$$

la superficie cartesiana Σ_2 di equazione $z = \varphi_2(x, y)$, dove il prodotto della normale esterna per l'elemento di area è

$$\mathbf{n}_e \, dS = (-\partial_x \varphi_2 \, \mathbf{i} - \partial_y \varphi_2 \, \mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx dy ;$$

La superficie laterale Σ_3 , dove \mathbf{n}_e è ortogonale a \mathbf{k} .

Abbiamo quindi

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS = \begin{cases} -dx dy, & \text{su } \Sigma_1; \\ dx dy, & \text{su } \Sigma_2; \\ 0, & \text{su } \Sigma_3. \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\partial\Omega} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS = \\ &= \int \int_{\Sigma_1} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS + \int \int_{\Sigma_2} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS + \int \int_{\Sigma_3} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS = \\ &= - \int \int_D F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy + \int \int_D F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy + 0 = \\ &= \int \int_D [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy. \quad \square \end{aligned}$$

Con dimostrazioni simili, si ottengono le formule:

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_x F_1 \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_e \, dS,$$

se Ω è semplice rispetto all'asse x ;

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_y F_2 \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_e \, dS,$$

se Ω è semplice rispetto all'asse y .

In un dominio semplice rispetto a tutti e tre gli assi possiamo sommare le tre formule e otteniamo

$$\int \int \int_{\Omega} (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS,$$

cioè

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS.$$

Significato dell'operatore divergenza

Sia $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e sia $B_r = B_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ una palla di centro \mathbf{x}_0 e raggio r .

Orientiamo la superficie ∂B_r scegliendo la normale uscente \mathbf{n}_e .

Applicando il teorema di Gauss in B_r e dividendo entrambi i termini per il volume $|B_r|$ ($= 4\pi r^3/3$) si ottiene

$$\frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \int \int \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \int \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

A sinistra abbiamo il valore medio sulla palla della funzione continua $\operatorname{div} \mathbf{F}$; al tendere di r a zero, questa quantità tende a $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$.

Dunque:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \int \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS,$$

cioè la divergenza di \mathbf{F} in \mathbf{x}_0 rappresenta la *densità volumetrica del flusso di \mathbf{F} 'uscente' da \mathbf{x}_0* .

Esempio

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k},$$

uscente del cilindro

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 \}.$$

Applicando il teorema della divergenza, il flusso equivale all'integrale di volume di

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 1 + 2 + 3 = 6,$$

nel cilindro.

Denotando con $\partial\Omega$ la superficie del cilindro (regolare a pezzi) orientata con la normale uscente abbiamo allora:

$$\Phi_{\partial\Omega}(\mathbf{F}) = \int \int \int_{\Omega} 6 \, dx dy dz = 6|\Omega| = 6\pi.$$

Esercizio

Verificare il risultato calcolando il flusso $\Phi_{\partial\Omega}(\mathbf{F})$ direttamente dalla definizione.

Domini ammissibili per il teorema della divergenza

Il teorema della divergenza vale in una classe di domini più generali che include i domini Ω limitati, la cui frontiera è unione disgiunta di un numero finito di superfici chiuse, regolari a pezzi, orientabili.

Si richiede poi che Ω sia *decomponibile* in un numero finito di domini semplici rispetto ai tre assi:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j, \quad \dot{\Omega}_i \cap \dot{\Omega}_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

Vediamo un'applicazione interessante di questo risultato. Ricordiamo che il campo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \quad (r = |\mathbf{r}|)$$

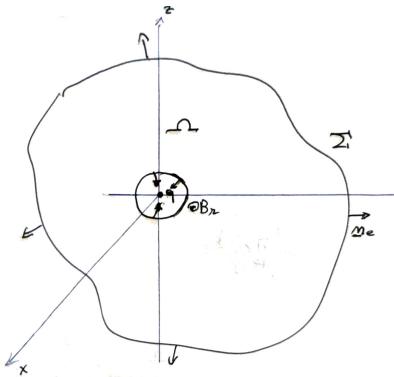
rappresenta il potenziale elettrostatico generato da una carica q nell'origine.

Osserviamo che $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$ e si verifica facilmente che

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Sia Σ una superficie chiusa (regolare a pezzi, orientabile) che ha l'origine al suo interno; se vogliamo calcolare il flusso di \mathbf{E} uscente da Σ *non* possiamo applicare il teorema della divergenza nella regione di spazio racchiusa da Σ perchè le ipotesi non sono verificate.

Consideriamo allora una palla B_r centrata nell'origine di raggio r piccolo e denotiamo con Ω la regione di spazio compresa tra Σ e ∂B_r .



Avremo dunque $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial B_r$, unione di superfici regolari a pezzi e le ipotesi del teorema di Gauss sono verificate (Ω ammissibile).

Osserviamo che, su Σ , la normale \mathbf{n}_e uscente da Ω punta verso l'esterno della regione delimitata da Σ stessa, mentre su ∂B_r punta *all'interno della palla*.

Applicando il teorema di Gauss abbiamo allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \\ &= \int \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e \, dS + \int \int_{\partial B_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e \, dS. \end{aligned}$$

Osservando ora che su ∂B_r il versore $-\mathbf{n}_e$ è la *normale uscente* da B_r e ricordando il calcolo di pag. 24, otteniamo

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = - \int \int_{\partial B_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e = \int \int_{\partial B_r} \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{n}_e) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Osservazione

La stessa legge (di Gauss) vale se Σ delimita una regione Ω dello spazio dove è presente una distribuzione continua di carica di densità $\rho(x, y, z)$:

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_e dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \int \int_{\Omega} \rho dx dy dz .$$

Esercizio

Usando il teorema della divergenza, ricavare la relazione

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 .$$

Equazione di continuità

Il moto di un fluido di densità $\rho(x, y, z, t)$ è descritto da un campo di velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$. Supponiamo che ρ e \mathbf{v} siano derivabili con continuità in \mathbb{R}^4 . Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una regione limitata occupata dal fluido e dove valgono le ipotesi del teorema della divergenza (una sfera, un cubo,...). La massa totale di fluido contenuta in Ω all'istante t è

$$M(t) = \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) \, dx dy dz .$$

La rapidità di variazione nel tempo della massa è allora

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) \, dx dy dz .$$

Si dimostra che se ρ e $\partial_t \rho$ sono continue in $\Omega \times [a, b]$, allora per ogni $t \in [a, b]$ vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) \, dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho(x, y, z, t) \, dx dy dz .$$

(Teorema di derivazione sotto il segno di integrale).

In assenza di sorgenti o pozzi in Ω , la velocità di variazione della massa contenuta in Ω è pari alla quantità di fluido che nell'unità di tempo esce o entra attraverso $\partial\Omega$, ovvero al *flusso del vettore* $\rho \mathbf{v}$.

Più precisamente, il flusso di $\rho \mathbf{v}$ *uscente* da $\partial\Omega$ sarà pari alla rapidità di *decrescita* di $M(t)$.

Deve valere allora la relazione (legge di conservazione della massa)

$$\int \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS = - \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho \, dx dy dz .$$

Applicando il teorema della divergenza, l'equazione diventa

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx dy dz = - \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho \, dx dy dz ,$$

Se ora Ω è una sfera di raggio r centrata in un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dividendo l'equazione per il volume di Ω e facendo il limite per $r \rightarrow 0$ si ottiene

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) = -\partial_t \rho(x, y, z, t) ,$$

ovvero l'**equazione di continuità**

$$\partial_t \rho(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) = 0 .$$

Teorema (del rotore o di Stokes)

Sia Σ una superficie regolare (a pezzi) orientata con versore normale \mathbf{n} .

Sia Γ il bordo della superficie, orientato positivamente e formato dall'unione di curve chiuse regolari a tratti.

Se $\Sigma \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e \mathbf{F} è un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, vale la formula

$$\int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Dunque, il flusso del *rotore del campo* \mathbf{F} attraverso Σ nella direzione \mathbf{n} è uguale alla circolazione di \mathbf{F} lungo Γ .

Osservazioni

- i) Se Σ è un dominio del piano xy con normale \mathbf{k} e frontiera orientata positivamente, si ritrova la formula di Gauss-Green;
- ii) Se Σ è chiusa (priva di bordo) la formula vale con il secondo membro nullo, cioè:
il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie *chiusa* è nullo.

Esempio

Verificare il teorema di Stokes nel caso della superficie

$$\Sigma = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0 \}$$

orientata con la normale \mathbf{n} tale che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$, e del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + x \mathbf{j} + yz \mathbf{k}.$$

Osserviamo che Σ si può parametrizzare sia con

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi, \quad (\phi, \theta) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi],$$

sia come superficie cartesiana

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D,$$

dove D è il disco di raggio unitario centrato nell'origine del piano.

In ogni caso, abbiamo che

$$\mathbf{n} = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})|_{\Sigma}$$

mentre il bordo Γ è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ ($z = 0$) percorsa in senso antiorario.

Poiché

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = z \mathbf{i} + (1 - x) \mathbf{k},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int \int_{\Sigma} [zx + (1 - x)z] \, dS = \int \int_{\Sigma} z \, dS = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

Parametrizzando il bordo Γ con le equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} xy \, dx + x \, dy + yz \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t \sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + 0] \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

Significato del rotore

Sia $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e sia $\Sigma_r = \Sigma_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ un disco piano di centro \mathbf{x}_0 , raggio r e versore normale \mathbf{n} . Orientiamo positivamente il bordo del disco Γ_r .

Applicando il teorema di Stokes e dividendo entrambi i termini per l'area $|\Sigma_r|$ ($= \pi r^2$) si ottiene

$$\frac{1}{|\Sigma_r(\mathbf{x}_0)|} \int \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS, = \frac{1}{|\Sigma_r(\mathbf{x}_0)|} \oint_{\Gamma_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

A sinistra abbiamo il valore medio sulla palla della funzione continua $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$; al tendere di r a zero, questa quantità tende a $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}$.

Dunque:

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|\Sigma_r(\mathbf{x}_0)|} \oint_{\Gamma_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

cioè la componente lungo \mathbf{n} di $\text{rot } \mathbf{F}$ in \mathbf{x}_0 rappresenta la *densità superficiale di circolazione* del campo \mathbf{F} intorno a \mathbf{n} in \mathbf{x}_0 .

Legge di Ampère.

La *circolazione del campo magnetico* \mathbf{H} lungo una linea chiusa Γ risulta uguale all'*intensità di corrente elettrica* che attraversa una qualsiasi superficie Σ che ha per bordo Γ .

Questa relazione (fenomenologica) si traduce nell'equazione

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Trasformando l'integrale a sinistra con il teorema di Stokes si ottiene

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Con argomenti già usati in precedenza, si ricava l'equazione

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{J}(x, y, z).$$

Esercizio

Sia $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto. Verificare che

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

Ricavare la stessa conclusione applicando i teoremi della divergenza e del rotore in ogni palla $B_r \subset \Omega$.