SISTEMI AUTONOMI : INTEGRALI PRIMI-STABILITA'

1. Si consideri il sistema conservativo a un grado di libertà descritto dall'equazione

$$y'' = -2y^3.$$

L'energia potenziale che soddisfa alla condizione $U(0) = 0$ è data dall'integrale

$$U(y) = -\int_0^y (-2s^3)ds = 2\int_0^y s^3 ds = \frac{1}{2}y^4.$$

Il grafico di U è rappresentato nella figura seguente

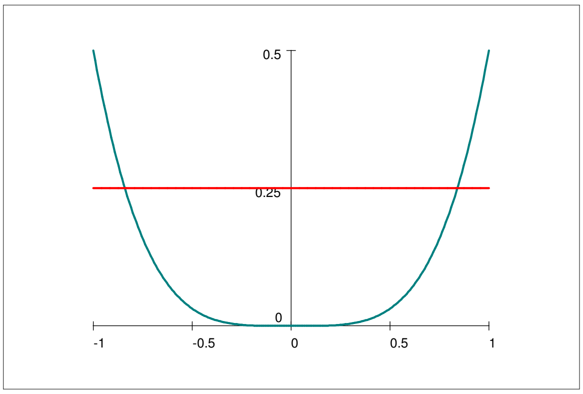


Grafico dell'energia potenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

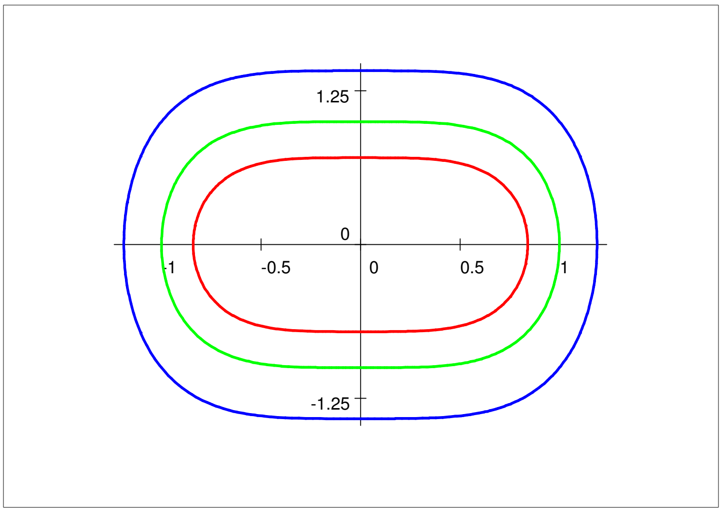
L'*energia meccanica* totale (energia cinetica più energia potenziale) è allora

$$E(y, y') = \frac{1}{2}[(y')^2 + y^4].$$

Verifichiamo che E è *costante sulle traiettorie del sistema* : se la funzione $t \mapsto \varphi(t)$ è soluzione dell'equazione, abbiamo

$$\frac{d}{dt}E(\varphi(t), \varphi'(t)) = \varphi'(t)\varphi''(t) + 2\varphi(t)^3\varphi'(t) = \varphi'(t)[\varphi''(t) + 2\varphi(t)^3] = 0, \ \forall t.$$

Quindi l'orbita nello spazio delle fasi definita da $t \mapsto (\varphi(t), \varphi'(t))$ è contenuta in una *curva di livello* della funzione E . Poichè tale funzione è somma di due quantità positive, ogni curva di livello è un insieme *limitato* del piano delle fasi per cui possiamo affermare *a priori* che φ e φ' sono funzioni *limitate* di t.
Dai teoremi di prolungamento (v. Pagani-Salsa 2, teorema **1.7** e corollario **1.8**) segue allora che la soluzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. Ogni curva di livello di E è semplice e chiusa, circonda l'origine (unico *punto di equilibrio* del sistema) e corrisponde a una *soluzione periodica* dell'equazione.
Nella figura sono rappresentate alcune traiettorie nello spazio delle fasi (y, y').



Traiettorie (orbite) nel piano delle fasi corrispondenti ai valori $E = \frac{1}{4}$, $E = \frac{1}{2}$, $E = 1$ ($y_1 = y$ in ascissa, $y_2 = y'$ in ordinata).
Le traiettorie si intendono percorse in senso orario.

2. Discutiamo la stabilità delle soluzioni di equilibrio del sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + xy \end{cases}$$

I punti di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - xy = 0 \\ -y + xy = 0 \end{cases}$$

Si ottengono due soluzioni: l'origine $(0,0)$ ed il punto $(1,1)$. Esaminiamo il *sistema linearizzato* nei due punti trovati. La matrice jacobiana del sistema è

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo che la matrice $\mathbf{J}(0,0)$ ha un autovalore positivo, per cui l'origine è instabile per il sistema linearizzato; in base alla teoria, tale soluzione è instabile anche per il sistema non lineare. La matrice $\mathbf{J}(1,1)$ ha autovalori $\pm i$; in questo caso il sistema linearizzato presenta un centro nell'origine (punto neutralmente stabile).

Per studiare la natura della soluzione di equilibrio $(1,1)$ del sistema non lineare, osserviamo che si tratta di un *sistema di Lotka-Volterra* che ammette come *integrale primo* la funzione

$$E(x,y) = -\log x + x - \log y + y$$

(verificare che la derivata di E lungo le traiettorie del sistema si annulla). La funzione di due variabili $E(x,y)$ è definita nel primo quadrante del piano x, y e ammette un *minimo globale nel punto* $(1,1)$ con valore $E(1,1) = 2$ (E tende a $+\infty$ se x o y tendono a zero oppure a $+\infty$). Allora la funzione $V(x,y) = E(x,y) - 2$ è una *funzione di Liapunov* per il sistema ed il punto di equilibrio è *neutralmente stabile*. Le curve di livello di equazione $E(x,y) = c$, con $c > 2$, sono curve chiuse e regolari che racchiudono il punto di equilibrio $(1,1)$. Le soluzioni $x(t)$, $y(t)$, del sistema sono quindi funzioni periodiche, con periodo dipendente da c.

3. Consideriamo il sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ -x - y^3 = 0 \end{cases}$$

si trova che l'origine è *l'unico* punto di equilibrio del sistema.

Verifichiamo che la funzione

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

è una *funzione di Liapunov* per il sistema. Abbiamo infatti:

i) $V(0,0 = 0$ e $V(x,y) > 0, \quad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$

ii) La derivata di V lungo una traiettoria $(x(t), y(t))$ del sistema soddisfa

$$\nabla V(x,y) \bullet (x'(t), y'(t)) \ = 2x(y - x^3) - 2y(x + y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$$

Inoltre, la derivata è strettamente negativa per $(x,y) \neq (0,0)$. Dunque, l'origine è *asintoticamente stabile* (v. Pagani-Salsa 2, teorema **3.7**).
Osserviamo che la funzione $V\ (x,y)$ rappresenta il quadrato della *distanza dall'origine* del punto (x,y) dello spazio delle fasi; il segno negativo della derivata significa allora che tale distanza, valutata su una traiettoria del sistema, *diminuisce al crescere del tempo*.

E’ interessante confrontare questi risultati con le conclusioni che si ottengono con il metodo di linearizzazione. Il sistema linearizzato intorno all’origine si scrive

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha autovalori immaginari $\lambda_1 = i,\ \lambda_1 = -i$, per cui l’origine risulta un *centro* (punto neutralmente stabile) per il sistema linearizzato.
In questo caso, i ritratti di fase in un intorno dell’origine del sistema non lineare e del sistema linearizzato *non* sono equivalenti.