Analisi Matematica 2

Esempi di temi d'esame

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \log |y| & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire in quali punti la funzione è continua e in quali è differenziabile.
b) Trovare i punti critici di g ed eventuali estremi locali.

2. Trovare il valore massimo e il valore minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xyz\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

3. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}_\lambda(x,y) = x\,\mathbf{i} + y(y^2 + \lambda\, x)\mathbf{j}$$

a) Verificare che la circolazione del campo vettoriale $\mathbf{F}_\lambda$ lungo tutte le circonferenze centrate nell'origine è nulla.
b) Trovare per quali valori di λ il campo $\mathbf{F}_\lambda$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e determinare un potenziale.
c) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}_\lambda$ lungo l'arco orientato di iperbole di equazione $xy = 2$ che va dal punto $(2,1)$ al punto $(1,2)$.

Soluzioni

1. *Continuità:* la funzione si può scrivere come $g(x,y) = xh(y)$, dove

$$h(y) = \begin{cases} y \log |y| & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{y \to 0} y \log |y| = 0$, la funzione h è continua in ogni punto; dunque la g, essendo il prodotto di funzioni continue (una della sola variabile x e una della sola y) è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
Differenziabilità: in tutti i punti con $y \neq 0$ la funzione è derivabile con continuità e dunque differenziabile. Esaminiamo ora i punti sull'asse $y = 0$. Poiché $g(x,0) = 0$ per ogni x, la derivata parziale rispetto ad x esiste in tutti i punti dell'asse e vale $g_x(x,0) = 0$. Derivata rispetto ad y:

$$\frac{g(x,k) - g(x,0)}{k} = x \ln |k|$$

Vediamo che il limite per $k \to 0$ non esiste finito, *tranne che nel caso* $x = 0$, in cui vale 0. Concludiamo che nei punti dell'asse x, tranne eventualmente l'origine, la funzione *non* è differenziabile. Esaminiamo la differenziabilità nell'origine. Applicando la definizione, consideriamo il quoziente:

$$\frac{g(h,k) - g(0,0) - g_x(0,0)h - g_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk \ln |k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Questa quantità è infinitesima per $(h,k) \to (0,0)$ perchè

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$$

e

$$k \ln |k| \to 0$$

Dunque, g è differenziabile in $(0,0)$. Poiché $\nabla g(0,0) = 0$, l'origine è un punto critico; osservando poi che $g(0,0) = 0$ e che g cambia di segno in *ogni* intorno dell'origine, concludiamo che si tratta di un punto di sella.

Per studiare i rimanenti punti critici calcoliamo, per $y \neq 0$,

$$\nabla g(x,y) = y \log |y| \, \mathbf{i} + x(\log |y| + 1) \, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \log |y| + 1 \\ \log |y| + 1 & x/y \end{pmatrix}$$

Il gradiente si annulla nei punti $(0,1)$ e $(0,-1)$; in entrambi i casi abbiamo $\det \mathbf{H}_g(0, \pm 1) = -1$, per cui si trovano altri due punti di sella.
Eventuali estremi locali vanno allora cercati tra i punti dove g non è differenziabile, cioè sull'asse $y = 0$ esclusa l'origine. Ma, ricordando che $g(x_0, 0) = 0$, segue ancora dallo studio del segno di g che non ci sono estremi locali sull'asse delle ascisse (si consideri, per ogni fissato $x_0 \neq 0$, la funzione $y \mapsto g(x_0, y)$ per y in un intorno dell'origine).

2. La funzione f è regolare in ogni punto di $\mathbb{R}^3$. Il massimo e il minimo di f esistono; infatti, ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abbiamo

$$|f(x,y,z)| \leq \rho^3 e^{-\rho^2} \to 0$$

per $\rho \to +\infty$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\nabla f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}[yz(1-2x^2)\,\mathbf{i} + xz(1-2y^2)\,\mathbf{j} + xy(1-2z^2)\,\mathbf{k}]$$

I punti critici sono i punti degli assi coordinati e gli otto punti che si ottengono in tutti i modi possibili per riflessione rispetto ai piani coordinati a partire dal punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Sugli assi abbiamo $f = 0$ e la funzione cambia segno in ogni intorno di tali punti, quindi si tratta di punti di sella. Per la simmetria della funzione, il massimo viene assunto nei quattro punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e ha il valore

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-3/2}$$

Il valore minimo è $-M$ e viene assunto nei rimanenti quattro punti critici.

3. Per ogni λ il campo $\mathbf{F}_\lambda$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$; le componenti sono funzioni regolari.

a) Detto R il raggio di una circonferenza centrata nell'origine la circolazione è

$$\oint \mathbf{F}_\lambda \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_\lambda(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t(R^2\sin^2 t + \lambda\, R\cos t)\,\mathbf{j}] \cdot (-R\sin t\,\mathbf{i} + R\cos t\,\mathbf{j}) dt$$

$$= -R^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt + R^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t (R^2 \sin^2 t + \lambda\, R\cos t)\, dt$$

$$= -R^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt + R^4 \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t\, dt + \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\, dt = 0.$$

b) La condizione

$$\partial_y\, x = \partial_x\, [y(y^2 + \lambda\, x)]$$

è necessaria e sufficiente perchè $\mathbf{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$. Dunque il campo è conservativo solo se $\lambda = 0$.

c) Il lavoro del campo lungo un qualunque cammino si può calcolare facilmente scrivendo

$$\mathbf{F}_\lambda(x,y) = \mathbf{F}_0(x,y) + \lambda\, xy\,\mathbf{j},$$

dove il campo

$$\mathbf{F}_0(x,y) = x\,\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$$

è conservativo e ha come potenziale

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4$$

L'arco orientato di iperbole si può rappresentare con l'equazione

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2}{t}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \qquad t \in [1,2]$$

Abbiamo allora

$$L = \int_1^2 \mathbf{F}_\lambda(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_1^2 \mathbf{F}_0(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt + \lambda \int_1^2 x(t) y(t)\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= U(1,2) - U(2,1) + \lambda \int_1^2 2\, dt = \frac{9}{4} + 2\lambda$$