LIMITI E CONTINUITÀ 18-3-2021

ESERCIZIO 1. Calcolare i seguenti limiti o stabilire che non esistono.

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2} = f(x,y)$$

Restringo $f(x;y)$ alle rette $y=mx$

$$g(x) = f(x;mx) = \frac{x^3-2xmx+m^2x^2}{x^2+m^2x^2} =$$

$$= \frac{x^{\cancel{3}\,1}-2\cancel{x^2}m+m^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} =$$

$$= \frac{x-2m+m^2}{1+m^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x - 2m + m^2}{1+m^2} = \frac{m^2 - 2m}{1+m^2} \quad \grave{e}$$

diverso $\forall m \Longrightarrow f$ non ammette limite per $(x;y) \to (0;0)$.

2) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} xy \log(x^2+y^2)$$

$$g(x) = f(x; mx) = mx^2 \log(x^2 + m^2x^2) =$$

$$= mx^2 \log[x^2(1+m^2)].$$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \longrightarrow$ non concludo che il limite sia nullo. Uso le coordinate polari: $(x = \rho\cos\theta\ ,\ y = \rho \operatorname{sen}\theta)$

$$|xy\log(x^2+y^2)| = |\rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\log\rho^2| =$$

$$= |\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \rho^2\log\rho^2| \leq |2\rho^2\log\rho| \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Rightarrow$ Il limite dato esiste ed è nullo.

NOTA: per dimostrare che $f(x;y) \longrightarrow L$ per $(x;y)\to(0;0)$ è sufficiente riuscire a dimostrare che $|f(\rho,\theta) - L| < g(\rho)$ NON C'È DIPENDENZA DA θ

3) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x \overbrace{\operatorname{sen} xy}^{\sim xy}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

se il limite c'è è nullo (restr. su assi)

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\ \rho\operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}}\right| < \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

OSS.: $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^2y|}{x^2} = \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$$

$$\left|\frac{\cancel{\rho^4}^{\,2}\operatorname{sen}^4\theta}{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta+\cancel{\rho^4}^{\,2}\operatorname{sen}^4\theta}\right|$$ non mi aiuta

- Restringo all'asse x $(y=0)$

$$g(x) = f(x,0) = 0 \rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

- Restringo all'asse y $(x=0)$

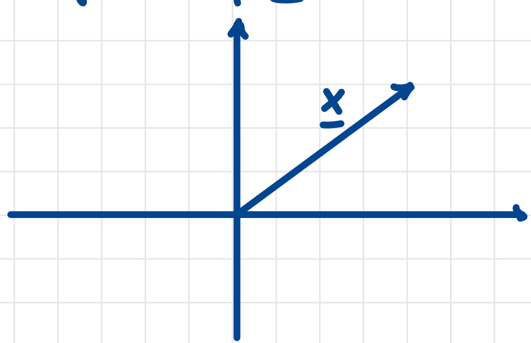
$$h(y) = f(0;y) = \frac{y^4}{y^4} = 1 \rightarrow \lim_{y\to 0} h(y) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste

perché su due restrizioni ho trovato due risultati diversi.

LIMITI IN $\mathbb{R}^n$ CON $|\underline{x}| \to \infty$

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita in tutto $\mathbb{R}^n$ o almeno per $|\underline{x}|$ abbastanza grande



- $\lim_{|\underline{x}|\to\infty} f(\underline{x}) = L \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ def

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ se $|\underline{x}| > R \implies$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

- $\displaystyle\lim_{|\underline{x}| \to \infty} f(x) = \pm\infty \overset{def}{\iff}$

$\forall K > 0 \ \exists R > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ |\underline{x}| > R \implies f(x) < -K$ v

$f(x) > K$

ESERCIZIO 2. Calcolare $\displaystyle\lim_{|(x;y)| \to \infty} xy e^{-(x^2+y^2)}$

SOL.

$$0 \leq \left| xy e^{-(x^2+y^2)} \right| = \left| \rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, e^{-\rho^2} \right| \leq \rho^2 e^{-\rho^2} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

$$\implies \lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y) = 0.$$

ESERCIZIO 2 bis. Calcolare $\lim_{|(x;y)| \to \infty} xy\, e^{x^2+y^2}$

Sol.

$$0 \leq \left| xy\, e^{x^2+y^2} \right| = \left| \rho^2 \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{\rho^2} \right| \leq \rho^2 e^{\rho^2} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} +\infty$$

Le coord. polari non mi aiutano:

- $y = x$

$$g_1(x) = f(x,x) = x^2 e^{2x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

- $y = 0$

$$g_2(x) = f(x;0) = 0 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$\neq$ $\Rightarrow$ non ha limite.

ESERCIZIO 3. Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{(x;y) \to (2;1)} \frac{(y-1)^2 \,\mathrm{sen}\, \pi x}{(x-2)^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{(x-2;\, y-1) \to (0;0) \\ x-2 = t,\ y-1 = s}} f(x,y) = \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2 \operatorname{sen}[\pi(2+t)]}{t^2+s^2} =$$

$x = t+2$

$$= \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2 \operatorname{sen}(2\pi + \pi t)}{t^2+s^2} = \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2 \overbrace{\operatorname{sen} \pi t}^{\sim \pi t}}{t^2+s^2}$$

$$= \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{\pi s^2 t}{t^2+s^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{\pi \rho \cos\theta \cancel{\rho^2} \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^2}} \right| \leq \pi \rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0 \implies$$ Il limite dato è nullo.

A CASA:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f_a(x,y) \quad \text{con}$$

$$f_a(x,y) = \frac{(x^2-2x+1)\,y}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$\left(\lim f_a(x,y) = 0 \quad \text{se} \quad a < \frac{3}{2} \right)$

CONTINUITÀ

ESERCIZIO 4. Stabilire se le seguenti funz. sono continue in $(0;0)$.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se } (x;y) = (0;0) \end{cases}$

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^4+y^2} - 0 \right| \leq \frac{|xy^2|}{y^2} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow f \text{ è continua}$$

2) $$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

- $y = x^2 \longrightarrow g_1(x) = f(x;x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$ #

• $y = -x^2 \longrightarrow g_2(x) = f(x; -x^2) = \dfrac{-x^4}{2x^4} = -\dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ il limite non esiste e f non è continua in $(0;0)$.

ESERCIZIO 5. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1) Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$
2) Stabilire se f è continua in

$$\mathbb{D} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \leq x \leq 1\}$$

SOL.

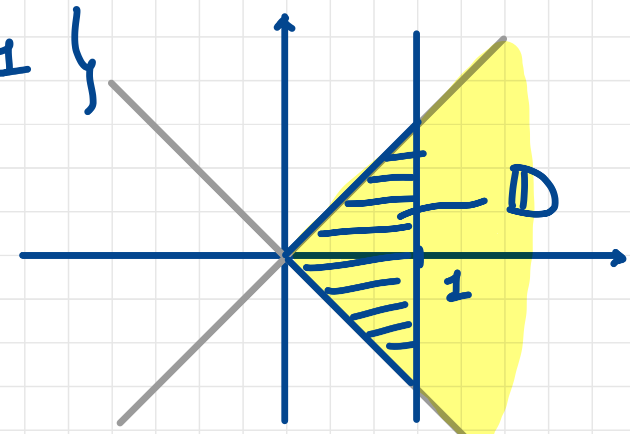
1) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$

- $y = 0 \longrightarrow g(x) = f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $x = y^2 \longrightarrow h(y) = f(y^2;y) = \frac{y^2}{y^2} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1$

$\Longrightarrow$ f non ha limite in $(0;0)$ $\Longrightarrow$ f non è continua in $(0;0)$.

2) $\mathbb{D} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |y| \le x \le 1 \}$

$\mathbb{D}: \begin{cases} x \ge |y| \\ x \le 1 \end{cases}$



$$0 \le f(x;y) = \frac{y^2}{x} \le \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\Longrightarrow$ f è continua in $\mathbb{D}$.

ESERCIZIO A CASA. Studiare la continuità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ \alpha & \text{se } (x;y) = (0,0) \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

DERIVATE PARZIALI

ESERCIZIO 6. Calcolare le derivate parziali della funzione assegnata nel punto a fianco indicato.

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} 2y \quad \text{in} \quad \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x \operatorname{sen} 2y\right) = \operatorname{sen} 2y$

  $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 2 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x \operatorname{sen} 2y\right) = 2x \cos 2y$

  $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Longrightarrow \nabla f\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = (1; 0)$$

Per calcolare tali derivate potevo usare anche le restrizioni:

$$f(x;y) = x \operatorname{sen} 2y \quad \text{in } \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = ?$

$$g(x) = f\left(x; \frac{\pi}{4}\right) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = x \longrightarrow g'(x) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = g'(0) = 1$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = ?$

$$h(y) = f(0;y) = 0 \cdot \operatorname{sen} y = 0 \longrightarrow h'(y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

ESERCIZIO 7. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ essendo

$$f(x;y) = \sqrt[3]{xy} = (xy)^{1/3}$$

SOL.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy)^{1/3} = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot y = \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{0}{0} \text{ ??}$$ INDET!! non posso procedere.

• CON LE RESTRIZIONI:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ? \qquad g(x) = f(x;0) = \sqrt[3]{0} = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x$$

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = g'(0) = 0$$

• CON LA DEFINIZIONE DI DERIVATA:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0;0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0$$

ESERCIZIO 8.

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

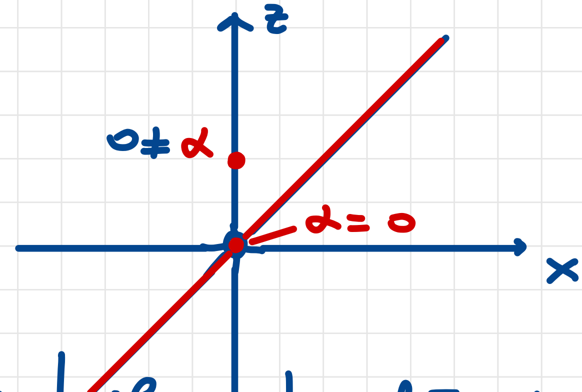
$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ \alpha & \text{se } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

è derivabile in $(0;0)$.

SOL. $f_x(0;0) = ?$

$$g(x) = f(x;0) = \begin{cases} x^3/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Se $\alpha \neq 0$ $g(x)$ non è derivabile perché non è nemmeno continua.

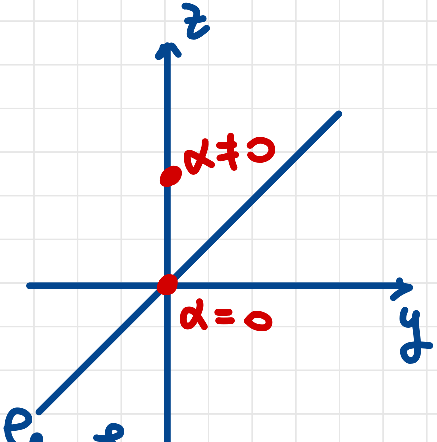
Se $\alpha = 0 \implies g(x) = x \implies g'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f_x(0,0) = g'(0) = 1$$

Esiste la derivata rispetto a x se e solo se $\alpha = 0$.

Analogamente si ha:

$$h(y) = f(0;y) = \begin{cases} y & \text{se } y \neq 0 \\ \alpha & \text{se } y = 0 \end{cases}$$



$$h'(y) = 1 \quad \text{se } \alpha = 0$$

Per $\alpha = 0$ la funzione è derivabile e
$$\nabla f(0;0) = (1;1)$$

ESERCIZIO 9. Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se } (x;y) = (0,0) \end{cases}$$

SOL.

CONTINUITÀ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

RESTRIZIONE ASSE x : $g_1(x) = f(x;0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\neq$

RESTRIZIONE $y = x$: $g_2(x) = f(x;x) = \frac{x^2}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f non è continua.

DERIVABILITÀ

• $g(x) = f(x;0) = \begin{cases} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$g(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g$ è derivabile

- $h(y) = f(0;y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

$h(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h$ è derivabile.

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0;0)$ pur non essendo ivi continua.

DIFFERENZIABILITÀ

ESERCIZIO 10. Verificare che la funzione

$$f(x;y) = |x| \ln(1+y)$$

è differenziabile nell'origine.

SOL.

f è differenziabile in (x_0, y_0) se:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$f_x(0,0) = g'(0) : \quad g(x) = f(x;0) = |x| \ln 1 = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$f_y(0,0) = h'(0) : \quad h(y) = f(0;y) = 0 \cdot \ln(1+y) = 0 \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - \cancel{f(0,0)} - \cancel{f_x(0,0)h} - \cancel{f_y(0,0)k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \ln(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \le \left| \frac{\cancel{\rho} \cos\theta \ln(1+\rho \sin\theta)}{\cancel{\rho}} \right| \le |\rho \sin\theta \cos\theta| \le \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Rightarrow f$ è differenziabile.

ESERCIZIO 11. Per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ il piano tangente al grafico di

$$z = f(x;y) = \operatorname{sen}(\alpha x + y^2)$$

nel punto $(\overset{x_0}{0}; \overset{y_0}{\sqrt{\pi}}; \overset{f(x_0,y_0)}{0})$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$. Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

SOL.

f è differenziabile in ogni suo punto perché è almeno C^1.

EQ. PIANO TG.:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f_x(x,y) = \alpha \cos(\alpha x + y^2) \longrightarrow f_x(0;\sqrt{\pi}) = \alpha \cos\pi = -\alpha$$

$$f_y(x,y) = 2y\cos(\alpha x + y^2) \longrightarrow f_y(0;\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$f(0;\sqrt{\pi}) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

$$P_{tg}: \ z = -\alpha(x-0) - 2\sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi})$$

$$z = -\alpha x - 2\sqrt{\pi}\,y + 2\pi$$

$$P_{tg}: \ \alpha x + 2\sqrt{\pi}\,y + z = 2\pi \qquad \underline{n} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\pi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = ? \quad P \parallel r: \begin{cases} x = y \\ y = 2z \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{d_r}}$$

$$P \parallel r \Longrightarrow \underline{d_r} \perp \underline{n} \Longleftrightarrow \underline{n} \cdot \underline{d_r} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\pi} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$2\alpha + 4\sqrt{\pi} + 1 = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{-4\sqrt{\pi} - 1}{2}}$$

$\alpha = ?\ \mathcal{P} \perp r \implies \underline{d_r} \parallel \underline{n}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\pi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dovrebbero essere proporzionali

$\Downarrow$

IMPOSSIBILE

$$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R} : \mathcal{P} \perp r$$