QUADRICHE - II parte

domenica 16 dicembre 2018 12:38

3. FORMA CANONICA DELLE QUADRICHE

Una **SUPERFICIE QUADRICA** o **QUADRICA** è il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione algebrica di secondo grado in x, y, z a coefficienti reali, quindi $F(x,y,z) = 0$ con:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) = {} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x \\
& + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y \\
& + a_{33}z^2 + 2a_{34}z \\
& + a_{44}
\end{aligned}
$$

Indicata con A la matrice dei coefficienti di F, possiamo scrivere:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}
$$

possiamo scrivere :

$$F(x,y,z) = (x,y,z,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anche per le quadriche, metteremo in evidenza i coefficienti dei termini quadratici chiamando B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e quindi $A = \left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}_T & a_{44} \end{array}\right]$ dove $\underline{c} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$

Indicato con $\underline{x}$ il vettore colonna delle coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, scriviamo l'equazione della quadrica $F(x,y,z) = 0$ come

$$F(\underline{x}) = (\underline{x}_T, 1)\, A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

oppure $$F(\underline{x}) = \underline{x}^T B \underline{x} + 2\underline{c}^T \underline{x} + a_{44} = 0$$

Come per le coniche, cerchiamo le "più semplici forme", alle quali è possibile arrivare con una rototraslazione del riferimento; sono queste le FORME CANONICHE che consentono un facile studio delle proprietà geometriche delle quadriche, oltre ad una loro classificazione.

QUADRICHE A CENTRO

Come per le coniche, cominciamo con lo studio delle quadriche con un centro di simmetria.

Attraverso una traslazione

$$\underline{x} = \underline{x}' + \underline{u} \quad , \text{ cioè } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

l'equazione della quadrica $F(\underline{x}) = 0$ viene trasformata in

$$x' B x' + 2x'(Bu + c) + u Bu + 2u c + a = 0$$

$$\circledast \qquad \underline{x}'^T B \underline{x}' + 2\underline{x}'^T (B\underline{u} + \underline{c}) + \underline{u}^T B \underline{u} + 2\underline{u}^T \underline{c} + a_{44} = 0.$$

La quadrica ha un centro di simmetria di coordinate $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$
rispetto al riferimento $RC(O, x, y, z)$
se e solo se
l'equazione $\circledast$ manca dei termini di primo grado, quindi
se e solo se
$B\underline{u} + \underline{c} = \underline{0}$.

Per l'unicità dell'eventuale centro di simmetria e per il Teorema di Cramer, possiamo allora concludere che la quadrica di equazione

$$(x, y, z, 1) \left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}^T & a_{44} \end{array} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

è una **QUADRICA A CENTRO** se e solo se $\det B \neq 0$
e le coordinate del centro di simmetria si ottengono dal sistema

$$[B|\underline{c}]\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\det B\neq 0$ significa $rk B=3$ e quindi, per quadrica a centro, possiamo avere solo i seguenti casi:

* $\det A\neq 0$, cioè quadrica non specializzata
* $\det A=0$ con $rkA=3$, cioè quadrica specializzata una sola volta. La quadrica è dunque un cono con vertice (al finito) nel centro di simmetria.

Per la nostra quadrica a centro di equazione

$$F(\underline{x})=\underline{x}_T B\underline{x}+2\underline{c}_T\underline{x}+a_{44}=0$$

dopo la traslazione che porta l'origine del sistema $RC(O',x',y',z')$ nel centro di simmetria della quadrica, abbiamo l'equazione

$$\underline{x}'_T B \underline{x}' + \delta = 0$$

dove $\delta = \underline{u}_T B \underline{u} + 2\underline{u}_T \underline{c} + a_{44}$ (mentre B non è variato).

Possiamo ora eliminare i termini rettangolari ortodiagonalizzando la matrice simmetrica B. Possiamo cioè individuare un nuovo sistema di riferimento cartesiano $RC(O'', x'', y'', z'')$ attraverso una isometria che porti gli assi di riferimento sugli assi di simmetria della quadrica.
La matrice B si trasforma quindi in B'' con

$$B'' = U_T B U = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$$

attraverso l'isometria $\underline{x}' = U \underline{x}''$, cioè $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$
dove U è ortogonale.
L'equazione della quadrica si trasforma quindi in

$$\alpha(x'')^2 + \beta(y'')^2 + \gamma(z'')^2 + \delta = 0$$

$$\alpha(x'')^2+\beta(y'')^2+\gamma(z'')^2+\delta=0$$

omettendo gli indici $(\,)''$ abbiamo dunque la semplice equazione

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0$$

con $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ (perché $\det B\neq 0$).

Abbiamo dunque che ogni quadrica a centro si riconduce alla FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA A CENTRO:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0 \qquad (\alpha\beta\gamma\neq 0)}$$

Studiamo i vari casi separando $\delta=0$ da $\delta\neq 0$

QUADRICHE A CENTRO SPECIALIZZATE

Nel caso $\delta=0$ la quadrica a centro è specializzata

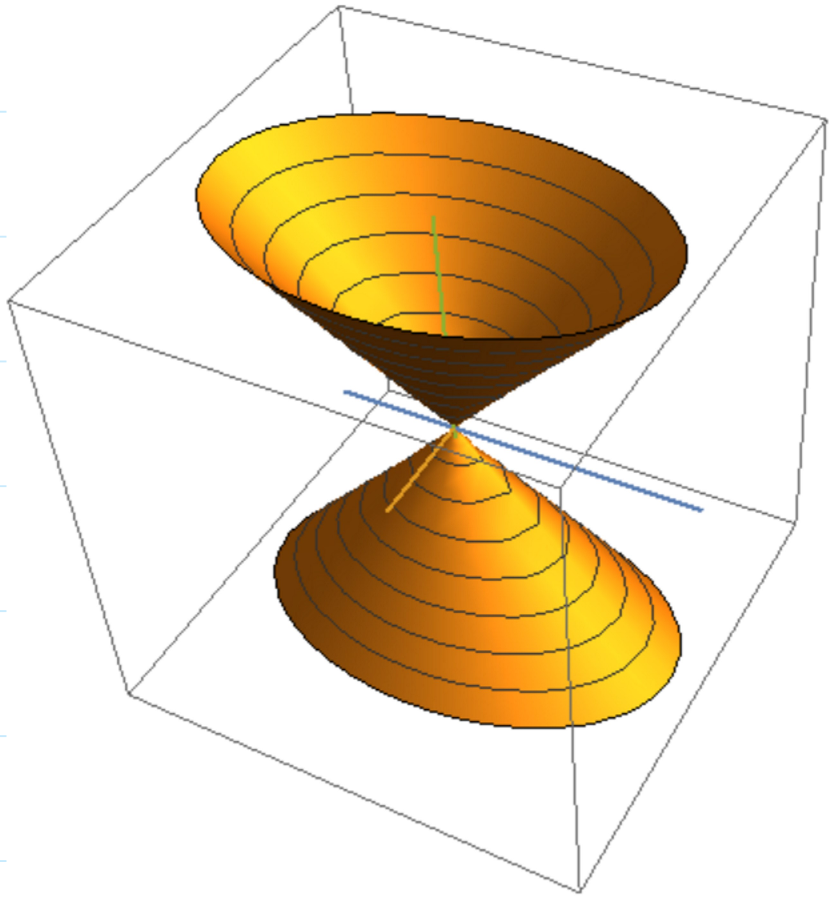
Nel caso $\delta = 0$ la quadrica a centro è specializzata una sola volta (cioè $rk A = 3$). Abbiamo quindi un cono con vertice nel centro di simmetria.
Classifichiamo queste quadriche a seconda dei segni di α, β, γ; i casi sono due:

	α β γ	FORMA CANONICA AFFINE	CLASSIFICAZIONE
I	+ + +	$x^2+y^2+z^2=0$	CONO IMMAGINARIO
II	+ + −	$x^2+y^2-z^2=0$	CONO REALE

I. Nel primo caso abbiamo un cono immaginario che ha un unico punto reale, il vertice.

II. Nel secondo caso abbiamo un cono reale la cui forma canonica (euclidea) è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



QUADRICHE A CENTRO NON SPECIALIZZATE

Con $\delta \neq 0$, possiamo riportarci ad una forma canonica del tipo

$$\bar{\alpha}x^2+\bar{\beta}y^2+\bar{\gamma}z^2=1$$

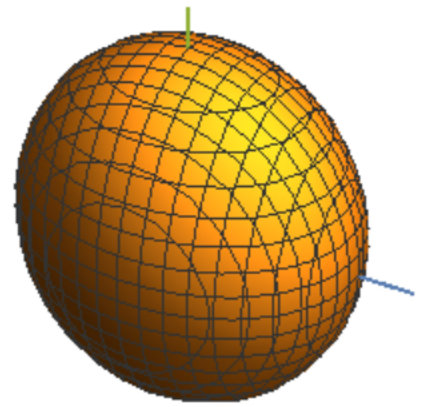
(NB: gli autovalori di B sono $\alpha=-\bar{\alpha}\delta$, $\beta=-\bar{\beta}\delta$, $\gamma=-\bar{\gamma}\delta$).
Studiamo la quadrica a seconda dei segni dei coefficienti e abbiamo i seguenti quattro casi

	α	β	γ	FORMA CANONICA AFFINE	CLASSIFICAZIONE
III	+	+	+	$x^2+y^2+z^2=1$	ELLISSOIDE REALE
IV	+	+	−	$x^2+y^2-z^2=1$	IPERBOLOIDE AD UNA FALDA
V	+	−	−	$x^2-y^2-z^2=1$	IPERBOLOIDE A DUE FALDE
VI	−	−	−	$-x^2-y^2-z^2=1$	ELLISSOIDE IMMAGINARIO

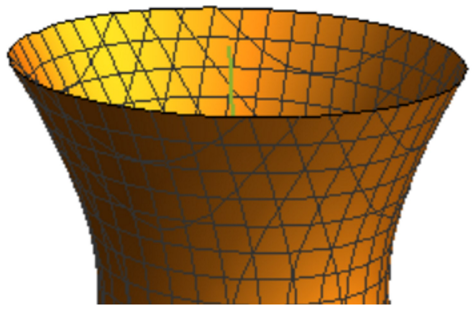
Dal punto di vista euclideo abbiamo quindi le seguenti forme canoniche

III. Ellissoide reale:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

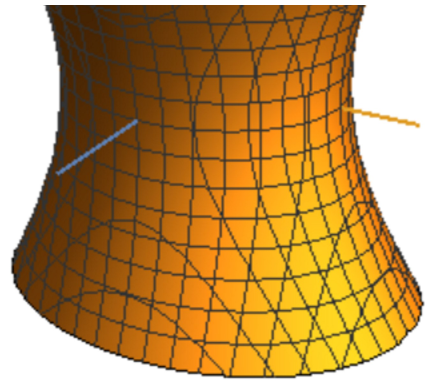


IV. Iperboloide ad una falda:



$$\frac{x^2}{}+\frac{y^2}{}-\frac{z^2}{}=1$$

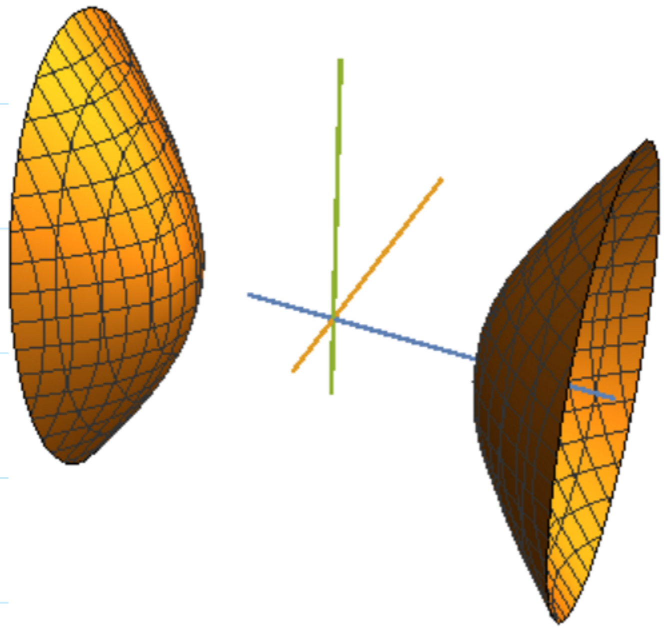
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



poiché l'iperboloide ad una falda è una quadrica non specializzata a punti iperbolici, questa viene anche detta IPERBOLOIDE IPERBOLICO

v. Iperboloide a due falde:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



l'iperboloide a due falde è detto anche IPERBOLOIDE ELLITTICO

vi. Ellissoide immaginario: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

QUADRICHE NON A CENTRO

Nel caso in cui la quadrica non sia a centro, iniziamo la nostra trasformazione con una isometria

$$\underline{x} = U\underline{x}', \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

che ci consenta di eliminare i termini rettangolari.
L'equazione della quadrica riferita al nuovo sistema $RC(O, x', y', z')$ sarà

$$\underline{x}'_T \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} \underline{x} \quad + 2\, \underline{s}_T U \underline{x} + a_{44} = 0$$

cioè $\quad \alpha (x')^2 + \beta (y')^2 + \gamma (z')^2 + 2\varepsilon x' + 2\zeta y' + 2\eta z' + a_{44} = 0,$

dove α, β, γ sono gli autovalori di B ortodiagonalizzata da U, mentre $(\varepsilon, \zeta, \eta) = (a_{14}, a_{24}, a_{34})U$.
Omettendo gli indici $(\,)'$ abbiamo dunque

Omettendo gli indici ( )' abbiamo dunque

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\varepsilon x+2\zeta y+2\eta z+a_{44}=0 \quad \text{con } \alpha\beta\gamma=0$$

Quando la quadrica non è a centro, studiamo i vari casi ordinati per rango di B

QUADRICHE CON $rkB=2$

Uno solo degli autovalori di B è nullo, diciamo $\gamma=0$ e $\alpha\beta\neq 0$.
Abbiamo

$$\alpha x^2+\beta y^2+2\varepsilon x+2\zeta y+2\eta z+a_{44}=0 \quad (\alpha\beta\neq 0)$$

quindi

$$\alpha\left[x^2+2\frac{\varepsilon}{\alpha}x+\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2\right]-\frac{\varepsilon^2}{\alpha}+\beta\left[y^2+2\frac{\zeta}{\beta}y+\left(\frac{\zeta}{\beta}\right)^2\right]-\frac{\zeta^2}{\beta}+2\eta z+a_{44}=0$$

$$\alpha\left[x+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right]^2+\beta\left[y+\frac{\zeta}{\beta}\right]^2+2\eta z+\vartheta=0 \quad \text{dove } \vartheta=a_{44}-\frac{\varepsilon^2}{\alpha}-\frac{\zeta^2}{\beta}$$

Con la traslazione $\begin{cases} x'=x+\varepsilon/\alpha \\ y'=y+\zeta/\beta \\ z'=z \end{cases}$ abbiamo

$$z' = z$$

6 FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA CON $rkB=2$

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\eta z + \vartheta = 0 \qquad (\alpha\beta \neq 0)}$$

QUADRICHE CON $rkB=2$ NON SPECIALIZZATE

Se $\eta \neq 0$, allora la quadrica $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\eta z + \vartheta = 0$ è non specializzata, infatti

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & \eta & \vartheta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det A = -\alpha\beta\eta^2.$$

Possiamo inoltre traslare ulteriormente, ponendo $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{\vartheta}{2\eta} \end{cases}$ e ottenendo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\eta z = 0$$

e quindi

$$\frac{\alpha}{-\eta} x^2 + \frac{\beta}{-\eta} y^2 - 2z = 0$$

$-2 \quad -2\,0$

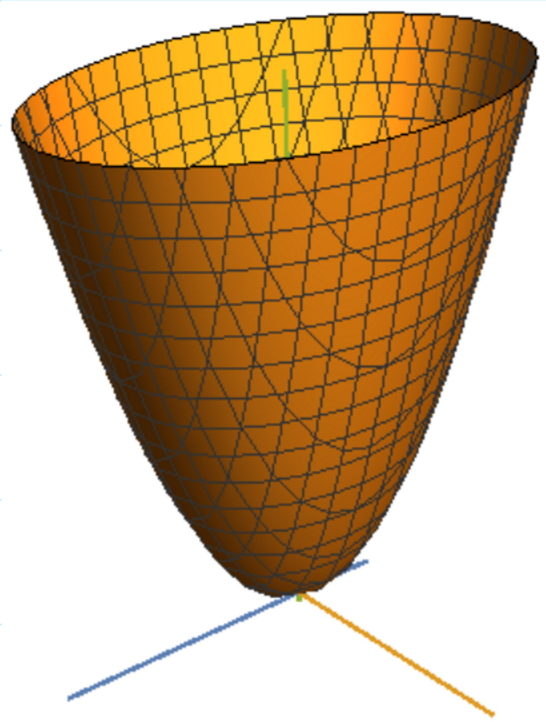
Come solito, classifichiamo le quadriche secondo i segni dei coefficienti

	$-\alpha/\eta$	$-\beta/\eta$	FORMA CANONICA AFFINE	CLASSIFICAZIONE
VII	$+$	$+$	$x^2+y^2-2z=0$	PARABOLOIDE ELLITTICO
VIII	$+$	$-$	$x^2-y^2-2z=0$	PARABOLOIDE IPERBOLICO

Dal punto di vista euclideo, abbiamo le seguenti forme canoniche:

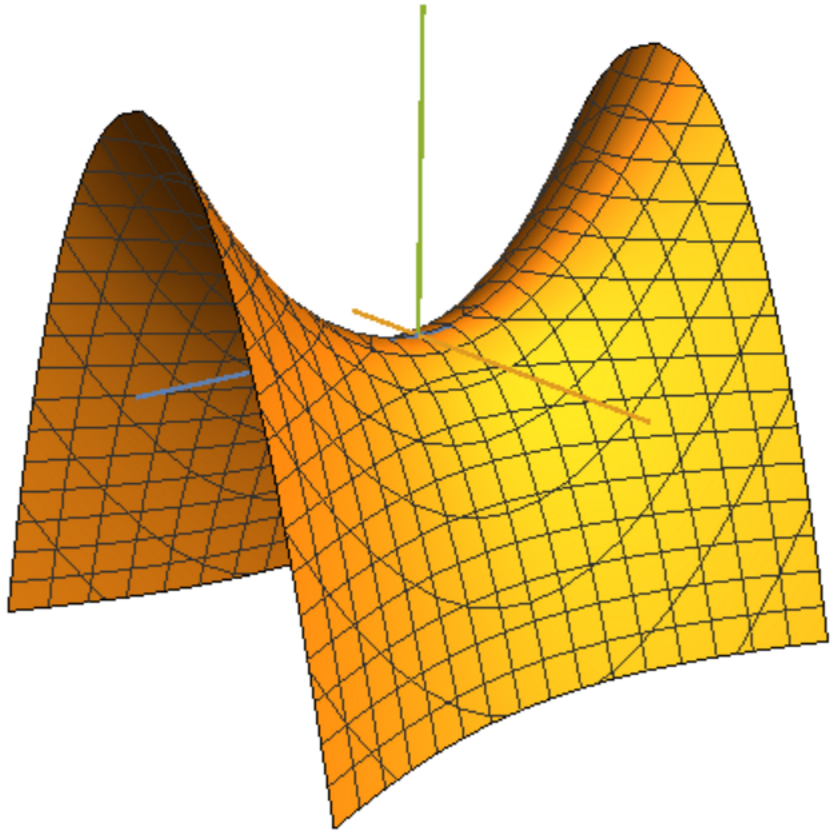
VII. Paraboloide ellittico:

$$2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



VIII. Paraboloide iperbolico:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



QUADRICHE CON $rkB=2$ SPECIALIZZATE

Se $\eta=0$, allora la quadrica $\alpha x^2+\beta y^2+\vartheta=0$ è specializzata,

infatti $A=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta \end{bmatrix}$ e $rkA = \begin{cases} 2 & \text{se } \vartheta=0 \\ 3 & \text{se } \vartheta\neq 0 \end{cases}$

Se $\vartheta=0$, allora la quadrica è specializzata due volte, cioè è spezzata in due piani

cioè è spezzata in due piani
- reali e distinti se $\alpha\beta<0$
- immaginari coniugati se $\alpha\beta>0$

Se $\vartheta\neq 0$, allora la quadrica è specializzata una sola volta e, non essendo a centro, è un cilindro.
Più precisamente:

IX. CILINDRO A SEZIONE ELLITTICA REALE: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

X. CILINDRO A SEZIONE ELLITTICA IMMAGINARIO: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

XI. CILINDRO A SEZIONE IPERBOLICA: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>oss</u>: i cilindri (e i coni) hanno punti semplici parabolici, quindi il nome spesso utilizzato "cilindro ellittico" o "cilindro iperbolico" va inteso come "cilindro a sezione ellittica

o "cilindro iperbolico" va inteso come "cilindro a sezione ellittica"
o "cilindro a sezione iperbolica"

<u>Oss.</u>: L'asse di simmetria è individuato dall'autospazio relativo all'autovalore nullo.

QUADRICHE CON $rkB = 1$

Uno solo degli autovalori di B è non nullo, diciamo $\alpha \neq 0$.
Abbiamo

$$\alpha x^2 + 2\varepsilon x + 2\zeta y + 2\eta z + a_{44} = 0 \qquad (\alpha\beta \neq 0)$$

quindi

$$\alpha\left[x^2 + 2\frac{\varepsilon}{\alpha}x + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2\right] - \frac{\varepsilon^2}{\alpha} + 2\zeta y + 2\eta z + a_{44} = 0$$

$$\alpha\left[x + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right]^2 + 2\zeta y + 2\eta z + \vartheta = 0 \qquad \text{dove } \vartheta = a_{44} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha}$$

Con la traslazione $\begin{cases} x' = x + \varepsilon/\alpha \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ abbiamo

6. FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA CON $rkB = 1$

6 FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA CON $rkB = 1$

$$\boxed{\alpha x^2 + 2\zeta y + 2\eta z + \theta = 0 \qquad (\alpha \neq 0)}$$

La matrice della quadrica (così trasforma) è dunque

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \zeta & \eta & \theta \end{bmatrix} \qquad \text{con } rkA = \begin{cases} 3 \\ \cancel{2} \\ 1 \end{cases}$$

se $\zeta = 0$ e $\eta = 0$, allora la quadrica ha equazione $\alpha x^2 + \theta = 0$ e risulta essere una coppia di piani paralleli

- coincidenti se $\theta = 0$
- distinti e reali se $\alpha\theta < 0$
- coniugati immaginari se $\alpha\theta > 0$

se $\zeta \neq 0$ o $\eta \neq 0$, allora $rkA = 3$ e la quadrica è dunque se $\zeta \neq 0$ o $\eta \neq 0$, allora $rk A = 3$ e la quadrica è dunque specializzata una volta. Non essendo a centro, si tratta di un cilindro. Con una rotazione attorno all'asse x che porti il piano $\zeta y + \eta z = 0$ sul piano $z = 0$, si trasforma l'equazione della quadrica in

$$\alpha x^2 + 2kz + d = 0$$

e con una successiva traslazione $z' = z + \frac{d}{2k}$ si ha la forma canonica del

XII. CILINDRO A SEZIONE PARABOLICA: $\quad 2z = \alpha x^2$

4. GLI INVARIANTI ORTOGONALI

Studiando come varia l'equazione di una quadrica per effetto di una isometria, si individuano i seguenti INVARIANTI ORTOGONALI:

INVARIANTI ORTOGONALI:

$$I_1 = \operatorname{tr} B = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \det B$$

$$I_4 = \det A$$

Come visto per le coniche, sono invarianti per isometrie il determinante di A (I_4) e il polinomio caratteristico di B (I_1, I_2, I_3)

Studiando le forme canoniche, si giunge alla seguente "tabella di riconoscimento" delle quadriche non spezzate attraverso gli invarianti

$I_3 \neq 0$	$I_4 > 0$	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$	ellissoide immaginario
		altrimenti	iperboloide ad una falda
	$I_4 < 0$	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$	ellissoide reale
		altrimenti	iperboloide a due falde
	$rkA = 3$	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$	cono immaginario
		altrimenti	cono reale
$I_3 = 0$	$I_4 > 0$		paraboloide iperbolico
	$I_4 < 0$		paraboloide ellittico
	$rkA = 3$	$I_2 > 0$	cilindro a sezione ellittica
		$I_2 < 0$	cilindro a sezione iperbolica
		$I_2 = 0$	cilindro parabolico

5. SISTEMI DI RETTE SULLE QUADRICHE

Le quadriche a punti iperbolici (iperboloide ad una falda e

Le quadriche di punti iperbolici (iperboloide ad una falda e paraboloide iperbolico) sono superfici (doppiamente) **RIGATE**.

L'equazione canonica dell'iperboloide ad una falda è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

quindi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$, cioè $\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$

di conseguenza le rette di equazioni

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b} \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, appartengono alla quadrica

L'equazione canonica del paraboloide iperbolico è

$$\frac{x^2}{\ } \quad \frac{y^2}{\ } = 2z$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

quindi $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z$

di conseguenza le rette di equazioni

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda \end{cases}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, appartengono alla quadrica

Queste due coppie di rette si chiamano SISTEMI DI GENERATORI

Si può provare che

1. Le quadriche a punti iperbolici ammettono due sistemi di generatori
2. Per ogni punto della quadrica passa un solo retta per

2. Per ogni punto della quadrica passa un sola retta per ciascun sistema (l'intersezione della quadrica con il piano tangente)

3. Due rette di sistemi diversi sono sempre incidenti, due rette dello stesso sistema sono sempre sghembe

Un discorso analogo può essere fatto per le quadriche

Un discorso analogo può essere fatto per le quadriche a punti parabolici (coni e cilindri):
le quadriche a punti parabolici ammettono un unico sistema di generatori; per ogni punto semplice della quadrica passa esattamente una retta del sistema.