Simulazione II prova intermedia (a.a. 2014/2015)

1. a) Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana γ (detta *astroide*) di equazione

$$\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \sin^3 t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Calcolare il volume del solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2,\ 0 \leq z \leq 2 - y - x^2\}.$$

2. Calcolare, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes, l'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, dove

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ z = y^2\}, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k},$$

e la curva ha orientazione anti-oraria se vista dall'alto.

3. a) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+3)^{2/3}}$$

e verificare che è integrabile termine a termine nell'intervallo $[-1, 0]$. La serie è anche derivabile termine a termine in $[-1, 0]$?

b) Sia f la funzione 2π-periodica definita da $f(x) = \cosh(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Sviluppare f in serie di Fourier e calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Soluzioni

1. a) La curva γ è chiusa e semplice (verifica immediata). Inoltre,

$$\mathbf{r}'(t) = -3\cos^2 t\,\sin t\,\mathbf{i} + 3\sin^2 t\,\cos t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

dunque la curva è regolare a tratti, dal momento che $\mathbf{r} \in C^1([0, 2\pi])$ e $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ quando $t \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Denotando con D la regione di piano (limitata) il cui bordo è γ e con F il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{2}\mathbf{i} + \frac{x}{2}\mathbf{j},$$

tramite la formula di Gauss-Green otteniamo

$$\mathrm{Area}(D) = \int_D dx\,dy = \int_D \mathrm{rot}\mathbf{F} dx\,dy = \int_{\partial^+ D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$

dunque

$$\mathrm{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-\sin^3 t, \cos^3 t) \cdot (-3\cos^2 t\,\sin t, 3\sin^2 t\,\cos t) dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]^2 dt = \frac{3}{8}\pi.$$

b) Notiamo che Ω è chiuso, limitato e normale rispetto al piano xy, ovvero, ponendo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$, si ha

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E,\ 0 \leq z \leq 2 - y - x^2\},$$

dunque possiamo procedere integrando "per fili":

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega dx\,dy\,dz = \int_E \left(\int_0^{2-y-x^2} dz\right) dx\,dy = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (2 - y - x^2) dy\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - 2x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{28}{15},$$

sfruttando il fatto che E è normale rispetto all'asse x.

2. La curva γ consiste nell'intersezione tra il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e il paraboloide $z = y^2$. Possiamo interpretare il sostegno di γ come il grafico della funzione $(x, y) \mapsto y^2$, definita sulla circonferenza nel piano xy di raggio 2 e centro nell'origine. Dunque, la curva è chiusa e semplice e può essere parametrizzata attraverso il sistema di coordinate cilindriche: posto $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, si ha $z(t) = y^2(t) = 4\sin^2 t$, dunque

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 4\sin^2 t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dal momento che

$$\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 8\sin t\cos t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

e $\mathbf{r}'(0) = 2\,\mathbf{j}$, la parametrizzazione rispetta l'orientazione richiesta.

Pertanto,

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi}(-4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 8e^{4\sin^2 t}\sin t\cos t)dt.$$

Notiamo che

$$\int_0^{2\pi} 8e^{4\sin^2 t}\sin t\cos t dt = \int_0^{2\pi} d\left(e^{4\sin^2 t}\right) = e^{4\sin^2(2\pi)} - 1 = 0$$

(in effetti, si mostra facilmente che il campo $\hat{\mathbf{F}}(x,y,z) = e^z\,\mathbf{k}$ è conservativo, dunque $\int_\gamma \hat{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T}\,ds = 0$ per ogni curva γ chiusa), da cui

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = -8\pi.$$

Sia ora $\Sigma_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\, z = y^2\}$. Essendo Σ_1 una superficie ammissibile per il teorema di Stokes, e $\partial\Sigma_1 = \gamma$, si ha

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \int_{\Sigma_1} \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

dove la normale $\mathbf{N}$ (di Σ_1) è orientata nel verso $\mathbf{k}$. Si può procedere nel calcolo dell'integrale a membro destro dell'uguaglianza sfruttando la parametrizzazione di Σ_1 data da

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u^2\sin^2 v\,\mathbf{k}, \quad (u,v)\in[0,2]\times[0,2\pi]$$

e $\mathrm{rot}\mathbf{F} = -2\mathbf{k}$.

<u>NOTA</u>. In alternativa, possiamo utilizzare il teorema della divergenza e l'identità $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$ per semplificare ulteriormente l'integrale. Denotiamo con $\Sigma_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4,\, 0\le z\le y^2\}$, $\Sigma_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\, z = 0\}$ ed $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\, 0\le z\le y^2\}$. Notiamo che $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, in particolare Σ_2 costituisce la "superficie laterale" di Ω, mentre Σ_1 e Σ_3 le due superfici "di base". La frontiera di Ω è in particolare regolare a pezzi e orientabile, dunque ammissibile per il teorema della divergenza, che implica

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_{\Sigma_1}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \int_{\Sigma_2}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \int_{\Sigma_3}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

da cui

$$\int_{\Sigma_1}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = -\int_{\Sigma_3}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}.$$

Il flusso di $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ_2 è in effetti nullo, dal momento che $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ è ovunque parallelo a $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{N}$ (di Σ_2) giace sul piano xy. Infine,

$$\int_{\Sigma_3}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_{\Sigma_3}(-2\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k})dS = 2\mathrm{Area}(\Sigma_3) = 8\pi,$$

essendo Σ_3 un disco di raggio 2 (e normale $-\mathbf{k}$).

3. a) La serie è di potenze, cioè $\sum_n a_n x^n$ con $a_n = (2n+3)^{-2/3}$. Vale

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n+3)^{-2/(3n)} = 1,$$

e dal criterio della radice il raggio di convergenza della serie è $R = 1$. La convergenza è dunque puntuale in $(-1, 1)$ e uniforme in $[-r, r]$ per ogni $r < 1$. In $x = 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^{2/3}} = \infty,$$

mentre in $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^{2/3}} < \infty,$$

utilizzando (facile verifica) il criterio di Leibniz. Il teorema di Abel garantisce che la convergenza uniforme si estende su $[-1, 0]$, quindi la serie converge uniformemente su tutti gli intervalli della forma $[-1, a]$, con $-1 < a < 1$. Siccome vi è convergenza uniforme su $[-1, 0]$ e $a_n x^n$ è integrabile su tale intervallo per ogni n, è possibile integrare termine a termine, cioè

$$\int_{-1}^{0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+3)^{2/3}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2n+3)^{2/3}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)^{2/3}}.$$

La serie non è derivabile termine a termine in $x = -1$, poichè la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)^{2/3}} x^{n-1}$$

non converge.

b) f è pari dunque i termini b_n della serie di Fourier sono tutti nulli. Poi, per simmetria,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi} e^x \cos nx \, dx$$

per ogni $n \geq 0$. Integrando due volte per parti $e^x \cos nx$, si ottiene

$$(1+n^2) \int_0^{\pm\pi} e^x \cos nx \, dx = e^{\pm\pi} \cos(\pm n\pi) - 1 = e^{\pm\pi}(-1)^n - 1,$$

dunque

$$a_n = \frac{2\sinh \pi}{\pi(1+n^2)} (-1)^n.$$

Notiamo che la serie di Fourier $a_0/2 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ converge totalmente su $[-\pi, \pi]$ per il criterio di Weierstrass. Difatti,

$$|a_n \cos nx| \leq \frac{2\sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$$

e la serie dei termini $(1+n^2)^{-1}$ converge. In particolare, la serie di Fourier converge a $f(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

Valutando lo sviluppo in serie di f in $x = \pi$, segue che

$$\cosh \pi = f(\pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2 \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} (-1)^n \cos n\pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(1+n^2)} \right),$$

da cui

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \coth \pi + 1.$$