Serie di Funzioni

Serie di potenze

Serie di potenze

Def: Una serie di potenze è una serie della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Lemma: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge per $x = x_1$ allora converge assolutamente per ogni $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$

Corollario: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ diverge per $x = x_1$ allora diverge per ogni $|x-x_0| > |x_1 - x_0|$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{|x-x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $x = x_0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|x-x_0| < R$ e diverge per $|x-x_0| > R$

Calcolo del raggio di convergenza

Lemma: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Lemma: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Esercizio: Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$R = \frac{1}{1} = 1$

Per $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente

Per $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ divergente

Quindi $R = 1$

Serie di potenze complesse

Def: Una serie di potenze complessa è una serie della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Lemma: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge per $z = z_1$ allora converge assolutamente per ogni $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

Corollario: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ diverge per $z = z_1$ allora diverge per ogni $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{|z-z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie di potenze. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $z = z_0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|z-z_0| < R$ e diverge per $|z-z_0| > R$

Esercizio: Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$R = \frac{1}{1} = 1$

Per $z = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente

Per $z = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ divergente

Quindi $R = 1$

Serie di Taylor

Def: Sia $f(x)$ una funzione C^∞ in $(x_0 - R, x_0 + R)$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ è la serie di Taylor di $f(x)$ centrata in x_0

Esercizio: Sviluppare $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 2$

$f^{(n)}(0) = n!$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Quindi $R = 1$

Esercizio: Sviluppare $f(x) = \sin(x)$ in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0$

Quindi $R = 0$

Esercizio: Sviluppare $f(x) = \cos(x)$ in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f''(x) = -\cos(x)$

$f'''(x) = \sin(x)$

$f^{(4)}(x) = \cos(x)$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$

Quindi $R = 0$

Esercizio: Sviluppare $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = \frac{-2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$

$f'''(x) = \frac{-6x(3-x^2)}{(1+x^2)^4}$

$f^{(4)}(x) = \frac{24(1-5x^2)}{(1+x^2)^5}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -2$

$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = 24$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

Quindi $R = 1$

Esercizio: Sviluppare $f(x) = \sqrt{1+x}$ in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16(1+x)^{7/2}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} x^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n! (2n-1)!!}{2^{n+1} (n+1)! (2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

Quindi $R = 0$

Serie di Taylor complesse

Def: Sia $f(z)$ una funzione C^∞ in $(z_0 - R, z_0 + R)$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ è la serie di Taylor di $f(z)$ centrata in z_0

Esercizio: Sviluppare $f(z) = \frac{1}{1-z}$ in serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{1}{1-z}$

$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$

$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 2$

$f^{(n)}(0) = n!$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Quindi $R = 1$

Esercizio: Sviluppare $f(z) = \sin(z)$ in serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$

$f(z) = \sin(z)$

$f'(z) = \cos(z)$

$f''(z) = -\sin(z)$

$f'''(z) = -\cos(z)$

$f^{(4)}(z) = \sin(z)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0$

Quindi $R = 0$

Esercizio: Sviluppare $f(z) = \cos(z)$ in serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$

$f(z) = \cos(z)$

$f'(z) = -\sin(z)$

$f''(z) = -\cos(z)$

$f'''(z) = \sin(z)$

$f^{(4)}(z) = \cos(z)$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$

Quindi $R = 0$

Esercizio: Sviluppare $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

$f'(z) = \frac{-2z}{(1+z^2)^2}$

$f''(z) = \frac{-2(1-3z^2)}{(1+z^2)^3}$

$f'''(z) = \frac{-6z(3-z^2)}{(1+z^2)^4}$

$f^{(4)}(z) = \frac{24(1-5z^2)}{(1+z^2)^5}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -2$

$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = 24$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

Quindi $R = 1$

Esercizio: Sviluppare $f(z) = \sqrt{1+z}$ in serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$

$f(z) = \sqrt{1+z}$

$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{1+z}}$

$f''(z) = \frac{-1}{4(1+z)^{3/2}}$

$f'''(z) = \frac{3}{8(1+z)^{5/2}}$

$f^{(4)}(z) = \frac{-15}{16(1+z)^{7/2}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} z^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n! (2n-1)!!}{2^{n+1} (n+1)! (2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

Quindi $R = 0$

Serie di Fourier

Serie di Fourier

Def: Una serie di Fourier è una serie della forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Lemma: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge per $x = x_1$ allora converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$

Corollario: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ diverge per $x = x_1$ allora diverge per ogni $x \in \mathbb{R}$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{x : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie di Fourier. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $x = 0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|x| < R$ e diverge per $|x| > R$

Calcolo del raggio di convergenza

Lemma: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie di Fourier. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Lemma: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie di Fourier. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Esercizio: Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$R = \frac{1}{1} = 1$

Per $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente

Per $x = \pi$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente

Quindi $R = 1$

Serie di Fourier complesse

Def: Una serie di Fourier complessa è una serie della forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

Lemma: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge per $x = x_1$ allora converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$

Corollario: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ diverge per $x = x_1$ allora diverge per ogni $x \in \mathbb{R}$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{x : \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ una serie di Fourier. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $x = 0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|x| < R$ e diverge per $|x| > R$

Serie di Laurent

Serie di Laurent

Def: Una serie di Laurent è una serie della forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Lemma: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge per $z = z_1$ allora converge assolutamente per ogni $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

Corollario: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ diverge per $z = z_1$ allora diverge per ogni $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{|z-z_0| : \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie di Laurent. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $z = z_0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|z-z_0| < R$ e diverge per $|z-z_0| > R$

Calcolo del raggio di convergenza

Lemma: Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie di Laurent. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Lemma: Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie di Laurent. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ allora $R = \frac{1}{L}$

Esercizio: Calcolare il raggio di convergenza di $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$R = \frac{1}{1} = 1$

Per $z = 0$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente

Per $z = 2$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ divergente

Quindi $R = 1$

Serie di Laurent complesse

Serie di Laurent complesse

Def: Una serie di Laurent complessa è una serie della forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Lemma: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge per $z = z_1$ allora converge assolutamente per ogni $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

Corollario: Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ diverge per $z = z_1$ allora diverge per ogni $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$

Def: Il raggio di convergenza è $R = \sup\{|z-z_0| : \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ converge}\}$

Teorema: Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ una serie di Laurent complessa. Allora:

- $R = 0$ se la serie converge solo per $z = z_0$
- $R = \infty$ se la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$
- $R > 0$ se la serie converge per $|z-z_0| < R$ e diverge per $|z-z_0| > R$