CONICHE

lunedì 10 dicembre 2018 14:34

Una **CONICA** è una curva piana del secondo ordine, cioè il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione polinomiale di secondo grado in x, y a coefficienti reali.

L'equazione $F(x,y)=0$ di una conica è dunque della forma

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e a_{11}, a_{12}, a_{22} non tutti nulli.

Indicata con A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere

$$F(x,y) = (x,y,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per mettere in evidenza i termini quadratici, indichiamo con B la matrice dei coefficienti di x^2, xy, y^2:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Scritto $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\underline{c} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}_T & a_{33} \end{array}\right]$$

e quindi

$$F(x,y) = (x,y,1) \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x,y)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33}$$

$$= \underbrace{\underline{x}^T B \underline{x}}_{\text{Termini II grado}} + \underbrace{2\underline{c}^T\underline{x}}_{\text{Termini I grado}} + \underbrace{a_{33}}_{\text{Termine noto}}$$

Quando il polinomio $F(x,y)$ è il prodotto di due polinomi di primo grado (eventualmente complessi coniugati), la conica di equazione $F(x,y)=0$ è l'unione di due rette (eventualmente complesse coniugate). La conica si spezza quindi nel "prodotto di rette" e viene detta DEGENERE o SPEZZATA.

Diciamo che la conica è in FORMA NORMALE o CANONICA quando la sua equazione è del tipo

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\alpha x^2 = 2\gamma y} \quad (\beta y^2 = 2\gamma x)$$

__Esercizio__: fare una classificazione affine delle coniche in forma normale; fare cioè una classificazione che tenga conto solo del segno e/o della nullità dei coefficienti α, β, γ.

Vogliamo mostrare che, data una conica, è sempre possibile individuare un nuovo sistema di riferimento cartesiano rispetto cui la nostra conica sia in forma normale.

Qual è l'effetto di una isometria (cambio di sistema di riferimento cartesiano) sulla matrice della conica?

* Se l'isometria è una traslazione

$$\underline{x} = \underline{x}' + \underline{u}, \text{ cioè } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{cases} x = x' + u_x \\ y = y' + u_y \end{cases}$$

$\underline{x} = \underline{x}' + \underline{u}$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x = x' + u_x \\ y = y' + u_y \end{cases}$

allora, sostituendo in $\underline{x}_T B \underline{x} + 2\underline{c}_T \underline{x} + a_{33}$ abbiamo

$(\underline{x}'_T + \underline{u}_T) B (\underline{x}' + \underline{u}) + 2\underline{c}_T (\underline{x}' + \underline{u}) + a_{33} =$

$= \underline{x}'_T B \underline{x}' + \underline{x}'_T B \underline{u} + \underline{u}_T B \underline{x}' + \underline{u}_T B \underline{u} + 2\underline{c}_T \underline{x}' + 2\underline{c}_T \underline{u} + a_{33}$

B simmetrica! $\underline{x}'_T B \underline{u} = \underline{u}_T B \underline{x}'$

$= \underbrace{\underline{x}'_T B \underline{x}'}_{B'} + 2\underbrace{(\underline{u}_T B + \underline{c}_T)}_{\underline{c}'_T} \underline{x}' + \underbrace{\underline{u}_T B \underline{u} + 2\underline{c}_T \underline{u} + a_{33}}_{a'_{33}}$

Detta $A' = \left[\begin{array}{c|c} B' & \underline{c}' \\ \hline \underline{c}'_T & a'_{33} \end{array}\right]$ la matrice della conica riferita al sistema $RC(O', x', y')$ che ha l'origine O' nel punto di coordinate $\underline{u}$ rispetto al riferimento $RC(O, x, y)$, abbiamo

$$\boxed{\begin{cases} B' = B \\ \underline{c}' = B\underline{u} + \underline{c} \\ a'_{33} = \underline{u}_T B \underline{u} + 2\underline{c}_T \underline{u} + a_{33} \end{cases}}$$

EFFETTO DI UNA TRASLAZIONE

* Se l'isometria è lineare $\underline{x} = U\underline{x}'$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ con U matrice ortogonale, allora

$\underline{x}_T B \underline{x} + 2\underline{c}_T \underline{x} + a_{33} =$

$= (\underline{x}'_T U_T) B (U\underline{x}') + 2\underline{c}_T U \underline{x}' + a_{33}$

$= \underline{x}'_T \underbrace{(U_T B U)}_{B'} \underline{x}' + 2\underbrace{(\underline{c}_T U)}_{\underline{c}'_T} \underline{x}' + \underbrace{a_{33}}_{a'_{33}}.$

Detta $A' = \left[\begin{array}{c|c} B' & \underline{c}' \\ \hline \underline{c}'_T & a'_{33} \end{array}\right]$ la matrice della conica riferita al sistema $RC(O, x', y')$ i cui assi sono individuati dai versori che sono le colonne di U, abbiamo

$B' = U_T B U$ ...

che sono le colonne di U, abbiamo

$$\boxed{\begin{cases} B' = U_T B U \\ \underline{c}' = U_T \underline{c} \\ a'_{33} = a_{33} \end{cases}}$$

EFFETTO DI UNA ISOMETRIA LINEARE

Osserviamo infine che la generica isometria (isometria lineare + traslazione) può essere scritta nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \underline{x} = U\underline{x}' + \underline{u}$$

ovvero
$$\underline{x} = [U|\underline{u}] \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi
$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} U & \underline{u} \\ \hline \underline{0}_T & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

o anche
$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad P = \left[\begin{array}{c|c} U & \underline{u} \\ \hline \underline{0}_T & 1 \end{array}\right]$$

NB: U è una matrice ortogonale, mentre P, in generale, non lo è; tuttavia $\det P = 1 \cdot \det U = \pm 1$ (a seconda che U rispetti o meno l'orientazione del sistema)

L'equazione $(\underline{x}_T|1)\, A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ viene dunque trasformata in

$$(\underline{x}_T'|1)\, P_T A P \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

per effetto dell'isometria $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$.

Possiamo dunque concludere che

TEOREMA Sia $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$ con $P = \left[\begin{array}{c|c} U & \underline{u} \\ \hline \underline{0}_T & 1 \end{array}\right]$ (U ortogonale)

una isometria del piano che trasformi il riferimento cartesiano $RC(O', x', y')$ in $RC(O, x, y)$.

Fissata una conica, siano

cartesiano $RC(O;x',y')$ in $RC(O,x,y)$.
Fissata una conica, siano

$$A=\left[\begin{array}{c|c} B & c \\ \hline c_T & a_{33} \end{array}\right] \quad e \quad A'=\left[\begin{array}{c|c} B' & c' \\ \hline c'_T & a'_{33} \end{array}\right]$$

le matrici della conica riferita rispettivamente a $RC(O,x,y)$ e a $RC(O',x',y')$.
Risultano:

① $A' = P_T A P$

② $B' = U_T B U$

In particolare, dalla congruenza ① abbiamo

1.1 $rk A' = rk A$

1.2 $\det A' = \det A$

mentre dalla similitudine (NB: $U_T = U^{-1}$) ② abbiamo

2.1 $rk B' = rk B$

2.2 $\det B' = \det B$

2.3 $tr B' = tr B$

ESERCIZIO: provare le affermazioni 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3.

LA RETTA TANGENTE. PUNTI SEMPLICI E PUNTI DOPPI. CENNI

Una retta interseca una conica in al più due punti; diciamo che la retta è TANGENTE quando interseca la conica in due punti reali coincidenti.
Un punto P di una conica viene detto PUNTO SEMPLICE quando il fascio di rette per P contiene una sola retta tangente alla conica, cioè una retta che intersechi la conica in due punti sovrapposti in P. Altrimenti il punto P viene detto PUNTO SINGOLARE o PUNTO DOPPIO.
Si può dimostrare (dimostrazione omessa) che un punto $P(x_P, y_P)$ della

il punto P viene detto PUNTO SINGOLARE o PUNTO DOPPIO.

Si può dimostrare (dimostrazione omessa) che un punto $P(x_P, y_P)$ della conica è singolare se e solo se $(x_P, y_P, 1)A = (0,0,0)$. Inoltre per ogni punto semplice vale la regola dello sdoppiamento, cioè

TEOREMA Se $P(x_P, y_P)$ è un punto semplice della conica di equazione $(\underline{x}_T, 1)\, A \begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix} = 0$, allora la retta tangente alla conica per P ha equazione

$$(x_P, y_P, 1)\, A \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0$$

CONICHE DEGENERI E PUNTI DOPPI. CENNI

Si può dimostrare (ma qui non lo faremo) il seguente

TEOREMA: La conica di equazione

$$(\underline{x}_T, 1)\, A \begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix} = 0$$

è degenere se e solo se $\det A = 0$

Inoltre: se $rk A = 3$, la conica non ha punti singolari;

se $rk A = 2$, la conica ha un solo punto doppio (eventualmente "all'infinito") e si spezza in due rette distinte; se le rette sono incidenti, allora il loro punto di intersezione è l'unico punto doppio; se invece le rette sono parallele, la loro direzione individua un punto doppio "all'infinito";

se $rk A = 1$, la conica si spezza in una retta di punti doppi contata due volte.

ESEMPIO: La conica di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ è una circonferenza (evidentemente) non degenere. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $P(x_0, y_0)$ è un punto della circonferenza, allora la tangente per P

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se $P(x_P, y_P)$ è un punto della circonferenza, allora la tangente per P alla conica ha equazione

$$(x_P, y_P, 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $$(x_P - 1, y_P + 1, -x_P + y_P)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_P - 1)x + (y_P + 1)y - x_P + y_P = 0$$

$$x_P x + y_P y - (x + x_P) + (y + y_P) = 0$$

ESEMPIO: $x^2 - y^2 = 0$ è l'equazione di una conica spezzata nel prodotto $(x+y)(x-y) = 0$ di due rette $r: x+y=0$ e $s: x-y=0$ che si intersecano nell'origine.

Ogni retta di equazione $y = mx$ (o anche $x=0$), purché diversa dalle rette r, s interseca la conica in due punti sovrapposti in O, infatti

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad x^2 - m^2x^2 = 0 \qquad x^2(1 - m^2) = 0$$

e purché $1 - m^2 \neq 0$, si ha $x^2 = 0$, dunque una doppia soluzione $x = 0$, e quindi un punto doppio in O.

ESEMPIO La conica $x^2 + y^2 = 0$ ha come matrice dei coeff. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Il rango di A è $rkA = 2$ e la conica si spezza nel prodotto di due rette complesse coniugate

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = 0$$

ESEMPIO La conica $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0$ ha come matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Il rango di A è $rkA = 2$ e la conica si spezza nel prodotto di rette distinte, infatti:

prodotto di rette distinte, infatti:

$$x^2+y^2-2xy+2x-2y = (x-y)^2+2(x-y) = (x-y)(x-y+2)$$

Le rette distinte sono parallele.

ESEMPIO La conica $x^2+y^2-2xy+2x-2y+1=0$ ha matrice $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$.

Il rango di A è $\operatorname{rk}A=1$ e la conica si spezza in una retta reale contata due volte, infatti:

$$x^2+y^2-2xy+2x-2y+1 = (x-y+1)^2$$

1. CONICHE A CENTRO

Cerchiamo di trovare, se esiste, un centro di simmetria per la conica di equazione $F(x,y) = (\underline{x}_T|1)\left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}_T & a_{33}\end{array}\right]\begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix}=0$.

Osserviamo che esiste un centro di simmetria (necessariamente unico) esiste se e solo se, pur di farlo diventare l'origine del sistema di riferimento, accade che l'equazione non cambia se si sostituisce x con $-x$ e y con $-y$.

Indicata quindi con $G(x',y') = (\underline{x}'_T,1)\left[\begin{array}{c|c} B' & \underline{c}' \\ \hline \underline{c}'_T & a_{33}\end{array}\right]\begin{pmatrix}\underline{x}'_T\\1\end{pmatrix}=0$

l'equazione della conica riferita, dopo una traslazione, a un sistema $RC(O',x',y')$ che abbia origine nel centro di simmetria O', dovrà risultare

$$G(-x',-y') = G(x',y');$$

dovranno cioè mancare i termini di primo grado, dunque dovrà essere $\underline{c}'=\underline{0}$.

Ricordando che per effetto di una traslazione $\underline{x}=\underline{x}'+\underline{u}$ si ha

$$\underline{c}' = B\underline{u}+\underline{c},$$

abbiamo che esiste un (unico) centro di simmetria di coordinate $\underline{u}$ se e solo se il sistema lineare

$$B\underline{u}+\underline{c}=\underline{0}$$

ammette un'unica soluzione, dunque, per il Teorema di Cramer, se e solo se $\det B \neq 0$.

Riepilogando, abbiamo provato il seguente

TEOREMA La conica di matrice $A=\left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}^T & a_{33}\end{array}\right]$ ha un centro di simmetria O' se e solo se $\det B = 0$.

Il vettore delle coordinate di O' è dato dall'unica soluzione del sistema

$$\left[B \mid \underline{c}\right]\begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix}=\underline{0}.$$

Si dice CONICA A CENTRO una conica con $\det B\neq 0$; altrimenti la conica è detta NON A CENTRO.

ESEMPIO La circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+2y=0$ è (evidentemente) una conica a centro. La matrice dei coeff. è

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ \hline -1 & 1 & 0\end{array}\right] \quad \text{con} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ritroviamo dunque che $\det B\neq 0$ e il centro ha coordinate date dalla soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

cioè $\begin{cases} x \quad -1=0\\ y+1=0\end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$

Con la traslazione $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases}x=x'+1\\ y=y'-1\end{cases}$

"portiamo" il centro nell'origine:

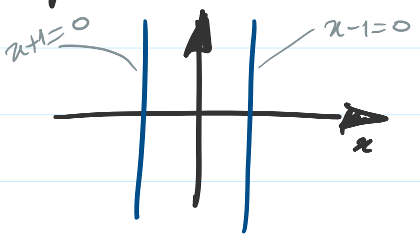
"portiamo" il centro nell'origine:

$$x^2+y^2-2x+2y = (x'+1)^2+(y'-1)^2-2(x'+1)+2(y'-1)$$
$$= x'^2+1+2x'+y'^2+1-2y'-2x'-2+2y'-2$$
$$= x'^2+y'^2-2$$

ESEMPIO Le coniche degeneri $x^2+y^2=0$ e $x^2-y^2=0$ sono a centro.

ESEMPIO La conica $x^2-1=0$ non è a centro perché $A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ e $\det B=0$.

Osserviamo che ($\mathrm{rk} A=2$ e) la conica si spezza nel prodotto di due rette parallele: $x^2-1=(x+1)(x+1)$.



La conica presenta un'infinità di punti di simmetria: tutti i punti dell'asse $x=0$.

La conica è classificata come "non a centro" in quanto manca dell'unicità del centro di simmetria.

ESEMPIO La parabola $y=x^2$ è una conica non a centro.

ESEMPIO La conica la cui matrice è $A=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -1 & -6 \end{array}\right]$ è a centro perché $\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$. Le coordinate del centro di simmetria sono date dalla soluzione del sistema lineare

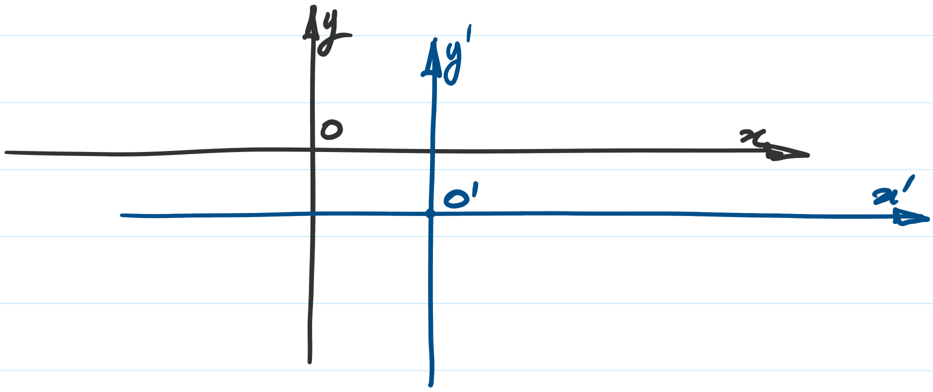
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{cases} 2y+2=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

L'equazione $4xy+3y^2+4x-2y-6=0$ si trasforma in $4x'y'+3y'^2-1=0$ per effetto della traslazione

$$\begin{cases} x=x'+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

che porta l'origine del riferimento cartesiano $RC(O', x', y')$ nel centro di simmetria della conica.



RIDUZIONE A FORMA CANONICA DI UNA CONICA A CENTRO.

Consideriamo una conica a centro riferita al suo centro, quindi una conica di equazione

$$F(x,y) = (x, y, 1)\left[\begin{array}{c|c} B & \underline{0} \\ \hline \underline{0}_T & -\gamma \end{array}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{x}_T B \underline{x} - \gamma = 0$$

Ci chiediamo se esistono assi di simmetria per la conica. Un asse di simmetria esiste se e solo se, fatto diventare con un'isometria lineare $\underline{x} = U\underline{x}'$ il nuovo asse delle ascisse x', la nuova equazione della conica $G(x', y') = 0$ non cambia sostituendo $-y'$ a y'. In termini analitici, l'equazione

$$G(x', y') = (x', y', 1)\left[\begin{array}{c|c} U_T B U & \underline{0} \\ \hline \underline{0}_T & \gamma \end{array}\right]\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{x}'_T U_T B U \underline{x}' - \gamma = 0$$

deve mancare dei termini rettangolari $x'y'$.
Abbiamo dunque che la conica a centro ha un asse di simmetria se e solo se la matrice simmetrica B è ortogonalmente diagonalizzabile. Ricordando il Teorema

ortogonalmente diagonalizzabile. Ricordando il Teorema Spettrale, abbiamo il seguente risultato:

TEOREMA Ogni conica a centro ha due assi di simmetria ortogonali. Nel caso in cui gli autovalori di B siano distinti, gli assi di simmetria sono le rette passanti per il centro di simmetria e con le direzioni degli autospazi. Nel caso in cui gli autovalori di B siano uguali, ogni retta per il centro di simmetria è un asse di simmetria.

Ortodiagonalizzando B attraverso una matrice ortogonale U, indicati con α e β gli autovalori di B, abbiamo

$$G(x',y') = (x',y',1)\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & -\gamma\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix} = \alpha x'^2 + \beta y'^2 - \gamma = 0$$

Dunque, omettendo gli indici, abbiamo che ogni conica a centro può essere trasformata attraverso una isometria nella forma canonica

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \qquad (\alpha, \beta \text{ autovalori di } B)$$

Poiché $\det B = \det({}^tUBU) = \alpha\beta$ e la conica è a centro, α, β sono entrambi non nulli.

Se $\gamma = 0$, allora l'equazione diventa $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ e la conica si spezza nel prodotto di due rette distinte e incidenti, reali se $\alpha\beta < 0$, immaginarie coniugate se $\alpha\beta > 0$

Se $\gamma \neq 0$, dividiamo per γ e otteniamo l'equazione

$$\frac{\alpha}{\gamma}x^2 + \frac{\beta}{\gamma}y^2 = 1$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}x^2+\frac{\beta}{\gamma}y^2=1$$

che rappresenta coniche diverse a seconda dei segni di α/γ e β/γ.

Scrivendo $a^2=|\gamma/\alpha|$ e $b^2=|\gamma/\beta|$ abbiamo i seguenti casi:

	α/γ	β/γ	FORMA CANONICA	CLASSIFICAZIONE
I	+	+	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	ELLISSE REALE
II	+	−	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	IPERBOLE
III	−	+	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	IPERBOLE
IV	−	−	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	ELLISSE IMMAGINARIA

Osserviamo che la conica risulta essere una ellisse (a punti immaginari o reali) nei casi in cui α e β siano concordi, cioè $\det B>0$.
Mentre la conica è una iperbole nei casi in cui α e β siano discordi, cioè $\det B<0$.

ESEMPIO Studiamo la conica di equazione $4xy+3y^2+4x+2y-6=0$.
Abbiamo già visto che la conica ha centro di simmetria in

$$O'(2,-1)$$

e che la traslazione

$$(T)\quad \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases}$$

trasforma l'equazione in

$$4x'y'+3y'^2-1=0.$$

Poiché $\det B=\det\begin{bmatrix}0&2\\2&3\end{bmatrix}=-4<0$, la conica è una iperbole. Gli autovalori di B sono

Poiché $\det B = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -4 < 0$, la conica è una iperbole. Gli autovalori di B sono

$$\alpha = 4 \quad e \quad \beta = -1$$

quindi la conica ha equazione

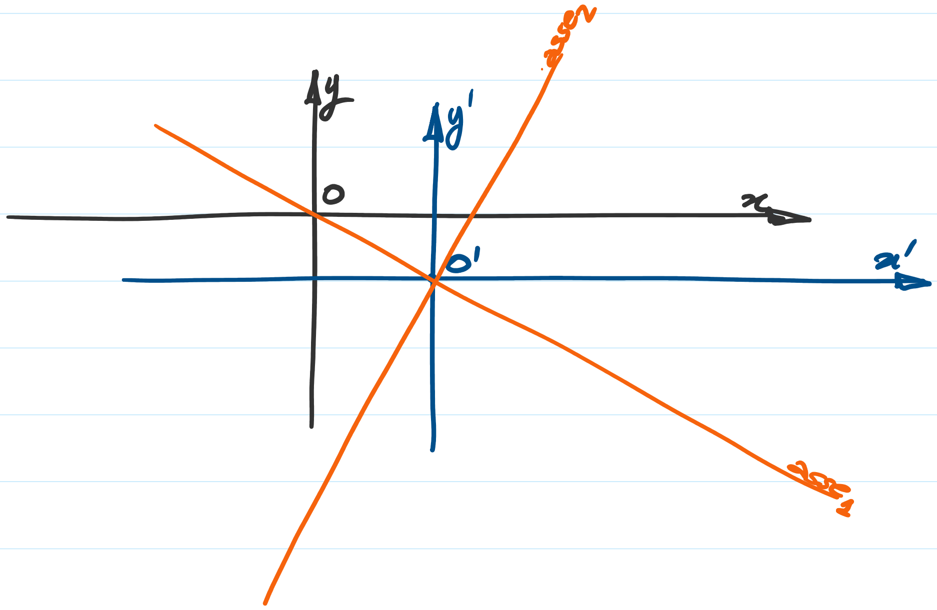
$$4X^2 - Y^2 - 1 = 0$$

rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano che abbia come assi di riferimento gli assi di simmetria dell'iperbole.
Cerchiamo gli assi di simmetria diagonalizzando la matrice B con una matrice U ortogonale.
L'autospazio di $\alpha = 4$ è la retta $2x - y = 0$, cioè $V_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, mentre l'autospazio di $\beta = -1$ è la retta $x + 2y = 0$, cioè $V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.
Gli autospazi di B sono gli assi di simmetria della conica riferita al sistema cartesiano $RC(O', x', y')$ che ha come origine il centro di simmetria. Basta ora riconsiderare la traslazione (T) per avere le equazioni degli assi riferiti al sistema cartesiano originario $RC(O, x, y)$

$$2x' - y' = 2(x-2) - (y+1) = 2x - y - 5$$
$$x' + 2y' = (x-2) + 2(y+1) = x + 2y$$

le equazioni degli assi sono dunque

$$\text{asse}_1 : x + 2y = 0 \qquad \text{asse}_2 : 2x - y - 5 = 0$$



Scelti i vettori $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\underline{w}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ come vettori base per gli autospazi V_4 e V_{-1}, normalizziamoli in modo da avere una matrice ortogonale di cambio base

$$U=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

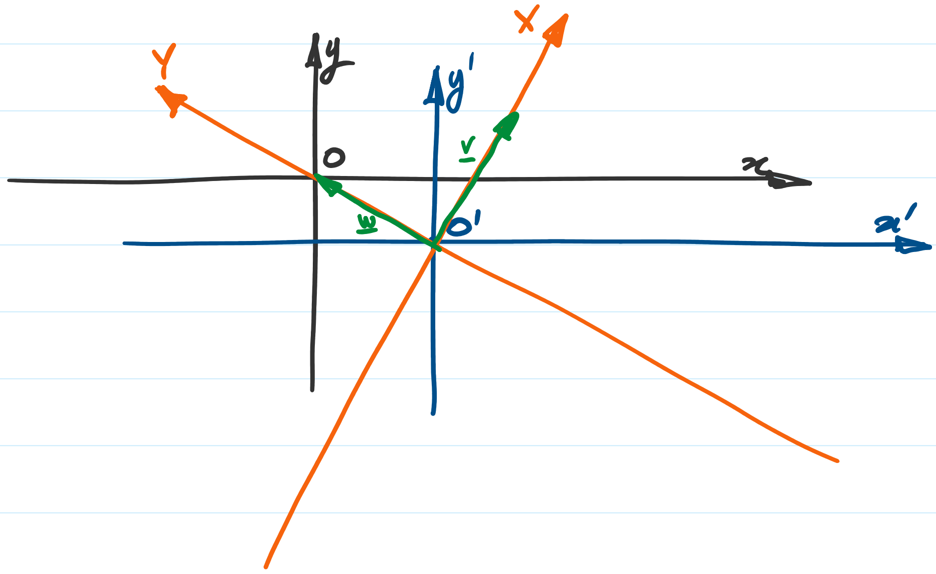
Notiamo che, per la scelta fatta dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$, risulta $\det U=+1$, quindi è una rotazione l'isometria (lineare)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=U_T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

R

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{5}}X-\frac{2}{\sqrt{5}}Y\\ y'=\frac{2}{\sqrt{5}}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Y\end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases}X=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\\ Y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\end{cases}$$

che porta gli assi del riferimento $RC(O',x',y')$ sugli assi di simmetria della conica



Nel riferimento cartesiano $RC(O',X,Y)$ l'iperbole ha equazione

$$4X^2-Y^2=1,$$

quindi i vertici dell'iperbole sono i punti di coordinate $\begin{cases}X=\pm 1/2\\ Y=0\end{cases}$
e gli asintoti si hanno ponendo $4X^2-Y^2=0$, quindi

$$2X-Y=0 \qquad 2X+Y=0$$

e gli asintoti si hanno ponendo $4X^2-Y^2=0$, quindi

$$2X-Y=0 \qquad 2X+Y=0$$

Attraverso le trasformazioni Ⓡ e Ⓣ recuperiamo le coordinate e le equazioni riferite al sistema cartesiano $RC(O,x,y)$ originario.

Vertici : $\begin{cases} X=\pm 1/2 \\ Y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=\pm\frac{1}{2\sqrt5} \\ y'=\pm\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=2\pm\frac{1}{2\sqrt5} \\ y=-1\pm\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

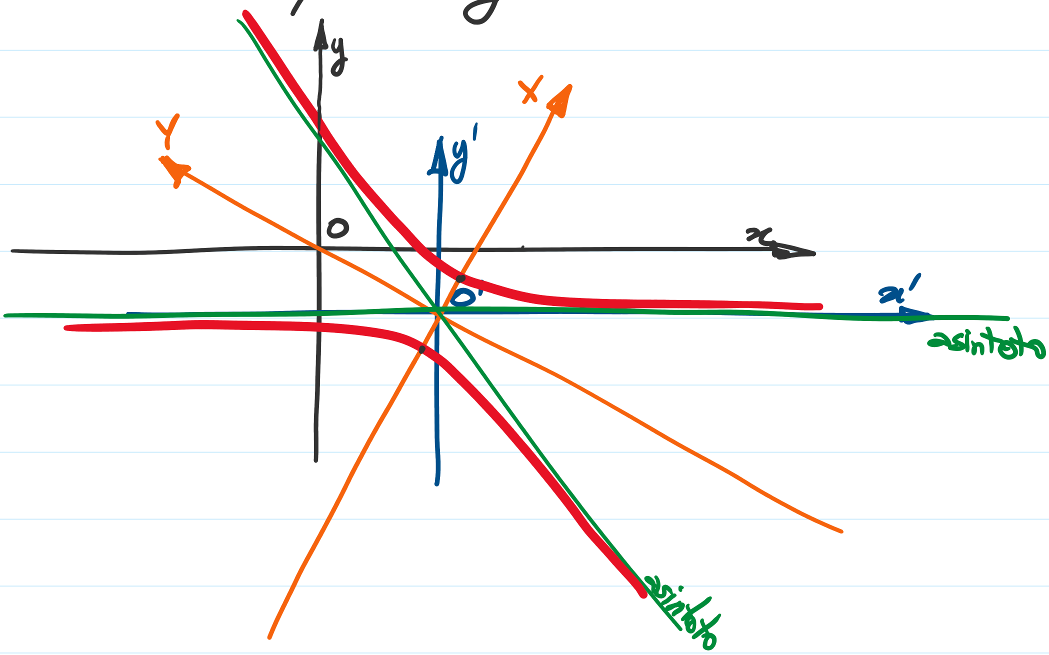
Asintoti : $2X-Y = 2\left(\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'\right)-\left(-\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right) = \frac{4}{\sqrt5}x'+\frac{3}{\sqrt5}y'$

$$= \frac{4}{\sqrt5}(x-2)+\frac{3}{\sqrt5}(y+1) = \frac{4}{\sqrt5}x+\frac{3}{\sqrt5}y-\frac{5}{\sqrt5}$$

quindi $4x+3y-5=0$

$$2X+Y = 2\left(\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'\right)+\left(-\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right) = \frac{5}{\sqrt5}y' = \frac{5}{\sqrt5}(y+1)$$

quindi $y+1=0$



Osserviamo che gli asintoti sono paralleli alle rette in cui si spezza la parte quadratica dell'equazione della conica

$$4xy+3y^2 = (4x+3y)y.$$

ESERCIZIO studiare la conica di equazione $3x^2+2xy+3y^2+2\sqrt2\,x=0$

ESERCIZIO studiare la conica di equazione $3x^2+2xy+3y^2+2\sqrt{2}x=0$

RIEPILOGO E COMPLEMENTI SULLE CONICHE A CENTRO

La conica di equazione

$$({\underline{x}}_T|1)\, A \begin{pmatrix}\underline{x}\\ 1\end{pmatrix} = ({\underline{x}}_T|1)\left[\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}_T & a_{33}\end{array}\right]\begin{pmatrix}\underline{x}\\ 1\end{pmatrix}=0$$

è "a centro" quando $\det B \neq 0$.
Le coordinate del centro di simmetria sono date dal sistema lineare

$$[B|\underline{c}]\begin{pmatrix}\underline{x}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Se la conica è degenere ($\det A=0$), allora $rk A=2$ e la conica si spezza nel prodotto di due rette distinte e incidenti nel centro di simmetria. Le rette sono coniugate complesse se $\det B>0$, mentre sono reali nel caso $\det B<0$.

Se la conica è non degenere ($\det A\neq 0$), allora è
- una ellisse (reale o immaginaria) se $\det B>0$,
  in particolare, l'ellisse è una circonferenza (reale o immaginaria) se B ha un solo autovalore doppio.
- una iperbole se $\det B<0$,
  in particolare, l'iperbole è equilatera se $tr B=0$.

Gli assi di simmetria della conica a centro sono le rette passanti per il centro di simmetria e con le direzioni degli autospazi di B.

Gli asintoti di una iperbole sono le rette passanti

Gli asintoti di una iperbole sono le rette passanti per il centro di simmetria e parallele alle rette in cui si spezza la parte quadratica dell'equazione, cioè

$$\underline{x}_T B \underline{x} = 0$$

2. CONICHE NON A CENTRO

Se la conica non ha un (unico) centro di simmetria, semplifichiamo l'equazione eseguendo una rotazione che elimini il termine rettangolare xy.
Diagonalizziamo cioè la matrice B.
Poiché la conica non è a centro, si ha $\det B = 0$ e quindi un autovalore di B è nullo, ma non entrambi. Detto α l'autovalore non nullo, abbiamo ora l'equazione

$$\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0 \quad \text{con matrice} \quad \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ \hline \beta & \gamma & \delta \end{array}\right]$$

Se $\gamma = 0$, allora la conica si spezza nel prodotto di due rette parallele reali o immaginarie coniugate distinte, o eventualmente reali e coincidenti.
Se $\gamma \neq 0$, con una traslazione è possibile eliminare β e δ per arrivare all'equazione della PARABOLA

$$\alpha x^2 + 2\gamma y = 0$$

ESEMPIO Riduciamo a forma canonica la conica di equazione

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4y = 0$$

La matrice della conica è $A = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ con $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Poiché $\det A = -16 \neq 0$ e $\det B = 0$, la conica è

Poiché $\det A = -16 \neq 0$ e $\det B = 0$, la conica è una parabola (non degenere)

L'autovalore non nullo di B è $\alpha = 5$.

Gli autospazi sono

V_5 : retta $x+2y=0$, $V_5 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

V_0 : retta $2x-y=0$, $V_0 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

La matrice ortogonale

$$U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

fornisce la rotazione

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = U_T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

R

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di partenza, o ricordando che l'effetto di una rotazione $\underline{x} = U\underline{x}'$ sulla matrice della conica è $B' = U_T B U$, $\underline{c}' = U_T \underline{c}$, $a'_{33} = a_{33}$, abbiamo l'equazione

$$5x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' = 0$$

Cerchiamo ora la traslazione che ci conduce alla forma canonica

$$5X^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}Y = 0.$$

Raccogliendo il coeff. di x'^2 sui termini con x' e completando successivamente il quadrato abbiamo

$$5x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' = 5\left(x'^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}}x'\right) + \frac{8}{\sqrt{5}}y'$$

$$= 5\left(x'^2 - 2\frac{2}{5\sqrt{5}}x' + \frac{4}{125} - \frac{4}{125}\right) + \frac{8}{\sqrt{5}}y'$$

$$= 5\left(x'^2 - 2\frac{2}{5\sqrt5}x' + \frac{4}{125}\right) - \frac{4}{25} + \frac{8}{\sqrt5}y'$$
$$= 5\left(x' - \frac{2}{5\sqrt5}\right)^2 + \frac{8}{\sqrt5}y' - \frac{4}{25}$$

raccogliamo ora il coefficiente di y'

$$= 5\left(x' - \frac{2}{5\sqrt5}\right)^2 + \frac{8}{\sqrt5}\left(y' - \frac{4}{25}\cdot\frac{\sqrt5}{8}\right)$$
$$= 5\left(x' - \frac{2}{5\sqrt5}\right)^2 + \frac{8}{\sqrt5}\left(y' - \frac{\sqrt5}{50}\right)$$

La traslazione cercata è dunque

$$\begin{cases} x' - \frac{2}{5\sqrt5} = X \\ y' - \frac{\sqrt5}{50} = Y \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = X + \frac{2}{5\sqrt5} \\ y' = Y + \frac{\sqrt5}{50} \end{cases}$$

Arrivati all'equazione $5X^2 + \frac{8}{\sqrt5}Y = 0$, abbiamo il vertice nell'origine, quindi

<u>vertice</u>: $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{2}{5\sqrt5} \\ y' = \frac{\sqrt5}{50} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{50} \\ y = -\frac{1}{25} \end{cases}$,

mentre l'asse di simmetria della parabola è l'asse Y

<u>asse di simmetria</u>: $X = 0$, $x' - \frac{2}{5\sqrt5} = 0$, $2x - y - \frac{2}{5} = 0$

Si osservino i seguenti fatti (generali):

- la direzione dell'asse di simmetria è individuata dall'autospazio relativo all'autovalore nullo;
- la parte quadratica dell'equazione è un quadrato
$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$
e la base del quadrato $2x - y$ individua la direzione dell'asse di simmetria

OSSERVAZIONI SULLE CONICHE NON A CENTRO

La conica di equazione
$$(\underline{x}_T|1)\,A\begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix}=(\underline{x}_T|1)\left[\begin{array}{c|c}B&\underline{c}\\\hline \underline{c}_T&a_{33}\end{array}\right]\begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix}=0$$

è "non a centro" quando $\det B=0$.
Ciò significa che la parte quadratica dell'equazione è un quadrato o l'opposto di un quadrato, cioè
$$\underline{x}_T B\underline{x}=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=\pm(ax+by)^2$$

Se la conica è degenere, questa si spezza nel prodotto di rette parallele reali distinte o complesse coniugate se $rkA=2$, reali e coincidenti se $rkA=1$. Le rette sono parallele alla retta $ax+by=0$

Se la conica è non degenere, questa è una parabola con asse di simmetria parallelo alla retta $ax+by=0$

La retta $ax+by=0$ risulta essere l'autospazio relativo all'autovalore nullo della matrice B.

3. GLI INVARIANTI ORTOGONALI

DEFINIZIONE: si dicono INVARIANTI ORTOGONALI della conica di equazione $(\underline{x}_T|1)\,A\begin{pmatrix}\underline{x}\\1\end{pmatrix}=0$ con
$$A=\left[\begin{array}{cc|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\\hline a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}B&\underline{c}\\\hline \underline{c}_T&a_{33}\end{array}\right]$$
i numeri
$$I_3=\det A,\quad I_2=\det B,\quad I_1=\operatorname{tr}B=a_{11}+a_{22}.$$

Per quanto detto sopra, gli invarianti ortogonali non dipendono

Per quanto detto sopra, gli invarianti ortogonali non dipendono dalla scelta di un riferimento cartesiano, rimanendo costanti attraverso isometrie.

Attraverso gli invarianti ortogonali possiamo velocemente riconoscere la conica e scrivere la forma canonica sfruttando la seguente tabella che riassume quanto studiato.

$I_2>0$	$I_3\neq 0$	Ellisse reale se $I_1I_3<0$ Ellisse immaginaria se $I_1I_3>0$
	$I_3=0$	Rette coniugate complesse (ellisse degenere)
$I_2<0$	$I_3\neq 0$	Iperbole (equilatera se $I_1=0$)
	$I_3=0$	Rette reali distinte e incidenti (iperbole degenere)
$I_2=0$	$I_3\neq 0$	Parabola
	$I_3=0$	Rette parallele distinte (reali o complesse) se $rkA=2$ Rette reali coincidenti se $rkA=1$

ESEMPIO classifichiamo e scriviamo in forma canonica la conica di equazione

$$x^2+xy+y^2+2x=0.$$

La matrice della conica è $A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

quindi $I_1=2$, $I_2=3/4$, $I_3=-1$

quindi $I_1 = 2$, $I_2 = 3/4$, $I_3 = -1$

La conica è non degenere perché $I_3 \neq 0$; poiché $I_2 > 0$, la conica è una ellisse; poiché $I_1 \cdot I_3 = -2 < 0$, l'ellisse è reale.

La forma canonica dell'ellisse sarà $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

con matrice $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}$. Quindi $I_1 = \alpha + \beta$, $I_2 = \alpha\beta$, $I_3 = -\alpha\beta\gamma$

Poiché I_1, I_2, I_3 sono invarianti per isometrie, abbiamo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 3/4 \\ -\alpha\beta\gamma = -1 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} \alpha = 3/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 4/3 \end{cases}$$

Abbiamo dunque

$$\frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{2} Y^2 = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{X^2}{\frac{8}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{8}{3}} = 1 \right)$$

ESEMPIO La conica di equazione $2x^2 - 2xy + y = 0$ ha invarianti

$I_1 = 2 \quad I_2 = -1 \quad I_3 = -1/2$

quindi è una iperbole (non degenere e non equilatera).

La forma canonica sarà del tipo

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma.$$

Abbiamo quindi il sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = -1 \\ -\alpha\beta\gamma = -1/2 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} \alpha = 1 + \sqrt{2} \\ \beta = 1 - \sqrt{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$

La forma canonica è dunque

$$(1+\sqrt{2}) X^2 + (1-\sqrt{2}) Y^2 = -\frac{1}{2}$$

$$(1+\sqrt{2})X^2+(1-\sqrt{2})Y^2=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{X^2}{\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}}-\frac{Y^2}{\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}}=-1\right)$$

ESEMPIO La conica di equazione $x^2+4xy+4y^2+2x-4y=0$ ha invarianti

$$I_3=-16\ ,\ I_2=0,\ I_1=5$$

Si tratta dunque di una parabola la cui forma canonica sarà del tipo $\alpha X^2+2\gamma Y=0$ con $I_3=-\alpha\gamma^2,\ I_2=0,\ I_1=\alpha$

quindi $\begin{cases}-\alpha\gamma^2=-16\\ \alpha=5\end{cases}$ cioè $\begin{cases}\alpha=5\\ \gamma=\pm 4/\sqrt{5}\end{cases}$

Una forma canonica è dunque

$$5X^2+\frac{4}{\sqrt{5}}Y=0$$