C.D. Pagani S. Salsa

ANALISI MATEMATICA

Volume 2

SEMINARIO SCIENTIFICO * UNIVERSITA' DI CAGLIARI *

Inv. n°: 3630/SSD

MASSON
1998

INDICE

PREFAZIONE V

CAPITOLO 1 – **CURVE E INTEGRALI CURVILINEI** 1

1. Curve in $\mathbb{R}^3$ 1

1.1 Elementi di calcolo vettoriale 1
1.2 Curve in $\mathbb{R}^3$: definizioni principali 6
1.3 Curve regolari 11
1.4 Curve equivalenti 14
1.5 Curve rettificabili. Lunghezza di una curva 16
1.6 Ascissa curvilinea. I vettori normale e binormale 23
* 1.7 Curvatura e torsione 26

2. Integrali curvilinei 37

2.1 Integrali curvilinei rispetto alla lunghezza d'arco o di 1^a specie 37
2.2 Forme differenziali lineari. Integrali curvilinei di 2^a specie 41
2.3 Riconoscimento delle forme differenziali esatte. Costruzione della funzione potenziale 49
2.4 Insiemi semplicemente connessi 57

CAPITOLO 2 – **OTTIMIZZAZIONE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI** 63

1. Generalità sull'ottimizzazione. Estremi liberi 64

1.1 Esempi preliminari 64
1.2 Generalità sull'ottimizzazione 65
1.3 Estremi liberi. Condizioni necessarie 69
1.4 Forme quadratiche 72
1.5 Condizioni sufficienti per estremi liberi 79

2. Estremi vincolati. Vincoli di uguaglianza 87

2.1 Funzioni di due variabili 87
2.2 Il caso generale: funzioni di n variabili con m vincoli $(m < n)$ 92
* 2.3 Condizioni sufficienti 98

3. Vincoli di disuguaglianza. Cenno alla programmazione matematica 104

3.1 Generalità sui problemi di programmazione 104
3.2 Direzioni ammissibili e qualificazione dei vincoli 107
3.3 Il teorema di Kuhn–Tucker 110
3.4 Condizioni sufficienti 114

CAPITOLO 3 – **APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI** 117

1. Spazi funzionali 117

1.1 Metrica e topologia 117
1.2 Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme 124
1.3 Scambio di limiti; di limite e derivata, di limite e integrale. Gli spazi di Lagrange 126
* 1.4 Completezza, chiusura, limitatezza, compattezza 132
* 1.5 Densità 134
1.6 Applicazioni tra spazi metrici. Teorema delle contrazioni 136
1.7 Spazi normati e spazi dotati di prodotto scalare 140

2. Serie di funzioni 151

2.1 Generalità 151
2.2 Serie di potenze 156
2.3 Funzioni analitiche 164
2.4 Serie di Fourier 170
2.5 Convergenza delle serie di Fourier 179

CAPITOLO 4 – **EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE** 197

1. Concetti e teoremi fondamentali 197

1.1 Esempi preliminari 197
1.2 Definizioni e terminologia 202
1.3 Esistenza ed unicità locale 208
1.4 Prolungamento delle soluzioni. Esistenza ed unicità globale 215
1.5 Dipendenza delle soluzioni dai dati iniziali e da eventuali parametri 223
1.6 Integrazione di alcune equazioni del primo ordine 226

2. Equazioni lineari 239

2.1 Definizione e prime proprietà 239

2.2 Richiami di algebra delle matrici 243
2.3 Sistemi omogenei. Wronskiano. Matrice di transizione 251
2.4 Sistemi omogenei a coefficienti costanti 256
2.5 Sistemi non autonomi 264
2.6 Sistemi non omogenei 270
2.7 Problemi ai limiti per equazioni lineari del secondo ordine 275

3. Sistemi autonomi. Stabilità 286

3.1 Generalità sui sistemi autonomi 286
3.2 Sistemi bidimensionali. Alcuni esempi 290
3.3 Il concetto di stabilità 295
3.4 Stabilità dell'origine per sistemi lineari autonomi. Il caso bidimensionale 297
3.5 Il metodo di Liapunov 303
3.6 Metodo di linearizzazione 310
* 3.7 Cicli limite. Oscillazioni autosostenute 313
* 3.8 Il punto di vista dei sistemi dinamici 317

CAPITOLO 5 – **MISURA E INTEGRAZIONE** 325

1. Integrale multiplo secondo Riemann 326

1.1 Integrale doppio per funzioni definite su un rettangolo 326
1.2 Calcolo di un integrale doppio mediante due integrazioni semplici 330
1.3 Integrale su regioni più generali. Misura di Peano–Jordan 334
1.4 Funzioni generalmente continue 338
1.5 Proprietà dell'integrale 341
1.6 Cambiamento delle variabili di integrazione 343
1.7 Integrali multipli 355
1.8 Alcune applicazioni 367
1.9 Cenno agli integrali multipli generalizzati 372

2. Misura di Lebesgue degli insiemi di $\mathbb{R}^n$. Insiemi misurabili e funzioni misurabili 377

2.1 Misura degli insiemi limitati 377
2.2 Proprietà della misura 383
2.3 Dimostrazione delle proprietà della misura 387
2.4 Insiemi non limitati 391
* 2.5 Misura e dimensione. Insiemi frattali 393
2.6 Funzioni misurabili 397

3. Integrale secondo Lebesgue 404

3.1 Integrale di funzioni misurabili e limitate 404
3.2 Funzioni sommabili 408
3.3 Prime proprietà dell'integrale di Lebesgue 411
3.4 Limite, serie e derivata di integrali 414
3.5 Scambio nell'ordine delle integrazioni 421

* 3.6 Misure con peso. Probabilità 424
* 3.7 Gli spazi $L^1(E)$ e $L^2(E)$. Ancora sulle serie di Fourier 430

CAPITOLO 6 – **SUPERFICI ED INTEGRALI DI SUPERFICIE** 437

1. Superfici in $\mathbb{R}^3$ 437

1.1 Definizioni principali. Superfici regolari 437
1.2 Bordo di una superficie. Superfici regolari a pezzi 442
1.3 Linee coordinate. Coordinate locali. Cambiamento di parametri 444
1.4 Vettore normale. Piano tangente. Orientazione 451
1.5 Metrica sulla superficie. Prima forma fondamentale 455
1.6 Area di una superficie. Integrali superficiali 459
1.7 Alcune applicazioni fisiche e geometriche 463
1.8 Generalizzazione a dimensioni superiori 469

***2. Curvature** 471

2.1 Seconda forma fondamentale 471
2.2 Curvature delle linee su una superficie 475
2.3 Curvature principali. Curvatura gaussiana e curvatura media 478
2.4 Mappa di Gauss. Theorema Egregium 482

3. I teoremi di Green, Gauss e Stokes 491

3.1 La formula di Gauss–Green nel piano 491
3.2 Applicazioni 494
3.3 Il teorema di Stokes nello spazio 499
3.4 Potenziale vettore 505
3.5 Il teorema della divergenza 509
3.6 Applicazioni 514

CAPITOLO 7 – **EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI E CALCOLO DELLE VARIAZIONI** 523

1. Equazioni alle derivate parziali 523

1.1 Generalità 524
1.2 Equazioni lineari del 2° ordine. Classificazione 527
1.3 Equazioni tipo e problemi associati 529
1.4 Il problema di Cauchy. Caratteristiche 533
1.5 Generalità sui problemi al contorno. Nozione di problema ben posto 538
1.6 Problemi di unicità 541
1.7 Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cerchio. Proprietà delle funzioni armoniche 547
1.8 Problema di Cauchy – Dirichlet per l'equazione del calore 551
1.9 Problema della corda vibrante con estremi fissi 553

2. Elementi di calcolo delle variazioni 562

2.1 Alcuni problemi tipici del Calcolo delle Variazioni 563
2.2 Funzionali del Calcolo delle Variazioni 565
2.3 Variazione prima e seconda di un funzionale 566
2.4 L'equazione di Eulero 569
2.5 Casi particolari dell'equazione di Eulero 573
2.6 Estremi variabili. Condizioni naturali 576
2.7 Funzionali dipendenti da più funzioni 578
2.8 Funzionali dipendenti da funzioni di più variabili 579
2.9 Problemi isoperimetrici 583
2.10 Il principio di Hamilton 586

INDICE ANALITICO 593

Curve e integrali curvilinei 1

La prima parte di questo capitolo (Sez. 1) è dedicata agli aspetti elementari della geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio. Si è cercato, nell'esporre la teoria, di metterne in evidenza la duplice natura geometrico–cinematica.

Si sviluppa successivamente (Sez. 2) la nozione di integrale di linea, di fondamentale importanza non solo in Analisi ma anche nelle scienze applicate, soprattutto in Fisica, dove è collegata, ad esempio, alle nozioni di lavoro, flusso ed energia.

La connessione avviene attraverso i concetti di forma differenziale esatta, campi vettoriali conservativi ed invarianza dell'integrale rispetto a deformazioni della traiettoria, argomenti che sono pure trattati nella sezione 2.

1. CURVE IN $\mathbb{R}^3$

1.1 Elementi di calcolo vettoriale

In questo paragrafo preparatorio abbiamo raggruppato alcuni risultati di calcolo vettoriale che si riveleranno utili in seguito. In particolare esamineremo le proprietà principali dell'operazione di *prodotto vettoriale* in $\mathbb{R}^3$ che induce in tale spazio un'ulteriore struttura (di *Algebra di Lie*) in aggiunta alle numerose altre possedute da ogni spazio euclideo.

Il prodotto vettoriale tra due vettori in $\mathbb{R}^3$ è definito come segue:

Definizione 1.1 - *Siano* $\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}$ *e* $\eta = \eta_1 \mathbf{i} + \eta_2 \mathbf{j} + \eta_3 \mathbf{k}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^3$. *Si dice prodotto vettoriale di* ξ *per* η *il vettore di* $\mathbb{R}^3$, *indicato con* $\xi \wedge \eta$ (*) *(si legge* ξ *vettor* η*), così definito:*

(*) Altre notazioni in uso sono: $\xi \times \eta$ e $[\xi, \eta]$.

$$\xi \wedge \eta := (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\mathbf{i} + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)\mathbf{j} + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\mathbf{k} \ . \tag{1.1}$$

Si può ricordare facilmente la (1.1) osservando che il secondo membro coincide formalmente con il determinante della matrice simbolica seguente, ottenuto per sviluppo secondo la prima riga:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} .$$

***Esempio* 1.1** - Si ha: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

L'applicazione da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla (1.1) possiede le seguenti proprietà, di verifica immediata: $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^3$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo:

1. $\xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi$ *(antisimmetria)*
2. $(\alpha\xi + \beta\eta) \wedge \zeta = \alpha(\xi \wedge \zeta) + \beta(\eta \wedge \zeta)$
   $\xi \wedge (\alpha\eta + \beta\zeta) = \alpha(\xi \wedge \eta) + \beta(\xi \wedge \zeta)$ *(bilinearità)*
3. $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta + (\zeta \wedge \xi) \wedge \eta + (\eta \wedge \zeta) \wedge \xi = \mathbf{0}$ *(identità di Jacobi)*

Come abbiamo già accennato in precedenza, lo spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto vettoriale (1.1), è un esempio di *algebra di Lie*, una struttura che gioca un ruolo rilevante nella teoria dei campi vettoriali e della meccanica hamiltoniana. Più esattamente, diamo la seguente

Definizione 1.2 - *Si chiama algebra di* Lie (*) *uno spazio lineare V dotato di un'applicazione da $V \times V \to V$ che sia antisimmetrica, bilineare e che soddisfi l'identità di Jacobi.*

Di solito l'applicazione di cui si parla nella definizione (1.2) si indica con il simbolo $[\cdot,\cdot]$ e si chiama *commutatore*.

***Esempio* 1.2** - Un altro esempio di algebra di Lie è lo spazio lineare M_n di tutte le matrici quadrate di ordine n rispetto al commutatore

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \qquad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n \ .$$

Esaminiamo ora alcune proprietà che legano il prodotto *vettoriale* con quello *scalare*.

Dati tre vettori $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^3$, il numero reale

$$< \xi, \eta \wedge \zeta >$$

si chiama prodotto misto di ξ, η, ζ. Si verifica immediatamente che

(*) Sophus Lie (1842–1899).

$$< \xi, \eta \wedge \zeta > = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} . \tag{1.2}$$

Valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1 - $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^3$:

a) $< \xi, \eta \wedge \zeta > = < \eta, \zeta \wedge \xi >$ *(ciclicità del prodotto misto)*

b) $< \xi \wedge \eta, \xi > = < \xi \wedge \eta, \eta > = 0$ *($\xi \wedge \eta$ è perpendicolare al piano di ξ ed η)*

c) $||\xi \wedge \eta||^2 = ||\xi||^2 \cdot ||\eta||^2 - < \xi, \eta >^2$ *(identità di Lagrange)*

Dimostrazione – Le proprietà a) e b) si ricavano subito dalla (1.2) ricordando le proprietà dei determinanti. Per la c) osserviamo preliminarmente che, dividendo entrambi i membri per $||\xi||^2 \cdot ||\eta||^2$ ed usando l'omogeneità dei prodotti scalare e vettoriale, ci si riduce a dimostrare l'identità per ξ ed η versori, ovvero:

$$||\xi \wedge \eta||^2 = 1 - < \xi, \eta >^2 \quad , \quad ||\xi|| = ||\eta|| = 1 \ .$$

L'ultima identità è un facile esercizio di algebra elementare. □

Dall'identità di Lagrange si ricava che

$$||\xi \wedge \eta|| = ||\xi|| \cdot ||\eta|| \sin\varphi \qquad (0 \le \varphi \le \pi) \tag{1.3}$$

dove φ è l'angolo compreso tra ξ e η, ovvero: il modulo di $\xi \wedge \eta$ uguaglia l'area del parallelogramma formato dai vettori ξ e η (v. fig. 1.1).

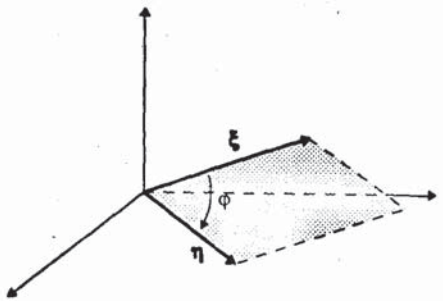


Fig. 1.1

La (1.3) segue subito ricordando che $< \xi, \eta > = ||\xi|| \cdot ||\eta|| \cos\varphi$ e quindi, da c):

$$||\xi \wedge \eta||^2 = ||\xi||^2 \cdot ||\eta||^2 (1 - (\cos\varphi)^2) = ||\xi||^2 \cdot ||\eta||^2 (\sin\varphi)^2$$

da cui (1.3).

Passiamo ora ad alcuni aspetti della derivazione e dell'integrazione di funzioni vettoriali di variabile reale.

Anche se continueremo a lavorare in $\mathbb{R}^3$, il lettore si renderà conto che tutto è facilmente estendibile ad $\mathbb{R}^n$, tranne la differenziazione di un prodotto vettoriale.

Lemma 1.2 - *Siano $\xi, \eta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ funzioni vettoriali derivabili; allora valgono le formule (di Leibniz):*

a) $\dfrac{d}{dt} < \xi(t), \eta(t) > = < \xi'(t), \eta(t) > + < \xi(t), \eta'(t) >$

b) $\dfrac{d}{dt}(\xi(t) \wedge \eta(t)) = \xi'(t) \wedge \eta(t) + \xi(t) \wedge \eta'(t)$.

Lasciamo la semplice dimostrazione per esercizio.

Nel caso in cui $||\xi(t)|| = c$ (costante) per ogni $t \in [a,b]$ si ha $< \xi(t), \xi(t) > = = ||\xi(t)||^2 = c^2$ da cui, per la a) del lemma precedente,

$$0 = \frac{d}{dt} < \xi(t), \xi(t) > = 2 < \xi'(t), \xi(t) >$$

cioè ξ' e ξ sono ortogonali.

In conclusione abbiamo:

Lemma 1.3 - *Sia $\xi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tale che $||\xi(t)|| = c \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in [a,b]$. Se ξ è derivabile, allora $\xi'(t) \perp \xi(t)$ per ogni $t \in [a,b]$.*

L'integrale di una funzione vettoriale si definisce senza difficoltà. Se $\xi(t) = = \xi_1(t)\mathbf{i} + \xi_2(t)\mathbf{j} + \xi_3(t)\mathbf{k}$, $t \in [a,b]$, ξ si dice integrabile se le componenti ξ_j $(j = 1,2,3)$ sono integrabili; si pone

$$\int_a^b \xi(t)dt := \mathbf{i} \int_a^b \xi_1(t)dt + \mathbf{j} \int_a^b \xi_2(t)dt + \mathbf{k} \int_a^b \xi_3(t)dt \ .$$

Per l'integrale così definito valgono le proprietà di linearità e di addittività rispetto all'intervallo di integrazione (Teor. 8.1.8, Vol 1). Inoltre vale il seguente

Lemma 1.4 - *Sia $\xi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, ξ integrabile.*

a) Se $\xi \in C^1([a,b])$ *allora* $\int_a^b \xi'(t)dt = \xi(b) - \xi(a)$ *(teorema fondamentale del calcolo integrale).*

b) Se $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *è costante allora*

$$< \mathbf{c}, \int_a^b \xi(t)dt > = \int_a^b < \mathbf{c}, \xi(t) > dt$$

c) $||\xi||$ è *integrabile e*

$$|| \int_a^b \xi(t)dt || \leq \int_a^b ||\xi(t)||dt \ .$$

Dimostrazione - La a) è conseguenza immediata del teorema 8.1.10, volume 1.

Dimostriamo b). Sia $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Allora

$$< \mathbf{c}, \int_a^b \xi \, dt > = c_1 \int_a^b \xi_1 \, dt + c_2 \int_a^b \xi_2 \, dt + c_3 \int_a^b \xi_3 \, dt = \int_a^b (c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3) \, dt = \int_a^b < \mathbf{c}, \xi > dt \ .$$

Per dimostrare c) usiamo la b) con $\mathbf{c} = \int_a^b \xi(t) \, dt$. Si ottiene:

$$\left\| \int_a^b \xi(t)dt \right\|^2 = < \int_a^b \xi(s)ds, \int_a^b \xi(t)dt > = \int_a^b < \int_a^b \xi(s)ds, \xi(t) > dt \ . \tag{1.4}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha:

$$< \int_a^b \xi(s)ds \, , \, \xi(t) > \leq \left\| \int_a^b \xi(s)ds \right\| \cdot ||\xi(t)||$$

che, inserita nella (1.4), dà:

$$\left\| \int_a^b \xi(t)dt \right\|^2 \leq \int_a^b \left\| \int_a^b \xi(s)ds \right\| \cdot ||\xi(t)||dt = \left\| \int_a^b \xi(t)dt \right\| \cdot \int_a^b ||\xi(t)||dt$$

da cui c). □

Terminiamo il paragrafo con alcune utili formule di analisi vettoriale; esse legano tra loro gli operatori differenziali di gradiente, divergenza, rotore che abbiamo già avuto occasione di incontrare nel capitolo 6, volume 1.

Ricordiamo le definizioni.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, dove A è un aperto di $\mathbb{R}^3$, una funzione derivabile (*campo scalare*).

Il *gradiente* di f (in coordinate cartesiane) è definito da

$$\operatorname{grad} f := f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \ .$$

Sia ora $\mathbf{v} : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale derivabile,

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} \ .$$

La *divergenza* di $\mathbf{v}$ ($\operatorname{div} \mathbf{v}$ o $\nabla \cdot \mathbf{v}$) e il *rotore* di $\mathbf{v}$ ($\operatorname{rot} \mathbf{v}$ o $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ o $\nabla \times \mathbf{v}$) sono definiti (in coordiante cartesiane) rispettivamente dalle espressioni seguenti:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \ .$$

La formula che definisce $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ si può ricordare facilmente osservando che essa coincide formalmente con il determinante della seguente matrice simbolica, ottenuto per sviluppo secondo la prima riga:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} .$$

Avremo modo in seguito di tornare sulle definizioni e sugli importanti significati di divergenza e rotore.

Lemma 1.5 - *Se tutte le funzioni coinvolte sono di classe C^2, valgono le formule seguenti:*

a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$

b) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$

c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

(L'operatore Δ, già introdotto nel capitolo 7 volume 1, è detto operatore di Laplace).

Inoltre:

d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$ (dove $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{i}\,\Delta v_1 + \mathbf{j}\,\Delta v_2 + \mathbf{k}\,\Delta v_3$).

e) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f\operatorname{div}\mathbf{v} + <\operatorname{grad} f, \mathbf{v}>$

f) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{v} + f\operatorname{rot}\mathbf{v}$

g) $\operatorname{div}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = <\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v}> - <\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{u}>$.

Omettiamo la dimostrazione del lemma 1.5, che, del resto, si riduce ad una verifica diretta, utilizzando il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione.

1.2 Curve in $\mathbb{R}^3$: definizioni principali

L'idea intuitiva di curva è quella di un insieme di punti nello spazio in cui una *particella* è libera di muoversi con *un grado di libertà*. Un duplice aspetto, *cinematico–geometrico*, appare dunque in modo naturale nel concetto di curva e costituisce la motivazione per la definizione che segue.

Sia γ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ed esista una funzione continua $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, di cui γ è l'immagine: $\gamma = \operatorname{im}(\mathbf{r})$. Diremo che $\mathbf{r}$ *è una parametrizzazione di* γ. È evidente che uno stesso insieme γ può avere diverse parametrizzazioni.

Definizione 1.3 - *Si dice* **curva** *in* $\mathbb{R}^3$ *un insieme* $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ *con una sua parametrizzazione* $\mathbf{r}(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Dunque, pensiamo ad una curva *non solo* come ad un sottoinsieme γ dello spazio, immagine di una funzione continua (*), bensì *alla coppia* γ–parametrizzazione (di γ). Incidentalmente si può osservare che questo punto di vista è molto vicino a quello adottato nella moderna geometria differenziale.

La parametrizzazione $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ corrisponde a quello che fisici e ingegneri chiamano *moto* o *cammino continuo*. Essa, come si vedrà, contiene le *informazioni cinematiche* (cioè velocità, accelerazione, etc.) di una curva. Più esplicitamente, una parametrizzazione è assegnata mediante l'equazione

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

o in forma vettoriale,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \tag{1.5}$$

con $t \in I$.

Interpretando t come "tempo", si può pensare ad $\mathbf{r}(t)$ come al *vettore posizione* di una particella al tempo t, rispetto al sistema di riferimento fissato in $\mathbb{R}^3$. Al variare di t, $\mathbf{r}(t)$ descrive γ, detto *sostegno* della curva, che è interpretabile come *traiettoria* descritta dalla particella e che racchiude gli aspetti *geometrici* della curva. Ora, una stessa traiettoria può corrispondere a moti diversi; si pensi ad esempio ad una circonferenza percorsa una oppure più volte. Dal punto di vista geometrico sarà importante isolare le proprietà di una curva che dipendono solo da γ, che sono cioè indipendenti dalla parametrizzazione.

Prima di esaminare esempi concreti occorre un po' di terminologia.

Abbiamo visto che si intende per curva una coppia $(\gamma, \mathbf{r})$, dove $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ ed $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ è una funzione continua. Con leggero abuso, useremo spesso la locuzione "... *la curva* γ *di equazione* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ..." .

A volte si potrà assegnare l'equazione (1.5) per individuare la curva. Trattando proprietà indipendenti dalla parametrizzazione sarà poi sufficiente assegnare γ.

Se $I = [a, b]$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ si dice che la curva è *chiusa*, o che è un *ciclo*.

Una curva si dice *semplice* se $\mathbf{r}$ è iniettiva in $\mathring{I}$; ciò significa che una curva semplice non chiusa non ha autointersezioni.

Può capitare che, data una curva $(\gamma, \mathbf{r})$, γ sia contenuto in un piano. In tal caso si dice che la curva è *piana*. In particolare, si può assegnare una curva piana mediante una funzione continua $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$.

Le curve piane, semplici e chiuse si chiamano *curve di Jordan* (**). Un importante teorema di topologia asserisce che (il sostegno di) una curva di Jordan è frontiera di due insiemi aperti nel piano, uno dei quali è limitato e si chiama *interno* della curva, l'altro illimitato, detto *esterno*.

(*) La definizione di curva come immagine di una funzione continua è adottata da numerosi autori.

(**) Camille Jordan, matematico francese (1838 –1922).

Nelle figure sottostanti sono illustrati i concetti sopra esposti.

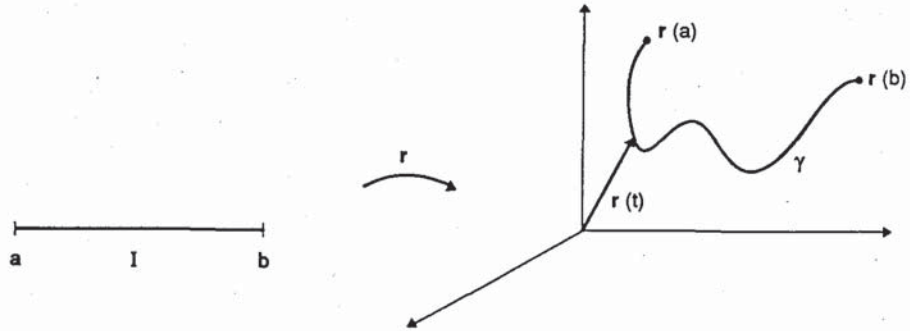


Fig. 1.2 Una curva semplice in $\mathbb{R}^3$.

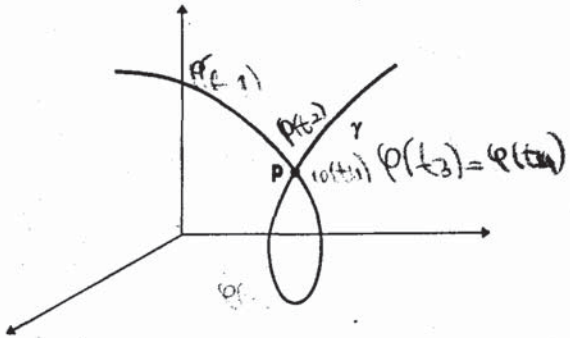


Fig. 1.3 Curva non semplice; il punto $\mathbf{p} \in \gamma$ corrisponde a due valori di t.

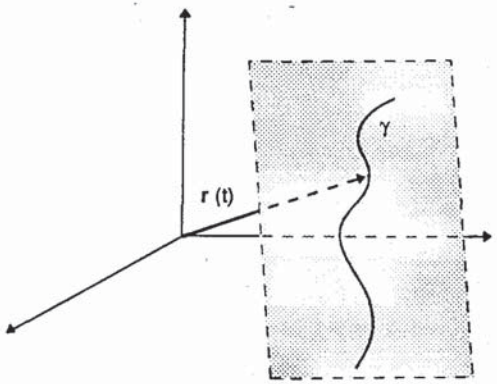


Fig. 1.4 Curva semplice piana.

Consideriamo una curva γ di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Il parametro t appartiene ad un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Essendo $\mathbb{R}$ orientato, anche I sarà tale cosicché è automaticamente assegnato su γ un verso di percorrenza ovvero un'*orientazione* della curva.

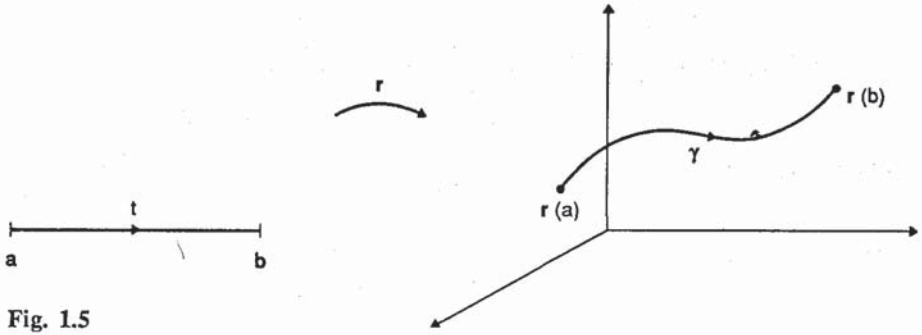


Fig. 1.5

Potremo allora dire che una coppia $(\gamma, \mathbf{r})$ definisce una *curva orientata.*

Esempi

1.3. $\mathbf{r}(t) = (x_0 + \alpha_1 t, y_0 + \alpha_2 t, z_0 + \alpha_3 t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$.

La curva è semplice; il suo sostegno coincide con la retta passante per (x_0, y_0, z_0) di coseni direttori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. È evidentemente una curva piana.

1.4. $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.

La curva è semplice ed ha come sostegno γ un'elica ellittica infinita. Non è evidentemente una curva piana. L'innalzamento di quota dopo un periodo di 2π è detto *passo* dell'elica. In questo caso il passo è $2\pi c$.

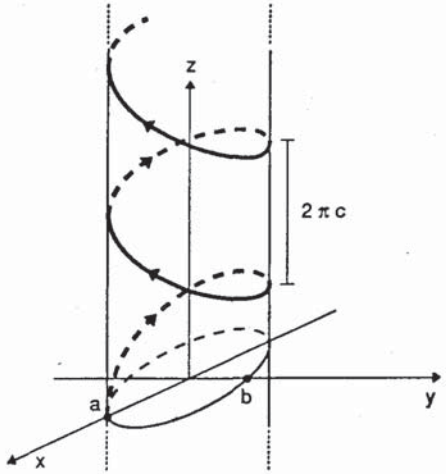


Fig. 1.6 Elica ellittica.

1.5. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 6\pi]$.
È una curva in $\mathbb{R}^2$, non semplice e chiusa. Il suo sostegno è la circonferenza unitaria con centro nell'origine. Si noti che $\mathbf{r}(t)$ percorre la circonferenza 3 volte in senso antiorario.

1.6. $\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t)$, $t \in [0, 2\pi/\omega]$, $\omega \in \mathbb{R}_+$.
È una curva in $\mathbb{R}^2$, semplice e chiusa, Ancora, il sostegno è la circonferenza unitaria con centro nell'origine. Il punto $\mathbf{r}(t)$ percorre la circonferenza una sola volta in senso antiorario.

1.7. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale, continua. Il suo grafico definisce una curva piana semplice di equazione $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, che chiameremo *curva cartesiana.*

1.8. L'equazione $g(x, y) = 0$ definisce in un intorno di ogni punto non singolare per g (in cui cioè $\nabla g \neq \mathbf{0}$) una curva piana.
Infatti, per il teorema di Dini (Teor. 7.3.1, Vol. 1) se $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ (risp. $g_y(x_0, y_0) \neq 0$) e g è di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0), l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = f(y)$ (risp. $y = f(x)$) in un intorno di y_0 (risp. x_0).

1.9. L'equazione $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, dove ρ e θ sono coordinate polari nel piano ed f è continua, definisce una curva piana, in generale non semplice, mediante le equazioni parametriche

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \ , \ y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \ .$$

Ad esempio, se $f(\theta) = \theta$, l'equazione $\rho = \theta$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, definisce una spirale (di Archimede).

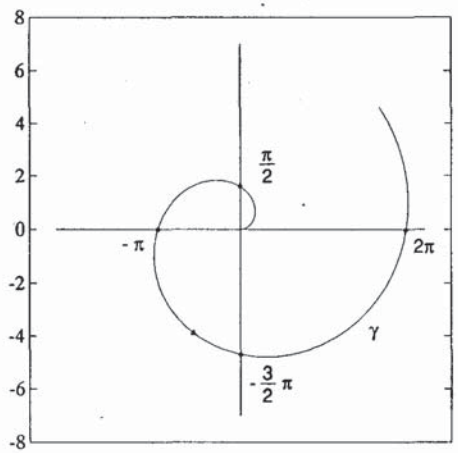


Fig. 1.7 Spirale di Archimede.

In tutti gli esempi sopra illustrati lo studente ha osservato curve abbastanza "familiari"; tuttavia, se si richiede alla parametrizzazione la sola continuità, ci si può ritrovare con oggetti geometrici che sono ben lontani dalla nozione intuitiva di curva. Uno di questi "oggetti strani" è la famosa curva di Peano, definita da una parametrizzazione $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, il cui sostegno è l'intero quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

×1.3 Curve regolari

Restringeremo le nostre considerazioni alle *curve regolari* o *regolari a tratti.*

× **Definizione 1.4** - *Una curva γ di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ si dice regolare se $\mathbf{r} \in C^1(I)$ e se $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.*
Si dice regolare a tratti (o anche generalmente regolare) se I si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ è regolare.

Per una curva regolare è ben definito e diverso da $\mathbf{0}$ il vettore

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\,.$$

Abbiamo già visto (Cap. 7, Vol. 1) che $\mathbf{r}'(t)$ si chiama vettore tangente alla curva nel punto $\mathbf{r}(t)$. Rigorosamente $\mathbf{r}'(t)$ va pensato spiccato dall'origine in $\mathbb{R}^3$ ma è intuitivamente più efficace pensarlo spiccato da $\mathbf{r}(t)$.

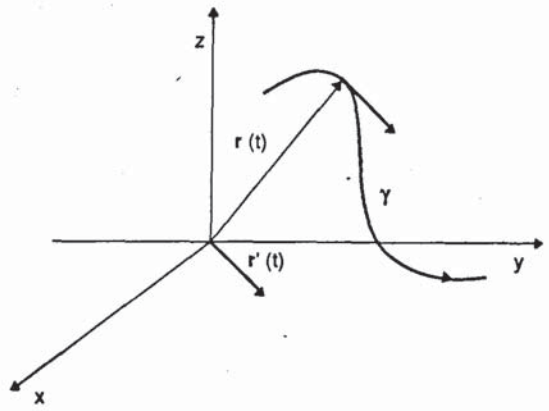


Fig. 1.8

La retta di equazioni parametriche

$$\xi = x(t_0) + \tau x'(t_0)$$
$$\eta = y(t_0) + \tau y'(t_0) \quad \tau \in \mathbb{R}$$
$$\zeta = z(t_0) + \tau z'(t_0)$$

o di equazione vettoriale

$$\xi(\tau) = \mathbf{r}(t_0) + \tau \mathbf{r}'(t_0)$$

prende il nome di *retta tangente* alla curva nel punto $\mathbf{r}(t_0)$.

Per una curva piana cartesiana definita dalla funzione $y = f(x)$ le equazioni parametriche della retta tangente in un punto $(x_0, f(x_0))$ si riducono alle seguenti:

$$x = x_0 + \tau$$

$$y = f(x_0) + \tau f'(x_0) \ ,$$

equivalenti alla ben nota equazione $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Dal punto di vista cinematico $\mathbf{r}'(t)$ rappresenta il *vettore velocità*, che indicheremo anche con $\mathbf{v}(t)$. Un ruolo importante sarà svolto dal modulo (o norma euclidea) di $\mathbf{r}'(t)$, che chiameremo *velocità scalare* ed indicheremo con $v(t)$:

$$v(t) := ||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \ .$$

Osserviamo che, se la curva è regolare, $v(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Il versore

$$\boldsymbol{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

prende il nome di *versore tangente*. Le sue componenti sono i coseni direttori della retta tangente.

Se due curve regolari si intersecano in un punto possiamo definire l'angolo che esse formano in quel punto nel modo seguente.

Siano γ_1, γ_2 due curve di equazione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $t \in I_1$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(\tau)$, $\tau \in I_2$ rispettivamente, tali che $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(\tau_0)$, $t_0 \in I_1$ e $\tau_0 \in I_2$.

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ i vettori velocità di γ_1 per $t = t_0$ e di γ_2 per $\tau = \tau_0$.

Si chiama angolo formato da γ_1 e γ_2 nel punto $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(\tau_0)$, l'angolo φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ tale che

$$\cos\varphi = \frac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{v\, w} \ .$$

Si osservi che la definizione è ben posta grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz: $| < \mathbf{v}, \mathbf{w} > | \leq v\, w$.

Una curva regolare si dice di classe C^k $(k \geq 1)$ se $\mathbf{r} \in C^k(I)$.

Per una curva regolare di classe C^2, oltre ai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ è definito il vettore $\mathbf{r}''(t)$, detto *vettore accelerazione* ed indicato anche con $\mathbf{a}(t)$. Il suo modulo $a(t) = ||\mathbf{a}(t)||$ prende il nome di *accelerazione scalare*.

Naturalmente per le curve regolari a tratti i vettori $\mathbf{r}'(t)$, $\boldsymbol{T}(t)$ ed eventualmente $\mathbf{r}''(t)$ sono definiti tranne che in un numero finito di valori di t.

Esempi

1.10. Le curve degli esempi 1.3 – 1.6 sono di classe C^∞ nel loro intervallo di definizione. Per esse si ha:

1.3 $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}$,

$$v(t) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = 1 \ , \ \mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}(t) = \mathbf{0} \text{ (moto rettilineo uniforme).}$$

1.4 $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -a \sin t \ \mathbf{i} + b \cos t \ \mathbf{j} + c \ \mathbf{k}$

$$v(t) = \sqrt{a^2(\sin t)^2 + b^2(\cos t)^2 + c^2} \ , \ \mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}(t) = -a \cos t \ \mathbf{i} - b \sin t \ \mathbf{j}$$

(per il moto su un'elica l'accelerazione giace nel piano x, y per ogni t).

1.5 $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -\sin t \ \mathbf{i} + \cos t \ \mathbf{j}$,

$$v(t) = 1 \ , \ \mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \ , \ a(t) = 1 \ .$$

(moto circolare uniforme: si noti che: $\mathbf{r}''(t) = -\mathbf{r}(t)$ e che $< \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t) >= 0$ per ogni t, ovvero che l'accelerazione è *centripeta*).

1.6 È un moto circolare uniforme con velocità scalare ω:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -\omega \sin \omega t \ \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \ \mathbf{j} \quad , \ v(t) = \omega$$

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}(t) = -\omega^2 \cos \omega t \ \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \ \mathbf{j} \ , \ a(t) = \omega^2 \ .$$

1.11. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, la curva di equazione $\mathbf{r}(t) = t \ \mathbf{i} + f(t) \ \mathbf{j}$ è piana e regolare. Si ha:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t) \ \mathbf{j} \ , \ v(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2} \ .$$

Se $f \in C^2(I)$ esiste $\mathbf{r}''(t) = f''(t) \ \mathbf{j}$.

1.12. Sono regolari a tratti in ogni intervallo limitato le curve di equazione

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, |t|, t^2), \ \mathbf{r}_2(t) = (|\cos t|, t, t^3), \ t \in \mathbb{R} \ .$$

1.13. La curva di equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ è regolare se f è di classe C^1 e $f'(\theta)^2 + f(\theta)^2 \neq 0$ per ogni θ. In tal caso si ha:

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta) \cos\theta \ \mathbf{i} + f(\theta) \sin\theta \ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(\theta) = \mathbf{v}(\theta) = [f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]\ \mathbf{i} + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]\ \mathbf{j}$$

$$v(\theta) = ||\mathbf{v}(\theta)|| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\ .$$

Se introduciamo i versori

$$\mathbf{u}^1(\theta) = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j} \qquad \text{(versore } \textit{radiale}\text{: } \mathbf{r}(\theta) = ||\mathbf{r}(\theta)||\ \mathbf{u}^1(\theta))$$

$$\mathbf{u}^2(\theta) = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \qquad \text{(versore } \textit{trasversale}\text{: } <\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2> = 0)\ ,$$

la formula trovata sopra per $\mathbf{v}(\theta)$ si può scrivere nella maniera seguente:

$$\mathbf{v}(\theta) = f'(\theta)\ \mathbf{u}^1(\theta) + f(\theta)\ \mathbf{u}^2(\theta)\ . \tag{1.6}$$

La formula (1.6) esprime il vettore velocità come somma delle sue componenti radiale e trasversale.

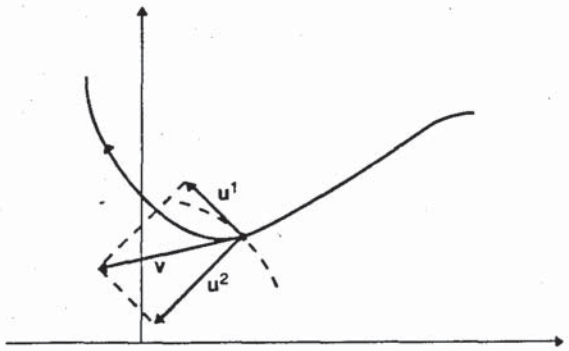


Fig. 1.9 Decomposizione del vettore velocità in componente radiale e trasversale.

Se f è di classe C^2 esiste il vettore accelerazione; il lettore verifichi che vale la formula

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{r}''(\theta) = [f''(\theta) - f(\theta)]\ \mathbf{u}^1(\theta) + 2f'(\theta)\ \mathbf{u}^2(\theta) \tag{1.7}$$

che esprime $\mathbf{a}$ come somma delle sue componenti radiale e trasversale.

1.4 Curve equivalenti

Consideriamo la curva γ di equazione $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si tratta di una curva semplice e chiusa il cui sostegno è la circonferenza unitaria con centro in $\mathbf{0}$. Il cambio di parametro $t = \omega\tau$ ($\omega \in \mathbb{R}$, fissato) non muta γ e trasforma $\mathbf{r}(t)$

in $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(\omega\tau) = (\cos\omega\tau, \sin\omega\tau)$; quando t varia in $[0, 2\pi]$, τ varia in $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

Le due curve $(\gamma, \mathbf{r})$, $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$ hanno in comune, oltre al sostegno: il verso di percorrenza (antiorario), il *versore* tangente nello stesso punto del sostegno ($\boldsymbol{T}(t) = -\sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j}$ e $\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau) = -\sin\omega\tau\ \mathbf{i} + \cos\omega\tau\ \mathbf{j}$).

Cambiano invece i moduli dei vettori velocità ed accelerazione (ma non il loro verso e la loro direzione): $\mathbf{r}'(t) = \boldsymbol{T}(t)$, $\tilde{\mathbf{r}}'(\tau) = \omega\tilde{\boldsymbol{T}}(\tau)$; $\mathbf{r}''(t) = -\mathbf{r}(t)$, $\tilde{\mathbf{r}}''(\tau) = -\omega^2\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

Ciò non deve stupire in quanto il cambio di variabile $t = \omega\tau$ corrisponde ad un cambio di scala sull'asse dei tempi.

Le due curve $(\gamma, \mathbf{r})$ e $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$ costituiscono un esempio di curve *equivalenti* dal punto di vista geometrico.

Esaminiamo questo concetto in generale.

Siano $(\gamma, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, una curva regolare e $\varphi : \tilde{I} \to I$, dove $\tilde{I}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$, una funzione di classe $C^1(\tilde{I})$ tale che $\varphi'(\tau) \neq 0$, per ogni $\tau \in \tilde{I}$ e che realizzi una corrispondenza biunivoca tra $\tilde{I}$ ed I. La funzione composta

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r} \circ \varphi\ (\tau) : \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$$

è una nuova parametrizzazione di γ.

Poiché $\tilde{\mathbf{r}}'(\tau) = \mathbf{r}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$, la coppia $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$, ovvero γ con la nuova parametrizzazione, è ancora una curva regolare.

Diremo che $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$ si ottiene da $(\gamma, \mathbf{r})$ con un *cambio di parametrizzazione* (o di *parametro*). Evidentemente si ha anche $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}} \circ \varphi^{-1}(t)$.

***Esempio* 1.14** - Sia γ una curva regolare di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, e

$$\varphi(\tau) = \frac{\beta - \tau}{\beta - \alpha} b + \frac{\tau - \alpha}{\beta - \alpha} a = -\frac{b - a}{\beta - \alpha}\tau + \frac{\beta b - \alpha a}{\beta - \alpha} \quad (a < b, \alpha < \beta)\ .$$

Si ha $\varphi'(\tau) = -\dfrac{b - a}{\beta - \alpha} < 0$; la curva γ con la parametrizzazione $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r} \circ \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, è regolare. Si noti che φ trasforma $[\alpha, \beta]$ in $[a, b]$ *cambiandone l'orientazione*: $\varphi(\alpha) = b$ e $\varphi(\beta) = a$.

Come conseguenza, γ è ora percorsa da $\mathbf{r}(b)$ verso $\mathbf{r}(a)$.

In particolare se $\alpha = a$, $\beta = b$ e $\varphi(\tau) = -\tau + b + a$ la curva $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi(\tau) = \mathbf{r}(b + a - \tau)$ si chiama l'*opposta* di $(\gamma, \mathbf{r})$.

La situazione descritta nell'esempio 1.14 si può generalizzare. Passando da $\mathbf{r}$ a $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$, il verso di percorrenza sul sostegno non muta se $\varphi'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in \tilde{I}$; viceversa se $\varphi'(\tau) < 0$ il verso di percorrenza è l'opposto. Si vedano le figure 10.

Diremo che due curve $(\gamma, \mathbf{r})$ e $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$ *sono equivalenti* se possono essere ottenute

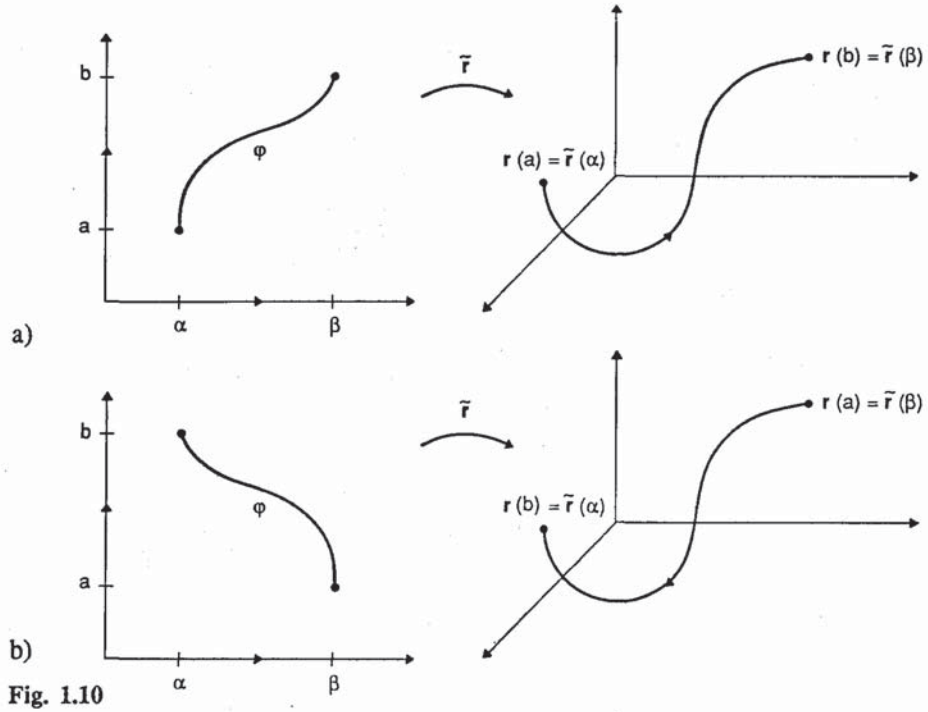


Fig. 1.10

una dall'altra con un cambio di parametro che non muti l'orientazione. Lasciamo al lettore la verifica che la relazione così introdotta nell'insieme di tutte le curve regolari è effettivamente una relazione di equivalenza che, pertanto, le ripartisce in classi disgiunte, individuate ciascuna da una coppia $(\gamma, \mathbf{r})$.

Si possono allora identificare le curve in una stessa classe di equivalenza e definire *curva orientata* una delle classi stesse. Quando ci si limita a curve semplici, questo procedimento identifica sostanzialmente una curva orientata col sostegno γ munito di un verso di percorrenza.

In questo caso, data una curva orientata γ, la sua opposta si indicherà con $-\gamma$.

Curve equivalenti hanno *versori* tangenti coincidenti nello stesso punto del sostegno (dunque la *retta tangente* è la stessa) mentre abbiamo già osservato che i vettori velocità ed accelerazione subiscono modificazioni nel modulo e, per la accelerazione, in generale, anche in direzione.

1.5 Curve rettificabili. Lunghezza di una curva

In questo paragrafo stabiliamo che cosa si debba intendere per lunghezza di una curva e per quali curve questo concetto è ben posto.

Sia data una curva γ di equazione $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Fissiamo una suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ dell'intervallo

$[a, b]$ e poniamo, per $j = 0, \ldots, n$ $\mathbf{r}(t_j) = \mathbf{p}_j$.

I punti $\mathbf{p}_j$ individuano una poligonale inscritta nella curva, ovvero con vertici su γ, che chiamiamo $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

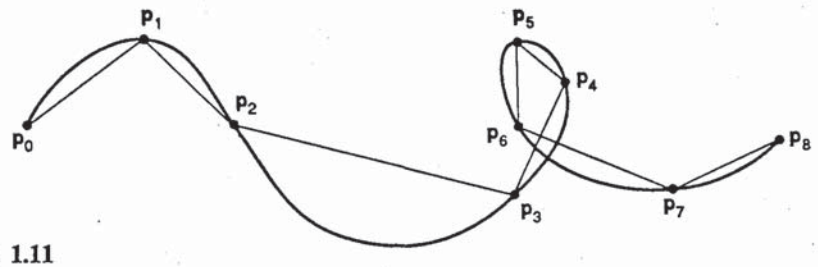


Fig. 1.11

La lunghezza della poligonale è

$$l(\Gamma_{\mathcal{D}}) = \sum_{j=0}^{n-1} ||\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|| = \sum_{j=0}^{n-1} ||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j)|| \ .$$

Sia ora $L := \sup l(\Gamma_{\mathcal{D}})$ dove l'estremo superiore è cercato al variare di tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$.

Definizione 1.5 - *Se $L < +\infty$ si dice che la curva $(\gamma, \mathbf{r})$ è rettificabile e che L è la sua lunghezza, indicata con $l(\gamma, \mathbf{r})$.*

Se $L = +\infty$ la curva $(\gamma, \mathbf{r})$ si dice non rettificabile.

***Esempio* 1.15** - Sia $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$x(t) = t \ , \ y(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{\pi}{2t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la suddivisione

$$\mathcal{D}_n = \left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

dell'intervallo $[0, 1]$.

Poiché $\sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^j$, $(j = 0, \ldots, n)$, oltre all'origine $(0, 0)$, i punti della poligonale corrispondente sono $\mathbf{p}_j = \left(\frac{1}{2j-1}, (-1)^j \frac{1}{2j-1}\right)$ (fig. 12).

Si ha, per $j \geq 1$,

$$||\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|| = \sqrt{\left(\frac{2}{4j^2-1}\right)^2 + \left(\frac{4j}{4j^2-1}\right)^2} \geq \frac{1}{j} ,$$

quindi

$$l(\Gamma_{\mathcal{D}_n}) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} .$$

Poiché la serie armonica è divergente, ne segue che $l(\Gamma_{\mathcal{D}_n}) \to +\infty$ per $n \to +\infty$ ed essendo, per ogni n, $l(\gamma, \mathbf{r}) > l(\Gamma_{\mathcal{D}_n})$, si conclude che $(\gamma, \mathbf{r})$ non è rettificabile.

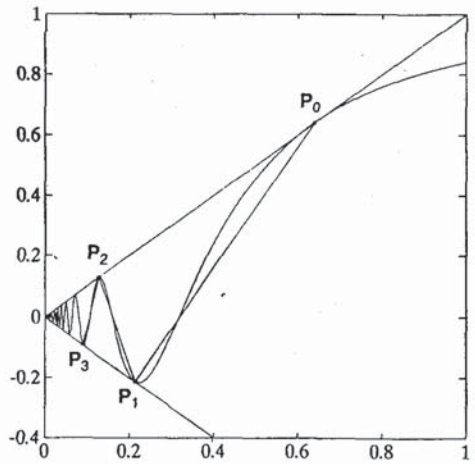


Fig. 1.12 La curva non rettificabile dell'esempio 1.15.

Il prossimo teorema mostra che tutte le curve regolari, definite in un intervallo $[a, b]$, sono rettificabili e la loro lunghezza si calcola con una comoda formula.

■ **Teorema 1.6** - *Se γ è una curva regolare di equazione $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ allora è rettificabile e vale la formula*

$$L = l(\gamma, \mathbf{r}) = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt . \tag{1.8}$$

Si noti come la formula (1.8) sia in accordo con l'intuizione: una lunghezza si ottiene integrando la velocità di percorrenza nel tempo impiegato a percorrerla.

Inoltre, usando la (1.8), si verifica facilmente che la nozione di lunghezza introdotta con la definizione 1.5 è in accordo con quella usuale di lunghezza di un segmento e di una circonferenza.

Dimostrazione del Teorema 1.6 - Sia $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo $\mathbf{r}'(t)$ continuo, si ha, utilizzando a) e b) del lemma 1.4:

$$||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j)|| = \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{r}'(t)dt \right\| \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} ||\mathbf{r}'(t)||dt .$$

Dunque

$$l(\Gamma_{\mathcal{D}}) = \sum_{j=0}^{n-1} ||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j)|| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} ||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt ,$$

cosicché

$$l(\gamma, \mathbf{r}) = \sup_{\mathcal{D}} l(\Gamma_{\mathcal{D}}) \leq \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt$$

e $(\gamma, \mathbf{r})$ risulta rettificabile.
Per dimostrare la 1.8 occorre la disuguaglianza opposta:

$$l(\gamma, \mathbf{r}) \geq \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $\mathbf{r}'(t)$ continua in $[a, b]$ è anche uniformemente continua, per il teorema di Cantor–Heine. Si può scegliere allora $\delta = \delta(\varepsilon)$ in modo che, se $t, s \in [a, b]$ e $|t - s| < \delta$ risulti $||\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(s)|| < \varepsilon$.
Sia ora $\mathcal{D}$ una suddivisione di $[a, b]$ di ampiezza $< \delta$, cioè $\max_{j=0,\ldots,n-1} |t_{j+1} - t_j| < \delta$.
Avremo allora, se $t \in [t_j, t_{j+1}]$, che $||\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_j)|| < \varepsilon$, che implica $||\mathbf{r}'(t)|| < < ||\mathbf{r}'(t_j)|| + \varepsilon$. Quindi:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} ||\mathbf{r}'(t)||dt \leq ||\mathbf{r}'(t_j)||(t_{j+1} - t_j) + \varepsilon(t_{j+1} - t_j) =$$

$$= \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t_j)]dt \right\| + \varepsilon(t_{j+1} - t_j) \leq$$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$\leq \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{r}'(t)dt \right\| + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_j)]dt \right\| + \varepsilon(t_{j+1} - t_j) \leq$$

(a) e c) del lemma 1.4)

$$\leq ||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j))|| + \int_{t_j}^{t_{j+1}} ||\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_j)||dt + \varepsilon(t_{j+1} - t_j) \leq$$

$$\leq ||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j)|| + 2\varepsilon(t_{j+1} - t_j) .$$

Ne segue che

$$\int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_{j+1}}^{t_j} ||\mathbf{r}'(t)||dt \le \sum_{j=0}^{n-1} \{||\mathbf{r}(t_{j+1}) - \mathbf{r}(t_j)|| + 2\varepsilon(t_{j+1} - t_j)\}$$

$$= l(\Gamma_{\mathcal{D}}) + 2\varepsilon(b-a) \le l(\gamma, \mathbf{r}) + 2\varepsilon(b-a) .$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0_+$ si ottiene la disuguaglianza voluta. □

Esempi

1.16. Calcoliamo la lunghezza dell'elica cilindrica di equazione vettoriale $\mathbf{r}(t) = R\cos t\ \mathbf{i} + R\sin t\ \mathbf{j} + ct\ \mathbf{k}$; $t \in [0, 2\pi]$.

Si ha $v(t) = ||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{R^2(\sin t)^2 + R^2(\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{R^2 + c^2}$ e quindi

$$L = \int_0^{2\pi} v(t)dt = 2\pi\sqrt{R^2 + c^2} .$$

1.17. Calcoliamo la lunghezza dell'ellisse di equazione vettoriale $\mathbf{r}(t) = a\cos t\ \mathbf{i} + b\sin t\ \mathbf{j}$. Si ha, se $a > b$:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin t)^2 + b^2(\cos t)^2}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2(\cos t)^2}dt$$

dove $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ si chiama *eccentricità* dell'ellisse.

Gli integrali del tipo $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2(\cos t)^2}dt$ si chiamano integrali *ellittici* (di seconda specie) e si integrano numericamente.

Naturalmente, se $a = b$ si trova $L = 2\pi a$.

1.18. Per le curve piane che sono grafico di una funzione $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ la formula (1.8) prende la forma

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt . \tag{1.9}$$

Ad esempio la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ è

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\text{Sett Sh } 2} (\text{Ch } x)^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log(2 + \sqrt{8})}{4} .$$

1.19. Per una curva piana regolare di equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ la formula della lunghezza è (Esempio 1.14):

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta . \tag{1.10}$$

Ad esempio, per la lunghezza della cardioide di equazione $\rho = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 8 .$$

1.20. Sia γ la curva di equazione $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$x(t) = y(t) = \begin{cases} t\sin\dfrac{\pi}{2t} & t \ne 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Il sostegno è il segmento sulla retta di equazione $y = x$ di estremi $\mathbf{p}_0 = (m, m)$ e $\mathbf{p}_1 = (1, 1)$, dove $m = \min_{t\in[0,1]} x(t)$.

Tuttavia, ragionando come nell'esempio 1.16, si dimostra che $(\gamma, \mathbf{r})$ non è *rettificabile*.

Questo esempio indica che la lunghezza non può essere un concetto associato unicamente al sostegno di una curva. Qui, la non rettificabilità di $(\gamma, \mathbf{r})$ è dovuta al fatto che, al variare di t, il punto $\mathbf{r}(t)$ compie infinite oscillazioni sul segmento di retta $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$ e ognuna di queste contribuisce ad aumentarne la lunghezza.

La nostra particella ideale percorre una traiettoria fatta di segmenti rettilinei tutti contenuti in $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$, di lunghezza totale infinita. La parametrizzazione (1.11) del segmento $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$ è quindi sostanzialmente diversa da quella naturale $x(t) = y(t) = t$.

L'anomalia messa in luce nell'esempio precedente scompare se ci si limita a curve regolari o regolari a tratti.

Si ha infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.7 - *Siano $(\gamma, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$, $\tilde{\mathbf{r}} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, due curve regolari. Se $\tilde{\mathbf{r}}$ si ottiene con un cambio di parametrizzazione da $\mathbf{r}$ allora $l(\gamma, \mathbf{r}) = l(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$. In particolare la lunghezza è identica per curve equivalenti e non dipende dall'orientazione.*

Dimostrazione - Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$, di classe C^1, tale che $\varphi'(\tau) \ne 0$, $\forall\tau \in [\alpha, \beta]$ e tale che $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{r}(\varphi(\tau))$.

Si ha, se $\varphi' > 0$:

$$l(\gamma, \mathbf{r}) = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt = [\text{ posto } t = \varphi(\tau)] = \int_\alpha^\beta ||\mathbf{r}'(\varphi(\tau))||\varphi'(\tau)d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\|\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}\right\| d\tau = l(\gamma, \tilde{\mathbf{r}}) .$$

Se $\varphi' < 0$:

$$l(\gamma, \mathbf{r}) = \int_\beta^\alpha ||\mathbf{r}'(\varphi(\tau))||\varphi'(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta ||\mathbf{r}'(\varphi(\tau))||(-\varphi'(\tau))d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \right\| d\tau = l(\gamma, \tilde{\mathbf{r}}). \ \square$$

La proposizione 1.7 permette in pratica di scegliere il "parametro più comodo" per il calcolo della lunghezza. In tal caso dunque $l(\gamma, \mathbf{r}) = l(\gamma)$.

Un'altra proprietà della lunghezza è l'additività.

Precisamente, siano γ_1 di equazione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e γ_2 di equazione $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^3$, tali che $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b)$ (condizione di *raccordo*). Si può allora definire *unione* di γ_1 e γ_2 la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ di equazione $\mathbf{r} : [a, c] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & t \in [a, b] \\ \mathbf{r}_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}.$$

Se γ_1 e γ_2 sono *regolari* allora γ è, in generale, solo regolare a tratti; è regolare se e solo se $\mathbf{r}_1'(b) = \mathbf{r}_2'(b)$.

Nello stesso modo si può definire l'unione di un numero finito di curve γ_j di equazione $\mathbf{r}_j : [a_j, a_{j+1}] \to \mathbb{R}^3$, tali che $\mathbf{r}_j(a_{j+1}) = \mathbf{r}_{j+1}(a_{j+1})$, $j = 1, \ldots, N$.

La curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_N$ è, in generale, regolare a tratti; è regolare se e solo se $\mathbf{r}_j'(a_{j+1}) = \mathbf{r}_{j+1}'(a_{j+1})$ per ogni $j = 1, \ldots, N$.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.8 - *Se le curve γ_j per ogni $j = 1, \ldots, N$, sono rettificabili, anche $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_N$ è rettificabile e inoltre, se $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione di γ:*

$$l(\gamma, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} l(\gamma_j, \mathbf{r}_j) \ . \tag{1.12}$$

Dimostrazione - Dalla dimostrazione per $N = 2$ segue quella per N generico in base al principio di induzione. Sia dunque $N = 2$ e siano $\mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b)$.

Sia $\mathcal{D} = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = c\}$ una suddivisione di $[a, c]$.

Per un certo j avremo, $t_j \le b < t_{j+1}$; da $\mathcal{D}$ costruiamo ora una suddivisione di $[a, b]$, $\mathcal{D}' = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, b\}$ ed una di $[b, c]$, $\mathcal{D}'' = \{b, t_{j+1}, \ldots, c\}$.

Poiché

$$||\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j+1})|| = ||\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(b) + \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(t_{j+1})|| \le$$

$$\le ||\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(b)|| + ||\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(t_{j+1})||$$

si ha

$$l(\Gamma_{\mathcal{D}}) \le l(\Gamma_{\mathcal{D}'}) + l(\Gamma_{\mathcal{D}''}) \le l(\gamma_1, \mathbf{r}_1) + l(\gamma_2, \mathbf{r}_2)$$

e quindi anche $\sup_{\mathcal{D}} l(\Gamma_{\mathcal{D}}) \le l(\gamma_1, \mathbf{r}_1) + l(\gamma_2, \mathbf{r}_2)$.

Dunque γ è rettificabile e $l(\gamma, \mathbf{r}) \le l(\gamma_1, \mathbf{r}_1) + l(\gamma_2, \mathbf{r}_2)$.

Abbiamo bisogno della disuguaglianza opposta.

Siano $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$ due suddivisioni di $[a, b]$ e di $[b, c]$ rispettivamente. Allora $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ è una suddivisione di $[a, c]$ e si ha:

$$l(\gamma, \mathbf{r}) \ge l(\Gamma_{\mathcal{D}}) = l(\Gamma_{\mathcal{D}'}) + l(\Gamma_{\mathcal{D}''})$$

che implica

$$l(\gamma, \mathbf{r}) \ge \sup_{\mathcal{D}'} l(\Gamma_{\mathcal{D}'}) + \sup_{\mathcal{D}''} l(\Gamma_{\mathcal{D}''}) = l(\gamma_1, \mathbf{r}_1) + l(\gamma_2, \mathbf{r}_2) \ \square$$

Come immediato corollario otteniamo che le *curve regolari a tratti* sono rettificabili, in quanto esse si possono pensare come unioni di un numero finito di curve regolari.

La (1.12) indica che la formula (1.8) continua a valere per le curve regolari a tratti.

1.6 Ascissa curvilinea. I vettori normale e binormale

Sia $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una curva γ regolare con lunghezza L. Per ogni $t \in [a, b]$ risulta definita la funzione

$$s(t) = \int_a^t v(u)du$$

che rappresenta cinematicamente lo spazio percorso al tempo t, partendo da $\mathbf{r}(a)$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo v continua in $[a, b]$, s è derivabile e $s'(t) = v(t)$. Poiché $v(t) \ne 0$ per ogni $t \in [a, b]$, s risulta una funzione *strettamente crescente* e perciò realizza una corrispondenza biunivoca tra $[a, b]$ e $[0, L]$. La funzione inversa $t = t(s)$ è pure strettamente crescente e derivabile con derivata $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{v(t)}$, continua in $[0, L]$.

Dalle precedenti considerazioni segue che le curve di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(t(s))$ sono equivalenti. Il parametro s si chiama *ascissa curvilinea, lunghezza d'arco* o anche *parametro naturale di una curva*.

Infatti mediante s si può introdurre, almeno per le curve semplici, un sistema di coordinate "intrinseco" sul loro sostegno. Scelto un punto $\mathbf{p}_0$ come "origine", ad esempio $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(a)$, un punto $\mathbf{p} \in \gamma$ ha coordinata $\overline{s}$ se $\overline{s}$ è la lunghezza dell'arco

di curva da $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}$. Viceversa, dato $\bar{s} \in [0, L]$ risulta individuato un unico punto $\mathbf{p} \in \gamma$, quello tale che la lunghezza dell'arco da $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}$ sia uguale ad $\bar{s}$.

L'estensione dei concetti sopraesposti alle curve generalmente regolari non presenta difficoltà; la funzione s è sempre strettamente crescente, derivabile , tranne che in un numero finito di punti, con derivata $s'(t) = v(t)$.

***Esempio* 1.21** - Per l'elica cilindrica di equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\ \mathbf{i} + R\sin t\ \mathbf{j} + ct\ \mathbf{k}\ , \quad t \in [0, 2\pi]$$

abbiamo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + c^2}du = \sqrt{R^2 + c^2}\ t\ ;$$

dunque $t = \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}$ e l'equazione dell'elica riferita al parametro naturale sarà

$$\mathbf{r}(s) = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\mathbf{i} + R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + c^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{cs}{\sqrt{R^2 + c^2}}\mathbf{k}\ .$$

D'ora in avanti, data una curva di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, indicheremo con $\mathbf{r}'$ la derivata rispetto al parametro "temporale" t $\left(\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ e, pensando tacitamente $t = t(s)$, con $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ la derivata rispetto al parametro ascissa curvilinea.

Un'importante osservazione è la seguente: *il vettore* $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ *coincide con il versore tangente* $\boldsymbol{T}$ *nel punto* $\mathbf{r}(t(s))$ *ed è diretto nel verso delle* s *crescenti.*

Infatti

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{v(t)}$$

e quindi $\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right\| = 1$. Dunque, se $\mathbf{r}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j} + z(t)\ \mathbf{k}$, i numeri $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$ rappresentano i *coseni direttori* della retta tangente alla curva nel punto $\mathbf{r}(t(s))$.

Oltre al versore tangente $\boldsymbol{T}$ vi sono altri due vettori intrinsecamente associati ad una curva: il vettore *normale principale* $\boldsymbol{N}$ ed il vettore *binormale* $\boldsymbol{B}$.

Supponiamo d'ora in poi che le curve siano regolari e di classe $C^2([a, b])$.

Poiché $||\boldsymbol{T}(t)|| = 1$ per ogni $t \in [a, b]$, in base al lemma 1.3 si deduce che il vettore $\boldsymbol{T}'(t)$ è ortogonale a $\boldsymbol{T}(t)$ per ogni $t \in [a, b]$. Se $\boldsymbol{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ è ben definito il versore $\boldsymbol{N}(t) = \dfrac{\boldsymbol{T}'(t)}{||\boldsymbol{T}'(t)||}$ che si chiama **normale principale.**

Essendo, come abbiamo già osservato, $\boldsymbol{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, il vettore $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ è diretto come $\boldsymbol{T}'$ (*) e perciò la *normale principale* si può definire con la formula

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \Big/ \left\|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\| .$$

Sottolineiamo che, anche se $\mathbf{r}'(t)$ è diretto come $\boldsymbol{T}$, il vettore accelerazione *non* è in generale diretto come $\boldsymbol{N}$; ritorneremo sull'argomento nel teorema 1.9.

Se $\boldsymbol{N} \neq \mathbf{0}$ la relazione

$$\boldsymbol{B} := \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N}$$

definisce un terzo vettore, che si chiama **binormale.**

I tre vettori $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ costituiscono una terna mobile ortonormale, legata alla curva e avente la stessa orientazione della terna $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (**); a volte essa si chiama *terna intrinseca* (alla curva).

Il piano individuato dai versori $\boldsymbol{T}(t)$ ed $\boldsymbol{N}(t)$ si chiama piano *osculatore* alla curva nel punto $\mathbf{r}(t)$: tra tutti i piani contenenti la tangente alla curva in un suo punto è quello che si "adatta" meglio ad essa (Esercizio 1.5).

L'equazione del piano osculatore in un punto $\mathbf{r}(t)$ è la seguente:

$$< \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}(t)\,, \boldsymbol{B}(t) >= 0 \tag{1.13}$$

dove $\boldsymbol{\xi}$ è il punto corrente sul piano.

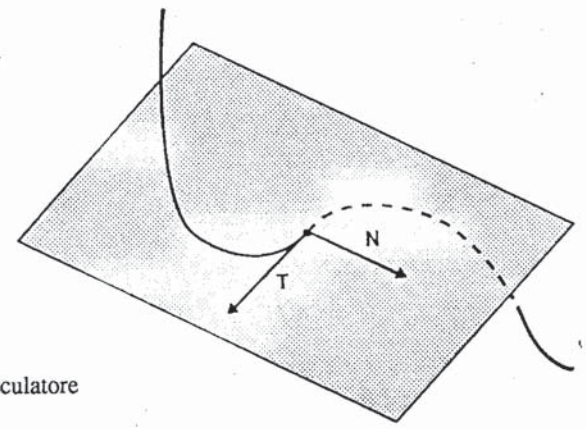


Fig. 1.13 Piano osculatore

(*) Infatti $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \dfrac{d\boldsymbol{T}}{dt} \cdot \dfrac{1}{s'(t)}$.

(**) Le terne come $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si chiamano *destrorse*: se $\mathbf{i}$ è diretto come l'indice della mano destra, $\mathbf{j}$ come il medio, allora il pollice è diretto come $\mathbf{k}$.

Nel caso delle curve piane il vettore normale principale è diretto "*verso la convessità*" della curva (*) come mostrato in figura 1.14.

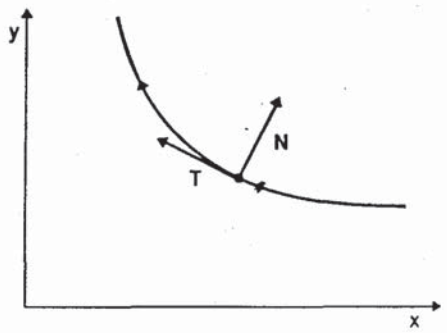


Fig. 1.14.

Se una curva è piana (e non è una retta), il suo sostegno giace nel piano osculatore di un suo punto qualunque.

Anche i piani passanti per $\mathbf{r}(t)$ e paralleli ai piani dei versori $\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$, rispettivamente, hanno un nome: il primo si chiama piano *normale* e il secondo piano *rettificante*.

*1.7 Curvatura e torsione

Elementi caratteristici di una curva in un punto sono la *curvatura* e la *torsione*. Essi non variano per cambiamenti di sistema di riferimento e neppure per cambi di parametrizzazione, se si eccettua il segno della torsione che cambia con l'orientazione; sono perciò chiamati gli *invarianti geometrici* di una curva e descrivono proprietà del sostegno.

Per una retta, il versore tangente $\boldsymbol{T}$ si mantiene costante in direzione e verso; viceversa, per una traiettoria non rettilinea, $\boldsymbol{T}$ muta di direzione.

Definizione 1.6 - *Si chiama* **vettore curvatura** *il vettore* $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$, *velocità di variazione di* $\boldsymbol{T}$ *rispetto alla lunghezza d'arco. La sua norma si chiama* **curvatura**.

In formule abbiamo, ricordando che se $\boldsymbol{T}' \neq \mathbf{0}$ esiste il vettore normale principale $\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{T}'(t)/||\boldsymbol{T}'(t)||$:

(*) Più precisamente nel sistema di riferimento $\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{N}(t)$ con origine in $\mathbf{r}(t)$, il sostegno della curva è localmente grafico di un funzione convessa (Esercizio 18).

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{v(t)} = \frac{||\boldsymbol{T}'(t)||}{v(t)}\boldsymbol{N}(t)\,. \tag{1.14}$$

Dunque, il vettore curvatura è diretto come la normale principale e per la curvatura, che indichiamo con $k(t)$, si ha:

$$k(t) := \left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\| = \frac{||\boldsymbol{T}'(t)||}{v(t)}\,. \tag{1.15}$$

La (1.14) si può allora scrivere nella forma $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} = k(t)\boldsymbol{N}(t)$.

Ricordando che $\boldsymbol{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ possiamo equivalentemente definire *vettore curvatura* il vettore $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ e *curvatura* la sua norma $\left\|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|$.

Il reciproco di $k(t)$, $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ ($\rho = +\infty$ se $k = 0$) prende il nome di *raggio di curvatura*; il punto $\mathbf{c}(t)$ a distanza $\rho(t)$ nella direzione $\boldsymbol{N}(t)$ si chiama *centro di curvatura*.

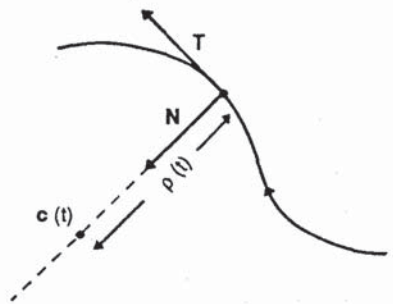


Fig. 1.15

La curvatura k (o il suo reciproco ρ) misura il grado di scostamento di una curva dall'andamento rettilineo.

Si chiama *cerchio osculatore* il cerchio giacente nel piano osculatore di centro $\mathbf{c}(t)$ e raggio $\rho(t)$.

Esempi

1.22. Una retta ha curvatura nulla e raggio di curvatura ∞ in ogni suo punto.

1.23. Consideriamo la circonferenza $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\ \mathbf{i} + R\sin\omega t\ \mathbf{j}$.

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= -\omega R \sin \omega t \ \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \ \mathbf{j} \\
\boldsymbol{T}(t) &= -\sin \omega t \ \mathbf{i} + \cos \omega t \ \mathbf{j} \\
\boldsymbol{T}'(t) &= -\omega \cos \omega t \ \mathbf{i} - \omega \sin \omega t \ \mathbf{j} \\
v(t) &= R\omega, \ ||\boldsymbol{T}'(t)|| = \omega \ .
\end{aligned}$$

Dunque $k(t) = \dfrac{1}{R}$, $\rho(t) = R$, ovvero la curvatura di una circonferenza è costante e pari all'inverso del raggio.

Si può mostrare (Esercizio 10) che le sole curve piane a curvatura costante sono le circonferenze.

1.24. Sia data l'elica circolare di equazione $\mathbf{r}(t) = R\cos t \ \mathbf{i} + R\sin t \ \mathbf{j} + ct \ \mathbf{k}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= -R\sin t \ \mathbf{i} + R\cos t \ \mathbf{j} + c \ \mathbf{k} \ , \ v(t) = \sqrt{R^2 + c^2} \ , \\
\boldsymbol{T}(t) &= -\frac{R}{\sqrt{R^2+c^2}}(\sin t \ \mathbf{i} - \cos t \ \mathbf{j}) + \frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}} \ \mathbf{k} \ , \\
\boldsymbol{T}'(t) &= -\frac{R}{\sqrt{R^2+c^2}}(\cos t \ \mathbf{i} + \sin t \ \mathbf{j}), \ ||\boldsymbol{T}'(t)|| = \frac{R}{\sqrt{R^2+c^2}} \ .
\end{aligned}$$

Ne segue $k(t) = \dfrac{R}{R^2+c^2}$, $\rho(t) = \dfrac{R^2+c^2}{R}$.

Supponiamo che una particella si muova con velocità scalare costante. Se la traiettoria è rettilinea il moto è rettilineo uniforme e nessuna forza agisce sulla particella ovvero essa non subisce alcuna accelerazione. Se la traiettoria devia dall'andamento rettilineo, la particella è sottoposta ad una accelerazione centripeta, cioè rivolta verso il centro di curvatura. Tale accelerazione è tanto più intensa quanto più la traiettoria "si incurva" o, più precisamente, quanto più la curvatura è elevata. Queste considerazioni sono presentate rigorosamente nel prossimo teorema.

■ **Teorema 1.9** - *Sia* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *l'equazione vettoriale di una curva regolare di classe* $C^2([a,b])$. *Allora valgono le seguenti formule:*

a) $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + k(t)v(t)^2 \, \boldsymbol{N}(t) \quad (\boldsymbol{T}' \neq \mathbf{0})$ (1.16)

b) $k(t) = \dfrac{||\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)||}{v(t)^3} = \dfrac{||\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{a}(t)||}{v(t)^3}$. (1.17)

La (1.16) è una formula di decomposizione dell'accelerazione nelle sue componenti tangenziale e normale; si può notare come la componente normale sia direttamente proporzionale alla curvatura. La (1.17) è una formula per la curvatura, in generale più utile della definizione.

Dimostrazione - Si ha $\mathbf{r}'(t) = v(t)\boldsymbol{T}(t)$ e quindi $\mathbf{r}''(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + v(t)\boldsymbol{T}'(t)$. D'altra parte, per la (1.15), $\boldsymbol{T}'(t) = ||\boldsymbol{T}'(t)||\boldsymbol{N}(t) = k(t)v(t)\boldsymbol{N}(t)$ e perciò la (1.16) segue immediatamente.

Per ottenere la formula (1.17), moltiplichiamo a destra vettorialmente per $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ entrambi i membri della (1.16); si ottiene, per la linearità del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t) \wedge \mathbf{r}'(t) &= v'(t)\boldsymbol{T}(t) \wedge \mathbf{r}'(t) + k(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t) \wedge \mathbf{r}'(t) = \\
&= k(t)v(t)^2\boldsymbol{N}(t) \wedge \mathbf{r}'(t) \ .
\end{aligned}$$

(essendo $\boldsymbol{T} \wedge \mathbf{r}' = \mathbf{0}$).

Dunque

$$\begin{aligned}
||\mathbf{r}''(t) \wedge \mathbf{r}'(t)|| &= k(t)v(t)^2||\boldsymbol{N}(t) \wedge \mathbf{r}'(t)|| = \\
&= k(t)v(t)^2||\mathbf{r}'(t)|| = k(t)\, v(t)^3
\end{aligned}$$

che è la (1.17).

Abbiamo usato il fatto che

$$||\boldsymbol{N}(t) \wedge \mathbf{r}'(t)|| = ||\boldsymbol{N}(t)|| \cdot ||\mathbf{r}'(t)|| \sin \varphi = ||\mathbf{r}'(t)|| \ ,$$

essendo $\boldsymbol{N} \perp \mathbf{r}'$. □

La (1.17), oltre che essere più comoda per il calcolo della curvatura, indica che, quando $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$, il piano osculatore è individuato da questi due vettori.

Come conseguenza si ha:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''}{||\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''||}$$

e l'equazione del piano osculatore nel punto $\mathbf{r}(t_0)$ prende la forma seguente:

$$< \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}(t_0), \ \mathbf{r}'(t_0) \wedge \mathbf{r}''(t_0) >= 0$$

ovvero se $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

***Esempio* 1.25** - Nel moto circolare uniforme $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t \ \mathbf{i} + R\sin\omega t \ \mathbf{j}$ si ha (Esempio 1.22) $k(t) = \dfrac{1}{R}$, $v(t) = \omega R$.

Ne segue che la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla mentre quella centripeta ha norma $\omega^2 R$.

Vale la pena di mettere in luce alcuni casi particolari. Nel caso di una curva piana di equazione $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ la formula (1.17) diventa

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} . \tag{1.18}$$

Si noti che il numeratore della (1.18) è il modulo del determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} .$$

Se, più in particolare, la curva piana è definita dall'equazione $y = f(x)$, la (1.18) prende la forma seguente:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} . \tag{1.19}$$

***Esempio* 1.26** - La curvatura di una parabola è massima nel vertice. Infatti, se l'equazione della parabola è $y = ax^2 + bx + c$, si ha $y'' = 2a$, $y' = 2ax + b$.
Dunque

$$k(x) = \frac{2|a|}{(1 + (2ax + b)^2)^{3/2}} .$$

che è massima quando $2ax + b = 0$ ovvero per $x = -\dfrac{b}{2a}$, ascissa del vertice.

***Esempio* 1.27** - *Significato geometrico della curvatura di una curva piana.*

Sia $\boldsymbol{T}$ il versore tangente di una curva piana di equazione $\mathbf{r}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j}$. Ricordiamo che $\boldsymbol{T} = \dfrac{dx}{ds}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{ds}\mathbf{j}$, ovvero che $\dfrac{dx}{ds} = \cos\varphi(s)$ e $\dfrac{dy}{ds} = \sin\varphi(s)$ dove $\varphi = \varphi(s)$ è l'angolo che $\boldsymbol{T}$ forma con l'asse delle ascisse nel punto $t = t(s)$ (si veda la figura 1.16). Si ha dunque:

$$\boldsymbol{T}(s) = \cos\varphi(s)\ \mathbf{i} + \sin\varphi(s)\ \mathbf{j}$$

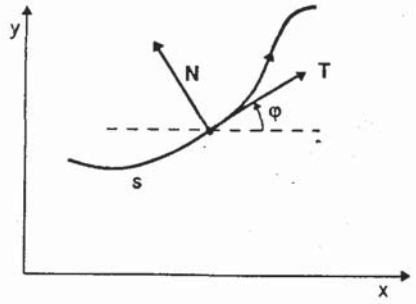


Fig. 1.16

Allora $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} = -\dfrac{d\varphi}{ds}\sin\varphi(s)\ \mathbf{i} + \dfrac{d\varphi}{ds}\cos\varphi(s)\ \mathbf{j}$ e perciò

$$k(s) = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| . \tag{1.20}$$

La (1.20) indica che k è il *modulo della velocità di variazione dell'angolo φ rispetto all'ascissa curvilinea*. In altri termini k è il *modulo della velocità di rotazione* del sistema di riferimento mobile $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$ rispetto alla lunghezza d'arco.

Se la curvatura misura la tendenza a deviare da una traiettoria rettilinea, la *torsione* misura il grado di scostamento di una curva rispetto alla forma piana.
Il vettore $\boldsymbol{B}$, la *binormale*, si presta particolarmente a misurare tale deformazione. Infatti se una curva (o meglio il suo sostegno) è contenuta in un piano, questo coincide con il piano osculatore e perciò il versore $\boldsymbol{B}$ è *costante*.
Viceversa, se $\boldsymbol{B}$ è costante si può mostrare che la curva è piana (Esercizio 13).

Cominciamo col definire **vettore di torsione** il vettore $\dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds}$.
Vale il seguente teorema.

▪ **Teorema 1.10** - *Per ogni curva regolare di classe C^3 valgono le seguenti formule, dette* **formule di Frénet**.

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = k\boldsymbol{N}$$

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -\tau\boldsymbol{B} - k\boldsymbol{T}$$

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \tau\boldsymbol{N} .$$

La prima delle formule non è altro che la definizione di k; la terza definisce il numero τ che prende il nome di **torsione** della curva. Una notevole interpretazione cinematica delle formule di Frénet è indicata nell'esercizio 18.

Dimostrazione - La prima formula è la (1.14).
Dimostriamo la terza. Essendo $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N}$ si ha, ricordando la b) del lemma 1.2:

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} \wedge \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \boldsymbol{T} \wedge \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \tag{1.21}$$

essendo $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ parallelo ad $\boldsymbol{N}$. La (1.21) indica che $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ è ortogonale a $\boldsymbol{T}$, mentre per il lemma 1.3, $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ risulta ortogonale a $\boldsymbol{B}$. Ne segue che $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ è parallelo ad $\boldsymbol{N}$, ovvero esiste τ tale che $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \tau \boldsymbol{N}$.

Veniamo alla seconda formula. Essendo $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{B}$, si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \boldsymbol{B} - \boldsymbol{T} \wedge \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -k\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{B} - \tau \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N} = -k\boldsymbol{T} - \tau \boldsymbol{B} \quad \square$$

Si può dimostrare (Esercizio 13) che una curva è piana se e solo se $\tau = 0$ in ogni suo punto. Si noti che, diversamente da k, sempre positiva o nulla, τ può essere anche negativa.

Assegnate le funzioni $k = k(s) > 0$ di classe C^1 e $\tau = \tau(s)$ continua, esiste un'unica curva, definita a meno di rototraslazioni nello spazio e riferita ad s come parametro naturale, di classe C^3, avente curvatura $k(s)$ e torsione $\tau(s)$. Le equazioni $k = k(s)$ e $\tau = \tau(s)$ si chiamano *equazioni intrinseche della curva.* Non potendo soffermarci a dimostrare le affermazioni precedenti (si veda comunque l'Esercizio 9) ci limitiamo ad osservare che curve equivalenti hanno medesima curvatura e torsione, essendo queste espresse mediante derivazione rispetto al parametro naturale dei tre versori fondamentali; cambiando l'orientazione di una curva cambia di segno la torsione.

Dal punto di vista pratico ciò significa che per il calcolo di k e τ possiamo "parametrizzare" la curva nel modo che riteniamo più conveniente. Sempre dal punto di vista del calcolo, la torsione si può calcolare mediante una formula più comoda della terza formula di Frénet. Infatti si ha:

Proposizione 1.11 - *Se* $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$ *valgono le formule*

$$\tau = -\frac{< \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'', \mathbf{r}''' >}{||\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''||^2} = -\frac{1}{k(s)^2} < \frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} > . \tag{1.22}$$

Per la dimostrazione si veda l'esercizio 19.

Esercizi

1. Dimostrare le formule del lemma 1.2.

2. Calcolare le lunghezze delle seguenti curve.

a) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t^2\,\mathbf{j} + (t-1)\,\mathbf{k} \quad t \in [0,1]$

b) $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\,\mathbf{i} + 2e^t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \quad t \in [0,1]$.

Calcolare poi $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{B}$ e l'angolo che esse formano nel punto $(1,2,0)$.

3. Calcolare le lunghezze delle seguenti curve:

a) $y = \log x \qquad x \in [1,2]$

b) $y = \mathrm{Ch}\, x \qquad x \in [0,1]$

c) $x^2 - y^2 = 1 \quad x \in [1,2]$

4. Generalizzazione della formula (1.7), esempio 1.13.
Siano $\rho = \rho(t)$ e $\theta = \theta(t)$ le coordinate polari nel piano di una particella in moto. L'equazione vettoriale della sua traiettoria è

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\cos\theta(t)\ \mathbf{i} + \rho(t)\sin\theta(t)\ \mathbf{j}\ .$$

Introduciamo i versori

$$\mathbf{u}^r(t) = \cos\theta(t)\ \mathbf{i} + \sin\theta(t)\ \mathbf{j} \quad (\textit{versore radiale: } \mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{u}^r(t))$$

$$\mathbf{u}^\theta(t) = -\sin\theta(t)\ \mathbf{i} + \cos\theta(t)\ \mathbf{j} \quad (\textit{versore trasversale: } < \mathbf{u}^r, \mathbf{u}^\theta >= 0)$$

Dimostrare le seguenti formule di decomposizione:

$$\mathbf{v} = \rho'\mathbf{u}^r + \rho\theta'\mathbf{u}^\theta\ ,\ \mathbf{a} = [\rho'' - \rho(\theta')^2]\mathbf{u}^r + [2\rho'\theta' + \rho\theta'']\mathbf{u}^\theta\ .$$

5. Scrivere le equazioni del piano normale e del piano rettificante.

6. Sia $\mathbf{r}(t) = (2+\cos t)\sin t\ \mathbf{i} + (2+\cos t)\cos t\ \mathbf{j} + \sin t\ \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Descrivere il sostegno della curva.

b) Calcolare la curvatura nel punto $t = \frac{\pi}{2}$

c) Calcolare l'equazione del piano osculatore e del cerchio osculatore nel punto $t = \frac{\pi}{2}$.

d) Calcolare le componenti normale e tangenziale di $\mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

7. *Moto centrale.* Supponiamo che una particella si muova nello spazio soggetta ad un'accelerazione radiale, ovvero tale che, se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è l'equazione della traiettoria, si abbia $\mathbf{r}$ parallelo a $\mathbf{r}'' = \mathbf{a}$.
Dimostrare che $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}'$ è un vettore costante $\mathbf{c}$.
Dedurre che la traiettoria è piana e giace in un piano perpendicolare a $\mathbf{c}$.

8. Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in I$, l'equazione vettoriale di una curva regolare γ. Sia poi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Definiamo *derivata di f lungo* γ l'espressione

$$D_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}(t)) := < \nabla f(\mathbf{r}(t)), \boldsymbol{T}(t) >$$

dove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla curva.

Dimostrare che:

se $f_{|\gamma}$ = costante, se cioè f è costante su γ, allora $D_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

9.* Equazione naturale di *una curva piana.*

Sia $k = k(s) \geq 0$, k curvatura ed s ascissa curvilinea, l'equazione naturale di una curva piana dove k è una funzione continua in un intervallo $[0, L]$.

Si scelga il riferimento cartesiano nel piano in modo che la curva "parta" dall'origine e si chiami $\varphi = \varphi(s)$ l'angolo che il vettore tangente forma con l'asse x. Possiamo anche supporre $\varphi(0) = 0$ ovvero che la curva, per $s = 0$, sia tangente all'asse x (fig. 1.17).

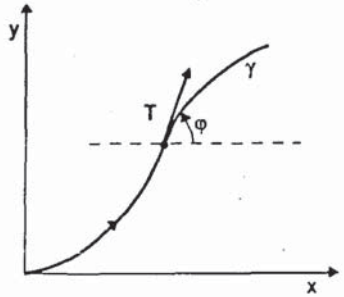


Fig. 1.17

Dimostrare che, posto $F(s) = \int_0^s k(u)du$, le equazioni parametriche della curva riferite al parametro naturale s sono:

$$x(s) = + \int_0^s \cos F(u)du \ , \ y(s) = \int_0^s \sin F(u)du \ ,$$

a meno di simmetrie rispetto all'asse x.

10. Dimostrare che le curve piane a curvatura nulla sono rette e quelle a curvatura costante sono circonferenze.

11. Determinare le equazioni parametriche (riferite all'ascissa curvilinea) della curva (detta *clotoide*) la cui equazione naturale è $k(s) = 2as$ $(s \geq 0)$.

12. Determinare curvatura e torsione delle seguenti curve:

a) $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (2-t)\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}\ , \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\ \mathbf{i} + e^t \cos t\ \mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ , \quad t \in \mathbb{R}$.

13. Dimostrare che una curva regolare di classe C^3 è piana se e solo se $\tau = 0$ in ogni suo punto.

14. Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ una curva differenziabile e chiusa.

Dimostrare che

$$\int_a^b [k'(t)\mathbf{r}(t) - \tau(t)s'(t)\boldsymbol{B}(t)]\,dt = \mathbf{0}\ .$$

(usare le formule di Frénet).

15. Sia $y = f(x)$ di classe $C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$. Sia $S(h)$ l'area racchiusa dal grafico di $y = f(x)$ e dalla retta $y = h$ $(h > 0)$ come indicato in figura 1.18.

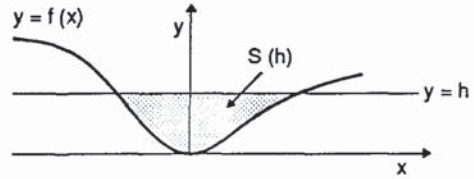


Fig. 1.18

Calcolare $\lim_{h \to 0} \frac{9}{32} \frac{S(h)^2}{h^3}$.

[Risposta: $\frac{1}{k(0)}$, cioè il raggio di curvatura in $x = 0$].

16. Sia $\rho = f(\theta)$ l'equazione polare di una curva piana. Dimostrare che vale la formula seguente per la curvatura:

$$k(\theta) = \frac{|2(\rho')^2 + \rho^2 - \rho\,\rho''|}{[(\rho')^2 + \rho^2]^{3/2}}\ .$$

17.* Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ l'equazione di una curva regolare di classe C^2 con $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$.

Fissato $\mathbf{r}(t_0)$, indichiamo con $\Pi(t_0)$ il piano passante per $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t_0)$ e contenente la retta tangente alla curva in $\mathbf{r}(t_0)$.

Dimostrare che $\lim_{t \to t_0} \Pi(t)$ coincide con il piano osculatore, ovvero che il versore normale a $\Pi(t)$ tende a $\boldsymbol{B}(t_0)$ per $t \to t_0$.

[Suggerimento: un vettore normale a $\Pi(t)$ è $(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)) \wedge \mathbf{r}'(t_0)$; usare il teorema del valore medio per scrivere $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = (t - t_0)\mathbf{r}'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\tilde{\mathbf{r}}''$ dove $\tilde{\mathbf{r}}'' = x''(t_1)\,\mathbf{i} + y''(t_2)\,\mathbf{j} + z''(t_3)\,\mathbf{k}$ e t_1, t_2, t_3 sono opportuni punti tra t e t_0.]

18.* *Interpretazione cinematica delle formule di Frénet.*

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ una curva riferita al parametro naturale s.

Consideriamo un corpo tridimensionale solidale con la terna intrinseca della curva $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ (v. fig. 1.19).

Per la posizione $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ del generico punto del corpo avremo

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r}(s) + \boldsymbol{\xi}(s)$$

dove

$$\boldsymbol{\xi}(s) = \xi_1 \boldsymbol{T}(s) + \xi_2 \boldsymbol{N}(s) + \xi_3 \boldsymbol{B}(s)\ . \tag{1.23}$$

rappresenta il vettore posizione del punto rispetto al sistema di riferimento $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ con origine in $\mathbf{r}(s)$; si osservi che ξ_1, ξ_2, ξ_3 *non* variano con s.

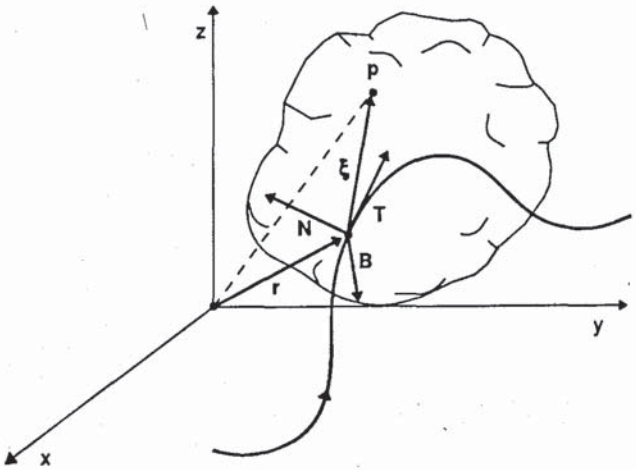


Fig. 1.19

Per la velocità del punto $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ abbiamo dunque

$$\mathbf{p}'(s) = \mathbf{r}'(s) + \boldsymbol{\xi}'(s) \ ;$$

in altre parole, $\mathbf{p}'$ è somma di una componente tangenziale alla curva, di modulo unitario, e della velocità del punto rispetto all'origine $\mathbf{r}(s)$ della terna intrinseca.

a) Dimostrare che, posto $\boldsymbol{\omega} = -\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}$, le formule di Frénet sono equivalenti alle seguenti:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{T} \ , \ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{N} \ , \ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{B} \ . \tag{1.24}$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ si chiama *vettore di Darboux.*

b) Dalle (1.23) e (1.24) dedurre che

$$\boldsymbol{\xi}'(s) = \boldsymbol{\omega}(s) \wedge \boldsymbol{\xi}(s) \ . \tag{1.25}$$

Interpretare cinematicamente la (1.25) in termini di rotazione del corpo attorno ad un asse fisso.

c) Dimostrare che la (1.25) determina univocamente il vettore $\boldsymbol{\omega}$.

19.* Dimostrare le formule (1.22) mediante i passi seguenti:

a) $\tau = < \frac{d\boldsymbol{B}}{ds}, \boldsymbol{N} > = - < \boldsymbol{B}, \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} >.$ (1.26)

b) $\boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{k(t)v(t)^2}(\mathbf{r}''(t) - v'(t)\boldsymbol{T}(t)).$

c) $\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'''}{||\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''||} + \mathbf{w}$, dove $\mathbf{w} \perp \boldsymbol{B}$.

d) Da a) e c) dedurre la prima delle (1.22).

e) Dalla prima delle (1.22) ricavare la seconda ricordando che $k(s) = \left\| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right\|$.

20. Calcolare curvatura e torsione dell'elica ellittica di equazione

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \ \mathbf{i} + b \sin t \ \mathbf{j} + ct \ \mathbf{k} \ .$$

Dimostrare che nel caso $a = b$ (elica cilindrica) la torsione è massima quando il passo è lungo quanto la circonferenza di base.

21.* *Connessione per archi.* Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ esiste una curva γ di equazione $\mathbf{r} : [0,1] \to E$ tale che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{y}$.

a) Dimostrare che se E è *connesso per archi* allora è *connesso* (Definizione 3.2.7 Vol. 1).

[Suggerimento: per assurdo, siano A, B tali che $A \cup B = E$, $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$; considerare poi $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in B$ e una curva γ di equazione $\mathbf{r} : [0,1] \to E$ tale che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{y}$. Ricordare che γ è connesso e definire $G_1 = \gamma \cap A$, $G_2 = \gamma \cap B \ldots$].

b) Mostrare che il grafico della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$ non è *connesso per archi* in $\mathbb{R}^2$, ma è connesso.

c) Mostrare che se E è aperto, E è connesso se e solo se è connesso per archi [ricordare che un aperto è connesso se e solo se è connesso per segmenti (par. 3.2.5 Vol. 1)].

22.** Sia $(\gamma, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, una curva regolare di classe $C^2([a,b])$ con $\boldsymbol{T}' \neq \mathbf{0}$. Dimostrare che nell'intorno di un punto $\mathbf{r}(t)$, $t \in (a,b)$, γ coincide, nel sistema di riferimento $\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t)$ ed origine $\mathbf{r}(t)$, con il grafico di una funzione convessa $v = f(u)$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

[Suggerimento: nel sistema di riferimento indicato, l'asse u è orientato come $\boldsymbol{T}$, l'asse v come $\boldsymbol{N}$. Se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ usare il teorema del Dini per concludere che, in un intorno di $\mathbf{r}(t)$, γ è il grafico di una funzione $y = g(x)$ o $x = h(y)$. Passando al riferimento $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}$ con origine $\mathbf{r}(t)$ tale grafico ha la forma $y = f(u)$ con $f(0) = f'(0) = 0$.

Basta ora far vedere che $f''(0) > 0$. Usare il fatto che $(1, f'(u))$ è il vettore velocità; indi calcolare $\boldsymbol{N}(u)$ in $u = 0$].

2. INTEGRALI CURVILINEI

2.1 Integrali curvilinei rispetto alla lunghezza d'arco o di 1ª specie

Siano $f : \mathbb{R}^3 \supseteq E \to \mathbb{R}$, con E *aperto connesso*, una funzione scalare e $\gamma \subset E$ una curva regolare a tratti di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$.

Definizione 2.1 - *L'integrale di f rispetto alla lunghezza d'arco lungo γ si indica con il simbolo $\int_\gamma f ds$ ed è definito dalla formula seguente*

$$\int_\gamma f\ ds := \int_a^b f \circ \mathbf{r}(t) s'(t) dt \tag{2.1}$$

quando $f \circ \mathbf{r}(t) \cdot s'(t)$ *è integrabile in* $[a, b]$ (*).

Più esplicitamente, se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\int_\gamma f\ ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt\ .$$

L'integrale (2.1) viene detto anche integrale di linea di 1^a specie.

***Esempio* 2.1** - Siano $\mathbf{r}(t) = (t^2, e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, 1]$ e $f(x, y, z) = 2\sqrt{x} + y^2 + z^2$. Si ha:

$$\int_\gamma f\ ds = \int_0^1 (2t + e^{2t}) \sqrt{4t^2 + 2e^{2t}} dt =$$

$$= \frac{1}{6}[(4t^2 + 2e^{2t})^{3/2}]_0^1 = \frac{1}{6}[(4 + 2e^2)^{3/2} - 2^{3/2}]\ .$$

Se la curva è chiusa e lo si vuole sottolineare, si può usare il simbolo $\oint_\gamma ds$.

Per curve piane e funzioni $f: \mathbb{R}^2 \supseteq E \to \mathbb{R}$ la definizione è analoga. Se poi $f \geq 0$, all'integrale (2.1) si può dare una importante interpretazione geometrica (fig. 1.20). Sia γ una curva piana, regolare a tratti, di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. La curva Γ di equazione $\mathbf{R}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$, $t \in [a, b]$ è contenuta nel grafico di f. Al variare di t da a a b, il segmento di retta parallelo all'asse z, di estremi $\mathbf{r}(t)$ ed $\mathbf{R}(t)$ descrive una superficie che chiamiamo S. Il prodotto $f(\mathbf{r}(t))ds$ è interpretabile come area di un rettangolo, di base ds ed altezza $f(\mathbf{r}(t))$.

È ragionevole dunque interpretare $\int_\gamma f\ ds$ come *area* della superficie S.

Ritorneremo sul concetto di area di una superficie nel capitolo 6.

***Esempio* 2.2** - Calcoliamo l'integrale $\int_\gamma f ds$ dove γ è la semicirconferenza di equazione $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$ ed $f(x, y) = -y$. Tale integrale rappresenta geometricamente l'area del pezzo di superficie cilindrica S, indicata in figura 1.20. Si ha:

$$\text{area}\ (S) = \int_\gamma f\ ds = \int_\pi^{2\pi} -\sin t\ dt = 2\ .$$

(*) L'integrale $\int_\gamma f ds$ si può definire anche quando γ è solo rettificabile, come integrale di Riemann-Stieltjes, quando quest'ultimo integrale esista (par. 8.3.4 Vol. 1).

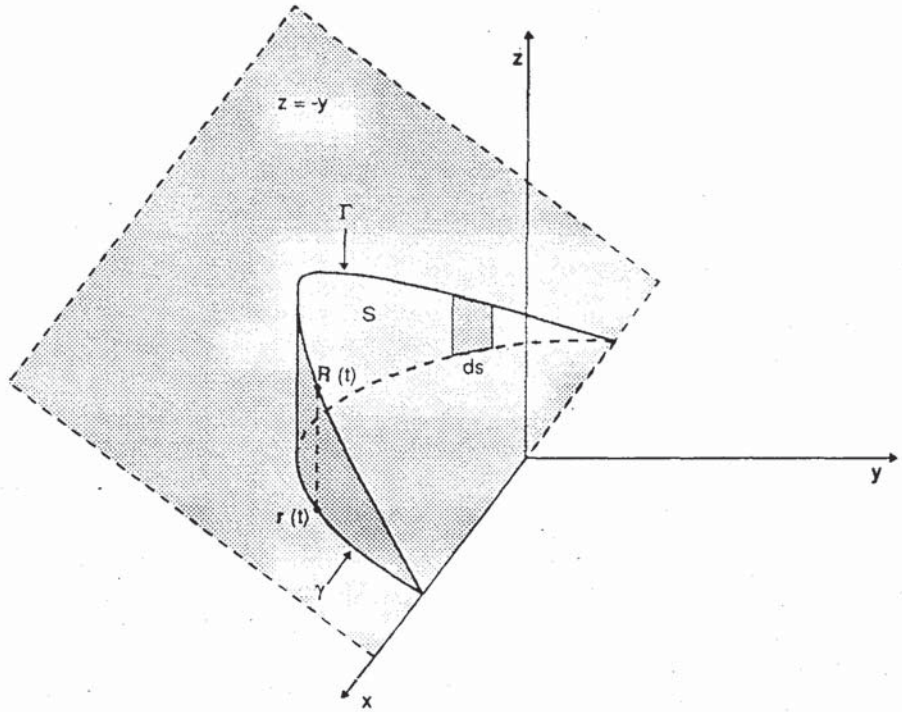


Fig. 1.20 Interpretazione geometrica di $\int_\gamma f\, ds$, $f(x, y) = -y$ (Esempio 2.2).

Le principali proprietà dell'integrale di linea (2.1) sono contenute nella seguente proposizione che giustifica, tra l'altro, l'uso della notazione $\int_\gamma$ dove non compare la parametrizzazione.

Proposizione 2.1 - *Siano* f, g *funzioni scalari definite in* $E \subseteq \mathbb{R}^3$ *e* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ *curve regolari contenute in* E; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Allora:*

a) $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f\ ds + \beta \int_\gamma g\ ds$

(linearità rispetto all'integranda)

b) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\ ds = \int_{\gamma_1} f\ ds + \int_{\gamma_2} f\ ds$

(additività rispetto al cammino di integrazione)

c) Se γ_1 è equivalente o opposta a γ_2:

$\int_{\gamma_1} f\ ds = \int_{\gamma_2} f\ ds$

(indipendenza dalla parametrizzazione della curva, in particolare dalla sua orientazione).

La dimostrazione delle proprietà a), b), c) è lasciata per esercizio. Piuttosto osserviamo che l'integrale (2.1) è utile nel calcolo di baricentri e momenti di inerzia (rispetto ad un asse) di fili composti da materiali di cui si conosca la *densità lineare di massa* $\delta = \delta(x, y, z)$.

Se il filo coincide con una curva γ regolare a tratti di equazione $\mathbf{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$, allora $\int_\gamma \delta\, ds$ uguaglia la massa totale del filo che indichiamo con m.

Le coordinate del baricentro sono date dalle formule seguenti

$$x_b = \frac{1}{m}\int_\gamma x\delta\, ds\ ,\ y_b = \frac{1}{m}\int_\gamma y\delta\, ds\ ,\ z_b = \frac{1}{m}\int_\gamma z\delta\, ds\ . \tag{2.2}$$

Il *momento di inerzia* del filo rispetto ad un asse è dato dalla formula seguente

$$I = \int_\gamma d^2\ \delta\, ds \tag{2.3}$$

dove $d = d(x, y, z)$ indica la distanza del punto di coordinate (x, y, z) dall'asse.

***Esempio* 2.3** - Si dimostra in Meccanica che una fune pesante omogenea, sospesa nel vuoto per gli estremi, assume la forma della curva piana di equazione $y = a\,\mathrm{Ch}(x/a + b) + c$ (tale curva è perciò detta *catenaria*). Supponendo che gli estremi della fune siano alla stessa quota e scelto un opportuno sistema di riferimento in modo che l'equazione della fune risulti: $y = \alpha\,\mathrm{Ch}(x/\alpha)$, $x \in [-r, r]$, si voglia calcolare il momento di inerzia di questa fune (densità costante $= 1$) rispetto all'asse che congiunge i due capi. Si ha:

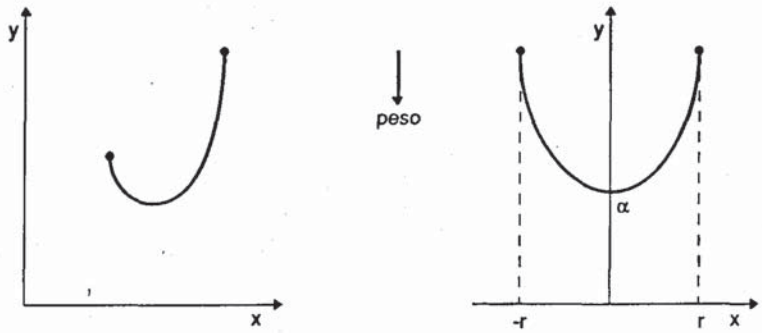


Fig. 1.21

$$I = \int_\gamma d^2 ds = \alpha^2 \int_{-r}^{r} \left(\mathrm{Ch}\,\frac{r}{\alpha} - \mathrm{Ch}\,\frac{x}{\alpha}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\mathrm{Sh}\,\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx =$$

$$= \alpha^2 \int_{-r}^{r} \left\{ \left(\mathrm{Ch}\,\frac{r}{\alpha}\right)^2 - 2\,\mathrm{Ch}\,\frac{r}{\alpha}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{\alpha} + \left(\mathrm{Ch}\,\frac{x}{\alpha}\right)^2 \right\} \mathrm{Ch}\,\frac{x}{\alpha}\, dx =$$

$$= \cdots = 2\alpha^3 \left[\mathrm{Sh}\,\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{Sh}\,\frac{r}{\alpha}\right)^3 \right] - 2r\alpha^2\,\mathrm{Ch}\,\frac{r}{\alpha}\ .$$

2.2 Forme differenziali lineari. Integrali curvilinei di 2ª specie

Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(E)$, con E *aperto connesso* di $\mathbb{R}^3$.

Ad $\mathbf{F}$ associamo l'espressione formale

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{2.4}$$

che chiameremo *forma differenziale lineare* con coefficienti F_1, F_2, F_3.

Se, intuitivamente, pensiamo al vettore $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ come ad un vettore "spostamento infinitesimo", $\omega = <\mathbf{F}, d\mathbf{r}>$ rappresenta il lavoro effettuato da $\mathbf{F}$ in relazione a tale spostamento.

Notiamo subito che l'insieme delle forme lineari costituisce uno *spazio lineare* su $\mathbb{R}$ rispetto a somma e moltiplicazione per un numero reale così definite: siano $\omega_1 = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, $\omega_2 = G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz$ forme lineari di classe $C^1(E)$, e $c \in \mathbb{R}$:

$$\omega_1 + \omega_2 := (F_1 + G_1)dx + (F_2 + G_2)dy + (F_3 + G_3)dz$$

$$c\omega := cF_1 dx + cF_2 dy + cF_3 dz\ .$$

Sia ora $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, l'equazione di una curva regolare a tratti γ contenuta in E.

Definizione 2.2 - *L'integrale curvilineo di ω lungo γ* (o integrale curvilineo di 2ª specie) *si indica con $\int_\gamma \omega$ ed è definito dalla formula seguente:*

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \{F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)\}dt\ . \tag{2.5}$$

Con l'interpretazione precedente, $\int_\gamma \omega$ rappresenta il lavoro che il campo $\mathbf{F}$ compie per spostare il suo punto di applicazione da $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(b)$ lungo γ.

Altre interpretazioni sono naturalmente possibili in relazione alla natura del campo $\mathbf{F}$, come vedremo tra breve.

Altre forme dell'integrale a destra nella (2.5) sono ugualmente significative.

Introducendo il vettore posizione $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b < \mathbf{F}, \mathbf{r}' > dt$$

ed anche, moltiplicando e dividendo per $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds \tag{2.6}$$

dove $\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$.

La (2.6) riduce l'integrale curvilineo di seconda specie ad uno di prima specie. Si noti tuttavia che la presenza del vettore tangente $\boldsymbol{T}$ indica dipendenza dall'orientazione della curva.

Raggruppiamo come al solito in una proposizione le proprietà dell'integrale (2.5).

Proposizione 2.2 - *Siano: ω_1, ω_2 forme lineari di classe $C^1(E), \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curve regolari a tratti contenute in $E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

a) $\int_\gamma (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2$
(linearità rispetto all'integranda)

b) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$
(additività rispetto al cammino di integrazione)

c) *Se γ_1 è equivalente a γ_2*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega\,,$$

mentre se l'orientazione è opposta si ha:

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega\,.$$

Ancora lasciamo la facile dimostrazione per esercizio.

Nel caso di curve chiuse si usa il simbolo $\oint_\gamma \omega$. Se poi la curva è anche piana possiamo ulteriormente distinguere tra orientazione *positiva* (verso antiorario dell'orientazione) e negativa (verso orario) mediante i simboli

$$\oint_\gamma \omega \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \omega$$

rispettivamente.

Nel caso delle curve di Jordan regolari l'orientazione positiva si può fissare rigorosamente scegliendo per ogni punto su γ il versore normale $\boldsymbol{N}_i$ che punta verso l'*interno* della curva. Se $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente e la coppia $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_i$ ha la stessa orientazione di $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ allora la curva si dice orientata positivamente; negativamente in caso contrario.

Se $x = x(s), y = y(s)$ sono le equazioni di una curva orientata positivamente allora è facile verificare che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j} \\ \boldsymbol{N}_i &= -\frac{dy}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dx}{ds}\,\mathbf{j}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

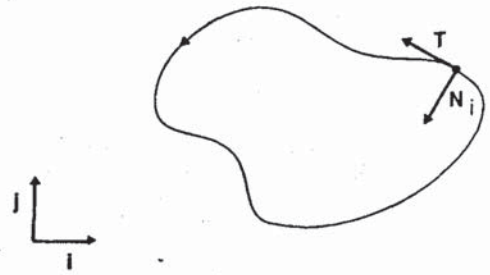


Fig. 1.22 Curva di Jordan orientata positivamente.

Vediamo subito alcuni esempi che mettono in luce l'importanza delle nozioni introdotte.

***Esempio* 2.4** - Sia $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ il campo di forza gravitazionale newtoniana generato da un corpo puntiforme di massa m, che poniamo nell'origine del riferimento cartesiano, agente su un corpo puntiforme di massa unitaria, posto nel punto (x, y, z). Se G indica la costante di gravitazione universale si ha:

$$F_1(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^2}\frac{x}{r}\,,\quad F_2(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^2}\frac{y}{r}\,,\quad F_3(x,y,z) = -\frac{Gm}{r^2}\frac{z}{r}$$

$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Siano $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ due punti in $\mathbb{R}^3$ e γ una curva regolare a tratti, di equazione $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, che li congiunga, e cioè $\mathbf{r}(a) = \mathbf{p}_1, \mathbf{r}(b) = \mathbf{p}_2$.

L'integrale curvilineo

$$L = -Gm \int_\gamma \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} \tag{2.8}$$

rappresenta il lavoro che il campo di forze compie per spostare la particella di massa unitaria da $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ lungo γ.

Osserviamo che

$$dr = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz)\ ;$$

quindi $xdx + ydy + zdz = rdr$ e

$$L = -Gm \int_\gamma \frac{dr}{r^2} = Gm \int_\gamma d\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= Gm \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} dt = Gm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

dove r_1 ed r_2 sono le distanze di $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ dall'origine, rispettivamente.

Osserviamo che, scegliendo un'altra traiettoria congiungente $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, il risultato non cambia.

***Esempio* 2.5** - Il moto piano stazionario di un fluido incompressibile a densità costante $\delta = 1$ (ad esempio, l'acqua) è caratterizzato da un campo di velocità

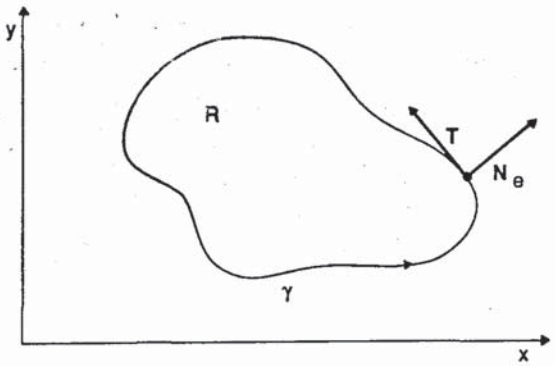


Fig. 1.23 Versore tangente $\boldsymbol{T} = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j}$ e versore normale esterno $\boldsymbol{N}_e = \frac{dy}{ds}\,\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\,\mathbf{j}$.

$\mathbf{u}(x,y) = u_1(x,y)\,\mathbf{i} + u_2(x,y)\,\mathbf{j}$; $\mathbf{u}(x,y)$ assegna la velocità della particella di fluido che si trova nel punto di coordinate (x,y).

Sia γ (il sostegno di) una curva chiusa, semplice, regolare a tratti, orientata positivamente, cioè in senso antiorario. Indichiamo con R la regione di piano che ha come frontiera γ.

L'integrale curvilineo

$$\oint_\gamma -u_2 dx + u_1 dy \tag{2.9}$$

rappresenta la differenza tra la quantità di fluido uscita ed entrata in R nell'unità di tempo. Infatti tale differenza è il *flusso di fluido* attraverso la frontiera di R, dato dalla formula

$$\oint_\gamma < \mathbf{u}, \boldsymbol{N}_e > ds$$

dove $\boldsymbol{N}_e$ è il versore *normale esterno*, diretto cioè verso l'esterno della regione R.

Ora, se

$$\boldsymbol{T} = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j}\ ,$$

ricordando la (2.7) si ha

$$\boldsymbol{N}_e = \frac{dy}{ds}\,\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\,\mathbf{j}$$

e perciò

$$\oint_\gamma < \mathbf{u}, \boldsymbol{N}_e > ds = \oint_\gamma \left(\frac{dy}{ds}u_1 - \frac{dx}{ds}u_2\right) ds$$

che coincide con l'integrale (2.9).

Si noti infine che l'integrale (2.9) è nullo allorché in R non si trovino sorgenti o pozzi di fluido.

***Esempio* 2.6** - *Teorema dell'energia cinetica.* Sia $\mathbf{F}$ un campo di forze definito in un aperto $E \subseteq \mathbb{R}^3$. Sotto l'azione di $\mathbf{F}$ una particella di massa m compie un cammino γ, regolare e di classe $\mathbf{C}^2$, di equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$.

Sia L il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per trasportare la particella da $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$.

Dalla seconda legge della dinamica si ha $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$ e perciò:

$$L = \int_\gamma < \mathbf{F}, d\mathbf{r} > = \int_a^b < m\mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'(t) > dt =$$

$$= \int_a^b m\frac{1}{2}\frac{d}{dt} < \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > dt = \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}v(t)^2 dt =$$
$$= \frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2 .$$

Essendo $\frac{1}{2}mv(t)^2$ l'energia cinetica della particella s'è visto come L sia uguale alla variazione di energia cinetica dal punto iniziale a quello finale.

Un'analisi degli esempi 2.4 e 2.5 porta in modo naturale ad alcune questioni.

Data $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$, sotto quali condizioni $\int_\gamma \omega$ dipende solo dai punti iniziale e finale di γ e non dalla traiettoria seguita?

Il campo gravitazionale ha questa proprietà, come abbiamo visto nell'esempio 2.4.

Seconda questione: *sotto quali condizioni $\oint_\gamma \omega = 0$?*

Abbiamo visto che questo è vero, nel caso dell'esempio 2.5, quando all'interno di γ sono assenti sorgenti e pozzi di fluido.

Ritornando all'esempio 2.4, si verifica facilmente che la forma differenziale nell'integrale (2.8) è il differenziale della funzione $U(x,y,z) = Gm/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, che prende il nome di *potenziale gravitazionale*.

Quando ciò accade la forma differenziale si dice **esatta**. Più precisamente diamo la seguente definizione.

Definizione 2.3 - *Se, data una forma differenziale ω di classe $C^1(E)$, esiste una funzione $U: E \to \mathbb{R}$, di classe $C^2(E)$, tale che $dU = \omega$ in E allora ω si dice* **esatta** *e U si chiama* **funzione potenziale**.

Più esplicitamente, $dU = \omega$ significa che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 , \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \quad \text{in } E \tag{2.10}$$

o, più sinteticamente, $\nabla U = \mathbf{F}$ in E.

Se U è una funzione potenziale per ω in E lo è anche $U + c, c \in \mathbb{R}$. Essendo E connesso, tutte le possibili funzioni potenziale per ω hanno questa forma (Esercizio 11).

Per le forme differenziali esatte l'integrale curvilineo è indipendente dal cammino di integrazione. Più precisamente, vale il seguente

Lemma 2.3 - *Sia ω esatta in E con funzione potenziale U. Sia γ una curva regolare, contenuta in E, di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a,b]$. Allora*

$$\int_\gamma \omega = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)) . \tag{2.11}$$

Dimostrazione - Usando il teorema di differenziazione delle funzioni composte si ha, se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\frac{d}{dt}U(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial U}{\partial x}(\ldots)\, x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\ldots)y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(\ldots)z'(t) =$$
$$= \text{(per la 2.10)} \; = F_1(\ldots)x'(t) + F_2(\ldots)y'(t) + F_3(\ldots)z'(t) .$$

Di conseguenza, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t),y(t),z(t))dt = U(x(b),y(b),z(b)) - U(x(a),y(a),z(a))$$

che è la (2.11). □

Osservazione 2.1 - La (2.11) si estende anche alle traiettorie regolari a tratti, utilizzando la proprietà di additività rispetto al cammino di integrazione.

Se ω è esatta il campo associato è uguale, per la (2.10), al gradiente di un potenziale. In tal caso il campo vettoriale si dice *conservativo*. La scelta del nome è dovuta al seguente motivo. Se $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}_0$ sono punti qualunque di E e γ è una curva regolare a tratti di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a,b]$, tale che $\mathbf{r}(b) = \mathbf{p}$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{p}_0$, sulla quale si muove una particella di massa m sotto l'azione del campo, dall'esempio 2.6 (*teorema dell'energia cinetica*) e dalla (2.11) si ottiene

$$\frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2 = U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{p}_0)$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv(b)^2 - U(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}mv(a)^2 - U(\mathbf{p}_0) . \tag{2.12}$$

La quantità $-U(\mathbf{p})$ si chiama *energia potenziale* in $\mathbf{p}$; la (2.12) indica che la somma delle energie cinetica e potenziale è costante in E (*legge di conservazione dell'energia meccanica*).

La terza questione che poniamo è la seguente: *data una forma differenziale ω, quali condizioni su $\mathbf{F}$ implicano che ω sia esatta?*

Le tre questioni sono strettamente collegate tra loro come mostra il seguente teorema.

■ **Teorema 2.4** - *Sia $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ una forma differenziale lineare di classe $C^1(E)$, E aperto connesso di $\mathbb{R}^3$. Le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:*

a) *Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1, γ_2 contenute in E ed aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega .$$

b) *Per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in E*

$$\oint_\gamma \omega = 0 \ .$$

c) *ω è esatta in E.*

Dimostrazione - L'implicazione c)⇒b) è contenuta nel lemma 2.3 e nella osservazione 2.1. Facciamo vedere che a)⇒c) e b)⇒a).

a)⇒c). Siano $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z)$ punti di E. Se pensiamo $\mathbf{p}_0$ fissato, l'integrale $\int_\gamma \omega$, dove γ è una curva avente $\mathbf{p}_0$ come punto iniziale e $\mathbf{p}$ come punto finale, non dipende da γ, a causa di a), ma solo da $\mathbf{p}$. Possiamo perciò scrivere

$$\int_\gamma \omega = \varphi(x, y, z) \ .$$

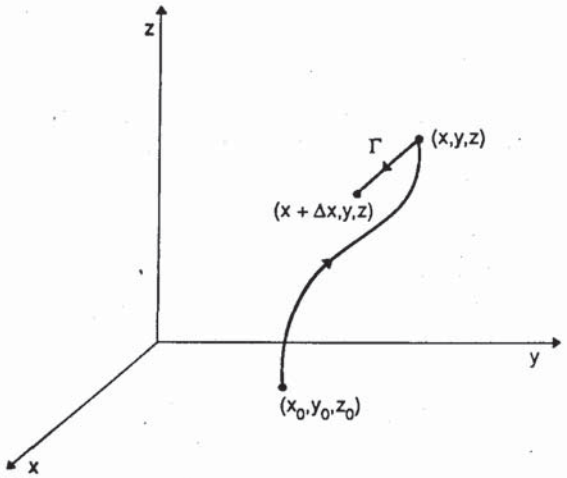


Fig. 1.24

Dimostriamo che $\partial\varphi/\partial x = F_1$ in E; analogamente si dimostra che $\partial\varphi/\partial y = F_2$ e che $\partial\varphi/\partial z = F_3$ da cui si conclude che φ è una funzione potenziale per ω, ovvero che ω è esatta.

Passiamo dal punto (x, y, z) al punto $(x + \Delta x, y, z)$. Usando la proprietà di additività degli integrali curvilinei ed usando ancora il fatto che l'integrale curvilineo di ω dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal tipo di percorso che li congiunge, si può scrivere:

$$\varphi(x + \Delta x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \int_\Gamma \omega$$

dove Γ è una qualunque curva regolare con punto iniziale (x, y, z) e punto finale $(x + \Delta x, y, z)$, con sostegno contenuto in E.

Essendo E aperto, se Δx è abbastanza piccolo, si può scegliere come Γ il segmento di retta di equazioni parametriche:

$$x(t) = x + t\Delta x \ , \ y(t) = y \ , \ z(t) = z \qquad t \in [0, 1] \ ,$$

(fig. 1.24).

Con questa scelta si ha, essendo $y'(t) = z'(t) = 0$, $x'(t) = \Delta x$:

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) \ \Delta x \ dt \ .$$

Quindi

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y, z) \ dt \ .$$

Essendo F_1 continua, passando al limite sotto il segno di integrale per $\Delta x \to 0$ si ottiene $\partial\varphi/\partial x = F_1$.

b)⇒a). Siano γ_1 di equazione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e γ_2 di equazione $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, due curve regolari a tratti contenute in E, tali che $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(\alpha)$ e $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(\beta)$. Dobbiamo mostrare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Mediante γ_1 e γ_2 costruiamo una curva chiusa γ nel seguente modo, "riparametrizzando" γ_2. Definiamo (Esempio 1.16):

$$t(\tau) = -\frac{\beta - \alpha}{c - b}\tau + \frac{c\beta - b\alpha}{c - b} \quad , \qquad \tau \in [b, c] \ .$$

Si osservi che $t(b) = \beta$ e $t(c) = \alpha$ e che $t'(\tau) < 0$. Sia $\tilde{\gamma}_2$ la curva di equazione $\tilde{\mathbf{r}}_2(\tau) = \mathbf{r}_2(t(\tau)) : [b, c] \to \mathbb{R}^3$; allora $\int_{\gamma_2} \omega = -\int_{\tilde{\gamma}_2} \omega$.

Inoltre la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ risulta chiusa e regolare a tratti, dunque

$$0 = \oint_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \ . \ \square$$

Osservazione 2.2 - Il teorema 2.4 continua a valere se ci si limita a curve regolari, anziché regolari a tratti. Questa affermazione può essere dimostrata facilmente con l'uso dei teoremi del capitolo 6, sezione 3.

2.3 Riconoscimento delle forme differenziali esatte. Costruzione della funzione potenziale

Sia data la forma differenziale

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

con coefficienti di classe $C^1(E)$, dove E è il solito aperto connesso di $\mathbb{R}^3$.

È molto semplice trovare condizioni necessarie per l'esattezza di ω in E. Infatti, se ω è esatta ed U è funzione potenziale, si ha $\nabla U = \mathbf{F}$. Ora, dalla a) del lemma 1.5 si ha $\operatorname{rot} \nabla U = \mathbf{0}$, perciò ricaviamo immediatamente che deve essere $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dunque:

Proposizione 2.5 - *Se ω è esatta in E ed $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale associato, allora $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in E, ovvero $\mathbf{F}$ è irrotazionale in E.*

Più esplicitamente devono essere verificate in ogni punto di E le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\ , \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\ . \tag{2.13}$$

Per una forma differenziale in $\mathbb{R}^2$, $\omega = F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$, le (2.13) si riducono alla seguente:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\ . \tag{2.14}$$

***Esempio* 2.7** - La forma differenziale $\omega = xydx + (z^2+1)dy - (xz+y)dz$ non può essere esatta in $\mathbb{R}^3$ essendo $\partial F_1/\partial y = x$ e $\partial F_2/\partial x = 0$, diverse fuori dal piano $x = 0$.

Il prossimo esempio indica che la condizione di irrotazionalità di $\mathbf{F}$ è solo necessaria e *non* sufficiente, in generale, per l'esattezza di una forma differenziale.

***Esempio* 2.8** - Sia

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\ ;$$

ω è di classe C^∞ nell'aperto connesso $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$; si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e quindi la (2.14) è verificata in *tutto* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

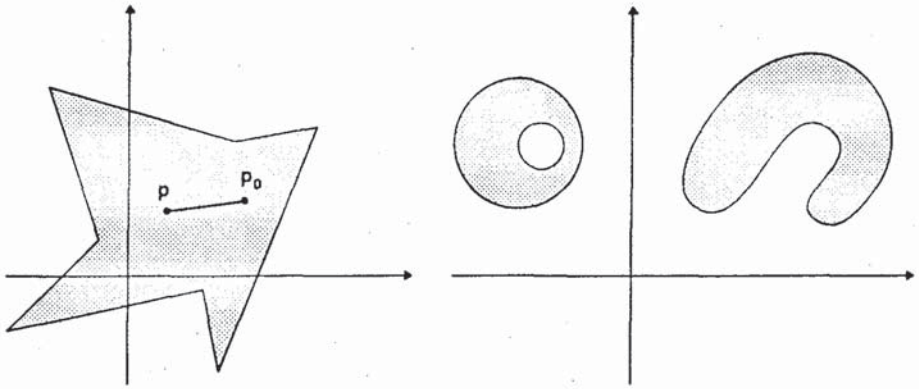
Tuttavia ω non è esatta; per vederlo è sufficiente, in base al teorema 2.4, esibire una curva regolare chiusa γ contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, tale che $\int_\gamma \omega \neq 0$. Scegliamo la circonferenza di equazione $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2]dt = 2\pi\ .$$

Vi sono opportune condizioni topologiche su E sotto le quali le (2.13) diventano anche sufficienti. Ritorneremo più avanti su di esse. Per ora ci limitiamo ad indicare la seguente, di natura *algebrica* oltre che topologica.

Definizione 2.4 - *Si dice che $E \subseteq \mathbb{R}^3$ (oppure $E \subseteq \mathbb{R}^2$) è* **stellato** *se esiste un punto $\mathbf{p}_0 \in E$ tale che, per ogni punto $\mathbf{p} \in E$, il segmento di retta $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}]$ è tutto contenuto in E.*



a) *b)*

Fig. 1.25 *a)* Insieme stellato nel piano. *b)* Insiemi *non* stellati.

Diremo anche che E è stellato rispetto al punto $\mathbf{p}_0$.

Ogni insieme *convesso* è stellato: come $\mathbf{p}_0$ si può scegliere uno qualsiasi dei suoi punti. Il piano (o lo spazio) privato di un punto *non* è stellato. Inoltre un insieme stellato è ovviamente *connesso per segmenti* e perciò *connesso*.

Il teorema seguente implica che se $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in un aperto qualunque, allora ω è *localmente esatta*, ovvero esatta in un intorno di ogni suo punto.

Teorema 2.6 - *Siano $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ con $\mathbf{F} \in C^1(E)$, dove E è un aperto stellato* in $\mathbb{R}^3$.
Allora ω è esatta se e solo se $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in E.

Dimostrazione - Dobbiamo mostrare la sufficienza della condizione $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ poiché la sua necessità è contenuta nella proposizione 2.5. Sia dunque $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Per ipotesi E è stellato e, a meno di una traslazione degli assi, possiamo supporre che sia stellato rispetto all'origine $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Dato un punto $\mathbf{p} = (x,y,z) \in E$, indichiamo con Γ la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = tx\ ,\ y(t) = ty\ ,\ z(t) = tz \quad t \in [0,1]$$

il cui sostegno è il segmento di retta $[\mathbf{0}, \mathbf{p}]$ che risulta pertanto contenuto in E. Poniamo:

$$U(x,y,z) := \int_{\Gamma} \omega = \int_0^1 \{F_1(tx,ty,tz)x + F_2(tx,ty,tz)y + \\ + F_3(tx,ty,tz)z\}\,dt\,. \tag{2.15}$$

Facciamo vedere che U è una funzione potenziale, cioè che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1\,,\quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2\,,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_3\,.$$

Le tre formule si dimostrano in maniera identica; diamo perciò i dettagli solo della prima. Poiché $\mathbf{F}$ è di classe C^1, vale il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e quindi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x}(\ldots)tx + F_1(\ldots) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(\ldots)ty + \frac{\partial F_3}{\partial x}(\ldots)tz \right\} dt\,.$$

Dalle (2.13) abbiamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad \text{in} \quad E$$

e perciò:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^1 F_1(\ldots)dt + \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x}(\ldots)tx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\ldots)ty + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\ldots)tz \right\} dt\,.$$

L'espressione tra parentesi nel secondo integrale non è altro che $t\frac{d}{dt}F_1(tx,ty,tz)$; dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \int_0^1 F_1(tx,ty,tz)dt + \int_0^1 t\frac{d}{dt}F_1(tx,ty,tz)dt = \text{(integrando per parti)} \\ &= \int_0^1 F_1(tx,ty,tz)dt + [tF_1(tx,ty,tz)]_0^1 - \int_0^1 F_1(tx,ty,tz)dt = \\ &= F_1(x,y,z) \ \square \end{aligned}$$

La dimostrazione del teorema 2.6 indica (v. formula 2.15) come costruire una funzione potenziale quando E è stellato. Naturalmente, una volta accertatisi che ω è esatta, controllando che $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, e che quindi l'integrale di linea di ω è indipendente dalla traiettoria, si può costruire U come integrale di ω lungo una qualunque curva regolare a tratti con sostegno in E.

Ad esempio, nel piano, si può procedere fissando un punto qualunque $(x_0, y_0) \in E$ e costruire U nel punto $(x,y) \in E$ mediante l'integrale lungo le spezzate indicate in figura (se contenute in E):

Se è possibile scegliere la spezzata in figura 1.26 *a*) una formula esplicita per U è la seguente,

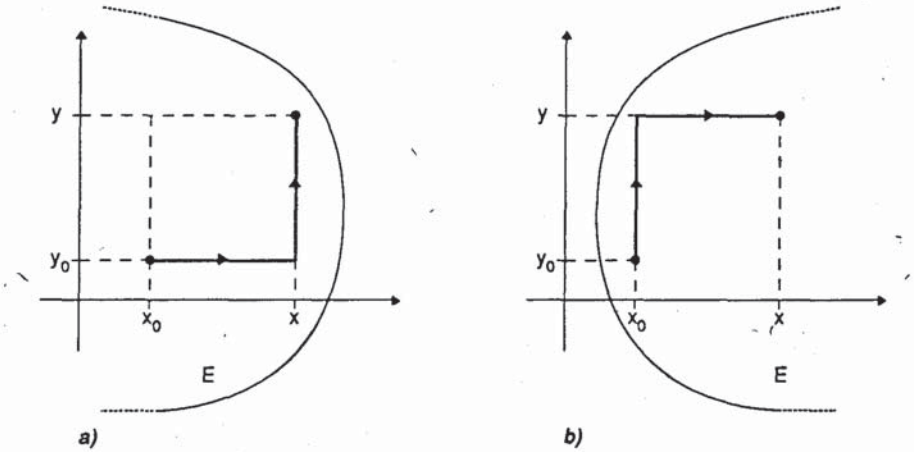


Fig. 1.26

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)dt \tag{2.16}$$

essendo nel tratto orizzontale $dy = 0$ ed in quello verticale $dx = 0$.

Invitiamo il lettore a trovare una formula analoga alla (2.16) scegliendo la spezzata di figura 1.26 *b*).

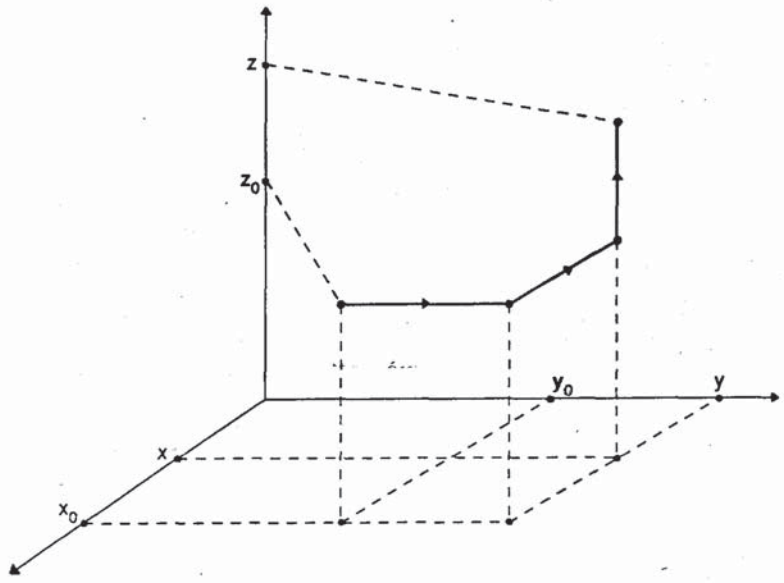


Fig. 1.27

In $\mathbb{R}^3$, potendo scegliere la spezzata indicata in figura 1.27 si troverebbe

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,t)dt \ . \tag{2.17}$$

Esempi

2.9. La forma differenziale dell'esempio 2.8 è esatta, ad esempio, nel piano privato del quadrante $x > 0, y < 0$. Tale insieme è infatti stellato. Per trovare una funzione potenziale, scegliamo $(x_0, y_0) = (1,0)$ ed usiamo una spezzata come quella di figura 1.26 *b*). Si ottiene,

$$U(x,y) = \int_0^y \frac{1}{t^2+1}dt - \int_1^x \frac{y}{t^2+y^2}dt = \operatorname{arctg} y - \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{y}\right)\right]_1^x =$$
$$= \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right) .$$

Osserviamo ora che

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z & \text{se } z > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$U(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0, y > 0 . \end{cases}$$

Si noti che U si raccorda bene sul semiasse positivo delle y.

Ponendo ulteriormente $U(0,y) = 3\pi/2$ per $y < 0$ e $U(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + 2\pi$ per $x > 0$, $y < 0$ avremmo un buon raccordo sul semiasse negativo delle y ma non sul semiasse positivo delle ascisse; infatti $U(x,0) = 0$ mentre

$$\lim_{\substack{y\to 0_- \\ x>0}} U(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0_- \\ x>0}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi\right] = 2\pi .$$

Ciò non deve stupire in quanto la $U(x,y)$ così definita coincide con l'anomalia θ di un punto (x,y) del piano: partendo da un punto sul semiasse positivo delle ascisse, l'anomalia θ cresce fino a diventare 2π dopo un giro attorno all'origine.

2.10. La forma differenziale

$$\omega = -\frac{2x}{y-x^2}dx + \frac{1}{y-x^2}dy + dz$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ con esclusione della superficie di equazione $y = x^2$. Si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \ , \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \ , \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y} \ .$$

Pertanto $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ed ω è localmente esatta.

In base al teorema 2.6 è esatta in tutto l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > x^2\}$ che è stellato (*). Una funzione potenziale è (qui si può usare la formula (2.17) con $(x_0, y_0, z_0) = (0,1,0)$):

$$U(x,y,z) = \int_0^x \frac{-2t}{y-t^2}dt + \int_1^y \frac{1}{t}dt + \int_0^z dt =$$
$$= [\log|y-t^2|]_0^x + [\log|t|]_1^y + z = \log(y-x^2) + z \ .$$

2.11. Ritorniamo alla forma differenziale

$$\omega = -u_2(x,y)dx + u_1(x,y)dy \tag{2.18}$$

dell'esempio 2.5 dove $\mathbf{u}(x,y) = u_1(x,y)\mathbf{i} + u_2(x,y)\mathbf{j}$ è il campo di velocità per il moto stazionario di un fluido.

Se la forma (2.18) è esatta allora

$$-\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{2.19}$$

ovvero

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \ .$$

La condizione $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ significa che il fluido è incompressibile.

(*) I risultati contenuti nel paragrafo 2.4 indicano che ω è esatta anche nell'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y < x^2\}$.

La funzione potenziale $\psi = \psi(x, y)$ tale che $d\psi = \omega$ si chiama più propriamente *funzione di corrente*. Le sue linee di livello, di equazione $\psi(x, y) = c$, si chiamano *linee di flusso* o *di corrente*: in ogni punto, $\mathbf{u}$ è tangente alla linea di corrente passante per quel punto; infatti il vettore $\nabla\psi = -u_2\mathbf{i} + u_1\mathbf{j}$ è ortogonale sia a $\psi(x, y) = c$ sia ad $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

Accanto alla forma differenziale (2.18) si può altresì considerare la forma

$$\nu = u_1 dx + u_2 dy$$

il cui integrale $\oint_\gamma \nu$ rappresenta la *circuitazione* di $\mathbf{u}$ lungo γ. Se anche ν è esatta si ha $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, cioè:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{2.20}$$

Le (2.19) e (2.20) sono le condizioni di Cauchy–Riemann (par. 7.2.3 Vol. 1) per la coppia di funzioni u_1 ed u_2. Ciò significa che u_1 ed u_2 sono *armoniche coniugate* e che la funzione $u_1(x, y) + iu_2(x, y)$ è *olomorfa*.

La funzione potenziale di $\nu, \varphi = \varphi(x, y)$, si chiama *potenziale* di *velocità* e risulta una funzione *armonica*. Le sue linee di livello, dette *linee equipotenziali*, sono ortogonali alle linee di *flusso* in ogni punto di intersezione. La doppia famiglia di curve $\psi(x, y) = c$ e $\varphi(x, y) = k$ costituisce pertanto una rete ortogonale nel piano (fig. 1.28).

Osserviamo inoltre che, dalla (2.20) si ottiene, essendo $\partial\psi/\partial x = -u_2$, $\partial\psi/\partial y = u_1$:

$$\Delta\psi = \operatorname{div}\nabla\psi = -\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 .$$

Perciò anche ψ è armonica. Invitiamo il lettore a verificare che la funzione $f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ (detta *potenziale complesso*), è olomorfa se valgono le (2.19) e (2.20). Dunque, anche φ e ψ sono armoniche coniugate.

È poi facile mostrare che ogni potenziale complesso $f = \varphi + i\psi$, olomorfo in un aperto Ω del piano complesso, definisce univocamente un moto piano stazionario di un fluido incompressibile ed irrotazionale nella regione Ω in cui φ e ψ sono rispettivamente potenziale di velocità e funzione di corrente.

In figura 1.28 è illustrata la rete ortogonale delle linee equipotenziali e di flusso corrispondenti al potenziale $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$.

Concludiamo il paragrafo ricordando che in termodinamica il primo ed il secondo principio si possono formulare in termini di forme differenziali.

Infatti il primo principio afferma che esiste una funzione U detta *energia interna* tale che

$$dU = dQ - pdV$$

dove Q, p, V indicano rispettivamente *quantità di calore, pressione e volume*. Dunque la forma $\omega = dQ - pdV$ è *esatta*.

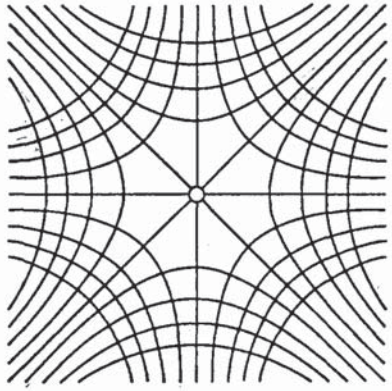


Fig. 1.28 Linee di flusso e di corrente per il potenziale complesso $f(z) = z^2$.

Il secondo principio afferma che esiste una funzione S, detta *entropia* tale che

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (T \text{ temperatura assoluta}).$$

Dunque l'espressione $(1/T)dQ$ è un differenziale esatto. Il fattore $1/T$ che rende esatta l'espressione si chiama *fattore integrante*. Gli esercizi 13, 14, 15, 18 sono dedicati ad alcune questioni riguardanti i fattori integranti.

2.4 Insiemi semplicemente connessi

Abbiamo visto che in un dominio E stellato le (2.13) sono necessarie e sufficienti per l'esattezza di una forma differenziale. Una condizione più generale di natura topologica è quella di *semplice connessione*. Dire che $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è *semplicemente connesso* significa che E è connesso e che *ogni* curva semplice e chiusa contenuta in E è frontiera di un insieme limitato *interamente* contenuto in E. In *generale* significa che due curve qualunque, contenute in E, aventi gli stessi punti estremi sono "deformabili con continuità" l'una nell'altra senza uscire da E. Il concetto rigoroso è quello di *omotopia* tra curve che illustriamo qui di seguito.

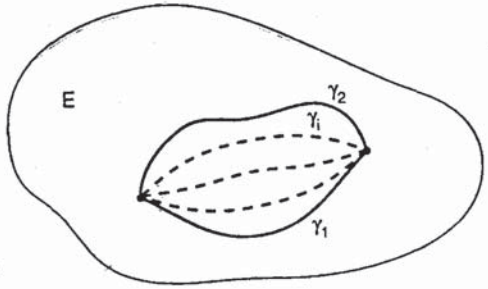


Fig. 1.29 Curve omotope.

Siano γ_1 e γ_2 curve contenute in un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione rispettivamente $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t), t \in [a,b]$ e tali che $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(a) = \mathbf{p}_a$, $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b) = \mathbf{p}_b$.

Definizione 2.5 - *Le due curve γ_1 e γ_2 si dicono* **omotope** *in E se esiste una funzione continua $\varphi = \varphi(t,\lambda)$, $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$ tale che*

i) $\varphi(t,0) = \mathbf{r}_1(t)$, $\varphi(t,1) = \mathbf{r}_2(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$

ii) $\varphi(a,\lambda) = \mathbf{p}_a$, $\quad \varphi(b,\lambda) = \mathbf{p}_b$ $\quad \forall \lambda \in [0,1]$.

ed infine che per ogni $\lambda \in [0,1]$, la curva γ_λ di equazione $\varphi = \varphi(t,\lambda)$ sia contenuta in E.

Se γ_1 e γ_2 sono chiuse la ii) *è sostituita dalla condizione*

ii) $\varphi(a,\lambda) = \varphi(b,\lambda) \quad \forall \lambda \in [0,1]$.

Definizione 2.6 - *Un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice semplicemente connesso se due curve qualsiasi contenute in E aventi gli stessi estremi sono omotope.*

La definizione si può dare in termini di curve *chiuse*: un aperto connesso E è semplicemente connesso se *ogni curva chiusa contenuta in E è omotopa ad una curva costante (che cioè si riduce ad un solo punto).*

Esempi

2.12. Sono semplicemente connessi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

I *convessi*. Infatti se γ_1 e γ_2 sono due curve in E, convesso, aventi gli stessi estremi, di equazione rispettivamente $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t), t \in [a,b]$, la famiglia di curve

$$\varphi(t,\lambda) = \lambda \mathbf{r}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{r}_2(t) ,$$

soddisfa la definizione 2.5.

Gli insiemi *stellati*: sia infatti $\mathbf{p}_0 \in E$ tale che per ogni $\mathbf{p} \in E$, il segmento di retta $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}]$ è *tutto* contenuto in E. Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è una curva chiusa $\subset E$, posto

$$\varphi(t,\lambda) = \lambda \mathbf{p}_0 + (1-\lambda)\mathbf{r}(t)$$

si vede che $\varphi(t,\lambda) \subset E$ per ogni $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$, che $\varphi(t,0) = \mathbf{r}(t), \varphi(t,1) = \mathbf{p}_0$ e che $\varphi(a,\lambda) = \lambda \mathbf{p}_0 + (1-\lambda)\mathbf{r}(a) = \lambda \mathbf{p}_0 + (1-\lambda)\mathbf{r}(b) = \varphi(b,\lambda)$.

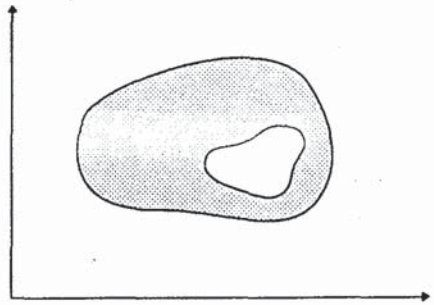
Dunque $\mathbf{r}$ è omotopa alla curva costante $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{p}_0$.

2.13. *Non* sono semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$ una corona circolare oppure il piano privato di un punto (*).

In $\mathbb{R}^3$ non lo sono una sfera privata di un diametro oppure l'interno di un toro.

Il lettore cerchi di convincersi di queste affermazioni.

(*) Ma una corona sferica è semplicemente connessa in $\mathbb{R}^3$!



Insieme non semplicemente connesso in R^2.

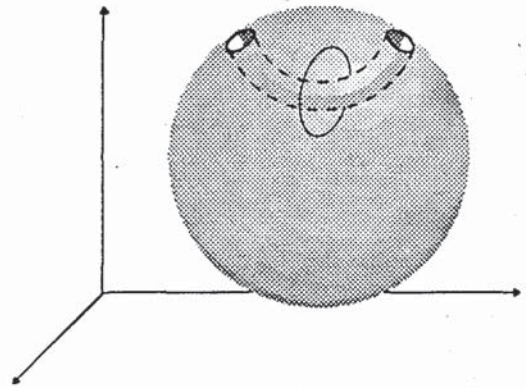


Fig. 1.30

Insieme non semplicemente connesso in R^3. Nella figura è evidenziato un ciclo non contraibile a un punto.

Il teorema seguente implica che se $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in un *aperto semplicemente connesso* E allora ω è esatta in E.

■ **Teorema 2.7** - *Siano $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ con $\mathbf{F} \in C^1(E)$, dove E è un aperto semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$. Allora ω è esatta in E se e solo se* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *in E.*

Dimostrazione - Dobbiamo mostrare la sufficienza della condizione $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ poiché la sua necessità è contenuta nella proposizione 2.6. Sia dunque $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in E. In base al teorema 2.4 ed all'osservazione che lo segue, occorre mostrare che date due curve regolari γ_1 e γ_2 aventi estremi in comune e contenute in E, si ha $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Essendo E semplicemente connesso, esisterà una famiglia di curve γ_λ di equazione $\varphi(t,\lambda) = (x(t,\lambda), y(t,\lambda), z(t,\lambda))$, $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$ soddisfacente la definizione 2.5. Conduciamo la dimostrazione nell'ipotesi ulteriore che φ sia di classe $C^1([a,b] \times [0,1])$ e che abbia derivate seconde miste continue. Poniamo allora $I(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} \omega$. Osserviamo che

$I(0) = \int_{\gamma_1} \omega, I(1) = \int_{\gamma_2} \omega$. Facciamo vedere che $dI/d\lambda = 0$ per ogni $\lambda \in [0,1]$; ciò implica $I(\lambda) =$ costante ed in particolare $I(0) = I(1)$ che è la tesi.

Derivando sotto il segno di integrale abbiamo:

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{d}{d\lambda}\{F_1 x_t + F_2 y_t + F_3 z_t\} dt =$$

$$= \int_a^b \{F_{1x}\, x_\lambda\, x_t + F_{1y}\, y_\lambda\, x_t + F_{1z}\, z_\lambda\, x_t + F_1\, x_{\lambda t} +$$
$$+ F_{2x}\, x_\lambda\, y_t + F_{2y}\, y_\lambda\, y_t + F_{2z}\, z_\lambda\, y_t + F_2\, y_{\lambda t} +$$
$$+ F_{3x}\, x_\lambda\, z_t + F_{3y}\, y_\lambda\, z_t + F_{3z}\, z_\lambda\, z_t + F_3\, z_{\lambda t}\} dt\ .$$

Usando le (2.13), $F_{3y} = F_{2z}, F_{1z} = F_{3x}, F_{2x} = F_{1y}$, si verifica facilmente che

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{d}{dt}\{F_1 x_\lambda + F_2 y_\lambda + F_3 z_\lambda\} dt =$$

$$= F_1 x_\lambda + F_2 y_\lambda + F_3 z_\lambda \Big|_{t=a}^{t=b} = 0$$

poiché, per le ii) della definizione 2.4 si ha $\varphi(a,\lambda) =$ costante e $\varphi(b,\lambda) =$ costante.

Le ipotesi ulteriori poste su φ possono essere rimosse approssimando opportunamente le γ_λ. Omettiamo i dettagli. □

Esercizi

1. Calcolare l'area della superficie S parallela all'asse z, compresa tra il piano $z = 0$ ed il grafico della funzione $z = xy$, che interseca il piano $z = 0$ lungo l'arco di parabola $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$.

2. L'elica di equazione $\mathbf{r}(t) = (h\cos t, h\sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$ ha densità lineare di massa $\delta =$ costante.

Calcolare il momento di inerzia dell'elica rispetto all'asse z.

3. Calcolare il baricentro di un filo omogeneo a forma di *cicloide* di equazione

$$x(t) = r(t - \sin t), y(t) = r(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\ .$$

4. Dimostrare che se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è limitata e γ è rettificabile e regolare a tratti, allora

$$\left|\int_\gamma f\, ds\right| \le \sup|f| \cdot l(\gamma)\ .$$

5. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove γ ed ω sono definite come segue:

a) $\omega = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi h]$ dove $h \in \mathbb{N}_+$.

b) $\omega = \sqrt{z}dx + xdy + ydz$

$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2), t \in [0, \pi/2]$.

6. Verificare la formula (2.7).

7. Determinare $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbf{R}$ tale che la forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

sia localmente esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcolare un potenziale locale. [Risp.: $f(t) = t - 1$].

8.* Sia $\{\gamma_k\}$ $(k > 0, k \ne 1)$ la famiglia di circonferenze di equazione $(x-1)^2 + y^2 = k^2$. Calcolare al variare del parametro k l'integrale

$$\oint_{\gamma_k} \omega \qquad \text{dove} \qquad \omega = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\ .$$

9. Determinare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}$ in modo che

$$\omega = f(x,y,z)dx + zdy + ydz$$

sia esatta in $\mathbf{R}^3$. Calcolare una funzione potenziale.

10. Quale/i dei seguenti insiemi è stellato in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$?

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y > x^3\}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ |y| < 1 - 3|x|\}$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \ \text{ e } \ z^2 \ge x^2 + y^2\}\ .$$

11. Dimostrare che se E è aperto connesso in $\mathbb{R}^3$ ed ω è esatta in E, due funzioni potenziali per ω differiscono di una costante.

12. Sia $\omega = xydx + ydy$; verificare che se γ è una qualunque circonferenza con centro sull'asse y si ha $\int_\gamma \omega = 0$. Si può concludere che ω è esatta in $\mathbb{R}^2$?

13. Se la forma differenziale $\omega = Pdx + Qdy$ non è esatta si può pensare di determinare $\mu = \mu(x,y)$ tale che

$$\mu\omega = \mu P dx + \mu Q dy$$

sia esatta. Una funzione di questo tipo si chiama *fattore integrante*.

a) Dimostrare che se μ è un fattore integrante deve soddisfare la seguente equazione

$$P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

b) Dedurre che, se $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q}$ è una funzione $h(x)$ della sola x, esiste un fattore integrante $\mu(x) = \exp \int h(x)dx$.

Viceversa, se $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{P}$ è una funzione $g(y)$ della sola y, esiste un fattore integrante $\mu(y) = \exp \int -g(y)dy$.

14. Determinare un fattore integrante per le seguenti forme differenziali:

a) $\omega = xy^2dx + 2x^2ydy$

b) $\omega = \frac{xy}{1+x^2y^4}dx + \frac{2x^2}{1+x^2y^4}dy$

15. Dimostrare che, se esiste un fattore $\mu = \mu(x,y,z)$ integrante per la forma differenziale $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ allora, se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, si ha $< \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{F} >= 0$.

[Suggerimento: usare la f) del lemma 1.5].

16. Sia $\mathbf{F}$ il campo di forze centrali dato dalla formula $\mathbf{F}(x,y,z) = xg(r)\mathbf{i} + yg(r)\mathbf{j} + zg(r)\mathbf{k}$ dove $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, e $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.

Dimostrare che $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e che quindi la forma $\omega = g(r)(xdx + ydy + zdz)$ è esatta localmente.

17. Determinare se le forme differenziali seguenti sono esatte nel dominio indicato a lato

$$\omega = xydx + \frac{x^2}{2}dy \qquad E = \mathbb{R}^2$$

$$\omega = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(ydx - xdy) \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}\ .$$

18. Sia $\omega = f(x)ydx + dy$ ed $E = (a,b) \times \mathbb{R}$ con f continua in E. Dimostrare che se F è una primitiva di f in (a,b) e $g = \exp(F)$ allora g è un fattore integrante per ω.

19. Sia $f(z) = f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, $z \in \mathbb{C}$ oppure $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il potenziale complesso per un fluido in moto piano stazionario. Verificare che, se valgono le (2.19) e (2.20), f è olomorfa in $\mathbb{C}$.

20. Studiare linee di flusso ed equipotenziali per il moto di un fluido corrispondente ai due potenziali complessi indicati:

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ (doppia famiglia di cerchi)

b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ (doppia famiglia di lemniscate).

2 Ottimizzazione delle funzioni di più variabili

È superfluo soffermarsi sull'importanza che la teoria dell'ottimizzazione ha acquisito nelle scienze applicate.

Il termine *ottimizzazione* si riferisce ad un'ampia categoria di problemi. In economia è, ad esempio, legato ai meccanismi decisionali finalizzati ad ottenere il massimo (di utilità o di profitto) da una data quantità di beni o risorse; in meccanica, minimizzare l'energia potenziale di un sistema conservativo conduce ad individuarne le posizioni di equilibrio stabile.

In generale si tratta di massimizzare o minimizzare un obiettivo la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema.

In questo capitolo l'obiettivo da ottimizzare sarà sempre una funzione reale di n variabili reali. Più precisamente affronteremo la questione della ricerca dei punti di massimo e/o di minimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$. Il caso $n = 1$ è già stato esaminato nel capitolo 6, volume 1.

La sezione 1 è dedicata all'esame dei vari aspetti dell'ottimizzazione in generale e ad un primo tipo di problema che consiste nella ricerca degli estremi interni al dominio X. Parleremo in questo caso di estremi *liberi*.

La ricerca di estremi di f ristretta a ∂X o ad un sottoinsieme (non aperto) U di X rientra nei problemi di ottimizzazione *vincolata*.

In casi frequenti f è ristretta ad un sottoinsieme di X che può essere descritto da un sistema di equazioni del tipo

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \text{ con } m < n\ .$$

Parleremo allora di *ottimizzazione vincolata* con *vincoli di uguaglianza*, argomento della seconda sezione.

I due aspetti illustrati sopra possono essere considerati simultaneamente usando la teoria della *programmazione matematica*.

Un tipico problema di programmazione consiste nell'ottimizzare una funzione su un insieme definito da un sistema di disequazioni del tipo

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, m\ ,$$

(vincoli di disuguaglianza). Nella sezione 3 è presentata una breve introduzione ai principali risultati in questo importante settore della matematica moderna.

1. GENERALITÀ SULL'OTTIMIZZAZIONE. ESTREMI LIBERI

1.1 Esempi preliminari

Nell'introduzione abbiamo parlato di estremi liberi o vincolati. Prima di chiarire la distinzione attraverso definizioni precise, esaminiamo alcuni esempi.

***Esempio* 1.1** - Tre punti $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, disposti ai vertici di un triangolo acutangolo, devono essere collegati con un quarto punto, mediante un cavo, in modo da utilizzare meno materiale possibile. Dove deve essere collocato il punto $\mathbf{p}$?

Introdotto un sistema di riferimento ortogonale nel piano dei tre punti, siano (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) le loro coordinate e (x, y) quella di $\mathbf{p}$. (fig. 2.1).

Posto $d_j(x, y) = ||\mathbf{p} - \mathbf{p}_j|| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, $(j = 1, 2, 3)$, si tratta di minimizzare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{3} d_j(x, y) ,$$

somma delle distanze di $\mathbf{p}$ dai tre punti dati.

In altri termini occorre determinare (x_0, y_0) in modo che $f(x_0, y_0) = \min f(x, y)$, al variare di (x, y) nell'aperto $\mathbb{R}^2$.

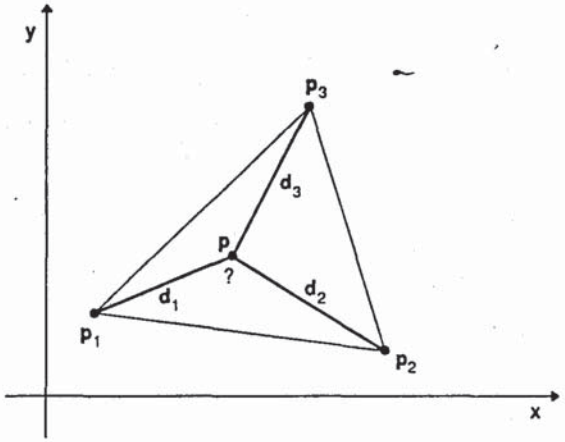


Fig. 2.1. Dove deve essere collocato $\mathbf{p}$ in modo da minimizzare $d_1 + d_2 + d_3$?

È questo un problema di ricerca di *estremi liberi*, nel quale x e y variano in un aperto e sono pertanto libere di muoversi, almeno localmente, in ogni direzione.

***Esempio* 1.2** - Problema: Fra tutti i parallelepipedi aventi superficie totale assegnata, $2A$, determinare quello di volume massimo.

Se si indicano con x, y, z le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo, che possiamo supporre non degenere, il problema è equivalente a massimizzare la funzione $V(x, y, z) = xyz$ sull'ottante positivo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}$$

sotto la condizione $xy + yz + zx = A$.

Si tratta di un problema di massimizzazione con vincoli di uguaglianza.

***Esempio* 1.3** - (Problema della dieta).

Si supponga di avere a disposizione n tipi di cibo, $A_1, \ldots, A_n$, ciascuno dei quali contenga m sostanze nutritive $N_1, \ldots, N_m$.

Siano, per unità di peso:

a_{ij} = contenuto calorico della sostanza nutritiva N_j nell'alimento A_i;
c_i = costo dell'alimento A_i;
b_j = fabbisogno nell'organismo della sostanza N_j (ad esempio, giornaliero)
per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

Il problema della dieta consiste nello scegliere la quantità x_i di cibo A_i, $i = 1, \ldots, n$, in modo da minimizzare il costo totale sotto la condizione che la dieta sia sufficiente al fabbisogno di ogni sostanza.

Si tratta di minimizzare la funzione

$$C(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i$$

dove le variabili $x_1, \ldots, x_n$ sono *non negative* e soggette alle m ulteriori condizioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq b_j \qquad (j = 1, \ldots, m) .$$

È un tipico problema di programmazione, ovvero di *ottimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza*.

In questo caso, essendo affini sia la funzione obiettivo sia i vincoli, il problema è di programmazione lineare.

1.2 Generalità sull'ottimizzazione

Formuliamo ora con precisione i concetti di estremo illustrati negli esempi precedenti.

Sia $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$. Ricordiamo le definizioni di *estremo locale* (o *relativo*) e *globale* (o *assoluto*).

Definizione 1.1 - *Un punto* $\mathbf{x}^0 \in X$ *si dice di massimo (minimo) locale per* f *se esiste un intorno* $B_r(\mathbf{x}^0)$ *tale che*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \qquad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)) \tag{1.2}$$

per ogni $\mathbf{x} \in X \cap B_r(\mathbf{x}^0)$. *Si dice di massimo (minimo) globale per* f *se* (1.1) *vale per ogni* $\mathbf{x} \in X$.

Se, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, nella (1.1) la disuguaglianza vale in senso stretto ($<$ anziché $\leq$ o $>$ anziché $\geq$) il punto $\mathbf{x}^0$ è di massimo, (minimo) locale o globale, *forte*.

Corrispondentemente il valore $f(\mathbf{x}^0)$ si dirà massimo (o minimo) locale o globale, eventualmente forte.

Se X è un aperto gli eventuali estremi di f si dicono *liberi*. Più in generale la ricerca di estremi liberi consiste nell'individuare punti di estremo che siano *interni* al dominio X.

Supponiamo ora di essere interessati ai valori che f assume non in tutto X, bensì in un sottoinsieme $U \subset X$; in altri termini alla restrizione di f in U, $f_{|U}$. Ad esempio, se X è chiuso, potrebbe essere $U = \partial X$.

Le definizioni precedenti si estendono subito ad $f_{|U}$ pur di sostituire X con U.

Ad esempio: $\mathbf{x}^0$ *si dice punto di massimo locale per* $f_{|U}$ *se esiste* $B_r(\mathbf{x}^0)$ *tale che*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \qquad \forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}^0) \cap U \ .$$

Si dice di massimo globale se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in U \ .$$

È ovvio che un estremo, di qualunque natura, per f è automaticamente un estremo della stessa natura per $f_{|U}$ mentre non è vero il viceversa.

Ci occuperemo dei casi in cui U è l'intersezione di X con un insieme definito da un sistema di uguaglianze del tipo

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \ , \ \text{con } m < n \ ,$$

oppure da un sistema di disuguaglianze del tipo

$$h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, k \ .$$

Si parlerà allora di ricerca di *estremi condizionati* o *vincolati con vincoli di uguaglianza o di disuguaglianza.*

Esaminiamo ora brevemente quali questioni occorre in generale affrontare in un problema di ottimizzazione.

1) *Esistenza*

Le questioni di esistenza si presentano prevalentemente nella ricerca degli estremi globali. Negli esempi 1.1–1.3 si cercano appunto minimo e massimo globali.

Per garantire l'esistenza di estremi globali può essere utile il teorema di Weierstrass: *se* X *è compatto ed* f *è continua in* X *allora* f *ha massimo e minimo (globali) in* X.

2) *Unicità*

Anche le questioni di unicità si presentano prevalentemente nell'ottimizzazione globale.

Supponiamo che $f(\mathbf{x}^0)$ sia il minimo globale di f in X (*). Può essere utile sapere se il punto di minimo *è unico* o, in altre parole, che non vi siano altri punti $\mathbf{x}$ tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$.

Un ruolo importante a questo proposito è rivestito da eventuali proprietà di *convessità* del dominio X e/o della funzione stessa. Il seguente esempio è significativo, anche se geometricamente intuitivo.

***Esempio* 1.4** - Sia X un *compatto convesso* in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{p}$ un punto *non* appartenente ad X. (fig. 2.2).

Per $\mathbf{x} \in X$ definiamo

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{p}||$$

Cerchiamo il minimo di f in X, che equivale a determinare un punto di X (se esiste) a distanza minima da $\mathbf{p}$.

Osserviamo anzitutto che f è continua in X. Infatti, usando la proprietà 4. della norma (v. pag. 126, Vol. 1), si ricava, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$:

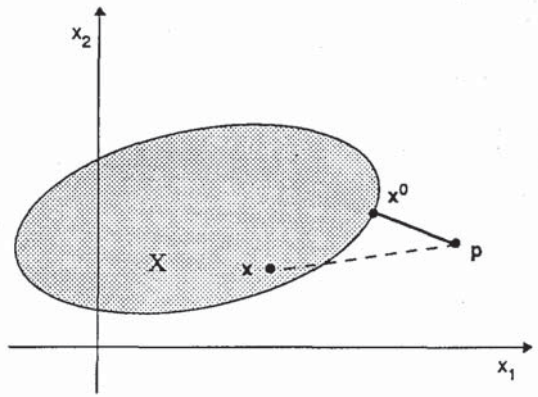


Fig. 2.2

(*) Chiaramente il minimo globale ($= \min f(X)$) è *unico*.

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = \Big| \, ||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| - ||\mathbf{y} - \mathbf{p}|| \, \Big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \, . \tag{1.2}$$

La (1.2) mostra che $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < \varepsilon$ implica $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, da cui segue la continuità di f.

La funzione f è inoltre convessa; infatti, usando la disuguaglianza triangolare, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ ed ogni $\alpha \in (0,1)$, si ha:

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) &= ||\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} - \mathbf{p}|| = ||\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + (1-\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{p})|| \leq \\ &\leq \alpha||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| + (1-\alpha)||\mathbf{y} - \mathbf{p}|| \, . \end{aligned} \tag{1.3}$$

con uguaglianza solo nel caso in cui $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ e $\mathbf{y} - \mathbf{p}$ siano linearmente dipendenti.

Dal teorema di Weierstrass si deduce che il minimo di f esiste, cioè esiste $\mathbf{x}^0 \in X$ tale che $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}|| = \min_{\mathbf{x} \in X} ||\mathbf{x} - \mathbf{p}||$.

Il punto di minimo $\mathbf{x}^0$ non può essere interno ad X; se infatti lo fosse, muovendosi di poco da $\mathbf{x}^0$ verso $\mathbf{p}$ lungo il segmento $[\mathbf{x}^0, \mathbf{p}]$, si rimarrebbe in X e la distanza da $\mathbf{p}$ decrescerebbe.

Dunque $\mathbf{x}^0 \in \partial X$. Facciamo ora vedere che il punto di minimo è *unico*. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista un altro punto di minimo $\mathbf{x}^1 \in \partial X$.

Poniamo $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}|| = \mu$; essendo anche $||\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}|| = \mu$ i punti $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$ e $\mathbf{p}$ non possono essere allineati e perciò i vettori $\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}$ e $\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}$ sono *linearmente indipendenti*. Ciò implica che se si pone $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}^1$ nella (1.3), la disuguaglianza vale in senso stretto; in conclusione si avrebbe:

$$f(\alpha\mathbf{x}^0 + (1-\alpha)\mathbf{x}^1) < \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu$$

contro l'ipotesi che μ sia il minimo di f.

Il punto $\mathbf{x}^0$ si chiama *proiezione* di $\mathbf{p}$ su X.

È interessante osservare che se X non è chiuso il minimo di f può non esistere mentre se X non è convesso potrebbero esservi più punti di minimo (Esercizio 1).

3) *Caratterizzazione dei punti di estremo*

La caratterizzazione dei punti di estremo avviene, come già nel caso unidimensionale, attraverso condizioni analitiche necessarie e/o sufficienti che tali punti devono soddisfare.

Lo strumento principale è il calcolo differenziale, sviluppato nel volume 1, capitolo 7. È così possibile, nella ricerca di estremi liberi, estendere al caso n-dimensionale teoremi come quello di Fermat o come il teorema 7.3.5, sul riconoscimento della natura dei punti stazionari mediante la formula di Taylor.

Per quanto riguarda gli estremi vincolati svilupperemo il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, per il caso dei vincoli di uguaglianza, e di *Kuhn–Tucker* per quelli di disuguaglianza.

4) *Algoritmi di calcolo*

Qui si entra propriamente nel campo dell'Analisi Numerica.

Quando le variabili in gioco sono molte, la caratterizzazione di cui al punto 3 diventa quasi sempre inefficace dal punto di vista del calcolo effettivo. Si presenta dunque la necessità di costruire algoritmi efficienti che permettano di determinare con la voluta precisione i punti che interessano.

1.3 Estremi liberi. Condizioni necessarie

Nella ricerca degli estremi liberi possiamo supporre che X sia aperto.

Sia dunque $f : X \to \mathbb{R}$, con X aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbf{x}^0$ un estremo locale per f. Una condizione che $\mathbf{x}^0$ deve soddisfare si trova facilmente considerando il comportamento di f lungo le direzioni uscenti da $\mathbf{x}^0$. Fissato $\mathbf{v}$, versore in $\mathbb{R}^n$, poniamo $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$.

La funzione g, reale di variabile reale, è definita in un intorno di $t = 0$, essendo $\mathbf{x}^0$ punto interno, ed ha in $t = 0$ un punto di estremo. Se supponiamo che $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ esista, ricordando la definizione di derivata direzionale ed il teorema di Fermat, si conclude che $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = g'(0) = 0$.

Dunque:

■ **Teorema 1.1** - *Se $\mathbf{x}^0$ è punto di estremo locale per f e $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ esiste, allora $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = 0$.*

Immediato corollario è il seguente:

Corollario 1.2 - *Se f è differenziabile in $\mathbf{x}^0$, punto di estremo locale per f, allora ogni derivata direzionale in $\mathbf{x}^0$ è nulla; in particolare $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.*

Ricordiamo che se f è differenziabile, un punto in cui il gradiente, o equivalentemente il differenziale, si annulla si dice *stazionario o critico*. Il corollario esprime il fatto che un punto di estremo locale *deve* essere *critico*.

Già sappiamo dallo studio delle funzioni reali di una variabile reale che la condizione espressa nel teorema 1.1 o nel corollario 1.2, non è in generale sufficiente per decidere se un punto $\mathbf{x}^0$ sia di estremo né tantomeno di quale tipo di estremo si tratti.

Si potrebbe pensare che se un punto $\mathbf{x}^0$ è critico per f ed è un punto di massimo (minimo) lungo *ogni* direzione uscente da $\mathbf{x}^0$, ovvero punto di massimo (minimo) per $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$ per ogni versore $\mathbf{v}$, allora è punto di massimo (minimo) locale per f. Il seguente esempio mostra che ciò è falso.

***Esempio* 1.5** - Sia $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

La funzione ha un punto critico in $(0,0)$ dove si annulla; infatti

$$\begin{aligned} f_x &= -6xy + 8x^3 \ , \quad f_x(0,0) = 0 \\ f_y &= 2y - 3x^2 \ , \quad f_y(0,0) = 0 \, . \end{aligned}$$

Lungo ogni retta uscente da $(0,0)$ f ha un minimo nell'origine.

Infatti, lungo l'asse y si ha $f(0,y) = y^2$ che è minima in $y = 0$.

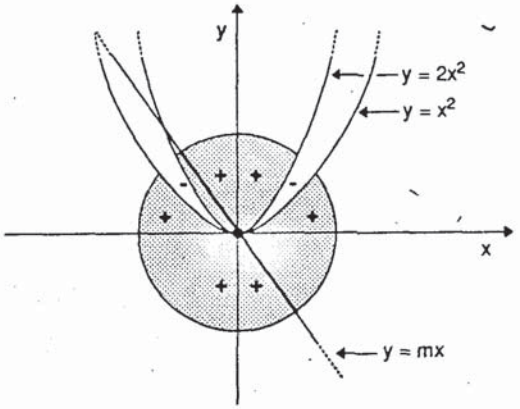


Fig. 2.3 - Nell'intorno circolare dell'origine i segni + o − indicano le zone di positività o negatività di f. Si noti come lungo ogni retta $y = mx$, f sia definitivamente positiva per $x \to 0$, mentre $f(0,0) = 0$.

Lungo le rette $y = mx$ si ha $f(x, mx) = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4$ che, come si verifica subito, ha un minimo in $x = 0$ per ogni m.

D'altra parte $(0,0)$ *non* è punto di minimo locale per f, in quanto la funzione cambia segno in *ogni* intorno circolare dell'origine o, in altri termini, in ogni intorno di $(0,0)$, esistono punti in cui f è positiva, altri in cui è negativa.

La discussione precedente è visualizzata in figura 2.3.

I punti critici come l'origine nell'esempio 1.5 si chiamano punti di *sella* o di *colle*. Più precisamente un punto critico $\mathbf{x}^0$ si dice di *sella* o di *colle* se in *ogni* intorno di $\mathbf{x}^0$ esistono punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}^0)$ e punti in cui è minore di $f(\mathbf{x}^0)$.

Va osservato che a volte, ad esempio nei testi di programmazione, il termine *sella* si riferisce a punti critici nei quali f è minima lungo alcune direzioni e massima lungo altre. In questo senso l'origine nell'esempio 1.5 *non* è punto di sella. Un tipico punto di sella è l'origine per la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$, il cui grafico (diagramma n. 44, Vol. 1) mostra anche quanto sia appropriata la terminologia.

Nella ricerca degli estremi liberi di f, il teorema 1.1 opera dunque un primo filtro: gli estremi liberi in cui esiste il gradiente si trovano tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \, . \end{cases}$$

Una volta determinati gli eventuali punti critici occorrono altre indagini per deciderne la natura.

Vale la pena di mettere subito in evidenza che per funzioni *convesse o concave* possono essere tratte conclusioni immediate:

Proposizione 1.3 - *Se $\mathbf{x}^0$ è un punto critico per una funzione f convessa (concava) e differenziabile, allora $\mathbf{x}^0$ è punto di minimo (massimo) globale. Inoltre se f è strettamente convessa (concava) il punto di minimo (massimo) è unico e forte.*

Dimostrazione – Se f è convessa e differenziabile in $\mathbf{x}^0$, per ogni $\mathbf{x} \in X$, si ha (Teor. 7.1.11, Vol. 1):

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) \; ; \tag{1.4}$$

essendo $\mathbf{x}^0$ critico, $df(\mathbf{x}^0) = 0$ e perciò $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ per ogni $\mathbf{x} \in X$, da cui segue che $\mathbf{x}^0$ è punto di minimo globale. Se f è strettamente convessa la (1.4) vale in senso stretto per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, per cui $\mathbf{x}^0$ è di minimo globale forte ed $\mathbf{x}^0$ è unico. □

I pochi elementi sviluppati finora permettono già di risolvere il problema dell'esempio 1.1.

***Esempio* 1.6** - (continuazione dell'esempio 1.1)

Ricordiamo che la funzione da minimizzare è $f(x,y) = \sum_{j=1}^{3} d_j(x,y)$ dove $d_j(x,y) = ||\mathbf{p} - \mathbf{p}_j||$, distanza del punto $\mathbf{p}$ dal punto $\mathbf{p}_j$.

Nell'esempio 1.4 abbiamo visto che la funzione distanza è convessa e perciò f, come somma di funzioni convesse, è pure convessa.

Osserviamo poi che il minimo, se esiste, non può essere assunto nei vertici del triangolo, in particolare nel vertice comune ai due lati più corti. Infatti, sia, ad esempio, $\mathbf{p}_1$ tale vertice e sia $\mathbf{q}$ il piede della perpendicolare condotta dal vertice $\mathbf{p}_2$ al lato opposto. Allora è facile verificare che:

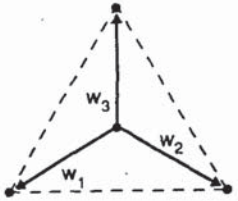
$$\begin{aligned} ||\mathbf{q} - \mathbf{p}_2|| + ||\mathbf{q} - \mathbf{p}_1|| + ||\mathbf{q} - \mathbf{p}_3|| &= ||\mathbf{q} - \mathbf{p}_2|| + ||\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|| < \\ &< ||\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|| + ||\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|| \end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{p}_1$ non può essere punto di minimo globale.

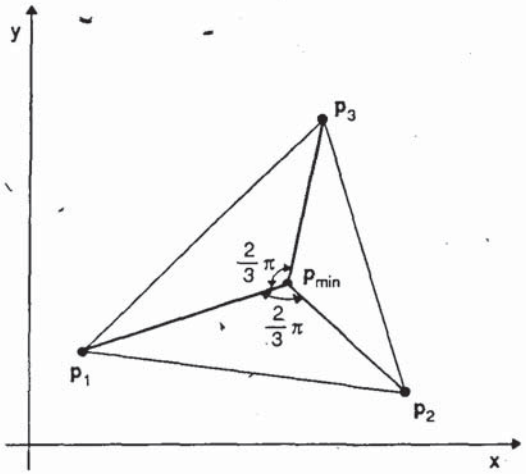
I vertici del triangolo sono gli unici punti dove f *non* è differenziabile; per quanto appena osservato possiamo limitarci a considerare gli altri.

Cerchiamo i punti critici annullando il gradiente di f. Si trova il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x - x_1}{d_1} + \dfrac{x - x_2}{d_2} + \dfrac{x - x_3}{d_3} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y - y_1}{d_1} + \dfrac{y - y_2}{d_2} + \dfrac{y - y_3}{d_3} = 0 \, . \end{cases} \tag{1.5}$$



a) L'unica disposizione (a meno di rotazioni del piano) di tre versori in $\mathbb{R}^2$, affinché la loro somma sia $\mathbf{0}$.



b) La soluzione del problema di minimo nell'esempio 1.6 per il triangolo di fig. 2.1.

Fig. 2.4

Per risolverlo notiamo che le coppie $\left(\frac{x-x_1}{d_1}, \frac{y-y_1}{d_1}\right)$, $\left(\frac{x-x_2}{d_2}, \frac{y-y_2}{d_2}\right)$, $\left(\frac{x-x_3}{d_3}, \frac{y-y_3}{d_3}\right)$ sono rispettivamente le componenti dei vettori $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}{d_1}$, $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_2}{d_2}$, $\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}_3}{d_3}$ che hanno modulo *unitario*, poiché $\|\mathbf{w}_j\| = \frac{\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_j\|}{d_j} = \frac{d_j}{d_j} = 1$. Il sistema (1.5) è allora equivalente all'equazione vettoriale

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \ . \tag{1.6}$$

Ora, 3 *versori* in $\mathbb{R}^2$ possono avere per somma il vettore nullo solo se i punti corrispondenti sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero, ovvero se l'angolo che ciascuno di essi forma con ciascuno degli altri è di $2\pi/3$, (fig. 2.4 *a*).

Esiste un solo punto $\mathbf{p}$, che risulta interno al triangolo, tale che i segmenti $[\mathbf{p}, \mathbf{p}_j]$ formino tra loro angoli di $2\pi/3$. Dunque esiste un solo punto critico per f. Essendo f convessa, in base alla proposizione 1.3, esso è (l'unico) punto di minimo.

1.4 Forme quadratiche

Un modo per determinare la natura di un punto critico $\mathbf{x}^0$ è quello di usare la formula di Taylor per analizzare il segno di $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$. Su questa idea era infatti basato il teorema 6.3.5, volume 1. Nel caso unidimensionale, arrestandosi al secondo ordine, si trova, essendo $f'(x_0) = 0$:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(h^2) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad \text{per } h \to 0 \ .$$

Ora, se $f''(x_0) \neq 0$, il segno di $f(x_0+h) - f(x_0)$ è, definitivamente per $h \to 0$, quello di $f''(x_0)$; se $f''(x_0) = 0$ occorre un'analisi più profonda.

Nel caso multidimensionale, procedendo nello stesso modo, si troverebbe

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2}d^2 f(\mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{h}\|^2) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)h_i h_j + o(\|h\|^2) \ . \end{aligned} \tag{1.7}$$

La determinazione del segno di $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ conduce ancora all'analisi del differenziale secondo di f in $\mathbf{x}^0$ ovvero all'analisi della forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)h_i h_j \ .$$

Apriamo dunque una parentesi in cui ci occupiamo delle forme quadratiche. Essendo questo argomento tradizionalmente inserito nei corsi di Algebra ci limitiamo ad evidenziare i risultati più strettamente legati all'ottimizzazione.

Ricordiamo che una *forma quadratica* (in breve, f.q.) in $\mathbb{R}^n$ è un *polinomio omogeneo di secondo grado* del tipo

$$q(\mathbf{h}) = q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_i h_j \tag{1.8}$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali, coefficienti della f.q.. Se tutti gli a_{ij} sono uguali a zero, la (1.8) si chiama f.q. *nulla*.

Si può sempre supporre che nella (1.8) sia $a_{ji} = a_{ij}$; se così non fosse basterebbe sostituire ciascuno dei due coefficienti a_{ij} ed a_{ji} con la loro semisomma $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$, lasciando in tal modo inalterata la (1.8).

Ad ogni $q(\mathbf{h})$ risulta così associata una matrice simmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, con una corrispondenza evidentemente biunivoca.

***Esempio* 1.7 -** Le forme quadratiche seguenti corrispondono alle matrici indicate.

$$q(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2 \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2 \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(h_1,h_2,h_3,h_4) = -h_1^2 - 3h_2^2 + h_4^2 - 2h_1h_3 + 10h_2h_4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

A volte è più significativo scrivere una f.q. come prodotto scalare: $q(\mathbf{h}) = <\mathbf{A}\,\mathbf{h}, \mathbf{h}>$, oppure matriciale: $\mathbf{h}^T\mathbf{A}\mathbf{h}$; scrivendo $\mathbf{A}\mathbf{h}$ si intende che $\mathbf{h}$ sia vettore colonna; $\mathbf{h}^T$ indica il trasposto di $\mathbf{h}$.

Siamo interessati al segno che una f.q. assume al variare di $\mathbf{h}$. Una prima osservazione è che, essendo omogenea di secondo grado, $q(\mathbf{h})$ *assume segno costante su ogni retta passante per l'origine, origine esclusa*. Infatti $q(t\mathbf{h}) = t^2 q(\mathbf{h})$.

I seguenti semplici esempi in $\mathbb{R}^2$ illustrano tutte le possibilità di comportamento:

a) $h_1^2 + h_2^2$ è positiva per ogni $(h_1,h_2) \neq (0,0)$;

b) $-h_1^2 + h_2^2$ è positiva per $(h_1,h_2) = (0,1)$ e negativa per $(h_1,h_2) = (1,0)$;

c) $-h_1^2 - h_2^2$ è negativa per ogni $(h_1,h_2) \neq (0,0)$;

d) h_1^2 è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0,h_2)$

e) $-h_1^2$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0,h_2)$.

Tali esempi suggeriscono la seguente classificazione che si applica sia alla f.q., sia alla matrice simmetrica ad essa associata.

Definizione 1.2 - *Una forma quadratica (o la matrice simmetrica corrispondente), $q(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, si dice:*

i) definita positiva (negativa) se $\forall \mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\mathbf{h}) > 0$ $(q(\mathbf{h}) < 0)$;

ii) semi–definita positiva (negativa) se $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $q(\mathbf{h}) \geq 0$ $(q(\mathbf{h}) \leq 0)$ *ed esiste* $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ *tale che* $q(\mathbf{h}) = 0$;

iii) indefinita (o non definita) se esistono $\mathbf{h}^1$ *ed* $\mathbf{h}^2$ *tali che* $q(\mathbf{h}^1) < 0$ *e* $q(\mathbf{h}^2) > 0$.

Sottolineiamo che le condizioni *i)*, *ii)*, *iii)* sono *mutuamente esclusive*.

È sempre bene specificare lo spazio vettoriale in cui si opera quando si vuole classificare una f.q. Infatti la f.q. in a) è definita positiva in $\mathbb{R}^2$ ma è *semidefinita* in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Per le altre, considerate come forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$, si ha: b) indefinita, c) definita negativa, d) semidefinita positiva, e) semidefinita negativa.

Occorrono ora dei criteri per classificare una f.q. senza ricorrere alla definizione. Lasciamoci guidare dal caso bidimensionale. Sia dunque

$$q(h_1,h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \tag{1.9}$$

con a, b, c non tutti nulli. Se $a = c = 0$, q è certamente indefinita. Se $a \neq 0$ (nel caso $a = 0$, $c \neq 0$ si procede analogamente), q si può scrivere nel modo seguente:

$$q(h_1,h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}h_2^2 \quad (a \neq 0) .$$

Osserviamo che la matrice associata a q è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e che i coefficienti dei quadrati sono a e $\frac{|\mathbf{A}|}{a}$, dove $|\mathbf{A}|$ è il determinante di $\mathbf{A}$. Si deduce allora il seguente risultato:

Proposizione 1.4 - *La* (1.9) *è:*

i) definita positiva (negativa) se e solo se $|\mathbf{A}| > 0$ *e* $a > 0$ $(a < 0)$.

ii) indefinita se e solo se $|\mathbf{A}| < 0$.

iii) semidefinita positiva (negativa) se e solo se: $|\mathbf{A}| = 0$ *e* $a > 0$ $(a < 0)$, *oppure se:* $|\mathbf{A}| = 0$ *e* $c > 0$ $(c < 0)$.

Il punto importante nella proposizione 1.4 è che il test fa intervenire non solo la matrice $\mathbf{A}$, bensì anche una matrice 1×1, ad esempio quella in alto a sinistra: $\mathbf{A}_1 = (a_{11})$. La naturale generalizzazione fa intervenire allora tutte le n sottomatrici $\mathbf{A}_k$ composte mediante le prime k righe e k colonne di $\mathbf{A}$, chiamate a volte *sottomatrici principali di nord–ovest*:

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}) \ , \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ,$$

$$\ldots, \mathbf{A}_n = \mathbf{A} .$$

I determinanti di queste matrici si chiamano *minori principali di nord–ovest*.

Vale il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare:

■ **Teorema 1.5** - *Sia* $q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. *Allora*

i) q *è definita positiva se e solo se* $|\mathbf{A}_k| > 0$ *per ogni* $k = 1, \ldots, n$.

ii) q *è definita negativa se e solo se* $(-1)^k|\mathbf{A}_k| > 0$ *per ogni* $k = 1, \ldots, n$, *(ovvero se e solo se* $a_{11} < 0$, $|\mathbf{A}_2| > 0$, $|\mathbf{A}_3| < 0, \ldots$*).*

Sarebbe erroneo pensare che le matrici $\mathbf{A}_k$ sono speciali. Il teorema 1.5 vale anche con le sottomatrici principali di sud–est, costruite partendo in basso a destra con l'elemento a_{nn}, aggiungendo ogni volta una riga ed una colonna fino ad arrivare

ad A. Oppure si potrebbe usare una qualunque catena di *sottomatrici principali* (*), partendo da un elemento a_{jj} della diagonale e aggiungendo ogni volta una riga ed una colonna.

***Esempio* 1.8 -** Sia

$$q_1(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2 .$$

La matrice corrispondente è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Essendo: $a_{11} = 5 > 0$, $|\mathbf{A}_2| = \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 15 > 0$, $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 12 > 0$, la f.q. è definita positiva.

Per ottenere un test simile al teorema 1.5 per le f.q. semidefinite occorre considerare *tutte* le sottomatrici principali di **A** e non solo una particolare sequenza tipo la $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, come del resto si vede già in dimensione 2: le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

corrispondono rispettivamente ad una f.q. semidefinita positiva e ad una negativa.

La sola considerazione di $a_{11} = 0$, $|\mathbf{A}| = 0$ e di $b_{11} = 0$, $|\mathbf{B}| = 0$ non permette di distinguere il segno. Vale il seguente risultato:

■ **Teorema 1.6 -** *Sia* $q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. *Allora:*

i) q è semidefinita positiva se e solo se ogni sottomatrice principale ha determinante non negativo.

ii) q è semidefinita negativa se e solo se ogni sottomatrice principale di ordine k ha determinante non negativo se k è pari e non positivo se k è dispari.

Poiché le condizioni espresse nei teoremi 1.5 e 1.6 sono necessarie e sufficienti si deduce che *in ogni altro caso* $q(\mathbf{h})$ risulta *indefinita.*

***Esempio* 1.9 -** Sia $q(h_1, h_2, h_3) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 5h_2^2 - 8h_2h_3 - 5h_3^2$. In questo caso è

(*) Una sottomatrice di A si dice *principale* se è simmetrica rispetto alla diagonale principale di A. Un *minore principale* è il determinante di una sottomatrice principale

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix} .$$

Si ha: $a_{11} = -2 < 0$, $|\mathbf{A}_2| = 9 > 0$, $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 0$. La f.q. non è definita negativa. Le altre sottomatrici principali sono $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ con determinante $9 > 0$ e $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ con determinante $9 > 0$.

Si conclude che q è semidefinita negativa.

Un altro importante test è basato sul segno degli autovalori di **A**.

Ricordiamo che un numero complesso λ ed un vettore non nullo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ sono detti, rispettivamente, *autovalore* ed *autovettore* (corrispondente a λ) di una matrice quadrata **A** di ordine n, se soddisfano la relazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

o, equivalentemente,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} . \tag{1.10}$$

La (1.10) ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare, ovvero se e solo se λ è soluzione dell'equazione, detta *equazione caratteristica:*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0 . \tag{1.11}$$

Il primo membro della (1.11) è un polinomio di grado n in λ e pertanto, in base al teorema fondamentale dell'Algebra, *esistono esattamente n autovalori di* **A**, *ciascuno contato secondo la propria molteplicità.*

Le matrici **A** simmetriche hanno importanti proprietà, che elenchiamo qui di seguito:

P_1) gli autovalori e gli autovettori di **A** *sono reali.*

P_2) esistono n autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$, che costituiscono un sistema ortonormale (cioè $< \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j >= \delta_{ij}$).

P_3) la matrice $\mathbf{Q} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$, le colonne della quale sono gli autovettori di cui al punto P_2), è ortogonale (cioè $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$) *e diagonalizza* **A**. *Più precisamente*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

dove λ_j è l'autovalore corrispondente a $\mathbf{w}_j$.

Sia ora una f.q. in $\mathbb{R}^n$, che scriviamo in notazione matriciale:

$$q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A}\mathbf{h} \ . \tag{1.12}$$

Operiamo la trasformazione $\mathbf{h} = \mathbf{Q}\,\mathbf{k}$, biunivoca da $\mathbb{R}^n$ in sé, dove $\mathbf{Q}$ è la matrice ortogonale di cui al punto P_3).

Sostituendo nella (1.12) si trova, ponendo $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$q(\mathbf{h}) = q(\mathbf{Q}\,\mathbf{k}) = \mathbf{k}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\,\mathbf{k} = \mathbf{k}^T\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_j^2 \ . \tag{1.13}$$

Questo procedimento si chiama *riduzione a forma canonica* di q.

Poiché la trasformazione $\mathbf{h} = \mathbf{Q}\,\mathbf{k}$ è biunivoca, il segno di $q(\mathbf{h})$ si può leggere su quello della f.q.

$$\tilde{q}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_j^2 \ .$$

Esaminando il segno dei λ_j si conclude immediatamente che:

▪ **Teorema 1.7** - *Sia $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{A}\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:*

i) q è definita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono positivi (negativi);

ii) q è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono non negativi (non positivi) ed almeno uno di essi è zero;

iii) q è indefinita se e solo se esistono 2 autovalori di segno opposto.

***Esempio* 1.10** - Sia

$$q(h_1, h_2, h_3) = -3h_1^2 + 2h_1h_3 - 3h_2^2 + 2h_2h_3 - h_3^2 \ ,$$

che corrisponde alla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda^2+4\lambda+1) = 0$$

per $\lambda = -3$, $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$. Pertanto q è definita negativa.

Una proprietà delle forme quadratiche definite, positive o negative, che risulterà utile in seguito è la seguente.

Proposizione 1.8 - *Se $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{A}\mathbf{h}$ è definita positiva allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:*

$$q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} ||\mathbf{h}||^2 \tag{1.14}$$

dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore di $\mathbf{A}$. Se $q(\mathbf{h})$ è definita negativa allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\mathbf{h}) \leq \lambda_{\max} ||\mathbf{h}||^2 \tag{1.15}$$

dove $\lambda_{\max}$ è il massimo autovalore di $\mathbf{A}$.

Dimostrazione – Dalla (1.13), se q è definita positiva si ha

$$q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} \sum_{j=1}^{n} k_j^2 = \lambda_{\min} ||\,\mathbf{k}\,||^2 \ .$$

Poiché $\mathbf{k} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{Q}^T\mathbf{h}$ e $\mathbf{Q}$ è ortogonale, si ha $||\,\mathbf{k}\,|| = ||\mathbf{h}||$ da cui la tesi. Analogamente si procede nel caso q definita negativa. □

Concludiamo con un'osservazione.

Se $q = q(\mathbf{h})$ è una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ allora $q(\mathbf{0}) = 0$ e $\nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

La natura del punto critico $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ dipende dal segno di q.

Se q è definita positiva (negativa), $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ è *minimo (massimo) globale forte*.

Se q è indefinita, $\mathbf{0}$ è di *colle*.

Se q (non nulla) è semidefinita positiva (negativa), $\mathbf{0}$ è *minimo (massimo) globale debole*.

1.5 Condizioni sufficienti per estremi liberi

Ritorniamo all'ottimizzazione ed alla formula (1.7) che indica come il segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ dipenda da quello della forma quadratica $d^2 f(\mathbf{x}^0)$, nel caso in cui $\mathbf{x}^0$ sia un punto critico per f.

La matrice corrispondente a $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ è l'Hessiana di f in $\mathbf{x}^0$, cioè

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) = (f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0))_{i,j=1,\ldots,n} \ ,$$

che risulta simmetrica se $f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) = f_{x_j x_i}(\mathbf{x}^0)$ per ogni $i, j = 1, \ldots n$; ciò accade, per esempio, se f è di classe C^2.

Usando la teoria delle f.q. si ricava il seguente:

▪ **Teorema 1.9** - *Siano $f \in C^2(X)$ e $\mathbf{x}^0$ punto critico per f. Se $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ è:*

i) definita positiva (negativa), $\mathbf{x}^0$ è punto di minimo (massimo) locale forte;

ii) indefinita, $\mathbf{x}^0$ è punto di colle.

Dimostrazione – Sia $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ definita positiva. Dalla (1.14) abbiamo $d^2 f(\mathbf{x}^0) \geq \lambda_m ||\mathbf{h}||^2$, dove λ_m è il minimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dalla (1.7) otteniamo allora,

$$f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)=\frac{1}{2}d^2f(\mathbf{x}^0)+o(||\mathbf{h}||^2)\geq\frac{1}{2}\lambda_m||\mathbf{h}||^2+o(||\mathbf{h}||^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_m||\mathbf{h}||^2\{1+o(1)\}\quad(\text{per } \mathbf{h}\to\mathbf{0})\,.$$

Poiché $\lambda_m>0$, $||\mathbf{h}||^2>0$ per $||\mathbf{h}||\neq 0$ e $\{1+o(1)\}>0$ definitivamente per $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, si deduce che anche $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)>0$ definitivamente per $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ e perciò $\mathbf{x}^0$ è di minimo locale forte. La dimostrazione è analoga nel caso $d^2f(\mathbf{x}^0)$ definita negativa: usando la (1.15) si trova

$$f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)\leq\frac{1}{2}\lambda_M||\mathbf{h}||^2\{1+o(1)\}$$

dove λ_M (negativo) è il massimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dunque $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})<0$ definitivamente per $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ e perciò $\mathbf{x}^0$ è punto di massimo locale forte.

Se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è indefinita esistono due vettori incremento $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ in corrispondenza ai quali $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è rispettivamente positiva e negativa; cioè:

$$\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)h_ih_j>0\quad\text{e}\quad\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)k_ik_j<0\,.$$

Valutiamo l'incremento di f lungo la retta $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+t\mathbf{h}$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$; si ha, dalla (1.7):

$$f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)=\frac{1}{2}t^2\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)h_ih_j+o(t^2)=$$

$$=\frac{1}{2}t^2\left\{\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)h_ih_j+o(1)\right\}\quad(\text{per } t\to 0)$$

e perciò, essendo definitivamente positivo il termine tra parentesi, si ottiene che, per $|t|$ piccolo, sarà $f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)>0$.

Con lo stesso ragionamento si trova che, per $|t|$ piccolo, $f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{k})-f(\mathbf{x}^0)<0$.

Dunque, in ogni intorno di $\mathbf{x}^0$ si trovano punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}^0)$ e punti in cui f è minore: $\mathbf{x}^0$ è punto di colle. □

Osservazione 1.1 - Se $d^2f(\mathbf{x})$ è definita, positiva o negativa, per *ogni* $\mathbf{x}\in X$ (e non solo in $\mathbf{x}^0$), in base al teorema 7.1.12, volume 1, f risulta strettamente convessa o concava, rispettivamente, e perciò, per la proposizione 1.3, $\mathbf{x}^0$ risulta (l'unico) punto di estremo *globale* forte, minimo o massimo rispettivamente.

Nel caso in cui $d^2f(\mathbf{x}^0)$ sia semidefinita, in generale la considerazione del solo differenziale secondo non è più sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Vale comunque la seguente proposizione.

Proposizione 1.10 - Sia $f\in C^2(X)$. *Se* $\mathbf{x}^0$ *è punto di massimo (minimo) allora* $d^2f(\mathbf{x}^0)$ *è definita oppure semidefinita negativa (positiva).*

Lasciamo la dimostrazione per esercizio.

La condizione espressa dalla proposizione 1.10 è solo necessaria affinché $\mathbf{x}^0$ sia punto di estremo. Ciò risulta particolarmente evidente se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è nullo (cioè *tutte* le derivate seconde di f in $\mathbf{x}^0$ sono nulle), come nel seguente caso: $f(x,y)=x^2y+y^5$ ha differenziale secondo nullo in $(0,0)$ e $(0,0)$ è punto di colle.

Anche se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ non è nulla, non si può ugualmente decidere; ad esempio, per la funzione $f(x,y)=x^2-y^4$, $d^2f(0,0)=2h_1^2$ è semidefinita positiva, e l'origine è punto di sella (di minimo sull'asse x, di massimo sull'asse y).

La proposizione 1.10 si può raffinare in questo senso: *se* $d^2f(\mathbf{x}^0)$ *non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa) allora* $\mathbf{x}^0$ *non può essere punto di massimo (minimo)* (Esercizio 10b).

La situazione cambia se $d^2f(\mathbf{x})$ è (non nulla) *semidefinita*, positiva o negativa, *non solo* in $\mathbf{x}^0$ ma per ogni $\mathbf{x}$ in un intorno $B_r(\mathbf{x}^0)$. In tal caso infatti f è *convessa o concava* rispettivamente, in $B_r(\mathbf{x}^0)$ (Esercizio 24, Cap. 7, Vol. 1) e la conclusione è immediata in base alla proposizione 1.3.

Se poi è semidefinita in *tutto* X, $f(\mathbf{x}^0)$ è estremo *globale*.

Osservazione 1.2 - Ricordando la proposizione 1.4, le considerazioni precedenti conducono alla seguente regola nel caso bidimensionale:

Siano $f\in C^2(X)$, X aperto in $\mathbb{R}^2$, ed (x_0,y_0) un punto critico per f.
L'Hessiana di f in (x_0,y_0) è

$$\mathbf{H}_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}f_{xx}(x_0,y_0) & f_{yx}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\,.$$

a) se $\det\mathbf{H}_f(x_0,y_0)>0$ e

$f_{xx}(x_0,y_0)>0$, allora (x_0,y_0) è punto di minimo locale forte

$f_{xx}(x_0,y_0)<0$, allora (x_0,y_0) è punto di massimo locale forte

(si noti che in questo caso $f_{xx}(x_0,y_0)$ e $f_{yy}(x_0,y_0)$ hanno lo stesso segno);

b) se $\det\mathbf{H}_f(x_0,y_0)<0$ allora (x_0,y_0) è punto di colle;

c) se $\det\mathbf{H}_f(x_0,y_0)=0$ occorre un'analisi ulteriore.

Si ritrovano così le tre situazioni già incontrate nello studio degli insiemi di livello nel paragrafo 7.33, volume 1; in quel contesto, ricordiamo la classificazione dei punti critici in *ellittici, iperbolici* e *parabolici* secondo che si verifichi a), b), o c) rispettivamente.

Se poi $\det \mathbf{H}_f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in X$, l'estremo è globale. Se infine $\det \mathbf{H}_f(x,y) = 0$ e $f_{xx}(x,y) > 0$ (risp. < 0) oppure $f_{yy}(x,y) > 0$ (risp. < 0) in tutto X allora (x_0, y_0) è punto di minimo globale (risp. massimo globale).

***Esempio* 1.11** - Si vogliano determinare gli estremi della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5 .$$

Poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ i suoi eventuali estremi si trovano tra i punti critici, soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = 2z - 2 = 0 . \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(1,0,1)$. Risulta inoltre: $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2$ mentre le altre derivate seconde sono nulle. Perciò:

$$d^2 f(x,y,z) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$

che è una f.q. definita positiva per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si deduce che il punto $(1,0,1)$ è di minimo globale, in base all'osservazione 1.1.

***Esempio* 1.12** - (Minimi quadrati).

Dati k punti nel piano $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_k,y_k)$ con ascisse tutte distinte, se $k > 2$ è evidente che, in generale, non esisterà una retta passante per ognuno di essi. Si vuole trovare la retta $y = ax + b$ che *minimizza l'errore quadratico totale*, definito dalla seguente espressione:

$$E(a,b) = \sum_{j=1}^{k} (ax_j + b - y_j)^2 \quad (k \geq 3) . \tag{1.16}$$

I punti critici di E sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} 2x_j(ax_j + b - y_j) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial b} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} 2(ax_j + b - y_j) = 0 . \end{cases} \tag{1.17}$$

Poniamo, per comodità

$$P = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \ , \ Q = \sum_{j=1}^{k} x_j \ , \ R = \sum_{j=1}^{k} y_j \ , \ S = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j \ .$$

Il sistema (2.16) si può scrivere ora nella forma

$$\begin{cases} Pa + Qb = S \\ Qa + kb = R . \end{cases} \tag{1.17$'$}$$

Il determinante $kP - Q^2$ è sempre positivo se $k > 2$ ed i numeri $x_1, \ldots, x_k$ sono distinti. Infatti $kP - Q^2 > 0$ equivale alla disuguaglianza

$$\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2 < k \sum_{j=1}^{k} x_j^2 , \tag{1.18}$$

vera nel caso indicato (*).

Si trova quindi che l'unico punto critico di E è il punto

$$\overline{a} = \frac{kS - RQ}{kP - Q^2} \ , \ \overline{b} = \frac{PR - SQ}{kP - Q^2} . \tag{1.19}$$

Per vedere che si tratta di un minimo calcoliamo la matrice Hessiana di E. Si trova

$$\mathbf{H}_E(a,b) = 2\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & k \end{pmatrix}$$

che coincide con la matrice dei coefficienti del sistema (1.17)$'$.

Poiché $P > 0$ e $\det \mathbf{H}_E = kP - Q^2 > 0$ in *tutto* $\mathbb{R}^2$, in base all'osservazione 1.2 si deduce che $(\overline{a}, \overline{b})$ è il punto di minimo globale cercato.

Applichiamo il procedimento alle coppie altezza/peso della seguente tabella:

altezza in cm.	160	163	168	170	175	178	185	190	193
peso in kg	60	61	70	72	73	74	81	83	87

Si ha: $P = 279176$, $Q = 1582$, $R = 661$, $S = 117036$. Dalle (1.18), accontentandoci di 3 cifre dopo il punto, si ricava: $\overline{a} = 0.773$, $\overline{b} = -62.435$, e la retta è $y = 0.773x - 62.435$.

Quest'ultima equazione può essere interpretata nel presente caso come una relazione "ottimale" tra peso ed altezza dove il criterio di ottimalità è quello di rendere minimo lo scarto quadratico totale dai dati della tabella. Ad esempio, secondo questo legame, un'altezza di cm 180 dovrebbe essere corrispondente ad un peso "ideale" di 76.705 kg.

(*) Si veda comunque l'esercizio 12.

Concludiamo il paragrafo esaminando il caso in cui $d^2f(\mathbf{x}^0)$ sia semidefinita. Abbiamo già osservato che eventuali proprietà di convessità o concavità di f permettono di riconoscere la natura di $\mathbf{x}^0$. Altrimenti si può procedere nei due modi seguenti:

1) esaminare direttamente il segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ quando $\mathbf{h}$ varia in un intorno di $\mathbf{0}$. Tale metodo è realistico se l'espressione analitica non è troppo complicata.
2) Se f è sufficientemente regolare, esaminare il segno dei differenziali di ordine superiore al secondo, nell'intorno delle rette sulle quali il differenziale secondo si annulla.

Illustriamo i due metodi con un esempio.

***Esempio* 1.13** - Sia $f(x,y) = 3 + (y-x)^2 - y^2(\sin x)^2$.
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0) = 3$ e $df(0,0) = 0$. Inoltre $d^2f(0,0) = 2(h_2 - h_1)^2$ è una f.q. semidefinita positiva che si annulla sulla retta $h_2 = h_1$; $(0,0)$ è di minimo o di colle.

Procedendo col primo metodo si avrebbe:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = (h_2 - h_1)^2 - h_2^2(\sin h_1)^2$$

che si annulla sulle due curve del piano h_1, h_2 definite dalle equazioni

$$h_2 = \frac{h_1}{1 \pm \sin h_1} .$$

Dalla figura 2.5 si vede che in ogni intorno circolare di $(0,0)$, $f(h_1,h_2) - f(0,0)$ cambia segno, per cui $(0,0)$ è di colle.

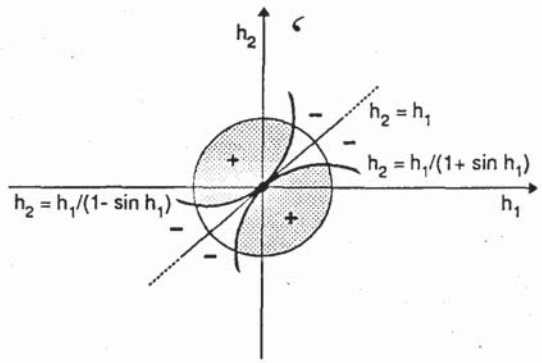


Fig. 2.5 Segno di $f(h_1,h_2) - f(0,0)$ (Esempio 1.13).

Con il secondo metodo si calcolano i differenziali di ordine superiore. Il primo non nullo è il quarto; si ha

$$d^4f(0,0) = -4!h_2^2h_1^2 .$$

Il suo segno sulla retta $h_2 = h_1$ (dove $d^2f(0,0)$ è nullo) è negativo e quindi $f(h_1,h_1) - f(0,0) < 0$ se $|h_1|$ è piccolo: l'origine non può essere punto di minimo e perciò è di colle.

Esercizi

1. In riferimento all'esempio 1.4:

a) dare un esempio in cui X non è chiuso ed il minimo non esiste.

b) dare un esempio in cui X è un compatto non convesso ed esiste più di un punto di minimo.

c)* Siano $X, \mathbf{p}, \mathbf{x}^0$ come nell'esempio 1.4. Mostrare che il punto di minimo $\mathbf{x}^0$ (proiezione di $\mathbf{p}$ su X) è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$(H) \quad \forall \mathbf{x} \in X : < \mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{p} - \mathbf{x}^0 > \leq 0 .$$

In altri termini: $\mathbf{x}^0$ soddisfa (H) e, viceversa, se $\mathbf{y}$ soddisfa (H), allora $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}$. Interpretare geometricamente la condizione (H).
[Suggerimento: considerare la funzione reale di variabile reale $g(t) = ||\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) - \mathbf{p}||^2$, $t \geq 0$. Calcolare g' e g'' e mostrare che (H) equivale a $g'(0) \geq 0$. Se $\mathbf{x}^0$ è punto di minimo allora $g'(0) \ldots$]

d) Si può generalizzare tutto ad n dimensioni?

2. Sia X *convesso, chiuso, illimitato*. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente convessa in X e $f(\mathbf{x}) \to +\infty$ se $||\mathbf{x}|| \to +\infty$. Mostrare che esiste uno ed un solo punto di minimo per f in X.

3. Determinare gli estremi liberi delle seguenti funzioni:
a) $x^2(x-y)$;
b) $(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
c) $\cos x \operatorname{Sh} y$;
d) $\sin(x+y) - \cos(x-y)$.

4. Determinare estremi liberi, estremo superiore ed inferiore della funzione $f(x,y) = |y-1|(2-y-x^2)$ nell'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2 - x^2 - y^2\}$.

5. Determinare la natura dell'origine per la funzione $f(x,y) = \log(1+x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2$.

6. Determinare gli estremi di $f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2$ nel suo dominio.

7. Verificare che $(0,0,0)$ è punto critico per la funzione $z = z(x,y,u)$ definita implicitamente dall'equazione $x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2e^z = 0$. Determinarne la natura.

8. Senza fare calcoli: considerare le funzioni

$$f_1(x,y,z) = [\sin(x-z)]^2 + y^2 - xyz \ , \quad f_2(x,y,z) = [\sin(x-z)]^2 + y^2 + x^2z \ .$$

Verificare che $(0,0,0)$ è punto stazionario, determinare $d^2f_j(0,0,0)$ e $d^3f_j(0,0,0)$ e dedurne la natura di $(0,0,0)$.

9. Determinare gli estremi di $f(x,y,z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2$ e di

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz\ .$$

10. Determinare la minima distanza intercorrente tra le due rette in $\mathbf{R}^3$ di equazione

$$x - 1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x}{4} = y = \frac{z}{2}\ .$$

11. a) Dimostrare la proposizione 1.10.

b) Dimostrare che se $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa) allora $\mathbf{x}^0$ è di colle o di minimo (massimo).

[Suggerimento: esaminare la dimostrazione del teorema 1.9].

12. Siano $k > 2$ ed $x_1, \ldots, x_k$ reali positivi tutti distinti tra loro.
Dimostrare che

$$\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2 < k \sum_{j=1}^{k} x_j^2$$

[Suggerimento: usare il principio di induzione; oppure mostrare che

$$\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 + 2\sum_{j<s} x_j x_s$$

e

$$(k-1)\sum_{j=1}^{k} x_j^2 - 2\sum_{j<s} x_j x_s = \sum_{j<s}(x_j - x_s)^2 > 0]$$

13. Determinare, al variare del parametro reale α, il segno delle seguenti forme quadratiche:

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2 + 2\alpha x_2 x_3 + x_3^2$$

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + 2\alpha x_3 x_4\ .$$

14. Sia S l'insieme delle matrici simmetriche definite positive di ordine n ed S_0 l'insieme di quelle semidefinite positive dello stesso ordine.

Vero o falso: rispetto alla somma di matrici ed al prodotto di una matrice per un numero reale:

a) S è uno spazio vettoriale

b) S_0 è uno spazio vettoriale.

Rispetto al prodotto di matrici righe per colonne:

a) S è un gruppo

b) S_0 è un gruppo.

15. *Teorema di Rolle multidimensionale.*

Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ con interno $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Sia poi $f : K \to \mathbf{R}$ tale che: $f \in C(K)$, f è differenziabile in K e f assume valore costante su ∂K.

Dimostrare che esiste un punto critico di f in $\overset{\circ}{K}$.

2. ESTREMI VINCOLATI. VINCOLI DI UGUAGLIANZA

2.1 Funzioni di due variabili

Cominciamo ad esaminare il caso più semplice di ottimizzazione vincolata: date due funzioni di due variabili f e g di classe $C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$, si vogliono determinare gli estremi di f (funzione obiettivo) ristretta all'insieme (vincolo)

$$E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}\ .$$

Il significato geometrico è illustrato in figura 2.6.

La situazione più favorevole è quella in cui dall'equazione $g(x,y) = 0$ si può esplicitare $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$ oppure, più in generale, quella in cui E_0 coincide con una curva γ di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, con I intervallo contenuto in $\mathbb{R}$.

Il problema è allora ricondotto alla ricerca degli estremi della funzione, reale di variabile reale,

$$\phi(t) = f(x(t), y(t))$$

con $t \in I$.

***Esempio* 2.1** - Si vogliano determinare gli estremi di $f(x,y) = x^2 + 3y$ con il vincolo $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$.

E_0 è un'ellisse che ha equazioni parametriche $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 3\sin t$ $t \in [0, 2\pi]$ e pertanto il problema posto equivale a determinare gli estremi di

$$\phi(t) = 4(\cos t)^2 + 9\sin t$$

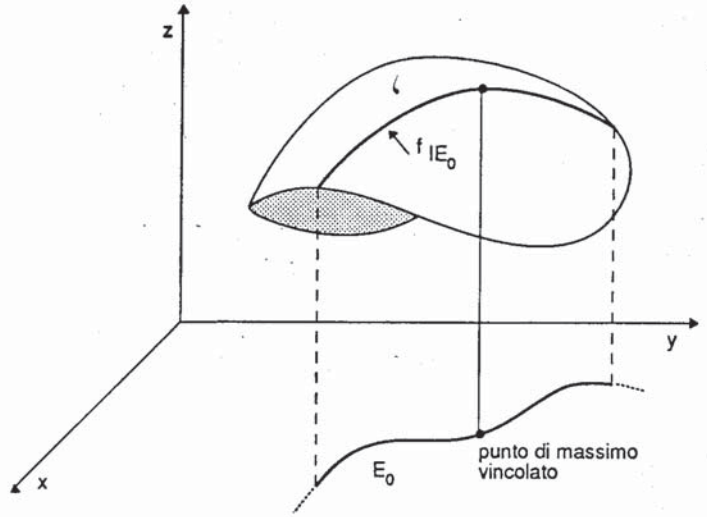


Fig. 2.6

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha: $\phi'(t) = \cos t(-8\sin t + 9) = 0$ per $\cos t = 0$ e cioè per $t = \pi/2$ e $3\pi/2$. Poiché $\phi''(t) = -\sin t(-8\sin t + 9) - 8(\cos t)^2$ si ha $\phi''(\pi/2) = -1$ e $\phi''(3\pi/2) = 17$ e perciò $t = \pi/2$ è un punto di massimo locale, $t = 3\pi/2$ di minimo locale.

Essendo poi $\phi(0) = \phi(2\pi) = 4$, $\phi(\pi/2) = 9$, $\phi(3\pi/2) = -9$, si deduce che 9 e -9 sono rispettivamente massimo e minimo *globali*.

In generale non sarà possibile ridurre ad una dimensione il problema, almeno dal punto di vista pratico. Vediamo allora come si può estendere la teoria sviluppata nella precedente sezione.

Il primo concetto da introdurre è quello di *punto critico (o stazionario) vincolato*. Sia (x_0, y_0) un punto *regolare* di E_0, cioè

$$g(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0} \ .$$

In tal caso, in un intorno di (x_0, y_0), E_0 coincide con una curva γ di equazioni parametriche $x = x(t), y = y(t)$; si può inoltre scegliere il parametro in modo che t vari in un intorno I_0 di $t = 0$ e che $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ (*).

Il vettore $(x'(0), y'(0))$ rappresenta dunque un vettore tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0).

Possiamo allora considerare la funzione $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ e definire (x_0, y_0) *punto critico vincolato* se $t = 0$ è *punto critico* per ϕ ovvero se $\phi'(0) = 0$. Essendo f differenziabile, si ha

$$\phi'(t) = f_x(x(t), y(t))\ x'(t) + f_y(x(t), y(t))\ y'(t)$$

e l'equazione $\phi'(0) = 0$ significa

$$f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0\,; \tag{2.1}$$

in altre parole: *la derivata di f in direzione tangente al vincolo in (x_0, y_0) è nulla.* Precisamente:

Definizione 2.1 - *Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$. Il punto $(x_0, y_0) \in X$ si dice critico o stazionario condizionato al vincolo $g(x, y) = 0$ se:*

(i) $g(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ (cioè (x_0, y_0) è punto regolare per E_0).

(*) Ad esempio, se $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce $y = h(x)$ per x in un intorno di x_0. Le due equazioni parametriche $x(t) = x_0 + t$, $y(t) = h(x_0 + t)$ soddisfano le condizioni richieste.

(ii) La derivata di f in direzione tangente al vincolo si annulla in (x_0, y_0) (cioè vale la (2.1)).

Naturalmente la *ii)* diventa significativa nel caso in cui $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$.

Una notevole ed elegante caratterizzazione di un punto critico vincolato è contenuta nel seguente teorema.

■ **Teorema 2.1** - *Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto regolare per $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = 0\}$. Allora (x_0, y_0) è punto critico vincolato ad E_0 se e solo se esiste un numero reale λ_0 tale che*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)\ . \tag{2.2}$$

Dimostrazione – Siano $(x(t), y(t))$, $t \in I_0$ le equazioni parametriche di E_0 in un intorno di (x_0, y_0) con $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Sia $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. (*).

Se (x_0, y_0) è punto critico vincolato, vale la (2.1) e quindi il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale al vettore tangente. Essendo $\nabla g(x_0, y_0)$ normale ad E_0 in (x_0, y_0) ne segue che $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono paralleli e cioè che esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$; tale che valga la (2.2).

Viceversa, se vale la (2.2), $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale ad E_0 in (x_0, y_0) e quindi vale la (2.1). □

Dalla discussione precedente segue subito una condizione necessaria per gli estremi condizionati, analogo del teorema di Fermat:

■ **Teorema 2.2** - *Nelle ipotesi del teorema 2.1, se (x_0, y_0) è punto di estremo condizionato (al vincolo $g(x, y) = 0$) allora è punto critico condizionato. In particolare esiste λ_0 tale che valga la (2.2).*

Dimostrazione – (x_0, y_0) è di estremo condizionato se e solo se $t = 0$ è di estremo per $\phi(t) = f(x(t), y(t))$. Dunque $\phi'(0) = 0$ da cui la tesi. □

Osservazione 2.1 - Il numero λ_0, la cui esistenza è asserita nel teorema 2.1, prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange*.

Introducendo la funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$, detta *Lagrangiana*, definita da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)\ ,$$

il teorema 2.1 afferma che (x_0, y_0) *è punto critico condizionato se e solo se esiste λ_0 tale che il punto (x_0, y_0, λ_0) sia punto critico libero per $\mathcal{L}$. Infatti i punti critici di $\mathcal{L}$ sono soluzioni del sistema:*

(*) Se $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ non c'è nulla da dimostrare.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -g = 0\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Le prime due equazioni coincidono con la (2.2) mentre la terza esprime la condizione di vincolo.

Ritorniamo al problema di ottimizzazione posto all'inizio del paragrafo.

La teoria sviluppata indica il seguente modo di procedere, noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

a) Si isolano gli eventuali punti non regolari di E_0 che vanno esaminati a parte;

b) si cercano i punti critici condizionati di f o equivalentemente quelli liberi della Lagrangiana, e cioè le soluzioni del sistema (2.3);

c) si determina la natura dei punti critici. A questo proposito, un criterio generale, basato sullo studio del segno di una forma quadratica vincolata, è presentato nel paragrafo 2.3.

***Esempio* 2.2** - Si vogliano determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = xy$, soggetti al vincolo $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ (*).

Le funzioni f e g sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed E_0 non ha punti singolari.

La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$. I punti critici sono soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = y - 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ f_y - \lambda g_y = x - 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni: $(1,1,1)\,(-1,-1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1/\sqrt{3})$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1/\sqrt{3})$.

Dunque vi sono quattro punti critici vincolati: $\mathbf{p}_0 = (1,1)$, $\mathbf{p}_1 = (-1,-1)$, $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)$, $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1)$.

Ora, essendo $E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ un compatto ed f continua, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un punto di massimo e uno di minimo. Poiché $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$ e $f(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -1/3$ si deduce che $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ sono punti di massimo globali e $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ di minimo globali.

Il teorema 2.1 ha interessanti interpretazioni. Ne illustriamo due.

Per la prima, di carattere *geometrico*, introduciamo la famiglia degli insiemi di livello di f, definiti dall'equazione $f(x,y) = c$, $(c \in \mathbb{R})$.

(*) Anche se in questo caso il vincolo si presta ad una rappresentazione parametrica globale è forse più semplice ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Osserviamo che il vincolo E_0 corrisponde all'insieme di livello zero di g. Sia ora (x_0, y_0) punto critico condizionato e $f(x_0, y_0) = c_0$ il livello critico corrispondente. Essendo per ipotesi $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ dalla (2.2) si deduce che:

se $\lambda_0 = 0$ allora $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ e il punto (x_0, y_0) è singolare per la linea di livello critica;

se invece $\lambda_0 \neq 0$ allora la linea di livello critica è tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0).

La seconda alternativa è illustrata in figura 2.7, in riferimento al problema dell'esercizio 2.2. Il vincolo E_0 è un'ellisse centrata nell'origine, con assi nelle direzioni $y = x$ e $y = -x$ e diametri lunghi rispettivamente $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2/3}$. Le linee di livello di f sono iperboli equilatere di equazione $xy = c$ (due rami per ogni valore di c). I livelli $c = 1$ e $c = -1/3$, corrispondenti agli estremi condizionati, sono tangenti all'ellisse nei punti critici.

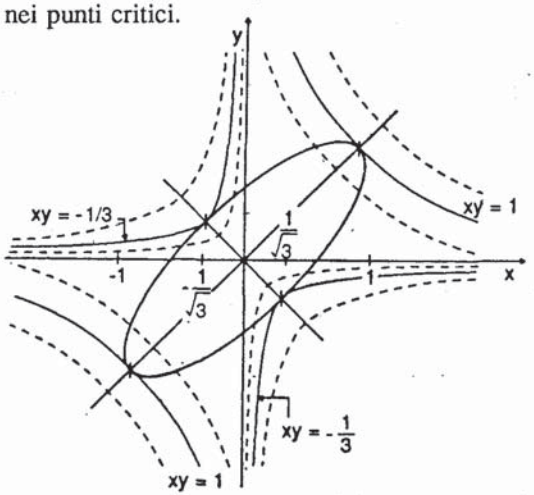


Fig. 2.7

La seconda è un'interpretazione *meccanica*. Sia f il potenziale di una forza piana meccanica $\mathbf{F} = \nabla f$ il cui punto di applicazione sia vincolato senza attrito ad una linea γ di equazione $g(x,y) = 0$. Dalla statica sappiamo che si può eliminare il vincolo pur di introdurre la relazione vincolare, rappresentata da una forza diretta normalmente al vincolo stesso e perciò del tipo $-\lambda\nabla g$. L'equilibrio si raggiunge allorché la risultante delle forze in gioco è nulla, ovvero quando $\nabla f - \lambda\nabla g = \mathbf{0}$.

In conclusione, *le posizioni di equilibrio sono i punti critici condizionati di f su γ*.

I moltiplicatori di Lagrange non esauriscono il loro ruolo nella determinazione dei punti critici, bensì hanno un interessante significato, che viene illustrato nell'esercizio 11.

2.2 Il caso generale: funzioni di n variabili con m vincoli ($m < n$)

Il problema di ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza, nel caso generale, si presenta così: dato un aperto X di $\mathbb{R}^n$ e date due funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : X \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, entrambe di classe C^1, si vogliono determinare gli estremi di f, ristretta all'insieme (vincolo) $E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Se $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, E_0 è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che soddisfano le m equazioni

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots & \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il caso $n = 2$, $m = 1$ è quello trattato nel paragrafo precedente.

Come già nel caso più semplice, la situazione più favorevole è quella in cui dal sistema (2.4) si riescono a ricavare esplicitamente m variabili in termini delle altre $n - m$, riducendo così il problema di ottimizzazione vincolata ad un problema di ottimizzazione, che può ancora essere vincolata, ma in dimensione inferiore.

Generalmente, si ricorre al metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, estensione di quello presentato nel paragrafo precedente. Sviluppiamo la teoria introducendo anche qui il concetto di *punto critico o stazionario vincolato*.

Sia $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X$ un punto *regolare* di E_0 intendendo con ciò che la matrice Jacobiana di $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{Dg} = \begin{pmatrix} D_{x_1} g_1 & D_{x_2} g_1 & \ldots & D_{x_n} g_1 \\ D_{x_1} g_2 & D_{x_2} g_2 & \ldots & D_{x_n} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ D_{x_1} g_m & D_{x_2} g_m & \ldots & D_{x_n} g_m \end{pmatrix}$$

abbia caratteristica m in $\mathbf{x}^0$. In altri termini i vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^0)$, per $j = 1, \ldots, m$, siano linearmente indipendenti.

Esiste dunque un minore di ordine m, estratto da $\mathbf{Dg}(\mathbf{x}^0)$, diverso da zero; possiamo senz'altro supporre che tale minore sia $\dfrac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$, cioè quello individuato dalle prime m colonne di $\mathbf{Dg}$.

In questo caso, grazie al teorema di Dini, il sistema (2.4) definisce $x_1, \ldots, x_m$, in funzione di $x_{m+1}, \ldots, x_n$ in un intorno di $\mathbf{x}^0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= h_2(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_m &= h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

in modo tale che

$$x_j^0 = h_j(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \ldots, m \,. \tag{2.6}$$

Si dice allora che, in un intorno di $\mathbf{x}^0$, E_0 è una *varietà di dimensione* $n - m$. Intuitivamente ciò significa che una ipotetica particella che si muova su E_0 è dotata di $n - m$ gradi di libertà; da un altro punto di vista, ciò vuol dire che per individuare un punto su E_0 (in un intorno di $\mathbf{x}^0$) occorre specificare $n - m$ parametri che, in questo contesto, fungono da coordinate locali.

Le varietà di dimensione $n - 1$ si chiamano *ipersuperfici* in $\mathbb{R}^n$; se $n = 3$ esse coincidono con le ordinarie superfici (trattate nel Cap. 6).

Le varietà di dimensione 1 si chiamano *curve* in $\mathbb{R}^n$. I casi $n = 2$ ed $n = 3$ sono stati ampiamente trattati nel capitolo 1 del presente volume. In generale una curva in $\mathbb{R}^n$ è assegnata da un vettore

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t),\ x_2(t) \ldots, x_n(t))$$

con $t \in I$, intervallo contenuto in $\mathbb{R}$.

La curva si dice *regolare* se $\mathbf{r} \in C^1(I)$ e se il vettore

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$

che chiameremo vettore *tangente* o vettore *velocità*, in analogia con i casi $n = 2$ e 3, è diverso da $\mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.

Il nostro scopo è definire quando $\mathbf{x}^0$ è punto critico per f ristretta alla varietà $n - m$ dimensionale, individuata in un intorno di $\mathbf{x}^0$ dal sistema (2.4), o equivalentemente dalle (2.5).

Ricordiamo che sia f sia $\mathbf{g}$ si intendono sempre di classe $C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo una curva regolare in $\mathbb{R}^n$ di equazione $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots x_n(t))$, che abbia le seguenti proprietà:

H_1) $\mathbf{r}$ è definita in un intorno I_0 di $t = 0$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^0$;

H_2) la curva è contenuta in E_0 e cioè

$$g_j(\mathbf{r}(t)) = g_j(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m \ \text{ e } \ \forall t \in I_0 \,. \tag{2.6$'$}$$

Definizione 2.2 - *Il punto regolare $\mathbf{x}^0 \in X$ si dice critico o stazionario per f, vincolato alla varietà E_0, se per ogni curva regolare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ soddisfacente le condizioni H_1) e H_2), posto $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$, si ha $\phi'(0) = 0$.*

L'interpretazione geometrica della definizione di punto critico si trova nell'osservazione 2.2. Il seguente teorema è immediato.

■ **Teorema 2.3** - *Se $\mathbf{x}^0 \in X$ è punto di estremo per f, vincolato alla varietà E_0, ed è punto regolare per E_0, allora $\mathbf{x}^0$ è punto critico vincolato (ad E_0).*

Dimostrazione – Se $\mathbf{x}^0$ è di massimo (minimo) vincolato e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è una curva soddisfacente le condizioni H_1) e H_2), allora $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$ ha un massimo (minimo) libero in $t = 0$ e perciò $\phi'(0) = 0$. □

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è basato sulla seguente caratterizzazione dei punti critici (generalizzazione del teorema 2.1), di cui omettiamo la dimostrazione.

■ **Teorema 2.4** - *Sia $\mathbf{x}^0 \in X$ un punto regolare per E_0. Allora $\mathbf{x}^0$ è punto critico vincolato (ad E_0) per f se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$, detti moltiplicatori di Lagrange, tali che:*

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^0 \nabla g_j(\mathbf{x}^0) \,. \tag{2.7}$$

Si noti che la (2.7) equivale ad n equazioni scalari.

Osservazione 2.2 - Le direzioni corrispondenti ai vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$< \nabla g_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{v} >= 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

si dicono *direzioni tangenziali ai vincoli.* Si dimostra che, nelle ipotesi del teorema, per ogni vettore $\mathbf{v}$ tangenziale esiste una curva regolare $\mathbf{r}(t)$ soddisfacente le condizioni H_1) e H_2) e tale che $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}$.

Si vede allora che un punto regolare $\mathbf{x}^0 \in X$ è stazionario se e solo se la derivata di f lungo *ogni* direzione tangenziale ai vincoli è nulla.

Osservazione 2.3 - Introducendo la funzione Langrangiana, definita dalla formula

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) := f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \,,$$

il teorema 2.4 afferma che, se $\mathbf{x}^0$ è regolare, allora è critico condizionato se e solo se esiste $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ tale che $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sia punto critico libero per $\mathcal{L}$. Infatti i punti critici liberi per $\mathcal{L}$ sono soluzioni del seguente sistema di $n + m$ equazioni in $n + m$ incognite:

$$\begin{cases} D_{x_1}\mathcal{L} = D_{x_1} f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{x_1} g_j = 0 \\ D_{x_2}\mathcal{L} = D_{x_2} f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{x_2} g_j = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n}\mathcal{L} = D_{x_n} f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{x_n} g_j = 0 \\ D_{\lambda_1}\mathcal{L} = -g_1 = 0 \\ D_{\lambda_2}\mathcal{L} = -g_2 = 0 \\ \vdots \\ D_{\lambda_m}\mathcal{L} = -g_m = 0 \,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Le prime n equazioni equivalgono alla (2.7); le ultime sono le condizioni di vincolo.

Per risolvere un problema di ottimizzazione vincolata con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dopo aver isolato i punti singolari, si determinano i punti critici, risolvendo il sistema (2.8).

In generale si cerca poi di stabilire la natura di detti punti mediante considerazioni legate al problema specifico, oppure ricorrendo al criterio sufficiente presentato nel paragrafo successivo.

***Esempio* 2.3** - Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange al problema dell'esempio 1.2. L'obiettivo da massimizzare è $V(x, y, z) = xyz$, nell'ottante positivo di $\mathbb{R}^3$, sotto la condizione

$$g(x, y, z) = xy + xz + yz - A = 0 \quad (A > 0) \,. \tag{2.9}$$

Poiché $\nabla g = (y + z, x + z, x + y)$ si annulla solo in $(0, 0, 0)$, sulla superficie (2.9) non vi sono punti singolari. Cerchiamo i punti critici. Il sistema (2.8) è assegnato dalle equazioni

$$\begin{aligned} V_x - \lambda g_x &= yz - \lambda(y + z) = 0 \\ V_y - \lambda g_y &= xz - \lambda(x + z) = 0 \\ V_z - \lambda g_z &= xy - \lambda(x + y) = 0 \end{aligned}$$

alle quali va aggiunta la (2.9). Facilmente si trova l'unico punto $x = y = z = \sqrt{A/2}$ con $\lambda = \sqrt{A/8}$.

Si tratta ora di stabilire la natura del punto critico $(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2})$.

Consideriamo V definita per $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; ciò non influisce sulla conclusione in quanto $V = 0$ sui piani coordinati.

Si noti che l'esistenza del massimo non si può inferire direttamente dal teorema di Weierstrass, essendo la superficie (2.9) illimitata.

Facciamo vedere che, tuttavia, ci si può restringere all'interno di una sfera di raggio opportunamente grande. Osserviamo infatti che, se un punto (x, y, z) appartiene alla superficie (2.9) e $x^2 + y^2 + z^2 > 3R^2$, allora almeno una delle variabili x, y, z è maggiore di R. Sia ad esempio $x > R$. Dalla (2.9) stessa si deduce poi che $xy \leq A$ e $xz \leq A$ e perciò $y \leq \frac{A}{x}$ e $z \leq \frac{A}{x}$. Dunque, se $x^2+y^2+z^2 > 3R^2$ ed il punto (x, y, z) è sulla superficie, per il volume V abbiamo:

$$V(x, y, z) = xyz \leq x\frac{A}{x}\frac{A}{x} = \frac{A^2}{x} < \frac{A^2}{R} .$$

Ne segue che, per R abbastanza grande, $V(x, y, z) < V(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}) = (A/2)^{3/2}$.

D'altra parte, nell'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2$ con l'ottante ed il vincolo (2.9), V deve ammettere massimo (per il teorema di Weierstrass). Per quanto abbiamo visto, i punti di massimo, se R è grande, devono essere interni alla sfera ed essere critici condizionati. Essendoci uno solo di tali punti si deduce che esso è il punto cercato.

In conclusione, *tra tutti i parallelepipedi di assegnata superficie totale il cubo è quello che ha volume massimo.*

***Esempio* 2.4** - Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice simmetrica di ordine 3 definita positiva. L'equazione

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 1 \qquad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)) \tag{2.10}$$

definisce un ellissoide con centro nell'origine. Vogliamo determinare gli estremi di $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sull'ellissoide.

Osserviamo che non vi sono punti singolari; infatti:

$$D_{x_j} < \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 2\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i \quad \text{e perciò} \quad \nabla < \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 2\mathbf{Ax} ,$$

che, essendo $\det \mathbf{A} > 0$, si annulla solo per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, punto non appartenente all'ellissoide.

Essendo poi f continua e la superficie compatta, esistono massimo e minimo globali, che devono essere punti critici condizionati.

La Langrangiana del problema è

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = ||\mathbf{x}||^2 - \lambda(< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} > -1)$$

ed il sistema (2.8) consiste delle 3 equazioni

$$D_{x_j}\mathcal{L} = 2x_j - 2\lambda\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i = 0 \qquad j = 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

più il vincolo

$$D_\lambda\mathcal{L} = < \mathbf{Ax}, \mathbf{x} > -1 = 0 .$$

Le (2.11) si possono scrivere nella forma compatta

$$\lambda\mathbf{Ax} = \mathbf{x} . \tag{2.11$'$}$$

Se ora $\lambda = 0$, la (2.11)$'$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che non verifica il vincolo. Se $\lambda \neq 0$ la (2.11)$'$, scritta nella forma

$$A\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} ,$$

indica che *i punti critici sono gli autovettori* di $\mathbf{A}$ che soddisfano la condizione $< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 1$ ed *i moltiplicatori sono i reciproci degli autovalori* corrispondenti. Studiamo la natura dei punti critici.

Siano $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ gli inversi degli autovalori di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{w}^3$ tre rispettivi autovettori, soddisfacenti il vincolo. Dalla (2.11)$'$ si ha:

$$\mathbf{Aw}^j = \frac{1}{\mu_j}\mathbf{w}^j \quad \text{per ogni } j = 1, 2, 3 .$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{w}^j$ si trova

$$1 =< \mathbf{Aw}^j, \mathbf{w}^j >= \frac{1}{\mu_j}||\mathbf{w}^j||^2$$

ovvero

$$f(\mathbf{w}^j) = ||\mathbf{w}^j||^2 = \mu_j \qquad (j = 1, 2, 3) .$$

Si può trarre allora la seguente conclusione:

Il massimo di f è μ_3, moltiplicatore massimo; il minimo è μ_1, moltiplicatore minimo. Essendo f il quadrato della distanza dall'origine, ricaviamo che $\sqrt{\mu_3}$ e $\sqrt{\mu_1}$ sono rispettivamente le lunghezze dei semiassi maggiore e minore dell'ellissoide.

Il moltiplicatore intermedio μ_2 corrisponde ad un *punto di sella*: partendo da $\mathbf{w}^2$ e muovendosi sull'ellissoide verso $\mathbf{w}^1$, f diminuisce, mentre muovendosi verso $\mathbf{w}^3$, f aumenta; la sua radice quadrata è la lunghezza del semiasse intermedio. Anche μ_2 può essere comunque caratterizzato come estremo vincolato di un opportuno problema, come mostrato nell'esercizio 7.

Nel caso $n = 2$ ed $m = 1$ o $m = 2$, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ed in particolare la (2.7), è suscettibile di interpretazione geometrica e meccanica analoghe a quelle del paragrafo precedente. Lasciamo all'allievo l'onere di tale estensione.

*2.3 Condizioni sufficienti

Il riconoscimento della natura di un punto critico libero è basato sullo studio del segno del differenziale secondo della funzione obiettivo come forma quadratica negli incrementi delle variabili.

Nel caso di punti critici condizionati è possibile procedere in modo analogo facendo intervenire il differenziale secondo (rispetto ad $\mathbf{x}$) della Lagrangiana, ristretto però ad incrementi tangenziali ai vincoli.

Analizziamo il caso di un solo vincolo ($m = 1$).

Sia $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ un punto critico per f condizionato al vincolo $g(\mathbf{x}) = 0$ e sia λ^0 il corrispondente moltiplicatore di Lagrange.

Vale il seguente risultato:

■ **Teorema 2.5** - *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$, X aperto di $\mathbb{R}^n$, di classe C^2. Se la forma quadratica*

$$\sum_{i,j=1}^{n} [f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 g_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)] h_i h_j = < [\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)]\mathbf{h}, \mathbf{h} > , \quad (2.12)$$

ristretta all'insieme dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tangenziali al vincolo in $\mathbf{x}^0$, (cioè $< \nabla g(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} >= 0$), è definita negativa (positiva), allora $\mathbf{x}^0$ è punto di massimo (minimo) forte vincolato.

Posticipiamo la dimostrazione, per presentare un criterio di riconoscimento del segno di una f.q. soggetta a vincolo lineare. Vale il seguente lemma algebrico di cui omettiamo la dimostrazione.

Lemma 2.6 - *Sia $q(\mathbf{h}) =< \mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{h} >$ una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $b_1 \neq 0$. Allora la f.q. $q(\mathbf{h})$, soggetta al vincolo lineare $< \mathbf{b}, \mathbf{h} >= 0$, è definita positiva se e solo se sono* **negativi** *tutti i minori principali di nord–ovest, di ordine maggiore di 2, della seguente matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \ldots & b_n \\ b_1 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A} & \\ b_n & & & \end{pmatrix} . \quad (2.13)$$

È definita negativa se e solo se i suddetti minori si susseguono a segni alterni a partire dal primo (di ordine 3) **positivo**.

Il lemma si applica nel nostro caso con $\mathbf{A} = \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{b} = \nabla g(\mathbf{x}^0)$; poiché $\nabla g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$, si può sempre supporre che $D_{x_1} g(\mathbf{x}^0) \neq 0$.

***Esempio* 2.5** - Riprendiamo il problema dell'esempio 2.3. Verifichiamo tramite il lemma 2.6 che il punto critico $(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2})$ è di massimo (locale!). In questo caso si ha $\lambda^0 = \sqrt{A/8}$

$$V_{xx} - \lambda g_{xx} = V_{yy} - \lambda g_{yy} = V_{zz} - \lambda g_{zz} = 0 \ ;$$

$$V_{xy} - \lambda g_{xy} = z - \lambda$$

$$V_{xz} - \lambda g_{xz} = y - \lambda$$

$$V_{yz} - \lambda g_{yz} = x - \lambda$$

$$\nabla g = (y + z, x + z, x + y) \ .$$

Dunque la matrice (2.13) è

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2A} & \sqrt{2A} & \sqrt{2A} \\ \sqrt{2A} & 0 & \sqrt{A/8} & \sqrt{A/8} \\ \sqrt{2A} & \sqrt{A/8} & 0 & \sqrt{A/8} \\ \sqrt{2A} & \sqrt{A/8} & \sqrt{A/8} & 0 \end{pmatrix} = 8\sqrt{\frac{A}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Poiché il determinante di questa matrice è negativo ed il suo minore principale di nord–ovest di ordine 3 è positivo, si ottiene la conclusione desiderata.

Dimostrazione del teorema 2.5 – Essendo $\mathbf{x}^0$ punto regolare, l'equazione

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

definisce, ad esempio, $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, in un intorno circolare $B_\delta(\mathbf{x}^0)$.

Sia ora $\mathbf{x}^1 \in B_\delta(\mathbf{x}^0) \cap E_0$ e assumiamo che la (2.12) sia definita positiva. Vogliamo mostrare che, se δ è sufficientemente piccolo, $f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^1)$.

Costruiamo una curva regolare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [-1, 1]$, tale che: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{x}^1$; $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}^0)$ e $g(\mathbf{r}(t)) = 0 \ \ \forall t \in [-1.1]$.

È sufficiente porre:

$$x_j(t) = x_j^0 + t(x_j^1 - x_j^0) \quad \text{per } j = 2, \ldots, n$$

e

$$x_1(t) = \varphi(x_2(t), \ldots, x_n(t)) \ .$$

Osserviamo che $\mathbf{r}'(0)$ è tangenziale al vincolo in $\mathbf{x}^0$; inoltre si ha:

$$x_j'(t) = (x_j^1 - x_j^0) \quad \text{per } j = 2, \ldots, n$$

e

$$x_1'(t) = \sum_{j=2}^{n} \varphi_{x_j}(\ldots)(x_j^1 - x_j^0)\,.$$

Pertanto, ponendo $M_1 = \max ||\nabla\varphi||^2$, si ha $|x_1'(t)|^2 \le M_1 \sum_{j=2}^{n}(x_j^1 - x_j^0)^2$ da cui

$$||\mathbf{r}'(t)||^2 \le (1+M_1)\sum_{j=2}^{n}(x_j^1 - x_j^0)^2 \le (1+M_1)||\mathbf{r}'(0)||^2\,. \tag{2.14}$$

Analogamente si trova

$$\begin{aligned} ||\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)|| &= |x_1'(t) - x_1'(0)| \le \\ &\le ||\nabla\varphi(x_2(t),\ldots,x_n(t)) - \nabla\varphi(x_2^0,\ldots,x_n^0)|| \cdot ||\mathbf{r}'(0)||\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Poniamo ora $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Essendo $\mathbf{x}^0$ punto critico vincolato si ha $\phi'(0) = 0$. Usando la formula di Mac Laurin, possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}), \tag{2.16}$$

dove $\bar{t}$ è un opportuno punto in $[0,1]$.

Essendo $g(\mathbf{r}(t)) = 0\ \forall t \in [-1,1]$, si ha $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 g((\mathbf{r}(t))$ e perciò

$$\phi'(t) = < \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) > -\lambda^0 < \nabla g(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) >$$

$$\begin{aligned} \phi''(t) =& < \mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > + < \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) > -\lambda^0 < \mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > - \\ & - \lambda^0 < \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) > = \\ =& < [\mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t))]\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) > + < \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) > . \end{aligned}$$

Poniamo $\mathbf{A}(t) = \mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t))$. Per ipotesi sappiamo che esiste $c > 0$ tale che

$$< \mathbf{A}(0)\mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(0) > \ge c||\mathbf{r}'(0)||^2\,. \tag{2.17}$$

Osserviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, se δ è abbastanza piccolo, si ha $|a_{ij}(t) - a_{ij}(0)| \le \varepsilon$ per ogni $i,j = 1,\ldots,n$ e, essendo φ di classe C^1, per la (2.15)

$$||\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)|| \le \varepsilon||\mathbf{r}'(0)||\,. \tag{2.18}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} < \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > =& < (\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(0))\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > + < \mathbf{A}(0)(\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)), \mathbf{r}'(t) > + \\ & + < \mathbf{A}(0)\mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0) > + < \mathbf{A}(0)\mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(0) > . \end{aligned}$$

Pertanto, se δ è sufficientemente piccolo, abbiamo, usando (2.14), (2.15) e (2.18)

$$< \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > \ge -n^2\varepsilon(1+M_1)||\mathbf{r}'(0)||^2 - 2a\varepsilon||\mathbf{r}'(0)||^2 + c||\mathbf{r}'(0)||^2$$

dove $a = n^2 \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}(0)|$. Se $\varepsilon \le \dfrac{1}{2n^2[\varepsilon(1+M_1)+2a]}$ si trova

$$< \mathbf{A}(t)\ \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > \ge \frac{c}{2}||\mathbf{r}'(0)||^2\,.$$

D'altra parte, essendo $\mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), 0, \ldots, 0)$ e

$$x_1''(t) = \sum_{i,j=2}^{n} \varphi_{x_i x_j}(\ldots)x_i'(t)x_j'(t)\,,$$

si ha: $||\mathbf{r}''(t)|| \le nM_2||\mathbf{r}'(0)||^2$, dove $M_2 = \max_{i,j=1,\ldots,n} |\varphi_{x_i x_j}|$.

Siccome poi $\nabla f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0\nabla g(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, diminuendo eventualmente δ si ha:

$$||\nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\nabla g(\mathbf{r}(t))|| \le \frac{c}{4nM_2}$$

e quindi

$$| < \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) > | \le \frac{c}{4}||\mathbf{r}'(0)||^2\,.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \phi''(t) \ge& < \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) > - | < \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0\nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) > | \ge \\ \ge& \frac{c}{2}||\mathbf{r}'(0)||^2 - \frac{c}{4}||\mathbf{r}'(0)||^2 = \frac{c}{4}||\mathbf{r}'(0)||^2\,. \end{aligned}$$

Ponendo $t = \bar{t}$ e sostituendo nella (2.16) si ottiene $f(\mathbf{x}^1) > f(\mathbf{x}^0)$.
La dimostrazione nel caso in cui la (2.12) sia definita negativa è analoga. □

Esercizi

1. Siano $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = y^2 - x^3$. Mostrare che $(0,0)$ è di minimo per f, vincolato a $g(x,y) = 0$ ma che non è *critico* per f e pertanto non vale la (2.2).
Quale rilevanza ha questo esempio per il teorema 2.1?

2. Trovare gli estremi vincolati di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \log x_j$ sotto la condizione $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ (Esercizio 6, Sez. 6.3, Vol. 1).

3. Determinare massimi e minimi di $f(x,y) = y(x^2 + \log(1+x+y))$ in $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \le y \le \dfrac{3-x}{3}, y \ge 0\}$.

4. Siano:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)(4-x^2-y^2)^{-1} & x^2+y^2 \neq 4 \\ 1 & x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

e

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2}\} \quad \text{dove } a \in (0,\sqrt{2}).$$

Calcolare massimi e minimi di f in D_a. Determinare poi estremo superiore ed inferiore di f in $D_{\sqrt{2}}$.

5. Determinare i punti della superficie $z^2 - xy = 1$ più vicini all'origine.

6. Determinare gli estremi di $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ sotto la condizione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

7. In riferimento all'esempio 2.4, dimostrare che il moltiplicatore intermedio μ_2 è il massimo di $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2$ sotto le condizioni

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 1$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{w}^1 >= 0$$

ed è il minimo di $f(\mathbf{x})$ sotto le condizioni

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 1$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{w}^2 >= 0 \ .$$

Interpretare geometricamente le due affermazioni.

8. *Generalizzazione dell'esempio 2.4.*
Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice di ordine n, simmetrica e definita positiva.

a) Studiare i punti critici di $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2$ sotto la condizione

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 1 \ . \qquad (*)$$

Mostrare, in particolare, che, se $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$ sono gli inversi degli autovalori di $\mathbf{A}$, μ_1 e μ_n sono, rispettivamente, minimo e massimo vincolato (globali), mentre $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ sono *selle*.

b)* Siano $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^n$ autovettori corrispondenti a $\mu_1, \ldots, \mu_n$ e soddisfacenti il vincolo $(*)$.
Si fissi j tra 1 ed n. Mostrare che μ_j è massimo di $||\mathbf{x}||^2$ sotto le condizioni

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 1$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{w}^k >= 0 \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots j-1$$

e minimo di $||\mathbf{x}||^2$ sotto le condizioni

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= 1$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{w}^k >= 0 \quad \text{per ogni } k = j+1, \ldots, n \ .$$

9. Sia $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \geq 2$, $x_j \geq 0$, per $j = 1, \ldots, n$.

a) Determinare il minimo di f sotto la condizione

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1 \ .$$

b) Dedurre la seguente disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

dove $a_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$; (formula (3.14) a pag. 104, Vol.1).

10. Sia $f(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 2, x_j > 0$ per $j = 1, \ldots, n$.

a) Determinare il minimo di f sotto la condizione $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$.

b) Dedurre la seguente disuguaglianza tra media *armonica* e media *geometrica*:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \text{dove } a_j > 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n.$$

11.* *Significato dei moltiplicatori di Lagrange.*
Siano f, g di classe $C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$ e t un parametro reale.
Sia inoltre (x_0, y_0) un punto critico per f, condizionato al vincolo $g(x,y) = t_0$, con moltiplicatore λ_0.

a) Dimostrare che, se $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - t)$ ha Hessiana non singolare in (x_0, y_0, λ_0), il sistema

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g = t \end{cases} \qquad (**)$$

definisce in un intorno di $t = t_0$ una famiglia di soluzioni $(x(t), y(t), \lambda(t))$.

b) Posto $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ = valore di f nel punto critico $(x(t), y(t))$, dimostrare che

$$\lambda(t) = \varphi'(t) \ .$$

($\lambda(t)$ misura la sensibilità del valore critico $\varphi(t)$ rispetto a variazioni di livello di g).

[Suggerimento : a) applicare il teorema di Dini. b) Calcolare $\varphi'(t)$ col teorema di derivazione delle funzioni composte. Usare le prime due equazioni del sistema $(**)$ e la seguente: $g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t) = 1$ che si ottiene per derivazione dalla terza.]

3. VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA. CENNO ALLA PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

3.1 Generalità sui problemi di programmazione

I problemi di estremo condizionato che si possono risolvere mediante la teoria svolta nella sezione 2 sono caratterizzati dall'avere i vincoli espressi in forma di uguaglianza. Questa limitazione appare piuttosto rigida dal punto di vista delle applicazioni. Ad esempio, nell'analisi economica ci si imbatte frequentemente nel problema di ottimizzare una funzione $f(\mathbf{x})$ quando la variabile $\mathbf{x}$ è soggetta ad uno o più vincoli del tipo $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$, oltre alla condizione di non–negatività delle sue componenti, cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. È questo un tipico problema di programmazione matematica.

Usando la teoria sviluppata finora un problema come quello ora formalizzato ci obbligherebbe ad un procedimento abbastanza lungo:

a) la ricerca degli estremi (liberi) di f nell'interno della regione individuata dai vincoli e dove f è differenziabile;

b) la ricerca degli estremi di f sulla frontiera di tale regione;

c) la considerazione dei punti in cui f non è differenziabile.

***Esempio* 3.1** - Determinare gli estremi di

$$f(x, y) = (x + y)|x^2 - y|$$

nella regione *ammissibile* (fig. 2.8):

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 \leq 0,\ x - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}\ .$$

Il teorema di Weierstrass assicura che esistono massimo e minimo globali.

Si verifica facilmente che f non ha punti critici interni a E_1 ed E_2. Sulla parabola $y = x^2$, f non è differenziabile ed assume il valore 0 che è minimo globale in quanto $f \geq 0$ in E.

La frontiera di E è composta da quattro segmenti di retta.

Per $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$ si ha: $f(1, y) = 1 - y^2$;
su $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ si ha: $f(x, 1) = x^3$;
su $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$ si ha: $f(0, y) = y^2$;
ed infine su $y = 2 - x, 0 \leq x \leq 1$, si ha: $f(x, 2 - x) = 2(2 - x - x^2)$.

È facile allora trarre le seguenti conclusioni:

I punti sulla parabola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, sono tutti punti di minimo globale, in corrisponenza ai quali $f = 0$. Il punto $(0, 2)$ è di massimo globale con $f(0, 2) = 4$ mentre il punto $(1, 0)$, dove $f = 1$, è di massimo relativo, essendo di massimo globale in E_2.

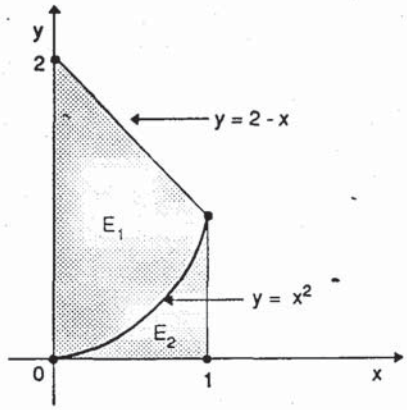


Fig. 2.8 Regione ammissibile E nell'esempio 3.1.

Se la funzione obiettivo ha un'espressione analitica abbastanza semplice si può ricorrere a considerazioni grafiche.

***Esempio* 3.2** - (*Metodo delle curve di livello*). Determinare gli estremi di $f(x, y) = x + y$ nella regione $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 \leq 0,\ x \geq 0, y \geq 0\}$, fig. 2.9.

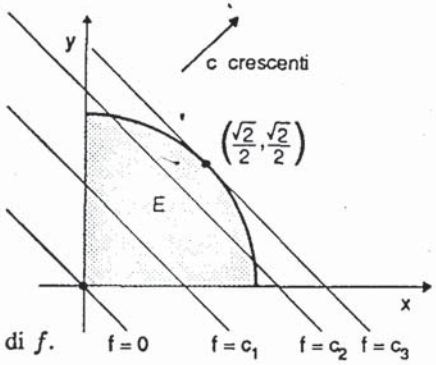


Fig. 2.9 Linee di livello di f.

Come si vede dalla figura, per individuare i punti di estremo è sufficiente determinare la linea di massimo e di minimo livello che interseca la regione E. In questo caso $(0, 0)$ è punto di minimo con $f(0, 0) = 0$ mentre $(1/\sqrt{2}, , 1/\sqrt{2})$, punto di tangenza della circonferenza con la retta $x + y = \sqrt{2}$, è il punto di massimo.

I metodi indicati negli esempi 3.1 e 3.2 risultano laboriosi o legati a situazioni troppo particolari. Occorrono metodi agevoli e adattabili a casi di sufficiente generalità.

Il problema di cui ci occuperemo ha la formulazione seguente:

Siano $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *funzioni differenziabili.*

$(\mathcal{P})$: *Massimizzare* $f(\mathbf{x})$, *ristretta alla regione*

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,;\, \varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \ldots, m\} \,;$$

E viene detta regione *ammissibile*.

Tale formalizzazione richiede alcune precisazioni e commenti.

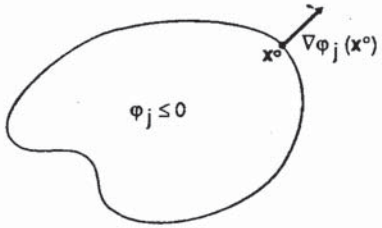


Fig. 2.10 $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0)$ è una normale esterna per l'insieme E_j.

a) Non c'è alcuna relazione tra il numero delle variabili n, ed il numero dei vincoli m. Naturalmente supporremo *sempre* che $E \neq \emptyset$.

b) Abbiamo assunto la differenziabilità della funzione obiettivo e delle funzioni φ_j in tutto $\mathbb{R}^n$ per semplicità di trattazione, avendo come scopo quello di presentare le idee principali della programmazione.

c) Tutti i risultati che esporremo si estendono facilmente al problema della *minimizzazione* di f in E in quanto $\min_E f = -\max_E(-f)$.

Gli estremi si intendono globali, rispetto alla regione E.

d) Scrivere i vincoli nella forma $\varphi_j \leq 0$ anziché $\varphi_j \geq 0$ è del tutto convenzionale e generale. È ovvio che ogni vincolo può essere espresso nella forma $\varphi_j \leq 0$. In questo caso osserviamo che se $\varphi_j(\mathbf{x}^0) = 0$ e $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$, $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0)$ è normale all'insieme di livello $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(\mathbf{x}) = 0\}$ e diretto verso *l'esterno* della regione $E_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0\}$ (fig. 2.10). Si osservi che $E = \cap_{j=1}^m E_j$.

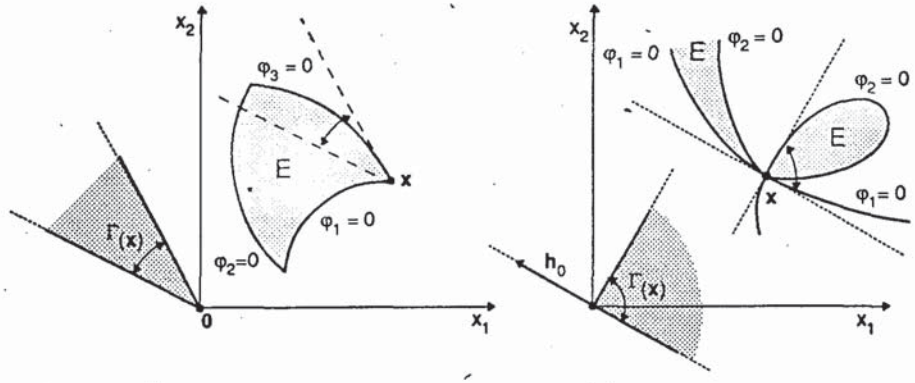
Il nostro primo obiettivo è, come al solito, cercare condizioni necessarie affinché un punto $\mathbf{x}^0$ sia soluzione di $(\mathcal{P})$. Come vedremo, si tratta di condizioni che generalizzano il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e si basano, in ultima analisi, sulla linearizzazione delle funzioni f e φ_j in un intorno di $\mathbf{x}^0$.

I teoremi 2.1 e 2.4 richiedono che $\mathbf{x}^0$ sia punto regolare o, geometricamente, che la regione E ammissibile sia una varietà di dimensione $n - m$ in un intorno di $\mathbf{x}^0$. Le condizioni di regolarità in programmazione fanno intervenire il *cono delle direzioni ammissibili* uscenti da $\mathbf{x}^0$.

Più che di regolarità del punto $\mathbf{x}^0$ si parla di *qualificazione dei vincoli* nel punto $\mathbf{x}^0$. A questo argomento è dedicato il prossimo paragrafo.

3.2 Direzioni ammissibili e qualificazione dei vincoli

Per ogni $\mathbf{x} \in E$, indichiamo con $J(\mathbf{x})$ l'insieme degli indici $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tali che $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$. I vincoli corrispondenti si chiamano *attivi* in $\mathbf{x}$.



a) Il cono $\Gamma(\mathbf{x})$ delle direzioni ammissibili è convesso.

b) $\Gamma(\mathbf{x})$ non è convesso: oltre alla parte ombreggiata, $\Gamma(\mathbf{x})$ contiene anche la semiretta $t\mathbf{h}_0$, $t \in \mathbf{R}^+$.

Fig. 2.11

Introduciamo ora la seguente definizione:

Definizione 3.1 - *Sia* $\mathbf{x} \in E$. *Un vettore* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ *costituisce una direzione ammissibile per* E *in* $\mathbf{x}$ *se esiste una successione di punti* $\{\mathbf{x}^k\} \subset E$ *con le seguenti proprietà: per* $k \to +\infty$

i) $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}$ *e* $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}$ *definitivamente*

ii) $\dfrac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}}{||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}||} \to \dfrac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$.

Se indichiamo con $\Gamma(E, \mathbf{x})$ o con $\Gamma(\mathbf{x})$, se E è fissato, l'insieme di tutte le direzioni ammissibili per E in $\mathbf{x}$, vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.1 - $\Gamma(\mathbf{x})$ *è un cono chiuso, non vuoto.*

Dimostrazione – Evidentemente $\mathbf{0} \in \Gamma(\mathbf{x})$, dunque $\Gamma(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Inoltre se $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ anche $t\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$; infatti è sufficiente scegliere per $t\mathbf{h}$ la stessa successione $\{\mathbf{x}^k\}$ che va bene per $\mathbf{h}$; quindi $\Gamma(\mathbf{x})$ è un cono. La dimostrazione che $\Gamma(\mathbf{x})$ è chiuso è demandata all'esercizio 3. □

In virtù della proposizione 3.1, $\Gamma(\mathbf{x})$ si chiama *cono delle direzioni ammissibili* o *cono tangente* in $\mathbf{x}$.

È facile verificare (esercizio) che $\Gamma(\mathbf{x})$ contiene l'insieme dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tali che esiste una curva regolare $\mathbf{r}(t)$, definita per $t \in [0, \delta], \delta > 0$, con le seguenti proprietà: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{h}$ e $\mathbf{r}(t) \in E$, $\forall t \in [0, \delta]$.

Le direzioni ammissibili sono sostanzialmente quelle che puntano verso l'interno di E oppure sono tangenziali ad E. Abbiamo osservato che se $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$, $\nabla\varphi_j(\mathbf{x})$ è nullo oppure è diretto verso l'esterno di E_j. Così, se $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} > > 0$, anche $\mathbf{h}$ sarà diretto verso l'esterno di E_j.

È perciò naturale chiedersi che relazione esista tra $\Gamma(\mathbf{x})$ e il cono $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$ dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tali che $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} > \leq 0$ per ogni $j \in J(\mathbf{x})$.

Proposizione 3.2 - *Vale la seguente inclusione:*

$$\Gamma(\mathbf{x}) \subseteq \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}) .$$

Dimostrazione – Siano $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ e $\{\mathbf{x}^k\}$ come nella definizione 3.1. Ora, ogni φ_j è differenziabile; inoltre essendo $\mathbf{x}^k \in E$ si ha $\varphi_j(\mathbf{x}^k) \leq 0$ ed essendo $j \in J(\mathbf{x})$, si ha $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$; perciò:

$$0 \geq \varphi_j(\mathbf{x}^k) = < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{x}^k - \mathbf{x} > + o(||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}||) . \tag{3.1}$$

Dividendo la (3.1) per $||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}||$, passando al limite per $k \to \infty$ e ricordando la *ii*) della definizione 3.1 si ottiene $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} > \leq 0$; dunque $\mathbf{h} \in \tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$. □

Si noti che $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$ è sempre convesso. Questo indica che in figura 2.11 *b*) $\Gamma(\mathbf{x}) \subset \tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$. Un altro esempio è il seguente:

***Esempio* 3.3** - Siano $\varphi_1(x_1, x_2) = x_2 + (x_1 - 1)^3$, $\varphi_2(x_1, x_2) = -x_2$. La regione ammissibile E è mostrata in figura 2.12. $\Gamma(1, 0)$ coincide con la semiretta $-t(1, 0), t \geq 0$.

Essendo $\nabla\varphi_1(1, 0) = (0, 1)$ e $\nabla\varphi_2(1, 0) = (0, -1)$ si ha

$$\tilde{\Gamma}(1, 0) = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 .;\ h_2 \leq 0 \text{ e } -h_2 \leq 0\}$$

e cioè $\tilde{\Gamma}(1, 0)$ coincide con la retta $t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, ossia l'asse x_1.

Definizione 3.2 - *Si dice che i vincoli sono qualificati in* $\mathbf{x}^0 \in E$ *se*

$$\Gamma(\mathbf{x}^0) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0) \tag{3.2}$$

I seguenti tre lemmi illustrano condizioni sufficienti affinché m vincoli siano qualificati in un punto.

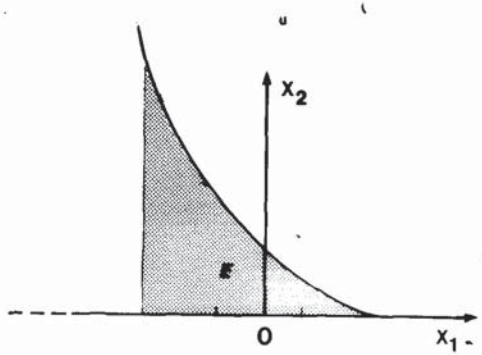


Fig. 2.12 $\Gamma(1, 0)$ è l'insieme dei vettori $\mathbf{h} = (h_1, 0)$, $h_1 \leq 0$

Lemma 3.3 - *Se esiste* $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^n$ *tale che, per ogni* $j \in J(\mathbf{x}^0)$,

$$< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* > < 0$$

oppure

φ_j *è affine* (*) *e* $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* > \leq 0$,

allora vale (3.2) *in* $\mathbf{x}^0$.

Dimostrazione – Occorre mostrare che $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0) \subseteq \Gamma(\mathbf{x}^0)$. Sia $\mathbf{h} \in \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0)$. Facciamo vedere che per ogni $\delta > 0$, $\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^* \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$. Sia $\{\varepsilon_k\}$ una successione di reali tale che $\varepsilon_k \downarrow 0$; poniamo $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 + \varepsilon_k(\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^*)$. Allora $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ e $\dfrac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0}{||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0||} = \dfrac{\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^*}{||\mathbf{h} + \delta\,\mathbf{h}^*||}$.

La definizione 3.1 richiede ancora di mostrare che $\mathbf{x}^k \in E$, definitivamente per $k \to +\infty$. Sia $j \in J(\mathbf{x}^0)$ e $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* > < 0$. Allora, per la differenziabilità dei φ_j si ha:

$$\varphi_j(\mathbf{x}^k) = \varphi_j(\mathbf{x}^0) + < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 > + o(||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0||) =$$

$$= \varepsilon_k < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^* > + o(\varepsilon_k) .$$

Poiché $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^* > = < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} > + \delta < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* > < 0$, si ottiene che per k grande, $\varphi_j(\mathbf{x}^k) < 0$.

Se $j \in J(\mathbf{x}^0)$, φ_j è affine e $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* > \leq 0$ si ha:

$$\varphi_j(\mathbf{x}^k) = \varepsilon_k < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^* > \leq 0 \text{ per ogni } k.$$

Se infine $j \notin J(\mathbf{x}^0)$, allora $\varphi_j(\mathbf{x}^0) < 0$ e, per continuità $\varphi_j(\mathbf{x}^k) < 0$ se k è abbastanza grande. In conclusione $\mathbf{x}^k \in E$ definitivamente e perciò $\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^* \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$.

Poiché $\lim_{\delta \to 0^+} (\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^*) = \mathbf{h}$ e $\Gamma(\mathbf{x}^0)$ è chiuso, segue che $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$. □

(*) $\varphi_j(\mathbf{x})$ è affine se φ_j è un polinomio di 1° grado in $x_1, \ldots, x_n$.

Lemma 3.4 - *Se per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$ esiste $\overline{\mathbf{x}}$ tale che*

o $\quad \varphi_j(\overline{\mathbf{x}}) < 0 \quad$ *e* φ_j *è convessa*

oppure $\quad \varphi_j(\overline{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad$ *e* φ_j *è affine*

allora vale (3.2) *in* $\mathbf{x}^0$.

Dimostrazione – Il vettore $\mathbf{h}^* = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0$ soddisfa le condizioni del lemma 3.3. Infatti, se $j \in J(\mathbf{x}^0)$:

o $\quad 0 > \varphi_j(\overline{\mathbf{x}}) \geq < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* >$ (per la convessità di φ_j)

oppure $\quad 0 \geq \varphi_j(\overline{\mathbf{x}}) = < \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* >$ (poiché φ_j è affine) □

Dal lemma 3.4 si deduce che se tutti i vincoli sono *affini*, essi sono qualificati in ogni punto. Si noti inoltre che, se ogni φ_j è convessa, anche E risulta un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.5 - *Se i vettori $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0)$ per $j \in J(\mathbf{x}^0)$, sono linearmente indipendenti allora vale (3.2) in $\mathbf{x}^0$.*

Dimostrazione – Possiamo supporre che $J(\mathbf{x}^0) = \{1, 2, \ldots, p\}$, $p \leq n$. Poniamo $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ e $\mathbf{b} = (-1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^p$. Il sistema lineare $\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^0)\mathbf{h} = \mathbf{b}$ è certamente risolubile essendo p il rango di $\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^0)$. Se $\mathbf{h}^*$ è una soluzione, essa soddisfa le condizioni del lemma 3.3, poiché la j–esima equazione del sistema è $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} > = -1$. □

3.3 Il teorema di Kuhn–Tucker

Il seguente risultato è fondamentale in programmazione.

■ **Teorema 3.6** - (di Kuhn–Tucker). *Sia $\mathbf{x}^0$ soluzione di $(\mathcal{P})$.*
Se i vincoli sono qualificati in $\mathbf{x}^0$, allora, per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$, esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0) \ . \tag{3.3}$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo alcuni commenti ed esempi.

Osservazione 3.1 - La (3.3) fa intervenire solo i vincoli attivi in $\mathbf{x}^0$. Per la pratica del calcolo, poiché $\mathbf{x}^0$ non è conosciuto a priori, è più conveniente introdurre la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}) \ , \tag{3.4}$$

nella quale intervengono tutti i vincoli, ed osservare che la condizione necessaria del teorema equivale a richiedere che $\mathbf{x}^0$ e $\boldsymbol{\lambda}^0$ siano soluzione del seguente sistema:

$$\begin{aligned} &a) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 && k = 1, \ldots, n \\ &b) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -\varphi_j \geq 0 && j = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{3.5}$$

ed inoltre

$$c) \quad \lambda_j \geq 0 \ , \ \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \ .$$

Si noti che se $j \in J(\mathbf{x}^0)$ le (3.5c) implicano $\lambda_j = 0$ per cui nella (3.5a) compaiono in realtà solo i vincoli attivi.
Le 3.5 sono dette *condizioni di Kuhn–Tucker*.

***Esempio* 3.4** - Si voglia minimizzare $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + x_2 + 1$ nella regione

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\} \ .$$

Usando la relazione $\min_E g = -\max_E(-g)$, questo problema rientra nella nostra formulazione ponendo

$$f(x_1, x_2) = -g(x_1, x_2) = -1 - x_2 - (x_1 - 1)^3 \ ,$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = -x_1 \ , \ \varphi_2(x_1, x_2) = -x_2 \ .$$

I vincoli sono affini e pertanto vale la (3.2) in ogni punto.

La Langrangiana è $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -1 - x_2 - (x_1 - 1)^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.
Il sistema (3.5) diventa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -3(x_1 - 1)^2 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0, \ \lambda_2 \geq 0, \ \lambda_1 x_1 = 0, \ \lambda_2 x_2 = 0, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \ .$$

Si trova subito $\lambda_2 = 1$ e quindi $x_2 = 0$. Se poi $x_1 = 0$ si trova $\lambda_1 = 3$ mentre se $\lambda_1 = 0$ si trova $x_1 = 1$.
Dunque le condizioni di Kuhn–Tucker selezionano i due possibili punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$, con $f(0, 0) = 0$ e $f(1, 0) = -1$.
Osserviamo ora che $f_{|E} \leq 0$ e pertanto 0 è massimo globale per f ovvero di minimo globale per g.

Osservazione 3.2 - Come traspare dall'esempio 3.4, le condizioni (3.5) si scrivono nella stessa maniera per i problemi seguenti:

$\max f$ con i vincoli nella forma $\varphi_j \leq 0$

e

$\min f$ con i vincoli nella forma $\varphi_j \geq 0$.

Osservazione 3.3 - Un'altra formulazione equivalente del teorema è la seguente: se $\mathbf{x}^0$ è soluzione di $(\mathcal{P})$ e (3.2) vale in $\mathbf{x}^0$, allora esiste $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ tale che vale la (3.3) e

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

per ogni $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ (cioè $\lambda_j \geq 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$) . È questa osservazione un punto fondamentale per la *teoria della dualità* in programmazione che trova importanti applicazioni nei metodi numerici, ma che supera i limiti della presente esposizione.

Osservazione 3.4 - I numeri λ_j che compaiono nella (3.3) prendono il nome di *moltiplicatori di Kuhn–Tucker*. Per la loro interpretazione valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte per i moltiplicatori di Lagrange. Infatti, nella (3.3) compaiono solo i vincoli attivi che si comportano dunque come vincoli di uguaglianza per $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Per quanto riguarda il loro segno si veda l'esercizio 4.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Kuhn–Tucker.

Premettiamo due lemmi. Incominciamo con l'osservare che, se $\mathbf{x}^0$ è soluzione di $(\mathcal{P})$, allora f non può crescere lungo una direzione ammissibile uscente da $\mathbf{x}^0$.

Lemma 3.7 - *Sia* $\mathbf{x}^0$ *soluzione di* $(\mathcal{P})$. *Allora, per ogni* $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$

$$< \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} > \leq 0 . \tag{3.6}$$

Dimostrazione – Sia $\{\mathbf{x}^k\}$ come nella definizione 3.1. Poiché $f(\mathbf{x}^0)$ è il massimo di f in E, ed f è differenziabile in E, si ha:

$$0 \geq f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^0) =< \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 > + o(||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}||) . \tag{3.7}$$

Dividendo ambo i membri della (3.7) per $||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0||$ e ricordando che $\dfrac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0}{||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0||} \to \mathbf{h}$ per $k \to +\infty$ si ottiene la (3.6). □

Lemma 3.8 - (di Farkas). *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$. *Allora vale l'inclusione*

$$\{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : < \mathbf{h}, \mathbf{w}_j > \leq 0 \ , \ \forall j = 1, \ldots, p\} \subseteq \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n :< \mathbf{h}, \mathbf{v} > \leq 0\} \tag{3.8}$$

se e solo se esistono p scalari $\lambda_j \geq 0$, *tali che*

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{w}_j .$$

Omettiamo la dimostrazione del lemma illustrandone solo il significato geometrico. L'insieme a destra della (3.8) è il semispazio V^- dei vettori che formano con $\mathbf{v}$ un angolo ottuso. Analogamente, se W_j^- è il semispazio dei vettori che formano con $\mathbf{w}_j$ un angolo ottuso, l'insieme a sinistra della (3.8) rappresenta $\cap_{j=1}^p W_j^-$.

Il lemma afferma che, se $\cap_{j=1}^p W_j^- \subset V^-$, allora $\mathbf{v}$ è combinazione lineare a coefficienti non negativi dei $\mathbf{w}_j$ (fig. 2.13).

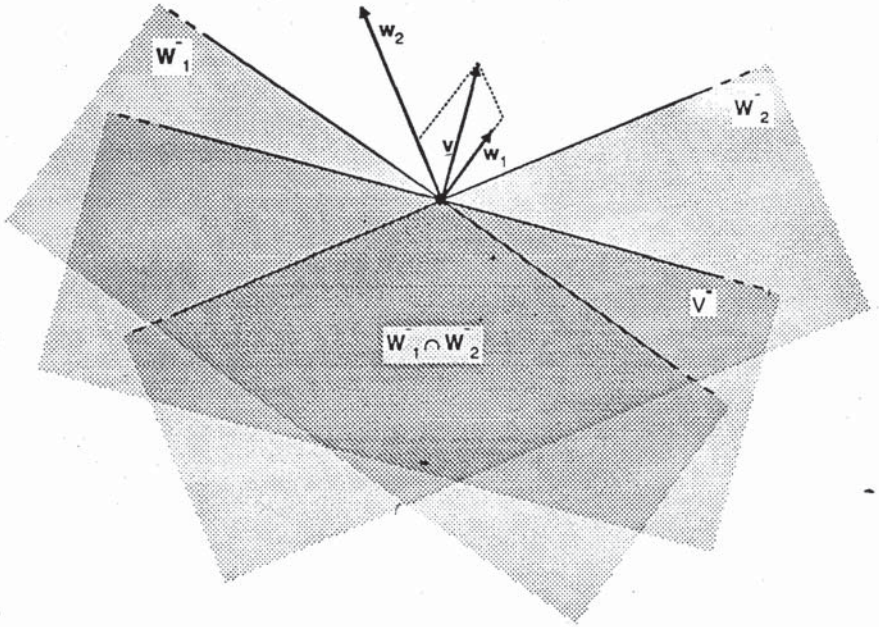


Fig. 2.13 Essendo $W_1^- \cap W_2^- \subseteq V^-$, $\mathbf{v}$ è combinazione lineare a coefficienti positivi di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$.

Dimostrazione del teorema di Kuhn–Tucker – Essendo i vincoli qualificati in $\mathbf{x}^0$, per ogni $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$ ed ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$ si ha $< \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} > \leq 0$.

D'altra parte, il lemma 3.7 implica che, se $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$, $< \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} > \leq 0$.

Applicando il lemma di Farkas con $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{w}_j = \nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0)$ si ottiene immediatamente la tesi. □

4.4 Condizioni sufficienti

Abbiamo già avuto modo di constatare nel lemma 3.4 come la presenza di vincoli convessi od affini semplifichi molto la verifica della condizione (3.2).

Se poi la funzione obiettivo è concava, le condizioni di Kuhn–Tucker diventano necessarie e sufficienti.

■ **Teorema 3.9** - *Supponiamo che f sia concava e che le funzioni φ_j, $j = 1, \dots, m$, siano convesse. Sia $\mathbf{x}^0 \in E$ un punto in cui i vincoli siano qualificati. Allora $\mathbf{x}^0$ è soluzione di $(\mathcal{P})$ se e solo se, per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$, esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che valga la (3.3).*

Dimostrazione – Occorre mostrare solo la sufficienza della (3.3).
Dalla concavità di f e dalla (3.3), si ha, per ogni $\mathbf{x} \in E$:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + < \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 > = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 < \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 >$$

Dalla convessità delle φ_j e dal fatto che $\varphi(\mathbf{x}^0) = 0$ se $j \in J(\mathbf{x}^0)$, si ricava:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) \geq < \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 > .$$

Essendo $\lambda_j^0 \geq 0$ e $\varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0$ per $\mathbf{x} \in E$, si trova

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 \varphi_j(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$$

e perciò $\mathbf{x}^0$ è soluzione di $(\mathcal{P})$. □

***Esempio* 3.5** - Si voglia massimizzare $f(x_1, x_2) = x_1 + \log(1 + x_2)$ nell'insieme $E = \{(x_1 x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 1 \leq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.

Come somma di due funzioni concave f è concava; inoltre $\varphi_1 = x_1 + x_2 - 1$, $\varphi_2 = -x_1$, $\varphi_3 = -x_2$ sono affini e pertanto convesse.

La Langrangiana del problema è

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x_1 + \log(1 + x_2) - \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 .$$

Le condizioni di Kuhn–Tucker, in questo caso necessarie e sufficienti, sono:

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{1}{1 + x_2} - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0,\ \ \lambda_2 x_1 = 0,\ \ \lambda_3 x_2 = 0 .$$

Con un po' di pazienza si trova l'unico punto $(1, 0)$ con i moltiplicatori $(1, 0, 0)$. Il valore $f(1, 0) = 1$ è pertanto massimo globale per f.

Le condizioni del teorema 3.9 sono verificate in particolare quando il problema è di programmazione *lineare* (f e φ_j affini). In questo tipo di problemi la teoria ha raggiunto un notevole grado di perfezionamento tanto che ad essa sono dedicati interi volumi.

Esercizi

1. Determinare gli estremi di $f(x, y) = y - x^2$ nella regione $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^3 \leq 0, x + y + 1 \geq 0\}$, usando sia il metodo delle curve di livello, sia il metodo dei moltiplicatori di Kuhn–Tuker.

Mostrare che (3.2) è verificata in ogni punto di E.

2. Dire se nei casi illustrati in fig. 2.14 *a*) e *b*) è verificata la condizione (3.2) in $(0, 0)$. Qual è la rilevanza degli esempi in figura 2.14 rispetto al lemma 3.5?

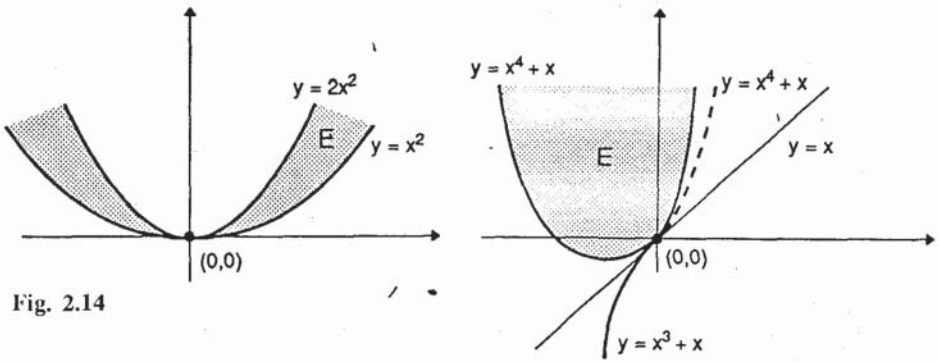


Fig. 2.14

3.* Dimostrare che $\Gamma(\mathbf{x})$ è chiuso.

[Suggerimento: Sia $\{\mathbf{h}^i\}$ una successione contenuta in $\Gamma(\mathbf{x})$, tale che $\mathbf{h}^i \to \mathbf{h}$ per $i \to +\infty$.
Per ogni i, sia $\{\mathbf{x}^{ki}\}$ come nella definizione 3.1. Estrarre con un procedimento diagonale una sottosuccessione $\mathbf{y}^s = \mathbf{x}^{k_s i_s}$ convergente a $\mathbf{h}$, tale che $\dfrac{\mathbf{y}^s - \mathbf{h}}{||\mathbf{y}^s - \mathbf{h}||} \to \dfrac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$].

4.* In base al significato dei moltiplicatori di Kuhn–Tucker illustrare la ragione della loro positività.

5. Dimostrare che se, oltre ai vincoli $\varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, si richiede la non-negatività di *tutte* le variabili: $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, allora il complesso delle condizioni

(3.5) si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \leq 0 \ , \ x_k \geq 0 \ , \ x_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0 \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \geq 0 \ , \ \lambda_j \geq 0 \ , \ \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \ . \qquad \text{per ogni } j = 1, \ldots, m$$

dove $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$.

6. Determinare il massimo globale di

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3 + x_2$$

con i vincoli $x_1 + x_2 + x_3 - 1 \leq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

7. Risolvere il problema della dieta (Esempio 1.3) quando:

$$n = 2; \quad c_1 = 2 \ , \ c_2 = 1$$

$$m = 3; \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} 30 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{b} = (20, 16, 9) \ .$$

8. Determinare il minimo di $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ con i vincoli $x_1^3 - x_2 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Si può usare il metodo dei moltiplicatori di Kuhn–Tucker?

9. Consideriamo il problema:

($\mathcal{P}^*$). Massimizzare la funzione f soggetta ai vincoli:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k \quad (k < n) \ .$$

dove $f, \varphi_j, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono differenziabili.

Dimostrare che, se $\mathbf{x}^0$ soddisfa i vincoli e (3.2) vale in $\mathbf{x}^0$, allora esistono m scalari $\lambda_j^0 \geq 0$ e k scalari μ_i^0 tali che

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^0 \nabla g_i(\mathbf{x}^0)$$

e

$$\lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}^0) = 0 \ .$$

[Suggerimento: scrivere $g_i(\mathbf{x}) = 0$ come $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $-g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ e applicare il teorema 3.6].

Approssimazione di funzioni 3

1. SPAZI FUNZIONALI

Ricordiamo che il nostro obiettivo principale è lo studio delle applicazioni tra spazi euclidei, cioè tra spazi lineari a dimensione finita; perciò abbiamo presentato, all'inizio del volume 1, questi spazi e ne abbiamo illustrato la struttura algebrica (di spazi lineari) e quelle topologica, metrica, di spazi normati e dotati di prodotto scalare.

Conviene ora, per uno studio più approfondito delle applicazioni tra questi spazi, considerare queste stesse applicazioni non come oggetti a sé stanti, ma come elementi di un certo insieme (insieme delle funzioni continue, insieme delle funzioni limitate, ...) e indagare se tali insiemi posseggano anch'essi qualcuna delle strutture sopra menzionate per gli spazi euclidei (da ciò il nome che sarà loro dato di *spazi di funzioni*, o *spazi funzionali*). Riprenderemo perciò (par. 1.1, 1.4, 1.5, 1.7) l'esame di queste strutture un po' più in dettaglio di quanto sia stato fatto nel capitolo 3. volume 1; in particolare studieremo lo spazio delle funzioni continue e delle funzioni continue e differenziabili con continuità (par. 1.2, 1.3).

Le applicazioni tra spazi funzionali formano l'oggetto dell'Analisi Funzionale (una branca della matematica, il cui forte sviluppo in questo secolo, ha fatto compiere notevoli progressi in vari campi, quali, ad esempio, le equazioni differenziali) e perciò escono dai limiti di questa trattazione; tuttavia alcuni semplici ma importanti risultati (come il *teorema di Banach-Caccioppoli* (*) *delle contrazioni*) sono dati nel paragrafo 1.6.

1.1 Metrica e topologia

Conviene richiamare la nozione di spazio metrico già introdotta in 3.1.4, volume 1.

(*) S. Banach, matematico polacco (1892 – 1945). R. Caccioppoli, matematico italiano (1904 - 1959).

Definizione 1.1 - *Un insieme X si dice* **spazio metrico** *se è definita un'applicazione (detta* **distanza** *o* **metrica***) $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall x, y, z \in X$ (*) valgano* le seguenti proprietà:

$\mathcal{D}$ 1. $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d(x,y) = d(y,x)$

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Sottolineiamo che con spazio metrico s'intende la coppia (X, d); infatti, su uno stesso insieme X potrebbero definirsi più metriche diverse: $d_1, d_2, \ldots$; in tal caso l'insieme X con la metrica d_1 e l'insieme X con la metrica d_2 sono spazi metrici distinti.

Se X è anche uno spazio lineare parleremo di *spazio lineare metrico*; si osservi che la struttura di spazio lineare e quella di spazio metrico possono sussistere indipendentemente una dall'altra.

Esempi

1.1. Qualunque insieme può diventare uno spazio metrico con la seguente definizione di distanza:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases} \tag{1.1}$$

(Verificare la validità delle proprietà $\mathcal{D}$ 1. 2. 3.).

Una tale metrica (detta *metrica discreta*) non sarà, in generale, di alcuna utilità per le applicazioni. Per esempio, se in $\mathbb{R}^3$ si adottasse la metrica (1.1) invece di quella pitagorica, tale spazio, evidentemente, non sarebbe più un accettabile modello dello spazio fisico. La scelta della metrica deve tener conto della sua utilità in vista delle applicazioni.

1.2. Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono metrici con la consueta definizione di distanza di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

(*metrica pitagorica*).

Altre metriche in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono, ad esempio,

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad , \qquad d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - y_i|\} \ .$$

(*) Con $x, y, z, \ldots$ indichiamo elementi generici dello spazio X, che chiameremo *punti*; se X è uno spazio lineare, i suoi elementi si diranno *vettori* (o ancora punti); nel caso particolare di $\mathbb{R}^n$ si userà la convenzione solita di indicarli in grassetto.

1.3. L'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ non è uno spazio lineare; esso può essere metrizzato con la seguente definizione di distanza:

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| && \forall x, y \in \mathbb{R} \\ d(x,+\infty) = d(+\infty,x) &:= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x && \forall x \in \mathbb{R} \\ d(x,-\infty) = d(-\infty,x) &:= \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} && \forall x \in \mathbb{R} \\ d(+\infty,+\infty) = d(-\infty,-\infty) &:= 0 \\ d(+\infty,-\infty) = d(-\infty,+\infty) &:= \pi \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

La verifica della validità delle proprietà $\mathcal{D}$ 1.2.3. è immediata. Si osservi che $\operatorname{diam}(\mathbb{R}^*) = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^*} d(x,y) = \pi$, cioè lo spazio $\mathbb{R}^*$ è limitato.

1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; con $C^0(A)$ abbiamo indicato la classe delle funzioni continue su A a valori reali o complessi; questo insieme ha la struttura di spazio lineare, i cui punti (o vettori) sono le singole funzioni: lo zero dello spazio è la funzione identicamente nulla su A, l'opposto di f è $-f$. Supponiamo ora che A sia un insieme chiuso e limitato (un compatto) in $\mathbb{R}$. In $C^0(A)$ possiamo facilmente introdurre una metrica nel modo seguente: se $f(t)$ e $g(t)$ sono due elementi dello spazio, poniamo:

$$d(f,g) := \max_{t \in A} |f(t) - g(t)| \ . \tag{1.3}$$

Osserviamo anzitutto che la definizione è sensata, poiché il massimo che in essa compare esiste (Teor. di Weierstrass, 5.2.2, Vol. 1); inoltre le proprietà $\mathcal{D}$ 1.2.3. sono verificate: la verifica di 1.1 e 1.2. è immediata; per la 1.3. si osservi che, se $f, g, h \in C^0(A)$, risulta, $\forall t \in A$

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \leq \\ &\leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in A} |f(t) - h(t)| + \max_{t \in A} |h(t) - g(t)| \ . \end{aligned}$$

La disuguaglianza ottenuta, essendo vera *per ogni* $t \in A$, sarà vera anche per il punto (o i punti) di massimo di $|f(t) - g(t)|$; ne segue perciò la (1.3).

La metrica (1.3) viene detta *metrica lagrangiana.*

Non c'è nessuna difficoltà ad estendere le cose viste sopra alle funzioni continue di più variabili.

1.5. Se, nell'esempio 1.4, l'insieme A non è un compatto, la definizione (1.3) perde significato. Tuttavia, se consideriamo l'insieme $C_b^0(A)$ delle funzioni continue e limitate (*) su A (è ancora uno spazio lineare!) possiamo definire una metrica ponendo

3

(*) b sta per *bounded*, cioè (in inglese) *limitato.*

$$d(f,g) := \sup_{t\in A} |f(t) - g(t)| \ . \tag{1.4}$$

Più in generale, la funzione (1.4) sarà una metrica per lo spazio $\mathcal{B}(A)$ di tutte le funzioni limitate in A.

1.6. Sia ancora $A \subset \mathbb{R}$ un compatto e introduciamo una metrica in $C^1(A)$. Essendo $C^1(A) \subset C^0(A)$, possiamo certamente adottare su $C^1(A)$ la stessa metrica già introdotta in $C^0(A)$; oppure, tenendo conto del fatto che gli elementi di $C^1(A)$ sono funzioni derivabili con continuità, possiamo definire

$$d(f,g) := \max_{t\in A} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in A} |f'(t) - g'(t)| \ . \tag{1.5}$$

È facile verificare che questa è una metrica su $C^1(A)$; perché questa sia preferibile alla (1.3) sarà chiaro tra poco.

In generale, su $C^k(A), k \geq 0$, si pone la seguente metrica:

$$d(f,g) := \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in A} |f^{(j)}(t) - g^{(j)}(t)| \ . \tag{1.6}$$

Tutte queste metriche sono dette metriche lagrangiane.

1.7. In $\tilde{C}(a,b)$ (insieme delle funzioni continue assolutamente integrabili in senso generalizzato sull'intervallo (a,b)) possiamo definire una metrica ponendo

$$d(f,g) := \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \ . \tag{1.7}$$

La metrica (1.7) è detta *metrica integrale* (di ordine 1). La verifica delle proprietà $\mathcal{D}$ 1.2.3. è immediata.

Altre metriche integrali possono essere introdotte su $\tilde{C}(a,b)$; è particolarmente significativa per le applicazioni la metrica integrale di ordine 2, e cioè

$$d(f,g) := \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2} . \tag{1.8}$$

La verifica della proprietà triangolare non è immediata: seguirà da un risultato generale che vedremo nel paragrafo 1.7. Il punto di vista adottato con la (1.8) è di assumere, come misura della distanza di due funzioni, lo *scarto quadratico globale* tra di esse; è lo stesso punto di vista adottato in Probabilità, quando si assume, come misura della dispersione di una variabile casuale, la *deviazione standard*; oppure, nelle scienze sperimentali, quando si vuole tracciare una retta che interpoli i punti rappresentanti le osservazioni fatte, e si sceglie quella retta che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai punti dati (*metodo dei minimi quadrati*); ritorneremo su questo argomento nella prossima sezione.

Osserviamo infine che, ovviamente, le metriche integrali (1.7) o (1.8) possono essere utilizzate anche sull'insieme $C^0([a,b])$; tuttavia, per ragioni che saranno chiare tra poco, supporremo sempre che $C^0([a,b])$ sia munito della metrica lagrangiana.

La presenza di una metrica su un insieme X consente di definire gli *intorni* dei punti di X e i *limiti* delle successioni a valori in X, cioè, in altre parole, la *topologia* di X.

Ricordiamo la definizione di intorno.

Definizione 1.2 - *Se (X,d) è uno spazio metrico e $x \in X$, chiameremo intorno di x di raggio r l'insieme*

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \ .$$

Questi sono gli intorni sferici (o palle) di centro x e raggio r; essi soddisfano le proprietà $\mathcal{U}$ 1.-4. di 3.1.4, volume 1.

Le consuete definizioni topologiche, introdotte in $\mathbb{R}^n$, e cioè le definizioni di: punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, ... insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, ..., essendo fondate sulla definizione di intorno, si estendono pari pari agli spazi metrici qualsiansi.

Esempi

1.9. Sia X un insieme dotato della metrica (1.1). Per ogni $x \in X$, gli intorni $B(x,r)$ contengono solo x se $r \leq 1$, tutto lo spazio se $r > 1$. Perciò ogni sottoinsieme $E \subseteq X$ è aperto (ogni suo punto è punto interno) e quindi ogni sottoinsieme è anche chiuso (essendo il complementare di un aperto). Lo spazio è limitato (il suo diametro è 1).

1.10. Gli intorni sferici in $\mathbb{R}^n$ (indotti dalla metrica pitagorica) sono le sfere (o ipersfere) della Geometria euclidea; in particolare, in $\mathbb{R}$, gli intorni $B(x,r)$ sono gli intervalli $(x-r, x+r)$.

Vediamo quali sono gli intorni sferici di $\mathbb{R}^*$ indotti dalla metrica (1.2). Esaminiamo gli intorni di $+\infty$:

$$B(+\infty,r) = \{y \in \mathbb{R}^* : d(+\infty,y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^* : \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y < r\} =$$

(prendendo $0 < r < \pi$ e ponendo $a = \operatorname{tg}(\pi/2 - r)$)

$$= \{y \in \mathbb{R}^* : y > a\} \ ;$$

essi sono dunque le semirette $(a, +\infty]$, in accordo con la definizione da noi già introdotta, indipendentemente da ogni considerazione di tipo metrico. Analogamente si vede che gli intorni $B(-\infty,r)$ di $-\infty$ sono le semirette $[-\infty, b)$ con $b = \operatorname{tg}(r - \pi/2)$.

Infine, se x è un punto al finito, gli intorni $B(x,r)$ nella metrica (1.2) sono (lasciamo la verifica al lettore) gli intervalli $(x - a_1, x + a_2)$ con $a_1 = x - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x - r)$, $a_2 = -x + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + r)$; perciò la topologia indotta dalla metrica (1.2), ristretta a $\mathbb{R}$, non coincide con quella indotta dalla metrica pitagorica (gli intorni di x sono intervalli non simmetrici rispetto a x); tuttavia è ad essa *equi-*

valente, nel senso che, $\forall x \in \mathbb{R}$, ogni intorno pitagorico di x contiene un intorno sferico nella metrica (1.2) e ogni intorno sferico nella metrica (1.2) contiene un intorno pitagorico di x. Ciò implica che gli aperti, i chiusi, i punti di accumulazione, etc. nelle due topologie coincidono.

1.11. Sia $X = C^0([a,b])$ dotato della metrica lagrangiana (1.3). Sia $f \in X$; un intorno di f di raggio r è dato da:

$$B(f,r) = \{g \in C^0([a,b]) \colon \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| < r\} .$$

Esso è costituito da tutte le funzioni g continue in $[a,b]$ tali che: $f(t) - r < g(t) < f(t) + r$, $\forall t \in [a,b]$, cioè dalle funzioni continue il cui grafico è contenuto nella striscia evidenziata in figura 3.1.

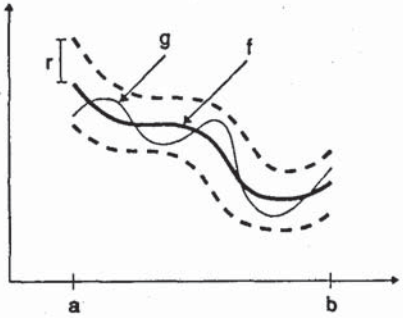


Fig. 3.1

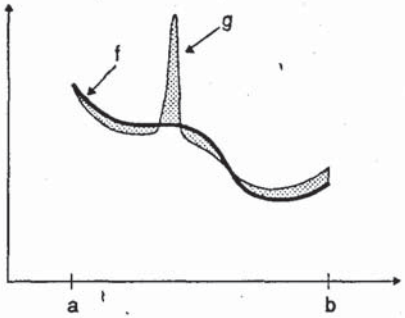


Fig. 3.2

Se su $C^0([a,b])$ si adottasse la metrica integrale (1.7), un intorno di f di raggio r sarebbe

$$\{g \in C^0([a,b]) \colon \int_a^b |f(t) - g(t)|dt < r\} .$$

Esso è costituito da tutte le funzioni g continue in $[a,b]$ tali che l'area della regione piana delimitata dai grafici di f e di g (v. fig. 3.2) risulti $< r$.

1.12. In $C^1([a,b])$, munito della metrica (1.5), un intorno di f di raggio r è costituito da tutte le funzioni g tali che

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)| < r .$$

Perciò non soltanto i grafici di f e di g devono essere "vicini", ma anche i grafici di f' e g'. La condizione di vicinanza in questa metrica è molto più forte della condizione di vicinanza nella metrica di C^0.

Mentre le definizioni topologiche, introdotte in $\mathbb{R}^n$, si trasportano senza modifiche agli spazi metrici più generali, lo stesso non accade per alcune importanti proprietà, che abbiamo dimostrato nel capitolo 3, volume 1, le quali sono tipiche

degli spazi euclidei e non si possono generalizzare agli spazi metrici qualsiansi, come vedremo nel paragrafo 1.3. Per chiarire questo punto, conviene considerare le successioni a valori in uno spazio metrico X, per lo stretto legame che esse hanno con la topologia dello spazio.

Riprendiamo dunque la definizione di successione convergente e di successione di Cauchy (o fondamentale).

Definizione 1.3 - *Sia (X,d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione a valori in X; essa si dirà convergente a un punto $x \in X$ se vale una delle seguenti affermazioni, tra di loro equivalenti:*

i) *per $n \to +\infty$, x_n appartiene definitivamente ad un qualsiasi intorno V di x.*

ii) $\forall \varepsilon > 0$, *esiste un intero positivo N tale che, per $n > N$, risulta $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

iii) $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.

Scriveremo $x_n \to x$ o, più specificamente, $x_n \xrightarrow{d} x$, per indicare che $\{x_n\}$ converge a x nella metrica d. Delle tre definizioni, la prima è più schiettamente topologica, poiché fa intervenire solo gli intorni; la seconda tiene conto della metrica di X e utilizza gli intorni sferici; la terza riconduce la definizione di limite di una successione a valori in uno spazio metrico al limite di una successione di numeri reali non negativi.

Se una successione ammette limite, questo è unico; infatti se, per assurdo, si avesse

$$x_n \to x \quad \text{e} \quad x_n \to y \quad , \quad x \neq y ,$$

presi due intorni, V_x di x e V_y di y disgiunti, si avrebbe, definitivamente, $x_n \in V_x$ e $x_n \in V_y$: assurdo!

Come avevamo già osservato dimostrando il teorema 4.2.1, volume 1, questa semplice dimostrazione discende dalla proprietà $\mathcal{U}_4$ degli intorni (proprietà di separazione).

Definizione 1.4 - *Sia (X,d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione a valori in X; essa si dirà fondamentale o di Cauchy se*

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0 . \tag{1.9}$$

Se una successione è convergente, essa è fondamentale; questa affermazione è già stata dimostrata per le successioni a valori in $\mathbb{R}^n$ (Proposizione 4.4.7, Vol. 1); quella dimostrazione si ripete pari pari per le successioni a valori in uno spazio metrico qualsiasi.

Uno dei risultati principali dimostrati nel volume 1 è che l'affermazione inversa è vera negli spazi euclidei, ma, come abbiamo già avvertito, non è vera per tutti gli spazi metrici (v. Esempio 4.4.15, Vol. 1).

Uno spazio metrico in cui ogni successione fondamentale è convergente si dice **completo**.

1.2 Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Per definire il limite di una successione di funzioni $\{f_n\}$ (che, per semplicità, supporremo reali di variabile reale) possiamo assumere un punto di vista più elementare, o, per così dire, più "ingenuo", di quello assunto con la Definizione 1.3; possiamo infatti considerare la successione $\{f_n\}$ alla stregua di una successione numerica. Sia $f_n: \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni, e sia $t_0 \in A$; la successione $\{f_n(t_0)\}$ è allora una successione di numeri reali e potremo determinarne il carattere: convergente, divergente, irregolare. Possiamo ripetere questa operazione per tutti i punti $t \in A$. Supponiamo che, $\forall t \in A$, la corrispondente successione numerica $\{f_n(t)\}$ sia convergente e $f(t)$ sia il suo limite (ovviamente dipendente in generale da t); risulta così definita una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, che sarà naturale chiamare *limite* della successione di funzioni $\{f_n\}$. Più precisamente, poniamo la seguente

Definizione 1.5 - *Una successione di funzioni $f_n: A \to \mathbb{R}$ si dirà convergente in A, con limite $f: A \to \mathbb{R}$, se, fissato $\varepsilon > 0, \forall t \in A, \exists N = N(\varepsilon, t)$ tale che:*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad se\ n > N\ .$$

Questa definizione di convergenza di una successione di funzioni è una semplice estensione dell'analoga definizione di convergenza delle successioni numeriche. Essa viene detta anche *convergenza puntuale* o *ordinaria*.

L'altro punto di vista (quello della Definizione 1.3) consiste invece nel considerare le funzioni come elementi di un dato spazio metrico X; allora il limite è già definito dalla metrica di questo spazio. Vediamo cosa avviene se X è uno degli spazi metrici precedentemente illustrati.

Se X è $\mathbb{R}$ (o, più in generale, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbf{C}^n$) ritroviamo la definizione di limite di una successione numerica (o di vettori).

Sia $X = C^0(A)$ con A compatto, dotato della metrica lagrangiana. Una successione $\{f_n\} \subset C^0(A)$ converge a $f \in C^0(A)$ se accade che $d(f_n, f)$ tende a zero, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| = 0\ .$$

Ciò significa che, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, per cui:

$$\max_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{se } n > N\ . \tag{1.10}$$

Ma se, per $n > N(\varepsilon)$, $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ nei punti di massimo, lo stesso accadrà per ogni altro $t \in A$; perciò concludiamo senz'altro che f_n converge a f *puntualmente*; ma la (1.10) implica qualcosa di più. Per mettere in luce questo fatto diamo la seguente

Definizione 1.6 - *Una successione di funzioni $f_n: A \to \mathbb{R}$ si dirà convergente uniformemente in A, con limite $f: A \to \mathbb{R}$, se, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ tale che:*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in A \quad se\ n > N\ . \tag{1.11}$$

Confrontando le Definizioni 1.5 e 1.6 si osserva che, nel primo caso, prima si fissa $t \in A$ e poi si trova N, che dipenderà dunque (oltre che dal prefissato ε) dal punto t scelto; nel secondo caso invece siamo in grado subito di trovare un N (indipendente da t) per cui la (1.11) è verificata. La relazione tra le due situazioni (convergenza uniforme e convergenza puntuale) è analoga a quella già incontrata di continuità uniforme e continuità (ordinaria o puntuale). Naturalmente la convergenza uniforme implica quella puntuale ma non vale il viceversa, come mostreremo nell'esempio 1.13.

Tornando ora alla convergenza delle successioni in $C^0(A)$, osserviamo che la convergenza "naturale", indotta dalla metrica lagrangiana, è proprio la convergenza uniforme. In modo identico si osserva che anche la metrica (1.4) (metrica dell'estremo superiore), adottata sullo spazio $C_b^0(A)$ o, più in generale, sullo spazio $\mathcal{B}(A)$ di tutte le funzioni limitate su un insieme A, conduce alla convergenza uniforme.

Esempi

1.13. Sia $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}: t \mapsto t^n$ e sia $f(t) = 0$ se $0 \le t < 1$, $f(1) = 1$. La successione f_n converge puntualmente a f; infatti, se $t = 1$ oppure $t = 0$, l'affermazione è ovvia; se $0 < t < 1$, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $N = \log\varepsilon / \log t$ per essere certi che $t^n < \varepsilon$ se $n > N$; anzi, questa è la scelta migliore di N (cioè l'N più piccolo). Si osserva che, scegliendo t prossimo a 1, N diventa sempre più grande: non esiste un N adatto per tutti i $t \in [0,1]$, la successione non converge uniformemente.

Alternativamente: $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = 1 \not\to 0$ per $n \to +\infty$, e quindi f_n non converge uniformemente ad f in $[0,1]$.

1.14. La successione $f_n: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}: t \to \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ converge uniformemente a 0; infatti risulta

$$\frac{1}{n}|\sin(nt)| < \varepsilon \quad \text{se } n > \frac{1}{\varepsilon}\ .$$

Poiché la convergenza delle successioni di funzioni è ricondotta, con le definizioni precedenti, alla convergenza delle successioni numeriche, resta valido il criterio di convergenza di Cauchy che qui sotto riportiamo.

Proposizione 1.1 - (Criterio di convergenza puntuale). *Condizione necessaria e sufficiente perché la successione di funzioni $f_n: A \to \mathbb{R}$ converga (puntualmente) in A è che, fissato $\varepsilon > 0$, $\forall t \in A$, esista $N = N(\varepsilon, t)$ tale che:*

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad se\ n, m > N\ .$$

Proposizione 1.2 - (Criterio di convergenza uniforme). *Condizione necessaria e sufficiente perché la successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in A è che, fissato $\varepsilon > 0$, esista $N = N(\varepsilon)$ tale che:*

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in A, \quad se\ n, m > N\ .$$

Osservazione 1.1 - Se le f_n sono funzioni di più variabili, potrebbe accadere che la convergenza sia uniforme rispetto a una variabile e puntuale rispetto ad un'altra. Per esempio: $f_n(s,t) \to f(s,t)$ uniformemente rispetto a $s \in S \subseteq \mathbb{R}$ e puntualmente rispetto a $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ significa: fissato $\varepsilon > 0$, $\forall t \in T, \exists N = N(\varepsilon, t)$ tale che:

$$|f_n(s,t) - f(s,t)| < \varepsilon \quad \forall s \in S \quad \text{se } n > N\ .$$

Alternativamente: $\sup_{s \in S} |f_n(s,t) - f(s,t)| \to 0$ per ogni $t \in T$, se $n \to +\infty$.

Osservazione 1.2 - Passando dalla variabile discreta n alla variabile continua s, possiamo parlare di limite uniforme di funzioni, anziché di successioni. In breve, *diremo che:*

$$\lim_{s \to s_0} f(s,t) = l(t) \textit{ uniformemente rispetto a } t \in T \subseteq \mathbb{R}$$

se, fissato $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(s,t) - l(t)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in T \quad se\ 0 < |s - s_0| < \delta\ .$$

ovvero se $\sup_{t \in T} |f(s,t) - l(t)| \to 0$ *per* $s \to s_0$.

Se $f(s,t)$ è uniformemente continua in $S \times T$, è chiaro che risulta:

$$\lim_{s \to s_0} f(s,t) = f(s_0, t) \quad \text{uniformemente rispetto a } t \in T\ .$$

1.3 Scambio di limiti; di limite e derivata, di limite e integrale. Gli spazi di Lagrange

La differenza tra la convergenza puntuale e quella uniforme acquista maggior risalto dai seguenti teoremi, che illustrano la possibilità di scambiare tra di loro due operazioni di limite, oppure un limite con una derivata, oppure un limite con un integrale. Da essi risulterà che talune proprietà delle funzioni, quali la continuità, la derivabilità, l'integrabilità ... permangono anche dopo aver eseguito un passaggio al limite, se si tratta di limite uniforme, mentre ciò in generale non accade, se si tratta di limite ordinario. In questo ordine di idee cominciamo col mostrare questa semplice

Proposizione 1.3 - *Il limite f di una successione di funzioni limitate $f_n : A \to \mathbb{R}$ convergente uniformemente è una funzione limitata.*

Dimostrazione - Per l'ipotesi di uniforme convergenza, esiste N tale che

$$|f_n(t) - f_m(t)| < 1 \quad \forall t \in A\ , \quad \text{se } n, m \geq N\ . \tag{1.12}$$

Nella (1.12) facciamo tendere n all'∞ e prendiamo $m = N$; risulta

$$|f(t) - f_N(t)| < 1 \quad \forall t \in A$$

cioè

$$|f(t)| < 1 + |f_N(t)| \quad \forall t \in A$$

e dunque anche

$$\sup |f| < 1 + \sup |f_N|\ . \quad \square$$

Se la convergenza è solo puntuale la proposizione 1.3 è falsa. Un controesempio è illustrato nell'esercizio 1.6.

Teorema 1.4 - (dello scambio dei limiti). *Siano $l_n \in \mathbb{R}$, f_n, f funzioni da $A \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, t_0 un punto di accumulazione di A. Se*

i) $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ *uniformemente in* A

ii) $\lim_{t \to t_0} f_n(t) = l_n$,

allora esistono finiti i limiti: $\lim_{t \to t_0} f(t)$ *e* $\lim_{n \to \infty} l_n$ *e sono uguali, cioè:*

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t)\ . \tag{1.13}$$

Dimostrazione - Mostriamo anzitutto che la successione $\{l_n\}$ è convergente; infatti risulta

$$\begin{aligned} |l_n - l_m| &= |l_n - f_n(t) + f_n(t) - f_m(t) + f_m(t) - l_m| \leq \\ &\leq |l_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - l_m|\ . \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per l'ipotesi i) esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che: $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in A$ se $n, m \geq N$. Facendo allora tendere t a t_0, per l'ipotesi ii) risulterà $|l_n - f_n(t)| \to 0$, $|f_m(t) - l_m| \to 0$ e perciò $|l_n - l_m| < \varepsilon$; la successione $\{l_n\}$ è dunque fondamentale, perciò convergente; sia l il suo limite. Mostriamo che $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$\forall t \in A : \ |f(t) - f_N(t)| < \varepsilon \ \text{ e } \ |l_N - l| < \varepsilon\ .$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} |f(t) - l| &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - l_N| + |l_N - l| \leq \\ &\leq 2\varepsilon + |f_N(t) - l_N|\ . \end{aligned}$$

Per la ii), esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che: $|f_N(t) - l_N| < \varepsilon$ se $0 < |t - t_0| < \delta$; allora sarà anche $|f(t) - l| < 3\varepsilon$. $\square$

Corollario 1.5 - *Se la successione di funzioni continue $f_n: A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente, il suo limite $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.*

Dimostrazione - Sia $t_0 \in A$; per l'ipotesi risulta: $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = f_n(t_0)$; applicando allora la (1.13) abbiamo:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to t_0} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0)\ ;$$

$f(t)$ è pertanto continua in t_0; per l'arbitrarietà di t_0, $f(t)$ risulta continua in A. □

Questo risultato è falso in generale se la convergenza della successione $\{f_n\}$ è puntuale, ma non uniforme, come si è visto nell'esempio 1.13. Il Corollario 1.5 è spesso utilizzato al negativo, per mostrare che, se una successione di funzioni continue converge ad una funzione discontinua, la convergenza non può essere uniforme.

Lasciamo all'allievo il compito di formulare enunciati analoghi a quello del teorema 1.4, sulla possibilità di scambiare le operazioni di limite nel caso di funzioni di due (o più) variabili:

$$\lim_{s\to s_0}\lim_{t\to t_0} f(s,t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{s\to s_0} f(s,t)$$

e nel caso di successioni doppie (o multiple), cioè matrici infinite:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nm}\ .$$

■ **Teorema 1.6** - (dello scambio del limite con la derivata). *Sia data una successione di funzioni $f_n: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili; se*

i) *la successione delle derivate $\{f_n'\}$ converge uniformemente in (a,b) con limite g,*

ii) *la successione delle funzioni $\{f_n\}$ converge almeno in un punto $t_0 \in (a,b)$,*

allora anche la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in (a,b); sia f il suo limite; risulta f derivabile e $f' = g$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} Df_n(t) = D\lim_{n\to\infty} f_n(t)\ . \tag{1.14}$$

Dimostrazione - Mostriamo anzitutto che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in (a,b). Sia $t \in (a,b)$, diverso da t_0; per il teorema di Lagrange, applicato alla funzione $f_n(t) - f_m(t)$, abbiamo:

$$f_n(t) - f_m(t) = f_n(t_0) - f_m(t_0) + (t - t_0)(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))$$

con ξ compreso tra t e t_0. Perciò risulta

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le |f_n(t_0) - f_m(t_0)| + (b-a)|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\ .$$

Per le ipotesi del teorema, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che: se $n, m > N$ allora $|f_n(t_0) - f_m(t_0)| < \varepsilon$ e $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$, $\forall \xi \in (a,b)$; pertanto

$$|f_n(t) - f_m(t)| < (1 + b - a)\varepsilon\ ;$$

ciò prova, per la Proposizione 1.2, la uniforme convergenza della successione $\{f_n\}$. Sia $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Mostriamo che f è derivabile. A tale scopo, fissato $t \in (a,b)$, consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} = \lim_{n\to\infty} g_n(t,h)\ ,$$

avendo posto $g_n(t,h) := [f_n(t+h) - f_n(t)]/h$. Osserviamo ora che, fissato t, la successione $\{g_n\}$ converge uniformemente rispetto ad h in $(a-t, b-t)$; infatti, applicando ancora il teorema di Lagrange, abbiamo

$$\begin{aligned} g_n(t,h) - g_m(t,h) &= \frac{1}{h}[(f_n(t+h) - f_m(t+h)) - (f_n(t) - f_m(t))] = \\ &= f_n'(\eta) - f_m'(\eta) \quad \text{con } t < \eta < t+h\ . \end{aligned}$$

La uniforme convergenza di $\{g_n(t,h)\}$ rispetto ad h segue dalla uniforme convergenza della successione $\{f_n'\}$.

Ora possiamo far tendere h a zero e applicare il Teorema 1.4:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} g_n(t,h) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} g_n(t,h) = \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\ , \end{aligned}$$

che prova la (1.14). □

Corollario 1.7 - *Nelle stesse ipotesi del* Teorema 1.6, *se $f_n \in C^1$ anche il limite $f \in C^1$.*

Ancora invitiamo l'allievo a formulare le ipotesi per la validità dell'equazione:

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\partial}{\partial t} f(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}\lim_{s\to s_0} f(s,t)$$

■ **Teorema 1.8** - (dello scambio del limite con l'integrale). *Sia data una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{R}(a,b)$ di funzioni limitate integrabili sull'intervallo $[a,b]$, convergente uniformemente con limite f; allora risulta $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt\ . \tag{1.15}$$

Dimostrazione - Osserviamo anzitutto che il limite f è una funzione limitata (Proposizione 1.3); mostriamo che è integrabile su $[a,b]$. Presa una qualsiasi suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ e

posto $\Delta_i = (t_{i-1}, t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, abbiamo:

$$|S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_n)| = \left| \sum_{i=1}^{k} (\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n) \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \sup_{\Delta_i} |f - f_n| \Delta t_i \ .$$

Per l'uniforme convergenza di f_n verso f, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che $\sup_{[a,b]} |f - f_N| < \varepsilon$; risulta perciò

$$|S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_N)| < \varepsilon(b - a) \ .$$

Analogamente si mostra che (eventualmente aumentando N)

$$|s(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f_N)| < \varepsilon(b - a) \ .$$

Ora, per l'integrabilità di f_N, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ tale che

$$|S(\mathcal{D}, f_N) - s(\mathcal{D}, f_N)| < \varepsilon(b - a) \ .$$

Presa una tale suddivisione, risulta allora

$$|S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f)| \leq |S(\mathcal{D}, f) - S(\mathcal{D}, f_N)| + |S(\mathcal{D}, f_N) - s(\mathcal{D}, f_N)| + \\ + |s(\mathcal{D}, f_N) - s(\mathcal{D}, f)| < 3(b - a)\varepsilon \ .$$

Ciò prova che $f \in \mathcal{R}(a, b)$; allora abbiamo

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| \ ;$$

facendo tendere n all'infinito, segue la (1.15). □

In particolare, se $\{f_n\} \subset C^0([a, b])$, allora $f \in C^0([a, b])$ (per il Corollario 1.5) e vale la (1.15).

Esempi e controesempi sono illustrati negli esercizi.

Invitiamo l'allievo ad enunciare un teorema, analogo al teorema 1.8, per la validità dell'equazione

$$\lim_{s \to s_0} \int_a^b f(s, t)dt = \int_a^b \lim_{s \to s_0} f(s, t)dt$$

ed a ritrovare, come caso particolare, la proposizione 8.1.14, volume 1.

Come abbiamo visto, la convergenza uniforme è la convergenza associata alla metrica del massimo o dell'estremo superiore. Tale metrica è stata adottata sullo spazio delle funzioni continue su un compatto $C^0(A)$ o delle funzioni continue e limitate su un insieme qualsiasi $C_b^0(A)$ o di tutte le funzioni limitate $\mathcal{B}(A)$; comprenderemo ora la ragione di una simile scelta.

■ **Teorema 1.9** - *Lo spazio $C^0(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto, è completo nella metrica lagrangiana.*

Dimostrazione - Sia $\{f_n\} \subset C^0(A)$ una successione fondamentale: ciò significa che, fissato $\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ tale per cui:

$$\max_{t \in A} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \text{se } n, m > N \ .$$

C.N.S

Perciò, per la Proposizione 1.2, questa successione converge uniformemente; sia f il suo limite; per il Corollario 1.5 f è continua. □

Con analoga dimostrazione, ricordando la Proposizione 1.3, si prova che:

$C_b^0(A)$ e $\mathcal{B}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$, sono completi nella metrica dell'estremo superiore.

Consideriamo ora $C^1([a, b])$ dotato della metrica (1.5); una successione fondamentale è una successione $\{f_n\}$ tale che:

$$\max_{[a,b]} |f_n - f_m| \to 0 \quad \text{e} \quad \max_{[a,b]} |f_n' - f_m'| \to 0$$

per $n, m \to \infty$. Ciò implica che le successioni $\{f_n\}$ e $\{f_n'\}$ siano entrambe uniformemente convergenti; sia f il limite di $\{f_n\}$; per il Corollario 1.7, $f \in C^1([a, b])$ e risulta

$$\begin{matrix} f_n \to f \\ f_n' \to f' \end{matrix} \quad \text{uniformemente} \ ,$$

cioè $\{f_n\}$ è convergente nella metrica (1.5). Possiamo enunciare il risultato dicendo:

$C^1(A)$, A compatto, è completo nella metrica lagrangiana (1.5).

È chiaro che C^1 non risulterebbe completo nella stessa metrica di C^0; per questa ragione si pone su C^1 la metrica (1.5). In generale, tutti gli spazi $C^k(A)$, con A compatto, risultano completi nella metrica (1.6). Tali spazi si chiamano *spazi di Lagrange*; essi sono fondamentali nello studio delle equazioni differenziali.

La convergenza in media

Ricordiamo infine le metriche integrali (1.7) (di ordine 1) e (1.8) (di ordine 2). Queste inducono, sugli spazi muniti di tali metriche (es. $\mathcal{R}(a, b)$ o anche $C^0([a, b])$) nuovi tipi di convergenza: la *convergenza in media* (di ordine 1, di ordine 2, ...). Purtroppo però nessuno degli spazi finora considerati, né $\mathcal{R}(a, b)$ né $C^0([a, b])$, risulterebbe completo (v. Esercizio 1.7). D'altra parte, come abbiamo già accennato, tali metriche, soprattutto quella di ordine 2, intervengono in molti problemi, non solo di Matematica, ma anche di Statistica, di Fisica, di Ingegneria; è perciò importante poter disporre di uno spazio che risulti completo rispetto ad esse. La questione è però piuttosto delicata e richiede la revisione del concetto di integrale; questo problema sarà affrontato nel capitolo 5, sezione 2; solo allora saremo in grado di presentare spazi completi rispetto alle metriche integrali.

*1.4 Completezza, chiusura, limitatezza, compattezza

In questo paragrafo ci proponiamo di esaminare le relazioni che intercorrono tra i concetti sopra elencati.

Cominciamo con l'osservare che *un sottoinsieme E di uno spazio metrico X è esso stesso uno spazio metrico (un sottospazio)* adottando in E la stessa definizione di distanza data in X; se X è completo, non è detto però che il sottospazio lo sia. Vale comunque la seguente

Proposizione 1.10 - *Sia X spazio metrico completo e $E \subset X$. Allora E è un sottospazio metrico completo di X se e solo se E è chiuso in X.*

Dimostrazione - i) E chiuso $\Rightarrow$ E completo. Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione fondamentale; essa converge ad un elemento $x \in X$, essendo X completo; bisogna mostrare che $x \in E$: ciò è evidente se $\{x_n\}$ è definitivamente costante; altrimenti segue dal fatto che x, essendo il limite della successione $\{x_n\}$, è un punto di accumulazione di E e perciò $x \in E$ poiché E è chiuso. ii) E completo $\Rightarrow$ E chiuso. Sia $x \in X$ un punto di accumulazione di E; allora possiamo costruire una successione $\{x_n\} \subset E$ convergente a x; ma allora $x \in E$ perché E è completo. □

Questa Proposizione non è altro che la riformulazione in spazi metrici generali del Corollario 4.4.5, volume 1.

Osservazione 1.3 - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è un esempio di spazio metrico non completo; come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ovviamente $\mathbb{Q}$ non è chiuso. Si noti che $\mathbb{Q}$, considerato come spazio metrico a sé stante (non come sottospazio di $\mathbb{R}$) è chiuso nella sua topologia (ogni spazio metrico X è contemporaneamente chiuso e aperto in sé stesso!). Le nozioni di chiusura e completezza sono equivalenti quando sono riferite a sottoinsiemi (sottospazi) di uno spazio metrico X.

Veniamo ora al concetto di *compattezza*.

La definizione di compattezza data per gli insiemi di $\mathbb{R}^n$ si trasporta pari pari agli insiemi di uno spazio metrico X; riferiamoci direttamente allo spazio metrico X, dal momento che, come abbiamo osservato, ogni sottoinsieme di uno spazio metrico è esso stesso uno spazio metrico.

Definizione 1.7 - *Diremo che uno spazio metrico X è* **compatto** *se da ogni sua copertura è possibile estrarre una famiglia finita di aperti che sia ancora una copertura. Diremo che è* **compatto per successioni**, *o sequenzialmente compatto, se da ogni successione a valori in X si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Per insiemi X di $\mathbb{R}^n$ noi abbiamo dimostrato l'equivalenza delle seguenti affermazioni:

(a) X è compatto

(b) X è chiuso e limitato

(c) X è sequenzialmente compatto

(vedi, sul Vol. 1, il teorema di Heine–Borel: (a)$\Rightarrow$(b) e il teorema 4.4.6: (b)$\Rightarrow$(c)).

Ora le cose non stanno più così; cominciamo col mostrare con un esempio che

(b) $\not\Rightarrow$ (c) .

***Esempio* 1.5** - Consideriamo l'insieme $X \subset C^0([0,1])$ così definito:

$$X = \{f \in C^0([0,1]) \colon \max|f| \leq 1\} \ ;$$

tale insieme è chiuso e limitato in $C^0([0,1])$: infatti è contenuto in ogni intorno dell'origine con raggio > 1 ed è il complementare dell'insieme

$$\{f \in C^0([0,1]) \colon \max|f| > 1\}$$

che è chiaramente un insieme aperto. Mostriamo che X non è compatto per successioni. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(t) = t^n$, che evidentemente appartiene ad X. Sappiamo (Esempio 1.13) che essa converge puntualmente, ma non uniformemente, alla funzione (discontinua) $f(t) = 0$ se $0 \leq t < 1, f(1) = 1$. Se una sottosuccessione convergesse uniformemente alla funzione g, questa sarebbe continua, e inoltre, per l'unicità del limite, dovrebbe in ogni punto coincidere con f: assurdo! Perciò dalla successione data non è possibile estrarre alcuna successione convergente e quindi l'insieme X non è compatto per successioni in $C^0([0,1])$.

Lo stesso esempio mostra la non validità del teorema di Bolzano–Weierstrass al di fuori degli spazi euclidei; infatti l'insieme di funzioni $\{t^n\}$, limitato e infinito, non ammette alcun punto di accumulazione in $C^0([0,1])$. Il fatto che il teorema di Bolzano–Weierstrass e le sue conseguenze (il teorema di Heine–Borel, il criterio di Cauchy, ...) non siano più validi è l'aspetto più rilevante della differenza tra gli spazi euclidei e gli spazi funzionali *non a dimensione finita*.

Vediamo ora come si possano caratterizzare gli insiemi compatti negli spazi metrici. A questo proposito dobbiamo riconsiderare il concetto di limitatezza di un insieme: esso sembra essere troppo debole negli spazi funzionali. Introduciamo la seguente

Definizione 1.8 - *Sia X uno spazio metrico; esso si dirà totalmente limitato se, $\forall \varepsilon > 0$, esiste una copertura di X costituita da un numero finito di aperti, ciascuno con diametro $< \varepsilon$.*

Osservazione 1.4 - Ovviamente, *se uno spazio metrico X è totalmente limitato è anche limitato*: infatti, se N è il numero di insiemi che costituiscono la copertura di X, ognuno con diametro $< \varepsilon$, tutto lo spazio sarà contenuto in una palla con diametro $< N\varepsilon$. Viceversa, *in $\mathbb{R}^n$, un insieme limitato è anche totalmente limitato*: infatti, sia C un cubo di lato l che contiene l'insieme; fissiamo $\varepsilon > 0$ e dividiamo C in k^n cubi, ognuno di lato l/k, e quindi di diametro $l\sqrt{n}/k$: scegliamo $k > l\sqrt{n}/\varepsilon$ e così otteniamo una copertura dell'insieme per mezzo di $N = k^n$ cubi, ognuno con diametro $< \varepsilon$.

Che il concetto di totale limitatezza sia più efficace negli spazi funzionali del concetto di limitatezza è messo in risalto dalla seguente Proposizione.

Sia X uno spazio metrico *completo* e consideriamo un insieme $E \subset X$ *totalmente limitato e infinito*. Poiché E può essere ricoperto da una famiglia finita di palle di raggio r, una almeno di queste, diciamo $B_0(r)$, conterrà infiniti punti di E; poiché $B_0(r)$, a sua volta, può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio $r/2$, una almeno di queste, diciamo $B_1(r/2)$, conterrà infiniti punti di E; proseguendo in tal modo, si costruisce una successione $B_n(r/2^n)$ di palle, ognuna delle quali contiene infiniti punti di E. Scegliamo ora $x_0 \in B_0, x_1 \in B_1 \ldots, x_n \in B_n \ldots$; la successione $\{x_n\} \subset E$ è tale che: $d(x_n, x_m) < 2r/2^m$ (se $m \leq n$) e pertanto è fondamentale: essendo X completo, esiste $y \in X$ tale che $x_n \to y$; questo punto y è dunque un punto di accumulazione di E. Abbiamo così dimostrato una estensione del teorema di Bolzano–Weierstrass:

Proposizione 1.11 - *Sia X uno spazio metrico completo e $E \subset X$ un insieme totalmente limitato e infinito. Allora E possiede almeno un punto di accumulazione.*

Consideriamo ora la seguente affermazione:

(b′) *X è completo e totalmente limitato*

Il seguente teorema, di cui non riportiamo la dimostrazione, ci dà la richiesta caratterizzazione degli insiemi compatti.

▪ **Teorema 1.12** - *Sia X uno spazio metrico. Allora le tre affermazioni*: (a), (b′), (c) *sono equivalenti.*

Per le applicazioni, è utile avere a disposizione *criteri sufficienti* di compattezza, almeno negli spazi metrici più comuni. Uno di tali criteri, valido in $C^0([a,b])$, è illustrato negli esercizi (Teor. di Ascoli–Arzelà).

Questo tipo di teoremi si è rivelato fondamentale per lo sviluppo della teoria in molti settori dell'Analisi Funzionale, del Calcolo delle variazioni, delle Equazioni alle derivate parziali.

*1.5 Densità

Esaminiamo ora un altro concetto topologico che già abbiamo introdotto in $\mathbb{R}^n$: quello di insieme denso in un altro.

Sia X uno spazio metrico completo; $E \subset X$ si dice *denso* in X se $\overline{E} = X$, cioè se, aggiungendo ad E i limiti delle successioni fondamentali di E non convergenti in E, si ottiene tutto lo spazio X; X viene detto il *completamento* di E (nella metrica assegnata).

Esempio **1.6** - $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ è il completamento di $\mathbb{Q}$.

La densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ permette di affermare che, preso un qualsiasi numero reale r (non razionale), e fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un numero razionale p/q che dista da r meno di ε: $|r - p/q| < \varepsilon$. Così, se x è un elemento di uno spazio metrico completo X ed E è un sottoinsieme di X denso in X, succede, che, o $x \in E$, oppure è possibile trovare un elemento di E, diciamo y, che dista da x meno di

ε: $d(x,y) < \varepsilon$; cioè è possibile approssimare, nella metrica di X, gli elementi di X per mezzo di elementi di E, tanto bene quanto si voglia.

Nelle applicazioni spesso accade che X sia uno spazio lineare (oltre che metrico completo). Come abbiamo detto, un sottoinsieme E di X è esso stesso uno spazio metrico, in generale non completo; non è uno spazio lineare, a meno che non contenga tutte le combinazioni lineari dei suoi elementi. Conviene allora introdurre una nomenclatura più precisa di quella finora utilizzata.

Definizione 1.9 - *Un sottoinsieme E di uno spazio lineare metrico completo X si dirà* **sottospazio** *se è esso stesso un sottospazio lineare metrico completo di X; si dirà* **varietà lineare** *se è un sottospazio lineare di X, metrico, ma non necessariamente completo.*

Esempi

1.17. L'insieme $E = \{f \in C^0([0,1]): f(0) = 0\}$ è una varietà lineare di $C^0([0,1])$, poiché combinazioni lineari di funzioni continue nulle nell'origine sono ancora funzioni dello stesso tipo; è anche un sottospazio, poiché una successione fondamentale di funzioni continue nulle nell'origine converge (uniformemente) ad una funzione continua, nulla nell'origine.

1.18. L'insieme $E = \{f \in C^0([a,b]): f \text{ polinomio}\}$ è chiaramente una varietà lineare, ma non è un sottospazio: infatti la successione di polinomi

$$
\begin{aligned}
&1\\
&1+t\\
&1+t+\frac{t^2}{2!}\\
&\vdots\\
&1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

converge uniformemente alla funzione e^t, che non è un polinomio (questa affermazione sarà dimostrata nel paragrafo 2.3).

Condizione necessaria e sufficiente perché una varietà lineare E sia un sottospazio di X, è che sia chiusa in X (Proposizione 1.10); l'esempio 1.18 ci mostra una varietà lineare dello spazio delle funzioni continue che non è un sottospazio; sarebbe interessante vedere se essa è però densa in $C^0([a,b])$; ciò consentirebbe di approssimare (nella metrica lagrangiana, cioè uniformemente) ogni funzione continua per mezzo di polinomi. Il seguente teorema dà una risposta affermativa: esso è il prototipo di molti "teoremi di densità", sui quali certo non possiamo soffermarci.

▪ **Teorema 1.13** - (di Weierstrass). *Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua; esiste una successione $\{P_n\}$ di polinomi tale che:*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f \qquad \textit{uniformemente in } [a,b]\ ;$$

in altre parole, la varietà lineare dei polinomi è densa in $C^0([a,b])$.

Il tipo di approssimazione considerato nel teorema 1.8 è ben diverso dall'approssimazione per mezzo di polinomi ottenuta con la formula di Taylor: innanzitutto, per mezzo dei polinomi di Taylor, si possono approssimare funzioni continue e derivabili con continuità un certo numero di volte; ma soprattutto il tipo di approssimazione ottenuto con i polinomi di Taylor è *locale*, cioè l'approssimazione è tanto migliore quanto più vicini si è al punto intorno a cui si fa lo sviluppo, mentre in questo caso l'approssimazione è *globale*, cioè è "ugualmente buona" su tutto l'intervallo considerato.

1.6 Applicazioni tra spazi metrici. Teorema delle contrazioni

Pur essendo il nostro scopo limitato allo studio delle applicazioni tra spazi euclidei, avremo bisogno, per esempio nel capitolo 4, di un risultato che conviene considerare nella sua piena generalità, un risultato riguardante applicazioni tra spazi metrici generali.

D'altra parte, abbiamo già incontrato esempi di tali applicazioni.

Esempi

1.19. L'applicazione I che associa ad ogni funzione f limitata integrabile sull'intervallo (a,b) il suo integrale definito:

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx\ .$$

è un'applicazione lineare (cioè additiva e omogenea).

1.20. L'applicazione $D: C^1([a,b]) \to C^0([a,b])$ associa ad ogni funzione f derivabile con continuità sull'intervallo $[a,b]$ la sua derivata

$$f \mapsto f'\ .$$

Anch'essa è un'applicazione lineare.

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, dotati ognuno della propria metrica: d_X e d_Y.

Definizione 1.10 - *Un'applicazione $F: X \to Y$ si dirà* **limitata** *se l'immagine $F(X)$ è un insieme limitato (nella metrica di Y); si dirà* **continua** *in $x_0 \in X$, se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in X convergente a x_0 risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)\ ;$$

si dirà continua in X se è continua in ogni punto di X.

Queste definizioni ripetono le analoghe definizioni date negli spazi euclidei; si osservi che, quando si dice: x_n convergente a x_0, $F(x_n)$ convergente a $F(x_0)$, si intende che ognuna di queste successioni converge nella metrica specifica dello spazio a cui appartiene, $x_n \in X, F(x_n) \in Y$; più esplicitamente, diremo che: *$F: X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$, tale che*

$$d_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon \qquad se\ \ d_X(x, x_0) < \delta\ .$$

L'equivalenza di questa definizione con la precedente si prova esattamente come negli spazi euclidei.

Esempi

1.21. L'applicazione I dell'esempio 1.19, definita sullo spazio $\tilde{C}(a,b)$ dotato della metrica integrale (1.7), è continua; infatti risulta

$$|I(f) - I(g)| = \left|\int_a^b (f(t) - g(t))dt\right| \le \int_a^b |f(t) - g(t)|dt\ .$$

La precedente disuguaglianza si può scrivere nella forma:

$$d_{\mathbb{R}}(I(f), I(g)) \le d_{\tilde{C}}(f,g)$$

che prova la continuità di I.

L'applicazione $I: C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$, è pure continua; infatti risulta

$$|I(f) - I(g)| \le \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \le \max_{[a,b]} |f - g| \cdot (b - a)\ .$$

cioè

$$d_{\mathbb{R}}(I(f), I(g)) \le (b - a) d_{C^0}(f,g)\ .$$

Si osservi che la legge che definisce I è la stessa nei due casi $(f \mapsto \int_a^b f(t)dt)$ ma I è definita su due spazi metrici diversi in un caso e nell'altro.

Il secondo caso è interessante perché da esso si deduce subito un corollario del teorema 1.8: se $f_n \to f$ in $C^0([a,b])$ allora $I(f_n) \to I(f)$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

1.22. L'applicazione $D: C^1([a,b]) \to C^0([a,b])$ dell'esempio 1.20 è continua. L'affermazione è ovvia, viste le metriche adottate su C^1 e su C^0; infatti

$$d_{C^0}(Df, Dg) = \max_{[a,b]} |f' - g'| \le \max_{[a,b]} |f' - g'| + \max_{[a,b]} |f - g| = d_{C^1}(f,g)\ .$$

1.23. Sia (X, d_X) uno spazio metrico. Allora anche $X \times X$ è metrico con la seguente definizione di distanza: se $\widetilde{x} = (x_1, x_2)$ e $\widetilde{y} = (y_1, y_2)$ sono due elementi di $X \times X$ si pone

$$d_{X\times X}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = d_X(x_1, y_1) + d_X(x_2, y_2) .$$

Mostriamo ora che la funzione distanza (in X):

$$d_X : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

è continua. Dobbiamo mostrare che (scriviamo ora semplicemente d in luogo di d_X):

$$\begin{array}{l} x \to x_0 \text{ in } X \\ y \to y_0 \text{ in } X \end{array} \Rightarrow d(x, y) \to d(x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R} .$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$d(x, y) \leq d(x, y_0) + d(y_0, y)$$

cioè

$$d(x, y) - d(x, y_0) \leq d(y_0, y) .$$

Analogamente, scambiando y con y_0, otteniamo: $d(x, y_0) - d(x, y) \leq d(y, y_0)$, da cui

$$|d(x, y) - d(x, y_0)| \leq d(y, y_0) . \tag{1.16}$$

Allo stesso modo, dalla disuguaglianza: $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y_0)$ si ricava

$$|d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) . \tag{1.17}$$

E infine, dalle (1.16) e (1.17), abbiamo

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x_0, y_0)| &\leq |d(x, y) - d(x, y_0)| + |d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq d(y, y_0) + d(x, x_0) . \end{aligned}$$

Quando $x \to x_0$ e $y \to y_0$ il secondo membro della disuguaglianza tende a zero; lo stesso allora avviene del primo membro.

Occupiamoci ora di una classe speciale di applicazioni continue di uno spazio metrico X in sé stesso.

Definizione 1.11 - *Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $F: X \to X$ si dice lipschitziana se esiste un numero $\rho > 0$ tale che, per ogni coppia x, y di punti di X, si abbia*

$$d(F(x), F(y)) \leq \rho d(x, y) .$$

Se poi risulta $\rho < 1$, F si dirà **contrazione**.

Una contrazione, come si vede, "accorcia" le distanze di un fattore $\rho < 1$; da ciò il nome. La continuità delle applicazioni lipschitziane è evidente.

Esempi

1.24. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto at$ (retta per l'origine) è una contrazione se $|a| < 1, a \neq 0$; più in generale, se $\mathbf{a}$ è un vettore (non nullo) di $\mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{t} \mapsto < \mathbf{a}, \mathbf{t} >$ (iperpiano per l'origine) è una contrazione se $\|\mathbf{a}\| < 1$.

1.25. La funzione e^{-t}, ristretta alla semiretta $[a, +\infty)$ con $0 < a$, è una contrazione; infatti, dal teorema del valor medio di Lagrange, abbiamo, presi $t, s \in [a, +\infty), t > s$:

$$e^{-t} = e^{-s} - (t - s)e^{-\xi} \qquad \text{con } \xi \in (s, t)$$

e pertanto

$$|e^{-t} - e^{-s}| \leq e^{-\xi}|t - s| \leq e^{-a}|t - s| .$$

1.26. L'applicazione $F: C^0([a, b]) \to C^0([a, b])$ così definita:

$$f(s) \mapsto \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

dove $k: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, è detta *operatore integrale* di nucleo k; essa è una contrazione se

$$\max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s, t)| dt \leq \rho < 1 ;$$

infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} d_{C^0}(F(f), F(g)) &= \max_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b k(s, t)(f(t) - g(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \max_{[a,b]} |f - g| \cdot \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s, t)| dt \leq \rho d_{C^0}(f, g) . \end{aligned}$$

Data un'applicazione F, è spesso importante stabilire se essa ammette dei *punti fissi*, cioè punti che vengono trasformati in sé stessi dall'applicazione F. Abbiamo già incontrato questo problema parlando della risoluzione numerica di equazioni (Teor. 6.3.7, Vol. 1). Il teorema seguente generalizza il risultato citato, situandolo nel suo ambiente naturale: gli spazi metrici.

■ **Teorema 1.14** - (di Banach-Caccioppoli, delle contrazioni). *In uno spazio metrico completo una contrazione ammette sempre un unico punto fisso.*

Dimostrazione - Sia X uno spazio metrico completo e $F : X \to X$ una contrazione di costante $\rho < 1$.

Unicità. Se x_1 e x_2 sono due punti fissi per F, risulta $F(x_1) = x_1$, $F(x_2) = x_2$ e quindi:

$$d(x_1, x_2) = d(F(x_1), F(x_2)) \leq \rho d(x_1, x_2)$$

da cui si ricava, essendo $\rho < 1$, $d(x_1, x_2) = 0$, cioè $x_1 = x_2$.

Esistenza. Usiamo il metodo delle approssimazioni successive: costruiamo cioè, a partire da un punto x_0 arbitrario di X, una successione $\{x_n\}$ che dimostreremo convergente ad un punto $\tilde{x}$ tale che $\tilde{x} = F(\tilde{x})$. La successione è definita ricorsivamente ponendo:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si ha, per ogni n,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \rho d(x_n, x_{n-1}) . \tag{1.18}$$

Iterando la (1.18) si ottiene, per induzione,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \rho^n d(x_1, x_0) . \tag{1.19}$$

Sia ora $n > m$; usando ripetutamente la disuguaglianza triangolare e la (1.19) si ottiene

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{n-1} \rho^k \leq$$
$$\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = d(x_1, x_0) \frac{\rho^m}{1-\rho}$$

Poiché $\rho^m \to 0$ per $m \to \infty$, la successione $\{x_n\}$ risulta fondamentale e pertanto, essendo X completo, convergente. Detto $\tilde{x}$ il suo limite, risulta, per la continuità dell'applicazione F,

$$F(\tilde{x}) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = \tilde{x} \quad \square$$

Significativi esempi di applicazione del teorema 1.14 si avranno nel capitolo 4.

1.7 Spazi normati e spazi dotati di prodotto scalare

Gli spazi più importanti che si incontrano nelle applicazioni non soltanto sono metrici e lineari, ma sono anche normati; in qualche caso risultano anche dotati di prodotto scalare. Conviene richiamare la definizione di spazio normato, già introdotta in 3.1.4, volume 1

Definizione 1.12 - *Uno spazio lineare X (sul campo Λ reale o complesso) si dice normato se è definita un'applicazione (detta* **norma***) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x, y \in X, \lambda \in \Lambda$ valgono le seguenti proprietà*

$\mathcal{N}$ 1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Vale anche (v. 3.1.4 Vol. 1) la seguente, che si deduce dalle precedenti:

$\mathcal{N}$4. $| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|$.

Uno spazio normato è anche metrico, con la seguente definizione di *distanza*:

$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Gli *intorni* di x di raggio r sono gli insiemi

$$B(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| < r\} .$$

Le *successioni fondamentali* in X sono quelle per cui

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Una *successione* $\{x_n\}$ si dirà *convergente* a $x \in X$ se:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0 .$$

Se lo spazio X è completo prende il nome di *spazio di Banach.*

Esempi

1.27. Lo spazio $C^0(A)$ (A compatto) è normato con la norma

$$\|f\|_{C^0} = \max_A |f| .$$

Questa norma è detta *lagrangiana*; la metrica indotta da questa norma è precisamente la metrica lagrangiana (1.3); perciò $C^0(A)$ è uno spazio di Banach.

Anche $C^1(A)$ è uno spazio di Banach con la seguente definizione di norma

$$\|f\|_{C^1} = \max_A |f| + \max_A |f'| .$$

L'affermazione si estende in modo ovvio a tutti gli spazi di Lagrange $C^k(A)$.

In $C^\infty(A)$ invece *non* è possibile introdurre una norma rispetto alla quale esso risulti completo; $C^\infty(A)$ *non* è dunque uno spazio di Banach.

1.28. Se A non è compatto, ma le funzioni sono limitate, useremo la norma dell'estremo superiore invece che la norma del massimo. Così, sugli spazi $C_b^k(A)$ delle funzioni continue e derivabili con continuità k volte con derivate limitate porremo

$$\|f\|_{C^k} = \sup_A |f| + \sup_A |f'| + \cdots + \sup_A |f^{(k)}|$$

cosicché anch'essi sono spazi di Banach.

Osserviamo infine che l'*applicazione norma*: $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ *è continua*, cioè

$$x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\| .$$

Ciò segue subito dalla proprietà $\mathcal{N}4$ della norma, scrivendo

$$|\,\|x\| - \|x_n\|\,| \leq \|x - x_n\| .$$

Sia ora X uno spazio lineare (sul campo reale o complesso Λ); ricordiamo che *il* **prodotto scalare** *è un'applicazione* $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \Lambda$, *tale che*, $\forall x, y, z \in X$ *e* $\lambda \in \Lambda$ *valgono le seguenti proprietà*:

$\mathcal{S}$ 1. $< x, y > = \overline{< y, x >}$
2. $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$
3. $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
4. $< x, x >$ *reale* ≥ 0 ; $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un'altra proprietà del prodotto scalare (già dimostrata in 3.1.4 Vol. 1) è la *disuguaglianza di Schwarz*:

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$$

che consente di introdurre una norma, ponendo:

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >} .$$

Così, uno spazio dotato di prodotto scalare è anche normato (e dunque metrico); se è completo, prende il nome di *spazio di Hilbert*. Un tale spazio, che supponiamo, ovviamente, non a dimensione finita, ha dunque un complesso di strutture che lo rendono "simile" ad uno spazio euclideo; naturalmente, dal punto di vista topologico, vi sono importanti differenze, come abbiamo messo in luce nel paragrafo 1.4.

Purtroppo non siamo in grado, per il momento, di fornire alcun esempio di spazio hilbertiano non euclideo (v. però l'esercizio 1.14). Il problema non è quello di definire un prodotto scalare, ma piuttosto quello della completezza dello spazio. Per esempio, in $C^0([a, b])$ possiamo tentare di introdurre un prodotto scalare imitando la definizione data in $\mathbb{R}^n$:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Passiamo dal discreto al continuo: sostituiamo all'indice discreto k, variabile tra 1 e n, la variabile continua $t \in [a, b]$, al vettore $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ la funzione $x = x(t)$, alla sommatoria l'integrale, e poniamo

$$< x, y > := \int_a^b x(t)y(t)dt . \tag{1.20}$$

È facile mostrare che la (1.20) è una buona definizione di prodotto scalare in $C^0([a, b])$ sul campo reale; ma la metrica indotta dalla (1.20), e cioè

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right)^{1/2}$$

non è la metrica lagrangiana, ma la metrica integrale di ordine 2; come abbiamo già avvertito, C^0 non è completo rispetto a questa metrica. Quale sia il suo completamento, è una questione delicata, che sarà ripresa più avanti.

Il prodotto scalare, così come la distanza e la norma, *è una funzione continua*, cioè:

$$\begin{matrix} x_n \to x \\ y_m \to y \end{matrix} \Rightarrow < x_n, y_m > \to < x, y > .$$

Infatti, basta scrivere

$$< x_n, y_m > - < x, y > = < x_n - x, y_m - y > + < x_n - x, y > + \\ + < x, y_m - y >$$

e applicare la disuguaglianza di Schwarz:

$$|< x_n, y_m > - < x, y >| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_m - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| + \\ + \|x\| \cdot \|y_m - y\| .$$

L'asserto segue, facendo tendere n, m all'infinito.

In uno spazio dotato di prodotto scalare si può parlare di *funzioni* (vettori) *ortogonali; due funzioni si diranno ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo*. Mostriamo esempi di funzioni ortogonali rispetto al prodotto scalare (1.20).

Esempi

1.29. *Il sistema trigonometrico sul campo reale.*
Nello spazio $C^0([-\pi, \pi])$ consideriamo le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Valgono le seguenti relazioni (che si possono verificare, per esempio, applicando le formule di prostaferesi) $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \; dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt \; dt = 0 \tag{1.21}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \; dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \, . \end{cases}$$

Queste relazioni possono essere scritte in forma più compatta ed espressiva; poniamo, per $n = 1, 2, \ldots$:

$$x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, , \; x_{2n}(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \, , \; x_{2n-1}(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

e definiamo un prodotto scalare ponendo:

$$< x, y > := \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y(t) dt \, . \tag{1.22}$$

Risulta allora, $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$< x_m, x_n > = \delta_{nm} \tag{1.23}$$

dove δ_{nm} è il simbolo di Kronecker. Perciò la successione $\{x_n\}$ costituisce un sistema di *versori* (cioè vettori di norma unitaria) *ortogonali*, esattamente come succede, in $\mathbb{R}^n$, per i vettori della base canonica: $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$.

Si noti, che, essendo le funzioni $x_n(t)$ tutte periodiche di periodo comune 2π, le relazioni (1.21) restano valide se si sostituisce all'intervallo $(-\pi, \pi)$ un qualunque altro intervallo, purché di ampiezza 2π; le funzioni $\{x_n\}$ costituiscono perciò un sistema di versori ortogonali su qualunque intervallo del tipo $(a, a + 2\pi)$.

1.30. Un sistema di versori ortogonali rispetto al prodotto scalare (1.22) su un generico intervallo (a, b) si ottiene dal precedente con una semplice sostituzione di variabili. Posto $\tau = b - a$ e

$$s = t \, \frac{\tau}{2\pi} \tag{1.24}$$

le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ldots, \sin\left(s \, \frac{2\pi n}{\tau}\right), \cos\left(s \, \frac{2\pi n}{\tau}\right), \ldots$$

risultano ora periodiche di periodo comune τ; come subito si verifica, esse sono ortogonali sull'intervallo $(0, \tau)$, come su qualunque altro intervallo (a, b) di ampiezza τ.

1.31. *Il sistema trigonometrico sul campo complesso.*

È talvolta utile, invece che considerare le funzioni (reali) dell'esempio 1.29, considerare certe loro combinazioni lineari a coefficienti complessi, e precisamente:

$$\frac{\cos nt}{\sqrt{2\pi}} + i \frac{\sin nt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \, , \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{2\pi}} - i \frac{\sin nt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} \, .$$

Consideriamo allora il sistema di funzioni:

$$x_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \qquad n \in \mathbb{Z} \, .$$

Esso risulta (lo studente è sollecitato alla verifica) un sistema di *versori ortogonali* rispetto al prodotto scalare così definito:

$$< x, y > = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{y(t)} dt \, . \tag{1.25}$$

Ancora potremo sostituire all'intervallo $(-\pi, \pi)$ qualunque intervallo di ampiezza 2π.

Osservazione 1.5 - Consideriamo lo spazio delle funzioni continue su $[-\pi, \pi]$, dotato del prodotto scalare (1.22) o (1.25) e perciò della metrica integrale di ordine 2, rispetto alla quale tale spazio non è completo. Il sistema trigonometrico (sia quello sul campo reale che quello sul campo complesso) ci fornisce un esempio di insieme infinito, limitato (tutti i vettori hanno norma 1 e perciò sono contenuti in una palla di raggio $r > 1$), senza punti di accumulazione (ogni vettore è un punto isolato, perché ha distanza da qualunque altro pari a $\sqrt{2}$).

Esercizi

1. Sia $\varphi(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ (campana di Gauss; diagramma n. 22 sul Vol. 1). Mostreremo più avanti che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ (Esempio 4.1.22):

i) mostrare che $\mathbb{R}$ può essere metrizzato con la seguente definizione di distanza:

$$d(x, y) = \left| \int_x^y \varphi(t) dt \right| ;$$

$\mathbb{R}$ risulta limitato, $\operatorname{diam}(\mathbb{R}) = 1$. Interpretare geometricamente questa distanza.

ii) Si dimostri che $x_n \to y$ nella metrica d se e solo se $x_n \to y$ nella solita metrica pitagorica; da ciò si deduca che $\mathbb{R}$, con la metrica d, è completo.

2.* *Spazio metrico dei compatti.* Indichiamo con $\mathcal{K}$ la famiglia degli insiemi compatti di $\mathbb{R}^2$. Se $A \in \mathcal{K}$, e $\delta > 0$, definiamo $\delta-$ intorno di A l'insieme

$$A_\delta := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, A) < \delta \right\}$$

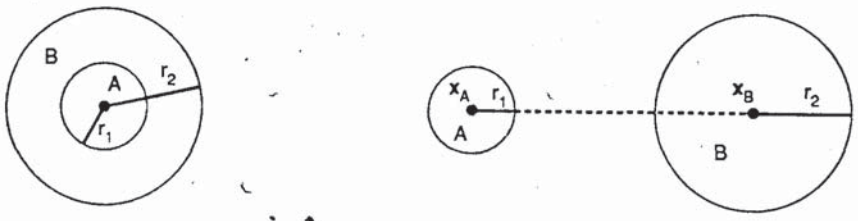
dove $d(\mathbf{x}, A)$, la distanza del punto $\mathbf{x}$ dall'insieme A, è così definita:

$$d(\mathbf{x}, A) := \inf_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

Mostrare che $\mathcal{K}$ è uno spazio metrico con la seguente definizione di distanza (*metrica di Hausdorff*):

$$d_K(A, B) := \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\}.$$

Per esempio, la distanza di due cerchi concentrici, di raggi r_1 e r_2 $(r_2 > r_1)$ è $r_2 - r_1$; la distanza di due cerchi disgiunti è pari alla distanza dei centri più $r_2 - r_1$.



$d_K(A,B) = r_2 - r_1$ **Fig. 3.3** $d_K(A,B) = r_2 - r_1 + d(x_A, x_B)$

3. Dimostrare che la successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2 t^2}$$

i) converge a 0 in ogni punto di $\mathbb{R}$

ii) converge uniformemente in $[1, +\infty)$

iii) non converge uniformemente in $[-1, 1]$.

L'allievo si renda ragione del risultato, disegnando i grafici delle funzioni f_n.

4. Trovare il limite della successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{n^2 t^2}{1 + n^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Discutere l'uniformità della convergenza, sia direttamente, che utilizzando il Corollario 1.5.

5. Dimostrare che la successione di funzioni:

$$f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

i) converge a 0 $\forall t \in [0, +\infty)$ (qualunque sia α)

ii) converge uniformemente in $[1, +\infty)$ (qualunque sia α)

iii) converge uniformemente in $[0, 1]$ se $\alpha < 1$, non converge uniformemente se $\alpha \geq 1$.

(Conviene ancora disegnare i grafici delle funzioni f_n).

6. Sia

$$f_n(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ \sqrt{n} & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Mostrare che la successione f_n converge puntualmente a $1/\sqrt{t}$ in $(0, 1]$, ma non uniformemente. Si osservi che le funzioni f_n sono tutte limitate in $(0, 1]$, ma la funzione limite non lo è.

7. Consideriamo gli spazi: $X = C^0([0, 1])$, $Z = \tilde{C}(0, 1)$, lo spazio delle funzioni continue assolutamente integrabili, in senso generalizzato, su $(0, 1)$; dotiamoli della metrica integrale (di ordine 1). Risulta ovviamente $X \subset Z$. Si consideri ora la successione di funzioni $f_n \in X$ considerata nell'esercizio 6.

i) Mostrare che essa è fondamentale in X (e quindi anche in Z), cioè:

$$\lim_{n,m \to \infty} \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt = 0$$

ii) Mostrare che essa è convergente in Z alla funzione $1/\sqrt{t}$, cioè mostrare che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left| f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| dt = 0$$

iii) Poiché $1/\sqrt{t} \notin X$, dedurre, per l'unicità del limite, che f_n non converge in X e perciò X non é completo (nella metrica integrale).

iv) Si osservi che, ovviamente, la stessa successione non è fondamentale in $C^0([0, 1])$ dotato della metrica lagrangiana.

8. Mostrare che l'insieme (sottoinsieme di $C^0([a, b])$)

$$\{f \in C^0([a, b]) : |f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a, b]\}$$

(dove k è un numero positivo assegnato) è uno spazio (non lineare) metrico completo nella metrica lagrangiana.

Un criterio di compattezza in $C^0([a, b])$. Sia $\{f_n\}$ una successione a valori in $C^0([a, b])$; essa è *limitata* se è contenuta in qualche intorno dell'origine, cioè se esiste M (indipendente da n) tale che:

$$\max_{t \in [a,b]} |f_n(t)| \leq M ;$$

si dice anche che le funzioni f_n sono *equilimitate*. Le funzioni f_n si dicono *equicontinue* se, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che: per ogni coppia di punti $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $|t_1 - t_2| < \delta$ risulta $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ (si noti che δ non dipende da n!).

Teorema (di Ascoli–Arzelà): *una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue contiene una sottosuccessione uniformemente convergente.*

9. Mostrare, usando il teorema di Ascoli–Arzelà, che un insieme chiuso e limitato in C^1 è compatto (per successioni) in C^0.

Basterà dimostrare che una successione limitata in C^1, cioè tale che:

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t)| \le M_1 \text{ e } \max_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \le M_2$$

soddisfa le ipotesi del teorema.

10. Sia f_n la successione considerata nell'esercizio 4. Verificare che, pur non essendo uniforme la convergenza in $[-1,1]$, è tuttavia possibile passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} f_n(t)dt = \int_{-1}^{+1} \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt \ .$$

11. Verificare che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} (\sin t)^n dt$$

nonostante che la successione $(\sin t)^n$ non converga uniformemente in $[0,\pi]$.

12. Osservare che la (1.14) non è valida per la successione $\{t - t^n/n\}$ nell'intervallo $[0,1]$; spiegarne la ragione.

***13.** *Calcolo di* $\int_0^\infty \sin x/x \ dx$.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

i) la funzione $[0,\infty) \ni x \mapsto f(x,y) = e^{-xy}\sin x/x \quad (f(0,y) = 1)$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato $\forall y > 0$;

ii) la funzione $(0,\infty) \ni y \mapsto \phi(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx$ è di classe C^1; inoltre si ha:

$$\lim_{y\to+\infty} \phi(y) = 0 \ , \ \phi'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \ , \ \phi(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \ ;$$

iii) $$\lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Spazi di successioni.

Siano $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ successioni a valori in $\mathbb{R}$ oppure in $\mathbb{C}$. L'insieme di tali successioni forma uno spazio lineare, avendo definito la somma di successioni

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$$

e il prodotto di una successione per un numero

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots) \ .$$

Questo spazio sarà indicato con $\mathbb{R}^\infty$ (o $\mathbb{C}^\infty$). In questo spazio consideriamo i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} e^1 &= (1,0,0,\ldots,0,\ldots) \\ e^2 &= (0,1,0,\ldots,0,\ldots) \\ &\vdots \\ e^n &= (0,0,0,\ldots,1,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.26}$$

Questi sono *linearmente indipendenti* e costituiscono una *base* per $\mathbb{R}^\infty$, il quale perciò non ha dimensione finita. Questo esempio illustra il passaggio, diciamo così, "naturale", dalla dimensione finita alla dimensione infinita.

Si indicano con l^∞, l^1, l^2, rispettivamente, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^\infty$ così definiti:

$$l^\infty := \{x \in \mathbb{R}^\infty : \sup_i |x_i| < \infty\}$$

$$l^1 := \{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty\}$$

$$l^2 := \{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\} \ ;$$

l^∞ è l'insieme delle successioni *limitate*, l^1 delle successioni *sommabili*, l^2 delle successioni di *quadrato sommabile*.

14. Mostrare che l^∞, l^1, l^2 sono *spazi lineari*, sottospazi di $\mathbb{R}^\infty$. (Per l^2 ricordare che: $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$)

15. Mostrare che l^∞, l^1, l^2 sono *spazi normati* con la seguente definizione di norma:

per l^∞, $\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|$

per l^1, $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^\infty |x_i|$

per l^2, $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2\right)^{1/2}$;

l^2 inoltre è dotato di *prodotto scalare*, così definito:

$$< x, y > := \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y}_i \ .$$

Si osservi che le metriche indotte su l^∞, l^1, l^2 dalla precedente definizione di norma sono analoghe rispettivamente alle metriche d_∞, d_1, e pitagorica introdotte in $\mathbb{R}^n$ nell'esempio 1.2.

***16.** Dimostrare che tutti e tre gli spazi nell'esercizio 15 sono *completi*, cioè sono *spazi di Banach*; l^2 inoltre, essendo dotato di prodotto scalare, è uno *spazio di Hilbert*.

17. Mostrare che, in ognuno degli spazi l^∞, l^1, l^2, l'insieme dei vettori e^n $(n \in \mathbb{N})$ (definiti in (1.26)) è limitato, non ha punti di accumulazione (quindi è chiuso), non è compatto.

18. Se (X, d) è uno spazio metrico, si definisce *distanza di un punto $x \in X$ da un insieme $A \subset X$* il numero:

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) .$$

Mostrare che, se A è *compatto*, esiste in A un punto y_0 di minima distanza da x, cioè un punto $y_0 \in A$ per cui:

$$d(x, A) = d(x, y_0) .$$

19. Si voglia risolvere l'equazione integrale, nell'incognita $f \in C^0([0,1])$:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-st} f(t)dt - \lambda f(s) = g(s)$$

dove $g \in C^0([0,1])$ è una funzione assegnata e λ un parametro reale. Si consideri l'operatore

$$T: f \mapsto Tf(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-st} f(t)dt + (1-\lambda)f(s) - g(s) .$$

Allora l'equazione si scrive: $Tf = f$.

Mostrare che T è una contrazione in $C^0([0,1])$ se $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$, per cui l'equazione data ha una e una sola soluzione per ogni g se $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$.

20. Se a_{nk} è una successione doppia monotona (crescente, per esempio) sia rispetto a n che rispetto a k e limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} a_{nk} = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk} .$$

[Basta dimostrare che esiste (finito) il limite doppio $\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nk}$; ciò segue dal fatto che: $\sup_n \sup_k a_{nk} = \sup_k \sup_n a_{nk}$].

21. Due norme, $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ definite sullo stesso spazio lineare X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$c_1||x||_2 \le ||x||_1 \le c_2||x||_2 \qquad \forall x \in X .$$

i) Mostrare che la relazione tra norme definita sopra è un'equivalenza.
ii) Mostrare che, se X è completo nella norma $||\cdot||$, è completo anche in ogni altra norma equivalente.

2. SERIE DI FUNZIONI

2.1 Generalità

Le definizioni precedentemente date per le successioni di funzioni si trasportano senza difficoltà alle serie.

Sia $\{x_n\}$ una successione di funzioni che, per semplicità, supporremo reali di variabile reale: $x_n: A \to \mathbb{R}$; la successione delle *somme parziali* $\{s_n\}$ così definita:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= x_0(t) \\ s_1(t) &= x_0(t) + x_1(t) \\ &\vdots \\ s_n(t) &= x_0(t) + x_1(t) + \cdots + x_n(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

SEMINARIO SCIENTIFICO UNIVERSITÀ DI CASSINO

si dice *serie* di termini $x_n(t)$ e si indica col simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ (o anche, semplicemente, $\sum x_n(t)$); la serie si dirà *convergente* (puntualmente, uniformemente, ...) in A se converge (puntualmente, uniformemente, ...) la successione delle somme parziali; il limite di questa successione si chiamerà *somma* della serie.

Più in generale, se $\{x_n\}$ è una successione a valori in uno spazio metrico X, la serie $\sum x_n$ si dirà convergente se converge la successione $\{s_n\}$; tale convergenza naturalmente sarà quella definita dalla metrica di X.

***Esempio* 2.1** - Consideriamo la successione di funzioni $\{t^n\}$, $t \in \mathbb{R}$; la corrispondente serie è la *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ la quale, come sappiamo, converge $\forall t \in (-1,1)$ e la sua somma è la funzione $s(t) = (1-t)^{-1}$; diremo perciò che la serie geometrica *converge puntualmente in* $(-1,1)$. Mostriamo che *converge uniformemente in* $[-r, r]$ *con* $0 < r < 1$; infatti la successione delle somme parziali è:

$$s_n(t) = \frac{1 - t^{n+1}}{1-t} .$$

Abbiamo perciò, essendo $|t| \le r$,

$$|s(t) - s_n(t)| = \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \le \frac{r^{n+1}}{1-r} .$$

Poiché la successione numerica $\{r^n/(1-r)\}$ tende a 0 per $n \to \infty$, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo determinare $N = N(\varepsilon)$ (N indipendente da t) tale per cui risulti

$$|s(t) - s_n(t)| < \varepsilon \quad \text{se } n > N , \quad \forall t \in [-r, r] .$$

Ciò assicura la convergenza uniforme della serie data in $[-r, r]$. La serie *non converge uniformemente in* $(-1, 1)$, come sarà osservato nell'esempio 2.2.

Come per le serie numeriche, così per quelle di funzioni vale il **criterio di Cauchy** (che si deduce dall'omonimo criterio per le successioni, Proposizioni 1.1 e 1.2): *la serie* $\sum x_n(t)$ *di funzioni:* $A \to \mathbb{R}$ *converge puntualmente in* A *se e solo se, fissato* $\varepsilon > 0, \forall t \in A$ *si può determinare un indice* $N = N(\varepsilon, t)$ *tale che,* $\forall p \geq N$ *e* $\forall q \geq 0$ *si abbia*

$$|x_p(t) + x_{p+1}(t) + \cdots + x_{p+q}(t)| < \varepsilon \; ; \tag{2.1}$$

la convergenza sarà uniforme se e solo se esiste un indice $N = N(\varepsilon)$ *(indipendente da t) tale che la* (2.1) *sia valida* $\forall t \in A, \forall p \geq N, \forall q \geq 0$.

Come corollario immediato si ricava che:

se $\sum x_n(t)$ *converge puntualmente (uniformemente) in* A *allora* $x_n(t) \to 0$ *puntualmente (uniformemente) in* A.

Un semplice criterio sufficiente per la convergenza uniforme di una serie è il seguente:

Proposizione 2.1 - (Criterio di Weierstrass). *Data la successione di funzioni* $x_n : A \to \mathbb{R}$, *se esitono costanti positive* c_n *per cui*

i) $|x_n(t)| \leq c_n$ *definitivamente,* $\forall t \in A$

ii) $\sum c_n$ *è convergente*

allora la serie di funzioni $\sum x_n(t)$ *converge uniformemente in* A.

Dimostrazione - La convergenza della serie $\sum c_n$ implica che, fissato $\varepsilon > 0$, esista $N = N(\varepsilon)$ per cui

$$c_p + c_{p+1} + \cdots + c_{p+q} < \varepsilon \qquad \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \, .$$

Allora abbiamo, per la i),

$$\begin{aligned} |x_p(t) + \cdots + x_{p+q}(t)| &\leq |x_p(t)| + \cdots + |x_{p+q}(t)| \leq \\ &\leq c_p + \cdots + c_{p+q} < \varepsilon \; ; \end{aligned}$$

ciò garantisce la convergenza uniforme in base al criterio di Cauchy. □

In molte applicazioni le funzioni x_n sono elementi di uno spazio di Banach; allora il criterio di Cauchy, necessario e sufficiente per la convergenza di $\sum x_n$, prende la forma seguente:
fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N = N(\varepsilon)$ per cui

$$\|x_p + x_{p+1} + \cdots + x_{p+q}\| < \varepsilon \qquad \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \, .$$

Abbiamo anche un *criterio sufficiente* di convergenza che ricorda il criterio di Weierstrass.

▪ **Teorema 2.2** - (della convergenza totale). *Sia* $\{x_n\}$ *una successione a valori in uno spazio di Banach. Se la serie delle norme* $\sum \|x_n\|$ *è convergente, anche la serie* $\sum x_n$ *è convergente, e inoltre*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \, . \tag{2.2}$$

Dimostrazione - La convergenza della serie numerica $\sum \|x_n\|$ implica che, fissato $\varepsilon > 0$, esista $N = N(\varepsilon)$ per cui

$$\|x_p\| + \|x_{p+1}\| + \cdots + \|x_{p+q}\| < \varepsilon \qquad \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \, .$$

Allora abbiamo, per la proprietà $\mathcal{N}.3$ della norma,

$$\|x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{p+q}\| \leq \|x_p\| + \|x_{p+1}\| + \ldots + \|x_{p+q}\| < \varepsilon \, ,$$

che implica la convergenza della serie $\sum x_n$ per il criterio di Cauchy. La (2.2) segue poi dal fatto che essa è vera per ogni somma parziale. □

Una serie per la quale converge la serie delle norme si dice *totalmente convergente.*

Se lo spazio è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e dunque si tratta di serie numeriche, la convergenza totale coincide con la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie dei valori assoluti.

Se lo spazio è $C^0(A)$ (con A compatto) oppure $C_b^0(A)$ oppure $\mathcal{B}(A)$ (spazi di Banach con la norma del massimo o dell'estremo superiore) il teorema afferma che la serie di funzioni (limitate) $\sum x_n(t)$ converge uniformemente se è convergente la serie (numerica) $\sum \sup_{t \in A} |x_n(t)|$; ritroviamo quindi il criterio di Weierstrass.

L'importanza della convergenza uniforme rispetto alla convergenza puntuale viene messa in luce dai seguenti teoremi, che non sono altro che la riformulazione dei teoremi 1.4, 1.6, 1.8 già dimostrati per le successioni.

▪ **Teorema 2.3** - (limite di una serie). *Siano* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *e* t_0 *un punto di accumulazione di* A. *Se*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ *converge uniformemente in* A *con somma* $F(t)$;

ii) *esistono finiti i limiti:* $\lim_{t \to t_0} f_n(t) = l_n$;

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} l_n$ *converge, e, detta* L *la sua somma, risulta* $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$, *cioè*

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t) \, . \tag{2.3}$$

Dal teorema scende immediatamente il seguente corollario (analogo del Corollario 1.5 per le successioni)

Corollario 2.4 - *La somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue è una funzione continua.*

***Esempio* 2.2** - Mostriamo che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ non converge uniformemente nell'intervallo $(-1,1)$; se infatti convergesse uniformemente, essendo

$$\lim_{t\to 1} t^n = 1\ ,\ \lim_{t\to -1} t^n = (-1)^n$$

le due serie dei limiti:

$$1+1+1+\cdots\ ,\ 1-1+1-1+\cdots$$

sarebbero convergenti.

▪ **Teorema 2.5** - (derivata di una serie).*Sia data una successione di funzioni $f_n\colon (a,b)\to \mathbb{R}$ derivabili; se*

i) *la serie delle derivate $\sum f_n'(t)$ è uniformemente convergente in (a,b), con somma $G(t)$;*

ii) *la serie delle funzioni converge almeno in un punto $t_0 \in (a,b)$,*

allora anche la serie $\sum f_n(t)$ converge uniformemente in (a,b); detta $F(t)$ la sua somma, risulta F derivabile e $F' = G$, cioè:

$$D\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Df_n(t)\ . \tag{2.4}$$

Corollario 2.6 - *Se le funzioni f_n sono di classe C^k in (a,b) e le serie $\sum f_n, \sum f_n'$, $\ldots, \sum f_n^{(k)}$ convergono uniformemente in (a,b) con somma $F, G_1, \ldots, G_k$ rispettivamente, allora anche F è di classe C^k e risulta $F^{(i)} = G_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$.*

***Esempio* 2.3** - La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

converge per $t = 0$ (con somma 0). La serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, converge uniformemente in $[-r,r], 0 < r < 1$, con somma $(1-t)^{-1}$; allora la serie data converge anch'essa uniformemente in $[-r,r]$, e, detta F la sua somma, risulta

$$F'(t) = \frac{1}{1-t}\ ;$$

cioè, tenuto conto che $F(0) = 0, F(t) = -\log(1-t)$.

Osservazione 2.1 - Il teorema 1.6 e, di conseguenza, il teorema 2.5, possono estendersi alle funzioni di più variabili senza difficoltà. In particolare, ci sarà utile nel seguito la seguente proposizione, analoga del Corollario 2.6:

se le funzioni $f_n\colon \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1 in A e le serie $\sum f_n$, $\sum \partial f_n/\partial t_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ convergono uniformemente in A con somma F, G_i rispettivamente, allora anche F è di classe C^1 e risulta $\partial F/\partial t_i = G_i$.

Si può estendere il teorema anche alle funzioni di variabile complessa; anzi, in questo caso, valgono risultati più specifici, tipici della teoria delle funzioni olomorfe, sui quali non possiamo soffermarci.

▪ **Teorema 2.7** - (integrale di una serie). *Sia data una successione f_n di funzioni limitate integrabili sull'intervallo (a,b); se la serie $\sum f_n(t)$ converge uniformemente in (a,b) con somma $F(t)$, allora F è integrabile e si ha*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt\ . \tag{2.5}$$

In particolare, se le f_n sono continue su $[a,b]$, anche la somma F è continua, perciò integrabile, su $[a,b]$ e vale la (2.5).

Questo teorema, che è di larghissimo impiego in molte applicazioni, può essere utilizzato anche in presenza di integrali generalizzati. Verifichiamolo su di un esempio.

***Esempio* 2.4.** - Si consideri l'integrale

$$J = \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^t - 1}\ .$$

Esso interviene in Meccanica quantistica, quando si voglia calcolare, a partire dalla legge di Planck dell'irraggiamento, la densità totale di energia di un risonatore (per esempio, un oscillatore armonico). L'integrale J esiste, poiché la funzione integranda, continua in $(0,+\infty)$, è continua anche nell'origine (tende a zero per $t \to 0+$) ed è infinitesima all'infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di $1/t$. Abbiamo perciò:

$$J = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \frac{t^3 dt}{e^t - 1} = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} e^{-t}\frac{t^3}{1-e^{-t}}dt\ .$$

Osserviamo ora che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t^3 e^{-nt}$ è uniformemente convergente in $[0,+\infty)$ con somma $t^3/(1-e^{-t})$ (si ricordi la somma della serie geometrica; per dimostrare

l'uniforme convergenza si usi il criterio di Weierstrass dopo aver notato che:

$$t^3 e^{-nt} \leq \max_{t\in[0,+\infty)} t^3 e^{-nt} = \frac{27e^{-3}}{n^3} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,) \,.$$

Allora possiamo applicare il teorema 2.7; abbiamo:

$$J = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega \sum_{n=0}^{\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt = \lim_{\omega\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\omega t^3 e^{-(n+1)t} dt$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\omega)$, con $\varphi_n(\omega) = \int_0^\omega t^3 e^{-(n+1)t} dt$, è uniformemente convergente in $[0, +\infty)$ ancora per il criterio di Weierstrass, poiché:

$$\int_0^\omega t^3 e^{-(n+1)t} dt \leq \int_0^\infty t^3 e^{-(n+1)t} dt = 6/(n+1)^4 \,.$$

Allora possiamo applicare il teorema 2.3 e scrivere finalmente:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega t^3 e^{-(n+1)t} dt = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \,.$$

Nel paragrafo 2.5 impareremo a sommare l'ultima serie (v. Esercizio 2.12), la cui somma è pari a $\pi^4/90$. In conclusione abbiamo ottenuto:

$$J = \frac{\pi^4}{15} \,.$$

2.2 Serie di potenze

Studiamo ora in dettaglio una classe speciale di serie di funzioni; si tratta delle serie di potenze, cioè serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove a_n sono numeri reali assegnati; x varia in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ è dato. Diciamo subito che serie di questo tipo trovano la loro collocazione più naturale nel campo complesso e perciò considereremo sin dal principio serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n, z_0 \in \mathbb{C}$$

dove z varia in un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$. Con un semplice cambiamento di variabile, si può assumere $z_0 = 0$ e ricondursi allo studio delle serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{2.6}$$

È evidente che tutte le serie del tipo (2.6) convergono almeno in un punto: $z = 0$; si tratta di vedere se convergono in qualche altro punto; il seguente lemma precisa, dal punto di vista geometrico, l'insieme di convergenza.

Lemma 2.8 - *Se una serie di potenze converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge (assolutamente) in ogni punto z con $|z| < |z_0|$.*

Dimostrazione - Per ipotesi, la serie $\sum a_n z_0^n$ è convergente e perciò il suo termine generale tende a zero: $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$; ne segue che il suo modulo sarà definitivamente minore di 1, cioè esiste N tale che

$$|a_n z_0^n| < 1 \quad \text{per } n > N \,.$$

Risulta allora, per $n > N$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \,;$$

poiché la serie (geometrica) $\sum |z/z_0|^n$ converge se $|z/z_0| < 1$, nella stessa ipotesi la serie data risulta convergente (assolutamente) per il teorema del confronto □

Il Lemma ci dice non solo che, se la serie (2.6) converge in z_0, converge anche nel cerchio: $|z| < |z_0|$, ma anche che, se non converge in z_0, non può convergere neppure per $|z| > |z_0|$; perciò l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ in cui una serie del tipo (2.6) converge è un cerchio con centro nell'origine ed un certo raggio r: tale cerchio si chiama *cerchio di convergenza* e r si dirà *raggio di convergenza.*

Una definizione più precisa è la seguente: sia $A \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme di convergenza per la serie (2.6) e sia $E = \{|z| : z \in A\}$ l'insieme dei numeri reali non negativi che sono i moduli dei numeri che stanno in A: tale insieme non è vuoto, poiché contiene almeno lo zero. Definiamo allora il raggio di convergenza r ponendo:

$$r := \sup E$$

Può essere:

i) $r = 0$; la serie converge solo per $z = 0$.

ii) $r = +\infty$; la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

iii) $0 < r < +\infty$; la serie converge per $|z| < r$, non converge per $|z| > r$; nessuna informazione abbiamo per $|z| = r$.

Si noti che, all'*interno* del cerchio di convergenza, la serie *converge assolutamente*; possiamo perciò determinare il raggio di convergenza applicando i criteri di convergenza assoluta, cioè studiando la convergenza della serie $\sum |a_n||z|^n$.

Il seguente teorema è utile per il calcolo del raggio di convergenza.

Teorema 2.9 - *Data la serie* $\sum a_n z^n$, *sia*

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{2.7}$$

Allora $r = 1/l$ *è il raggio di convergenza (si intende che* $r = 0$ *se* $l = +\infty, r = +\infty$ *se* $l = 0$*).*

Dimostrazione - Sia $0 < l < +\infty$. Poiché l è l'estremo inferiore dei numeri definitivamente maggioranti della successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ (v. Proposizione 4.3.14 Vol. 1), fissato $\varepsilon > 0$, si avrà

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon \qquad \text{definitivamente e}$$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > l - \varepsilon \qquad \text{per infiniti indici } n_k\,.$$

Allora, sia $|z| < 1/l$; posso scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che sia $|z|(l+\varepsilon) = q < 1$; utilizzando la prima disuguaglianza risulterà allora, definitivamente, $|a_n||z|^n < q^n$; la serie data è perciò convergente per il teorema del confronto. Sia $|z| > 1/l$; posso scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che sia $|z|(l-\varepsilon) \geq 1$; utilizzando la seconda disuguaglianza risulterà allora, definitivamente, $|a_{n_k}||z|^{n_k} \geq 1$; la serie data perciò non può convergere.
Lasciamo per esercizio la discussione dei casi $l = 0$ e $l = \infty$. □

Invece di usare il criterio della radice, si può anche usare il *criterio del rapporto*, meno generale ma spesso più conveniente; una formulazione semplificata, ma utile, è la seguente:

Proposizione 2.10 - *Data la serie* $\sum a_n z^n$, *se esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

allora $r = 1/l$ *è il raggio di convergenza.*

L'affermazione è una conseguenza immediata del Corollario 8.2.9 volume 1 applicato alla serie $\sum |a_n||z|^n$.

***Esempio* 2.5** - Le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

hanno, rispettivamente, i seguenti raggi di convergenza: $0, \infty, 1, 1$. Verifichiamolo

per la terza serie, usando il criterio del rapporto:

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|} =$$

$$= \frac{|\alpha - n|}{n+1} \to 1 \quad \text{per } n \to \infty\,.$$

Consideriamo ora le serie con raggio di convergenza $r > 0$; esse definiscono, per $|z| < r$, una funzione $f(z)$, la loro *somma*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,,\ |z| < r\,. \tag{2.8}$$

Ci proponiamo di studiare le proprietà di f e le sue relazioni con i coefficienti della serie.

Proposizione 2.11 -

i) *La serie* (2.8) *converge uniformemente in ogni cerchio:* $|z| \leq r'$, *con* $r' < r$.

ii) *La somma* $f(z)$ *è continua in* $|z| < r$.

Dimostrazione - i) La serie (2.8) converge assolutamente nel punto (dell'asse reale positivo) $z = r'$, poiché è interno al cerchio di convergenza; cioè converge la serie numerica $\sum |a_n| r'^n$; d'altra parte, se $|z| \leq r'$, risulta $|a_n z^n| \leq |a_n| r'^n$; la serie (2.8) allora converge uniformemente, in virtù del criterio di Weierstrass.

ii) La somma $f(z)$ della serie (2.8) risulta continua in ogni cerchio: $|z| \leq r'$, con $r' < r$, essendo la somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue; per l'arbitrarietà di r', $f(z)$ è continua nel cerchio: $|z| < r$. □

Proposizione 2.12 -

i) *La serie delle derivate della serie* (2.8) *è ancora una serie di potenze che ha lo stesso cerchio di convergenza della* (2.8).

ii) *La somma* $f(z)$ *della serie* (2.8) *è derivabile (in senso complesso) con derivata continua in* $|z| < r$; *la sua derivata* $f'(z)$ *è la somma della serie delle derivate.*

Dimostrazione - i) La serie delle derivate è $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ la quale, cambiando l'indice di sommatoria da n in $n+1$, può anche scriversi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \tag{2.9}$$

È dunque una serie di potenze con coefficienti $b_n = (n+1)a_{n+1}$.

Scriviamo ora

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{n+1}\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} .$$

Risulta allora (applicando il teorema 2.9, tenuto conto che: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$) che la serie (2.9) ha lo stesso raggio di convergenza della serie (2.8).

ii) Sia $g(z)$ la somma della serie (2.9); per quanto dimostrato nella proposizione 2.11, essa è continua in $|z| < r$. Inoltre, scrivendo $z = x + iy$, possiamo applicare il teorema di derivazione di una serie (nella forma ricordata nell'Osservazione 2.1); abbiamo, in *ogni* cerchio $|z| \le r'$, con $r > r'$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x+iy)^n = g(z)$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n =$$

$$= i\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x+iy)^n = ig(z) ;$$

cioè f_x e f_y sono continue e soddisfano la relazione (di Cauchy–Riemann): $f_y = if_x$ in $|z| \le r'$; per l'arbitrarietà di r', la relazione vale in $|z| < r$; la funzione $f(z)$ è quindi derivabile in senso complesso (Teor. 7.2.2 Vol. 1), cioè olomorfa, nel cerchio $|z| < r$, e risulta $f'(z) = g(z)$. □

Proposizione 2.13 -

i) *La somma $f(z)$ della serie* (2.8) *è di classe C^∞ in $|z| < r$.*

ii) *$\forall k \in \mathbb{N}$, la derivata $f^{(k)}(z)$ è la somma della serie ottenuta derivando la* (2.8) *termine a termine k volte.*

iii) *Tra i coefficienti a_k della serie* (2.8) *e le derivate della somma $f(z)$ sussistono le seguenti relazioni:*

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0) \qquad \forall k \in \mathbb{N} . \tag{2.10}$$

Dimostrazione - Le affermazioni i) e ii) seguono immediatamente dalla proposizione 2.12, applicata ripetutamente alle derivate successive della serie (2.8).

Derivando k volte questa serie otteniamo

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+k)a_{n+k}z^n .$$

Prendendo $z = 0$ nell'espressione precedente, otteniamo la (2.10). □

I teoremi precedenti non ci danno informazioni circa la convergenza della serie sulla circonferenza $|z| = r$; per stabilire il carattere della serie in questi punti è necessaria un'analisi specifica.

Esempi

2.6. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ non converge in alcun punto della circonferenza $|z| = 1$; essa diverge a $+\infty$ per $z = 1$ ed è irregolare in ogni altro punto $z = e^{i\theta}$ $(0 < \theta < 2\pi)$; infatti risulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta + i\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\theta .$$

2.7. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ diverge a $+\infty$ per $z = 1$ (serie armonica); converge (non assolutamente) in ogni altro punto $z = e^{i\theta}(0 < \theta < 2\pi)$ (Esempio 8.2.16 Vol. 1).

2.8. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge assolutamente e uniformemente in ogni punto della circonferenza $|z| = 1$; infatti essa è maggiorata in modulo dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ convergente.

Quanto alla somma della serie negli eventuali punti del cerchio di convergenza in cui essa converge vale il seguente teorema.

Teorema 2.14 - (di Abel) (*). *Sia $\sum a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza r e somma $f(z)$. Se la serie converge in un punto $re^{i\theta_0}$ (per un certo θ_0: $0 \le \theta_0 < 2\pi$) con somma S, allora converge uniformemente sul raggio che unisce il centro 0 con*

(*) Niels Abel, matematico norvegese (1802–1829).

questo punto e risulta

$$\lim_{\rho \to r-} f(\rho e^{i\theta_0}) = S \ . \tag{2.11}$$

Dimostrazione - Possiamo senz'altro assumere $\theta_0 = 0$ e $r = 1$; infatti a questo caso ci possiamo sempre ricondurre con un cambio di variabile, ponendo $z = re^{i\theta_0}w$ (fig. 3.4).

Sia dunque, per ipotesi, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente con somma S e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ per $0 \le x < 1$. Dalla formula di sommazione per parti (formula 8.2.9 Vol. 1), si ha, posto $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x^n = \sum_{n=p}^{q-1} S_n(x^n - x^{n+1}) + S_q x^q - S_{p-1}x^p \ .$$

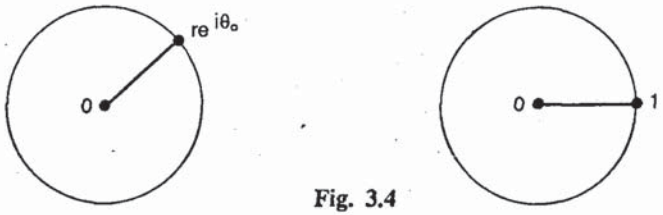


Fig. 3.4

D'altra parte è facile verificare che

$$\sum_{n=p}^{q-1} S(x^n - x^{n+1}) + Sx^q - Sx^p = 0 \ .$$

Dunque si può scrivere

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x^n = \sum_{n=p}^{q-1} (S_n - S)(x^n - x^{n+1}) + (S_q - S)x^q - (S_{p-1} - S)x^p \ .$$

Sia $\varepsilon > 0$ e p_0 tale che $|S_n - S| < \varepsilon$ per $p \ge p_0$; allora per $p > p_0$ e per ogni $x \in [0,1]$ si ha:

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n x^n \right| \le \varepsilon \left| \sum_{n=p}^{q-1} (x^n - x^{n+1}) + x^q + x^p \right| = 2x^p \varepsilon \le 2\varepsilon \ .$$

Ciò prova la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sull'intervallo $[0,1]$; la sua somma $f(x)$ è perciò una funzione continua su tale intervallo, cioè $\lim_{x \to 1-} f(x) = S$. □

***Esempio* 2.9.** - Nell'esempio 2.3. abbiamo ricavato

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \qquad x \in (-1,1) \ ;$$

la serie sopra scritta converge anche per $x = -1$ (per il criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno); abbiamo perciò, applicando il teorema di Abel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

come avevamo già anticipato nell'Esercizio 8.2.7 volume 1.

Tutti i risultati sopra esposti nel campo complesso valgono, in particolare, nel campo reale, cioè per serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \ . \tag{2.12}$$

Queste serie convergeranno perciò (assolutamente) in un intervallo $(-r, r)$ e uniformemente in ogni intervallo $[-r', r']$ con $0 < r' < r$; la somma $f(x)$ della serie (2.12) è di classe $C^\infty((-r,r))$ e valgono le relazioni (2.10).

In particolare $f(x)$, essendo continua, risulterà integrabile in ogni intervallo contenuto in $(-r, r)$ e potremo applicare il teorema 2.7 di integrazione per serie. Integrando sull'intervallo $(0, x)$, per ogni $x \in (-r, r)$, otteniamo una primitiva di $f(x)$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ . \tag{2.13}$$

La serie che compare nella (2.13) si chiama *serie integrale* della (2.12); essa è ancora una serie di potenze, che, per la proposizione 2.12, ha lo stesso raggio di convergenza della (2.12).

***Esempio* 2.10** - Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

(si osservi che la funzione integranda è continua anche nell'origine, poiché tende a 1 per x tendente a 0). Per quanto visto nell'esempio 2.9 possiamo scrivere:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

e la serie ottenuta converge uniformemente in $[0,1]$; possiamo allora applicare il teorema di integrazione per serie sull'intervallo $[0,1]$; otteniamo:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n\frac{x^n}{n+1}dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

come vedremo nel prossimo paragrafo (formula 2.58)).

2.3 Funzioni analitiche

Nel precedente paragrafo abbiamo esaminato le proprietà della somma di una serie di potenze: esse sono descritte nella proposizione 2.13. Mettiamoci ora dal punto di vista contrario, partiamo, cioè, da una qualsiasi funzione (necessariamente di classe C^∞) e domandiamoci se questa è la somma di una serie di potenze.

Trattiamo separatamente il caso reale dal caso complesso. Sia dunque f di classe $C^\infty(A), A \subseteq \mathbb{R}$. Naturalmente, poiché le serie di potenze convergono in intervalli dell'asse reale, del tipo (x_0-r, x_0+r), mentre la nostra funzione potrebbe essere definita in un dominio A di forma diversa, la domanda va riformulata più correttamente: preso $x_0 \in A$, in un intervallo (x_0-r, x_0+r) tutto contenuto in A è possibile rappresentare f come somma di una serie di potenze? In caso affermativo, tenuto conto che dovrebbero valere le (2.10) si scriverebbe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x \in (x_0-r, x_0+r) \tag{2.14}$$

e, in particolare, se $x_0 = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad x \in (-r,r)\,. \tag{2.15}$$

La serie (2.14) si dice *serie di Taylor* (relativa al punto x_0) della funzione f (la (2.15) si dice anche *serie di McLaurin*); la funzione f, se vale la rappresentazione (2.14), si dirà *sviluppabile in serie di Taylor* in (x_0-r, x_0+r).

Ci riferiremo ancora a serie del tipo (2.15), lasciando allo studente il compito di trasferire i risultati alle serie più generali di tipo (2.14).

Il seguente esempio mostra che la risposta alla domanda sopra formulata è negativa.

***Esempio* 2.11** - La funzione

$$f(x) = \exp(-1/x^2) \qquad \text{se } x \neq 0\,,\ f(0) = 0$$

(rappresentata nel diagramma n. 24, Vol. 1) è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$; essa e tutte le sue derivate sono nulle nell'origine. Se perciò scriviamo la serie (2.15), questa ha i termini tutti nulli; pertanto la sua somma è $0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e non coincide con f in alcun intorno dell'origine; dunque la funzione f non è sviluppabile in serie di Taylor in alcun intorno dell'origine, pur essendo C^∞ su tutta la retta.

Cerchiamo allora condizioni sufficienti a garantire la sviluppabilità in serie di Taylor. Conviene partire dalla formula di Taylor (formula (6.2.21 Vol. 1)):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + E_n(x)$$

valida per ogni n dal momento che $f \in C^\infty((-r,r))$. Le somme

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

sono le somme parziali della serie di Taylor. Dimostrare che $s_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ equivale dunque a dimostrare che il resto $E_n(x) \to 0$.

■ **Teorema 2.15** - *Sia $f \in C^\infty((-r,r))$ ed esista una costante M, indipendente da n e da x, tale che si abbia, definitivamente,*

$$\sup_{(-r,r)} |f^{(n)}(x)| \leq M n!\, r^{-n}\,; \tag{2.16}$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor in $(-r,r)$.

Dimostrazione - Scriviamo il resto nella forma di Lagrange (formula (6.2.23 Vol. 1)):

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (c \text{ compreso tra } 0 \text{ e } x)\,.$$

Risulta allora, tenuto conto della (2.16), per n abbastanza grande,

$$|E_n(x)| \leq M\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1}.$$

Essendo $|x|/r < 1$, il resto $E_n(x)$ tende a zero quando n tende all'infinito. □

Osservazione 2.2 - La (2.16) è soddisfatta se le derivate $f^{(n)}(x)$ sono limitate uniformemente rispetto a n (o, come anche si dice, sono equilimitate), cioè se:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \qquad \forall x \in (-r,r) \tag{2.17}$$

con M indipendente da n e da x; basta osservare infatti che $n!/r^n$ è definitivamente > 1 qualunque sia $r > 0$.

Più in generale, la (2.16) è soddisfatta se risulta, definitivamente,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n \qquad \forall x \in (-r, r) \ . \tag{2.18}$$

Definizione 2.1 - *Una funzione $f: \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ si dice analitica (in senso reale) nel punto $x_0 \in A$ se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0. Si dirà analitica nell'aperto A se è analitica in ogni punto di A.*

Passando al campo complesso, le cose diventano più semplici; ma ci limitiamo ad enunciare il risultato principale, poiché esso fa parte della teoria delle funzioni olomorfe (cioè derivabili in senso complesso), teoria che supera i limiti di questa trattazione.

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto $A \subseteq \mathbf{C}$. Come abbiamo già ricordato in 7.2.3 volume 1, l'esistenza della derivata prima (in senso complesso) implica (senza altre condizioni) l'esistenza delle derivate di ogni ordine; cioè una funzione olomorfa in A è di classe $C^\infty(A)$; dunque, preso un punto $z_0 \in A$, possiamo scrivere la serie (di Taylor):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

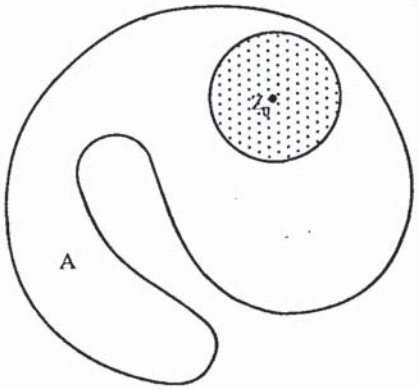


Fig. 3.5

Come ha dimostrato Cauchy, questa serie ha raggio di convergenza pari alla distanza di z_0 dalla frontiera ∂A di A (fig. 3.5); la somma di questa serie coincide con $f(z)$ nel cerchio di convergenza. In altre parole, *ogni funzione olomorfa in un aperto A è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di ogni punto $z_0 \in A$.* Per questa ragione tali funzioni sono dette anche *analitiche*. Si osservi la differenza, per quanto riguarda la regolarità, tra le funzioni di variabile reale e le funzioni di variabile complessa. Mentre nel campo reale esiste tutta una gerarchia di classi di funzioni sempre più regolari

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset \ldots \supset C^\infty(A) \supset \text{ Analitiche}(A)$$

nel campo complesso abbiamo soltanto

$$C^0(A) \supset C^1(A) = C^2(A) = \cdots = C^\infty(A) = \text{ Analitiche}(A) \ .$$

Passiamo ora in rassegna le principali funzioni sviluppabili in serie di Taylor.

Serie esponenziale. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ . \tag{2.19}$$

Infatti la serie che compare nella (2.19) converge su tutto $\mathbb{R}$; che la sua somma sia e^x segue dalla formula di Taylor (con $x_0 = 0$) per la funzione $f(x) = e^x$ (Esempio 6.2.12 a Vol. 1) osservando che, $\forall r > 0$

$$\sup_{(-r,r)} |f^{(n)}(x)| = \sup_{(-r,r)} e^x = e^r \ ; \tag{2.20}$$

perciò la (2.17) è soddisfatta con $M = e^r$.

L'uguaglianza (2.19) vale anche nel campo complesso; infatti la funzione e^z è olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ (Esempio 7.2.13 Vol. 1) e perciò sviluppabile in serie di Taylor; d'altra parte le maggiorazioni (2.20) valgono anche se si sostituisce la variabile complessa z al posto della variabile reale x e il cerchio $|z| < r$ al posto dell'intervallo $(-r, r)$.

Dalla (2.19) si ricava anche:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \ . \tag{2.21}$$

Per mezzo di queste formule si calcolano usualmente le potenze del numero e; per esempio, ponendo, nella (2.21), $x = 1/2$, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - 1 + \frac{1}{2^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} - \frac{1}{2^5 \cdot 5!} + \cdots \approx 0.10651$$

valore approssimato per difetto con un errore non superiore a $1/(2^6 \cdot 6!) \approx 0.00002$.

Ponendo, nella (2.21), x^2 al posto di x, si ottiene

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \ . \tag{2.22}$$

Integrando questa serie termine a termine, si ottiene una rappresentazione per serie della *funzione degli errori* di Gauss:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ . \tag{2.23}$$

Serie iperboliche. Combinando la (2.19) con la (2.21) si ottengono le serie, convergenti su tutto $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.24}$$

$$\operatorname{Ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,. \tag{2.25}$$

Serie circolari. Dalle formule di Taylor (con $x_0 = 0$) per le funzioni sin e cos, con ragionamento analogo a quello tenuto per la funzione esponenziale, si ottengono gli sviluppi, validi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.26}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,. \tag{2.27}$$

Le formule (2.24) ... (2.27) valgono anche in tutto il campo complesso: si ottengono così le rappresentazioni per serie delle funzioni $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$, $\sin z$, $\cos z$, definite in 5.3.7 volume 1. Per mezzo di queste rappresentazioni si ritrovano facilmente alcune proprietà già viste, come: $\sin z = -i \operatorname{Sh}(iz)$, $D \operatorname{Ch} z = \operatorname{Sh} z$, etc. etc.

Le serie viste finora hanno raggio di convergenza ∞; le loro somme sono dunque funzioni olomorfe in tutto $\mathbb{C}$; tali funzioni sono anche dette *trascendenti intere.* Vediamo ora alcune serie con raggio di convergenza finito.

Abbiamo incontrato più volte la *serie geometrica*:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1 \,. \tag{2.28}$$

Lo studente ricavi l'uguaglianza (2.28) partendo dalla funzione $f(x) = (1-x)^{-1}$; si calcoli le derivate $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$ e verifichi che la condizione (2.16) non può essere soddisfatta se $r > 1$.

Integrando termine a termine la (2.28) tra 0 ed x si ottiene la *serie logaritmica*, già vista:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < 1 \,. \tag{2.29}$$

Come abbiamo già osservato a proposito del teorema di Abel, l'uguaglianza (2.29) vale anche per $x = -1$, fornendo una rappresentazione di $\log 2$ per mezzo di una serie (troppo lentamente convergente per essere utilizzata con profitto per il calcolo di $\log 2$).

Sostituendo, nella (2.28), ad x, $-x^2$, otteniamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1 \,. \tag{2.30}$$

Integrando termine a termine questa serie si ottiene la *serie dell'arcotangente*:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1 \,. \tag{2.31}$$

Per il teorema di Abel, l'uguaglianza (2.31) vale anche per $x = \pm 1$ e fornisce

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \,. \tag{2.32}$$

Dalla (2.29) si ottiene facilmente anche il seguente sviluppo:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1 \,. \tag{2.33}$$

Serie binomiale. Nell'esempio 6.2.18*e* volume 1, abbiamo ricavato la formula di Taylor (con $x_0 = 0$) per la funzione $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + E_n(x)$$

dove $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k!$ sono i coefficienti binomiali. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

è detta serie binomiale; naturalmente, se $\alpha \in \mathbb{N}$, essa è una somma finita poiché $\binom{\alpha}{n} = 0$ per $n > \alpha$ e rappresenta precisamente lo sviluppo del binomio $(1+x)^\alpha$; se $\alpha \notin \mathbb{N}$, essa è una somma infinita, con raggio di convergenza 1, come abbiamo mostrato nell'esempio 2.5. Se si indica con $f(x)$ la somma della serie, si ha, derivando termine a termine:

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\binom{\alpha}{m+1} x^m + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right\} x^n = \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x)\end{aligned}$$

Posto allora

$$g(x) = (1+x)^{-\alpha} f(x) \, .$$

abbiamo

$$g'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) = 0$$

e cioè $g(x) =$ costante; essendo $g(0) = 1$ deve essere $g(x) = 1$ per ogni x e perciò $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Abbiamo così ottenuto il risultato, dovuto a Newton:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \, , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, , \quad |x| < 1 \, . \tag{2.34}$$

Dalla (2.34), ponendo $\alpha = -1/2$ e $-x^2$ al posto di x, ricaviamo la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n} \qquad |x| < 1 \, . \tag{2.35}$$

Integrando ambo i membri della (2.35) tra 0 e x otteniamo lo sviluppo dell'arcoseno:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1 \, . \tag{2.36}$$

La (2.34) si presta al calcolo delle radici dei numeri. Per esempio, si voglia calcolare $\sqrt{67}$. Si prende il quadrato più vicino a 67, cioè 64, e si scrive

$$\sqrt{67} = \sqrt{64+3} = 8\sqrt{1+3/64} =$$
$$= 8\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{64} - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{64}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{64}\right)^3 - \cdots\right\} .$$

2.4 Serie di Fourier

Veniamo ora a trattare serie di funzioni di un genere diverso da quello considerato nei due paragrafi precedenti: invece di potenze x^n, consideriamo funzioni trigonometriche $\sin nx$ e $\cos nx$.

Precisamente, si chiama *serie di Fourier* una serie del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{2.37}$$

dove a_n, b_n sono numeri reali complessi o assegnati, x una variabile reale. Come vedremo, queste serie risultano di grandissima utilità in svariate applicazioni.

Vale forse la pena di notare che, se si vuol studiare una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sul cerchio di convergenza, posto $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, si è ricondotti a studiare la serie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} i a_n r^n \sin n\theta$$

che è appunto una serie di Fourier.

Cominciamo lo studio delle serie (2.37) facendo alcune semplici osservazioni preliminari.

1. *Periodicità.* Le funzioni $\sin nx$ e $\cos nx$ sono *periodiche*: il minimo periodo comune a tutte quante è 2π. Se perciò la serie converge in un punto $\overline{x}$, convergerà, con la stessa somma, anche in $\overline{x} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); perciò *la somma di una serie di Fourier come la* (2.37) *è una funzione periodica di periodo* 2π.

2. *Condizione sufficiente di convergenza.* Una semplice condizione sufficiente di convergenza per la (2.37) è che le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

siano convergenti. In tal caso, anzi, essendo

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|$$

la serie (2.37) risulta assolutamente e uniformemente convergente su tutto $\mathbb{R}$; la sua somma è allora una funzione continua.

3. *Relazione tra i coefficienti a_n, b_n e la somma della serie.* Ammettiamo, provvisoriamente, che la serie (2.37) sia uniformemente convergente su $\mathbb{R}$ e indichiamo con $f(x)$ la sua somma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, . \tag{2.38}$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (2.38) per $\cos mx$ ($m \in \mathbb{N}$) e integriamo su x da $-\pi$ a π; otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \, dx +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx \, .$$

Essendo le serie uniformemente convergenti, possono essere integrate termine a termine; ricordando le formule (1.21) otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.39}$$

Analogamente, moltiplicando ambo i membri dell'equazione (2.38) per $\sin mx$ e integrando ancora da $-\pi$ a π, otteniamo:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx = b_m \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{2.40}$$

Si osservi che i coefficienti di una serie di Fourier sono legati alla somma della serie da relazioni *integrali*, mentre i coefficienti di una serie di potenze sono legati alla somma da relazioni *differenziali*.

4. *Periodi diversi da* 2π. Il fatto di considerare funzioni di periodo 2π non è limitativo e solo per comodità abbiamo scritto la serie nella forma (2.37); potremmo infatti considerare serie di Fourier costruite con funzioni del tipo

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right), \ \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right) \qquad \tau > 0$$

le quali sono tutte periodiche con periodo τ (Esempio 1.30), cosicché anche la somma $g(y)$ di tali serie (se convergenti!) sarebbe una funzione periodica di periodo τ: le formule (2.38), (2.39), (2.40) sarebbero allora sostituite dalle seguenti:

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right) \tag{2.41}$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(y)\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right)dy \tag{2.42}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(y)\sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right)dy\ . \tag{2.43}$$

Si passa dalle formule (2.38) ... alle (2.41) ... con la sostituzione di variabili

$$x = \frac{2\pi}{\tau}y\ , \qquad f(x) = f\left(\frac{2\pi}{\tau}y\right) = g(y)\ . \tag{2.44}$$

Definizione 2.2 - *Data una qualsiasi funzione τ–periodica g, se gli integrali* (2.42), (2.43) *esistono, anche in senso generalizzato, i numeri a_n, b_n si dicono coefficienti di Fourier della funzione g.*

Se, per una funzione g, possiamo calcolare i coefficienti a_n e b_n, possiamo anche scrivere la corrispondente serie di Fourier: diremo che essa è la serie *associata* alla funzione g, e scriveremo:

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}y\right)\ . \tag{2.45}$$

Il fatto che, per una funzione g, possiamo calcolare i coefficienti a_n, b_n, e dunque possiamo scrivere la serie di Fourier associata, *non implica* che detta serie sia convergente, né che, se convergente, la sua somma coincida con la funzione g; questo problema fondamentale sarà affrontato nel prossimo paragrafo.

Osservazione 2.3 - (*Sul calcolo dei coefficienti; funzioni pari e dispari*). Se $f(x)$ è una funzione τ–periodica, risulta, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+\tau} f(x)dx = \int_0^{\tau} f(x)dx\ . \tag{2.46}$$

Infatti, abbiamo

$$\int_a^{a+\tau} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{\tau} f(x)dx + \int_{\tau}^{a+\tau} f(x)dx\ .$$

Nell'ultimo integrale si faccia la sostituzione: $x = t + \tau$; esso diventa allora

$$\int_0^a f(t+\tau)dt = \int_0^a f(t)dt$$

e perciò cancella il primo integrale a secondo membro.

Così, nelle formule (2.42), (2.43) gli integrali possono essere calcolati sull'intervallo $(0, \tau)$ invece che $(-\tau/2, \tau/2)$, o su qualsiasi altro intervallo di ampiezza τ.

Si osservi anche che, se g è una funzione pari, i coefficienti b_n, dati dalla (2.43), sono tutti nulli; mentre se g è dispari sono nulli tutti i coefficienti a_n; perciò la serie di Fourier associata a una funzione pari è una serie di soli coseni, quella associata a una funzione dispari è una serie di soli seni.

Esempi

2.12. I coefficienti di Fourier della funzione $(x) = x - [x]$ (mantissa di x), periodica di periodo 1, sono:

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos(2\pi n x)dx = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin(2\pi n x)dx = \frac{-1}{\pi n}$$

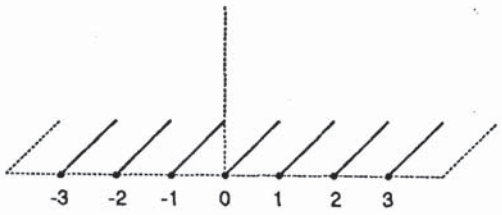


Fig. 3.6 Mantissa di x.

Scriveremo pertanto:

$$(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x) \ . \tag{2.47}$$

Si osservi che, per $x = 0$, il secondo membro della (2.47) vale $1/2$ mentre il primo membro vale 0; non possiamo perciò scrivere $=$ al posto di $\sim$ nella (2.47) (almeno per $x = 0$).

2.13. Sia $f(x)$ il prolungamento periodico della restrizione della funzione x^2 all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (cfr. fig. 3.7); $f(x)$ è funzione pari; i suoi coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \ dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = 0$$

Possiamo perciò scrivere:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \ .$$

Si osservi che, poiché $|a_n| \leq 4/n^2$ e la serie $\sum 1/n^2$ è convergente, la serie di Fourier considerata è assolutamente e uniformemente convergente su tutta la retta.

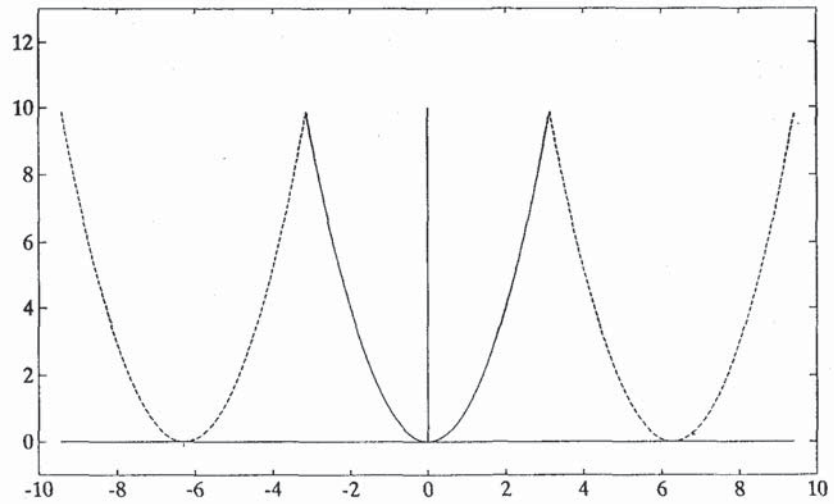


Fig. 3.7 La funzione periodica dell'esempio 2.13.

2.14. La funzione $\operatorname{tg} x$, π–periodica, non ammette coefficienti di Fourier; gli integrali (generalizzati)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \cos(2nx) dx \ , \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \sin(2nx) dx$$

non sono tutti convergenti.

2.15. Sia $f(x)$ il prolungamento periodico della restrizione della funzione $|x|^{-1/2}$ all'intervallo $[-1, 1)$ (fig. 3.8); la funzione non è definita per $x = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$); possiamo completare la definizione ponendo, per esempio, $f(2n) = 0$.

$f(x)$ è funzione pari, di periodo 2; gli integrali generalizzati che definiscono i suoi coefficienti di Fourier sono tutti convergenti; risulta infatti:

$$b_n = 0$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\pi n x) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \int_0^{\pi n} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{4}{\sqrt{\pi n}} \int_0^{\sqrt{\pi n}} \cos(s^2) ds$$

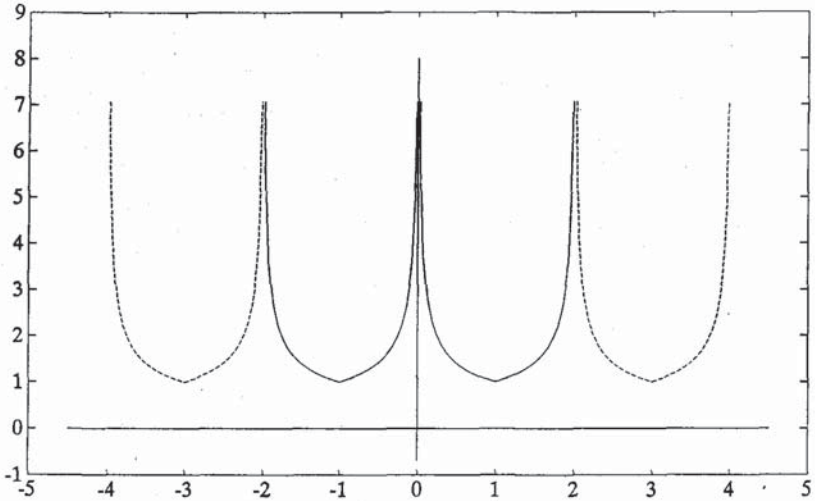


Fig. 3.8 La funzione periodica dell'esempio 2.15.

L'integrale di Frésnel $\int_0^\infty \cos(s^2)ds$ è convergente (v. Esercizio 8.3.1 Vol. 1); il suo valore è $\sqrt{2\pi}/4$. Perciò i coefficienti a_n saranno asintotici a $\sqrt{2/n}$.
Possiamo allora scrivere

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) .$$

Per $x = 0$ la serie a secondo membro è: $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; essa non è convergente, poiché non converge la serie $\sum 1/\sqrt{n}$.

Ancora qualche osservazione, prima di passare alla discussione della convergenza delle serie di Fourier. Nel seguito ci riferiremo per lo più a serie della forma (2.37).

5. *Serie di funzioni ortogonali.* Le funzioni $\cos nx$ e $\sin nx$ sono funzioni ortogonali, nel senso precisato nell'esempio 1.29. Utilizzando notazioni simili a quelle colà introdotte, le formule (2.38), (2.39), (2.40) possono essere riscritte in forma più compatta. Posto infatti

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ , \ \varphi_{2m}(x) = \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \ , \ \varphi_{2m-1}(x) = \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.48}$$

e

$$c_0 = \sqrt{\pi/2}\ a_0 \ , \ c_{2m} = \sqrt{\pi} a_m \ , \ c_{2m-1} = \sqrt{\pi}\ b_m \tag{2.49}$$

possiamo scrivere la (2.38) nella forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2.50}$$

dove i coefficienti c_n sono dati dalla formula

$$c_n = < f, \varphi_n > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)dx \ . \tag{2.51}$$

La (2.50) ci dà una rappresentazione della funzione f (intesa come punto o vettore di uno spazio lineare dotato del prodotto scalare (1.22)) come combinazione lineare (infinita) di versori ortogonali, esattamente come in $\mathbb{R}^n$ un vettore può essere rappresentato come combinazione lineare (finita) dei versori della base canonica: $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2 \ldots, \mathbf{e}^n$. Da questo punto di vista i coefficienti di Fourier c_n sono, per la funzione f, quello che, per un vettore o punto di $\mathbb{R}^n$, sono le sue coordinate cartesiane ortogonali.

6. *Serie di Fourier nel campo complesso.* Sono serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \qquad \gamma_n \in \mathbb{C} \ . \tag{2.52}$$

Procedendo come si è fatto al punto 3., se (per esempio) assumiamo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|$ convergente (*), la serie data converge assolutamente e uniformemente; detta ancora $f(x)$ la sua somma (2π–periodica) abbiamo le formule:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \ , \ \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx \tag{2.53}$$

La seconda delle (2.53) si ottiene moltiplicando ambo i membri della prima per e^{-imx} e integrando su $(-\pi, \pi)$, ricordando (Esempio 1.31) che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 2\pi\delta_{nm} \ .$$

La (2.52) è un modo di scrivere la (2.37) in forma compatta; si passa da una forma all'altra ponendo $\gamma_0 = a_0/2$ e inoltre

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad , \quad a_n = \gamma_n + \gamma_{-n} \\ \gamma_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad , \quad b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n}) \ . \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

(*) Ciò significa che le serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|$ e $\sum_{n=-\infty}^{-1} |\gamma_n|$ sono convergenti, ognuna per conto suo.

7. *Una interpretazione musicale della serie di Fourier.* L'operazione di scomporre una funzione periodica f (di periodo 2π, per esempio) in somma (finita o infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo $\cos nx$ e $\sin nx$ costituisce l'*analisi armonica* della funzione f: il termine

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

si chiama *armonica fondamentale*; il termine $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ $(n = 2, 3, \ldots)$ si chiama *armonica n–esima.* Questa terminologia è derivata dall'acustica.

Quando un diapason, colpito, si mette a vibrare, le sue vibrazioni possono essere descritte da una funzione periodica semplice come

$$x(t) = a \cos \frac{2\pi}{\tau} t \quad \text{oppure} \quad a \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

($x(t)$ misura lo spostamento, al tempo t, di un corno del diapason dalla sua posizione di riposo).

Fig. 3.9

Il numero positivo a misura l'*ampiezza* dell'oscillazione (spostamento massimo) e viene percepito dall'orecchio come *intensità* o *volume di suono;* $1/\tau$ è la *frequenza* tipica del diapason: essa viene percepita dall'orecchio come *altezza* del suono. Il diapason ha la proprietà di emettere suoni *puri*, cioè suoni di una determinata frequenza.

In generale i suoni emessi dagli strumenti musicali (per esempio, una corda del pianoforte) non sono puri, ma risultano dalla sovrapposizione di diverse armoniche. Ciò è dovuto al fatto che una corda, fissata agli estremi, può oscillare in diversi modi, cioè con diverse frequenze: queste frequenze (teoricamente infinite) sono multipli di una *frequenza fondamentale* propria della corda (la corda di un *do* può vibrare, oltre che con la frequenza propria di quella nota, anche con frequenza doppia, corrispondente al *do* dell'ottava superiore, o tripla, corrispondente al *sol* dell'ottava superiore e così via).

Fig. 3.10 Modi diversi di vibrare di una corda con estremi fissi; la frequenza del secondo modo è doppia di quella del primo; quella del terzo è tripla. In un dato modo, i vari punti della corda vibrano, con ampiezza diversa, ma con la stessa frequenza.

La vibrazione effettiva di un dato punto della corda risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni corrispondenti ai singoli modi: essa è perciò descritta da una somma (teoricamente infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo

$$a_n \cos \frac{2\pi n}{\tau} t \quad \text{oppure} \quad b_n \sin \frac{2\pi n}{\tau} t$$

(cioè da una serie di Fourier). In pratica, però, solo alcuni (pochi) termini della serie contribuiscono effettivamente alla vibrazione totale della corda. Il nostro orecchio percepisce il risultato di queste vibrazioni, trasmesse dall'aria, come un suono *regolare*: la nota *do*, la nota *mi*, ... Il numero delle armoniche che si accompagnano all'armonica fondamentale determina il cosiddetto *timbro* del suono (*la stessa nota emessa da una corda di violino o di pianoforte ha un timbro diverso*, così come hanno un timbro diverso le voci maschili e femminili).

Quando più corde vengono percosse contemporaneamente, al nostro orecchio arriva la sovrapposizione delle vibrazioni di ciascuna di queste corde: la vibrazione totale è descritta perciò come una somma di funzioni periodiche di diverso periodo: se i periodi stanno tra loro in particolari rapporti, si ha una sensazione gradevole (per esempio: accordo *do–mi–sol*); altrimenti si può percepire un suono sgradevole (*do-re*).

Se poi si sommano vibrazioni di frequenze qualsiansi (la funzione che rappresenta la vibrazione totale, essendo somma di funzioni con periodi qualsiansi, potrebbe non essere più neanche periodica) si ha una sensazione di suono non più regolare, ma di *rumore*.

2.5 Convergenza delle serie di Fourier

Veniamo ora alla questione fondamentale: data una funzione 2π–periodica, dotata dei coefficienti di Fourier, sotto quali condizioni l'associata serie converge e con quale somma?

Evidentemente, per rispondere a questa domanda, dobbiamo anzitutto precisare quale tipo di convergenza si richiede alla serie data, se puntuale o uniforme o di altro tipo.

Sulla convergenza in media quadratica.

Il seguente Lemma, oltre che illustrare una proprietà importante dei coefficienti di

Fourier, potrà anche suggerirci quale dovrebbe essere la convergenza "più naturale" per le serie di Fourier.

Sia f una funzione 2π-periodica, limitata, integrabile sull'intervallo $[-\pi,\pi]$, cioè $f \in \mathcal{R}(-\pi,\pi)$: ciò garantisce l'esistenza degli integrali (2.39), (2.40).

Sia

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \tag{2.54}$$

la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata alla f. Un'espressione come la (2.54) si chiama *polinomio trigonometrico* di grado n.

Sia

$$\sigma_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin kx \tag{2.55}$$

un altro polinomio trigonometrico dello stesso grado n (con coefficienti qualsiansi).

Lemma 2.16 - *Nelle ipotesi sopra specificate per f, valgono le seguenti affermazioni:*

i) *al variare di σ_n tra tutti i polinomi trigonometrici di grado n, lo scarto quadratico medio*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx$$

risulta minimo se $\sigma_n = s_n$.

ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

iii) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right].$$

La iii) si chiama *disuguaglianza di Bessel.*

Dimostrazione - Con le notazioni introdotte nel punto 5. del precedente paragrafo (formule (2.48) e (2.49)) abbiamo:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k(x)$$

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k \varphi_k(x)$$

(dove i γ_k sono legati agli α_k, β_k da relazioni analoghe alle (2.49), che legano i c_k agli a_k, b_k). Allora risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx = < f - \sigma_n, f - \sigma_n > = \\
&= < f, f > - 2 < f, \sigma_n > + < \sigma_n, \sigma_n > = \\
&= < f, f > - 2\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k < f, \varphi_k > + \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} \gamma_k\gamma_j < \varphi_k, \varphi_j > = \\
&\text{(essendo } < \varphi_k\varphi_j > = \delta_{kj}) \\
&= < f, f > - 2\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k c_k + \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k^2 = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{2n}(c_k - \gamma_k)^2 - \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 .
\end{aligned}$$

L'ultima espressione scritta assume il suo valore minimo quando $c_k = \gamma_k \ \forall k = 0, 1, \ldots, 2n$, cioè quando $\sigma_n = s_n$; ciò prova la i). In tal caso risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 ,$$

che coincide con la ii). Poiché il primo membro della precedente uguguaglianza è ≥ 0, lo stesso deve essere del secondo membro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 .$$

Poiché questa disuguaglianza è valida $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta provata la iii). □

Corollario 2.17 - *I coefficienti di Fourier a_n e b_n di una funzione f 2π-periodica, limitata e integrabile su $[-\pi,\pi]$ sono infinitesimi per $n \to \infty$, cioè:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Ciò segue immediatamente dalla disuguaglianza di Bessel.

Dalla ii) del lemma 2.16 si ricava che, se la disuguaglianza di Bessel è una uguaglianza, *la successione delle somme parziali s_n converge in media quadratica alla funzione f.* Effettivamente, si potrebbe dimostrare che, nelle ipotesi del Lemma, la iii) vale col segno =. Ma, per dimostrare questo risultato, e altri ancora più

significativi, bisogna operare in uno spazio metrico *completo* rispetto alla metrica integrale di ordine 2. Noi non conosciamo, per ora, uno spazio di tal genere; perciò, benché i risultati più semplici e più generali si possano conseguire proprio in un tale spazio, ci occuperemo ora di un altro tipo di risultati, tuttavia importanti e di grande utilità.

Sulla convergenza puntuale.

Studiamo pertanto la convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier. A questo premettiamo alcune definizioni.

Definizione 2.3 -

i) *Una funzione* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice* **continua a tratti** *se è continua in* $[a,b]$ *tranne al più un numero finito di punti* $x_1, \dots, x_N$ *nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro* (*); *scriveremo:*

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = f(x_i+)\ , \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = f(x_i-) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

ii) *Una funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dirà continua a tratti se è tale in ogni intervallo limitato.*

Indichiamo con P_τ la classe delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

i) f è τ–periodica

ii) f è continua a tratti.

P_τ è uno spazio lineare; esso è sufficientemente ampio per molte applicazioni. Osserviamo subito che, se $f \in P_\tau$, f è limitata e integrabile su $[0, \tau]$; perciò gli integrali (2.42) e (2.43) che definiscono i suoi coefficienti di Fourier esistono e possiamo parlare di serie associata alla f.

Considereremo in seguito prevalentemente il caso $\tau = 2\pi$.

La funzione considerata nell'esempio 2.12 appartiene a P_1, quella dell'esempio 2.13 appartiene a $P_{2\pi}$, mentre quella dell'esempio 2.15 non è continua a tratti.

Definizione 2.14 - *Una funzione* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *soddisfa, nel punto* $x_0 \in (a,b)$, *la condizione* (D) (**) *se:*

i) *è derivabile in* x_0, *oppure*

ii) *è continua in* x_0 *e dotata di derivata destra* $f'_+(x_0)$ *e sinistra* $f'_-(x_0)$, *oppure*

iii) *ha una discontinuità di* 1^a *specie in* x_0, *ed esistono finiti i limiti:*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0}\ , \quad \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0}$$

(che indicheremo con $f'^*_+(x_0)$ *e* $f'^*_-(x_0)$ *rispettivamente).*

(*) solo limite destro, o sinistro, se il punto è un estremo dell'intervallo.

(**) D sta per Dirichlet.

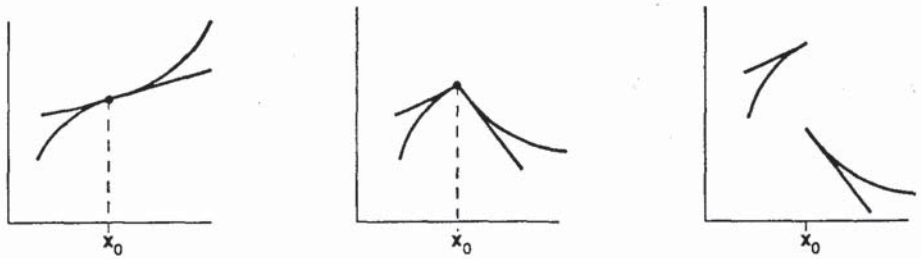


Fig. 3.11 Esempi di funzioni soddisfacenti la condizione (D) nel punto x_0.

Abbiamo il seguente risultato fondamentale.

■ **Teorema 2.18 -** (sulla convergenza puntuale). *Sia* $f \in P_{2\pi}$. *Allora la serie di Fourier della* f *converge in ogni punto* x *di* $\mathbb{R}$ *in cui è soddisfatta la condizione* (D); *la sua somma* $s(x)$ *è data da:*

$$s(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]\ ; \tag{2.57}$$

in particolare, se x *è un punto di continuità per la* f, *la serie converge con somma* $f(x)$.

Prima di dimostrare il teorema esaminiamo alcuni esempi.

Esempi

2.16. La funzione (x) (v. Esempio 2.12) appartiene a P_1 e verifica la condizione (D) in ogni punto di $\mathbb{R}$. Pertanto la sua serie di Fourier

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x)$$

converge in ogni punto di $\mathbb{R}$ con somma

$$s(x) = \begin{cases} (x) & \text{se } x \neq n \\ 1/2 & \text{se } x = n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\ .$$

In particolare, per $x = 1/4$, abbiamo:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)\ ;$$

ritroviamo così il risultato già noto (formula (2.32)):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2.17. La funzione $f(x)$ dell'esempio 2.13 appartiene a $P_{2\pi}$ e verifica la condizione (D) in ogni punto di $\mathbb{R}$. Essendo anche continua su $\mathbb{R}$ abbiamo:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \ .$$

In particolare, prendendo $x = 0$ e $x = \pi$ si trova, rispettivamente,

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \cdots \tag{2.58}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{2.59}$$

Queste serie (e altre dello stesso genere: v. esercizio 2.12) sono state calcolate da Eulero.

Che il teorema esprima solo una condizione *sufficiente* risulta, per esempio, dall'osservazione che, se $f \in P_{2\pi}$ è dispari, la sua serie di Fourier converge senz'altro a 0 nell'origine, indipendentemente dal fatto che la condizione (D) sia soddisfatta oppure no in quel punto.

Un risultato più profondo ottenuto dallo stesso Dirichlet, è quello che enunciamo qui appresso senza dimostrazione.

▪ **Teorema 2.19** - *Sia $f \in P_{2\pi}$; inoltre l'intervallo $[-\pi, \pi]$ possa essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali la funzione $f(x)$ sia monotona; allora la serie di Fourier della f converge in ogni punto con somma data dalla* (2.57).

***Esempio* 2.18** - Sia $f(x)$ il prolungamento periodico della funzione $\sqrt{|x|}$ in $[-1, 1]$ (fig. 3.12). La funzione $f \in P_2$, nei punti $x_k = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ non soddisfa la condizione (D): le "derivate" destra e sinistra sono ∞. Ma le ipotesi del teorema 2.19 sono verificate e possiamo concludere che la serie di Fourier considerata converge a $f(x)$ in ogni punto di $\mathbb{R}$. In particolare, per $x = 0$, troviamo il seguente risultato:

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

cioè, calcolando i coefficienti a_n,

$$\frac{\pi^{3/2}}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{3/2}}$$

essendo

$$\alpha_n = \int_0^{\sqrt{\pi n}} \sin(s^2) ds \ .$$

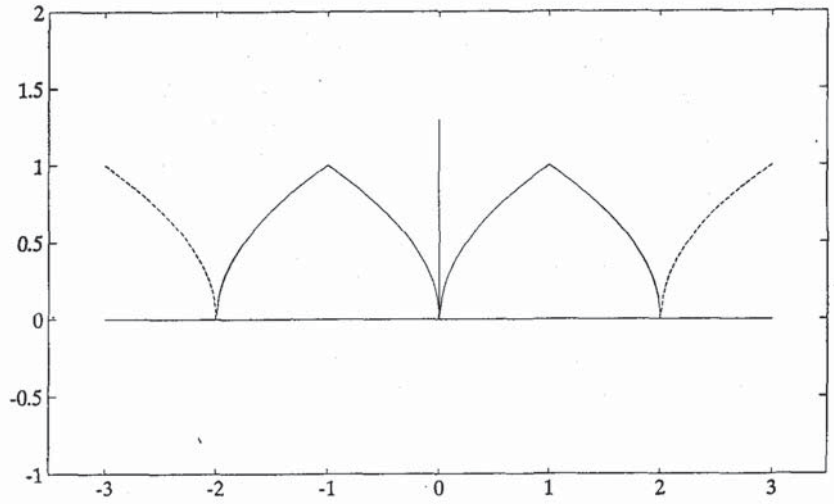


Fig. 3.12 La funzione periodica dell'esempio 2.18.

Sottolineiamo che *la sola continuità* della funzione *non è sufficiente* per la convergenza della serie di Fourier; i controesempi sono però piuttosto complicati.

Per dimostrare il teorema 2.18 abbiamo bisogno del seguente

Lemma 2.20 - (formula di Dirichlet) (*).

i) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{2.60}$$

ii) *Se $s_n(x)$ è la somma parziale n–esima della serie di Fourier* (2.37), *dove i coefficienti sono dati dalle* (2.39) *e* (2.40), *si ha*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{2.61}$$

La (2.61) è detta *formula di Dirichlet*.

(*) Gustav Lejeune Dirichlet, francese (1805–1859).

Dimostrazione - i) Per $n = 0$ la (2.60) è vera poiché si riduce all'identità $1/2 = 1/2$; ammettiamola vera per $n - 1$ e dimostriamola per n. Si ha

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos((n-1)x) + \cos nx = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos nx =$$

$$= \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x + 2\cos nx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} .$$

Essendo $\sin(n - 1/2)x = \sin nx \cos(x/2) - \cos nx \sin(x/2)$, l'ultima espressione scritta prende la forma

$$\frac{\sin nx \cos\frac{x}{2} + \cos nx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} .$$

ii) Tenendo conto dell'espressione dei coefficienti (2.39) e (2.40) si ha:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos ks \cos kx + \sin ks \sin kx)\right\} ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(s - x)\right\} ds =$$

(ponendo $s - x = t$ e ricordando la proprietà (2.46))

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right\} dt .$$

Dalla (2.60) si ottiene allora la (2.61). □

Dimostrazione del teorema 2.18 - Integrando tra 0 e π ambo i membri della (2.60) otteniamo:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{2.62}$$

Possiamo allora scrivere, tenendo conto della (2.61):

$$s_n(x) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt .$$

Posto ora

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t) - f(x_-)}{2\sin(t/2)} & -\pi \le t < 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ \dfrac{f(x+t) - f(x_+)}{2\sin(t/2)} & 0 < t \le \pi \end{cases}$$

la funzione F risulta continua in $[-\pi, \pi]$ eccetto che in un numero finito di punti dove comunque esistono finiti i limiti destro e sinistro; infatti, f soddisfa in ogni punto alla condizione (D), ed inoltre risulta:

$$\lim_{t\to 0+} F(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} \frac{t/2}{\sin(t/2)} = f_+'^*(x)$$

e, analogamente,

$$\lim_{t\to 0-} F(t) = f_-'^*(x) .$$

Si ha allora

$$s_n(x) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin\left(n + \frac{t}{2}\right)t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin\frac{t}{2} \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos\frac{t}{2} \sin nt \, dt .$$

Passando al limite per $n \to \infty$, ricordando le (2.56), otteniamo la tesi. □

Il teorema ora dimostrato può essere esteso anche a funzioni non limitate.
Indichiamo con P_τ^* la classe delle funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

i) f è τ–periodica;

ii) f è continua su ogni intervallo limitato eccetto al più un numero finito di punti (che possono essere punti di discontinuità di 1^a o di 2^a specie);

iii) l'integrale (eventualmente improprio) $\int_0^\tau |f(x)| dx$ è convergente.

P_τ^* è uno spazio lineare. Osserviamo che, se $f \in P_\tau^*$, gli integrali (2.42), (2.43), che definiscono i suoi coefficienti di Fourier, sono tutti convergenti:

$$|a_n| = \frac{2}{\tau}\left|\int_0^\tau f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right)dx\right| \le \frac{2}{\tau}\int_0^\tau |f(x)|dx$$

$$|b_n| = \frac{2}{\tau}\left|\int_0^\tau f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right)dx\right| \le \frac{2}{\tau}\int_0^\tau |f(x)|dx\ .$$

Proposizione 2.21 - *Sia $f \in P_\tau^*$; allora la serie di Fourier di f è convergente in ogni punto x di continuità o di salto della f in cui sia soddisfatta la condizione (D); la sua somma è data ancora dalla* (2.57).

***Esempio* 2.19** - La funzione f dell'esempio 2.15 appartiene a P_τ^*; per la Proposizione 2.21 possiamo affermare che in tutti i punti $x \neq 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ la sua serie di Fourier converge con somma $f(x)$; nei punti $x_k = 2k$ la funzione presenta una discontinuità di 2^a specie; abbiamo già osservato che la sua serie di Fourier non converge per $x = 0$, e quindi nemmeno per $x = \pm 2, \pm 4, \ldots$.

Sulla convergenza uniforme.

Veniamo ora a trattare della convergenza uniforme delle serie di Fourier.

▪ **Teorema 2.22** - (sulla convergenza uniforme). *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$ periodica, continua, con derivata continua eccetto al più in un numero finito di punti in $[-\pi, \pi]$ nei quali è comunque soddisfatta la condizione (D), ii). Allora la serie di Fourier della f converge assolutamente e uniformemente in $\mathbb{R}$. Si osservi, in particolare, che le ipotesi del teorema sono evidentemente soddisfatte per ogni f 2π–periodica di classe $C^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione - Basterà dimostrare che le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

sono convergenti (ricorda l'osservazione al punto 2. del paragrafo precedente).

Nelle ipotesi del teorema la funzione $f'(x)$ è definita in $[-\pi, \pi]$ eccetto che in un numero finito di punti, dove possiamo convenzionalmente porla uguale a zero. $f'(x)$ è così una funzione continua a tratti e 2π–periodica, cioè $f' \in P_{2\pi}$. Siano a_n' e b_n' i suoi coefficienti di Fourier:

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\ dt$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin nt\ dt\ .$$

Con una integrazione per parti su ciascuno dei sottointervalli dove f' è continua, dalle precedenti formule otteniamo

$$a_n' = nb_n\ ,\ b_n' = -na_n$$

essendo a_n e b_n i coefficienti di Fourier della f.

Dalla disuguaglianza di Bessel applicata alla funzione f' risulta poi che le serie $\sum a_n'^2$, $\sum b_n'^2$, e perciò le serie $\sum n^2 a_n^2$, $\sum n^2 b_n^2$ sono convergenti. Ma allora, essendo (ricorda la disuguaglianza: $2ab \le a^2 + b^2$)

$$|a_n| = n|a_n|\frac{1}{n} \le \frac{1}{2}\left(n^2 a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$|b_n| \le \frac{1}{2}\left(n^2 b_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

anche le serie $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$ risultano convergenti. □

Citiamo, senza dimostrazione, un altro criterio di convergenza uniforme "locale", che garantisce, cioè, la convergenza uniforme della serie su intervalli limitati.

Proposizione 2.23 - *Sia $f \in P_{2\pi}$; inoltre, l'intervallo $[-\pi, \pi]$ si possa suddividere in un numero finito di sottointervalli in ognuno dei quali f è monotona; allora la serie di Fourier di f converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui f è continua* (*).

Esaminiamo infine l'integrabilità termine a termine delle serie di Fourier.

Come è noto, l'integrabilità termine a termine di una serie di funzioni è garantita dalla sua convergenza uniforme. Ma se la serie è una serie di Fourier, abbiamo il seguente risultato.

▪ **Teorema 2.24** - (integrale di una serie di Fourier). *Sia $f \in P_{2\pi}$. Per ogni coppia di punti $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ risulta:*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt\ . \tag{2.63}$$

Fissato x_0, la serie a secondo membro converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

Si osservi che, per la validità della (2.63), non solo non abbiamo assunto la convergenza uniforme della serie integranda, ma neanche la convergenza puntuale!

Dimostrazione - La funzione

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x}\left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

(*) La continuità in a e in b deve intendersi sia da destra che da sinistra.

è continua, nulla agli estremi, cosicché può essere prolungata in una funzione 2π–periodica e continua su tutto $\mathbb{R}$. Essa inoltre soddisfa le ipotesi del teorema 2.22; perciò la sua serie di Fourier converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, detti A_n e B_n i suoi coefficienti, abbiamo, con una integrazione per parti come si è fatto nella dimostrazione del teorema 2.22,

$$a_n = nB_n\ ,\ b_n = -nA_n\ .$$

Perciò abbiamo:

$$\int_{x_0}^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt = F(x)-F(x_0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n(\cos nx-\cos nx_0)+B_n(\sin nx-\sin nx_0)\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-b_n\frac{\cos nx-\cos nx_0}{n}+a_n\frac{\sin nx-\sin nx_0}{n}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n\int_{x_0}^{x}\sin nt\,dt+a_n\int_{x_0}^{x}\cos nt\,dt\right\},$$

cioè la tesi. □

Esercizi

1. Dimostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$ converge per ogni $x<0$ e calcolarne la somma; dire dove essa converge uniformemente.

2. Dimostrare che la serie (telescopica) $\sum_{k=1}^{\infty}[x^k/k - x^{k+1}/(k+1)]$ è uniformemente convergente in $[-1,1]$ con somma x; la serie delle derivate però non converge uniformemente nello stesso intervallo, e la serie data non è derivabile termine a termine.

3. Mostrare che la serie (telescopica)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2k}\log(1+k^2x^2)-\frac{1}{2(k+1)}\log(1+(k+1)^2x^2)\right\}$$

è derivabile termine a termine $\forall x\in\mathbb{R}$ pur non essendo uniformemente convergente la serie delle derivate.

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Mac Laurin delle funzioni:

i) $\log\sqrt{1+x^2}$.

ii) $(1+x^2)^{-1/2}$.

iii) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

iv) $1/(1+x+x^2+\cdots+x^n)$.

e indicarne il raggio di convergenza.

(In nessun caso è necessario calcolare le derivate; per la iv) ricorda la formula: $1+x+x^2+\cdots+x^n=(1-x^{n+1})/(1-x)$ $(x\neq 1)$).

5. Trovare il raggio r di convergenza delle seguenti serie; esaminare la convergenza della serie anche per $x=\pm r$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad (r=0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/\log(1+n) \qquad (r=1,\quad x=1 \text{ diverge, } x=-1 \text{ converge})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad (r=4,\quad x=\pm 4 \text{ diverge.})$$

6. *Calcolo di logaritmi.* Né la serie logaritmica (2.29), né la (2.33), sono adatte al calcolo dei logaritmi, perché sono troppo lentamente convergenti. Se nella (2.33) si pone $x=1/(2n+1)$, n intero >0, si ottiene

$$\log\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right] \tag{2.64}$$

La (2.64) si presta assai bene al calcolo dei logaritmi dei numeri $2, 3/2, 4/3, 5/4, \ldots$, poiché la serie a secondo membro converge rapidamente. Per calcolare poi i logaritmi dei numeri naturali, basta osservare che:

$$\log n = \log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n}{n-1}$$

7. *Calcolo di π.* La formula (2.32) non è utile per il calcolo di π, sempre a causa della lenta convergenza della serie a secondo membro. Seguendo un procedimento, dovuto a Machin, poniamo $\operatorname{arctg} 1/5=\alpha$, per cui risulta $\operatorname{tg}\alpha=1/5, \operatorname{tg}2\alpha=5/12, \operatorname{tg}4\alpha=120/119$; vediamo così che 4α è di poco superiore a $\pi/4$. Posto allora $\beta=4\alpha-\pi/4$, risulta $\operatorname{tg}\beta=(\operatorname{tg}4\alpha-1)/(\operatorname{tg}4\alpha+1)=1/239$ e perciò $\operatorname{arctg}1/239=4\operatorname{arctg}1/5-\pi/4$. Sfruttando ora la serie dell'arcotangente (2.31) abbiamo la *formula di Machin*:

$$\begin{aligned}\pi/4 = 4&\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\right)-\\ &-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{2.65}$$

8. Dimostrare la formula:

$$\int_0^1 x^{\alpha x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\alpha^k}{(k+1)^{k+1}} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(Sviluppare $x^{\alpha x} = e^{\alpha x \log x}$ in serie di Mac Laurin e quindi integrare la serie termine a termine, dopo aver verificato la correttezza di tale procedimento).

9. La funzione *seno integrale* è una trascendente non elementare; essa è così definita:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

Dimostrare la rappresentazione per serie, valida $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

10. La funzione *coseno integrale* è così definita per $x > 0$:

$$Ci(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

i) dimostrare che l'integrale improprio converge per ogni $x > 0$;

ii) verificare l'identità

$$Ci(x) = \gamma + \log x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt$$

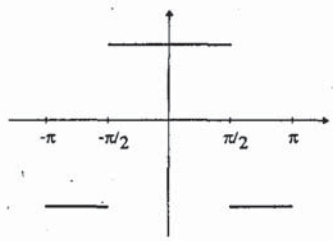
avendo posto $\gamma = \int_0^1 (1-\cos t)/t\,dt - \int_1^{\infty}(\cos t)/t\,dt$ (incidentalmente, si può dimostrare che γ è la costante di Eulero–Mascheroni: v. Esercizio 8.2.13 Vol. 1);

iii) dimostrare la rappresentazione per serie, valida per ogni $x > 0$:

$$Ci = \gamma + \log x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \cdots$$

11. Ricavare gli sviluppi di Fourier sotto indicati; discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie. Le funzioni sono assegnate sull'intervallo base indicato a fianco di ognuna e prolungate per periodicità.

a)

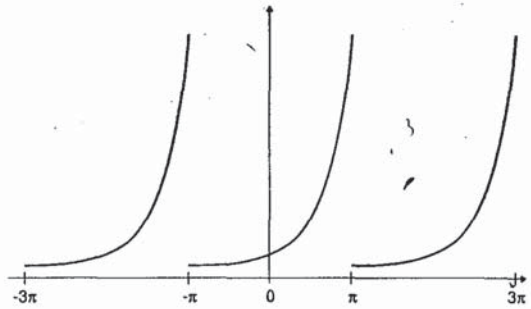


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [0, \pi/2) \\ -1 & \text{in } (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

f pari, 2π – periodica

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$$

b)

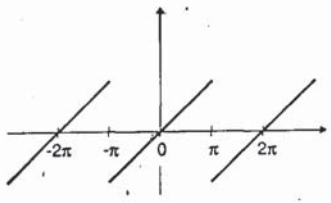


$f(x) = e^x$ in $(-\pi, \pi)$

2π – periodica

$$\frac{\operatorname{Sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}$$

c)

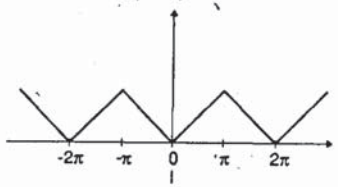


$f(x) = x$ in $(-\pi, \pi)$

2π – periodica

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

d)



$f(x) = |x|$ in $(-\pi, \pi)$

2π – periodica

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

12. Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico della funzione x^4 per $x \in [-\pi, \pi]$. Dedurre la formula, già utilizzata nell'esempio 2.4,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

13. Dimostrare la validità dei seguenti sviluppi per $x \in (-\pi, \pi)$, validi per ogni a complesso, $a \notin \mathbb{N}$:

$$\sin ax = \frac{2}{\pi}\sin a\pi \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k\sin kx}{k^2-a^2}$$

$$\cos ax = \frac{2}{\pi}a\sin a\pi\left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2-a^2}\right)$$

Dedurre le seguenti formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{1}{a\pi} - \frac{\cos a\pi}{\sin a\pi}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(-\frac{1}{a\pi} + \frac{1}{\sin a\pi}\right).$$

14. Riportiamo qui sotto alcune approssimazioni ($n = 0$, $n = 1$ in fig. 3.13a; $n = 10$ in fig. 3.13b) della funzione di cui al punto a) dell'esercizio 11.

La figura 3.13b illustra il comportamento tipico della serie di Fourier in prossimità di un salto della funzione (fenomeno di Gibbs).

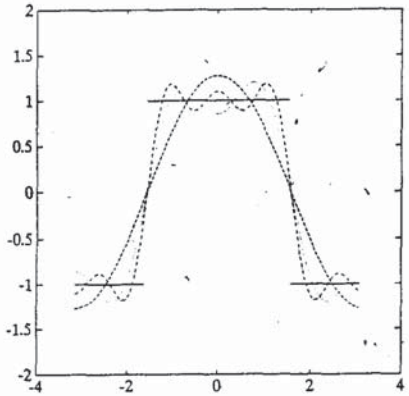


Fig. 3.13 *a*)

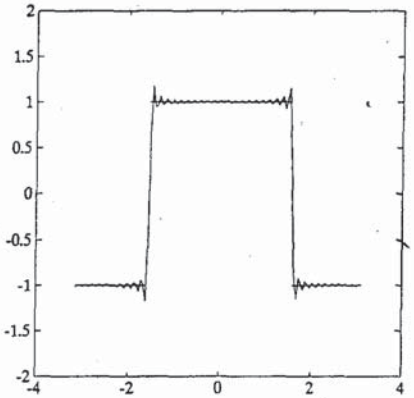


Fig. 3.13 *b*) Fenomeno di Gibbs

15. Osservando che le serie

$$P_r(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx\ ,\ Q_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kx \qquad 0 \le r < 1$$

sono rispettivamente la parte reale e immaginaria della serie

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \cdots \quad \text{con} \quad z = re^{ix}\ ,$$

dedurre le formule:

$$P_r(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\ ,\ Q_r(x) = \frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}\ .$$

16. Dalla serie logaritmica: $\log 1/(1 - z) = z + z^2/2 + z^3/3 + \cdots$ ricavare, con osservazione analoga a quella fatta nel precedente esercizio, le seguenti formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} r^k = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} r^k = \operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1 - r\cos x} \qquad 0 \le r < 1\ .$$

17. Procedendo come nella dimostrazione del teorema 2.2, dimostrare che, se $f \in P_{2\pi}$ è di classe C^k, allora i coefficienti a_n e b_n della funzione f sono tali che:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)\ ,\ b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

per $n \to \infty$.

Sommabilità secondo Cesaro delle serie di Fourier. Se invece della convergenza ordinaria per le serie di Fourier si richiede la convergenza alla Cesàro (v. 8.2.6 Vol. 1), allora la condizione (D) diventa superflua. Si ha infatti il seguente *Teorema di Fejer: la serie di Fourier di ogni funzione $f \in P_\tau$ è sommabile alla Cesàro in ogni punto $x \in \mathbf{R}$ con somma* $(f(x_+) + f(x_-))/2$.

Equazioni differenziali ordinarie 4

Le prime equazioni differenziali comparvero in matematica quasi contemporaneamente alla creazione del calcolo differenziale, in relazione a numerosi problemi fisici, quali, ad esempio, quelli della teoria dell'elasticità. In essi si studiavano movimenti di corpi materiali, come funi o travi, sottoposte a sollecitazioni di vario genere. Fu poi la meccanica celeste la prima scienza a formulare le proprie leggi mediante equazioni differenziali. Lo studio del modello matematico che esse costituivano permise di ricavare informazioni circa le orbite dei pianeti e di prevedere fenomeni naturali quali le eclissi.

Per qualche tempo gli scienziati dell'epoca cercarono di risolvere le equazioni differenziali mediante formule esplicite; ben presto fu chiaro che tale progetto era realizzabile per un numero molto esiguo di equazioni. Nacque così l'esigenza di una teoria sistematica, ancora oggi in evoluzione, che trova i suoi pilastri nei teoremi di esistenza ed unicità, di prolungabilità, di dipendenza continua dai dati e di stabilità.

Alla fine del secolo scorso, le ricerche di Henri Poincaré sul *problema degli n-corpi* (determinazione del movimento di n masse soggette all'azione gravitazionale, come il movimento dei pianeti nel sistema solare), condussero alla cosiddetta *teoria qualitativa*, ovvero allo studio delle proprietà geometriche e topologiche delle soluzioni intese nella loro globalità.

Il compito è oggi facilitato dallo sviluppo dei metodi numerici (questo è l'aspetto quantitativo della teoria) e dell'uso degli elaboratori, che permettono di visualizzare le soluzioni e, conseguentemente, di formulare congetture teoriche.

Proprio la teoria qualitativa e la sua versione moderna, i *sistemi dinamici*, hanno permesso la fioritura di modelli matematici in scienze quali la chimica, la biologia, l'economia, la sociologia.

1. CONCETTI E TEOREMI FONDAMENTALI

1.1 Esempi preliminari

Prima di iniziare uno studio sistematico della teoria, è opportuno esaminare qualche modello matematico, tra i più semplici e noti, che si presenta in alcune scienze applicate e che si costruisce mediante equazioni differenziali.

In tempi recenti si è registrato un crescente interesse verso modelli per l'ecologia delle popolazioni, settore della biologia che studia relazioni individuo–ambiente, evoluzione ed interazione tra specie differenti, relazioni tra intere comunità ed il loro habitat (ecosistemi).

I modelli più elementari sono i seguenti.

***Esempio* 1.1** - *Modello di Malthus.* È, storicamente, il primo modello di dinamica delle popolazioni, dovuto a Malthus nel 1798. Si considera una popolazione che evolve isolata ed i cui unici fattori di evoluzione sono fertilità e mortalità.

Siano:

$N(t)$ = numero di individui presenti al tempo t;
λ = numero di nuovi nati per individuo nell'unità di tempo;
μ = percentuale di individui che muore nell'unità di tempo.

Nelle condizioni descritte il tasso di variazione (relativo) del numero di individui è costante ed uguale a $\lambda - \mu$.

In formule:

$$\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N(t) \ . \tag{1.1}$$

Il numero $\varepsilon = \lambda - \mu$ si chiama *potenziale biologico.*

La (1.1) è un'equazione differenziale *lineare del primo ordine* (per le definizioni precise si veda il paragrafo 1.2).

Usando la formula (1.42) del paragrafo 1.6, si vede che tutte le soluzioni della (1.1) sono della forma

$$N(t) = c\, e^{\varepsilon t} \tag{1.2}$$

dove c è una qualsiasi costante reale. Per selezionare una soluzione si può far uso della conoscenza di N in un dato istante, ad esempio $N(0) = N_0$ (condizione iniziale). In tal caso si ottiene l'unica soluzione

$$N(t) = N_0 e^{\varepsilon t} \ .$$

Si conclude che la popolazione tenderà all'estinzione se $\varepsilon < 0$, mentre crescerà esponenzialmente se $\varepsilon > 0$.

Incidentalmente osserviamo che lo stesso tipo di equazione descrive il processo di disintegrazione di un materiale radioattivo:

$$\dot{y}(t) = -\beta y(t) \qquad \text{(legge del decadimento radioattivo)}$$

dove $y(t)$ è la quantità di materia presente al tempo t e $\beta > 0$ è un coefficiente che dipende dall'elemento considerato.

***Esempio* 1.2** - *Modello logistico.* Il modello di Malthus è irrealistico nella maggioranza dei casi. Una popolazione più numerosa comporta minori risorse e ciò implica un minore tasso di crescita (diminuzione di fertilità ed aumento di mortalità).

Nel 1845 Verhulst propose il seguente modello nel quale si ipotizza che il tasso relativo di crescita decresca linearmente come funzione di N. La legge di evoluzione si può scrivere nel modo seguente:

$$\dot{N}(t) = \varepsilon N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \quad (\varepsilon > 0, k > 0) \ . \tag{1.3}$$

Anche la (1.3) è un'equazione differenziale del 1° ordine, ma *non lineare*; il termine $\varepsilon N(t)$, che rappresenta crescita esponenziale, è mitigato da $-\frac{\varepsilon}{k}N(t)^2$ che corrisponde a competizione all'interno della popolazione e può essere considerato come una specie di "attrito sociale" proporzionale al numero di incontri tra individui nell'unità di tempo.

Anche per la (1.3) è possibile trovare un'espressione esplicita della soluzione soggetta alla condizione iniziale $N(0) = N_0$. Si ottiene (i calcoli si trovano nel paragrafo 1.6, Esempio 1.23)

$$N(t) = \frac{k\, N_0\, e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0\, e^{\varepsilon t}} \ .$$

Si vede (fig. 4.1) che $N(t) \to k$ per $t \to +\infty$ tranne nel caso in cui $N_0 = 0$. La costante k si chiama *capacità dell'ambiente.*

***Esempio* 1.3** - *Modello preda–predatore di Lotka–Volterra.* Negli anni immediatamente successivi al primo conflitto mondiale, nel mare Adriatico si registrò un calo di una certa specie di pesce commestibile e un aumento del suo predatore. Si trattava di capire come mai l'assenza di pesca durante la guerra avesse favorito lo sviluppo del predatore e sfavorito quello della preda. La questione fu posta al matematico italiano Vito Volterra, nel 1924 circa, che risolse il problema con un modello divenuto celebre. Posto $x = x(t)$ = numero di prede e $y = y(t)$ = nu-

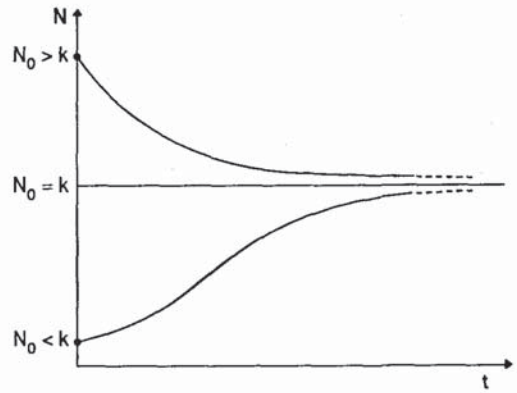


Fig. 4.1 Soluzioni dell'equazione logistica per diverse condizioni iniziali.

mero dei predatori, Volterra formulò le seguenti ipotesi, basate sulle informazioni fornitegli dai biologi: il tasso (relativo) di crescita delle prede è costante in assenza di predatori ma decresce linearmente come funzione di y; i predatori decrescono ad un tasso costante in assenza di prede, ma crescente linearmente con x.

Il modello che ne deriva è il seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}}{x} = a - by \\ \dfrac{\dot{y}}{y} = -c + dx \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}_+ \tag{1.4}$$

Il sistema (1.4) era stato studiato già nel 1920 dal polacco Lotka in relazione ad un problema di cinetica chimica, ma l'analisi di Volterra si spinse considerevolmente oltre: vi ritorneremo in dettaglio più avanti, nell'esempio 3.6.

Passiamo ora ad alcuni esempi fisici.

***Esempi** – Dinamica unidimensionale*

L'equazione di Newton

$$\ddot{y} = F(t, y, \dot{y}) \ , \tag{1.5}$$

regola il moto unidimensionale di un corpo materiale puntiforme. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine (oltre ad y e $\dot{y}$ compare anche $\ddot{y}$). Qui $y, \dot{y}, \ddot{y}$ hanno rispettivamente significato di posizione, velocità, accelerazione.

Il moto è completamente determinato se aggiungiamo alla (1.4) le *condizioni iniziali*

$$y(0) = y_0 \ , \ \dot{y}(0) = y_1 \ . \tag{1.6}$$

Casi particolari notevoli sono:

1.4. $\ddot{y} = -g$. È l'equazione della caduta libera dei gravi nel vuoto; g è l'accelerazione di gravità. La soluzione soddisfacente le (1.6) è data dalla ben nota legge cinematica

$$y(t) = y_0 + y_1 t - \frac{1}{2} g\, t^2 \ .$$

1.5. $\ddot{y} = -\omega^2 y$. Equazione dell'*oscillatore armonico*. Questa equazione modellizza sistemi vibranti sotto una sollecitazione proporzionale allo spostamento dall'equilibrio (legge di Hooke). Un esempio è quello del sistema meccanico in figura 4.2 in cui una massa m è collegata ad una molla di costante elastica k.

1.6. $\ddot{y} = -y + \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} \quad (\varepsilon > 0)$. È la celebre equazione proposta nel 1920 da van der Pol, matematico olandese esperto in aspetti teorici della radioingegneria.

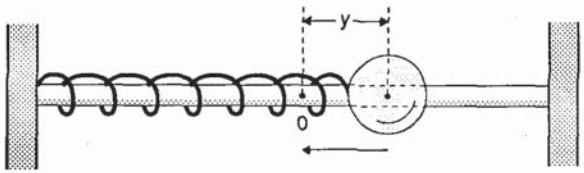


Fig. 4.2

Essa si può interpretare come una perturbazione dell'oscillatore armonico ($\omega^2 = 1$) mediante il termine forzante $\varepsilon(1 - y^2)\dot{y}$ che per valori grandi di y ($|y| > 1$) è una resistenza attiva (dissipa energia) e contrasta il moto, mentre per piccoli valori di y ($|y| < 1$) rappresenta una resistenza negativa (fornisce energia) che nei circuiti elettrici si realizza come "feed back" o controllo retroattivo. Si presenta in questo caso l'interessante fenomeno delle *oscillazioni autosostenute*. Un'analisi dell'equazione di van der Pol è presentata più avanti nel paragrafo 3.7.

1.7. $m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = f(t)$. Questa equazione modellizza un sistema meccanico vibrante in cui le forze in gioco sono:

$-ky$, forza elastica; $-h\dot{y}$, attrito proporzionale alla velocità; $f(t)$, sollecitazione dipendente dal tempo.

Particolarmente importante è il caso in cui $f(t) = A\cos\omega t$: se il coefficiente d'attrito h non è molto grande, si può presentare il fenomeno della risonanza quando ω è vicino alle frequenze caratteristiche proprie del sistema.

Di rilievo è il fatto che lo stesso tipo di equazione è soddisfatta dalla intensità di corrente $I = I(t)$ in un circuito elettrico LRC (L = induttanza, R = resistenza, C = capacità) con una potenza applicata $f(t)$:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + C^{-1} I = f(t) \ .$$

Si deduce che la teoria dei circuiti elettrici oscillanti coincide con quella dei sistemi meccanici vibranti.

Lo studio della precedente equazione è sviluppato negli esercizi 16, 17, 18 della sezione 2.

***Esempio* 1.8** - *Moto dei pianeti.*

Supponiamo che nell'origine del sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$ sia posto un corpo

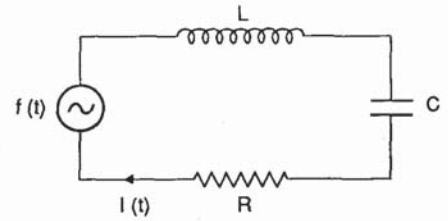


Fig. 4.3

di massa M (sole) il cui campo gravitazionale di forza per unità di massa è dato dal vettore $MG\,\mathrm{grad}(1/r)$, dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e G è la costante di gravitazione.

Il moto di un corpo di massa m ($\ll M$, un pianeta) sotto l'influenza di questo campo di forze è dato dal sistema seguente, di 3 equazioni differenziali non lineari del secondo ordine:

$$\ddot{x} = -MG\frac{x}{r^3}\ ,\ \ddot{y} = -MG\frac{y}{r^3}\ ,\ \ddot{z} = -MG\frac{z}{r^3}\ . \tag{1.7}$$

Dal sistema (1.7) si possono ricavare, ad esempio, le leggi di Keplero sul moto dei pianeti.

1.2 Definizioni e terminologia

Incominciamo lo studio sistematico della teoria precisando la terminologia e le definizioni principali già utilizzate a livello intuitivo negli esempi del paragrafo precedente.

Si chiama *equazione differenziale ordinaria di ordine* n una relazione della forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0\ , \tag{1.8}$$

con $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \supseteq U \to \mathbb{R}$.

Nella (1.8) compare la funzione incognita $y = y(t)$ insieme alle sue derivate fino all'ordine n incluso, *calcolate nello stesso punto*.

L'*ordine* di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. L'aggettivo *ordinaria* si riferisce al fatto che l'incognita è funzione di una variabile. Si parla di equazione a *derivate parziali* quando l'incognita è funzione di più variabili; un esempio è l'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Se nella (1.8) è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))\ , \tag{1.9}$$

con $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \to \mathbb{R}$, l'equazione si dice scritta in forma *normale*. Se, nella (1.8), F è un polinomio di primo grado in $y, y', \dots, y^{(n)}$, l'equazione si dice *lineare*; la forma generale è la seguente:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t)\ . \tag{1.10}$$

Nel caso $a_0(t) \neq 0$ la (1.10) si può scrivere in forma normale.

Se F nella (1.8) o f nella (1.9), non dipende esplicitamente da t, ossia $F(t, y, \dots, y^{(n)}) = F(y, \dots, y^{(n)})$ o $f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) = f(y, \dots, y^{(n-1)})$, l'equazione si dice *autonoma*.

Riferendoci agli esempi del paragrafo precedente abbiamo:

1.1: equazione lineare autonoma del 1° ordine,
1.2: non lineare autonoma del 1° ordine,

1.4 e 1.5: lineari autonome del 2° ordine,
1.6: non lineare autonoma del 2° ordine,
1.7: lineare, non autonoma, del 2° ordine.

Tutte le equazioni sono in forma normale.

Precisiamo ora la nozione di soluzione (locale) di un'equazione differenziale. Ci riferiremo d'ora in poi, salvo un breve cenno negli esercizi, ad equazioni in *forma normale*.

Definizione 1.1 - *Si dice soluzione (o integrale) dell'equazione* (1.9) *una funzione* $\varphi = \varphi(t)$, *definita e differenziabile* n*–volte in un intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *tale che* $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ *e*

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I\ .$$

Più generalmente, si può parlare di *sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, in più funzioni incognite, tutte di una sola variabile.

Il modello di Lotka-Volterra è un esempio di sistema di due equazioni del 1° ordine; il sistema (1.7), che modellizza il moto dei pianeti, è composto da tre equazioni differenziali del secondo ordine.

Noi tratteremo il caso particolarmente importante e, come vedremo subito, sufficientemente generale, dei sistemi di n equazioni del 1° ordine in forma normale, in n funzioni incognite; un generico sistema di questo tipo si può scrivere nel modo seguente: (*)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\ , \end{cases} \tag{1.11}$$

dove le funzioni f_j, $j = 1, \dots, n$, sono definite in una stessa regione D di $\mathbb{R}^{n+1}$ ed $y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$ sono le funzioni incognite.

Introducendo i vettori $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, il sistema (1.11) può essere scritto più concisamente come un'unica equazione vettoriale:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\ . \tag{1.12}$$

Se ogni componente di $\mathbf{f}$ è lineare in $\mathbf{y}$ si dice che il sistema è *lineare*. Se $\mathbf{f}$ non dipende esplicitamente da t ossia $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, si dice che il sistema è *autonomo*.

Definizione 1.2 - *Per soluzione (o integrale) del sistema* (1.11) *si intende una funzione* $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$, *dove* $I \subseteq \mathbb{R}$ *è un intervallo, differenziabile in* I *tale che* $(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \in D$ *e*

(*) Quando inteverranno solo derivate prime o seconde useremo di preferenza la notazione di Newton $\dot{y}, \ddot{y}$.

$$\dot{\varphi}(t) = \mathbf{f}(t, \varphi(t)) \qquad \forall t \in I \ .$$

Un'equazione differenziale di ordine n come la (1.9) si può sempre ridurre ad un sistema del tipo (1.11) ponendo, ad esempio,

$$y_1 = y \ , \ y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)} \ .$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \ . \end{cases} \tag{1.13}$$

Il procedimento di riduzione non è certamente unico.

***Esempio* 1.9** - L'equazione di van der Pol (Esempio 1.6) si riduce, con il procedimento sopra esposto, al sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 \ . \end{cases}$$

Osservando poi che

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} = \frac{d}{dt}\left[\dot{y} + \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\right] ,$$

ponendo

$$z = \dot{y} + \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right) ,$$

l'equazione si riduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = z - \varepsilon\left(\dfrac{y^3}{3} - y\right) \\ \dot{z} = -y \ . \end{cases} \tag{1.14}$$

L'equazione (1.9) ed il sistema (1.13) sono *equivalenti* nel senso seguente: una soluzione φ della (1.9) genera il vettore $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ soluzione del sistema; viceversa, se $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ è soluzione del sistema, allora φ_1 è differenziabile n volte ed è soluzione della (1.9). La teoria delle equazioni di ordine n è pertanto riconducibile a quella dei sistemi di n equazioni del 1° ordine.

L'integrale generale

Occupiamoci ora, brevemente, dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale.

La ricerca delle primitive di una data funzione f, continua su un intervallo, equivale a risolvere l'equazione differenziale

$$y' = f(t)$$

che ha infinite soluzioni del tipo $y(t) = \int f(t)dt + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Anche l'equazione $\dot{y} = ky$ dell'esempio 1.1 ammette una famiglia infinita di soluzioni dipendente da un parametro reale c, data da: $y(t) = c\,e^{kt}$. È allora naturale congetturare che per un'equazione del tipo $\dot{y} = f(t, y)$ l'insieme delle soluzioni sia rappresentato da una famiglia ad un parametro di funzioni, $y = \varphi(t, c)$. Tale congettura è avvalorata dal fatto che ad una famiglia di questo tipo, sotto ragionevoli ipotesi di regolarità per φ, si può sempre associare un'equazione differenziale che è soddisfatta da ogni funzione della famiglia. Infatti, siano φ di classe C^1 e $\partial\varphi/\partial c \neq 0$; si consideri il sistema

$$\begin{cases} y = \varphi(t, c) \\ \dot{y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t, c) \end{cases}$$

dove la seconda equazione è ottenuta derivando la prima rispetto a t. Per il teorema di Dini, si può ricavare (almeno localmente) dalla prima equazione $c = c(t, y)$ che, sostituita nella seconda, fornisce

$$\dot{y} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, c(t, y)) := f(t, y) \ .$$

Più generalmente, si può congetturare che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n o di un sistema di n equazioni del primo ordine sia rappresentato da una famiglia di funzioni, dipendente da n parametri. Tale famiglia prende il nome di *integrale generale*. La ricerca dell'integrale generale o, brevemente, l'*integrazione* dell'equazione, costituiva la questione fondamentale per la teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie. Nel paragrafo finale di questa sezione sono illustrati i metodi di integrazione per alcuni (classici) tipi di equazioni.

Problema di Cauchy e problema ai limiti

Attualmente si preferisce rivolgere l'attenzione a soluzioni che soddisfino condizioni aggiuntive. Di importanza fondamentale è il cosiddetto *problema di Cauchy* o dei *valori iniziali* che prende la forma seguente:

i) per le equazioni (scalari) di ordine n: trovare y di classe C^n tale che

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(\tau) = \xi_0 \\ y'(\tau) = \xi_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

essendo $\tau, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ costanti assegnate.

ii) Per i sistemi: trovare un vettore $\mathbf{y}$ di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}\,, \end{cases}$$

essendo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ assegnati.

Le equazioni $y^{(j)}(\tau) = \xi_j, (j = 0, \ldots, n-1)$ e $\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ prendono il nome di *condizioni iniziali*. Le soluzioni si intendono definite localmente, cioè in un intorno (a priori non precisato) dell'istante iniziale τ.

I problemi risolti negli esempi 1.1 e 1.2 sono precisamente *problemi di Cauchy* per le equazioni $\dot{N} = \varepsilon N$ e $\dot{N} = \varepsilon N(1 - N/k)$. Così pure è un problema di Cauchy il sistema (1.5)-(1.6) (equazione di Newton con posizione e velocità iniziali assegnate).

Altri tipi di condizioni aggiuntive sono altrettanto significative. In connessione con la teoria delle equazioni alle derivate parziali o con il calcolo delle variazioni, si presentano i *problemi ai limiti*, nei quali si prescrivono condizioni agli estremi di un intervallo come, ad esempio, nel caso seguente:

$$\begin{cases} \ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B\,. \end{cases} \tag{1.15}$$

La seconda delle (1.15) richiede alla soluzione di "passare" per i due punti (a, A) e (b, B) del piano (t, y) e perciò la soluzione *deve* essere definita in tutto l'intervallo $[a, b]$. Ciò conferisce ad un problema ai *limiti* un aspetto di *globalità* che quello dei valori iniziali, a priori, non possiede.

Per i suddetti motivi la teoria utilizza metodologie di indagine molto diverse nei due tipi di problemi.

In questo capitolo sviluppiamo i risultati principali riguardanti il problema di Cauchy; un cenno ai problemi ai limiti per equazioni del secondo ordine lineari verrà dato nel paragrafo 2.7.

Interpretazione geometrica e cinematica

Un'interpretazione geometrica dell'equazione $\dot{y} = f(t, y)$, con f definita in un aperto D del piano, è la seguente. Ad ogni punto $(t, y) \in D$ corrisponde, tramite l'equazione, il vettore $(1, \dot{y}) = (1, f(t, y))$, tangente alla curva soluzione in quel punto. L'equazione, quindi, determina in D *un campo di direzioni*: risolvere l'equazione significa trovare le curve che in ogni punto hanno vettore tangente prescritto dal campo.

L'interpretazione data per un'equazione si estende senza difficoltà ai sistemi. Per questi ultimi è forse più efficace un'interpretazione cinematica. Sia $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ con $f: D \to \mathbb{R}^n$, D aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$. Pensiamo alla funzione $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ come al *moto* di una particella in uno spazio n–dimensionale e ad $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ come ad un campo vettoriale che assegna la "velocità del vento" nel punto $\mathbf{y}$ nell'istante t.

La curva $t \mapsto \boldsymbol{\varphi}(t)$ è una soluzione se il suo vettore velocità $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ nel punto $\boldsymbol{\varphi}(t)$ coincide con "la velocità del vento" in quel punto ed in quell'istante.

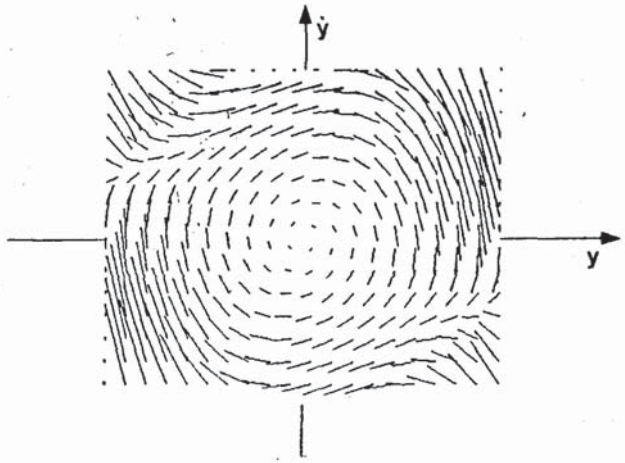


Fig. 4.4 Campo di direzioni associato all'equazione di van der Pol nel piano delle fasi ($\varepsilon = 0,2$). La lunghezza dei segmenti rappresenta l'"intensità" del campo, scalata di un fattore 10.

Particolarmente importante è questa interpretazione per i sistemi autonomi, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, la cui analisi si può efficacemente condurre nello spazio delle variabili $\mathbf{y}$, detto *spazio delle fasi*. Anziché cercare di descrivere le curve soluzione si analizzano le loro proiezioni, che si chiamano *traiettorie* o *orbite del sistema*, sull'iperpiano $t = 0$. Parleremo di questo argomento nella sezione 3.

Concludiamo il paragrafo osservando che le equazioni differenziali (scalari o vettoriali) non sono le sole equazioni *funzionali* (dove cioè l'incognita è una funzione) interessanti dal punto di vista applicativo e da quello puramente matematico.

L'equazione $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ converte un'informazione di tipo *statico* ad un certo istante (conoscenza del vettore di stato $\mathbf{y}$ al tempo t) in informazione di tipo *dinamico* (conoscenza del vettore velocità $\dot{\mathbf{y}}$) nello *stesso* istante: la conversione avviene istantaneamente.

Spesso ciò non è realistico ed allora si ricorre a modelli con equazioni del tipo seguente

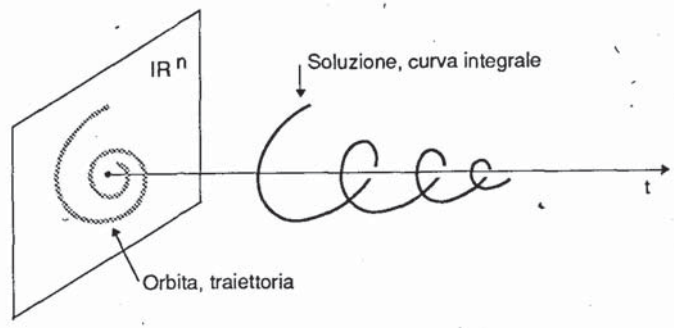


Fig. 4.5

$$\dot{\mathbf{y}}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) ,$$

(equazione differenziale ad *argomento ritardato*) in cui è evidente l'unità temporale necessaria al trasferimento dell'informazione, o del tipo seguente

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) ,$$

(equazioni alle *differenze finite*) o di altri tipi ancora.

Citiamo infine le equazioni *integrali* che avremo modo di incontrare già nel prossimo paragrafo.

1.3 Esistenza ed unicità locale

Questo paragrafo è dedicato ad uno dei risultati fondamentali riguardanti l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Poiché, come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale si può ricondurre ad un sistema di n equazioni del primo ordine (sempre in forma normale), è sufficiente sviluppare la teoria per questi ultimi.

Sia dunque $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \to \mathbb{R}^n$, con D aperto, e consideriamo il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(\tau) = \xi . \end{cases} \tag{1.16}$$

I seguenti semplici esempi indicano che senza opportune ipotesi di regolarità su $\mathbf{f}$ non ci si può aspettare, in generale, esistenza e/o unicità.

Esempio 1.10

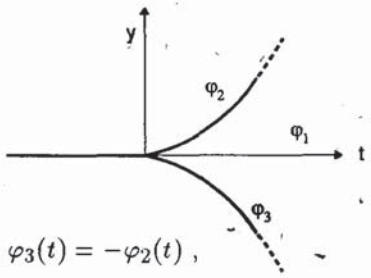
a) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

non ha soluzione se f ha una discontinuità di prima specie in $t = \tau$. Infatti in tal caso f non ha primitiva in un intorno di τ.

b) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



ha almeno le soluzioni

$$\varphi_1(t) = 0 , \ \varphi_2(t) = \begin{cases} (2t/3)^{3/2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} , \ \varphi_3(t) = -\varphi_2(t) ,$$

come è facile verificare. Si noti che, in questo caso, $f(t, y) = \sqrt[3]{y}$ è una funzione

continua in $D = \mathbb{R}^2$ ma $f_y(t, y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$ non esiste sull'asse $y = 0$ ed è illimitata in un suo intorno.

Una ipotesi ragionevole su $\mathbf{f}$ è la continuità rispetto ad entrambe le variabili t e $\mathbf{y}$. Peano ha dimostrato che questa sola ipotesi è sufficiente a garantire l'esistenza di (almeno) una soluzione di (1.16). L'esempio 1.10b mostra comunque che l'unicità non è assicurata. Noi non dimostreremo il teorema di Peano e tratteremo simultaneamente esistenza ed unicità introducendo un'ulteriore ipotesi su $\mathbf{f}$.

Definizione 1.3 - a) *Si dice che* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ *è lipschitziana in* D *rispetto ad* $\mathbf{y}$, *uniformemente in* t, *se esiste una costante* L (detta costante di Lipschitz) *tale che*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \tag{1.17}$$

per ogni coppia di punti $(t, \mathbf{y})$ *e* $(t, \mathbf{z})$ *in* D.

b) *Si dice che* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ *è localmente lipschitziana in* D *rispetto ad* $\mathbf{y}$, *uniformemente in* t, *se ogni punto di* D *ha un intorno in cui vale* (1.17) *(in tal caso la costante* L *può dipendere dall'intorno).*

È facile verificare che $\mathbf{f}$ è *localmente lipschitziana* in D se e solo se la (1.17) vale in *ogni compatto* contenuto in D. Inoltre se $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, allora $\mathbf{f}$ è lipschitziana (risp. localmente lipschitziana) se e solo se lo sono tutte le sue componenti $f_1, \ldots, f_n$.

La (1.17) sostanzialmente afferma che i rapporti incrementali di $\mathbf{f}$ rispetto alle variabili $y_1, \ldots, y_n$ si mantengono limitati, uniformemente rispetto a t.

Proposizione 1.1 - *Se* $\mathbf{f}$ *e tutte le derivate* $\partial f_j / \partial y_s$ *sono continue in* D, *allora* $\mathbf{f}$ *è localmente lipschitziana rispetto ad* $\mathbf{y}$, *uniformemente in* t.

La dimostrazione è una semplice applicazione del teorema del valor medio e pertanto la lasciamo come esercizio.

***Esempio* 1.11** - Siano:

a) $f(t, y) = \dfrac{|y|^\alpha}{1 + t^2} \qquad \alpha > 0.$

b) $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (y_1 \log t, \sqrt{y_1^2 + y_2^2}) .$

a) Per $\alpha > 1$ $f(t, y)$ è localmente lipschitziana in $D = \mathbb{R}^2$ rispetto ad y, uniformemente in t; per $\alpha = 1$ è lipschitziana in tutto $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathbf{f}$ è localmente lipschitziana in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

■ **Teorema 1.2** - (di esistenza ed unicità locale). *Sia* $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^n$, *con* D *aperto di* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Se:*

i) $\mathbf{f}$ *è continua in* D.

ii) $\mathbf{f}$ *è localmente lipschitziana in* D, *rispetto ad* $\mathbf{y}$ *e uniformemente in* t,

allora, per ogni punto $(\tau,\xi) \in D$ esiste un intorno I_δ di τ, $I_\delta = [\tau-\delta, \tau+\delta]$, nel quale è definita una soluzione φ del problema di Cauchy (1.16). *Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo comune di definizione.*

Useremo, in seguito, la notazione $\varphi(t;\tau,\xi)$ quando servirà mettere in evidenza la condizione iniziale. Si noti che, essendo $\mathbf{f}$ continua in D, la soluzione φ risulta non solo differenziabile in I_δ bensì anche di classe $C^1(I_\delta)$. Infatti, dall'equazione differenziale si ha $\dot\varphi(t) = \mathbf{f}(t,\varphi(t))$ ed $\mathbf{f}(t,\varphi(t))$ è continua in I_δ come composta di funzioni continue.

Per la dimostrazione del teorema seguiremo la seguente strategia:

a) riduzione del problema di Cauchy ad un'equazione integrale (Lemma 1.3).
b) Interpretazione dell'equazione integrale come problema di punto fisso per un particolare operatore in un opportuno spazio metrico.
c) Uso del teorema delle contrazioni di Banach–Caccioppoli.

Lemma 1.3 - *Valgano le ipotesi del teorema* 1.2.
Se $\varphi \in C^1(I_\delta)$ è soluzione del problema di Cauchy (1.16), *allora φ soddisfa la seguente equazione integrale (detta equazione integrale di Volterra):*

$$\mathbf{y}(t) = \xi + \int_\tau^t \mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))ds \qquad \forall t \in I_\delta\,. \tag{1.18}$$

Viceversa, se $\varphi \in C(I_\delta)$ è soluzione di (1.18) *allora $\varphi \in C^1(I_\delta)$ ed è soluzione del problema di Cauchy* (1.16).

Dimostrazione - Integriamo l'equazione $\dot\varphi(t) = \mathbf{f}(t,\varphi(t))$ tra τ e t, $t \in I_\delta$. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la condizione iniziale $\varphi(\tau) = \xi$ si ricava

$$\varphi(t) - \xi = \int_\tau^t \mathbf{f}(s,\varphi(s))ds \tag{1.19}$$

che è la (1.18) per φ.

Viceversa, se $\varphi \in C(I_\delta)$ è soluzione di (1.19), è automaticamente di classe $C^1(I_\delta)$ essendolo, ancora per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $\int_\tau^t \mathbf{f}(s,\varphi(s))ds$. Derivando la (1.19) si ottiene $\dot\varphi(t) = \mathbf{f}(t,\varphi(t))$ per ogni $t \in I_\delta$ e sostituendo, sempre nella (1.19), $t = \tau$, si deduce $\varphi(\tau) = \xi$. Pertanto φ è soluzione del problema di Cauchy. □

Dimostrazione del teorema 1.2 - In base al lemma 1.3 è sufficiente dimostrare che, se δ è opportunamente scelto, l'equazione integrale (1.18) ha un'unica soluzione in $I_\delta = [\tau-\delta, \tau+\delta]$. Interpretiamo tale equazione come equazione di punto fisso introducendo l'operatore seguente:

$$\mathbf{y}(t) \mapsto \mathbf{F}[\mathbf{y}](t) := \xi + \int_\tau^t \mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s))ds \quad (t \in I_\delta) \tag{1.20}$$

ben definito sulle funzioni $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ che hanno il grafico contenuto in D. Risolvere la (1.18) equivale allora a trovare $\varphi \in C(I_\delta)$ tale che $\mathbf{F}[\varphi] = \varphi$ ovvero un *punto fisso* per $\mathbf{F}$.

Per usare il teorema di Banach–Caccioppoli occorre trovare uno spazio metrico completo Y tale che $\mathbf{F}(Y) \subseteq Y$, nel quale $\mathbf{F}$ sia contrazione. Osserviamo che non si può scegliere $Y = C(I_\delta)$ in quanto, in generale, in $C(I_\delta)$ vi sono funzioni che non hanno il grafico contenuto in D. Siano allora $a, b \in \mathbb{R}_+$ tali che il cilindro (rettangolo per $n = 1$)

$$\Gamma := \{(t,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t-\tau| \le a\,,\ \|\mathbf{y}-\xi\| \le b\} \tag{1.21}$$

sia contenuto in D.

Introduciamo lo spazio metrico Y delle funzioni continue in I_δ, il cui grafico sia contenuto in Γ; in formule:

$$Y := \{\varphi \in C(I_\delta) : \|\varphi(t) - \xi\| \le b\,,\ \forall t \in I_\delta\}\,.$$

Con la metrica della convergenza uniforme, $d(\varphi,\psi) := \max_{t\in I_\delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\|$, Y è uno spazio metrico completo (Esercizio 8, Cap. 3, Sez. 1).

L'operatore integrale (1.20) è ben definito in Y. Il problema è ora scegliere δ in modo tale che:

i) $\mathbf{F}(Y) \subseteq Y$, ovvero che se $\varphi \in Y$ anche $\mathbf{F}[\varphi] \in Y$,
ii) $\mathbf{F}$ risulti una contrazione in Y, ovvero che esista α, $0 \le \alpha < 1$, tale che

$$d(\mathbf{F}[\varphi]\,,\,\mathbf{F}[\psi]) \le \alpha\, d(\varphi,\psi)\,.$$

Occupiamoci di i). Chiaramente, se $\varphi \in Y$ allora $\mathbf{F}[\varphi] \in C(I_\delta)$.

Poniamo $M = \max_{(t,\mathbf{y})\in\Gamma} \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|$. Si ha, per ogni $t \in I_\delta$:

$$\|\mathbf{F}[\varphi](t) - \xi\| = \Big\|\int_\tau^t \mathbf{f}(s,\varphi(s))ds\Big\| \le \Big|\int_\tau^t \|\mathbf{f}(s,\varphi(s))\|ds\Big| \le M|t-\tau| \le M\delta\,.$$

Ne segue che, se $M\delta \le b$ e cioè $\delta \le b/M$, allora $\mathbf{F}[\varphi] \in Y$.

Sia allora $\delta \le b/M$ e veniamo alla ii). Per ogni coppia $\varphi, \psi \in Y$ e ogni $t \in I_\delta$, indicando con L la costante di Lipschitz di $\mathbf{f}$ relativa al compatto Γ, si ha

$$\|\mathbf{F}[\varphi](t) - \mathbf{F}[\psi](t)\| = \Big\|\int_\tau^t [\mathbf{f}(s,\varphi(s)) - \mathbf{f}(s,\psi(s))]ds\Big\| \le$$

$$\le \Big|\int_\tau^t \|\mathbf{f}(s,\varphi(s)) - \mathbf{f}(s,\psi(s))\|ds\Big| \le$$

$$\le L\Big|\int_\tau^t \|\varphi(s) - \psi(s)\|ds\Big| \le L|t-\tau|\, d(\varphi,\psi) \le L\delta\, d(\varphi,\psi)\,.$$

Scegliendo $\delta < 1/L$ si ottiene che $\mathbf{F}$ è una contrazione di costante $L\delta < 1$.

Conclusione: se $\delta < \min\{a, b/M, 1/L\}$ esiste un unico punto fisso per $\mathbf{F}$ in Y. D'altra parte, se $\varphi_1 \in C(I_s)$ è una soluzione dell'equazione (1.18), necessariamente $\varphi_1 \in Y$ e quindi coincide con l'unico punto fisso di $\mathbf{F}$ in Y. □

Dalla dimostrazione del teorema si ricava dunque un'informazione riguardante l'intervallo di esistenza della soluzione: essa esiste almeno in $I_\delta = [\tau-\delta, \tau+\delta]$

con $\delta < \min\{a, b/M, 1/L\}$. Nel prossimo paragrafo affronteremo la questione della prolungabilità di una soluzione ad un intervallo *massimale* di esistenza.

La seguente proposizione indica che il metodo di dimostrazione è in un certo senso costruttivo.

Proposizione 1.4 - *Nelle ipotesi del teorema* 1.2 *la seguente successione definita per ricorrenza converge uniformemente in I_δ alla soluzione del problema di Cauchy* (1.16):

$$\varphi_0(t) = \xi \ , \ \varphi_{n+1} = \mathbf{F}[\varphi_n] = \xi + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \varphi_n(s))ds \quad (n \geq 0) \qquad (1.22)\ (*)$$

Dimostrazione - La (1.22) è esattamente la successione che tende al punto fisso nel teorema di Banach–Caccioppoli. La convergenza è uniforme perché è questa la convergenza in Y. □

Per la costruzione effettiva della soluzione si può quindi usare la successione (1.22); questo metodo si chiama *metodo delle approssimazioni successive* ed è legato ai nomi di Liouville, Peano, Picard (**). Il suo interesse è più che altro teorico per via soprattutto delle difficoltà connesse col calcolo, anche numerico, degli integrali ad ogni passo. Illustriamo tuttavia il metodo su un esempio molto elementare.

***Esempio* 1.12** - Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y + t - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $y(t) = e^t - t$, come facilmente si verifica.

L'equazione integrale equivalente è:

$$y(t) = 1 + \int_0^t [y(s) + s - 1]ds \ .$$

La successione (1.22) prende la forma seguente:

$$\varphi_0(t) = 1 \ , \ \varphi_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t [\varphi_n(s) + s - 1]ds \ .$$

Si ottiene:

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t [1 + s - 1]ds = 1 + \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \left[1 + \frac{s^2}{2} + s - 1\right]ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

(*) Anziché $\varphi_0(t) = \xi$, si può scegliere $\varphi_0(t) = \psi(t)$, dove ψ è arbitraria in Y.

(**) Joseph Liouville (1809–1882), Émile Picard (1856–1921), matematici francesi.

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) = 1 + \int_0^t \left[1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + s - 1\right]ds =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

Dunque

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} - t \longrightarrow e^t - t \quad \text{per } n \to +\infty \ ,$$

con convergenza uniforme in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Abbiamo già osservato che la continuità di $\mathbf{f}$ in D implica che una soluzione φ dell'equazione $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sia di classe C^1. Una ulteriore regolarità di $\mathbf{f}$ si ripercuote in ulteriore regolarità di φ come esprime la seguente proposizione.

Proposizione 1.5 - (Regolarità delle soluzioni). *Se $\mathbf{f} \in C^k(D)$, k intero ≥ 0, allora una soluzione φ dell'equazione $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ è di classe C^{k+1} nel suo dominio; dunque, se $\mathbf{f} \in C^\infty(D)$, anche φ è di classe C^∞. Infine, se $\mathbf{f}$ è analitica in D, anche φ lo è.*

Dimostrazione - Per induzione. Il caso $k = 0$ è già stato dimostrato. Supponiamo che la proprietà "$\mathbf{f} \in C^j(D) \Rightarrow \varphi$ di classe C^{j+1}" sia vera per $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Se $\mathbf{f} \in C^k(D)$, sappiamo allora che φ è di classe C^k; inoltre, derivando l'equazione differenziale $\dot{\varphi} = \mathbf{f}(t, \varphi)$ si ottiene

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{f}_t(t, \varphi) + \mathbf{D_y f}(t, \varphi)\dot{\varphi} \qquad (1.23)$$

dove $\mathbf{D_y f}$ indica la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ rispetto ad $\mathbf{y}$.

Poniamo $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{f}_t(t, \varphi(t)) + \mathbf{D_y f}(t, \varphi(t))\mathbf{y}$; allora $\psi = \dot{\varphi}$ soddisfa l'equazione $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ con $\mathbf{g} \in C^{k-1}(D)$. Ne segue, per l'ipotesi di ricorrenza, che $\dot{\varphi}$ è di classe C^k e pertanto che φ è di classe C^{k+1}. Tralasciamo la dimostrazione dell'analiticità, che esula dai limiti della presente trattazione. □

***Esempio* 1.13** - Per un'equazione lineare di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y + b(t) \qquad (1.24)$$

la regolarità delle soluzioni dipende da quella dei coefficienti $a_j, j = 0, \ldots, n$ e da quella di b. Se $a_j, b \in C^k(I)$, i vettori soluzione del sistema equivalente, sono, in base alla proposizione 1.5, di classe C^{k+1} e di conseguenza ogni soluzione della (1.24) è di classe C^{n+k}. Vedremo tra breve che queste soluzioni sono definite in tutto I.

***Esempio* 1.14** - Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{t+2}{t^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La funzione $f(t,y) = (t+2)/(t^2+y^2)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$ (anche analitica). La soluzione del problema di Cauchy è pertanto di classe C^∞ (anche analitica) nel suo insieme di definizione.

Sfruttando questo fatto possiamo sviluppare con la formula di Taylor (eventualmente la serie) la soluzione in un intorno di $t = 0$.

Dall'equazione abbiamo $\dot{\varphi}(0) = 2/y(0)^2 = 2$; derivandola, ponendo $y = \varphi(t)$ si ottiene:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{t^2 + \varphi(t)^2 - (t+2)(2t + 2\varphi(t)\dot{\varphi}(t))}{[t^2+\varphi(t)^2]^2}$$

da cui $\ddot{\varphi}(0) = -7$.

Pertanto

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(0)t^2 + o(t^2) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

per $t \to 0$.

Esercizi

1. Verificare se le funzioni seguenti sono soluzioni dell'equazione differenziale indicata a lato.

a) $\varphi(t) = t \operatorname{tg} t$ $\qquad t\dot{y} = y + y^2 + t^2$
b) $\varphi(t) = e^{2t} + 3e^{-2t} + 2$ $\qquad \ddot{y} - 4y = -8$
c) $\varphi(t) = c^2 + c/t$ $\qquad y + t\dot{y} = t^4(\dot{y})^2$.

2. Stabilire per quali valori di α la funzione $\varphi(t) = e^{\alpha t}$ è soluzione dell'equazione $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0$.

3. Stabilire per quali valori di α, β_1, β_2 il vettore $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\beta_1 e^{\alpha t}, \beta_2 e^{\alpha t})$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 8y_1 - y_2 \end{cases}$$

4. Determinare le equazioni differenziali soddisfatte dalle famiglie di funzioni seguenti:

a) $\Phi(t,y,c) = y^2 - 2c\,(t + c/2) = 0 \quad (c > 0)$
b) $\Phi(t,y,c_1,c_2) = c_1(t-c_2)^3 - y = 0$.

5.* Sia X uno spazio metrico completo ed $F: X \to X$. Dimostriamo che, se esiste una iterata $F^k = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{k \text{ volte}}$ di F che è una contrazione, allora F ha un unico punto fisso $\overline{x} \in X$.

[Suggerimento: per il teorema di Banach–Caccioppoli F^k ha un unico punto fisso $\overline{x} \in X$. Notare poi che $F^k(F(x)) = F(F^k(x))$ che per $x = \overline{x}$ diventa ...].

6.** Usare l'esercizio 5 per dimostrare il teorema di esistenza ed unicità con $\delta = \min\{a, b/M\}$ (stesse notazioni del teorema 1.2).

[Suggerimento: siano $\mathbf{F}$ ed Y come nella dimostrazione del teorema. Dimostrare per induzione che

$$\|\mathbf{F}^k[\boldsymbol{\varphi}](t) - \mathbf{F}^k[\boldsymbol{\psi}](t)\| \le \frac{L^k}{k!}|t-\tau|^k d(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) \ , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Dedurre che esiste k tale che F^k è una contrazione in Y].

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{y} = y|y| - t^2 \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione esiste ed è unica e fino a quale ordine è derivabile.

1.4 Prolungamento delle soluzioni. Esistenza ed unicità globale

Dalla dimostrazione del teorema 1.2 risulta che l'esistenza della soluzione $\boldsymbol{\varphi}$ del problema di Cauchy (1.16) è garantita nell'intervallo $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ con $\delta < \min\{a, b/M, 1/L\}$. Qui M ed L sono rispettivamente massimo di $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|$ e costante di Lipschitz per $\mathbf{f}$ relativamente al cilindro $\Gamma = \{(t,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t-\tau| \le a, \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}\| \le b\}$. Raffinando un poco la dimostrazione si può arrivare a

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} , \tag{1.25}$$

come provato nell'esercizio 6.

In ogni caso l'intervallo di esistenza della soluzione è più ampio di $[\tau - \delta, \tau + \delta]$. Consideriamo infatti il punto $(\tau_1, \boldsymbol{\xi}_1) = (\tau + \delta, \boldsymbol{\varphi}(\tau + \delta))$. Essendo un punto di D esiste un cilindro $\Gamma_1 = \{(t,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - \tau_1| \le a_1, \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}_1\| \le b_1\} \subset D$. In base al teorema 1.2 il problema di Cauchy con dati iniziali $(\tau_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ ha una soluzione $\boldsymbol{\varphi}_1$ definita in un intervallo $I_{\delta_1} = [\tau_1 - \delta_1, \tau_1 + \delta_1]$ dove $\delta_1 = \min\{a_1, b_1/M_1\}$ con $M_1 = \max_{(t,\mathbf{y}) \in \Gamma_1} \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|$.

Per l'unicità delle soluzioni, si deve avere $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1$ in $I_\delta \cap I_{\delta_1}$. Pertanto la nuova soluzione appare come un *prolungamento (a destra)* della vecchia che possiamo così ritenere definita in $[\tau, \tau + \delta + \delta_1]$.

Continuando a ripetere il procedimento, si prolunga (a destra) $\boldsymbol{\varphi}$ ad un intervallo ogni volta più ampio, fino ad arrivare ad un intervallo *massimale destro*

$J_\varphi^+ := [\tau, T_{\max})$, dove $T_{\max}$ è l'estremo superiore dei t, tali che φ è prolungabile in $[\tau, t]$.

Analoghi sono i ragionamenti per il prolungamento a sinistra; esiste un intervallo *massimale sinistro* $J_\varphi^- := (T_{\min}, \tau]$, alla sinistra del quale φ non si può prolungare. Porremo anche $J_\varphi := J_\varphi^+ \cup J_\varphi^-$. In casi particolari J_φ arriverà a contenere l'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$ relativo al cilindro Γ.

I seguenti semplici esempi mostrano che ciò non accade in generale.

***Esempi* 1.15** - Consideriamo i seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a.} \begin{cases} \dot y = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{b.} \begin{cases} \dot y = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{c.} \begin{cases} \dot y = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni con i loro intervalli massimali di definizione sono:

$$\text{a. } \varphi(t) = \operatorname{tg} t\,, \quad J_\varphi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{b. } \varphi(t) = \frac{1}{1-t}\,, \quad J_\varphi = (-\infty, 1)$$

$$\text{c. } \varphi(t) = \frac{1}{1+t}\,, \quad J_\varphi = (-1, +\infty).$$

Si noti che in tutti e tre i casi $D = \mathbb{R}^2$ ed il rettangolo Γ si può scegliere grande quanto si vuole.

La ragione della non prolungabilità fino a tutto $[\tau - a, \tau + a]$ si può interpretare geometricamente nel modo che segue. Ci limitiamo ad un'equazione scalare. La costante M che appare nella (1.25) rappresenta una limitazione per le pendenze delle curve integrali contenute in Γ. Se $M \gg b$, la soluzione φ che parte da (τ, ξ) può uscire dal rettangolo attraverso i lati $y = \xi \pm b$, come mostrato in figura 4.6, prima di toccare i lati $t = \tau \pm a$. Se questa situazione si ripete ad ogni passo del prolungamento di φ si può non arrivare mai a $t = \tau + a$. Ciò è esattamente quello che succede, ad esempio, per il problema 1.15b se si sceglie Γ con $a \geq 1$.

Dal punto di vista delle applicazioni è molto importante avere informazioni sull'intervallo massimale di esistenza; ad esempio, se $T_{\max} < +\infty$ e $\|\varphi(t)\| \to +\infty$ per $t \to T_{\max}^-$ (come in 1.15 a) o b)), il modello prevede qualcosa di "catastrofico" in tempo finito. Ciò non avviene se $J_\varphi^+ = [\tau, +\infty)$ (si dice allora che φ è indefinitamente prolungabile a destra), nel qual caso è spesso interessante studiare il comportamento asintotico di φ per $t \to +\infty$.

Occupiamoci dunque dell'intervallo massimale di esistenza per la soluzione del problema di Cauchy (1.16). Un primo risultato riguarda l'esistenza della soluzione in un intervallo (prefissato) $[\tau_1, \tau_2]$.

■ **Teorema 1.6** - (di esistenza globale). *Sia $S := (\tau_1, \tau_2) \times \mathbb{R}^n$. Supponiamo che* $\mathbf{f}$ *sia definita in $\overline{S}$ e che in S valgano le ipotesi del teorema* 1.2. *Se inoltre esistono*

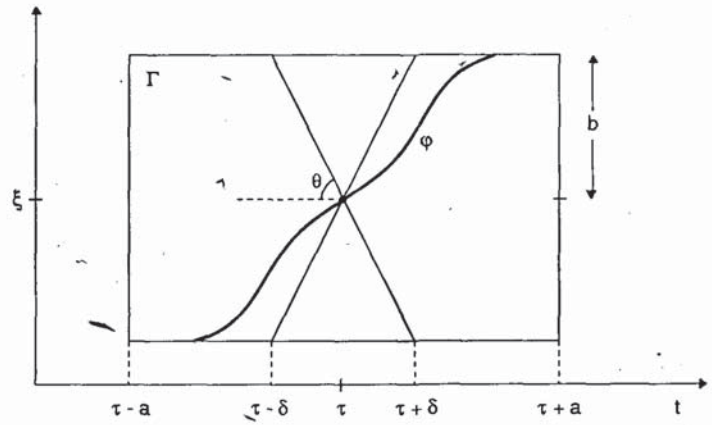


Fig. 4.6

2 costanti $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ tali che

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq k_1 + k_2\|\mathbf{y}\| \qquad \forall (t, \mathbf{y}) \in \overline{S}\,, \tag{1.26}$$

allora, per ogni $(\tau, \xi) \in S$, $\varphi(t; \tau, \xi)$ è definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dimostrazione - Siano $(\tau, \xi) \in S$ e Γ il solito cilindro (1.21). È sufficiente dimostrare che, fissato a in modo che $\Gamma \subset \overline{S}$, si può scegliere b, anche dipendente da (τ, ξ), in modo tale che $\delta = \min\{a, b/M\}$ si mantenga maggiore o uguale ad una quantità δ_0, indipendente da (τ, ξ). È allora chiaro che in un numero finito di passi si prolunga φ fino a $[\tau_1, \tau_2]$.

Fissiamo dunque a in modo che $\Gamma \subset \overline{S}$ con b da scegliersi opportunamente. Se $(t, \mathbf{y}) \in \Gamma$ si ha $\|\mathbf{y} - \xi\| \leq b$ e quindi $\|\mathbf{y}\| \leq \|\xi\| + b$. Dalla (1.26) allora si ricava

$$\|f(t, \mathbf{y})\| \leq k_1 + k_2\|\xi\| + k_2 b \quad \text{per ogni} \quad (t, \mathbf{y}) \in \Gamma\,,$$

e quindi anche $M = \max_{(t,\mathbf{y}) \in \Gamma} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq k_1 + k_2\|\xi\| + k_2 b = k_3 + k_2 b$. Ma allora

$$\frac{M}{b} \leq \frac{k_3}{b} + k_2\,. \tag{1.27}$$

Scegliendo $b = k_3$ si ha $M/b \leq 1 + k_2$ e quindi $\delta = \min\{a, b/M\} \geq \min\{a, 1/(1+k_2)\} = \delta_0$ = quantità che *non* dipende da (τ, ξ). □

La condizione (1.26) esprime il fatto che, per $\|\mathbf{y}\| \to +\infty$, le componenti di $\mathbf{f}$ hanno al massimo un andamento lineare in $\mathbf{y}$, uniformemente rispetto a $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Si noti che se τ_2 (risp. τ_1) si può scegliere arbitrariamente grande (risp. grande in valore assoluto e negativo), allora φ è prolungabile indefinitamente a destra (risp. a sinistra). Le costanti k_1 e k_2 possono dipendere da τ_2 o τ_1.

La (1.26) è soddisfatta in particolare se:

i) $\mathbf{f}$ *è limitata in* $\overline{S}$.
Vale infatti la (1.26) con $k_2 = 0$.

ii) $\mathbf{f}(t, \mathbf{0})$ è limitata e $\mathbf{f}$ *è lipschitziana in* $\overline{S}$ *(non solo localmente) rispetto ad* $\mathbf{y}$, *uniformemente in* t.

In questo caso si ha $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{z})\| \le L\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$, per ogni coppia $(t,\mathbf{y}), (t,\mathbf{z}) \in \overline{S}$. In particolare, ponendo $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e $M_0 = \max \|\mathbf{f}(t,\mathbf{0})\|$ si ottiene $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \le \|\mathbf{f}(t,\mathbf{0})\| + L\|\mathbf{y}\| \le M_0 + L\|\mathbf{y}\|$ che è la (1.26) con $k_1 = M_0$ e $k_2 = L$.

iii) $\mathbf{f}(t, \mathbf{0})$ *è limitata e tutte le derivate* $\partial f_j/\partial y_s$ *sono continue e limitate in* $\overline{S}$.

In tal caso infatti se $|\partial f_j/\partial y_s| \le L_0$ per ogni $(t,\mathbf{y}) \in \overline{S}$, $\mathbf{f}$ è lipschitziana con costante $L = \sqrt{n}L_0$.

***Esempio* 1.16** - Sistemi ed equazioni lineari.
Consideriamo un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \dot{y}_2 &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \vdots & \\ \dot{y}_n &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases} \tag{1.28}$$

o in forma matriciale

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,,$$

dove

$$\mathbf{A}(t) = \Big(a_{ij}(t)\Big)_{i,j=1,\dots,n} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se $a_{ij}, \mathbf{b} \in C([\tau_1, \tau_2])$ le condizioni del teorema 1.6 sono soddisfatte; infatti, in questo caso $\partial f_i/\partial y_j(t,\mathbf{y}) = a_{ij}(t)$ e quindi, se $L_{ij} = \max_{t\in[\tau_1,\tau_2]} |a_{ij}(t)|$ e $L_0 = \max_{i,j} L_{ij}$ si ha $|\partial f_i/\partial y_j(t,\mathbf{y})| \le L_0, \forall (t,\mathbf{y}) \in \overline{S}$.

Dunque le soluzioni del sistema (1.28) esistono in tutto $[\tau_1, \tau_2]$. Questa proprietà si estende anche al caso in cui $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{b}(t)$ siano continui in un intervallo I qualunque, non necessariamente compatto. In particolare se $I = \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (1.28) sono definite in $\mathbb{R}$.

Il seguente esempio mostra come si può utilizzare la teoria svolta fino a questo punto e l'equazione stessa per uno studio qualitativo delle curve integrali.

***Esempio* 1.17** - Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \operatorname{artg}(ty) \\ y(0) = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})\,. \end{cases}$$

Poiché $f(t,y) = \operatorname{artg}(ty) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $|f(t,y)| \le \pi/2$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, si ricava che, per ogni α, la soluzione esiste, è unica ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Possiamo trarre qualche informazione sul suo grafico.

Intanto, se $\alpha = 0$ l'unica soluzione è $\varphi = 0$.

Sia $\alpha > 0$. Dall'equazione si deduce che $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(t) > 0$ per $t > 0$ e $\dot{\varphi}(t) < 0$ per $t < 0$: $t = 0$ è una linea di minimi assoluti per le soluzioni. Si noti che $\varphi(t) = \alpha + \frac{\alpha}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$.

Poiché cambiando t in $-t$ l'equazione rimane invariata e così pure la condizione iniziale, l'unicità delle soluzioni implica $\varphi(t) = \varphi(-t)$, ovvero i grafici sono simmetrici rispetto all'asse y.

Studiamo l'andamento di φ per $t \to +\infty$. Essendo monotona esiste $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = l$. Dall'equazione differenziale si deduce che $\lim_{t\to+\infty} \dot{\varphi}(t) = \pi/2$ e quindi $l = +\infty$.

Vediamo se esiste un asintoto obliquo che avrà equazione $y = \frac{\pi}{2}t + q$. Per determinare q occorre calcolare $\lim_{t\to+\infty} (\varphi(t) - \frac{\pi}{2}t)$.

Dall'equazione si ricava, per $t > 0$

$$\varphi(t) - \alpha = \int_0^t \operatorname{artg}(s\varphi(s))ds$$

e quindi

$$\varphi(t) - \frac{\pi}{2}t = \alpha + \int_0^t \left[\operatorname{artg}(s\varphi(s)) - \frac{\pi}{2}\right] ds\,.$$

Esiste dunque l'asintoto se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \left[\operatorname{artg}(s\varphi(s)) - \frac{\pi}{2}\right] ds = -\int_0^{+\infty} \operatorname{artg}\left(\frac{1}{s\varphi(s)}\right) ds\,. \ (*)$$

Sia $t_0 > 1$ tale che, per $t > t_0$, $\operatorname{artg}(t\varphi(t)) > \pi/4$. Allora, per $t > t_0$, $\dot{\varphi}(t) > \pi/4$, ovvero $\varphi(t) > \varphi(t_0) + \pi(t - t_0)/4$; ne segue che $\operatorname{artg}(1/s\varphi(s)) = O(1/s^2)$ per $s \to +\infty$ e pertanto l'integrale è convergente. Per $\alpha < 0$ l'andamento è simmetrico rispetto all'asse t (fig. 4.7).

Un altro teorema di prolungamento è il seguente, che esprime la prolungabilità di una soluzione fino alla frontiera di D.

■ **Teorema 1.7** - *Valgano le ipotesi del teorema* 1.2. *Siano* D_0 *un compatto contenuto in* D, $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ *un punto in* D_0 *e* $J_{\boldsymbol{\varphi}} = (T_{\min}, T_{\max})$ *l'intervallo massimale di esistenza di* $\boldsymbol{\varphi}(t; \tau, \boldsymbol{\xi})$.

Allora il grafico di $\boldsymbol{\varphi}$ *esce da* D_0 *definitivamente per* $t \to T^+_{\min}$ *e per* $t \to T^-_{\max}$.

(*) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\beta = \operatorname{artg}\frac{1}{\beta}$.

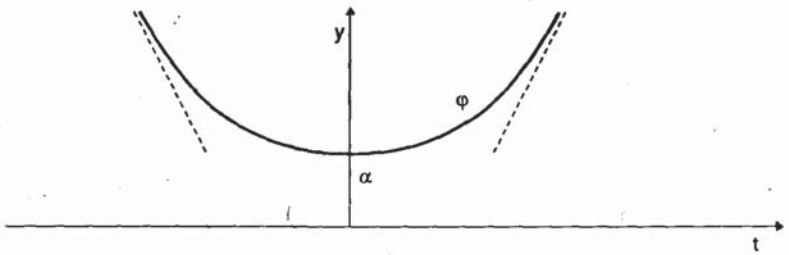


Fig. 4.7 Andamento qualitativo della soluzione del problema di Cauchy dell'esempio 1.17.

Dimostrazione - Per assurdo sia $\{t_j\} \subset J_\varphi$ una successione di punti tale che $t_j \to T^-_{\max}$ e $(t_j, \varphi(t_j)) \in D_0$. Essendo D_0 compatto, esiste una sottosuccessione $(t_{j_k}, \varphi(t_{j_k}))$ convergente ad un punto $(T^-_{\max}, \eta) \in D_0$. Mostriamo che $\varphi(t) \to \eta$ per $t \to T^-_{\max}$.

Sia $r = \operatorname{dist}(\eta, \partial D)$ e $B_{r/2}$ un intorno circolare del punto $(T^-_{\max}, \eta)$ di raggio $r/2$; allora $\overline{B}_{r/2} \subset D$. Sia $M_0 = \max_{\overline{B}_{r/2}} \|f\|$; poiché $(t_{jk}, \varphi(t_{jk})) \to (T^-_{\max}, \eta)$, per $k \geq \overline{k}$, con $\overline{k}$ abbastanza grande, si avrà che $(t_{j_k}, \varphi(t_{j_k})) \in B_{r/4}$; di conseguenza si avrà, aumentando eventualmente $\overline{k}$, che per $t \geq t_{j_{\overline{k}}}$, $\varphi(t)$ si mantiene in $B_{r/2}$. Allora, per ogni coppia di punti $t_1, t_2 \in [t_{j_{\overline{k}}}, T^-_{\max})$ si ha, usando l'equazione integrale di Volterra per $t = t_1$ e $t = t_2$ e sottraendo:

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{f}(t_1, \varphi(t))dt \right\| \leq M_0 |t_1 - t_2| \,. \tag{1.29}$$

La (1.29) indica che φ è lipschitziana in J_φ e quindi uniformemente continua. Usando il criterio di Cauchy (proposizione 4.4.8 Vol. 1) si deduce che $\lim_{t \to T^-_{\max}} \varphi(t)$ esiste e pertanto deve coincidere con η.

Dall'equazione $\dot\varphi(t) = \mathrm{f}(t, \varphi(t))$ segue che $\dot\varphi(t) \to \mathrm{f}(t, \eta)$ per $t \to T^-_{\max}$ e che $\varphi \in C^1(T_{\min}, T_{\max}]$. Poiché appartiene a D_0, il punto $(T_{\max}, \eta)$ si può scegliere come punto iniziale nel problema di Cauchy, ottenendo così, in base al teorema 1.2, un prolungamento di φ a destra di $T_{\max}$. Ciò contraddice la definizione di $T_{\max}$.

Analogamente si procede per $t \to T^+_{\min}$. □

Come conseguenza del teorema 1.7 si ottiene il seguente criterio di prolungabilità, frequentemente utilizzato nelle applicazioni.

Corollario 1.8 - *Valgano le ipotesi del teorema* 1.7 *con* $D = \mathbb{R}^{n+1}$. *Se esistono due costanti* $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ *tali che*

$$\|\varphi(t)\| \leq c_1 + c_2(t - \tau) \,, \qquad \forall t \in J^+_\varphi = [\tau, T_{\max}) \tag{1.30}$$

allora $J^+_\varphi = [\tau, +\infty)$. *In particolare ciò accade se* φ *è limitata in* J^+_φ $(c_2 = 0)$.

Per il prolungamento a sinistra l'enunciato si modifica in modo ovvio.

Dimostrazione - Per assurdo sia $T_{\max} < +\infty$. Con una traslazione, possiamo riportarci al caso in cui $\tau = 0$ e $\xi = 0$. In tal caso $T_{\max} > 0$. Consideriamo il cilindro $\Gamma = \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J^+_\varphi,\ \|\mathbf{y}\| \leq b\}$ dove b è un qualunque numero maggiore di $c_1 + c_2 T_{\max}$. Allora dalla (1.30) si ha:

$$\|\varphi\| \leq c_1 + c_2 T_{\max} < b \,. \tag{1.31}$$

In base al teorema 1.7, il grafico di φ deve uscire dal cilindro compatto Γ; d'altra parte, la (1.31) implica che deve uscire attraverso la base destra del cilindro e che quindi φ si può prolungare a destra di J^+_φ. Contraddizione. □

Vediamo un importante esempio di applicazione del corollario 1.8.

***Esempio* 1.18** - Consideriamo l'equazione (autonoma) di Newton

$$\ddot y = f(y) \,, \tag{1.32}$$

che modellizza un *sistema conservativo ad un grado di libertà*.

Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$, cosicché per ogni $\tau, \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy con condizioni iniziali $y(\tau) = \xi_0$, $\dot y(\tau) = \xi_1$ ha un'unica soluzione locale.

Il sistema equivalente alla (1.32) ha la forma

$$\begin{cases} \dot y_1 = y_2 \\ \dot y_2 = f(y_1) \,. \end{cases} \tag{1.33}$$

Nello spazio delle variabili y_1, y_2 (*spazio delle fasi*) consideriamo le seguenti funzioni:

$$T(y_2) = \frac{y_2^2}{2} = \text{ energia cinetica}$$

$$U(y_1) = -\int_0^{y_1} f(s)ds = \text{ energia potenziale}$$

$$E \quad = T + U = \text{ energia meccanica} \,.$$

La ragione del termine *conservativo* sta nel fatto che, durante il moto, l'energia meccanica E rimane costante (si conserva). Più precisamente, se $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ è una traiettoria del sistema si ha:

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \frac{d}{dt} T(\varphi_2(t)) + \frac{d}{dt} U(\varphi_1(t)) =$$
$$= \varphi_2(t)\dot\varphi_2(t) - f(\varphi_1(t))\dot\varphi_1(t) = \text{ [utilizzando le (1.33)] } = 0 \,.$$

Si dice in tal caso che E è una *costante del moto* o un *integrale primo* del sistema.

Vogliamo mostrare che: *se l'energia potenziale U si mantiene limitata inferiormente, vale a dire se esiste c_0 tale che $U(y) \geq c_0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, allora ogni soluzione di* (1.33) *esiste in tutto* $\mathbb{R}$.

Sia φ una soluzione di (1.33) e $J_\varphi = [\tau, T)$ il suo intervallo massimale di definizione. Poiché l'energia è una costante del moto si ha:

$$\frac{\varphi_2(t)^2}{2} + U(\varphi_1(t)) = E(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = c \qquad \forall t \in J_\varphi \,. \tag{1.34}$$

Essendo $U(y) \geq c_0$, dalla (1.34) si deduce $\varphi_2(t)^2 \leq 2(c - c_0)$ ovvero $|\varphi_2(t)| \leq \leq \sqrt{2(c - c_0)}$, $\forall t \in J_\varphi$. Essendo poi $\dot\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ si ha:

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(\tau) = \dot\varphi_1(\bar t)(t - \tau) \,,$$

dove $\bar t$ è un opportuno valore compreso tra τ e t, $t \in J_\varphi$. Pertanto

$$|\varphi_1(t)| \leq |\varphi_1(\tau)| + \sqrt{2(c - c_0)}|t - \tau| \,.$$

La tesi segue allora dal corollario 1.8.

Così, le soluzioni dell'equazione $\ddot y = -y^3$ sono definite in tutto $\mathbb{R}$ essendo $U(y) = \int_0^y s^3 ds = y^4/4 \geq 0$.

Non così per l'equazione $\ddot y = 2y^3$ soddisfatta, ad esempio, da $\varphi(t) = 1/(t-1)$.

Esercizi

8. Si consideri il problema di Cauchy dell'esempio 1.14. Stabilire se la soluzione è prolungabile indefinitamente a $+\infty$. In tal caso studiarne il comportamento per $t \to +\infty$.

9. Studiare l'andamento delle curve integrali delle equazioni seguenti:

a) $\dot y = \dfrac{t^2 y^3}{1 + y^2}$

b) $\dot y = \dfrac{(\sin t)^2}{1 + t^2} e^{-y^2}$

c) $\dot y = t^3(e^{2-y^2} - 1)$

d) $\dot y = \dfrac{\cos y}{\sqrt{1 + t^2 + y^2}}$.

10. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot y = \operatorname{artg} y - \dfrac{1}{t} \\ y(1) = b \quad (b > 0) \end{cases}$$

a) Discutere unicità ed esistenza locale.
b) Determinare l'intervallo massimale di esistenza.
c) Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.
d)* Per i valori di b per i quali l'intervallo massimale è $(0, +\infty)$ stabilire se esistono asintoti obliqui.

e)** Dimostrare che esiste un unico b tale che la soluzione corrispondente esiste in $(0, +\infty)$ e tende a zero per $t \to +\infty$.

11. Dato il problema di Cauchy

a) $\begin{cases} \dot y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{y} \\ y(1) = \alpha \quad (\alpha > 0) \end{cases}$

Studiare l'andamento delle soluzioni.
Stabilire in particolare se le soluzioni sono prolungabili a destra di 1 fino a $+\infty$.

12. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y_1 = t + \dfrac{y_2}{1 + y_1^2} \\ \dot y_2 = t y_1 e^{-t^2 y_2} \end{cases}$$

con $y_1(0) = y_2(0) = 1$, discutere esistenza ed unicità locali e prolungabilità della soluzione a destra di $t = 0$.

13.* Dimostrare il seguente *teorema di confronto*.

Teorema: *siano φ, ψ definite in $[\tau, T]$, derivabili e tali che:*

$$\dot\varphi(t) < f(t, \varphi(t)) \,, \quad \varphi(\tau) < \psi(\tau) \,, \quad \dot\psi(t) = f(t, \psi(t)) \tag{$*$}$$

dove f verifica le ipotesi del teorema 1.2 in $S = [\tau, T] \times \mathbb{R}$. Allora $\varphi(t) < \psi(t), \forall t \in [\tau, T]$.

[Suggerimento: sia $\tau_1 = \inf\{t \in [\tau, T) : \varphi(t) \geq \psi(t)\}$. Dimostrare che $\tau_1 > \tau$, che $\varphi(\tau_1) = \psi(\tau_1)$ e che $\varphi(t) < \psi(t)$ per $t \in [\tau, \tau_1)$. Di qui, dedurre che $\dot\varphi(\tau_1) \geq \dot\psi(\tau_1)$, in contraddizione con le $(*)$ per $t = \tau_1$].

14. Usare il teorema dell'esercizio 13 per dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = ty + y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non è prolungabile indefinitamente a destra di $t = 0$.

15. Sia φ soluzione di $\dot y = f(t, y)$ in $[\tau - \delta, \tau + \delta]$. Dimostrare che, se $\dot\varphi(\tau) = 0$, $\xi = \varphi(\tau)$ e $f_t(\tau, \xi) > 0$, allora φ ha un minimo locale in $t = \tau$.

1.5* Dipendenza delle soluzioni dai dati iniziali e da eventuali parametri

Nel modellizzare fenomeni in evoluzione mediante equazioni differenziali spesso i dati iniziali sono noti con un certo grado di approssimazione. Può inoltre comparire nell'equazione un certo numero di parametri rilevanti, determinati sperimentalmente, e perciò soggetti ad errori di misura. Si pensi, ad esempio, all'equazione dei circuiti elettrici $L\ddot I + R\dot I + CI = A\cos\omega t$, dipendente dai parametri L, R, C, A ed ω.

Quanto è sensibile la soluzione ad un errore sui dati iniziali e sui parametri?

Per l'attendibilità dei risultati occorre che *piccole variazioni su di essi* (dati e parametri) *producano piccole variazioni sulla soluzione*.

Formalizziamo il problema, cominciando con la dipendenza dai dati iniziali.

Sia $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^n$, con D aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ continua e localmente lipschitziana rispetto ad $\mathbf{y}$, uniformemente in t.

Supponiamo inoltre che per ogni (τ, ξ) in un intorno A di $(\tau_0, \xi_0) \in D$, ogni soluzione $\varphi(t; \tau, \xi)$ sia definita in un intervallo comune a tutte $[\tau_1, \tau_2]$ (*).

■ **Teorema 1.9** - *Valgano le ipotesi anzi dette. Se $(\tau, \xi) \to (\tau_0, \xi_0)$, $(\tau, \xi) \in A$, allora $\varphi(t; \tau, \xi) \to \varphi(t; \tau_0, \xi_0)$ uniformemente in $t \in [\tau_1, \tau_2]$.*

Per la dimostrazione facciamo uso del seguente lemma, di interesse indipendente.

Lemma - (di Gronwall). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\tau \in I$. Siano inoltre $u, v: I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in I, non negative e $c \in \mathbb{R}_+$. Se:*

$$v(t) \le c + \left| \int_\tau^t u(s)v(s)ds \right| \qquad \forall t \in I \tag{1.35}$$

allora

$$v(t) \le c\, e^{\left|\int_\tau^t u(s)ds\right|} \qquad \forall t \in I\,. \tag{1.36}$$

Dimostrazione – Sia $t \ge \tau$; poniamo $w(t) := c + \int_\tau^t u(s)v(s)ds$; allora $w'(t) = u(t)v(t) \le$ (per ipotesi) $\le u(t)w(t)$. Di conseguenza $\frac{d}{dt}[w(t)e^{-\int_\tau^t u(s)ds}] = e^{-\int_\tau^t u(s)ds}[w'(t) - u(t)w(t)] \le 0$ e perciò $e^{-\int_\tau^t u(s)ds} w(t) \le w(\tau) = c$, da cui la tesi. Se $t \le \tau$ si pone $t' = \tau - t$ e ci si riporta al caso precedente. Lasciamo i dettagli all'allievo. □

Dimostrazione del Teorema 1.9 - Restringendo eventualmente l'intorno A di (τ_0, ξ_0) si può trovare un compatto $\Gamma \subset D$ che contiene tutti i grafici delle $\varphi(t; \tau, \xi)$ per $(\tau, \xi) \in A$. Siano $M = \max_{(t,\mathbf{y}) \in \Gamma} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|$ ed L la costante di Lipschitz di $\mathbf{f}$ in Γ.

Dall'equazione di Volterra si ha, per ogni $t \in [\tau_1, \tau_2]$:

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \xi + \int_\tau^t \mathbf{f}(s, \varphi(s; \tau, \xi))ds$$

e

$$\varphi(t; \tau_0, \xi_0) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^t \mathbf{f}(s, \varphi(s; \tau_0, \xi_0))ds\,.$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene, scrivendo $\int_{\tau_0}^t \ldots = \int_{\tau_0}^\tau \ldots + \int_\tau^t \ldots$:

$$\|\varphi(t; \tau, \xi) - \varphi(t; \tau_0, \xi_0)\| \le \|\xi - \xi_0\| + \left\| \int_{\tau_0}^\tau \mathbf{f}(s, \varphi(s; \tau_0, \xi_0))ds \right\| +$$
$$+ \left\| \int_\tau^t \{\mathbf{f}(s; \varphi(s; \tau, \xi)) - \mathbf{f}(s, \varphi(s; \tau_0, \xi_0))\} ds \right\|\,.$$

(*) Si potrebbe dimostrare che un intorno A di (τ_0, ξ_0) con questa proprietà esiste sempre.

Da qui si ricava

$$\|\varphi(t; \tau, \xi) - \varphi(t; \tau_0, \xi_0)\| \le \|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0| +$$
$$+ \left| \int_\tau^t L\, \|\varphi(s; \tau, \xi) - \varphi(s; \tau_0, \xi_0)\|\, ds \right|\,.$$

Applichiamo ora il lemma di Gronwall in $I = [\tau_1, \tau_2]$ con:

$$v(t) = \|\varphi(t; \tau, \xi) - \varphi(t; \tau_0, \xi_0)\|\,, \quad c = \|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0| \quad \text{e} \quad u(t) = L\,.$$

Si ottiene, per ogni $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\|\varphi(t; \tau, \xi) - \varphi(t; \tau_0, \xi_0)\| \le (\|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0|)\, e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \tag{1.37}$$

La (1.37) implica immediatamente la tesi. □ (*)

Sottolineiamo che la (1.37) fornisce una limitazione di quanto le soluzioni corrispondenti a dati iniziali diversi possono allontanarsi nell'intervallo. La presenza del fattore $e^{L(\tau_2 - \tau_1)}$ indica che la convergenza è uniforme in intervalli *limitati*, mentre non si esclude un allontanamento esponenziale all'infinito anche per soluzioni corrispondenti a dati iniziali molto vicini.

Infatti, ad esempio, i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

hanno soluzioni rispettivamente date da $\varphi_1(t) = e^t$ e $\varphi_2(t) = (1 + \varepsilon)e^t$ ma $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \varepsilon e^t \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

Incidentalmente sottolineiamo che valutazioni del tipo (1.37) sono molto utili nell'analisi numerica delle equazioni differenziali.

La dipendenza continua dai parametri è una semplice conseguenza del teorema 1.9. Sia infatti $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ con $\boldsymbol{\lambda}$ parametro vettoriale variabile in un aperto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$. Si richiede che $\mathbf{f}$ sia continua in $D \times \Lambda$ e lipschitziana rispetto ad $\mathbf{y}$ e $\boldsymbol{\lambda}$ uniformemente in t. Supponiamo inoltre che per ogni $\boldsymbol{\lambda}$ in un intorno di $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{y}(\tau) = \xi \end{cases} \tag{1.38}$$

abbia un'unica soluzione $\varphi = \varphi(t; \boldsymbol{\lambda})$ definita in un intervallo comune $[\tau_1, \tau_2]$ (**). Allora:

(*) La (1.37) implica che $\varphi(t; \tau, \xi)$ è lipschitziana rispetto a (τ, ξ) uniformemente in $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

(**) Si può dimostrare che un intorno di $\bar{\lambda}$ con questa proprietà esiste sempre.

Proposizione 1.10 - Se $\lambda \to \bar{\lambda}$, $\varphi(t;\lambda) \to \varphi(t,\bar{\lambda})$ *uniformemente in* $[\tau_1, \tau_2]$.

Dimostrazione - È sufficiente osservare che il problema (1.38) equivale al seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}\,, \quad \mathbf{z}(\tau) = \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \tag{1.39}$$

ottenuto aggiungendo la funzione "fittizia" $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$. Il sistema (1.39) soddisfa le ipotesi del teorema (1.9) e pertanto la conclusione è immediata. □

La considerazione delle soluzioni come funzioni dei dati iniziali è alla base della teoria dei sistemi dinamici continui. In questo ordine di idee tuttavia oltre alla dipendenza continua espressa dal teorema 1.9 servono risultati di differenziabilità. A questo proposito ci limitiamo ad enunciare il seguente risultato.

Proposizione 1.11 - *Valgano le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Se inoltre le derivate parziali* $\partial f_j/\partial y_k$, $j,k = 1,\dots,n$, *sono continue in* D, *allora esistono continue anche le derivate di* $\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi})$ *rispetto a* ξ_j, $j = 1,\dots,n$. *Inoltre le derivate miste* $\partial^2\varphi_j/\partial t\partial\xi_j$ *sono continue.*

Un teorema analogo vale per la dipendenza rispetto ad un parametro. Si osservi che, per il teorema di Schwarz, si ha $(j,k = 1,\dots,n)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi_k} f_j(t;\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi})) = \\ &= \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial y_h}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Radunando le n^2 equazioni (1.40) in un'unica equazione matriciale si ottiene

$$\frac{d}{dt}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}}\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(t,\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi}))\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}}\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi})\,, \tag{1.41}$$

dove $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}}\varphi(t;\tau,\boldsymbol{\xi})$ è la jacobiana di φ rispetto a $\boldsymbol{\xi}$ e $\mathbf{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(t;\varphi(t,\tau,\boldsymbol{\xi}))$ è la jacobiana di $\mathbf{f}$ rispetto ad $\mathbf{y}$ calcolata per $\mathbf{y} = \varphi$.

La (1.41) si chiama *equazione alle variazioni.*

1.6 Integrazione di alcune equazioni del primo ordine

Illustriamo in questo paragrafo il metodo di integrazione per tre tipi di equazioni differenziali: *lineari, esatte* e a *variabili separabili.* Altri numerosi esempi si trovano negli esercizi.

Equazioni lineari

Sono le equazioni del tipo

$$\dot{y} = P(t)y + Q(t)\,, \tag{1.42}$$

dove P e Q sono continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se $Q = 0$ la (1.42) si dice lineare omogenea.

La formula, valida in I, che dà l'integrale generale è:

$$y(t) = e^{\int P(t)dt}\{c + \int Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt\}\,, \tag{1.43}$$

dove c è una costante arbitraria e $\int P(t)dt$ è una primitiva di P in I.

Dimostrazione della 1.43 - Osserviamo che:

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int P(t)dt}y(t)] = e^{-\int P(t)dt}[\dot{y}(t) - P(t)y(t)]\,.$$

Pertanto, moltiplicando la (1.42) per $e^{-\int P(t)dt}$ si trova

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int P(t)dt}y(t)] = e^{-\int P(t)dt}Q(t)\,.$$

Integrando (per $t \in I$) entrambi i membri si ottiene

$$e^{-\int P(t)dt}y(t) = \int Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt + c\,,$$

da cui la (1.43). □

***Esempio* 1.19** - L'equazione dell'esempio 1.1, $\dot{N} = \varepsilon N$ è lineare omogenea con $P(t) = \varepsilon$. L'integrale generale è

$$N(t) = c\,e^{\varepsilon t} \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

***Esempio* 1.20** - Si voglia risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y}{t} + 3t^3 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione è lineare con $P(t) = 1/t$ e $Q(t) = 3t^3$. Essendo l'istante iniziale $\tau = -1$ negativo, occorre scegliere $I = (-\infty, 0)$.

Si ha:

$$\int P(t)dt = \int \frac{1}{t}dt = \log(-t)\,,$$

e pertanto dalla (1.43):

$$y(t) = e^{\log(-t)}\{c + \int 3t^3 e^{-\log(-t)}dt\} = -ct + t^4\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova

$$2 = -c\,(-1) + (-1)^4\ ,$$

ovvero $c = 1$. Dunque la soluzione cercata è $y(t) = -t + t^4$.

Equazioni differenziali esatte

Sono equazioni del tipo

$$\dot{y} = -\frac{P(t,y)}{Q(t,y)}\ , \tag{1.44}$$

dove P, Q sono continue in un dominio $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $Q \neq 0$, e tali che la forma differenziale

$$\omega = P(t,y)dt + Q(t,y)dy$$

sia esatta, esista cioè $F = F(t,y)$ funzione potenziale, tale che

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y} = Q \qquad \text{in } A\ . \tag{1.45}$$

Ricordiamo che, se A è *semplicemente connesso* in $\mathbb{R}^2$ e se $\partial Q/\partial t$, $\partial P/\partial y$ sono continue in A, ω è esatta se e solo se, in A, risulta

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial y}\ .$$

In tal caso una formula per la funzione F è, ad esempio, la seguente:

$$F(t,y) = \int_\tau^t P(s,y)ds + \int_\xi^y Q(\tau,s)ds\ , \tag{1.46}$$

valida (almeno) in un intorno di $(\tau,\xi) \in A$.

L'integrale generale della (1.44) *è assegnato in forma implicita dalla formula seguente*:

$$F(t,y) = c \tag{1.47}$$

Dimostrazione - Se $\varphi = \varphi(t)$ è soluzione della (1.44), definita in un intervallo I, si ha $F(t,\varphi(t)) =$ costante in I; infatti:

$$\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t)) = F_t(t,\varphi(t)) + F_y(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \text{ (per le 1.45)}$$
$$= P(t,\varphi(t)) + Q(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = 0 \quad \text{(per la 1.44).}$$

Viceversa, dato un punto $(\tau,\xi) \in A$, posto $F(\tau,\xi) = \overline{c}$, per il teorema del Dini l'equazione $F(t,y) = \overline{c}$ definisce una funzione $y = \varphi(t)$, tale che $\varphi(\tau) = \xi$, e che soddisfa l'equazione (1.44). Infatti $\partial F/\partial y = Q \neq 0$ in ogni punto di A ed inoltre $\dot{\varphi} = -F_t/F_y = -P/Q$. □

Si noti che usando la (1.46), l'equazione $F(t,y) = 0$ definisce la curva integrale passante per (τ,ξ).

***Esempio* 1.21** - Si voglia risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -\dfrac{t+y}{t-3y} \\ y(0) = 1\ . \end{cases}$$

Qui $P(t,y) = t + y$, $Q(t,y) = t - 3y \neq 0$ nei due semipiani $t > 3y$ e $t < 3y$. Poiché $(\tau,\xi) = (0,1)$ appartiene al semipiano $t < 3y$ scegliamo quest'ultimo come dominio A. Essendo poi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2\ ,$$

la forma differenziale $\omega = (t+y)dt + (t-3y)dy$ è esatta. La soluzione cercata è assegnata dalla formula:

$$\int_0^t (s+y)ds + \int_1^y (-3s)ds = 0\ ,$$

ossia

$$t^2 + 2ty - 3y^2 + 3 = 0\ .$$

Equazioni a variabili separabili

Sono della forma

$$\dot{y} = f(t)g(y) \tag{1.48}$$

con $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$, dove I e J sono intervalli contenuti in $\mathbb{R}$.

Se $\overline{y}$ è soluzione dell'equazione $g(y) = 0$, la retta $y = \overline{y}$ è una curva integrale.

Se $g(y) \neq 0$ in $J' \subseteq J$, la (1.48) è esatta con $P(t,y) = f(t)$ e $Q(t,y) = -1/g(y)$. L'integrale generale in tal caso è dato dalla formula

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(t)dt + c\ . \tag{1.49}$$

***Esempio* 1.22** - Sia data l'equazione

$$\dot{y} = 2t\sqrt{1-y^2}\ .$$

Le due rette $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni. Le altre soluzioni sono date dalla formula

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = 2\int t\,dt + c$$

ossia

$$y = \sin(t^2 + c)\,. \tag{1.50}$$

Si noti che le rette $y = \pm 1$ costituiscono l'inviluppo della famiglia (1.50) come è facile verificare. Inoltre esse costituiscono la frontiera dell'insieme di definizione di $f(t,y) = 2t\sqrt{1-y^2}$ e pertanto non rientrano nella teoria svolta nei paragrafi precedenti. Queste soluzioni si chiamano integrali *singolari* o di *frontiera*.

Più in generale si chiama *integrale singolare* per un'equazione differenziale una curva integrale tale che in ogni suo punto non siano verificate le condizioni del teorema di esistenza ed unicità. La definizione si può estendere alle equazioni in forma *non normale*, ma non intendiamo approfondire ulteriormente l'argomento.

***Esempio* 1.23** - Sia data l'equazione (logistica, Esempio 1.2)

$$\dot{y} = a\,y(1 - by) \qquad a, b > 0\,.$$

Le rette $y = 0$ e $y = 1/b$ sono soluzioni. Le altre soluzioni sono date dalla formula

$$\int \frac{dy}{y(1-by)} = \int a\,dt\,.$$

Poiché

$$\frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}\,, \quad \int \frac{dy}{y(1-by)} = \log\left|\frac{y}{1-by}\right|\,,$$

si ha:

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = at + c\,,$$

ossia

$$\left|\frac{y}{1-by}\right| = c_0 e^{at} \qquad (c_0 = e^c)\,.$$

Se $0 < y < 1/b$ otteniamo

$$y(t) = \frac{c_0 e^{at}}{1 + c_0 b\, e^{at}}\,.$$

La soluzione soddisfacente la condizione $y(0) = \xi$, $0 < \xi < 1/b$, è data da

$$y(t) = \frac{\xi e^{at}}{1 - b\xi + \xi b\, e^{at}}\,.$$

Per $a = \varepsilon$, $b = 1/k$, $\xi = N_0$ si ottiene la formula dell'esempio 1.2.

Esercizi

16. Integrare le seguenti equazioni lineari:

a. $(1+t^2)\dot{y} + ty = (1+t^2)^{-1}$ b. $\dot{y} = y\,\mathrm{tg}\,t + \sin t$

c. $\dot{y} - 2\dfrac{y}{t} = \dfrac{t+1}{t}$ d. $\dot{y} = \dfrac{ny}{t+1} + e^t(t+1)^n \qquad n \in \mathbb{N}$

17. Integrare le seguenti equazioni a variabili separabili

a. $\dot{y} = -2ty^2$ b. $y\,e^{2t}dt - (1+e^{2t})dy = 0$

c. $t(1+y^2)y' = 3$ d. $(t^2 - yt^2)\dot{y} + y^2 + ty^2 = 0$

18. Integrare le seguenti equazioni differenziali esatte:

a. $\dot{y} = -\dfrac{y + 2ty^3}{t + 3t^2y^2}$ b. $(y^3 - t)\dot{y} = y$

c. $\left(\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{3y^2}{t^4}\right)dt = \dfrac{2y\,dy}{t^3}$ d. $2(3ty^2 + 2t^3)dt + 3(2t^2y + y^2)dy = 0$

Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo

$$\dot{y} = P(t)y + Q(t)y^\alpha\,, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1)\,,$$

con P, Q continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $\alpha > 0$, $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

Se $y \neq 0$, dividendo per y^α si ottiene $y^{-\alpha}\dot{y} = P(t)y^{1-\alpha} + Q(t)$.

Ponendo

$$z = y^{1-\alpha}\,,$$

si ha

$$\dot{z} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dot{y}\,,$$

e perciò z è soluzione dell'equazione lineare

$$\dot{z} = (1-\alpha)P(t)z + (1-\alpha)Q(t)\,.$$

Trovata z con la formula (1.43) si trova $y = z^{-\frac{1}{1-\alpha}}$. (*)

19. Integrare le seguenti equazioni di Bernoulli:

a. $\dot{y} + y\sin t + y^\alpha \sin 2t = 0$ b. $(1-t^2)\dot{y} - ty - aty^2 = 0$

c. $y - \dot{y}\cos t - y^2\cos t(2 - \sin t) = 0$ d. $t\dot{y} + y(1 - ty^n) = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$

(*) $y = \pm z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ se $1-\alpha$ è un intero pari o un razionale con numeratore pari.

Equazione di Riccati

È un'equazione del tipo

$$\dot{y} = P(t)y + Q(t)y^2 + R(t) \tag{1.51}$$

con P, Q, R continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, $R(t) \neq 0$. Non si conoscono metodi generali di soluzione.

Conoscendo una soluzione particolare ψ la (1.51) si riduce a lineare con il cambio di variabili

$$y = \psi + \frac{1}{z}$$

Si ha infatti: $\dot{y} = \dot{\psi} - \dot{z}z^{-2}$ che, sostituita nella (1.51), dà per z l'equazione:

$$\dot{z} = [P(t) + 2\,Q(t)\psi]z + Q(t)\ .$$

20. Risolvere le equazioni

a. $\dot{y} - t^2y^2 + t^4 - 1 = 0$ b. $\dot{y} - y\,\mathrm{tg}\,t - y^2\cos t - \dfrac{1}{\cos t} = 0$

[a. cercare una soluzione $\psi = t^\alpha$; b. cercare una soluzione $\psi = \alpha(\cos t)^n$].

21.* Dimostrare che il birapporto di 4 soluzioni dell'equazione di Riccati è costante.

$$\left(\text{birapporto tra } y_1, y_2, y_3, y_4 := \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4}\Big/\frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4}\right).$$

[Porre $y_1 - y_3 = z_1$, $y_1 - y_4 = z_2$, $y_2 - y_3 = u_1$, $y_2 - y_4 = u_2$; dimostrare che $\dot{z}_1/z_1 = z_1P - Q - 2Py_1$, $\dot{z}_2/z_2 = z_2P - Q - 2Py_1$ e quindi che $\dfrac{d}{dt}\log(z_1/z_2) = -P(y_3 - y_4)$. Dimostrare in maniera analoga che $\dfrac{d}{dt}\log(u_1/u_2) = -P(y_3 - y_4)$. La conclusione è poi facile].

Equazioni omogenee (o di Manfredi)

Sono equazioni della forma

$$\dot{y} = f\left(\frac{y}{t}\right), \tag{1.52}$$

o alternativamente, $\dot{y} = \varphi(t, y)$ con φ omogenea di grado zero: $(\varphi(\lambda t, \lambda y) = \varphi(t, y))$, f, φ continue in un intervallo e in un aperto di $\mathbb{R}^2$, rispettivamente.

Ponendo

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \quad \text{ossia} \quad y(t) = t\,z(t) \tag{1.53}$$

si trova $\dot{y} = z + t\,\dot{z}$ che, sostituita nella (1.52) dà per z l'equazione a variabili separabili

$$\dot{z} = \frac{f(z) - z}{t}\ .$$

Risolta l'equazione in z, si determina y dalla (1.53).

22. Integrare le seguenti equazioni omogenee

a. $\dot{y} = \dfrac{t^3 + y^3}{t\,y^2}$ b. $\dot{y} = \dfrac{y}{t + \sqrt{t^2 + y^2}}$.

23 Dimostrare che l'integrale generale della (1.52) si può scrivere nella forma

$$t = c\psi\left(\frac{y}{t}\right),$$

a cui vanno aggiunte le eventuali rette del tipo $y = m\,t$ dove m soddisfa la relazione $f(m) = m$.

Dedurre che la famiglia di soluzioni è invariante per omotetie con centro nell'origine.

24. Con riferimento alla figura, determinare tutte le curve per le quali $\overline{MT}^2 = \overline{OT}^2$.

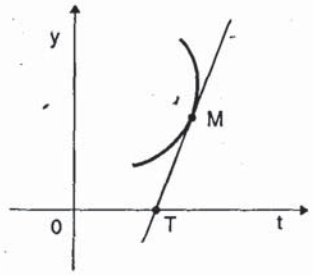
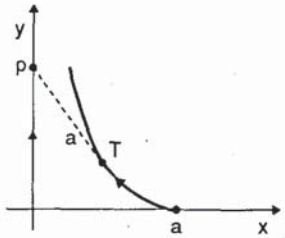


Fig. 4.8

25. *Un problema di inseguimento.* Un punto **p** si muove nel piano (x, y) lungo l'asse y, mentre un altro punto T lo "insegue" mantenendo costante $(= a)$ la distanza da **p**. Il termine "insegue" è riferito al fatto che il moto di T è sempre diretto verso **p**. Determinare la traiettoria di T (fig. 4.9) supponendo che **p** parta dall'origine e T dal punto $(a, 0)$.



26. Dimostrare che un'equazione del tipo

$$\dot{y} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

può essere ricondotta ad un'equazione omogenea se $ab' - a'b \neq 0$ o ad una equazione a variabili separabili se $ab' - a'b = 0$. Integrare poi le equazioni seguenti:

a. $\dot{y} = \dfrac{2y + t + 1}{2t + 4y + 5}$ b. $\dot{y} = \dfrac{2y - t + 1}{2t + 4y + 5}$.

Equazioni riconducibili a differenziali esatte. Fattore integrante.

Un'equazione del tipo

$$\dot{y} = -\frac{P(t,y)}{Q(t,y)}\,, \tag{1.54}$$

è associata alla forma differenziale

$$\omega = P(t,y)dt + Q(t,y)dy\ .$$

Se ω è esatta il metodo di integrazione è illustrato nel paragrafo 1.6.

Se ω non è esatta si può cercare un fattore integrante come s'è visto nell'esercizio 12, sezione 2, capitolo 1 del presente volume, ossia una funzione $\mu = \mu(t,y)$ tale che $\mu\omega$ sia esatta.

Ricordiamo che μ deve soddisfare l'equazione (alle derivate parziali)

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

che è, in generale, più difficile della (1.54). Se però si ha che

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = g(t) \quad \text{(funzione della sola } t\text{)}$$

oppure

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = h(y) \quad \text{(funzione della sola } y\text{)}$$

allora

$$\mu(t) = e^{\int g(t)dt} \quad \text{oppure} \quad \mu(y) = e^{-\int h(y)dy}$$

sono rispettivamente fattori integranti.

Se $\mu \neq 0$, l'integrale generale della (1.54) è assegnato dalla formula $G(x,y) = c$, dove G è una funzione potenziale per $\mu\omega$.

27. Integrare, mediante l'uso di fattori integranti, le seguenti equazioni:

a. $(t + y^2)dt + t\,y\,dy = 0$ b. $(y + t\,y^2)dt - t\,dy = 0$

c. $(3t + 2y)dt + t\,dy = 0$

Traiettorie di una famiglia di curve

Sia $\Phi(x,y,c) = 0$ una famiglia ad un parametro di curve piane di equazione $y = y(x)$, con Φ di classe C^2 in un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Derivando rispetto a x si ottiene:

$$\Phi_x + \Phi_y\,\dot{y} = 0\ . \tag{1.55}$$

Supponendo $\Phi_c \neq 0$, l'equazione $\Phi(x,y,c) = 0$ definisce (localmente) $c = c(x,y)$, che sostituita in (1.55) dà l'equazione differenziale della famiglia:

$$F(x,y,\dot{y}) := \Phi_x(x,y,c(x,y)) + \Phi_y(x,y,c(x,y))\dot{y} = 0\ . \tag{1.56}$$

A partire dalla (1.56) possiamo costruire l'equazione differenziale

$$F(x,z,\psi(\dot{z})) = 0 \tag{1.57}$$

dove ψ è una opportuna funzione reale.

L'integrale generale della (1.57) si chiama *famiglia delle ψ–traiettorie* della famiglia data. Si noti che confrontando la (1.56) e la (1.57) si vede che, se $(x,y) = (x,z)$ e la curva soluzione della (1.56) che passa per questo punto ha pendenza $\dot{y}$, allora la pendenza $\dot{z}$ della curva soluzione della (1.57), che passa per il medesimo punto, è legata ad $\dot{y}$ dalla relazione

$$\dot{y} = \psi(\dot{z})\ . \tag{1.58}$$

Il caso più importante si ha quando $\psi(s) = -1/s$. Le ψ–traiettorie si chiamano *traiettorie ortogonali* e la (1.57) diventa

$$F(x,z,-1/\dot{z}) = 0\ .$$

In tal caso infatti le ψ–traiettorie tagliano ortogonalmente le curve della famiglia: $\dot{y} = -1/\dot{z}$ è la relazione di ortogonalità delle tangenti in un punto di intersezione.

28. Determinare le traiettorie ortogonali alle seguenti famiglie; illustrarle graficamente:

a. $y = c\,x^2$

b. $y^2 = 2p(x - c)$ (p fisso)

c. $\dfrac{x^2}{9+c} + \dfrac{y^2}{4+c} = 1 \quad (c > 0)$

d. $y^2 = a\dfrac{x^3}{2-x}$ (famiglia di cissoidi)

e. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$ (famiglia di lemniscate).

29. Dimostrare che la scelta di $\psi(s) = (s - \operatorname{tg}\alpha)/(1 + s\,\operatorname{tg}\alpha)$ nella (1.58), corrisponde alle *traiettorie isogonali*, che tagliano le curve della famiglia data sotto l'angolo α.

30. Determinare le traiettorie isogonali alla famiglia di rette $y = cx$, per $\alpha = \pi/6$ e $\alpha = \pi/4$. Disegnare le curve isogonali.

31. Determinare la forma che uno specchio curvo deve avere per riflettere parallelamente all'asse x i raggi luminosi provenienti da una sorgente S posta nell'origine (fig. 4.10).

Equazioni di Clairaut

Sono equazioni del tipo seguente (non in forma normale)

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1.59}$$

dove ψ è una funzione derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

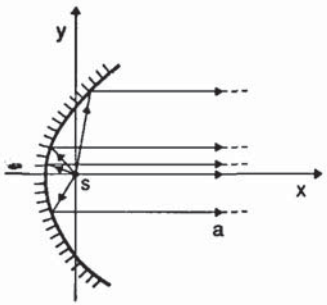


Fig. 4.10

Ad equazioni del tipo (1.59) si perviene quando si cerca di determinare una curva a partire da una proprietà che coinvolge le sue rette tangenti ma *non* i punti di contatto. Infatti se (x, y) è un punto sulla curva e y' è la pendenza della tangente, questa ha equazione

$$\xi = y + y'(\eta - x) = y'\eta + y - xy' .$$

Una proprietà della tangente si esprime dunque con una relazione tra y' e $y - xy'$, proprio come la (1.59).

Per integrare la (1.59), poniamo $y' = p$ e ... deriviamo entrambi i membri; si ottiene:

$$p = p + xp' + \psi'(p)\, p' ,$$

ovvero

$$p'[x + \psi'(p)] = 0 ,$$

che è risolta da $p' = 0$ e da $x = -\psi'(p)$.

La prima soluzione significa $p = c$ (costante) che, sostituita nella (1.59) individua la famiglia di rette (*integrale generale*):

$$y = cx + \psi(c) \qquad (c \in I) . \tag{1.60}$$

La seconda, insieme con la (1.59), dà la rappresentazione parametrica seguente di un'altra curva soluzione (*integrale singolare*)

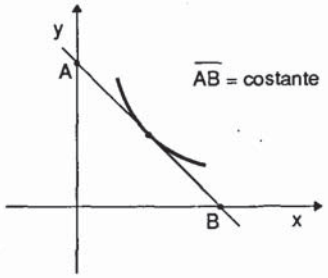
$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) . \end{cases} \tag{1.61}$$

Si noti che la (1.61) è l'inviluppo della famiglia di rette (1.60).

32. Integrare le seguenti equazioni di Clairaut

a. $y = xy' + y'^2$ b. $y = xy' + e^{y'}$ c. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$

33. Determinare una curva tale che il segmento sulla tangente in ogni suo punto intercettato dagli assi cartesiani abbia lunghezza costante.



Equazioni di Lagrange

Sono generalizzazioni delle equazioni di Clairaut:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') . \tag{1.62}$$

con φ, ψ derivabili in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Posto $p = y'$, derivando l'equazione si ottiene:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\, p' + \psi'(p)p' ,$$

ovvero

$$p'[x\varphi'(p) + \psi'(p)] = p - \varphi(p) . \tag{1.63}$$

Se p_0 è tale che $p_0 = \varphi(p_0)$, allora la retta $y = xp_0 + \psi(p_0)$ è integrale (in generale *singolare*) della (1.62). Se $p \neq \varphi(p)$ allora $p' \neq 0$ e p risulta invertibile; se $x = x(p)$ si ha: $x' = 1/p'$, che, sostituita nella (1.63), dà

$$[p - \varphi(p)]x' = x\varphi'(p) + \psi'(p) ,$$

che è lineare in $x = x(p)$. Se $x = x(p, c)$ è l'*integrale generale*, la soluzione della (1.62) è data in forma parametrica dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = x(p, c) \\ y = x(p, c)\varphi(p) + \psi(c) . \end{cases}$$

34. Integrare le seguenti equazioni di Lagrange:

a. $y = xy'^2 + y'^3$ b. $y = x\sqrt{y'} + y'$.

35. Dimostrare che, se una famiglia $\Phi(x, y, c) = 0$ di soluzioni di un'equazione differenziale $F(x, y, y') = 0$ ammette inviluppo, allora l'inviluppo è esso stesso soluzione dell'equazione differenziale (è un *integrale singolare*).

36. Interpretare geometricamente un'equazione del secondo ordine

$$y'' = f(t, y, y') ,$$

in termini di curvatura e pendenza del grafico di una soluzione nel punto (t, y).

Per concludere presentiamo alcuni artifici che permettono di trovare famiglie ad un parametro di soluzioni (che chiameremo ancora integrale generale) per equazioni in forma *non normale*.

Equazioni della forma a) $x = F(y')$ *oppure* b) $y = F(y')$.

a) Si pone $y' = p$. Allora $x = F(p)$ e, differenziando, si trova $dx = F'(p)dp$. Essendo poi $dy = p\,dx$ si ottiene $dy = pF'(p)dp$. Pertanto l'integrale generale è dato in forma parametrica dalle formule seguenti

$$x = F(p) \quad , \qquad y = \int pF'(p)\,dp \; .$$

b) Ancora si pone $y' = p$. Allora $y = F(p)$ e, differenziando, si trova $dy = F'(p)dp$. Essendo poi $dx = p^{-1}dy$ si ottiene $dx = p^{-1}F'(p)dp$.

L'integrale generale è dato dalle equazioni parametriche seguenti:

$$x = \int \frac{F'(p)}{p}\,dp \quad , \qquad y = F(p) \; .$$

37. Integrare le seguenti equazioni:

a. $y' \log y' - x = 0$ b. $y'^2 = y'^3 + x = 0$

c. $y\sqrt{1 + y'^2} = 1$ d. $yy' - yy'^2 - 1 = 0$

Equazioni della forma $F(y, y', y'') = 0$.

Si assume y come variabile indipendente e $x = x(y)$ come funzione incognita, pensando di cercare funzioni localmente invertibili. Posto poi $p = y'$ si ha:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

e l'equazione differenziale si trasforma nell'equazione, del primo ordine in p,

$$F(y, p, pp') = 0 \; . \tag{1.64}$$

Se $p = p(y, c_1)$ è integrale generale della (1.64) si ha, essendo $dx = \frac{1}{p}dy$:

$$x = \int \frac{dy}{p(y, c_1)} + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{N}) \; . \tag{1.65}$$

Alle soluzioni (1.65) vanno aggiunte eventuali soluzioni *non* invertibili localmente, del tipo $y = y_0$ dove $F(y_0, 0, 0) = 0$.

38. Integrare le seguenti equazioni.

a. $2yy'' + y'^2 = 0$ b. $yy'' + y'^2 - a = 0$ $(a \in \mathbb{R})$

c. $y^5 y'' = 1$ d. $\sqrt[3]{y'}\, y''' = 2$

e. $y'' - y'^2 + y^2 y'^3 = 0$ f. $y'' - yy'e^{y'} = 0$

2. EQUAZIONI LINEARI

I sistemi lineari sono l'unica (o quasi) vasta classe di equazioni differenziali per le quali l'insieme delle soluzioni possa essere descritto con grande accuratezza, e, nel caso dei sistemi autonomi, anche rappresentato esplicitamente. Essi hanno grande importanza, sia perché molti fenomeni fisici possono essere modellizzati da equazioni di questo tipo, sia perché anche fenomeni non lineari possono, in prima approssimazione, essere descritti da equazioni lineari.

2.1 Definizione e prime proprietà

Sia $A(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una famiglia di applicazioni lineari (cioè additive e omogenee) dipendente dal parametro $t \in I$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Scelto un sistema di riferimento in $\mathbb{R}^n$, per ogni fissato $t \in I$, $A(t)$ sarà rappresentata da una matrice quadrata $n \times n$, che indicheremo con $\mathbf{A}(t)$ o, più esplicitamente, con $\{a_{ij}(t)\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$:

$$A\colon \mathbf{y} \mapsto \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

dove $\mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ è il prodotto righe per colonne della matrice $\mathbf{A}(t)$ per il vettore (colonna) $\mathbf{y}$; il risultato $\mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ è ancora un vettore colonna. Sia pure $\mathbf{b}(t)$ una famiglia di vettori (colonna) dipendenti da t.

Definizione 2.1 - *Si dice sistema lineare un'equazione della forma*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \; . \tag{2.1}$$

$\mathbf{A}(t)$ prende il nome di *matrice dei coefficienti*, $\mathbf{b}(t)$ è il *termine noto*. Se $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$, il sistema si dice *omogeneo*. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ sono costanti, cioè indipendenti da t, il sistema è *autonomo*. Lo spazio delle fasi della (2.1) è $\mathbb{R}^n$, il campo di velocità è $\mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$.

Scriviamo una volta il sistema (2.1) in forma scalare:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\
\dot{y}_2 &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{y}_n &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \; .
\end{aligned}$$

Il sistema (2.1) è dunque un sistema di n equazioni differenziali lineari del 1° ordine. A questa forma è riconducibile la singola equazione differenziale lineare di ordine n, cioè un'equazione del tipo

$$y^{(n)} = a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y + b(t) \; , \tag{2.2}$$

ponendo

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} .$$

Abbiamo perciò il sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= y_n \\ \dot{y}_n &= a_1(t)y_n + \cdots + a_n(t)y_1 + b(t) , \end{aligned}$$

che è del tipo (2.1) ove si ponga

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} .$$

Analogamente, alla forma (2.1) possono ricondursi anche sistemi di ordine superiore al primo.

Esempi

2.1. (*Moto di una carica in un campo elettromagnetico*). Una carica elettrica e, situata in un campo elettromagnetico, non solo è soggetta ad una forza esercitata dal campo, ma, a sua volta, essa agisce sul campo modificandolo; le equazioni del moto risultano così non lineari. Tuttavia, se la carica è *piccola*, l'azione di questa sul campo può essere trascurata, e il campo può essere considerato noto, indipendente dalle coordinate o dalla velocità della carica; le equazioni del moto sono allora le seguenti:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{H} , \tag{2.3}$$

(e è la carica, m la massa della particella, c la velocità della luce, $\mathbf{v}$ la velocità della particella carica, $\mathbf{a}$ la sua accelerazione, $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ (eventualmente dipendenti da t) il campo elettrico e magnetico rispettivamente; la forza rappresentata dal secondo membro della (2.3) è detta *forza di Lorentz*).

La (2.3) è della forma (2.1) ove si ponga

$$\mathbf{y} = \mathbf{v} , \qquad \mathbf{b} = \frac{e}{m}\mathbf{E} , \qquad \mathbf{A} = \frac{e}{mc}\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.2. (*Piccole oscillazioni del pendolo*). Secondo le leggi della meccanica, le piccole oscillazioni di un pendolo sono descritte dall'equazione

$$\ddot{\theta} = -k\theta \tag{2.4}$$

dove θ è l'angolo di deviazione dalla verticale, $k = l/g$, l la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravità. L'equazione (2.4) corrisponde ad un sistema 2×2 del tipo (2.1) ponendo

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nelle applicazioni, l'equazione (2.1) descrive l'evoluzione di un sistema fisico, il cui *stato* è individuato dal vettore $\mathbf{y}$; il termine noto $\mathbf{b}$ rappresenta le forze esterne che agiscono sul sistema, i coefficienti della matrice $\mathbf{A}$ descrivono generalmente proprietà fisiche del sistema stesso: per esempio, nell'equazione (2.4) k è determinato dalla lunghezza del pendolo e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, cioè non ci sono forze esterne che agiscono sul pendolo; nell'equazione (2.3) il campo elettrico $\mathbf{E}$ è la forza esterna, mentre il campo magnetico $\mathbf{H}$ è interpretabile come una proprietà fisica del mezzo in cui ha sede il moto della particella. Possiamo pensare alla forza come alla *causa* che produce l'*effetto* $\mathbf{y}$; nei problemi trattati in questo capitolo la forza $\mathbf{b}$ e le proprietà fisiche del mezzo (matrice $\mathbf{A}$) sono ritenute note e si vuol determinare l'effetto $\mathbf{y}$: è questo il *problema diretto*. Non meno interessanti sono i *problemi inversi* , nei quali, a partire da informazioni sullo stato $\mathbf{y}$ del sistema, si vuole ricavare la forza $\mathbf{b}$ o i coefficienti a_{ij}.

Principio di sovrapposizione

Una proprietà fondamentale che discende dalla linearità dell'equazione (2.1) è il principio di sovrapposizione. Siano $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ due funzioni tali che:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{b}^1(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\psi} + \mathbf{b}^2(t) ;$$

se moltiplichiamo la prima equazione per c_1, la seconda per c_2 e quindi sommiamo membro a membro, si vede che la funzione $\boldsymbol{\chi} = c_1\boldsymbol{\varphi} + c_2\boldsymbol{\psi}$ soddisfa l'equazione:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\chi} + (c_1\mathbf{b}^1(t) + c_2\mathbf{b}^2(t)) . \tag{2.5}$$

In particolare: *se una forza* $\mathbf{b}^1$ *produce sul sistema l'effetto* $\boldsymbol{\varphi}$, *e una forza* $\mathbf{b}^2$ *l'effetto* $\boldsymbol{\psi}$, *allora la forza* $\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2$ *produce l'effetto* $\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}$.

Dalla (2.5) discendono due conseguenze elementari, ma importanti. Accanto al sistema (2.1) consideriamo il sistema omogeneo associato:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} . \tag{2.6}$$

i) *Se φ e ψ sono soluzioni del sistema* (2.6), *allora anche* $c_1\varphi + c_2\psi$ *è soluzione dello stesso sistema.* In altre parole, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo forma uno *spazio lineare*; vedremo tra un momento che la dimensione di questo spazio è precisamente n.

ii) *Se φ è una soluzione del sistema* (2.1) *e ψ una soluzione del sistema* (2.6), *allora anche $\varphi + \psi$ è soluzione di* (2.1); *viceversa, fissata una particolare soluzione φ di* (2.1), *ogni altra soluzione χ della stessa equazione è della forma: $\varphi + \psi$, essendo ψ una soluzione di* (2.1) (infatti: $\psi = \chi - \varphi$ è soluzione di (2.6) in virtù della (2.5)). In altre parole, l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo forma uno *spazio affine* (*).

Le seguenti affermazioni discendono immediatamente dai teoremi della sezione 1.

iii) (Esistenza e unicità). *Se $t \mapsto \mathbf{A}(t)$ e $t \mapsto \mathbf{b}(t)$ sono continue in I, allora esiste una sola soluzione di* (2.1) *di classe $C^1(I)$, soddisfacente la condizione*

$$\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \quad \tau \in I, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \ . \tag{2.7}$$

(Si noti che tale soluzione risulta definita in tutto l'intervallo I).

In particolare, l'equazione omogenea (2.6), accompagnata dalla condizione omogenea

$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{0} \ , \tag{2.8}$$

ammette solo la soluzione nulla.

Per l'equazione di ordine n (2.2), essendo essa riconducibile ad un sistema del tipo (2.1) con le posizioni sopra illustrate, l'affermazione precedente diventa: *se i coefficienti $a_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e il termine noto $b(t)$ dell'equazione sono funzioni continue in I, allora esiste una sola soluzione di* (2.2) *di classe $C^n(I)$ soddisfacente le n condizioni scalari*:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \xi_1 \\ y'(\tau) &= \xi_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(\tau) &= \xi_n \end{aligned} \tag{2.9}$$

iv) (Regolarità). *Se i coefficienti e il termine noto dell'equazione* (2.1) *sono di classe $C^k(I)$, ogni soluzione è di classe $C^{k+1}(I)$; se i primi sono C^∞ (o analitici), anche la soluzione è C^∞ (o analitica).*

v) *Lo spazio lineare Z, insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, ha dimensione n*; cioè esistono precisamente n vettori linearmente indipendenti che risolvono

(*) Se X è uno spazio lineare e $\mathbf{h}$ è un vettore fissato di X, diremo spazio affine l'insieme $Y = \{\mathbf{y} \in X : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \text{ con } \mathbf{x} \in X\}$. Per una definizione più precisa si rimanda ai testi di Algebra.

l'equazione (2.6). Infatti, fissato un punto $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, esiste un'unica soluzione $\boldsymbol{\phi}(t)$, che, ad un istante fissato, diciamo $t = 0$, passa per questo punto; possiamo perciò mettere in corrispondenza *biunivoca* le soluzioni $\boldsymbol{\phi}(t)$ con i punti di $\mathbb{R}^n$. Tale corrispondenza, tra Z e $\mathbb{R}^n$, è un *isomorfismo*; infatti, se $\boldsymbol{\phi}(t)$, $\boldsymbol{\phi}^1(t)$, $\boldsymbol{\phi}^2(t)$ sono le soluzioni corrispondenti rispettivamente ai punti $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2$ (scriviamo $\boldsymbol{\xi} \leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(t), \ldots$) risulta, $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{\xi}^1 + \boldsymbol{\xi}^2 \leftrightarrow \boldsymbol{\phi}^1(t) + \boldsymbol{\phi}^2(t)$$

$$c\,\boldsymbol{\xi} \leftrightarrow c\,\boldsymbol{\phi}(t)$$

Ora, due spazi lineari isomorfi hanno la stessa dimensione.

Procediamo allo studio più dettagliato delle soluzioni dei sistemi lineari; cominceremo con l'esaminare i sistemi autonomi omogenei, per i quali le soluzioni possono essere rappresentate in forma esplicita.

2.2 Richiami di algebra delle matrici

Raccogliamo, in questo paragrafo, alcuni risultati di algebra delle matrici, che utilizzeremo nel seguito. Questi argomenti sono in parte certamente noti allo studente dai corsi di Algebra o di Geometria; altri sono reperibili in testi classici, dove si possono trovare anche le dimostrazioni dei risultati che qui sono soltanto enunciati.

1. *Matrici ed applicazioni lineari.* Abbiamo già osservato (5.2.1, Vol. 1) che le matrici rappresentano le applicazioni lineari tra gli spazi euclidei. Siamo qui particolarmente interessati alle matrici quadrate $n \times n$, che rappresentano quindi applicazioni (o trasformazioni) lineari di $\mathbb{R}^n$ in sé (*). Queste matrici formano, rispetto alla usuale definizione di somma di matrici e prodotto di una matrice per un numero, uno spazio lineare di dimensione n^2, cioè isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, che indicheremo con $M(n \times n)$, o semplicemente, M.

Sia $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. La rappresentazione di A per mezzo di una matrice dipende dalla base scelta in $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ una base di $\mathbb{R}^n$; i vettori trasformati

$$\boldsymbol{\xi}^i = A(\mathbf{e}^i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

saranno esprimibili come combinazione lineare degli $\mathbf{e}^i$ per mezzo di certi coefficienti a_{ij}:

$$\boldsymbol{\xi}^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}^j \ .$$

(*) Ci riferiamo qui a matrici ad elementi reali; incontreremo più avanti anche matrici ad elementi complessi, che rappresentano naturalmente applicazioni lineari tra gli spazi $\mathbb{C}^n$.

Questi coefficienti determinano univocamente l'applicazione A; infatti, preso un qualunque vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}^i ,$$

risulta

$$A(\mathbf{x}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}^i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i A(\mathbf{e}^i) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i a_{ij} \mathbf{e}^j . \tag{2.10}$$

Detta $\mathbf{A}$ la matrice di coefficienti a_{ij}, la (2.10) si scrive

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Diremo perciò che la matrice $\mathbf{A}$ rappresenta l'applicazione A nella base $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$.

Dal punto di vista dell'esecuzione dei calcoli, alcune basi risultano più convenienti di altre. È chiaro che sarebbe molto conveniente disporre di una base nella quale l'applicazione A si potesse rappresentare con una matrice diagonale. Come è noto dall'algebra, ciò non è però sempre possibile.

2. *Cambiamenti di base. Matrici diagonali. Matrici di Jordan.* Supponiamo che $\mathbb{R}^n$ sia riferito alla base canonica $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$. Scegliamo n vettori linearmente indipendenti $\tilde{\mathbf{e}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}^n$ ed assumiamoli come nuova base. La matrice $\mathbf{S}$ ottenuta accostando i vettori (colonna) $\tilde{\mathbf{e}}^1, \ldots \tilde{\mathbf{e}}^n$, cioè

$$\mathbf{S} = (\tilde{\mathbf{e}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}^n)$$

rappresenta (nella base canonica) la trasformazione lineare S che fa passare da un riferimento all'altro: infatti

$$\tilde{\mathbf{e}}^i = S(\mathbf{e}^i) = \mathbf{S}\,\mathbf{e}^i , \quad \mathbf{e}^i = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{e}}^i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(la matrice inversa $\mathbf{S}^{-1}$ esiste poiché, essendo i vettori $\tilde{\mathbf{e}}^i, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}^n$ linearmente indipendenti, il determinante di $\mathbf{S}$ è non nullo). Più precisamente, un punto $\mathbf{p}$ che ha, nel vecchio riferimento, le coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avrà, nel nuovo riferimento, le coordinate $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ date da

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} .$$

Allora, se $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, risulta

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{x}} .$$

Perciò la matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} , \tag{2.11}$$

rappresenta la trasformazione A nel nuovo riferimento. Diremo che $\mathbf{A}$ e $\tilde{\mathbf{A}}$ sono matrici *equivalenti*.

Ricordiamo ora che un vettore (non nullo) $\mathbf{h}$ si dice *autovettore* della matrice $\mathbf{A}$ (o della trasformazione A) e il numero (reale o complesso) λ si dice *autovalore*, se vale l'equazione

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h} . \tag{2.12}$$

Il sistema omogeneo (2.12) ha soluzione se e solo se il determinante della matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ è uguale a zero:

$$D(\lambda) := |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0 . \tag{2.13}$$

L'equazione (2.13) è una equazione algebrica in λ di grado n; il polinomio $D(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* della matrice $\mathbf{A}$; esso non dipende dal riferimento scelto (come si può facilmente provare) ma soltanto dalla trasformazione A; perciò matrici equivalenti hanno gli stessi autovalori.

Si osservi che, se la matrice $\mathbf{A}$ è reale, e dunque il polinomio caratteristico è a coefficienti reali, gli autovalori sono reali oppure a coppie complessi coniugati; gli autovettori possono essere scelti in modo che agli autovalori reali corrispondano autovettori reali e ad autovalori complessi coniugati corrispondano autovettori complessi coniugati.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \le n$ gli autovalori *distinti* di $\mathbf{A}$ con molteplicità $m_1, \ldots, m_k$ rispettivamente; si noti che $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$. Ad ognuno dei λ_j corrisponde un sistema di autovettori che costituisce uno spazio vettoriale di dimensione d_j e che chiameremo *autospazio* associato a λ_j. Resta inteso che se λ_j è reale (complesso) il suo autospazio è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (di $\mathbf{C}^n$).

Diremo che l'autovalore è *regolare* se $d_j = m_j$, ossia se l'autospazio associato a λ_j ha dimensione pari alla molteplicità m_j. Distingueremo ora vari casi.

Autovalori reali tutti regolari. In tal caso $\sum_{j=1}^{k} d_j = n$ e pertanto *esistono* n *autovettori* $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n$ linearmente indipendenti; essi possono essere assunti come base per $\mathbb{R}^n$ (*). In questa base la trasformazione A è rappresentata da una matrice *diagonale*; risulta infatti, se $\mathbf{S} = (\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n)$, che le n relazioni $\mathbf{A}\,\mathbf{h}^i = \lambda_i\,\mathbf{h}^i$ si possono scrivere nell'unica equazione matriciale

$$\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathbf{S}\,\Lambda \quad \text{dove} \quad \Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) .$$

Dunque $\Lambda = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{S}$ e perciò Λ rappresenta A nella base $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n$.

(*) Ciò accade, ad esempio, se gli autovalori sono tutti distinti o se la matrice è simmetrica. In quest'ultimo caso, come abbiamo già ricordato in 2.1.4, gli autovalori sono reali ed esistono n autovettori (reali) che formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

***Esempio* 2.3** - La trasformazione lineare $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia rappresentata, nella base canonica $\mathbf{e}^1 = \binom{1}{0}$, $\mathbf{e}^2 = \binom{0}{1}$, dalla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $\mathbf{A}$ possiede gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$; al primo corrisponde l'autovettore $\mathbf{h}^1 = \binom{1}{-1} = \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2$; al secondo l'autovettore $\mathbf{h}^2 = \binom{1}{1} = \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$. Risulta perciò

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autovalori tutti regolari, anche complessi. In tal caso valgono ancora le considerazioni svolte precedentemente; tuttavia l'insieme di autovettori $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^n$ comprende coppie di autovettori complessi coniugati. Se alla coppia $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$ corrisponde la coppia di autovettori $\mathbf{h}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$, $\overline{\mathbf{h}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$, sostituendo $\mathbf{h}_j, \overline{\mathbf{h}}_j$ con $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{u}_j$ (nell'ordine) si ottiene ancora una base di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta A in questa base si ottiene sostituendo nella matrice $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ il blocco 2×2 $\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_j \end{pmatrix}$ con il blocco $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Autovalori non regolari. In questo caso la riduzione di una matrice alla forma diagonale non è possibile. Si dimostra però che è sempre possibile completare il sistema degli autovettori aggiungendovi $n - k$ vettori, opportunamente scelti, in modo che l'insieme ottenuto formi una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice $\mathbf{A}$ assume una forma particolarmente semplice, detta *forma di Jordan*.

Si dice blocco di Jordan (corrispondente all'autovalore λ), vedi Fig. 4.11, una matrice quadrata cosiffatta

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Fig. 4.11 Blocco di Jordan

Si dice che la matrice quadrata $\mathbf{A}(n \times n)$ è in forma di Jordan se essa consiste di uno o più blocchi di Jordan dislocati lungo la diagonale principale, mentre gli elementi non contenuti nei blocchi di Jordan sono tutti nulli. Si dimostra allora che: *data una matrice quadrata* $\mathbf{A}(n \times n)$, *di autovalori* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *con molteplicità rispettive* $m_1, \dots, m_r$, *esiste una trasformazione non singolare* $\mathbf{S}$ *per cui la matrice* $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ *è nella forma di Jordan*: essa risulta precisamente composta di $s(\geq r)$ blocchi; ogni blocco ha un autovalore dislocato lungo la diagonale; blocchi diversi possono corrispondere al medesimo autovalore.

Per la dimostrazione di questi risultati rimandiamo ai testi specifici di Calcolo matriciale.

3. *Proprietà invarianti per cambiamento di base.* Data una applicazione lineare $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, rappresentata dalla matrice $\mathbf{A}$ in una certa base $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$, quali sono le proprietà di A che risultano invarianti rispetto ad un cambiamento di base?.

Un teorema fondamentale dell'Algebra lineare (teorema di Cramer) afferma che l'applicazione A è invertibile se e solo se $|\mathbf{A}| \neq 0$; l'affermazione è significativa proprio perché il *determinante* di una matrice è un invariante della trasformazione A, cioè non dipende dal riferimento scelto. Ciò discende subito dal teorema di Binet (sul determinante di un prodotto di matrici) e dalla formula (2.11):

$$|\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{S}^{-1}|\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{S}| = |\mathbf{A}|\,.$$

Osserviamo che, per quanto detto al precedente punto 2, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ (ognuno ripetuto secondo la sua molteplicità) risulta, con un semplice calcolo:

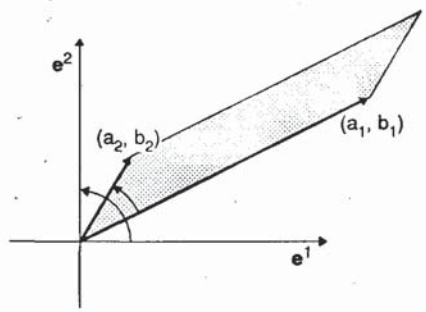
$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\,, \tag{2.14}$$

cioè il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori.

Più in generale, come abbiamo già ricordato, il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è un invariante per cambiamento della base; perciò sono invarianti gli autovalori di una matrice e le rispettive molteplicità.

Osservazione 2.1 - L'invarianza del determinante rispetto a cambiamenti del sistema di riferimento risulta chiara anche pensando al significato fisico–geometrico di $|\mathbf{A}|$: esso rappresenta il volume (orientato) del parallelepipedo i cui spigoli sono individuati dai vettori colonna della matrice $\mathbf{A}$

Fig. 4.12 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{A}| = a_1 b_2 - a_2 b_1$ = area del parallelogramma tratteggiato presa col segno + poiché la coppia di vettori $\binom{a_1}{b_1}$, $\binom{a_2}{b_2}$ ha il medesimo orientamento della coppia $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$.



Un altro invariante importante è la *traccia* di una matrice; questa è definita come la somma degli elementi che stanno sulla diagonale principale:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Se la matrice è diagonale o in forma di Jordan risulta allora

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,, \tag{2.15}$$

e poiché gli autovalori di $\mathbf{A}$ non dipendono dal riferimento scelto, così pure è per la traccia.

Tra il determinante e la traccia di una matrice intercorre la seguente relazione:

$$|\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}| = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}\mathbf{A} + O(\varepsilon^2) \quad \text{per } \varepsilon \to 0 \,. \tag{2.16}$$

Infatti, se λ_i $(i = 1, \dots, n)$ sono gli autovalori di $\mathbf{A}$, allora gli autovalori di $\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}$ sono $1 + \varepsilon\lambda_i$ e perciò:

$$|\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon\lambda_i) = 1 + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(\varepsilon^2) \,.$$

4. *Serie di matrici. La matrice esponenziale.* Come abbiamo già osservato, l'insieme M delle matrici quadrate $n \times n$ forma uno spazio lineare (di dimensione n^2). Si può, in vari modi, definire su M una *norma*; una buona definizione di norma di una matrice è la seguente:

$$\|\mathbf{A}\| := \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \,. \tag{2.17}$$

L'allievo può dimostrare senza difficoltà che la definizione (2.17) soddisfa i requisiti della norma e possiede anche la proprietà seguente:

$$\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \tag{2.18}$$

$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M$.

La norma induce su M la metrica e la topologia. Una successione $\{\mathbf{A}_k\} = \{(a_{ij}^{(k)})\}$ di matrici si dirà *convergente* alla matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ se

$$\|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \to 0 \quad \text{per } k \to \infty \,.$$

La serie di matrici

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \tag{2.19}$$

si dirà *convergente* se converge la successione delle somme parziali. Una condizione sufficiente per la convergenza della serie (2.19) è la convergenza della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_k\|$$

(teorema 3.2.2 della convergenza totale).

Esempi

2.4. Se $\|\mathbf{A}\| < 1$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ è convergente; infatti, per la (2.18) risulta: $\|\mathbf{A}^k\| \le \|\mathbf{A}\|^k$ e la serie geometrica $\sum \|\mathbf{A}\|^k$ è convergente, essendo la ragione minore di 1.

2.5. Per ogni matrice $\mathbf{A}$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \,, \tag{2.20}$$

è convergente; infatti è convergente la serie esponenziale $\sum \|\mathbf{A}\|^k/k!$. La matrice somma della serie (2.20) si dice *matrice esponenziale* e si indica col simbolo $e^{\mathbf{A}}$. Una definizione alternativa della stessa matrice, certamente non inaspettata, è la seguente (non dimostriamo l'equivalenza tra le due definizioni)

$$e^{\mathbf{A}} := \lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{I}_n + \frac{\mathbf{A}}{k}\right)^k \,. \tag{2.21}$$

Il calcolo della matrice $e^{\mathbf{A}}$, a partire dalla matrice $\mathbf{A}$, è generalmente complicato. Se però $\mathbf{A}$ è diagonale

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \,,$$

allora si ha subito

$$e^{\mathbf{A}} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \,.$$

Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, cioè esiste una matrice $\mathbf{S}$ tale che

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \,,$$

allora si calcola prima

$$e^{\widetilde{\mathbf{A}}} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \,,$$

e si ritorna poi alla base originaria (*)

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{S}^{-1} \,.$$

(*) Infatti: $\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{S}$. Essendo $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}\dots\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\dots\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})^k$ si trova $\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S} = e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}$ da cui $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\,e^{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{S}^{-1}$.

***Esempio* 2.6** - La matrice $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dell'esempio 2.3 è diagonalizzabile avendo gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ distinti. Risulta

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{\widetilde{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix},$$

ed essendo

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta infine

$$e^{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}.$$

Nonostante che il calcolo della matrice $e^{\mathbf{A}}$ sia generalmente assai complicato, il calcolo del suo determinante è molto semplice; vale la formula seguente:

$$|e^{\mathbf{A}}| = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}. \tag{2.22}$$

Infatti, ricordando che il determinante di una matrice è una funzione continua nei suoi elementi, abbiamo:

$$|e^{\mathbf{A}}| = \text{(per la (2.21))} = \left|\lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{I}_n + \frac{\mathbf{A}}{k}\right)^k\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\mathbf{I}_n + \frac{\mathbf{A}}{k}\right)^k\right| =$$

$$\text{(Teor. di Binet)} = \lim_{k\to\infty}\left|\mathbf{I}_n + \frac{\mathbf{A}}{k}\right|^k = \text{(per la (2.16))} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{tr}\mathbf{A}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^k = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}.$$

Dalla (2.22) si ricava che la matrice $e^{\mathbf{A}}$ è non singolare.

5. *Matrici dipendenti da un parametro.* Spesso dovremo considerare matrici (anche rettangolari e, in particolare, vettori riga o vettori colonna) i cui elementi sono funzioni di un parametro reale t. Scriveremo allora $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ e diremo che questa matrice è continua, derivabile, di classe C^k, etc. se tutti i suoi elementi $a_{ij}(t)$ hanno l'analoga proprietà. Porremo, per definizione,

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{A}(t) := \left(\lim_{t\to t_0} a_{ij}(t)\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$$\mathbf{A}'(t) := (a'_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$$

$$\int \mathbf{A}(t)dt := \left(\int a_{ij}(t)dt\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Da queste definizioni scendono le regole usuali del calcolo differenziale; per esempio, se $\mathbf{x}(t)$ è un vettore (colonna), per la regola di Leibniz abbiamo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}'(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}'(t).$$

In particolare, se $\mathbf{A}$ è costante, la matrice $e^{t\mathbf{A}}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ (anzi, analitica) e risulta

$$\begin{aligned} &e^{0\cdot\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n \\ &e^{t\mathbf{A}}\cdot e^{s\mathbf{A}} = e^{(t+s)\mathbf{A}} \\ &[e^{t\mathbf{A}}]^{-1} = e^{-t\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}. \tag{2.24}$$

La prima delle precedenti formule segue subito dalla definizione della matrice esponenziale; la terza discende dalla prima e dalla seconda (ponendo in questa $t = -s$); verifichiamo le formule (2.23) e (2.24).

Per la (2.23) abbiamo:

$$\left(\mathbf{I}_n + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \cdots\right)\left(\mathbf{I}_n + s\mathbf{A} + \frac{s^2}{2}\mathbf{A}^2 + \cdots\right) =$$

$$= \mathbf{I}_n + (t+s)\mathbf{A} + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2}\right)\mathbf{A}^2 + \cdots$$

$$= \mathbf{I}_n + (t+s)\mathbf{A} + \frac{(t+s)^2}{2}\mathbf{A}^2 + \cdots$$

Per la (2.24) abbiamo:

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\,e^{t\mathbf{A}}.$$

2.3 Sistemi omogenei. Wronskiano. Matrice di transizione

Riprendiamo in considerazione il sistema omogeneo (2.6):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}.$$

dove supporremo che $\mathbf{A}(t)$ sia continua nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Come abbiamo già detto, le soluzioni di questo sistema formano uno spazio lineare Z, n–dimensionale; basterà quindi conoscere una base di Z, cioè n soluzioni linearmente indipendenti (o, come diremo, un *sistema fondamentale* di soluzioni) per avere ogni altra soluzione, cioè la *soluzione generale* del sistema.

Osserviamo esplicitamente che n *soluzioni* linearmente indipendenti sono n vettori

$$\boldsymbol{\varphi}^1(t)\ ,\ \boldsymbol{\varphi}^2(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}^n(t) \tag{2.25}$$

(definiti sull'intervallo I) tali che l'equazione

$$c_1\boldsymbol{\varphi}^1(t)+c_2\boldsymbol{\varphi}^2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}^n(t)=\mathbf{0} \qquad \forall t\in I \tag{2.26}$$

non può essere soddisfatta se gli scalari $c_1,c_2,\dots,c_n$ non sono tutti nulli. In virtù del teorema di esistenza ed unicità, se la soluzione di un sistema omogeneo è nulla in un punto, è identicamente nulla in tutto l'intervallo in cui è definita; perciò la combinazione (2.26) è sempre nulla o sempre diversa da $\mathbf{0}$ per ogni $t\in I$. Possiamo dunque enunciare la seguente

Proposizione 2.1 - *Condizione necessaria e sufficiente perché i vettori soluzione* (2.25) *siano linearmente indipendenti è che, indicata con* $\mathbf{W}(t)$ *la matrice che si ottiene accostando i vettori colonna* $\boldsymbol{\varphi}^1(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}^n(t)$, *cioè*

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_1^n(t)\\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \dots & \varphi_2^n(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \dots & \varphi_n^n(t)\end{pmatrix} \tag{2.27}$$

risulti:

$$|\mathbf{W}(t)|\neq 0 \qquad \forall t\in I\ .$$

Nel caso dell'equazione di ordine n

$$z^{(n)}=a_1(t)z^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)z \tag{2.28}$$

(con $a_j(t)$, $j=1,\dots,n$ continue su I) ricordando come ci si riconduce dall'equazione al sistema, se $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ sono n soluzioni della (2.28), la matrice (2.27) prende la forma seguente

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

In virtù della Proposizione 2.1, i vettori colonna della matrice (2.29) sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante di questa matrice è $\neq 0$ in I. D'altra parte questi vettori sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le prime componenti (cioè le soluzioni dell'equazione); infatti, se l'equazione

$$c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)=0 \qquad \forall t\in I$$

è soddisfatta con coefficienti non tutti nulli, da essa, derivando $n-1$ volte, ricaviamo

$$c_1\varphi_1'(t)+\cdots+c_n\varphi_n'(t)=0$$
$$\dots$$
$$c_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(t)=0$$

ovvero, le colonne della matrice (2.29) sono linearmente dipendenti. Il viceversa è ovvio.

In conclusione, la proposizione 2.1 vale anche per le equazioni di ordine n: *condizione necessaria e sufficiente perché* n *soluzioni dell'equazione* (2.28) *siano linearmente indipendenti è che il determinante della matrice* (2.29) *sia* $\neq 0$.

Definizione 2.2 - *Date* n *funzioni vettoriali*

$$\boldsymbol{\varphi}^i(t)\colon I\to\mathbb{R}^n \quad i=1,\dots,n$$

si chiama matrice wronskiana (relativa a questi vettori) la matrice (2.27), *le cui colonne sono costituite dai vettori* $\boldsymbol{\varphi}^i(t)$:

$$\mathbf{W}(t)=(\boldsymbol{\varphi}^1(t),\boldsymbol{\varphi}^2(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}^n(t))\ ;$$

si chiama **wronskiano**, *e si indica con* $W(t)$, *il determinante di questa matrice:*

$$W(t):=|\mathbf{W}(t)|\ .$$

Analogamente, date n *funzioni*

$$\varphi_i(t)\colon I\to\mathbb{R} \quad i=1,\dots,n$$

si chiama matrice wronskiana (relativa a queste funzioni) la matrice (2.29) *e si chiama ancora wronskiano il determinante di questa matrice.*

***Esempio* 2.7** - Le funzioni $\cos t,\sin t$ (che, evidentemente, sono soluzioni dell'equazione: $\ddot{z}+z=0$) sono linearmente indipendenti (su tutta la retta); infatti il loro wronskiano risulta

$$W(t)=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1\ .$$

Il seguente controesempio indica che la Proposizione 2.1 è falsa se le funzioni considerate non sono soluzioni di un sistema lineare; più precisamente, l'annullarsi del wronskiano è condizione solo necessaria, ma non sufficiente, per la dipendenza lineare delle funzioni.

***Esempio* 2.8** - Siano $\varphi_1(t)=t^2$, $\varphi_2(t)=t|t|$ e $I=\mathbb{R}$. Risulta

$$W(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t|t|\\ 2t & 2|t|\end{vmatrix}=0\ ,$$

ma $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono linearmente indipendenti. Infatti, l'equazione

$$c_1 t^2 + c_2 t|t| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

implica, per $t = 1$, $c_1 + c_2 = 0$ e, per $t = -1$, $c_1 - c_2 = 0$, da cui segue $c_1 = c_2 = 0$.

Dunque, la conoscenza di una matrice wronskiana di soluzioni con determinante diverso da zero consente di scrivere l'integrale generale del sistema omogeneo; esso può scriversi nella forma compatta seguente:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}^1 + c_2\boldsymbol{\varphi}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\varphi}^n = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} ,$$

dove $\mathbf{c}$ è un vettore (colonna) di costanti arbitrarie $c_1, \ldots, c_n$. Osserviamo che la matrice wronskiana soddisfa l'equazione seguente

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t) . \tag{2.30}$$

Infatti, uguagliando gli elementi corrispondenti delle matrici a primo e secondo membro della (2.30) abbiamo

$$\dot{\varphi}^i_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi^i_k \quad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

Le precedenti relazioni scalari si possono anche scrivere, in forma vettoriale,

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^i = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}^i \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

che esprimono dunque il fatto che i vettori $\boldsymbol{\varphi}^i$ sono soluzioni del sistema omogeneo.

Se le soluzioni $\boldsymbol{\varphi}^1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^n$ sono scelte in modo che

$$\boldsymbol{\varphi}^1(\tau) = \mathbf{e}^1 , \ \boldsymbol{\varphi}^2(\tau) = \mathbf{e}^2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^n(\tau) = \mathbf{e}^n ,$$

risulterà

$$\mathbf{W}(\tau) = \mathbf{I}_n . \tag{2.31}$$

Una matrice wronskiana che soddisfi la (2.31) si indica con $\mathbf{W}(t, \tau)$ e prende il nome di *matrice di transizione*. Il nome deriva dal fatto che la soluzione del sistema omogeneo che, per $t = \tau$, coincide col vettore $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ si scrive

$$\boldsymbol{\varphi}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{W}(t, \tau)\,\boldsymbol{\xi} \tag{2.32}$$

cioè $\mathbf{W}(t, \tau)$ agisce come un operatore che fa passare dalla soluzione al tempo τ (il vettore $\boldsymbol{\xi}$) alla soluzione al tempo t.

Le proprietà fondamentali della matrice di transizione sono:

i) $\mathbf{W}(t, t) = \mathbf{I}_n \qquad \forall t \in I$

ii) $\mathbf{W}(t, t_1)\mathbf{W}(t_1, \tau) = \mathbf{W}(t, \tau) \qquad \forall t, t_1, \tau \in I$

iii) $[\mathbf{W}(t, \tau)]^{-1} = \mathbf{W}(\tau, t) \qquad \forall t, \tau \in I$.

La i) deriva dalla (2.31); la iii) segue immediatamente dalla ii); la ii) esprime semplicemente il fatto che, a partire dalla soluzione "iniziale" al tempo τ, possiamo ottenere la soluzione "finale" al tempo t calcolando prima la soluzione al tempo "intermedio" t_1 e poi, assumendo questa come nuovo dato iniziale, calcolare la soluzione al tempo t.

Osserviamo infine che anche il determinante wronskiano, come la matrice wronskiana, soddisfa ad una equazione differenziale. Vale infatti il seguente teorema.

■ **Teorema 2.2** - (di Liouville). *Il wronskiano di un sistema di soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}$ soddisfa l'equazione differenziale*

$$\dot{W} = a(t)W \tag{2.33}$$

dove $a(t) = \operatorname{tr}\mathbf{A}(t)$ è la traccia della matrice $\mathbf{A}(t)$.

Dalla (2.33), ricordando la formula (1.43), si ricava

$$W(t) = W(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right) \tag{2.34}$$

dove τ è un punto qualsiasi di I. Nel caso dell'equazione (2.28) la (2.34) si scrive

$$W(t) = W(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a_1(s)ds\right) . \tag{2.35}$$

Dalla formula (2.34) si ha una conferma di quanto abbiamo osservato all'inizio del paragrafo: il wronskiano di un sistema di soluzioni dell'equazione (2.6) o è identicamente nullo su I, o è diverso da zero in ogni punto di I.

Per concludere dunque intorno alla dipendenza o indipendenza lineare di un sistema di soluzioni basterà calcolare il wronskiano in un punto (convenientemente scelto) dell'intervallo I.

Dimostrazione del teorema 2.2 - Per ogni intervallo $(\tau, \tau + \varepsilon) \subset I$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\tau + \varepsilon) &= \mathbf{W}(\tau) + \varepsilon\dot{\mathbf{W}}(\tau) + o(\varepsilon) = \text{(per la (2.30))}\\ &= (\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}(\tau))\mathbf{W}(\tau) + o(\varepsilon) \qquad \text{per } \varepsilon \to 0 .\end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}W(\tau + \varepsilon) &= |(\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}(\tau))\mathbf{W}(\tau)| + o(\varepsilon) = \text{(Teor. di Binet)}\\ &= W(\tau)|\mathbf{I}_n + \varepsilon\mathbf{A}(\tau)| + o(\varepsilon) = \text{(formula (2.16))}\\ &= W(\tau)(1 + \varepsilon a(\tau)) + o(\varepsilon) .\end{aligned}$$

Risulta perciò

$$\frac{W(\tau + \varepsilon) - W(\tau)}{\varepsilon} = a(\tau)W(\tau) + o(1)$$

Facendo tendere ε a zero, si ha la tesi. □

Una interpretazione geometrica di questo teorema è accennata nel paragrafo 3.8.

2.4 Sistemi omogenei a coefficienti costanti

Supponiamo ora che la matrice $\mathbf{A}$ del sistema sia *costante* (sistema autonomo). Allora, ricordando quanto è stato detto nel paragrafo 2.1 circa l'esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni dei sistemi lineari, possiamo subito affermare che: *ogni soluzione del sistema (omogeneo) è definita su tutta la retta ed è analitica; per ogni punto $\boldsymbol{\xi}$ di $\mathbb{R}^n$ passa una e una sola soluzione.*

Il seguente teorema ci dà una rappresentazione di queste soluzioni.

■ **Teorema 2.3** - *Dato il sistema omogeneo: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ con $\mathbf{A}$ costante,*

i) *detto $\boldsymbol{\xi}$ un vettore arbitrario di $\mathbb{R}^n$, il vettore*

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{t\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi} \qquad t \in \mathbb{R}$$

è una soluzione del sistema.

ii) *Le colonne della matrice $e^{t\mathbf{A}}$ formano un sistema fondamentale di soluzioni.*

iii) *Il problema di Cauchy: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$, $\mathbf{z}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ ammette, $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, l'unica soluzione: $\boldsymbol{\varphi}(t;\tau,\xi) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}$.*

In altre parole, la matrice di transizione $\mathbf{W}(t,\tau)$ è, in questo caso, $e^{(t-\tau)\mathbf{A}}$.

Dimostrazione - La verifica di i) è immediata, applicando la formula (2.24). Per provare la ii) basta scegliere per $\boldsymbol{\xi}$, uno dopo l'altro, i versori del riferimento canonico $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots$; allora $e^{t\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}$ fornisce, di volta in volta, la prima, la seconda, ... colonna della matrice $e^{t\mathbf{A}}$.

Queste colonne sono vettori linearmente indipendenti poiché, come abbiamo osservato, la matrice $e^{t\mathbf{A}}$ è non singolare ($\forall t \in \mathbb{R}$). La iii) discende dalla i) tenuto conto che $e^{0\cdot\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n$. □

Resta il problema di calcolare esplicitamente $e^{t\mathbf{A}}$. Se $\mathbf{A}$ è diagonale (cioè le equazioni del sistema sono disaccoppiate) non c'è alcuna difficoltà. Supponiamo che $\mathbf{A}$ non sia diagonale; distinguiamo i seguenti casi.

Sistema con autovalori regolari

La matrice $\mathbf{A}$ possiede n autovettori linearmente indipendenti e perciò è diagonalizzabile; cioè esiste una matrice $\mathbf{S}$ (le cui colonne sono gli autovettori $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n$ di $\mathbf{A}$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ eventualmente coincidenti). Risulta allora, per quanto visto nel precedente paragrafo,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) ,$$

$$e^{t\widetilde{\mathbf{A}}} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}) ,$$

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{t\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{S}^{-1} .$$

$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ il vettore $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{S}e^{t\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ è dunque una soluzione. Essendo $\boldsymbol{\xi}$ arbitrario, anche $\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ è arbitrario; scegliamo allora $\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}^i$ $(1 \le i \le n)$; abbiamo

$$\mathbf{S}e^{t\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{e}^i = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \ldots, \mathbf{h}^n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{h}^i e^{\lambda_i t} .$$

Perciò un sistema fondamentale di soluzioni è dato da:

$$\mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t} , \ \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t} , \ldots , \ \mathbf{h}^n e^{\lambda_n t} .$$

Si noti che il wronskiano di queste soluzioni è

$$W(t) = |\mathbf{S}\, e^{t\widetilde{\mathbf{A}}}| = |\mathbf{S}|\, e^{t(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} = |\mathbf{S}| e^{at}$$

dove a è la traccia di $\mathbf{A}$; tale risultato poteva essere dedotto dalla formula (2.22); tale formula infatti (scritta ponendo $t\mathbf{A}$ al posto di $\mathbf{A}$) non è altro che il caso particolare del teorema di Liouville corrispondente ad una matrice $\mathbf{A}$ costante.

***Esempio* 2.9** - Trovare un sistema fondamentale di soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = 2z_1 + z_2 + 6z_3 \\ \dot{z}_3 = z_2 - z_3 . \end{cases}$$

Trovare anche la soluzione che, per $t = 0$, coincide col vettore $\mathbf{e}^1$.

La matrice dei coefficienti è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono le radici dell'equazione:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = 0 .$$

Abbiamo perciò: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; la matrice $\mathbf{A}$ è dunque diagonalizzabile. Gli autovettori corrispondenti sono proporzionali ai tre seguenti:

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{h}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Un sistema fondamentale di soluzioni è perciò dato da:

$$\varphi^1(t) = \mathbf{h}^1 \ , \quad \varphi^2(t) = \mathbf{h}^2 e^{3t} \ , \quad \varphi^3(t) = \mathbf{h}^3 e^{-3t}$$

La soluzione generale sarà della forma:

$$\varphi(t) = c_1\mathbf{h}^1 + c_2\mathbf{h}^2 e^{3t} + c_3\mathbf{h}^3 e^{-3t}$$

con c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie. Per trovare la soluzione che, per $t = 0$, coincide col versore $\mathbf{e}^1$ imponiamo la condizione: $\varphi(0) = \mathbf{e}^1$.

Si determinano così le tre costanti: si trova, con facili calcoli,

$$c_1 = \frac{1}{9} \ , \quad c_2 = \frac{1}{9} \ , \quad c_3 = -\frac{1}{9} \ .$$

e perciò

$$\varphi(t; 0, \mathbf{e}^1) = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} + \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}e^{-3t} \\ -\frac{2}{9} + \frac{4}{9}e^{3t} - \frac{2}{9}e^{-3t} \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

Il caso degli autovalori non regolari è più complicato; prima di accennarvi, esaminiamo il caso della singola equazione di ordine n.

Equazione di ordine n

Consideriamo l'equazione

$$z^{(n)} = a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z \ . \tag{2.36}$$

Per avere una rappresentazione esplicita delle soluzioni non c'è bisogno di passare al corrispondente sistema del primo ordine. Istruiti da quanto abbiamo visto nel caso precedente sappiamo che (almeno nel caso di autovalori distinti) le soluzioni sono esponenziali della forma $e^{\lambda t}$; sostituendo $e^{\lambda t}$ al posto di z nella (2.36) scopriamo che l'esponenziale è soluzione dell'equazione se λ è una radice della seguente equazione algebrica:

$$D(\lambda) := \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \cdots - a_n = 0 \ . \tag{2.37}$$

La (2.37) non è altro che l'equazione caratteristica del sistema corrispondente alla (2.36); la chiameremo *equazione caratteristica* dell'equazione differenziale (2.36) e $D(\lambda)$ sarà chiamato *polinomio caratteristico*. Se dunque la (2.37) ha n radici distinte:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n \ ,$$

un sistema fondamentale di soluzioni è dato dalle funzioni:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t} \ . \tag{2.38}$$

Che le funzioni (2.38) siano linearmente indipendenti segue, oltre che dall'analogo risultato già ottenuto per i sistemi, anche osservando direttamente la matrice wronskiana che, per le (2.38), si scrive

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} .$$

Abbiamo allora

$$W(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Come è noto (se non è noto, dimostrare per esercizio che) l'ultimo determinante sopra scritto (detto determinante di Vandermonde) è nullo se e solo se i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non sono tutti diversi tra di loro.

***Esempio* 2.10** - L'equazione dell'oscillatore armonico classico:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 .$$

ha, come equazione caratteristica: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$; alle due radici $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$ corrispondono le due soluzioni: $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$. Al posto di queste due soluzioni (che fanno intervenire esponenziali complessi) possiamo sceglierne altre due, ottenute dalle precedenti per combinazione lineare: per esempio, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ (*). La soluzione generale dell'equazione si scriverà allora

$$z(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \ .$$

L'equazione

$$\ddot{z} - \omega^2 z = 0 \ ,$$

(*) Si ricordino le formule di Eulero

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \ , \quad \sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

possiede invece le due soluzioni: $e^{\omega t}$, $e^{-\omega t}$; l'integrale generale è perciò

$$z(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} .$$

La prima equazione descrive un fenomeno oscillatorio (addirittura periodico con periodo $p = 2\pi/\omega$), la seconda fenomeni di decadimento (la soluzione $e^{-\omega t}, \omega > 0$) oppure di crescita (la soluzione $e^{\omega t}, \omega > 0$) esponenziale.

Se l'equazione caratteristica (2.37) possiede autovalori multipli, e perciò vi sono soltanto $r < n$ radici distinte: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, dovremo procurarci altre $n - r$ soluzioni indipendenti (oltre agli esponenziali $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_r t}$) per avere un sistema fondamentale di soluzioni. Possiamo congetturare la forma di soluzioni diverse dalle precedenti nel modo seguente.

Se λ_1 e λ_2 sono autovalori, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni indipendenti; anche $e^{\lambda_1 t}$ e $(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$ sono soluzioni indipendenti; quando $\lambda_2 \to \lambda_1$ la prima coppia di soluzioni si riduce all'unica funzione $e^{\lambda_1 t}$, mentre la seconda coppia fornisce le funzioni $e^{\lambda_1 t}$ e $t\, e^{\lambda_1 t}$, che, come è facile verificare, sono ancora soluzioni indipendenti.

Considerazioni analoghe fanno pensare che, se λ è una radice di molteplicità m dell'equazione caratteristica, le funzioni

$$e^{\lambda t}, t\, e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t} ,$$

sono soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale.

Le precedenti considerazioni vengono precisate nel seguente

■ **Teorema 2.4** - *L'equazione caratteristica* (2.37) *abbia le radici*

λ_1 *con molteplicità* m_1
λ_2 *con molteplicità* m_2
$\vdots$
λ_r *con molteplicità* m_r

$(m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n)$. *Allora un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione* (2.36) *è dato da*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, t\, e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ &e^{\lambda_2 t}, t\, e^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e^{\lambda_r t}, t\, e^{\lambda_r t}, \ldots, t^{m_r - 1} e^{\lambda_r t} . \end{aligned}$$

NO *Dimostrazione* - Sia λ una radice dell'equazione caratteristica con molteplicità m. Sarà allora

$$D(\lambda) = D'(\lambda) = \cdots = D^{(m-1)}(\lambda) = 0 , \; D^{(m)}(\lambda) \neq 0 . \tag{2.39}$$

Ponendo $\alpha_0 = 1$, $\alpha_k = -a_k$ per $1 \leq k \leq n$ abbiamo

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n-j} \lambda^j .$$

Le successive derivate di $D(\lambda)$ sono date da

$$D^{(k)}(\lambda) = k! \sum_{j=k}^{n} \alpha_{n-j} \binom{j}{k} \lambda^{j-k} , \; 0 \leq k \leq n . \tag{2.40}$$

Poniamo ora, nella (2.36), $z(t) = e^{\lambda t} y(t)$ e cerchiamo l'equazione soddisfatta dalla nuova incognita $y(t)$. Abbiamo, per la formula di Leibniz,

$$z^{(j)}(t) = \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y^{(k)}(t) \lambda^{j-k} \right) e^{\lambda t} .$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n-j} z^{(j)}(t) &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n-j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y^{(k)}(t) \lambda^{j-k} = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} y^{(k)}(t) \sum_{j=k}^{n} \alpha_{n-j} \binom{j}{k} \lambda^{j-k} = \text{(per la (2.40))} \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k)}(\lambda)}{k!} y^{(k)}(t) . \end{aligned}$$

Tenuto conto delle (2.39), l'equazione soddisfatta dalla $y(t)$ è:

$$\frac{D^{(m)}(\lambda)}{m!} y^{(m)}(t) + \cdots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} y^{(n)}(t) = 0 .$$

Questa possiede le m soluzioni

$$1, t, t^2, \ldots, t^{m-1} .$$

Perciò la (2.36) possiede le m soluzioni

$$e^{\lambda t}, t\, e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t} .$$

Ripetendo il ragionamento per i diversi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ otteniamo tutte le n soluzioni indicate nell'enunciato del teorema.

Dobbiamo mostrare che esse sono linearmente indipendenti. Un esame diretto del wronskiano è troppo complicato. È preferibile procedere nel modo seguente. Se le soluzioni indicate non fossero linearmente indipendenti, esisterebbe una loro combinazione lineare, con costanti non tutte nulle, identicamente uguale a zero. Tale identità non può coinvolgere soluzioni corrispondenti ad un solo autovalore, altrimenti sarebbe del tipo $p(t)e^{\lambda t} = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$ (con $p(t)$ polinomio); dovrebbe essere perciò $p(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e il polinomio p dovrebbe avere tutti i coefficienti nulli. L'identità cercata dovrà essere pertanto del tipo

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + p_k(t)e^{\lambda_k t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.41}$$

con $2 \leq k \leq r$ e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ polinomi di gradi rispettivi $l_1 \leq m_1 - 1$, $l_2 \leq m_2 - 1$, $\ldots, l_k \leq m_k - 1$. Dividiamo ora ambo i membri della (2.41) per $e^{\lambda_1 t}$, deriviamo m_1 volte, e nuovamente moltiplichiamo per $e^{\lambda_1 t}$; otteniamo l'identità

$$q_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + q_k(t)e^{\lambda_k t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.42}$$

dove $q_2, \ldots, q_k$ sono nuovi polinomi sempre di gradi rispettivi $l_2, \ldots, l_k$. Ripetiamo ora sulla (2.42) le operazioni analoghe fatte sulla (2.41) (dividiamo per $e^{\lambda_2 t}$, deriviamo, etc. ...); si trova una nuova identità; procedendo in tal modo si arriva ad avere un'identità del tipo $p(t)e^{\lambda_k t} = 0$ che abbiamo riconosciuto assurda. □

***Esempio* 2.11** - Si consideri l'equazione

$$z^{(4)} - 4z''' + 8z'' - 8z' + 4z = 0 .$$

Il polinomio caratteristico è

$$D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 .$$

Abbiamo perciò le due radici doppie

$$\lambda_1 = 1 + i \ , \ \lambda_2 = 1 - i \ .$$

Un sistema fondamentale di soluzioni è perciò:

$$e^{(1+i)t} \ , \ t\,e^{(1+i)t} \ , \ e^{(1-i)t} \ , \ t\,e^{(1-i)t} \ .$$

Può essere desiderabile sostituire le quattro soluzioni sopra scritte con altre quattro, pure linearmente indipendenti, ma reali.

Ricordando che

$$e^{(1\pm i)t} = e^t(\cos t \pm i \sin t) \ ,$$

abbiamo il seguente sistema, pure fondamentale, di soluzioni

$$e^t \cos t \ , \ t\,e^t \cos t \ , \ e^t \sin t \ , \ t\,e^t \sin t \ .$$

Osserviamo che, ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, ognuno di molteplicità m, si possono sempre far corrispondere, in luogo delle $2m$ soluzioni complesse

$$e^{\lambda t} \ , \ te^{\lambda t} \ , \ldots , \ t^{m-1}e^{\lambda t}$$

$$e^{\overline{\lambda} t} \ , \ te^{\overline{\lambda} t} \ , \ldots , \ t^{m-1}e^{\overline{\lambda} t} \ ,$$

le $2m$ soluzioni reali

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \ te^{\alpha t}\cos\beta t, \ \ldots, \ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \ ,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t, \ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ \ldots, \ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \ .$$

Sistema con autovalori anche non regolari.

La discussione svolta per l'equazione di ordine n si generalizza ai sistemi; si dimostra che, dato il sistema $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$, se l'equazione caratteristica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0$ possiede le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ di molteplicità rispettiva $m_1, \ldots, m_r$, la soluzione generale del sistema è della forma

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m_j} \mathbf{c}^{ij} t^{i-1} e^{\lambda_j t} \ , \tag{2.43}$$

dove i $\mathbf{c}^{ij}$ sono *opportuni* vettori (contenenti in totale n costanti arbitrarie).

Ci limiteremo ad illustrare questa situazione con un esempio.

***Esempio* 2.12** - Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -z_1 - z_2 + 3z_3 \ . \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

possiede i due autovalori: $\lambda_1 = 0$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ (doppio). La soluzione generale sarà pertanto della forma

$$\varphi(t) = \mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2 e^{2t} + \mathbf{c}^3 t\,e^{2t} \ .$$

Per determinare i vettori $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3$ (i quali dovranno dipendere soltanto da 3 costanti arbitrarie k_1, k_2, k_3), inseriamo φ nel sistema; otteniamo:

$$\mathbf{0} + \mathbf{c}^2 2e^{2t} + \mathbf{c}^3(1+2t)e^{2t} = \mathbf{A}\mathbf{c}^1 + e^{2t}\mathbf{A}\mathbf{c}^2 + t\,e^{2t}\mathbf{A}\mathbf{c}^3 \ .$$

Uguagliando i coefficienti dei termini corrispondenti, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{c}^1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{c}^2 &= 2\mathbf{c}^2 + \mathbf{c}^3 \\ \mathbf{A}\mathbf{c}^3 &= 2\mathbf{c}^3 \end{aligned}$$

Si osservi che $\mathbf{c}^1$ e $\mathbf{c}^3$ sono autovettori di $\mathbf{A}$ corrispondenti rispettivamente agli autovalori 0 e 2, ma $\mathbf{c}^2$ *non* è un autovettore.

Risolvendo le tre equazioni precedenti si trova:

$$\mathbf{c}^1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{c}^2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{c}^3 = k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Osservazione conclusiva. La soluzione di un sistema lineare autonomo può rappresentarsi in forma elegante e (concettualmente) semplice per mezzo della matrice esponenziale. Ma i calcoli necessari per ottenere poi una rappresentazione più esplicita sono piuttosto laboriosi e, armati solo di carta e penna, non si può andare generalmente oltre i sistemi 3×3. Tuttavia esistono oggi programmi di calcolo che consentono, con l'utilizzo di un PC, la risoluzione rapida di sistemi anche complessi.

2.5 Sistemi non autonomi

Consideriamo il sistema omogeneo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}$$

con $\mathbf{A}(t)$ di classe $C^0(I)$; sia $I \subseteq \mathbb{R}$ il massimo intervallo in cui $\mathbf{A}(t)$ è continua. Le soluzioni allora saranno definite (almeno) $\forall t \in I$ e riempiranno la striscia $I \times \mathbb{R}^n$ (Fig. 4.13). Esse formano ancora uno spazio lineare n–dimensionale; ma, in generale, non potremo ora arrivare a dare una rappresentazione delle soluzioni in forma esplicita, come nel caso dei sistemi autonomi.

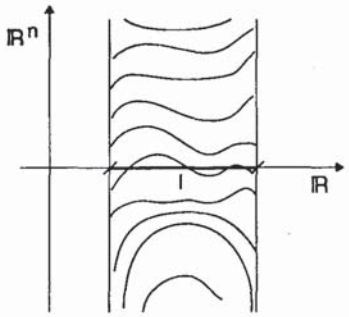


Fig. 4.13

Equazioni di Eulero

Un caso in cui una rappresentazione esplicita è possibile riguarda l'equazione

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{t}\mathbf{A}\mathbf{z} , \tag{2.44}$$

dove $\mathbf{A}$ è una matrice costante; l'intervallo I sarà la semiretta $(0, +\infty)$ oppure $(-\infty, 0)$. La (2.44) è detta equazione di Eulero.

Se si effettua il cambio di variabile indipendente

$$t = e^s \qquad (t > 0) ,$$

(se interessa $t < 0$ si porrà $t = -e^s$), essendo

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds} = \frac{1}{t}\frac{d}{ds} ,$$

la (2.44) diventa

$$\frac{d}{ds}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{z} , \tag{2.45}$$

che può dunque essere trattata con i metodi del precedente paragrafo. Poiché la (2.45) ha soluzioni della forma $\mathbf{h}e^{\lambda s}$, possiamo prevedere che la (2.44) avrà soluzioni della forma $\mathbf{h}t^{\lambda}$; inserendo questa espressione nella (2.44) otteniamo l'equazione

$$\lambda \mathbf{h} t^{\lambda - 1} = \frac{1}{t}\mathbf{A}\mathbf{h}t^{\lambda} ,$$

che può essere riscritta

$$t^{\lambda-1}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{h} = 0 . \tag{2.46}$$

La condizione perché la (2.46) abbia soluzioni è: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0$; se perciò la matrice $\mathbf{A}$ ha n autovalori distinti, un sistema fondamentale di soluzioni della (2.44) sarà:

$$\mathbf{h}^1 t^{\lambda_1}, \mathbf{h}^2 t^{\lambda_2}, \ldots, \mathbf{h}^n t^{\lambda_n} \qquad (t > 0)$$

dove $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n$ sono i corrispondenti autovettori di $\mathbf{A}$.

Se vi sono autovalori multipli, bisognerà procedere in maniera analoga a quanto fatto per il sistema a coefficienti costanti.

Consideriamo il caso della singola equazione di ordine n. Si chiama equazione di Eulero di ordine n un'equazione del tipo

$$z^{(n)} = \frac{a_1}{t} z^{(n-1)} + \frac{a_2}{t^2} z^{(n-2)} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} z' + \frac{a_n}{t^n} z . \tag{2.47}$$

Questa può essere ricondotta alla forma (2.44) ponendo

$$z_1 = z , \quad z_2 = tz' , \quad z_3 = t^2 z'', \ldots, z_n = t^{n-1} z^{(n-1)} ;$$

allora (considerando ancora il solo caso $t > 0$), con la sostituzione $t = e^s$, la (2.47) diventa un'equazione a coefficienti costanti

$$z^{(n)} = b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_n , \tag{2.48}$$

dove i coefficienti b_i sono legati agli a_i da relazioni che non interessa qui scrivere esplicitamente. Pertanto, se λ è radice dell'equazione caratteristica

$$\lambda^n - b_1 \lambda^{n-1} - \cdots - b_n = 0 , \tag{2.49}$$

di molteplicità m abbiamo, per la (2.48), le soluzioni $e^{\lambda s}, s\,e^{\lambda s}, \dots, s^{m-1}e^{\lambda s}$, cui corrispondono, per la (2.47), le soluzioni

$$t^{\lambda}, t^{\lambda}\log t, \dots, t^{\lambda}(\log t)^{m-1} \qquad (t > 0)\ .$$

Per trovare i valori di λ (soluzioni della (2.49)) conviene però procedere direttamente, senza passare all'equazione a coefficienti costanti, inserendo t^{λ} nella (2.47); si trova così l'equazione

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) = \\ &= a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + \lambda a_{n-1} + a_n\ . \end{aligned} \tag{2.50}$$

La (2.50) è detta *equazione caratteristica* della (2.47) e non è altro che la (2.49) scritta nei coefficienti a_i invece che nei b_i.

***Esempio* 2.13** - Risolvere l'equazione (per $t > 0$)

$$t^4 z^{(4)} + 2t^3 z^{(3)} + 2t^2 z'' - 2tz' + 2z = 0\ .$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0\ .$$

Sviluppando i prodotti abbiamo

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0\ ,$$

che può essere riscritta nella forma

$$(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0\ ,$$

e cioè

$$(\lambda-1)^4 + (\lambda-1)^2 = 0\ .$$

Dunque abbiamo le radici

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 \qquad \text{(doppia)} \\ &\lambda_2 = 1+i \\ &\lambda_3 = 1-i\ . \end{aligned}$$

Un sistema fondamentale di soluzioni è pertanto

$$t\ ,\ t\log t\ ,\ t^{1+i}\ ,\ t^{1-i}\ .$$

Al solito, può essere più conveniente esprimere le soluzioni in forma reale; ricordando allora che $t^{1\pm i} = t\exp(\pm i\log t) = t(\cos(\log t) \pm i\sin(\log t))$, possiamo sostituire alle precedenti soluzioni le seguenti

$$t\ ,\ t\log t\ ,\ t\cos(\log t)\ ,\ t\sin(\log t)\ .$$

Per $t \to 0$ le soluzioni delle equazioni di Eulero sono generalmente singolari; ma ciò non accade sempre; per esempio, la semplice equazione

$$t^2 z'' - 2tz' + 2z = 0\ ,$$

ha le soluzioni indipendenti t e t^2 e perciò la soluzione generale: $\varphi(t) = c_1 t + c_2 t^2$ è addirittura *analitica* $\forall t \in \mathbb{R}$. Questo esempio mostra che un'equazione i cui coefficienti sono singolari (discontinui) in un punto può avere anche tutte le soluzioni regolari (addirittura analitiche) in quel punto.

Alcuni sistemi non autonomi, in particolare alcune equazioni del 2° ordine, si incontrano molto frequentemente in diversi campi della Fisica e di altre scienze; esse sono state studiate a fondo e le loro soluzioni sono state tabulate con grande accuratezza. A titolo d'esempio, citiamo le seguenti:

equazione di Bessel:	$\ddot{z} + \frac{1}{t}\dot{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)z = 0$
equazione di Hermite:	$\ddot{z} - t\dot{z} + \lambda z = 0$
equazione di Laguerre:	$t\ddot{z} + (1-t)\dot{z} + \lambda z = 0$
equazione di Legendre:	$(1-t^2)\ddot{z} - 2t\dot{z} + \lambda z = 0$
equazione di Mathieu:	$\ddot{z} + (a + b\cos t)\dot{z} = 0\ .$

Le soluzioni di queste equazioni non sono, in generale, cioè per valori generici dei parametri che vi compaiono, esprimibili mediante funzioni trascendenti elementari; esse definiscono perciò *nuove* funzioni trascendenti, non elementari. Per ottenere informazioni circa la natura di queste soluzioni, il loro comportamento in vicinanza dei punti singolari o all'infinito, bisogna però ricorrere a metodi che qui non possiamo sviluppare. Tuttavia uno di questi metodi è concettualmente assai semplice e viene qui di seguito descritto.

Metodo di Frobenius

Se si osservano le equazioni sopra scritte si scopre che, a parte i punti singolari, i coefficienti sono molto regolari, addirittura analitici; pertanto anche le soluzioni saranno tali e potranno essere rappresentate in serie di potenze. Illustriamo il metodo con due esempi.

Equazione di Hermite. I coefficienti di questa equazione (dove λ è un parametro reale) sono analitici su tutta la retta e perciò ogni sua soluzione potrà essere rappresentata mediante una serie di potenze del tipo:

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\ , \tag{2.51}$$

in qualche intorno dell'origine. Per determinare i coefficienti a_n della serie, inse-

riamo questa nell'equazione: otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 .$$

Nella prima sommatoria l'indice può partire da 2 poiché i primi due termini sono nulli; ponendo poi $m = n - 2$ questa sommatoria si scrive

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m .$$

Indicando nuovamente con n l'indice di sommatoria, l'equazione precedente prende la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - n)a_n]t^n = 0 . \tag{2.52}$$

Poiché la (2.52) deve valere identicamente per ogni t compreso nell'intervallo di convergenza, dovrà essere

$$a_{n+2} = \frac{n-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n . \tag{2.53}$$

La (2.53) è una *relazione di ricorrenza* per i coefficienti a_n: da essa, noti i primi due, a_0 e a_1, tutti gli altri possono essere ricavati, uno dopo l'altro. Il coefficiente a_0 può essere determinato assegnando la posizione al tempo 0: $z(0) = a_0$; a_1 assegnando la velocità: $\dot{z}(0) = a_1$.

Prima di procedere, osserviamo che, se $z(t)$ è soluzione dell'equazione di Hermite, anche $z(-t)$ è soluzione (verificare!); allora anche $z(t)+z(-t)$ e $z(t)-z(-t)$ sono soluzioni, la prima pari e la seconda dispari. Possiamo dunque limitarci a ricercare separatamente le soluzioni pari e le dispari. Otterremo le soluzioni pari assumendo $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ (cosicché tutti i coefficienti dispari sono nulli); otterremo le dispari assumendo $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$. Dalla (2.53) otteniamo allora

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-\lambda}{1\cdot 2} a_0 , \quad a_4 = \frac{2-\lambda}{3\cdot 4} a_2 = \frac{-\lambda(2-\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} a_0, \ldots \\
a_{2n} &= \frac{-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda)\ldots(2n-2-\lambda)}{(2n)!} a_0 \\
a_3 &= \frac{1-\lambda}{2\cdot 3} a_1 , \quad a_5 = \frac{3-\lambda}{4\cdot 5} a_3 = \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} a_1, \ldots \\
a_{2n+1} &= \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)\cdot\ldots\cdot(2n-1-\lambda)}{(2n+1)!} a_1 .
\end{aligned}$$

Applicando il criterio del rapporto ricaviamo che entrambe le serie $\sum a_{2n}t^{2n}$ e $\sum a_{2n+1}t^{2n+1}$ sono convergenti su tutta la retta; esse rappresentano perció due soluzioni (linearmente indipendenti) dell'equazione.

Osserviamo, dalle precedenti formule, che, se λ è un intero pari, $\lambda = 2k$, i coefficienti a_{2n} sono tutti nulli a partire da $n = k+1$ in poi e perciò la serie $\sum a_{2n}t^{2n}$ si arresta e la sua somma è un polinomio (di grado $2k$); se λ è dispari, $\lambda = 2k+1$, la serie $\sum a_{2n+1}t^{2n+1}$ è un polinomio di grado $2k+1$; tali polinomi vengono detti *polinomi di Hermite*.

Equazione di Bessel. Il metodo di Frobenius può essere applicato anche nell'intorno di un punto singolare; in tal caso esso ci fornirà la rappresentazione per serie di una (eventuale) soluzione analitica in quel punto.

Consideriamo l'equazione di Bessel con $\nu = m$ (intero positivo o nullo). Il punto $t = 0$ è singolare per l'equazione; cerchiamo tuttavia eventuali soluzioni analitiche in un intorno dell'origine; cerchiamole nella forma

$$z(t) = t^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad (a_0 \neq 0, k \geq 0) .$$

Inserendo questa espressione nell'equazione e raccogliendo le potenze simili di t, otteniamo

$$\begin{aligned}
&t^{k-2}\{(k^2-m^2)a_0 + [(k+1)^2 - m^2]a_1 t + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} ([(k+n)^2 - m^2]a_n + a_{n-2})t^n\} = 0 .
\end{aligned}$$

Annullando allora i coefficienti delle potenze di t abbiamo:

$$k = m , \quad a_1 = 0 , \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(k+n)^2 - m^2} \qquad (n = 2, 3, \ldots) .$$

Allora tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli e i coefficienti di indice pari sono determinati da a_0; scegliendo $a_0 = 2^{-m}/m!$ otteniamo la serie

$$J_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}t\right)^{m+2n}}{n!(m+n)!} . \tag{2.54}$$

Questa soluzione si chiama *funzione di Bessel* di prima specie di ordine m. $J_m(t)$ si comporta come t^m per $t \to 0$.

Dal criterio del rapporto possiamo dedurre che la serie (2.54) converge su tutta la retta.

Fissato m, abbiamo così trovato una soluzione (analitica) dell'equazione di Bessel. Un'altra soluzione, linearmente indipendente da questa, non sarà analitica, e perciò non potrà essere trovata col metodo sopra illustrato.

Lo studio del comportamento delle soluzioni nell'intorno di un punto singolare e, in base a questo, la classificazione dei punti singolari, è uno dei problemi principali della teoria delle equazioni differenziali.

2.6 Sistemi non omogenei

Come abbiamo già osservato, per ottenere la soluzione generale del sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \ , \tag{2.55}$$

basterà aggiungere, alla soluzione generale del corrispondente sistema omogeneo $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}$, una soluzione particolare della (2.55). Mostreremo ora che è sempre possibile trovare (esplicitamente) una tale soluzione, purché sia noto un sistema fondamentale di soluzioni del corrispondente sistema omogeneo.

Il metodo, qui sotto illustrato, per trovare questo integrale particolare della (2.55) è dovuto a Lagrange ed è noto come *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*.

Consideriamo la matrice wronskiana $\mathbf{W}(t) = (\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}^n)$ di un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo. La soluzione generale del sistema omogeneo è della forma

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}^1 + c_2\boldsymbol{\varphi}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\varphi}^n = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} \ ,$$

dove $\mathbf{c}$ è un vettore (colonna) di costanti arbitrarie $c_1, \ldots, c_n$. Cerchiamo ora una soluzione di (2.55) nella forma

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) \ , \tag{2.56}$$

dove $\mathbf{c}(t)$ è un vettore incognito.

Imponendo che $\boldsymbol{\psi}(t)$ sia soluzione della (2.55) troviamo

$$\dot{\mathbf{W}}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \ ,$$

e cioè, ricordando la (2.30),

$$\mathbf{W}(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t) \ .$$

Essendo $\mathbf{W}(t)$ non singolare, possiamo ricavare

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \ ,$$

da cui, integrando,

$$\mathbf{c}(t) = \int_\tau^t \mathbf{W}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \tag{2.57}$$

essendo τ un valore particolare della variabile t; abbiamo trascurato di aggiungere, al secondo membro della (2.57), un vettore costante arbitrario, poiché ci interessa *una* sola soluzione della (2.55). Questa è data allora dalla formula

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{W}(t)\int_\tau^t \mathbf{W}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \ . \tag{2.58}$$

Scriviamo ora la soluzione della (2.55) soddisfacente la condizione: $\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$. Conviene utilizzare, al posto di una generica $\mathbf{W}(t)$, la matrice di transizione $\mathbf{W}(t,\tau)$. Ricordando le proprietà i), ii), iii) (paragrafo 2.3) della matrice di transizione, la soluzione cercata si scrive

$$\boldsymbol{\psi}(t;\tau,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{W}(t,\tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{W}(t,\tau)\int_\tau^t \mathbf{W}(\tau,s)\mathbf{b}(s)ds \ . \tag{2.59}$$

Il primo termine a secondo membro della (2.59) è la soluzione del sistema omogeneo passante per il punto $(\tau,\boldsymbol{\xi})$; il secondo è la soluzione del sistema non omogeneo passante per il punto $(\tau,\mathbf{0})$.

Se $\mathbf{A}$ è costante, risulta $\mathbf{W}(t,\tau) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}}$ e la (2.59) si scrive

$$\boldsymbol{\psi}(t;\tau,\boldsymbol{\xi}) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s)ds \tag{2.60}$$

in perfetta analogia con la formula (1.43).

Nel caso dell'equazione di ordine n possiamo ottenere un'analoga formula deducendola dalla (2.58) oppure ricavandola direttamente.

Sia $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione

$$z^{(n)} = a_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)z \ .$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} = a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y + b(t) \ , \tag{2.61}$$

della forma

$$\psi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n(t) \ . \tag{2.62}$$

Alle n funzioni $c_1, \ldots, c_n$ possiamo imporre, a nostra scelta, $n-1$ relazioni, purché queste non siano incompatibili con l'equazione (2.61). Imponiamo allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &c_1'\varphi_1 + \cdots c_n'\varphi_n = 0 \\ &c_1'\varphi_1' + \cdots c_n'\varphi_n' = 0 \\ &\vdots \\ &c_1'\varphi_1^{(n-2)} + \cdots c_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.63}$$

Tali relazioni sono state scelte in modo da semplificare il calcolo delle successive derivate di ψ; infatti, derivando successivamente ambo i membri della (2.62), tenuto conto delle (2.63), otteniamo

$$\begin{aligned}
\psi' &= c_1\varphi_1' + \cdots + c_n\varphi_n' \\
\psi'' &= c_1\varphi_1'' + \cdots + c_n\varphi_n'' \\
&\cdots \\
\psi^{(n-1)} &= c_1\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)} .
\end{aligned}$$

Resta da calcolare l'ultima derivata, che risulta

$$\psi^{(n)} = c_1\varphi_1^{(n)} + \cdots + c_n\varphi_n^{(n)} + c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} .$$

Imponendo ora alla ψ di soddisfare la (2.61) otteniamo

$$c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} = b(t) . \tag{2.64}$$

Quest'ultima equazione, insieme con le (2.63), consente di determinare le funzioni $c_1', \ldots, c_n'$; infatti le (2.63) (2.64) formano un sistema lineare algebrico non omogeneo, nelle incognite $c_1', \ldots, c_n'$ il cui determinante è il wronskiano delle soluzioni $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Risolvendo, con la regola di Cramer, questo sistema, si trova:

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} ,$$

e cioè, indicando con $W_{ni}(t)$ il complemento algebrico dell'elemento di posto (n, i) nella matrice wronskiana,

$$c_i'(t) = \frac{W_{ni}(t)}{W(t)} b(t) .$$

Si ha perciò la formula

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_\tau^t \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} b(s) ds , \tag{2.65}$$

che ci dà un integrale particolare dell'equazione (2.61).

***Esempio* 2.14** - Cerchiamo un integrale particolare dell'equazione

$$\ddot{y} + \omega^2 y = b(t)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = \cos\omega t \\
&\varphi_2(t) = \sin\omega t
\end{aligned} \qquad \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&W(t) = \omega , \quad W_{21}(t) = -\sin\omega t , \quad W_{22}(t) = \cos\omega t \\
&\psi(t) = -\frac{\cos\omega t}{\omega} \int_\tau^t \sin\omega s\, b(s) ds + \frac{\sin\omega t}{\omega} \int_\tau^t \cos\omega s\, b(s) ds = \\
&\quad = \frac{1}{\omega} \int_\tau^t \sin[\omega(t-s)] b(s) ds .
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Artifici particolari

Nelle applicazioni, prima di procedere a sviluppare questi metodi generali, conviene osservare bene se, per caso, un integrale particolare dell'equazione non sia reperibile più direttamente. Una semplice regola da tener presente deriva dal principio di sovrapposizione: *se $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ e conosciamo un integrale particolare dell'equazione con termine noto $b_1(t)$ e uno dell'equazione con termine noto $b_2(t)$, allora la somma dei due integrali sarà un integrale dell'equazione con termine noto $b(t)$.*

Se l'equazione omogenea è a coefficienti costanti, una regola utilissima nelle applicazioni è la seguente:

sia $b(t) = p_r(t)e^{\lambda t}$, dove $p_r(t)$ è un polimonio di grado r e $\lambda \in \mathbb{C}$; λ può essere, oppure no, radice dell'equazione caratteristica dell'equazione differenziale data; sia $k = 0$ se λ non è radice dell'equazione caratteristica; altrimenti sia k la molteplicità di questa radice; allora esiste un integrale particolare dell'equazione della forma

$$\psi(t) = t^k q_r(t) e^{\lambda t} ,$$

dove $q_r(t)$ è un polinomio di grado r.

La dimostrazione dell'affermazione precedente (che qui non riportiamo) può essere svolta per verifica diretta. Osserviamo che rientrano, nel caso considerato, molte situazioni comuni nelle applicazioni: $b(t)$ è un polinomio ($\lambda = 0$), oppure è una combinazione di seni, coseni, funzioni iperboliche eccetera.

***Esempio* 2.15** - Trovare un integrale particolare dell'equazione

$$\ddot{y} + \omega^2 y = t\cos t . \tag{2.67}$$

Si può utilizzare la formula (2.66) oppure procedere direttamente come segue.

Il secondo membro è della forma: $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ con $b_1(t) = \frac{1}{2}t\,e^{it}$, $b_2(t) = \frac{1}{2}t\,e^{-it}$. Consideriamo dapprima l'equazione:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = b_1(t) = \frac{1}{2}t\,e^{it}\,. \tag{2.68}$$

Le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ sono $\lambda_1 = i\omega$ e $\lambda_2 = -i\omega$. Perciò, se $\omega \neq 1$, applicando la regola enunciata con $k = 0$, $r = 1$, $\lambda = i$, cercheremo un integrale particolare della forma

$$\psi(t) = (c_1 + c_2 t)e^{it}\,.$$

Inserendo questa espressione nella (2.68) si trova

$$-c_1 + c_2(2i - t) + \omega^2(c_1 + c_2 t) = \frac{1}{2}t\,,$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle potenze di t,

$$c_1 = \frac{-i}{(\omega^2-1)^2}\,,\quad c_2 = \frac{1}{2(\omega^2-1)} \qquad (\omega \neq 1)\,.$$

Se $\omega = 1$, applicheremo la regola enunciata con $k = 1$, $r = 1$, $\lambda = i$; cercheremo allora un integrale particolare della forma

$$\psi(t) = t(c_1 + c_2 t)e^{it}\,,$$

ottenendo

$$c_1 = \frac{1}{8}\,,\quad c_2 = -\frac{i}{8}\,.$$

Se il secondo membro dell'equazione (2.68) è $b_2(t)$ invece di $b_1(t)$, non avremo da fare altro che porre $-i$ invece di i nei risultati ottenuti. In conclusione, un integrale particolare della (2.67) è

se $\omega \neq 1$:

$$\frac{-i}{(\omega^2-1)^2}(e^{it} - e^{-it}) + \frac{t}{2(\omega^2-1)}(e^{it} + e^{-it}) =$$
$$= \frac{2}{(\omega^2-1)^2}\sin t + \frac{1}{\omega^2-1}t\cos t$$

se $\omega = 1$:

$$\frac{1}{8}t(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{8i}t^2(e^{it} - e^{-it}) = \frac{t}{4}\cos t + \frac{t^2}{4}\sin t\,.$$

2.7 Problemi ai limiti per equazioni lineari del secondo ordine

L'argomento di questo paragrafo riguarda lo studio di soluzioni di equazioni differenziali del secondo ordine cui si richiede di essere definite in un prefissato intervallo (α, β) e di verificare certe condizioni *ai limiti* di questo intervallo, cioè per $t = \alpha$ e $t = \beta$. Non si tratta dunque di un problema di Cauchy, in cui le condizioni (posizione e velocità assegnate) sono imposte nello stesso punto, ma di un problema di tipo nuovo. Questi problemi sono noti col nome di *problemi di Sturm–Liouville* e presentano forti agganci con problemi tipici delle equazioni alle derivate parziali (v. Cap. 7, Sez. 1). Noi limiteremo la nostra analisi ad una breve introduzione allo studio di questi problemi.

In molti problemi fisici si incontrano equazioni del secondo ordine del tipo

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + (p_2(x) + \lambda p_3(x))y = f(x)\,, \tag{2.69}$$

dove λ è un parametro dipendente da proprietà fisiche del sistema. I coefficienti dell'equazione e il termine noto sono assunti continui in $[\alpha, \beta]$; inoltre supporremo $p_0(x) \neq 0$ in $[\alpha, \beta]$; la variabile indipendente x è solitamente una variabile spaziale (e ciò giustifica il cambio di nome). Si cerca una soluzione definita sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, di classe C^2, e tale che le seguenti due condizioni siano soddisfatte:

$$\begin{cases} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) + a_2 y(\beta) + a_3 y'(\beta) = k_1 \\ b_0 y(\alpha) + b_1 y'(\alpha) + b_2 y(\beta) + b_3 y'(\beta) = k_2\,. \end{cases} \tag{2.70}$$

Si noti che le condizioni (2.70) coinvolgono funzione e derivata prima ai limiti dell'intervallo. I numeri $a_0, \ldots, a_3$, $b_0, \ldots, b_3$, k_1, k_2 sono ritenuti noti.

Il problema (2.69), (2.70) è *lineare*, poiché sia l'equazione che le condizioni al contorno sono tali. Lo studio di questi problemi si riconduce allo studio di sistemi di equazioni algebriche lineari nelle costanti arbitrarie contenute nell'integrale generale della (2.69).

Accanto al problema non omogeneo, consideriamo anche il problema omogeneo associato, e cioè:

$$p_o(x)z'' + p_1(x)z' + (p_2(x) + \lambda p_3(x))z = 0 \tag{2.71}$$

$$\begin{cases} a_0 z(\alpha) + a_1 z'(\alpha) + a_2 z(\beta) + a_3 z'(\beta) = 0 \\ b_0 z(\alpha) + b_1 z'(\alpha) + b_2 z(\beta) + b_3 z'(\beta) = 0\,, \end{cases} \tag{2.72}$$

il quale certamente avrà almeno la soluzione identicamente nulla in $[\alpha, \beta]$.

Lo studio del problema dato viene condotto secondo le seguenti linee.

Sia $z(x, \lambda) = c_1\varphi_1(x, \lambda) + c_2\varphi_2(x, \lambda)$ la soluzione generale dell'equazione (2.71). Imponiamo le condizioni (2.72); otteniamo un sistema lineare algebrico omogeneo 2×2 nelle incognite c_1 e c_2. Sia $\Delta(\lambda)$ il determinante di questo sistema.

i) Se, per il valore di λ che interessa, risulta $\Delta(\lambda) \neq 0$, il sistema omogeneo in c_1, c_2 ammette solo la soluzione nulla e perciò il problema omogeneo (2.71), (2.72) ammette solo la soluzione identicamente nulla.

ii) Se $\Delta(\lambda) = 0$ (per un certo λ; tale λ si chiamerà un *autovalore* del problema) il sistema omogeneo in c_1, c_2 ammetterà infinite soluzioni non nulle; se $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ è una di queste, il corrispondente integrale della (2.71),

$$\overline{z}(x,\lambda) = \overline{c}_1\varphi_1(x) + \overline{c}_2\varphi_2(x) ,$$

sarà una soluzione non nulla del problema omogeneo (2.71), (2.72) (le soluzioni non nulle del problema omogeneo sono dette *autosoluzioni* del problema). In questo caso, dunque, il problema omogeneo ammette infinite autosoluzioni (delle quali soltanto una o, al massimo, due, indipendenti, secondo il rango della matrice del sistema in c_1 e c_2 che sarà, generalmente, 1 ma può anche, in casi degeneri, essere 0).

Veniamo alla discussione del problema non omogeneo. Sia $y(x,\lambda) = c_1\varphi_1(x,\lambda) + c_2\varphi_2(x,\lambda) + \psi(x,\lambda)$ la soluzione generale dell'equazione (2.69) (somma della soluzione generale della (2.71) e di un integrale particolare ψ della (2.69)). Imponiamo le condizioni (2.70): otteniamo un sistema algebrico non omogeneo nelle incognite c_1 e c_2 i cui termini noti contengono le costanti k_1 e k_2 e i valori $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f'(\alpha)$, $f'(\beta)$; il corrispondente sistema omogeneo è proprio quello discusso nei precedenti casi i) e ii).

iii) In corrispondenza del caso i), e cioè se $\Delta(\lambda) \neq 0$, il sistema non omogeneo in c_1, c_2 avrà soluzione unica, comunque siano assegnati i termini noti (tale soluzione si ricaverà con la regola di Cramer). Determinate così le costanti c_1 e c_2 risulta univocamente determinata la soluzione del problema (2.69), (2.70). In questo caso dunque, assegnati comunque il termine noto $f(t)$ e le costanti k_1 e k_2 il problema (2.69), (2.70) ammette, in corrispondenza, un'unica soluzione.

iv) In corrispondenza del caso ii), e cioè se $\Delta(\lambda) = 0$, il sistema non omogeneo in c_1, c_2 avrà infinite soluzioni se i termini noti sono opportunamente scelti, soddisfacenti certe condizioni di compatibilità (teorema di Rouché–Capelli), altrimenti non avrà alcuna soluzione. Allora, il problema (2.69), (2.70) non avrà, in generale, alcuna soluzione; avrà però infinite soluzioni se la funzione $f(t)$ e le costanti k_1 e k_2 soddisferanno opportune condizioni di compatibilità.

Le conclusioni dei punti iii) e iv) possono essere riassunte nel seguente *principio dell'alternativa: i teoremi di unicità e di esistenza* (senza speciali condizioni sui termini noti) *o sussistono entrambi* (iii) *o mancano entrambi* (iv).

***Esempio* 2.16** - Si voglia risolvere il problema

$$\begin{aligned} &y'' + \omega^2 y = f(x) \qquad 0 < x < \pi \\ &y(0) = y(\pi) \\ &y'(0) = y'(\pi) . \end{aligned}$$

Si noti che le condizioni ai limiti sono *condizioni di periodicità*. Tali condizioni sono omogenee; l'unico termine noto del problema è la funzione $f(x)$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$\begin{aligned} z(x) &= c_1 + c_2 x && \text{se } \omega = 0 \\ z(x,\omega) &= c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x && \text{se } \omega \neq 0 . \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni $z(0) = z(\pi)$ e $z'(0) = z'(\pi)$. Se $\omega = 0$ abbiamo subito $c_2 = 0$ e c_1 arbitrario; $\omega_0 = 0$ è perciò un autovalore cui corrisponde l'autofunzione

$$z_0(x) = 1$$

(e le infinite altre ottenute moltiplicando questa per la costante arbitraria c_1).

Se $\omega \neq 0$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} (1 - \cos\omega\pi)c_1 - (\sin\omega\pi)c_2 = 0 \\ (\omega \sin\omega\pi)c_1 + \omega(1 - \cos\omega\pi)c_2 = 0 . \end{cases} \tag{2.73}$$

Il determinante di questo sistema è: $2\omega(1 - \cos\omega\pi)$; esso è nullo se $\omega = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$; gli autovalori del problema sono perciò i numeri

$$\omega_n^2 = 4n^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Se $\omega^2 = \omega_n^2$ la matrice del sistema (2.73) ha rango 0; cioè il sistema è soddisfatto con c_1 e c_2 arbitrari; abbiamo perciò, per ogni autovalore diverso da zero, due corrispondenti autofunzioni (linearmente indipendenti) che possiamo indicare con

$$\begin{aligned} z_n^1(x) &= \cos 2nx \\ z_n^2(x) &= \sin 2nx \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ogni combinazione lineare di queste: $c_1 \cos 2nx + c_2 \sin 2nx$ è pure un'autofunzione. Naturalmente tutte queste autofunzioni, compresa la costante, sono periodiche di periodo π.

Veniamo ora al problema non omogeneo. Se $\omega^2 \neq 4n^2$, il problema ammette una sola soluzione, per ogni assegnata $f(x)$. Per esempio, se $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, l'integrale generale dell'equazione non omogenea è (supponiamo $\omega^2 + \alpha^2 \neq 0$)

$$y(x) = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

Imponendo le condizioni: $y(0) = y(\pi)$ e $y'(0) = y'(\pi)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (1 - \cos\omega\pi)c_1 - (\sin\omega\pi)c_2 = \dfrac{(e^{\alpha\pi} - 1)}{(\alpha^2 + \omega^2)} \\ (\omega \sin\omega\pi)c_1 + \omega(1 - \cos\omega\pi)c_2 = \dfrac{\alpha(e^{\alpha\pi} - 1)}{(\alpha^2 + \omega^2)} , \end{cases} \tag{2.74}$$

che ammette un'unica soluzione, determinabile esplicitamente con la regola di Cramer.

Se invece $\omega^2 = 4n^2$ (per qualche intero n) il problema non avrà, in generale, alcuna soluzione. Sia, per fissare le idee, $\omega^2 = 16$, e consideriamo ancora $f(x) = e^{\alpha x}$. I primi membri delle equazioni (2.74) sono nulli (la matrice ha rango 0!); perciò anche i secondi membri devono essere nulli; ciò accade se $\alpha = 2ki\,(k \in \mathbb{Z})$ perché $e^{2k\pi i} = 1$; scarteremo il valore $\alpha = 4i$ perché altrimenti sarebbe $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ (in tal caso va scelto un altro integrale particolare dell'equazione). Si osserverà che, per $\alpha = 2ki$, il termine noto dell'equazione, $f(x) = e^{2kix}$ è anch'essa una funzione π–periodica.

Dunque, se $\omega^2 = 4n^2$ (per un certo n) e il termine noto $f(x)$ è della forma e^{2kix} (con $k^2 \neq n^2$) il nostro problema ammette soluzione; anzi, ne ammette infinite, della forma:

$$y(x) = c_1 \cos 2nx + c_2 \sin 2nx + \frac{e^{2kix}}{4(n^2 - k^2)}.$$

Esercizi

1. Diagonalizzare le seguenti matrici, dopo aver verificato che ciò è possibile

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Trovare gli autovalori della matrice simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

trovare un sistema ortogonale di 4 autovettori; diagonalizzare la matrice.

3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, mostrare che non esiste alcuna matrice 2×2 non singolare $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ è diagonale; trovare una matrice non singolare $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ sia in forma di Jordan.

4. Calcolare la matrice $e^{\mathbf{A}}$ se $\mathbf{A}$ è della forma:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Mostrare, utilizzando la definizione (2.17) di norma di una matrice, che lo spazio $M(n \times n)$ delle matrici quadrate di ordine n è completo.

6. Ricordiamo che due norme, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, definite sullo stesso spazio lineare X, si dicono equivalenti se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq c_2\|\mathbf{x}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x} \in X$$

(Esercizio 21 della Sez. 1, del Cap. 3).

i) Mostrare che la seguente è una buona definizione di norma nello spazio delle matrici quadrate $M(n \times n)$:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

(di fatto, l'estremo superiore che compare nella definizione è un massimo).

ii) Mostrare che la norma sopra definita e quella definita dalla (2.17) sono equivalenti.

7. Risolvere (cioè trovare la soluzione generale) le seguenti equazioni a coefficienti costanti (esprimere la soluzione in forma reale):

i) $z''' + 6z'' + 11z' + 6z = 0$

ii) $z''' + 3z'' = 0$

iii) $z^{(4)} + 2z'' + z = 0$

iv) $z^{(6)} - 3z^{(4)} + 3z'' - z = 0$

8. Trovare un sistema fondamentale di soluzioni per i seguenti sistemi a coefficienti costanti:

i) $\begin{cases} z_1' = z_1 + 4z_2 \\ z_2' = 4z_1 - z_2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} z_1' = z_1 + \frac{1}{4}z_2 \\ z_2' = z_1 + az_2 \end{cases}$ (a parametro reale)

iii) $\begin{cases} z_1' = z_3 \\ z_2' = z_2 \\ z_3' = z_1 \\ z_4' = z_4 \end{cases}$ (Esercizio 2) iv) $\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = 6z_1 - 11z_2 + 6z_3 \end{cases}$

v) $\begin{cases} z_1' = z_1 + \frac{2}{3}z_3 \\ z_2' = 2z_1 + 2z_2 \\ z_3' = -3z_2 + 4z_3 \end{cases}$

9. *Metodo di eliminazione*

Poiché la risoluzione di un sistema di n equazioni (del 1° ordine) è più laboriosa della risoluzione di una singola equazione (di ordine n), può essere conveniente tavolta cercare di ricondursi dal sistema all'equazione singola per "eliminazione delle incognite". Illustriamo il metodo con un esempio.

Si voglia risolvere il sistema:

$$\begin{cases} z_1' &= z_1 + z_2 \\ z_2'' &= -z_1' + 4z_1 + 2z_2 \end{cases}$$

Si potrebbe introdurre una terza incognita $z_3 = z_2'$ e scrivere il sistema nella solita forma:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = 3z_1 + z_2 \end{cases}$$

Ricaviamo z_2 dalla prima equazione: $z_2 = z_1' - z_1$ e sostituiamo questa nella seconda; otteniamo $z_1'' - z_1' = z_3$. Derivando entrambi i membri ed usando la terza equazione si trova:

$$z_1''' - z_1'' = 3z_1 + z_2 \ ,$$

cioè

$$z_1''' - z_1'' - z_1' - 2z_1 = 0 \ . \tag{2.75}$$

Abbiamo così "eliminato" l'incognita z_2; la (2.75) ha le tre soluzioni:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \text{ con } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Trovata l'incognita z_1 si determinano poi $z_2 = z_1' - z_1$ e $z_3 = z_2'$.

Questo metodo è utile solo per piccoli sistemi; esso diventa rapidamente assai laborioso.

Risolvere, col metodo di eliminazione, i seguenti sistemi:

$$\text{i)} \begin{cases} z_1' + 2z_1 - 4z_2 = 0 \\ z_1' + 2z_2' - 2z_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} z_1' + z_1 + z_2' = 0 \\ z_1'' - z_1 + z_2'' + z_2 = 0 \end{cases}$$

[Suggerimento per ii): si derivi la prima equazione ricavando: $z_1'' + z_2'' = -z_1'$; tenendo conto di questa relazione, dalla seconda si ricava $z_2 = z_1' + z_1$; sostituendo questa nella prima ...].

Si tenga presente che derivando un'equazione se ne ottiene una *non* equivalente a quella data. Occorre dunque in generale una verifica a posteriori dei risultati ottenuti.

10. *Riduzione dell'ordine*

La soluzione di un sistema omogeneo di n equazioni può essere ricondotta alla soluzione di un sistema omogeneo di $n-1$ equazioni qualora si conosca un integrale particolare del sistema; la stessa affermazione vale ovviamente anche per le equazioni di ordine n.

i) Si dimostri l'asserto per le equazioni del 2° ordine, applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie; cioè, se $\varphi(t)$ è una soluzione (non nulla) dell'equazione $z'' = a_1(t)z' + a_2(t)z$, si cerchi un'altra soluzione, indipendente da φ, nella forma:

$$\psi(t) = c(t)\varphi(t) \ .$$

[Soluzione: una soluzione, linearmente indipendente da φ, è data da:

$$\psi(t) = \varphi(t) \int \frac{\exp(\int a_1(t)dt)}{\varphi(t)^2} dt]$$

** ii) Si dimostri l'asserto per le equazioni di ordine n e per i sistemi.

11. È interessante notare che un'equazione del 2° ordine lineare omogenea si può sempre ricondurre ad una del 1° ordine *non lineare*: precisamente, ad una di Riccati. Si mostri infatti che, data l'equazione: $z'' = a_1(t)z' + a_2(t)z$, e posto $y = z'/z$, la nuova incognita y soddisfa l'equazione

$$y' = -y^2 + a_1(t)y + a_2(t) \ .$$

12. Data l'equazione: $(2t^2 - 1)z'' + (z - tz')(2 + 4t^2) = 0$, si osservi che $\varphi(t) = t$ è un integrale particolare. Trovare l'integrale generale.

13. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\text{i) } t^3 z''' + tz' - z = 0 \qquad \text{ii) } \begin{cases} tz_1' = z_2 \\ tz_2' = -2z_1 + 3z_2 \end{cases}$$

$$\text{iii) } t^2 z'' - z = 0 \qquad \text{iv) } t^2 z'' - 3tz' + 4z = 0$$

14. Risolvere le seguenti equazioni:

i) $y'' + 9y = 2 - e^t$
ii) $y'' + 4y = \operatorname{tg} t$
iii) $y''' - y = t\,e^t$
iv) $y^{(4)} - y = \sin t + \cos t$
v) $y'' + y = \log t$

(Per la ricerca di un integrale particolare, ricorrere al metodo di variazione delle costanti arbitrarie solo dopo aver esaurito la fantasia).

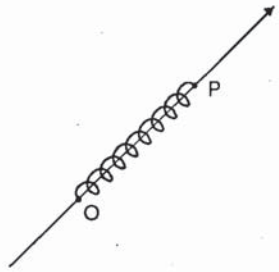
15. Risolvere i sistemi:

$$\text{i) } \begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 2 \\ y_2' - y_2 + y_1 = t \end{cases} \qquad \text{ii) } \begin{cases} y_1' - y_2 = e^t \\ y_2' + y_1 = \sin t \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -6y_1 - 11y_2 - 6y_1 + e^{-t} \end{cases}$$

16. *Vibrazioni libere*

Un problema di fondamentale interesse in Meccanica è quello di calcolare il movimento di un punto materiale P soggetto ad una forza elastica attrattiva (cioè ad una forza centrale proporzionale alla distanza dal centro O come, ad esempio, quella esercitata da una molla). Come è noto (o come è facile dimostrare), se la velocità del punto è radiale, cioè diretta come la retta OP, il movimento si svolge su questa retta; fissata su di essa l'origine (in O) e un verso, detta $y(t)$ l'ascissa di P all'istante t, l'equazione del moto del punto è:



$$m\ddot{y} = -k\,y$$

cioè:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{2.76}$$

avendo posto $\omega = \sqrt{k/m}$, dove $k > 0$ è la costante della molla, m la massa del punto.

L'integrale generale della (2.76) è: $\varphi(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ (c_1, c_2 costanti arbitrarie), che si può anche scrivere nella forma, più significativa

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha) , \tag{2.77}$$

dove A e α sono costanti arbitrarie che possono essere determinate assegnando la posizione e la velocità iniziali del punto. Questo esegue infinite oscillazioni di *periodo* $2\pi/\omega$, di *ampiezza* A, mentre α rappresenta la *fase iniziale*. Il *moto* è detto *armonico*; la frequenza $2\pi/\omega$ è detta *frequenza caratteristica* dell'oscillatore. Si parla, in questo caso, di *oscillazioni libere*.

17. *Vibrazioni smorzate*

Se, sul punto P, agisce, oltre alla forza elastica, anche una resistenza di tipo viscoso, cioè proporzionale alla velocità (per esempio, la resistenza dell'aria), allora l'equazione del moto è: $m\ddot{y} = -ky - h\dot{y}$, che può scriversi:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0 , \tag{2.78}$$

avendo posto $\delta = h/2m$; questo parametro, positivo, rappresenta la resistenza del mezzo al moto del punto. L'equazione caratteristica della (2.78): $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$ possiede le due radici

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} , \ \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} .$$

Si presentano i seguenti tre casi:

i) $\delta > \omega$ (resistenza elevata). Le radici λ_1 e λ_2 sono reali negative, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. L'integrale generale di (2.78) è:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2.79}$$

Il *moto non* è *oscillatorio*. L'allievo verifichi le seguenti affermazioni.

Si assuma che il punto si trovi inizialmente in $\overline{y}$ e abbia una assegnata velocità iniziale; se tale velocità è centrifuga, la y raggiunge (in valore assoluto) un massimo e poi decresce tendendo asintoticamente a zero (fig. 4.14 a); se la velocità iniziale è centripeta e grande (precisare quanto grande!) il punto passa una volta per l'origine, procede oltre fino ad un certo limite e poi inverte il moto, tendendo asintoticamente verso il centro (fig. 4.14 b); se la velocità iniziale è centripeta e piccola, il punto tende asintoticamente verso il centro senza eseguire alcuna oscillazione (fig. 4.14 c).

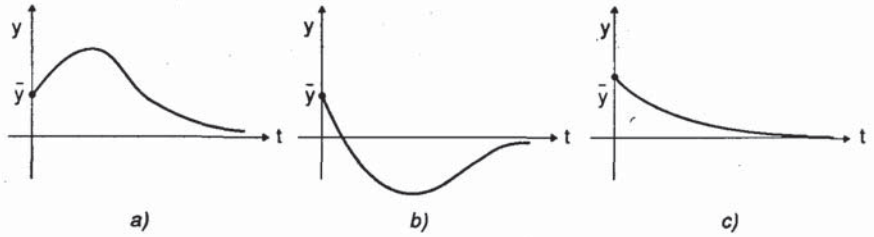


Fig. 4.14 Vibrazioni smorzate.

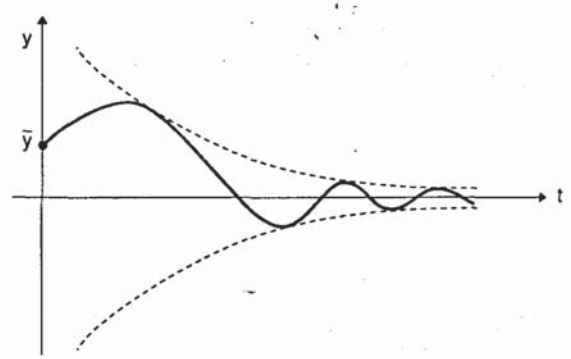


Fig. 4.15 Oscillazioni smorzate.

ii) $\delta = \omega$. Allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta < 0$. L'integrale generale di (2.78) è:

$$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t} , \tag{2.80}$$

ancora il *moto non* è *oscillatorio*; il comportamento è simile a quello discusso in i).

iii) $\delta < \omega$ (resistenza debole). Abbiamo $\lambda_1 = -\delta + i\nu$, $\lambda_2 = -\delta - i\nu$, $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$.

L'integrale generale della (2.78) si può scrivere nella forma:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\nu t + \alpha) , \tag{2.81}$$

con A, α costanti arbitrarie. Il punto mobile esegue infinite oscillazioni attorno al centro, di frequenza $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ e di ampiezza $Ae^{-\delta t}$; l'ampiezza delle oscillazioni diventa dunque sempre più piccola col passare del tempo e il punto tende asintoticamente all'origine (fig. 4.15). Si parla, in tal caso, di *oscillazioni smorzate*.

Riassumendo, l'effetto principale della viscosità è quello di smorzare o addirittura di eliminare le oscillazioni, e il punto P tende asintoticamente alla sua posizione di equilibrio naturale (il centro O).

18. *Vibrazioni forzate. Risonanza*

Supponiamo che sul punto P agisca, oltre alla forza elastica e alla resistenza viscosa, anche una forza impressa dall'esterno (diretta come l'asse y, cosicché il moto permane rettilineo). L'equazione del moto è ora non omogenea: $m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + F(t)$; ponendo $f(t) = F(t)/m$ (e adottando le stesse notazioni già introdotte in 16. e 17.) l'equazione prende la forma:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = f(t) . \tag{2.82}$$

La soluzione generale della (2.82) sarà del tipo:

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t)$$

dove $\varphi(t)$ è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\psi(t)$ è una soluzione particolare della (2.82).

Consideriamo un caso tipico:

$$f(t) = B\cos\gamma t\,, \tag{2.83}$$

(se $\gamma = 0$ la forza impressa è costante; altrimenti è armonica (cioè periodica semplice) con frequenza $\gamma/2\pi$).

i) Supponiamo dapprima che la resistenza sia nulla ($\delta = 0$). Allora un integrale particolare della (2.82) è (verificare!):

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{B}{\omega^2-\gamma^2}\cos\gamma t & \text{se } \gamma \neq \omega \\ \dfrac{B}{2\omega}t\sin\omega t & \text{se } \gamma = \omega\,. \end{cases} \tag{2.84}$$

Pertanto, alle oscillazioni libere, rappresentate da $\varphi(t)$ in (2.77), si sovrappongono delle *oscillazioni forzate*, rappresentate da $\psi(t)$ in (2.84); queste sono di ampiezza costante $= B/(\omega^2-\gamma^2)$ se $\gamma \neq \omega$. Il caso interessante si ha quando la forza impressa oscilla con la stessa frequenza caratteristica dell'oscillatore ($\omega = \gamma$); allora le oscillazioni forzate hanno un'ampiezza $(tB/2\omega)$ che si amplifica col tempo, crescendo oltre ogni limite; è questo il fenomeno della *risonanza* (fig. 4.16).

ii) Sia ora $\delta > 0$. Allora un integrale particolare della (2.82) è:

$$\psi(t) = B\rho\cos(\gamma(t-\tau))\,, \tag{2.85}$$

dove si è posto

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\delta^2\gamma^2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\gamma\tau = \frac{2\gamma\delta}{\omega^2-\gamma^2} \tag{2.86}$$

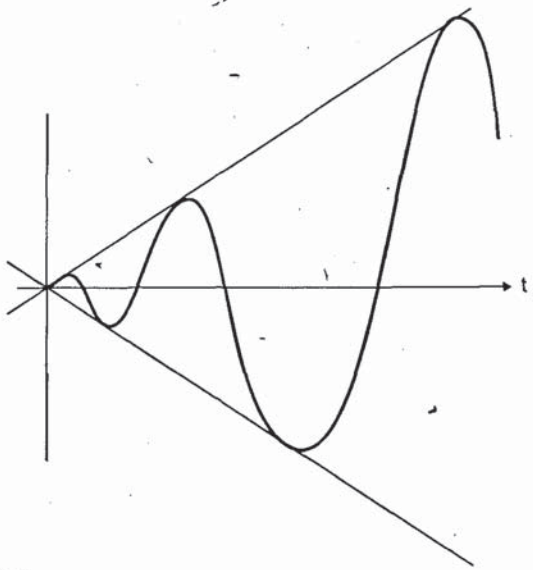


Fig. 4.16 Risonanza.

(si osservi che la (2.85) è ora un integrale particolare della (2.82) qualunque sia il valore di γ).

Dalla discussione svolta in 17. sappiamo che l'integrale generale della omogenea, $\varphi(t)$, tende esponenzialmente a zero per $t \to +\infty$; perciò, dopo un transitorio iniziale, la situazione di regime è descritta dall'integrale particolare $\psi(t)$. Dalla (2.85) ricaviamo perciò che il *moto* a regime è *armonico*, con lo stesso *periodo* $2\pi/\gamma$ della forza impressa, con *ampiezza* $B\rho$ costante (dipendente dai vari parametri del sistema) e con *ritardo di fase* τ rispetto alla forza impressa. È interessante osservare come varia l'ampiezza $B\rho$ di queste oscillazioni forzate al variare della frequenza di eccitazione γ (per valori fissati di ω, δ, B); bisogna studiare cioè la funzione $\rho = \rho(\gamma)$. Si osserva che, se $\delta < \omega/\sqrt{2}$ (resistenza debole) la funzione $\rho(\gamma)$ presenta un massimo per $\gamma = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$ e tale massimo è

$$\rho_{\max} = \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\,.$$

Appare cioè ancora il fenomeno della *risonanza*. Rispetto alla situazione descritta in i) ($\delta = 0$) si osserva che ora la risonanza compare quando la frequenza di eccitazione è "vicina" (ma non uguale) a quella caratteristica ω e l'ampiezza delle oscillazioni forzate rimane limitata. Se invece $\delta \geq \omega/\sqrt{2}$ la funzione $\rho(\gamma)$ è decrescente e non si ha risonanza (fig. 4.17 b).

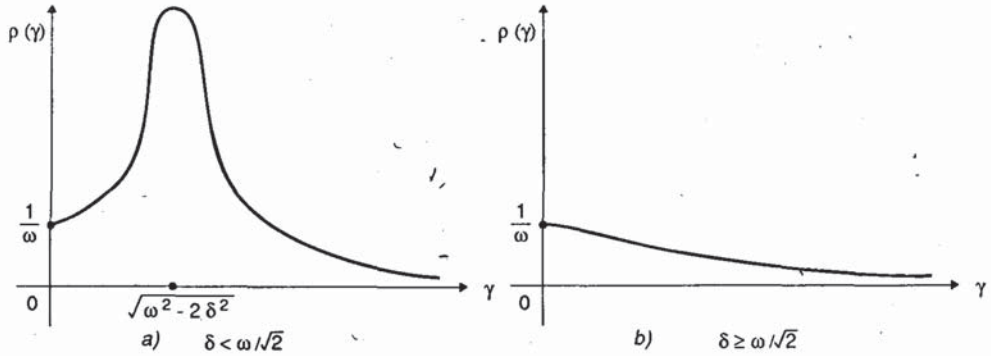


Fig. 4.17

19. Si consideri un circuito elettrico costituito da una resistenza R, un'induttanza L, un condensatore di capacità C, a cui sia applicata una forza elettromotrice variabile $V(t)$ (fig. 4.18).

La differenza di potenziale ai capi del condensatore è soluzione della seguente equazione:

$$CL\ddot{y} + CR\dot{y} + y = -V(t)\,.$$

Lo studente interessato può rivedere tutta la discussione svolta in 16, 17, 18, e reinterpretare i parametri nei termini adatti alla nuova situazione.

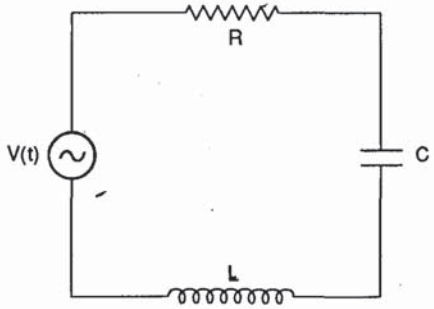


Fig. 4.18

20. Trovare autovalori e autofunzioni dei seguenti problemi ai limiti:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

$$\text{i)} \begin{cases} z(0) = 0 \\ z(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} \dot{z}(0) = 0 \\ \dot{z}(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{iii)} \begin{cases} z(0) = 0 \\ z(\pi) = \dot{z}(\pi) \end{cases}.$$

21. Considerare i problemi ai limiti non omogenei:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f(t)$$

$$\text{i)} \begin{cases} y(0) = k_1 \\ y(\pi) = k_2 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} \dot{y}(0) = k_1 \\ \dot{y}(\pi) = k_2 \end{cases} \qquad \text{iii)} \begin{cases} y(0) = k_1 \\ y(\pi) - \dot{y}(\pi) = k_2 \end{cases}.$$

Esprimere le condizioni di compatibilità sui dati $f(t), k_1, k_2$ affinché il corrispondente problema abbia soluzione.

22. Discutere la risolubilità del seguente problema ai limiti:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f(t)\ ,\ y(0) = y(\pi)\ ,\ \int_0^\pi y(t)dt = k\ .$$

Delle due condizioni supplementari, una è del tipo "ai limiti", l'altra è del tipo "integrale"; la discussione può essere svolta secondo lo stesso schema illustrato nel paragrafo 2.7.

3. SISTEMI AUTONOMI. STABILITÀ

3.1 Generalità sui sistemi autonomi

Consideriamo un sistema autonomo del tipo

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})\ , \tag{3.1}$$

con f localmente lipschitziana in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Vale perciò il teorema 1.2 di esistenza e di unicità locale.

Come già accennato alla fine del paragrafo 1.2 il fatto che $\mathbf{f}$ non dipenda esplicitamente dalla variabile t, consente di analizzare le soluzioni di (3.1) attraverso le loro immagini nello spazio del vettore di stato $\mathbf{y}$, *spazio delle fasi*.

Data una curva soluzione $t \mapsto \varphi(t)$ chiameremo *orbita, traiettoria* o *caratteristica* l'immagine di φ. Salvo avviso contrario supporremo che φ sia definita nel suo intervallo massimale J_φ. A volte si considera solo l'immagine di φ per $t \geq \tau$, o per $t \leq \tau$, $(\tau \in J_\varphi)$ nel qual caso parleremo di *semi-orbita* a destra o a sinistra rispettivamente.

Occorre evitare di confondere le soluzioni con le orbite.

***Esempio* 3.1** - La curva $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, un'elica cilindrica nello spazio (t, y_1, y_2), è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1\ . \end{cases}$$

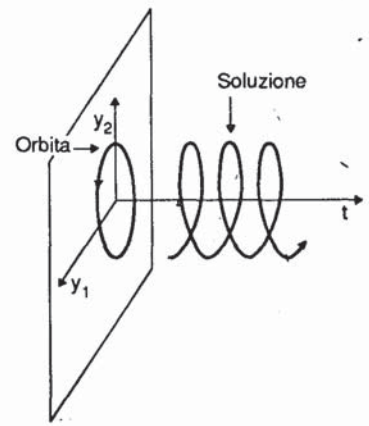


Fig. 4.19

L'orbita corrispondente sul piano delle fasi (il piano $t = 0$) è la circonferenza unitaria con centro in $(0, 0)$, (fig. 4.19).

In questo paragrafo illustriamo le proprietà principali delle traiettorie dei sistemi autonomi attraverso una serie di proposizioni.

Proposizione 3.1 - *Sia φ una soluzione di* (3.1) *definita in $J_\varphi = (\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^*$; allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, anche $\psi(t) := \varphi(t + c)$ è soluzione, definita in $J_\psi = (\tau_1 - c, \tau_2 - c)$; la traslata nel tempo di una soluzione è ancora soluzione.*

Dimostrazione - $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + c) = \mathbf{f}(\varphi(t + c)) = \mathbf{f}(\psi(t))$, $t \in (\tau_1 - c, \tau_2 - c)$ □

Proposizione 3.2 - *Siano φ e ψ due soluzioni tali che*

$$\varphi(t_1) = \psi(t_2) \tag{3.2}$$

con $t_1 \in J_\varphi$, $t_2 \in J_\psi$. Allora $\varphi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ in J_φ.

Dimostrazione - Per la proposizione 3.1, $\overline{\psi}(t) := \psi(t + t_2 - t_1)$ è soluzione di (3.1). Inoltre $\overline{\psi}(t_1) = \psi(t_1 + t_2 - t_1) = \psi(t_2) = \varphi(t_1)$. Dunque $\overline{\psi}$ e φ soddisfano lo stesso problema di Cauchy e quindi coincidono su J_φ □

Le due proposizioni precedenti implicano le seguenti proprietà delle traiettorie:

a) *un'orbita corrisponde ad una famiglia di soluzioni del tipo $\varphi = \varphi(t + c)$, $c \in \mathbb{R}$, traslate nel tempo di una soluzione data. È dunque fissata un'orientazione dell'orbita, comune a tutte le soluzioni corrispondenti.*

b) *Due orbite non possono intersecarsi. La regione Ω dello spazio delle fasi risulta pertanto unione di orbite disgiunte.*

Si noti che le proposizioni 3.1 e 3.2 *non* sono valide per sistemi *non* autonomi e per questo l'analisi nello spazio delle fasi risulta poco efficace.

Traiettorie di particolare importanza sono le seguenti.

Definizione 3.1 - *Se* $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ *è tale che* $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, *allora* $\mathbf{y}_0$ *si chiama punto di equilibrio* (o punto *critico* o punto *singolare*) *per il sistema* (3.1). *Esso costituisce l'orbita della soluzione (costante)* $\varphi(t) = \mathbf{y}_0$.

Se il sistema si trova in uno stato di equilibrio vi rimane per sempre.

Una soluzione può tendere ad un punto di equilibrio per $t \to \pm\infty$; non può mai raggiungerne alcuno in un tempo finito T, altrimenti si avrebbero due orbite passanti per uno stesso punto. Viceversa, se $\varphi(t) \to \mathbf{y}_0$ per $t \to \pm\infty$ allora $\mathbf{y}_0$ è punto di equilibrio (Esercizio 1).

***Esempio* 3.2** - Nel modello logistico (Esempio 1.2) vi sono due punti di equilibrio: $N(t) = 0$ e $N(t) = k =$ capacità dell'ambiente. Se $0 < N_0 < k$, $N(t) \to k$ per $t \to +\infty$.

Nel modello di Lotka–Volterra (1.4) l'unico punto di equilibrio è $(c/d, a/b)$.

Di fondamentale importanza sono le soluzioni $\varphi = \varphi(t)$ *periodiche*; ossia: esiste $T > 0$ tale che $\varphi(t+T) = \varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ma $\varphi(t+s) \neq \varphi(t)$ per $s \in (0, T)$. In questo caso T si chiama *periodo* e la traiettoria descritta è una *curva semplice* e *chiusa* o *ciclo* (Esempio 3.1).

La seguente proposizione implica che le traiettorie possono essere solo di tre tipi: *punti di equilibrio, cicli, curve semplici non chiuse*. Non vi sono orbite (non chiuse) che si autointersechino. Inoltre ogni curva semplice e chiusa non contenente punti di equilibrio corrisponde a soluzioni periodiche.

Proposizione 3.3 - *Sia* φ *una soluzione di* (3.1) *non costante. Se esistono* $t_1, t_2 \in J_\varphi$ *tali che* $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ *allora* $J_\varphi = \mathbb{R}$ *e* φ *è periodica.*

Dimostrazione - Sia $J_\varphi = (\tau_1, \tau_2)$. Le due soluzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t) = \varphi(t + t_2 - t_1)$ soddisfano la condizione $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = \varphi(t_2)$ e pertanto coincidono.

La soluzione ψ è definita in $(\tau_1 - \delta, \tau_2 - \delta)$ dove $\delta = t_2 - t_1$. Se, ad esempio, $\delta > 0$, ψ risulta un prolungamento di φ all'intervallo $(\tau_1 - \delta, \tau_2)$. Deve dunque essere $\tau_1 = -\infty$ e $\tau_2 = +\infty$.

Essendo poi $\varphi(t) = \psi = \varphi(t + \delta)$ segue che δ è un periodo per φ.

Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei periodi di φ e $T := \inf \mathcal{P}$. Se $T = 0$ allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste un periodo $\delta, 0 < \delta < \varepsilon$. Fissato un qualunque numero reale $c > 0$ sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $(m-1)\delta < c \leq m\delta$. Allora $0 < m\delta - c < \delta < \varepsilon$. Essendo $m\delta$ un periodo allora $m\delta \in \mathcal{P}$, e c risulta un punto di accumulazione per $\mathcal{P}$. Poiché φ è continua, $\mathcal{P}$ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}$ e pertanto $c \in \mathcal{P}$. Poiché ogni reale positivo c è un periodo, φ è costante, contro le ipotesi. Allora $T > 0$ e φ è periodica con periodo T. □

Concetti fondamentali sono quelli di *derivata lungo una traiettoria* del sistema (o *derivata di Lie*) e di *integrale primo* o costante del moto.

Sia $E: \Omega \to \mathbb{R}$, $E \in C^1(\Omega)$. Se $\varphi = \varphi(t)$ è una soluzione del sistema (3.1) è

ben definita la funzione $E(\varphi(t))$, $t \in J_\varphi$. Essendo $\dot{\varphi}(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$, si ha:

$$\dot{E}(\varphi(t)) = < \nabla E(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) > = < \nabla E(\varphi(t)), \mathbf{f}(\varphi(t)) > \ . \tag{3.3}$$

La (3.3) indica che se $\mathbf{y}_0 = \varphi(t_0)$, $\dot{E}(\mathbf{y}_0)$ dipende *solo* da $\mathbf{y}_0$ e non dai valori che la soluzione assume in un intorno di t_0. Hanno senso dunque le seguenti definizioni.

Definizione 3.2 - *Sia* $E: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω *aperto in* $\mathbb{R}^n$, $E \in C^1(\Omega)$.

a) *La derivata di* E *lungo le traiettorie del sistema* (3.1) *è assegnata dalla formula*

$$\dot{E}(\mathbf{y}) := < \nabla E(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) > \ , \ \mathbf{y} \in \Omega \ . \tag{3.4}$$

b) *Se* $\dot{E}(\mathbf{y}) = 0$ *per ogni* $\mathbf{y} \in \Omega$, E *si chiama integrale primo o costante del moto per il sistema* 3.1.

***Esempio* 3.3** - Per un sistema conservativo ad un grado di libertà, $\ddot{y} = -dU/dy$, equivalente al sistema $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = -dU/dy_1$, la funzione energia $E(y_1, y_2) = y_2^2/2 + U(y_1)$ è un integrale primo come già osservato nell'esempio 1.18.

***Esempio* 3.4** - Sia $H = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ una funzione reale di classe $C^2(\mathbb{R}^{2n})$. Il sistema di $2n$ equazioni (sistema Hamiltoniano) (*)

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.5}$$

ha la funzione H come integrale primo. Infatti:

$$\dot{H}(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0 \ .$$

***Esempio* 3.5** - Il sistema di Lotka–Volterra (1.4) ha come integrale primo

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by \ . \tag{3.6}$$

Infatti, moltiplicando la prima delle (1.4) per $(-c + dx)$ e la seconda per $(a - by)$ e sottraendo si trova:

$$0 = \left(-\frac{c}{x} + d \right) \dot{x} - \left(\frac{a}{y} - b \right) \dot{y} = \frac{d}{dt} [-c \log x + dx - a \log y + by]$$

e quindi $\dot{E} = 0$.

(*) William R. Hamilton (1805–1865), irlandese.

Le seguenti proprietà caratterizzano un integrale primo.

Proposizione 3.4 - *E è un integrale primo per il sistema* (3.1) *se e solo se ogni orbita è interamente contenuta in un unico insieme di livello di E o, equivalentemente, se e solo se E è costante su ogni soluzione del sistema.*

Lasciamo la dimostrazione per esercizio.

Come conseguenza, se il sistema ammette un integrale primo i cui insiemi di livello sono limitati in $\mathbb{R}^n$ le soluzioni esistono in tutto $\mathbb{R}$. Infatti:

Proposizione 3.5 - *Se la semi-orbita destra (risp. sinistra) è contenuta in un compatto, la soluzione corrispondente è prolungabile a $+\infty$ (risp. a $-\infty$).*

Per la dimostrazione si veda l'esercizio 3.

Un'analisi completa di un sistema autonomo consiste nel fornire un quadro generale dell'andamento delle traiettorie: tale quadro si chiama *ritratto di fase* del sistema.

Particolare interesse riveste l'esistenza di orbite chiuse (soluzioni periodiche) o di punti di equilibrio e lo studio, nelle vicinanze di questi ultimi, del comportamento delle altre traiettorie.

Nel prossimo paragrafo vedremo alcuni esempi di applicazione dei concetti precedenti.

Terminiamo con un'osservazione. Ogni sistema *non* autonomo $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ può trasformarsi in autonomo ponendo $y_{n+1} = t$ ed aggiungendo l'equazione fittizia $\dot{y}_{n+1} = 1$. Dunque, i concetti illustrati in questo paragrafo valgono per il nuovo sistema. Naturalmente si è perso il vantaggio di poter ragionare in uno spazio ad n, anziché $n+1$, dimensioni.

3.2 Sistemi bidimensionali. Alcuni esempi

Un sistema bidimensionale autonomo ha la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \ , \end{cases} \tag{3.7}$$

dove F, G sono localmente lipschitziane in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Il ritratto di fase si può descrivere in molti casi usando semplici metodi geometrici basati sulle osservazioni seguenti.

I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$F(x, y) = G(x, y) = 0 \ .$$

Nell'intorno di un punto regolare (non di equilibrio), al sistema (3.7) è associata l'equazione differenziale (ottenuta eliminando t dalle due equazioni del sistema)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \qquad (F(x, y) \neq 0) \ ,$$

oppure

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \qquad (G(x, y) \neq 0) \ .$$

Ogni soluzione dell'equazione differenziale coincide (alméno localmente) con una traiettoria del sistema e viceversa.

Si noti che nei punti regolari in cui $G(x, y) = 0$ o $F(x, y) = 0$ la direzione del campo vettoriale (F, G), tangente all'orbita, è orizzontale o verticale, rispettivamente.

Studiando i segni di F e di G si può poi ripartire il piano delle fasi nelle zone di crescenza o decrescenza per x ed y, determinando così anche il verso di percorrenza sulle orbite. Se infine è noto un integrale primo E del sistema, allora le orbite sono descritte dalla famiglia $E(x, y) = c$ degli insiemi di livello di E.

***Esempio* 3.6** - Analisi del sistema di Lotka–Volterra (1.4).

Abbiamo visto nell'esempio 3.5 che

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by \ ,$$

è un integrale primo.

Essendo $\partial^2 E/\partial x^2 = c/x^2$, $\partial^2 E/\partial y^2 = a/y^2$ e $\partial^2 E/\partial x \partial y = 0$, si ha che E è strettamente convessa in $\mathbb{R}^2_+$. Inoltre $\partial E/\partial x = -c/x + d = 0$ per $x = c/d$ e $\partial E/\partial y = -a/y + b = 0$ per $y = a/b$. Quindi il punto di equilibrio $(c/d, a/b)$ è di minimo globale per E. Osserviamo inoltre che $E(x, y) \to +\infty$ quando x oppure y tendono a 0 oppure a $+\infty$.

Si deduce allora che, per $k > E(c/d, a/b)$, gli insiemi di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : E(x, y) = k\}$ sono *curve chiuse regolari* che contengono il punto di equilibrio $(c/d, a/b)$ nel loro interno.

L'evoluzione della coppia $x(t), y(t)$ è di conseguenza periodica con un periodo T che dipende da k. Il ritratto di fase è indicato in figura 4.20 a); in figura 4.20 b)

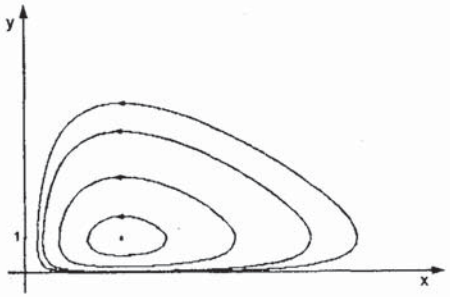


Fig. 4.20 a) Orbite del sistema di Lotka-Volterra corrispondenti ai dati iniziali $x = 0.5$, 0.7, 1.4, 2.6 e $y = 1$.

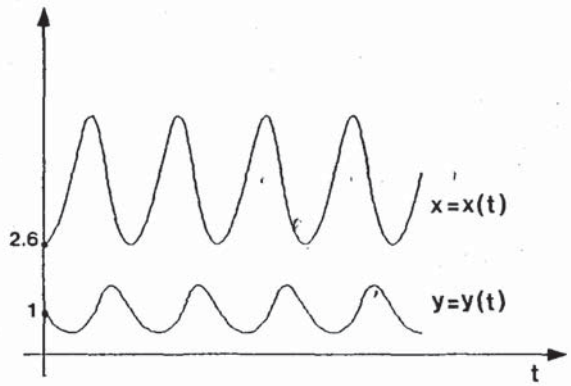


Fig. 4.20 b) Grafici di $x = x(t)$, $y = y(t)$, soluzioni del sistema di Lotka–Volterra con dati iniziali $x(0) = 2.6$ e $y(0) = 1$.

è illustrato l'andamento tipico di $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Lo studio dei segni di $a - by$ e $-c + dx$ indica che il verso di percorrenza sulle orbite è antiorario.

Possiamo ora rispondere alla questione relativa alla pesca nel mare Adriatico posta nell'esempio 1.3.

Anzitutto osserviamo che, essendo $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$, si ha:

$$\int_0^T \frac{\dot{x}}{x} dt = [\log x(t)]_0^T = \log x(T) - \log x(0) = 0 \ .$$

e, analogamente

$$\int_0^T \frac{\dot{y}}{y} dt = 0 \ .$$

Integrando ora entrambi i membri delle (1.4) si ottiene:

$$0 = \int_0^T (a - by) dt = aT - b \int_0^T y(t) dt$$

$$0 = \int_0^T (-c + dx) dt = -cT + d \int_0^T x(t) dt \ ,$$

ovvero

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) = \frac{a}{b} \ , \ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d} \ . \tag{3.8}$$

Le formule (3.8) indicano che le coordinate a/b e c/d del punto di equilibrio hanno anche il significato di *numero medio di individui nell'arco di un periodo*. È interessante osservare che questi valori medi sono comuni a *tutte* le orbite.

Una diminuzione della pesca:

– aumenta il tasso di crescita di x; invece di a si ha $a + \varepsilon$,

– riduce il tasso di diminuzione di y; da c si passa a $c - \eta$,

– lascia inalterati i coefficienti b, d di interazione tra le specie.

I numeri (3.8) diventano allora $(a + \varepsilon)/b$ per i predatori, che così registrano un aumento medio e $(c - \eta)/d$ per le prede, che registrano una diminuzione media.

La conclusione, nota come "principio di Volterra", è valida in molti altri casi, per modelli anche più realistici del sistema (1.4). Alcune varianti sono indicate negli esercizi.

***Esempio* 3.7** - *Moto di un pendolo senza attrito*

Un corpo (puntiforme) di massa m è appeso all'estremità di un'asta rigida, di massa trascurabile e lunghezza l. L'asta è fissata all'altra estremità ad un perno ed è libera di ruotare senza attrito in un piano verticale, soggetta alla sola forza gravitazionale (fig. 4.21). L'equazione (di Newton) del moto è

$$ml\ddot{\varphi} = -m\,g \sin\varphi$$

ossia, ponendo $k = g/l$,

$$\ddot{\varphi} = -k \sin\varphi \ . \tag{3.9}$$

Alla (3.9) è associato il sistema $(z_1 = \varphi, z_2 = \dot{\varphi})$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -k \sin z_1 \ . \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono infiniti ed hanno coordinate $(\nu\pi, 0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$. La periodicità di $\sin z_2$ indica che è sufficiente limitarsi a considerare $z_2 \in [-\pi, \pi]$.

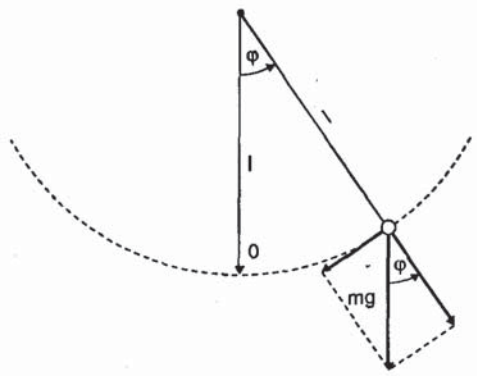


Fig. 4.21

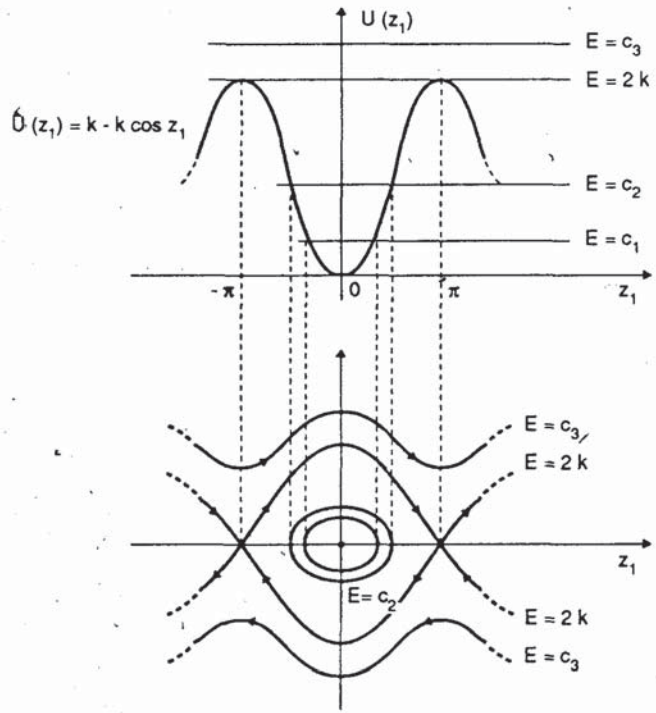


Fig. 4.22 Energia potenziale ed orbite per il moto del pendolo senza attrito.

Essendo il sistema conservativo, la funzione energia

$$E(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_2^2 + (k - k\cos z_1)$$

è un integrale primo (Esempio 3.3).

Incidentalmente osserviamo che l'energia potenziale $U(z_1) = k - k\cos z_1$ è non negativa e quindi le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Le orbite sono descritte dalla famiglia degli insiemi di livello dell'energia

$$\frac{1}{2}z_2^2 + (k - k\cos z_1) = c \qquad c \geq 0\,,$$

che si può risolvere rispetto a z_2, ottenendo

$$z_2 = \pm\sqrt{2(c - k + k\cos z_1)}\,. \tag{3.10}$$

Si distinguono allora i casi seguenti.

1. $c = 0$; è questo il livello minimo di energia e le (3.10) si riducono al punto di equilibrio $(0, 0)$.
2. $0 < c < 2k$; ogni coppia di equazioni (3.10) individua una traiettoria chiusa attorno all'origine. Questi livelli di energia corrispondono al moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio $(0, 0)$.
3. $c = 2k$; ogni coppia di equazioni (3.10) individua una curva chiusa nel piano contenente quattro orbite: i due punti di equilibrio $(\pm\pi, 0)$ ed altre due orbite che li connettono che si chiamano *eterocline* e corrispondono ad un avvicinamento (in tempo infinito) del pendolo alla posizione di equilibrio verticale sopra il perno.
4. $c > 2k$; ciascuna delle (3.10) individua un'orbita non chiusa. Questi livelli di energia corrispondono al moto di rivoluzione completa del pendolo.

La configurazione generale delle orbite è indicata in figura 4.22. Il verso di percorrenza è determinato (ad esempio) dal fatto che $\dot{z}_1 = z_2 > 0$ per $z_2 > 0$.

3.3 Il concetto di stabilità

In questo paragrafo presentiamo alcuni classici risultati relativi alla stabilità di una soluzione di un sistema autonomo.

Il concetto di stabilità è tra i più importanti sia a livello teorico sia a livello applicativo.

L'idea essenziale è la seguente. Supponiamo che un sistema del tipo $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ modellizzi l'evoluzione nel tempo di un determinato fenomeno. Al sistema è associato solitamente un altro tipo di informazione sotto forma, ad esempio, di dati iniziali o ai limiti. Tra i dati del problema è da considerarsi anche $\mathbf{f}$.

Ora, una variazione dei dati produce una variazione nella soluzione ed è così definita un'applicazione del tipo

$$\text{dati} \quad \mapsto \quad \text{soluzione}\,.$$

La stabilità è sostanzialmente una sorta di *continuità* di questa corrispondenza: un *piccolo* cambiamento sui dati produce un cambiamento *piccolo* (o controllabile) sulla soluzione.

È evidente l'importanza della stabilità, ad esempio nel funzionamento di ogni meccanismo, dove essa va letta come *insensibilità* a perturbazioni più o meno grandi delle condizioni di lavoro.

I teoremi di dipendenza continua del paragrafo 1.5 possono essere considerati dei risultati di stabilità. Essi, tuttavia, hanno validità solo su intervalli di tempo finiti. La considerazione di tempi illimitati si rende necessaria quando si vogliano considerare tempi lunghi o di regime. I risultati di questo paragrafo vanno letti in questa direzione.

Tra le varie definizioni di stabilità illustriamo qui quella dovuta a Liapunov (*).

(*) Alexander Mikhailovich Liapunov (1857–1918), matematico ed ingegnere russo.

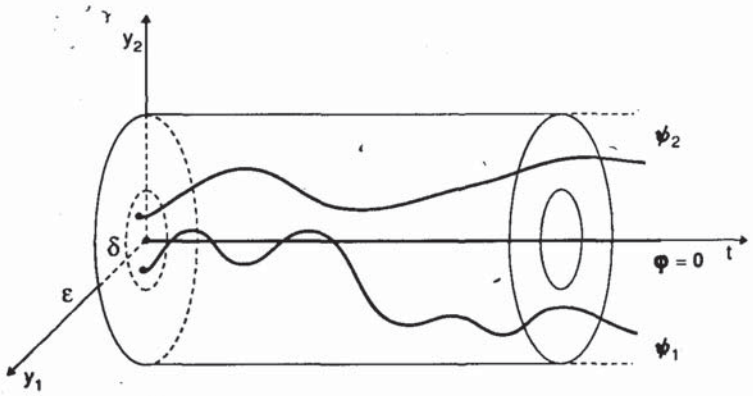


Fig. 4.23 Stabilità della soluzione $\varphi = \mathbf{0}$.

Sia $\varphi = \varphi(t; 0, \xi)$ una soluzione del sistema (3.1) definita nell'intervallo massimale destro J_φ^+, che possiamo sempre supporre sia $[0, +\infty)$.

Definizione 3.3 - *La soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$ si dice* **stabile** *(secondo Liapunov) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che:*
se $\|\eta - \xi\| < \delta$ allora la soluzione $\psi(t) = \psi(t; 0, \eta)$ è definita in $[0, +\infty)$ e $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in [0, +\infty)$.
Se inoltre $\|\psi(t) - \varphi(t)\| \to 0$ per $t \to +\infty$, φ si dice **asintoticamente** *stabile.*

In parole povere:
stabile significa che, se si parte abbastanza vicino a ξ, si rimane per tutto il tempo vicino alla soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$, (Fig. 4.23);
asintoticamente stabile significa che non solo ci si mantiene vicino a $\varphi(t; 0, \xi)$, ma la distanza da φ tende a zero all'infinito.

Se una soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$ non è stabile si dice *instabile*; ciò significa essenzialmente che esistono soluzioni che partono vicino quanto si vuole a ξ ma non rimangono per sempre vicino a $\varphi(t; 0, \xi)$.

Analoghe definizioni si possono dare quando interessi il comportamento per $t \to -\infty$ anziché per $t \to +\infty$.

Particolarmente importante è lo studio della stabilità dei punti di equilibrio $\varphi(t) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.

Se un punto di equilibrio $\mathbf{y}_0$ è asintoticamente stabile, si chiama *bacino di attrazione* di $\mathbf{y}_0$ l'insieme dei punti $\xi \in \Omega$, tali che $\varphi(t; 0, \xi) \to \mathbf{y}_0$ per $t \to +\infty$. Se il bacino di attrazione coincide con Ω il punto $\mathbf{y}_0$ si dice *globalmente* asintoticamente stabile (in Ω).

***Esempio* 3.8** -
a) Nel modello logistico la soluzione $N(t) = 0$ è instabile mentre la soluzione $N(t) = k$ è asintoticamente stabile con bacino di attrazione $\mathbb{R}_+$.

b) Nel modello di Lotka–Volterra il punto di equilibrio $(c/d, a/b)$, ossia la soluzione $x(t) = c/d, y(t) = a/b$, è stabile ma non asintoticamente.

c) Nell'equazione del pendolo, nell'esempio 3.7, il punto di equilibrio $(0, 0)$ (come pure i punti $(0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$) è stabile, non asintoticamente. Il punto $(0, \pi)$ (come pure i punti $(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$) è instabile.

Se $\mathbf{y}_0$ è punto di equilibrio, con la traslazione $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0$, il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ si trasforma in $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t) + \mathbf{y}_0) := \mathbf{g}(\mathbf{z}(t))$.

Alla soluzione $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0$ del sistema originale corrisponde la soluzione $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ del nuovo sistema e viceversa. È pertanto possibile riferirsi sempre all'origine, ossia alla soluzione $\varphi(t) = \mathbf{0}$.

3.4 Stabilità dell'origine per sistemi lineari autonomi. Il caso bidimensionale

1. Sia $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ con $\mathbf{A}$ matrice di ordine n, ad elementi (reali) costanti. La stabilità di $\varphi(t) = \mathbf{0}$ si determina facilmente in base alla formula (2.43).

Indichiamo con $\lambda_j, j = 1, \ldots, k$ gli autovalori di $\mathbf{A}$.

■ **Teorema 3.6** -
1) *L'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se $Re\lambda_j < 0$, $\forall j = 1, \ldots, k$. La stabilità è globale in $\mathbb{R}^n$.*

2) *L'origine è stabile, ma non asintoticamente* (stabilità neutra), *se e solo se $Re\lambda_j \leq 0$ e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari* (cioè la dimensione dell'autospazio è pari alla molteplicità dell'autovalore).

3) *L'origine è instabile negli altri casi.*

Dimostrazione - 1) Dalla formula (2.43) segue che ogni soluzione φ è somma di addendi del tipo $\mathbf{c}\, t^h e^{\lambda_j t}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Se $Re\lambda_j < 0$ per ogni $\lambda_j, \varphi(t) \to \mathbf{0}$ per $t \to +\infty$ e perciò $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile, con bacino di attrazione coincidente con $\mathbb{R}^n$. Viceversa, se $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile allora non possono esistere autovalori con parte reale non negativa. Esisterebbero, infatti, in tal caso, soluzioni che non tendono a $\mathbf{0}$ per $t \to +\infty$.

2) Se vale la condizione sugli autovalori gli addendi nella (2.43) sono della forma:

$$\mathbf{c}\, t^h e^{\lambda_j t} \ (h \geq 0) \text{ se } Re\lambda_j < 0 \quad \text{oppure} \quad \mathbf{c}\, e^{i\,\mathrm{im}\lambda_j t} \quad \text{se} \quad Re\lambda_j = 0\,. \tag{3.11}$$

I primi tendono a $\mathbf{0}$ per $t \to +\infty$, i secondi sono neutralmente stabili. Viceversa, se $\mathbf{0}$ è stabile neutralmente gli addendi nella (2.43) possono essere soltanto del tipo indicato nella (3.11) e perciò vale la condizione indicata sugli autovalori.

3) Se esistono autovalori con parte reale positiva oppure immaginari puri e non regolari allora esistono soluzioni del tipo

$$\varphi(t) = \mathbf{c}\, e^{\lambda_j t} \quad \text{o} \quad \varphi(t) = (\mathbf{c} + \mathbf{c}_1 t + \cdots + \mathbf{c}_{k_j - 1} t^{k_j - 1}) e^{i\,\mathrm{Im}\,\lambda_j t}$$

la cui norma tende all'infinito, per $t \to +\infty$.

Si noti che $\varphi(0) = \mathbf{c}$ e che la funzione $\alpha\varphi$ è ancora soluzione con $\varphi(0) = \alpha\mathbf{c}$. Dunque, scegliendo opportunamente $\alpha \neq 0$, la soluzione parte da un punto vicino all'origine quanto si vuole, mentre $\|\alpha\varphi(t)\| \to +\infty$. Ciò significa instabilità per $\mathbf{0}$.

Per concludere è poi sufficiente notare che, se $\mathbf{0}$ è instabile, le condizioni sugli autovalori in 1) *oppure* in 2) non possono valere. □

Quando l'origine è stabile o asintoticamente stabile si usa dire anche che la matrice **A** o che il sistema stesso è stabile o asintoticamente stabile rispettivamente.

2. Nel caso dei sistemi bidimensionali l'analisi può essere condotta facilmente in modo completo fino ad una classificazione di tutti i possibili comportamenti delle traiettorie vicino a $\mathbf{0}$. Vediamola nei suoi aspetti essenziali.

Consideriamo dunque un sistema omogeneo bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \ .$$

Supponiamo che $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, cosicché l'origine è l'*unico* stato di equilibrio del sistema. Ricordiamo che nessun'altra traiettoria può passare per l'origine.

Indichiamo con λ_1 e λ_2 gli autovalori di **A**, soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}\lambda + |\mathbf{A}| = 0 \qquad (\operatorname{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2, |\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2),$$

e distinguiamo vari casi secondoché la matrice **A** possegga

i) due autovalori λ_1, λ_2 reali e distinti,

ii) due autovalori reali coincidenti,

iii) due autovalori complessi coniugati.

Distingueremo poi dei sottocasi in corrispondenza del segno degli autovalori.

Autovalori reali e distinti. Il sistema possiede le due soluzioni (linearmente indipendenti) $\mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t}$, $\mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}$, dove $\mathbf{h}^1$ e $\mathbf{h}^2$ sono gli autovettori (reali) di **A**; ogni soluzione (reale) sarà della forma

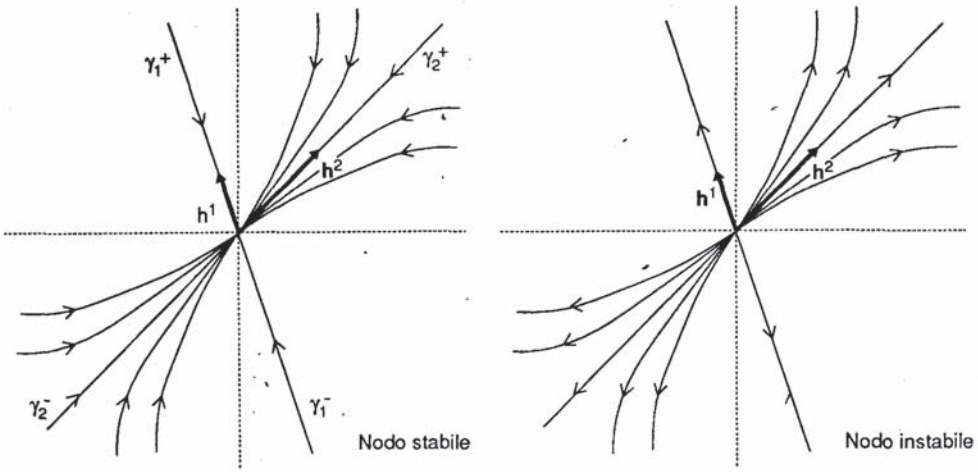
$$\varphi(t) = c_1 \mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t} \ ,$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie.

i1) Sia $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi (x, y), si avvicina indefinitamente all'origine. Prendendo $c_2 = 0$ si hanno le due traiettorie rettilinee indicate in figura 4.24a) con γ_1^+ e γ_1^-; prendendo $c_1 = 0$ abbiamo le traiettorie γ_2^+ e γ_2^-; l'andamento delle altre traiettorie è pure illustrato in figura 4.24a). Si osservi che, essendo $\lambda_2 > \lambda_1$, per $t \to +\infty$ il termine $c_1 \mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t}$ è infinitesimo di ordine superiore all'altro $c_2 \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}$, cosicché tutte le traiettorie (tranne $\gamma_1^\pm$) sono asintotiche a $\gamma_2^\pm$.

Il punto di equilibrio prende il nome di *nodo* (stabile).

i2) Sia $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. L'origine è instabile. La discussione di questo caso è del tutto analoga alla precedente; le traiettorie hanno, geometricamente, lo stesso andamento; ma il punto mobile, rappresentante la soluzione, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi, prossimo quanto si vuole all'origine, si allontana indefinitamente da essa. Si parla, in questo caso, di *nodo* (instabile) (v. fig. 4.24b).



a) Fig. 4.24 *b)*

i3) Sia $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. L'origine è instabile. Per $c_2 = 0$ abbiamo le traiettorie rettilinee $\gamma_1^\pm$ lungo le quali il punto mobile si avvicina indefinitamente all'origine (essendo $\lambda_1 < 0$); per $c_1 = 0$ abbiamo le traiettorie $\gamma_2^\pm$ lungo le quali il punto si allontana indefinitamente dall'origine (essendo $\lambda_2 > 0$). Ogni altra traiettoria risulta asintotica ad una del tipo γ_1 per $t \to -\infty$ e ad una del tipo γ_2 per $t \to +\infty$; l'andamento è illustrato in figura 4.25.

L'origine si chiama, in questo caso, *colle* o *sella*.

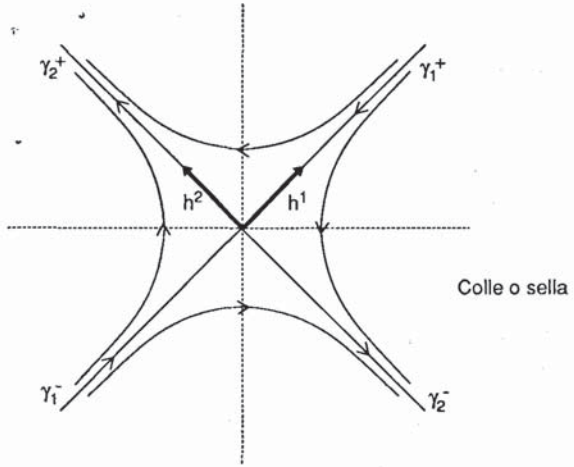


Fig. 4.25

Autovalori reali coincidenti. Sia λ l'autovalore (doppio) della matrice $\mathbf{A}$. La soluzione generale del sistema è della forma

$$\varphi(t) = \mathbf{c}^1 e^{\lambda t} + \mathbf{c}^2 t\, e^{\lambda t} ,$$

(dove $\mathbf{c}^1$ e $\mathbf{c}^2$ sono due *opportuni* vettori, dipendenti da due sole costanti arbitrarie). Se $\lambda < 0$ l'origine è globalmente asintoticamente stabile: tutte le traiettorie convergono verso l'origine; se $\lambda > 0$ tutte si allontanano indefinitamente dall'origine.

Sia $\lambda < 0$; tutte le traiettorie sono asintotiche alle traiettorie rettilinee di equazione: $\varphi(t) = \mathbf{c}^2 t e^{\lambda t}$, indicate in figura 4.26a) con γ^+ e γ^-.

Il punto $\mathbf{0}$ si chiama ancora *nodo*.

Un caso speciale si ha se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonale (e allora $a = d$); la soluzione generale è semplicemente

$$\varphi(t) = \mathbf{c} e^{\lambda t} ,$$

con $\mathbf{c}$ vettore arbitrario. Le traiettorie sono allora tutte rettilinee (v. fig. 4.26b).

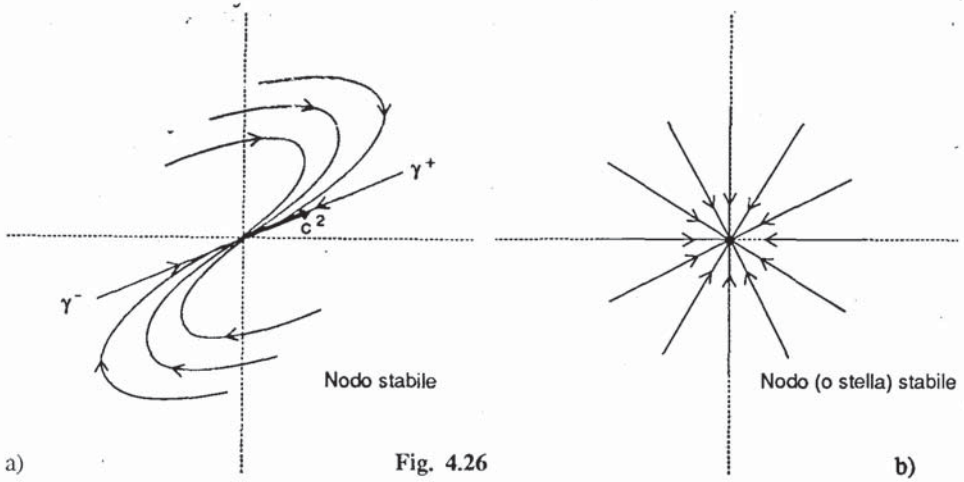
Autovalori complessi coniugati. Siano $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ gli autovalori di $\mathbf{A}$; gli autovettori corrispondenti possono essere scelti in modo che risultino coniugati anch'essi; abbiamo così la coppia di soluzioni (linearmente indipendenti)

$$\mathbf{h} e^{\alpha t + i\beta t} , \quad \overline{\mathbf{h}} e^{\alpha t - i\beta t} .$$

Conviene sostituire a queste soluzioni una coppia di soluzioni reali.

Posto $\mathbf{h} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}^1 + i\mathbf{h}^2)$, con $\mathbf{h}^1$ e $\mathbf{h}^2$ vettori reali, possiamo, con i soliti calcoli, sostituire le due soluzioni sopra scritte con le seguenti

$$\varphi^1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{h}^1 \cos\beta t - \mathbf{h}^2 \sin\beta t) , \quad \varphi^2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{h}^1 \sin\beta t + \mathbf{h}^2 \cos\beta t) .$$



a) Fig. 4.26 b)

La soluzione generale è dunque rappresentata in forma reale da:

$$\varphi(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) =$$
$$= e^{\alpha t}[(c_1\mathbf{h}^1 + c_2\mathbf{h}^2)\cos\beta t + (c_2\mathbf{h}^1 - c_1\mathbf{h}^2)\sin\beta t]$$

con c_1, c_2 costanti (reali) arbitrarie.

iii1) Sia $\alpha = 0$ (autovalori immaginari puri). L'origine è stabile neutralmente. Le traiettorie sono delle ellissi. Si noti che in tal caso il sistema ha un integrale primo della forma:

$$E(x, y) = c\,x^2 - 2axy - by^2 = \text{ costante}$$

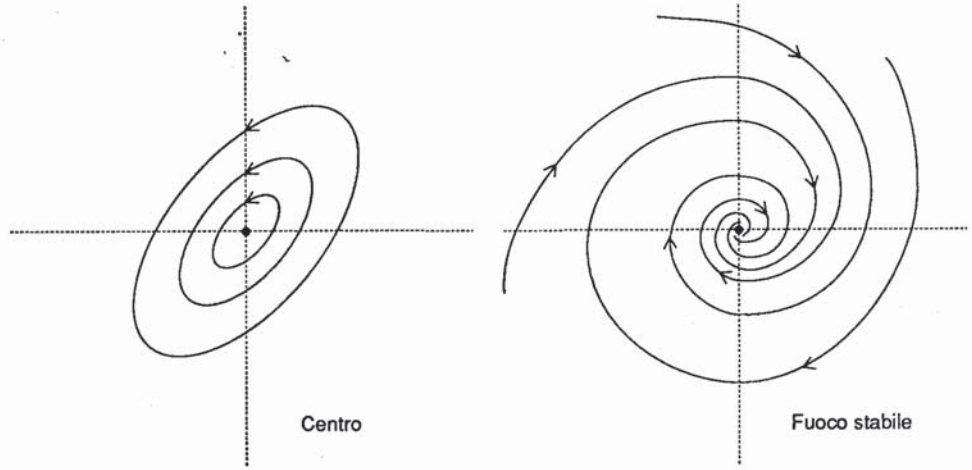
(vedi Esercizio 5).

Abbiamo quindi una infinità di orbite *periodiche*; l'origine è, in questo caso, un *centro* (Fig. 4.27a).

iii2) Sia $\alpha < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Tutte le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine, con andamento a spirale (v. fig. 4.27b). L'origine è un *fuoco* stabile.

iii3) Se $\alpha > 0$ l'andamento geometrico delle traiettorie è lo stesso che nel caso precedente, ma il punto mobile si allontana indefinitamente dall'origine; l'origine è un *fuoco* instabile.

L'allievo è invitato a completare la discussione con l'esame del caso *degenere*, cioè quando il rango della matrice $\mathbf{A}$ è 1.



a) Fig. 4.27 b)

Possiamo riassumere i risultati nel seguente quadro relativi alla natura di $\mathbf{0}$. Poniamo $\Delta := (\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}|$.

$$\text{i. } \Delta > 0 \begin{cases} 1.\ |\mathbf{A}| > 0 & \textit{nodo} \quad \begin{cases} \text{a. } \operatorname{tr}\mathbf{A} < 0 & \textit{asint. stabile} \\ \text{b. } \operatorname{tr}\mathbf{A} > 0 & \textit{instabile} \end{cases} \\ 2.\ |\mathbf{A}| < 0 & \textit{colle} \qquad \textit{instabile} \end{cases}$$

$$\text{ii. } \Delta = 0 \begin{cases} 1.\ b^2 + c^2 \neq 0 & \textit{nodo} \quad \begin{cases} \text{a. } \operatorname{tr}\mathbf{A} < 0 & \textit{asint. stabile} \\ \text{b. } \operatorname{tr}\mathbf{A} > 0 & \textit{instabile} \end{cases} \\ 2.\ b = c = 0 & \textit{nodo} \text{ (a stella)} \end{cases}$$

$$\text{iii. } \Delta < 0 \begin{cases} 1.\ \operatorname{tr}\mathbf{A} = 0 & \textit{centro} \qquad \textit{stabile(neutralmente)} \\ 2.\ \operatorname{tr}\mathbf{A} \neq 0 & \textit{fuoco} \quad \begin{cases} \text{a. } \operatorname{tr}\mathbf{A} < 0 & \textit{asint. stabile} \\ \text{b. } \operatorname{tr}\mathbf{A} > 0 & \textit{instabile} \end{cases} \end{cases}$$

Resta inteso che, salvo avviso contrario, si parla di stabilità per $t \to +\infty$. Se $t \to -\infty$, nel quadro vanno scambiati asintoticamente stabile e instabile in i.1., ii.1. e ii.2. e iii.2.

Applichiamo quanto detto allo studio delle piccole oscillazioni di un pendolo con attrito.

***Esempio* 3.9** - (Piccole oscillazioni del pendolo con attrito).

Riprendiamo lo studio delle oscillazioni del pendolo in figura 3.3 inserendo una forza d'attrito proporzionale alla velocità angolare $\dot\varphi$, limitatamente però a "piccole oscillazioni" in modo da poter considerare $\sin\varphi \simeq \varphi$. L'equazione diventa

$$\ddot\varphi = -k\varphi - h\dot\varphi \qquad (k, h > 0)\ ,$$

corrispondente al sistema $(z_1 = \varphi, z_2 = \dot\varphi)$:

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = -kz_1 - hz_2\ . \end{cases} \tag{3.12}$$

Ritroviamo così la situazione dell'esercizio 17 (Sez. 2); mentre là si sono esaminate le soluzioni dell'equazione, qui analizzeremo le orbite del sistema corrispondente.

La matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}\ .$$

Si ha: $\operatorname{tr}\mathbf{A} = -h < 0$ e $|\mathbf{A}| = k > 0$.

Distinguiamo dunque 3 casi in riferimento al quadro riassuntivo.

Sia $h^2 \geq 4k$ (attrito forte); siamo nel caso i.1.a o ii.1.a. L'origine è un *nodo* asintoticamente stabile. Il pendolo *non* esegue oscillazioni ma va direttamente alla posizione di equilibrio (che raggiunge però in un tempo infinito).

Sia $0 < h^2 < 4k$ (attrito debole); siamo nel caso ii.2.b. L'origine è un *fuoco* asintoticamente stabile. Il periodo esegue oscillazioni smorzate, di ampiezza sempre minore, fino a raggiungere, asintoticamente, la posizione di equilibrio.

Nel caso $h = 0$, assenza di attrito, l'origine è un *centro*: il pendolo esegue indefinitamente oscillazioni sempre della medesima ampiezza.

3.5 Il metodo di Liapunov

Per determinare la stabilità dell'origine presentiamo un metodo dovuto allo stesso Liapunov e che ha le sue origini storiche nel seguente classico teorema di Lagrange (1788): *se in un sistema meccanico conservativo l'energia potenziale ha un minimo locale forte, allora l'equilibrio in quel punto è stabile.*

È il caso, ad esempio, di una pallina che rotola senza attrito in una buca la cui superficie ha un punto di minimo.

Dunque, nella classe dei sistemi meccanici conservativi si può risolvere in molti casi la questione della stabilità dell'equilibrio studiando le proprietà dell'energia potenziale. Nel metodo di Liapunov il ruolo determinante è svolto da una funzione scalare (detta appunto *funzione di Liapunov*), che, sebbene non sempre interpretabile in termini di energia potenziale, ne costituisce una generalizzazione.

Definizione 3.4 - *Sia $V: A \mapsto \mathbb{R}$, $V \in C^1(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto contenente l'origine $\mathbf{0}$. V si dice funzione di Liapunov per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ se:*

i) $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{y}) > 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in A, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

ii) $\dot V(\mathbf{y}) \leq 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in A$.

Per analogia con le forme quadratiche, una funzione che soddisfa i) si dice definita *positiva* in A. Analogamente si definiscono le nozioni di funzione *definita negativa* e *semidefinita (negativa o positiva)*.

La ii) indica che $\dot V$ è semidefinita negativa in A.

Il risultato principale è il seguente:

■ **Teorema 3.7** - *Sia dato il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, con $\mathbf{f}$ localmente lipschitziana in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e tale che $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

a) *Se in un intorno $A \subseteq \Omega$ dell'origine esiste una funzione V di Liapunov per il sistema, allora $\mathbf{0}$ è stabile.*

b) *Se inoltre $\dot V < 0$ in $A \setminus \{\mathbf{0}\}$ allora $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile.*

Premettiamo alla dimostrazione alcune osservazioni ed esempi.

Osservazione 3.1 - L'idea geometrica (ed anche un poco meccanica...) sottostante al metodo di Liapunov si può comprendere meglio considerando il seguente caso particolare, bidimensionale.

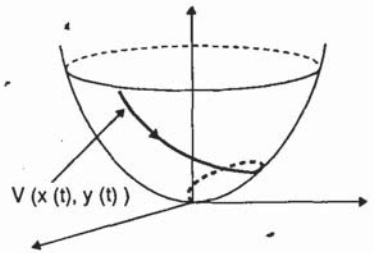


Fig. 4.28

Supponiamo di avere un sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \tag{3.13}$$

che ammetta come funzione di Liapunov

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

e tale che $\dot{V} < 0$ lungo le traiettorie del sistema.

Il grafico di V è un paraboloide (Fig. 4.28).

Poiché lungo le traiettorie del sistema, $\dot{V} < 0$, la funzione (della sola t) $V(x(t), y(t))$ è decrescente ed il limite di $V(x(t), y(t))$ per $t \to +\infty$ deve essere 0. Essendo V definita positiva, ciò costringe $x(t)$ e $y(t)$ a tendere a 0 per $t + \infty$.

Questo è, euristicamente, quello che capita.

Osservazione 3.2 - Il fatto che $\dot{V}$ lungo le traiettorie del sistema sia negativo ha un altro significato geometrico.

Consideriamo le curve di livello di V, definite dall'equazione

$$V(x,y) = c\ .$$

Si ha, riferendoci sempre al sistema (3.13):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}g(x,y)\ .$$

Ora grad V è un vettore normale alle curve di livello di V, diretto esternamente all'insieme $V(x,y) \leq c$, mentre $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ è tangente alla traiettoria del sistema.

Dunque la condizione $\dot{V} < 0$ esprime il fatto che il campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = f(x,y)\,\mathbf{i} + g(x,y)\,\mathbf{j}$$

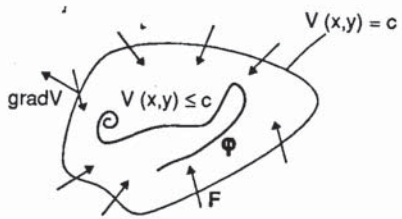


Fig. 4.29

associato al sistema è diretto *internamente* all'insieme $V(x,y) = c$; ciò implica che una traiettoria che entra o parte nell'insieme $V(x,y) \leq c$ non ne può più uscire (fig. 4.29).

Si noti inoltre che la condizione $\dot{V} < 0$ in $A\backslash\{\mathbf{0}\}$ implica che in A non vi sono altri punti di equilibrio (perché?).

In generale la ricerca di una funzione di Liapunov è difficoltosa.

A volte si può prendere l'energia totale associata al sistema oppure un integrale primo se questo è definito positivo in un intorno di $\mathbf{0}$.

Più in generale, se il sistema ammette uno o più integrali primi $E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(m < n)$, allora $V = E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_m^2$ è una funzione di Liapunov se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ è l'unica soluzione del sistema

$$E_1 = 0, E_2 = 0, \ldots, E_m = 0\ .$$

Infatti, in tal caso V è definita positiva in un intorno di $\mathbf{0}$ e

$$\dot{V} = 2E_1\dot{E}_1 + 2E_2\dot{E}_2 + \cdots + 2E_m\dot{E}_m = 0$$

essendo $\dot{E}_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$.

***Esempio* 3.10** - Il punto di equilibrio del sistema di Lotka–Volterra è stabile neutralmente; un integrale primo definito positivo è dato da $V(x,y) = E(x,y) - E(c/d, a/b)$ dove la $E(x,y)$ è definita nella 3.6.

Per l'equazione del pendolo (Esempio 3.7), l'energia è un integrale primo definito positivo in un intorno di $(0,0)$, che risulta così stabile. Naturalmente tutto ciò risulta direttamente dal ritratto di fase, come pure che i punti $(\pm\pi, 0)$ sono instabili (corrispondono alla posizione verticale del pendolo al di sopra del perno).

***Esempio* 3.11** - (Equazioni di Eulero per la rotazione di un solido sospeso nel suo centro di inerzia). Il sistema

$$\begin{cases} I_1\dot{x} = (I_2 - I_3)yz \\ I_2\dot{y} = (I_3 - I_1)xz \\ I_3\dot{z} = (I_1 - I_2)xy\ , \end{cases}$$

ove I_1, I_2, I_3 sono costanti positive (momenti di inerzia rispetto al centro di sospensione) ha i seguenti integrali primi, che si annullano nei punti di equilibrio $(0,0,a)$, $a \in \mathbb{R}$:

$$E_1(x,y,z) = I_1^2 x^2 + I_2^2 y^2 + I_3^2(z^2 - a^2)$$

$$E_2(x,y,z) = I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3(z^2 - a^2)\ .$$

La funzione $V(x,y,z) = E_1(x,y,z)^2 + E_2(x,y,z)^2$ è di Liapunov se $I_1 > I_3$ e $I_2 > I_3$ oppure $I_1 < I_3$ e $I_2 < I_3$. Lasciamo i facili calcoli al lettore. In questo caso, pertanto, i punti $(0,0,a)$ sono stabili.

Il risultato mostra la stabilità della rotazione di un solido attorno ai suoi assi di minore e maggiore inerzia.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema che spezzeremo in 3 lemmi, di interesse indipendente.

Lemma 3.8 - (di intrappolamento delle orbite).
Sia Γ un aperto limitato tale che $\overline{\Gamma} \subset A$ e $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$. Supponiamo che $V(\boldsymbol{\xi}) < a$ e che $V(\mathbf{y}) \geq a$ per ogni $\mathbf{y} \in \partial\Gamma$. Allora la soluzione $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ esiste per $t \geq 0$ e $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi}) \in \overline{\Gamma}$ $\forall t \geq 0$.

Dimostrazione - Supponiamo per assurdo che $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ esca da Γ. Poniamo $t^* = \inf\{t \geq 0 : \boldsymbol{\varphi}(t) \notin \Gamma\}$ = "primo tempo di uscita da Γ". Per la continuità di $\boldsymbol{\varphi}$ si ha $\boldsymbol{\varphi}(t^*) \in \partial\Gamma$; inoltre, per la definizione di t^*, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \Gamma$ per $0 \leq t < t^*$. Allora, ponendo $\phi(t) := V(\boldsymbol{\varphi}(t))$ avremmo:

$$\phi(0) = V(\boldsymbol{\varphi}(0)) = V(\boldsymbol{\xi}) < a\ ,\ \dot{\phi}(t) = \dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \leq 0$$

e

$$\phi(t^*) = V(\boldsymbol{\varphi}(t^*)) \geq a\ .$$

Contraddizione. Dunque $\boldsymbol{\varphi}$ non può uscire da Γ e pertanto è limitata in $J_{\boldsymbol{\varphi}}^+$. In base alla proposizione 3.5, $\boldsymbol{\varphi}$ esiste per $t \geq 0$. □

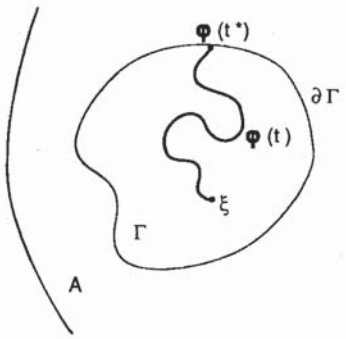


Fig. 4.30 Intrappolamento delle orbite: $V_{|\Gamma} \geq a$ e $V(\boldsymbol{\xi}) < a$; $\boldsymbol{\varphi}$ non può uscire da Γ.

Lemma 3.9 - (di escursione delle orbite). *Sia Γ aperto limitato con $\overline{\Gamma} \subset A$. Supponiamo che $V(\mathbf{y}) \geq a$ e $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq -b < 0$, $\forall \mathbf{y} \in \Gamma$. Se $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ e $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ è definita per $t \geq 0$, allora $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ esce da Γ.*

Dimostrazione - Per assurdo, sia $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi}) \in \Gamma$ per ogni $t \geq 0$. Si ha:

$$a \leq V(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \int_0^t \dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(s))ds + V(\boldsymbol{\xi}) \leq -bt + V(\boldsymbol{\xi})\ .$$

Per $t \to +\infty$, $-bt + V(\boldsymbol{\xi}) \to -\infty$. Contraddizione. □

Lemma 3.10 - (attrattività dell'origine). *Sia Γ_0 aperto limitato, $\overline{\Gamma}_0 \subset A$, $\mathbf{0} \in \Gamma_0$. Sia V funzione di Liapunov con $\dot{V} < 0$ in $A\backslash\{\mathbf{0}\}$. Se $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0$ e $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi}) \in \Gamma_0$ per $t \geq 0$ allora $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi}) \to \mathbf{0}$ per $t \to +\infty$.*

Dimostrazione - Essendo $\dot{V} < 0$ in A, $\phi(t) = V(\boldsymbol{\varphi}(t))$ è strettamente decrescente. Facciamo vedere che $V(\boldsymbol{\varphi}(t)) \to 0$ per $t \to +\infty$. Se così non fosse, $\phi(t) \to \mu > 0$ per $t \to +\infty$ e $\phi(t) \geq \mu$ per $t \geq 0$. Essendo $V(\mathbf{0}) = 0$, esiste un intorno $B_\delta(\mathbf{0})$ tale che, se $\mathbf{y} \in \overline{B}_\delta(\mathbf{0})$, $V(\mathbf{y}) \leq \mu/2$. Si noti che allora $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0\backslash\overline{B}_\delta(\mathbf{0})$. Siano $a > 0$ il minimo di V e $-b < 0$ il massimo di $\dot{V}$ su $\overline{\Gamma}_0\backslash B_\delta(\mathbf{0})$.

In base al lemma 3.9, $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ deve uscire da $\Gamma = \Gamma_0\backslash\overline{B}_\delta(\mathbf{0})$. Non può tuttavia uscire attraverso $\partial\Gamma_0$ per ipotesi e neppure attraverso $\partial B_\delta(\mathbf{0})$ poiché se $\boldsymbol{\varphi} \in \overline{B}_\delta(\mathbf{0})$, $V(\boldsymbol{\varphi}(t)) \leq \mu/2$. Contraddizione. Dunque $V(\boldsymbol{\varphi}(t)) \to 0$, che implica $\boldsymbol{\varphi}(t) \to \mathbf{0}$ per $t \to +\infty$. □

Dimostrazione del teorema 3.7 - Sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset A$. Poniamo $\Gamma = B_\varepsilon(\mathbf{0})$ e $a = \min_{\partial\Gamma} V$. Essendo $\partial\Gamma$ un compatto e V continua e definita positiva, a è ben definito e positivo. Poiché $V(\mathbf{0}) = 0$, esiste $B_\delta(\mathbf{0})$ tale che $V(\mathbf{y}) \leq a/2$, $\forall \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{0})$. In base al lemma 3.8, $\forall \boldsymbol{\xi} \in B_\delta(\mathbf{0})$, $\boldsymbol{\varphi}(t;0,\boldsymbol{\xi})$ esiste per $t \geq 0$ e non esce da $B_\varepsilon(\mathbf{0})$. Perciò $\mathbf{0}$ è stabile. Se $\dot{V} < 0$, l'asintotica stabilità segue dal lemma 3.10 con $\Gamma_0 = B_\varepsilon(\mathbf{0})$. □

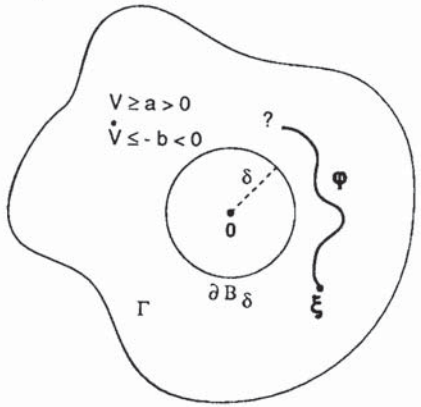


Fig. 4.31 Lemma di escursione delle orbite: $\boldsymbol{\varphi}$ deve uscire da Γ.

Il lemma 3.10 indica che se si riesce a trovare un aperto $\Gamma_0 \subset \Omega$, limitato e contenente l'*unico* punto di equilibrio $\mathbf{0}$, nel quale sono intrappolate le orbite, e $\dot{V}$ è definita negativa, allora Γ_0 è contenuto nel bacino di attrazione di $\mathbf{0}$.

Ciò suggerisce la seguente

Proposizione 3.11 - *Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0}$ l'unico punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Sia V una funzione di Liapunov per il sistema.*

Se $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $V(\mathbf{y}) \to +\infty$ per $\|\mathbf{y}\| \to +\infty$ allora l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Dimostrazione - Sia ξ un qualunque punto di $\mathbf{R}^n$, $\xi \neq \mathbf{0}$, e $V(\xi) = a > 0$. Poiché $V(\mathbf{y}) \to +\infty$ per $\|\mathbf{y}\| \to +\infty$, esiste una sfera $B_r(\mathbf{0})$ di raggio r abbastanza grande, tale che $V(\mathbf{y}) \geq 2a$ per $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \setminus B_r(\mathbf{0})$. In particolare $V(\mathbf{y}) \geq 2a$ su $\partial B_r(\mathbf{0})$. Ma allora, in base al lemma 3.7, $\varphi(t;0,\xi)$ esiste per $t \geq 0$ e non esce da $B_r(\mathbf{0})$. Essendo $\dot{V} < 0$ in tutto $\mathbb{R}^n$, segue dal lemma 3.10 che $\varphi(t;0,\xi) \to \mathbf{0}$, $t \to +\infty$. Essendo ξ arbitrario, il bacino di attrazione di $\mathbf{0}$ è $\mathbf{R}^n$. □

***Esempio* 3.12** - Nel caso dei sistemi autonomi $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a coefficienti costanti, se $\mathbf{A}$ è definita negativa, allora $V(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2$ è una funzione di Liapunov. Infatti V è definita positiva e

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = 2 < \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}} > = 2 < \mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} > < 0 \qquad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \ .$$

Essendo poi $V(\mathbf{y}) \to +\infty$ se $\|\mathbf{y}\| \to +\infty$ ritroviamo il fatto che $\mathbf{0}$ è globalmente asintoticamente stabile.

La condizione $\dot{V} < 0$ richiesta per la stabilità asintotica si rivela in molti casi troppo restrittiva, come nel seguente esempio.

***Esempio* 3.13** - (Oscillazioni del pendolo con attrito).

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{\varphi} = -k \sin \varphi - h\dot{\varphi} \qquad (k, h > 0) \ ,$$

il cui significato è ormai ben noto all'allievo.

L'energia

$$E(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{2} + (k - k \cos z_1) \ , \tag{3.14}$$

non è più un integrale primo del sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -k \sin z_1 - h\, z_2 \ , \end{cases} \tag{3.15}$$

a causa della presenza del termine dissipativo $-h\, z_2$.

Infatti:

$$\dot{E}(z_1, z_2) = -h\, z_2^2 \leq 0 \ . \tag{3.16}$$

In base alla teoria svolta in precedenza possiamo concludere soltanto che $\mathbf{0}$ è stabile mentre l'intuizione (ed anche il caso delle piccole oscillazioni nell'esempio 3.9), suggerisce che è asintoticamente stabile per via della perdita di energia indicata dalla (3.16).

Possiamo risolvere la questione posta nell'esempio precedente raffinando un poco la teoria.

Anzitutto si dice che un insieme $K \subset \Omega$ è *positivamente* (risp. *negativamente*) *invariante* se ogni semi-orbita che parte da un punto di K rimane in K per $t \to +\infty$ (risp. $t \to -\infty$).

Un punto di equilibrio costituisce un insieme invariante, come pure ogni orbita chiusa.

Se V è una funzione di Liapunov, l'insieme $K_c = \{\mathbf{y} \in \Omega : V(\mathbf{y}) < c\}$ è invariante (per il lemma di intrappolamento). Notiamo poi che, se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e se $V(\mathbf{y}) \to +\infty$, allora K_c è anche limitato.

Vale allora la seguente proposizione che ci limitiamo ad enunciare.

Proposizione 3.12 - *Siano $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0}$ punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Sia inoltre V una funzione di Liapunov tale che $V(\mathbf{y}) \to +\infty$ per $\|\mathbf{y}\| \to +\infty$. Se $\mathbf{0}$ è l'unico sottoinsieme invariante di $H := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{y}) = 0\}$ allora $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile. La stabilità è globale se $\mathbf{0}$ è l'unico punto di equilibrio in $\mathbb{R}^n$.*

***Esempio* 3.14** - (Continuazione dell'esempio 3.13).

In figura è illustrato l'andamento del campo vettoriale $z_2\,\mathbf{i} + [-k \sin z_1 - h\, z_2]\,\mathbf{j}$ associato al sistema, vicino a $\mathbf{0}$.

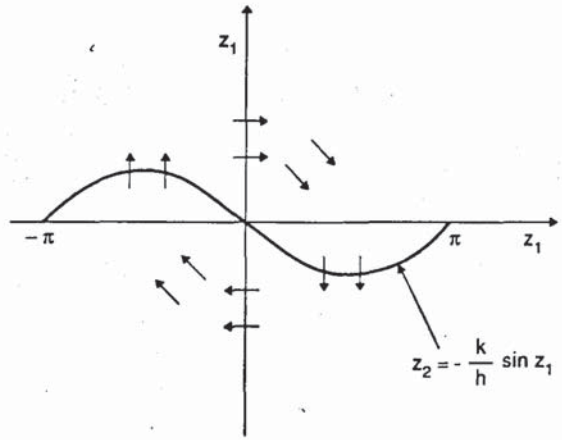


Fig. 4.32

Se V è data dalla formula (3.14) l'insieme $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(z_1, z_2) = 0\}$ è l'asse z_2. Dalla figura 4.32 si vede che, preso un qualunque punto $(0, \xi_2)$,

$\xi_2 \neq 0$, l'orbita uscente da questo punto si allontana ortogonalmente dall'asse. L'unico insieme invariante contenuto nell'asse z_2 è dunque l'origine che, in base alla proposizione 3.12, risulta asintoticamente stabile.

A questa conclusione si può giungere anche con il metodo di linearizzazione illustrato nel prossimo paragrafo (Esempio 3.14).

Terminiamo il paragrafo osservando che, se in un intorno di $\mathbf{0}$ esiste una funzione V definita positiva insieme con $\dot{V}$, l'origine è un punto *instabile*. Lasciamo all'allievo la dimostrazione (vedi comunque l'esercizio 13).

3.6 Metodo di linearizzazione

Per un sistema lineare autonomo la stabilità di un punto di equilibrio è risolta completamente dal teorema 3.6. Nel caso non lineare la situazione è molto meno soddisfacente. Anche se si può dimostrare che l'esistenza di una funzione di Liapunov è non solo sufficiente (Teor. 3.7), ma anche necessaria per la stabilità di un punto di equilibrio, questa caratterizzazione ha un valore più teorico che pratico, in quanto la ricerca di una funzione di Liapunov può costituire un problema molto complesso.

Un altro modo di procedere è cercare di sostituire il sistema originale con un sistema lineare approssimante, utilizzare la teoria lineare e cercare di trasferire le informazioni ottenute a quello non lineare.

In generale l'approssimazione è efficace solo nell'intorno del punto di equilibrio considerato e perciò, anche se le informazioni sul sistema lineare hanno carattere globale, la loro validità in riferimento al sistema originale è per lo più locale. È un'altra istanza della dicotomia locale–globale associata a non lineare–lineare che abbiamo già avuto modo di riscontrare in altre occasioni.

Consideriamo un sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{3.17}$$

con $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e tale che $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ipotesi fondamentale per il seguito è che la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{0}$, $\mathbf{Df}(\mathbf{0})$, *sia non singolare* . Questo, tra l'altro, assicura che $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio *isolato*, ossia che esiste un intorno di $\mathbf{0}$ in cui non vi sono altri punti di equilibrio del sistema (vedi l'esercizio 2).

Essendo $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ si può scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{Df}(\mathbf{0})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \tag{3.18}$$

con $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = o(||\mathbf{y}||)$ per $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$.

Poniamo $\mathbf{A} := \mathbf{Df}(\mathbf{0})$ e consideriamo il sistema:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \tag{3.19}$$

che prende il nome di *sistema linearizzato* (in $\mathbf{y} = \mathbf{0}$).

Il risultato fondamentale è il seguente.

■ **Teorema 3.13** - *Se* $\mathbf{0}$ *è asintoticamente stabile per* (3.19) *allora lo è anche per il sistema* (3.17).

La dimostrazione si basa su un lemma algebrico che ci limitiamo ad enunciare.

Lemma 3.14 - *Se tutti gli autovalori di* $\mathbf{A}$ *hanno parte reale negativa, allora esiste una matrice* $\mathbf{Q}$ *simmetrica e definita positiva tale che* $\mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ *è definita negativa.*

Si noti che se $\mathbf{A}$ è simmetrica, nel lemma si può scegliere $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$, matrice identità in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione del teorema 3.13 - Essendo $\mathbf{0}$ asintoticamente stabile per (3.19) tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa. Sia allora $\mathbf{Q}$ come nel lemma 3.14 e consideriamo la forma quadratica definita positiva

$$V(\mathbf{y}) = <\mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{y}> \ .$$

Calcoliamo la derivata di V lungo le traiettorie del sistema non lineare (3.18); si ha:

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = 2 < \mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} > + 2 < \mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y}) > \ . \tag{3.20}$$

Inoltre, per la simmetria di $\mathbf{Q}$:

$$2 < \mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} > = 2 < \mathbf{y}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{y} > = < \mathbf{y}, \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{y} >$$

che, per ipotesi, è definita negativa. Perciò, se $\lambda_{\max}(< 0)$ è il massimo autovalore di $\mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, si può scrivere

$$2 < \mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} > \leq \lambda_{\max} ||\mathbf{y}||^2 \ . \tag{3.21}$$

Essendo $||\mathbf{g}(\mathbf{y})|| = o(||\mathbf{y}||)$ per $||\mathbf{y}|| \to 0$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $B_{\delta_\varepsilon}(\mathbf{0})$ tale che se $\mathbf{y} \in B_{\delta_\varepsilon}(\mathbf{0})$

$$||\mathbf{g}(\mathbf{y})|| \leq \varepsilon ||\mathbf{y}|| \ .$$

D'altra parte, $||\mathbf{Q}\mathbf{y}|| \leq c||\mathbf{y}||$, dove c è la norma di $\mathbf{Q}$ definita nell'esercizio 2.6.

Di conseguenza, per la disuguaglianza di Schwarz:

$$| < \mathbf{Q}\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y}) > | \leq ||\mathbf{Q}\mathbf{y}|| \cdot ||\mathbf{g}(\mathbf{y})|| \leq c\,\varepsilon ||\mathbf{y}||^2 \ . \tag{3.22}$$

Da (3.20), (3.21) e (3.22) segue che:

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \leq (\lambda_{\max} + c\,\varepsilon)||\mathbf{y}||^2 \ .$$

Se ora si sceglie $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo in modo che $\lambda_{\max} + c\varepsilon$ sia negativo, risulta che $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ in $B_{\delta_\varepsilon}(\mathbf{0})$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. In base al teorema 3.7, $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile. □

Anche l'*instabilità* di $\mathbf{0}$ si può trasferire dal sistema linearizzato a quello originale, come mostra la seguente proposizione che ci limitiamo ad enunciare:

Proposizione 3.15 - *Se esiste un autovalore di* $\mathbf{A}$ *con parte reale positiva allora* $\mathbf{0}$ *è instabile per il sistema* (3.18).

***Esempio* 3.15** - (Continuazione degli esempi 3.13 e 3.14).
Riconsideriamo il caso del sistema (3.15). Linearizzando nell'origine, essendo $\sin z_1 = z_1 + o(z_1^2)$ per $z_1 \to 0$, si ritrova il sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -kz_1 - hz_2 \end{cases}$$

già trattato in dettaglio nell'esempio 3.13.
Se $h > 0$ l'origine è asintoticamente stabile per entrambi i sistemi.
Per linearizzare nell'altro punto di equilibrio $(\pi, 0)$, occorre calcolare la matrice jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (z_2, -k \sin z_1 - hz_2)$ in $(\pi, 0)$; si trova

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -h \end{pmatrix}.$$

Essendo $|\mathbf{A}| = -k < 0$ e $\operatorname{tr}\mathbf{A} = -h$, $\Delta = (\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| > 0$, siamo nel caso i.2 del quadro riassuntivo, che corrisponde ad un *colle*. Pertanto esiste un autovalore con parte reale positiva e l'origine è instabile per entrambi i sistemi.

In figura 4.33 sono raffigurate le traiettorie del sistema per $h^2 < 4k$ (attrito debole).
L'andamento delle traiettorie in figura suggerisce che si mantenga non solo la stabilità (nel caso $h > 0$), ma anche la configurazione delle traiettorie in un intorno di $\mathbf{0}$.
Limitandoci al caso bidimensionale e rimanendo ad un livello puramente intuitivo si può dire che se $\mathbf{0}$ è un fuoco, un colle o un nodo (non a stella) per il sistema

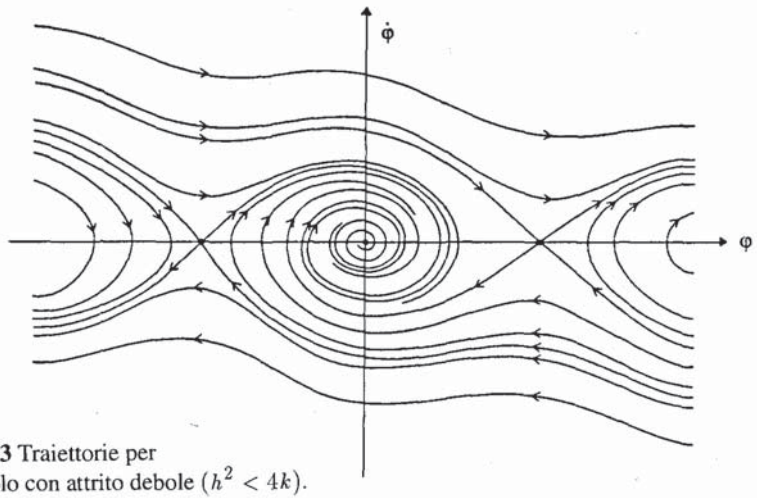


Fig. 4.33 Traiettorie per il pendolo con attrito debole ($h^2 < 4k$).

linearizzato, allora il ritratto di fase in un intorno di $\mathbf{0}$ per il sistema non lineare è *topologicamente* equivalente. Si potrà così parlare di *fuoco, colle o nodo* anche per il sistema *non lineare*.
Ciò significa sostanzialmente che una "piccola" perturbazione sulla funzione $\mathbf{f}$ non altera localmente il ritratto di fase in questi casi. Si parla allora di stabilità *strutturale* del sistema. Come l'esempio stesso del pendolo indica, non ci si può aspettare che un centro sia strutturalmente stabile: una piccola perturbazione può distruggere la periodicità di una soluzione.
Osserviamo infine che, mentre per i sistemi lineari la tipologia dei punti di equilibrio si riduce ai 6 casi elencati nel quadro di pagina 302, quella per i sistemi non lineari è molto più ricca; non ci occuperemo di questo argomento, rimandando il lettore interessato a testi specialistici.

3.7.* Cicli limite. Oscillazioni autosostenute

Nei modelli di Lotka–Volterra e del pendolo senza attrito esistono infinite orbite chiuse che circondano un punto di equilibrio. Può succedere che esistano una o più orbite chiuse isolate sulle quali, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale. Queste orbite si chiamano *cicli limite* e tipicamente indicano la presenza di *oscillazioni autosostenute*. Per i sistemi bidimensionali si può dimostrare che un ciclo contiene *sempre* un punto di equilibrio nel suo interno.
Un classico esempio è l'equazione di Van der Pol che abbiamo già incontrato negli esempi 1.6 e 1.9 e che qui riprendiamo.

***Esempio* 3.16** - (Equazione di Van der Pol).
Consideriamo l'equazione

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.23}$$

che si può considerare come una perturbazione dell'oscillatore armonico ($\ddot{y} + y = 0$) mediante il termine $\varepsilon(y^2 - 1)$.
Considerando l'energia $E(y, \dot{y}) = (\dot{y}^2 + y^2)/2$ si vede che

$$\dot{E}(y, \dot{y}) = \dot{y}\ddot{y} + y\dot{y} = \dot{y}[\varepsilon(1 - y^2)\dot{y} - y] + y\dot{y} = \varepsilon(1 - y^2)\dot{y}^2 . \tag{3.24}$$

La (3.24) indica che il sistema "dissipa" energia quando $|y| > 1$, mentre "fornisce" energia quando $|y| < 1$. Lasciamo per esercizio la dimostrazione che le soluzioni sono prolungabili in tutto $\mathbb{R}$. La congettura è che le soluzioni si assestino lungo un'orbita chiusa, corrispondente ad una soluzione periodica.
Usando un computer, proviamo a disegnare alcune orbite corrispondenti nel piano delle fasi $y, \dot{y}$. Il risultato è quello indicato in figura 4.34. I calcoli numerici confortano la nostra congettura.

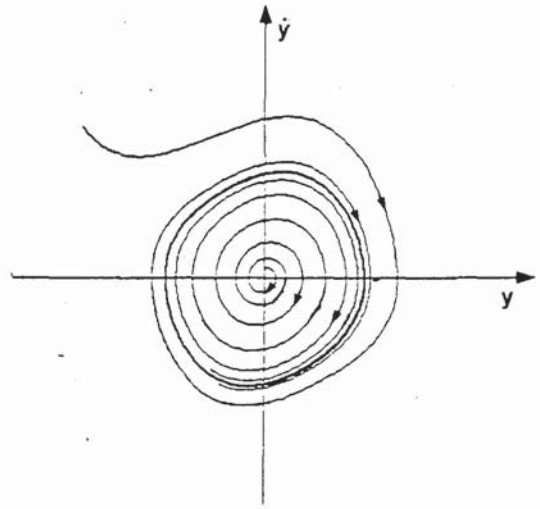


Fig. 4.34 Orbita nel piano delle fasi per l'equazione di Van der Pol con $\varepsilon = 0.2$. Si noti la presenza di un ciclo limite (orbita in grassetto) stabile.

Occorre però un'analisi teorica, che si può condurre meglio, anziché nel piano delle fasi, nel cosiddetto *piano di Lienard* (*), ossia delle variabili y e $z = \dot{y} + \varepsilon(y^3/3 - y)$, rispetto alle quali otteniamo il sistema, equivalente alla (3.23):

$$\begin{cases} \dot{y} = z - \varepsilon\left(\dfrac{y^3}{3} - y\right) \\ \dot{z} = -y \end{cases} \tag{3.25}$$

(vedi Esempio 1.9).

La corrispondenza $(y, \dot{y}) \leftrightarrow (y, z)$ tra punti dei due piani è chiaramente biunivoca e regolare cosicché il ritratto di fase è qualitativamente simile nei due casi. In particolare, punti di equilibrio e orbite chiuse si corrispondono nei due piani.

L'unico punto di equilibrio è $(0,0)$; linearizzando si trova

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon y + z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$$

a cui è associata la matrice $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Poiché $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \varepsilon > 0$; $|\mathbf{A}| = 1 > 0$, $\Delta = (\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| < 0$, siamo nel caso iii.2 del quadro riassuntivo; l'origine è un *fuoco instabile* . In base alla proposizione 3.14, è un fuoco instabile anche per il sistema 3.24 e le orbite che partono in un intorno di $(0,0)$ se ne allontanano a spirale.

Vogliamo dimostrare che: *esiste un unico ciclo stabile, nel senso che ogni traiettoria diversa da* $(0,0)$ *tende, per* $t \to +\infty$, *ad avvolgersi su di esso.*

(*) Alfred Lienard (1869–1958), fisico e matematico francese.

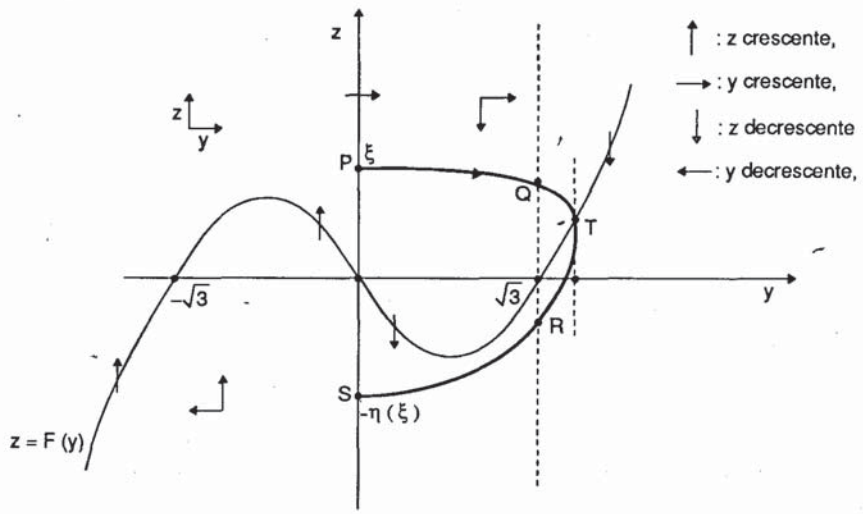


Fig. 4.35 Piano di Lienard per l'equazione di Van der Pol.

Per dimostrare questo fatto, riferiamoci alla figura 4.35, in cui è illustrato l'andamento del campo vettoriale

$$[z - F(y)]\mathbf{i} - y\mathbf{j} \qquad \left(F(y) := \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\right)$$

associato al sistema (3.24).

Osserviamo ora che l'equazione differenziale della famiglia di traiettorie è

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z - F(y)} \,. \tag{3.26}$$

La sostituzione $z \mapsto -z$ e $y \mapsto -y$ lascia invariata l'equazione cosicché si deduce che se si riflette un'orbita rispetto all'origine si ottiene ancora un'orbita.

Consideriamo l'orbita che parte da un punto $P = (0, \xi)$. L'andamento dell'orbita è quello indicato in figura (invitiamo l'allievo a convincersene): dopo un tempo finito interseca la cubica $z = F(y)$ in un punto T: y diventa decrescente, cosicché dopo un tempo finito interseca l'asse z in un punto S di coordinate $(0, -\eta(\xi)), \eta(\xi) > 0$. L'osservazione fondamentale è ora la seguente:

se esiste $\xi > 0$ *tale che* $\eta(\xi) = \xi$ *allora, riflettendo simmetricamente all'origine si ottiene un'altra orbita che si salda con la precedente dando luogo ad un'orbita chiusa.*

Poiché tutte le orbite chiuse si avvolgono intorno all'origine concludiamo:

i punti fissi dell'applicazione $\xi \mapsto \eta(\xi)$ *sono in corrispondenza biunivoca con le orbite chiuse.*

Dobbiamo dunque mostrare che di questi punti fissi ne esiste esattamente uno.

Consideriamo la funzione $V(y,z) = y^2 + z^2$ e chiamiamo γ_ξ il tratto di orbita da $(0,\xi)$ a $(0,-\eta(\xi))$ e τ il relativo tempo di percorrenza; si ha:

$$\delta(\xi) := \eta(\xi)^2 - \xi^2 = \int_0^\tau \frac{dV}{dt}dt = 2\int_0^\tau (y\dot{y} + z\dot{z})dt = \quad \text{(usando le (3.24)}$$

$$= -2\int_0^\tau yF(y)dt = \text{ (essendo } \dot{z} = -y) = 2\int_{\gamma_\xi} F(y)dz\ .$$

Facciamo vedere che:

i) $\delta(\xi) > 0$ per ξ vicino a 0;

ii) $\delta(\xi)$ è strettamente decrescente;

iii) $\delta(\xi) \to -\infty$ per $\xi \to +\infty$.

Da queste proprietà segue l'esistenza di un unico punto $\bar{\xi}$ tale che $\delta(\bar{\xi}) = 0$, che equivale a $\bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})$.

i). Se ξ è abbastanza vicino a 0, il punto T si trova nel tratto in cui F è negativa. Essendo anche $\dot{z} < 0$ si ha $F(y)dz > 0$ e quindi $\delta(\xi) > 0$.

ii). Si può scrivere, in base alla (3.26),

$$F(y)dz = -\frac{yF(y)}{z - F(y)}dy'. \tag{3.27}$$

Inoltre

$$\int_{\gamma_\xi} F(y)dz = \int_{\widehat{PQ}} \cdots + \int_{\widehat{QR}} \cdots + \int_{\widehat{RS}} \ .$$

Se ξ cresce, $\widehat{PQ}$ si alza, $\widehat{RS}$ si abbassa. Ciò significa che $z - F(y)$ aumenta in modulo su questi tratti, mentre $yF(y)$ rimane inalterato e negativo. Essendo $F(y)dz > 0$ si deduce dalla (3.26) che $\int_{\widehat{PQ}} \cdots + \int_{\widehat{RS}} \cdots$ diminuisce.

Sul tratto $\widehat{QR}$, F è positiva e strettamente crescente e $dz < 0$; ne segue che se ξ aumenta $\int_{\widehat{QR}} F(y)dz$ diminuisce.

iii) Consideriamo il tratto di orbita $\widehat{QR}$. Riferendoci alla figura 4.36 si deduce che

$$\int_{\widehat{QR}} F(y)dz \le \int_{\widehat{LN}} F(y)dz \le F(a)\int_{\widehat{LN}} dz\ .$$

Poiché $\int_{\widehat{LN}} dz =$ (differenza tra l'ordinata di N e l'ordinata di L) $\to -\infty$ per $\xi \to +\infty$ ne segue l'asserto.

La prova della stabilità del ciclo limite segue facilmente; lasciamo i dettagli all'allievo.

Dal punto di vista delle applicazioni radio–ingegneristiche l'esistenza di un ciclo limite rappresenta la possibilità del sistema di oscillare con un periodo indipendente dalle condizioni iniziali.

Concludiamo il paragrafo con un teorema, che ci limitiamo ad enunciare, che può essere usato, nel caso bidimensionale, per dimostrare l'esistenza di un ciclo limite.

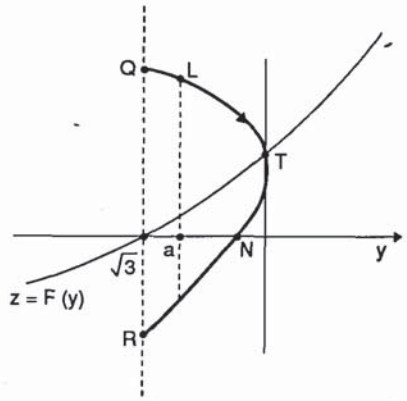


Fig. 4.36

■ **Teorema 3.16** - (di Bendixson–Poincaré (*)). *Sia dato il sistema bidimensionale autonomo*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

con f e g di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$. Sia $\Omega' \subset \Omega$ un aperto limitato non contenente punti critici e tale che ogni orbita che entri in Ω' non ne possa più uscire.

Allora esiste in Ω' un ciclo limite.

3.8 * Il punto di vista dei sistemi dinamici

In questo paragrafo accenniamo brevemente ad un aspetto geometrico della teoria delle equazioni differenziali, sul quale si fonda la teoria moderna dei sistemi dinamici. Ci limitiamo a sistemi autonomi definiti in tutto $\mathbb{R}^n$.

Sia dato il sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})\ , \tag{3.28}$$

(*) Henry Poincaré (1854–1912) matematico francese. Otto Bendixson (1861–1935) matematico svedese.

dove $\mathbf{f}$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Se $\xi \in \mathbb{R}^n$ possiamo pensare alla soluzione $\varphi(t;0,\xi)$ in due modi (supponiamo, per semplicità, che ogni soluzione sia definita in tutto $\mathbb{R}$).

Nel primo, adottato finora, si pensa alla curva nello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$

$$t \mapsto \varphi(t;0,\xi) ,$$

oppure all'orbita corrispondente nello spazio delle fasi; t è la variabile, ξ è fisso.

Nel secondo, si pensa, per ogni t fissato, alla trasformazione da $\mathbb{R}^n$ in sé data da

$$\xi \mapsto \varphi(t;0,\xi) .$$

Al variare di t si ottiene una famiglia ad un parametro di trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ in sé, che prende il nome di *flusso di fase* e che indichiamo con il simbolo $\{g^t\}$. In altri termini:

$$g^t(\xi) := \varphi(t;0,\xi) .$$

Le principali proprietà della famiglia $\{g^t\}$ sono espresse qui di seguito:

a) g^0 = identità in $\mathbb{R}^n$;

b) $g^{t+s} = g^t \circ g^s = g^s \circ g^t$; in particolare $g^{-t} \circ g^t$ = identità in $\mathbb{R}^n$;

c) per ogni t, g^t è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^n$, di classe C^1 con la sua inversa g^{-t};

d) $\dot{g}^t(\xi) = \mathbf{f}(g^t(\xi))$;

e) la matrice jacobiana $\mathbf{G}^t = \mathbf{D}_\xi g^t$ soddisfa la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}^t(\xi) = \mathbf{Df}(g^t(\xi)) \cdot \mathbf{G}^t(\xi) . \tag{3.29}$$

Dimostrazione -

a) Segue da $g^0(\xi) = \varphi(0;0,\xi) = \xi$.

b) Sia $g^s(\xi) = \eta$; si ha: $g^{t+s}(\xi) = \varphi(t+s;0,\xi)$ = (per il teorema di unicità) $= \varphi(t;s,\eta) = g^t(g^s(\xi)) = g^t \circ g^s(\xi)$.

c) Segue dal teorema di esistenza ed unicità e dal teorema di differenziabilità della soluzione di un problema di Cauchy rispetto alle condizioni iniziali (Teor. 1.2 e prop. 1.11).

d) Segue dal fatto che $g^t(\xi)$ è soluzione di (3.28).

e) È l'equazione alle variazioni (1.41) scritta con la simbologia appena introdotta. □

Le proprietà a., b., c., unite all'associatività della composizione tra funzioni, si esprimono in un'unica locuzione:

il flusso di fase $\{g^t\}$ costituisce un sistema dinamico continuo di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$, ossia una famiglia (locale) di diffeomorfismi di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ da $\mathbb{R}^n$ in sé.

Esempio **3.17** - Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 . \end{cases}$$

La soluzione soddisfacente la condizione iniziale $y_1(0) = \xi_1$, $y_2(0) = \xi_2$ è data dalla formula:

$$y_1(t) = \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t$$

$$y_2(t) = -\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t .$$

Dunque il flusso di fase g^t è definito da:

$$g^t : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ,$$

ossia: g^t rappresenta il *gruppo delle rotazioni*, con centro nell'origine, del piano in sé.

In generale, dato il sistema lineare autonomo

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} , \tag{3.30}$$

il flusso di fase è assegnato dalla formula

$$g^t : \xi \mapsto e^{t\mathbf{A}}\xi ;$$

si noti che $e^{t\mathbf{A}}$ è la matrice di transizione.

La teoria dei sistemi dinamici ha come obiettivo lo studio delle proprietà del flusso di fase con particolare interesse al comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.

In questo ordine di idee, è significativo chiedersi se "il flusso di fase conserva la misura in $\mathbb{R}^n$ (l'area in $\mathbb{R}^2$, i volumi in $\mathbb{R}^3$)" (*). Precisamente, dato un insieme Ω misurabile in $\mathbb{R}^n$, indichiamo con $|\Omega|$ la sua misura e poniamo

$$g^t(\Omega) := \Omega_t \quad \text{e} \quad \phi(t) := |\Omega_t| .$$

Ci chiediamo come varia $\phi(t)$.

Vale l'importante formula (di Liouville)

$$\dot{\phi}(t) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{f}(\xi) d\xi . \tag{3.31}$$

La (3.31) indica in particolare *che se* $\operatorname{div} \mathbf{f}(\xi) = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$ *allora* $\dot{\phi}(t) = 0$ *ossia il flusso conserva la misura n–dimensionale.*

(*) Il concetto di misura di un insieme è trattato ampiamente nel capitolo 5 del presente volume. Qui indichiamo con $|\Omega|$ la misura (secondo Peano Jordan o secondo Lebesgue) di Ω.

Esempi tipici sono i sistemi Hamiltoniani (Esempio 3.4)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ ,\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n\ .$$

Se $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ si ha infatti, per il teorema di Schwarz:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial [_i}\right] = 0\ .$$

Nel caso dei sistemi lineari (3.30), $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$ e $\operatorname{div}\mathbf{f} = \operatorname{tr}\mathbf{A}$. La (3.31) diventa

$$\dot{\phi}(t) = \operatorname{tr}\mathbf{A}\ \phi(t)$$

che generalizza la (2.33) e che mostra come $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ sia interpretabile come *tasso di variazione della misura sotto l'azione del flusso di fase.*

Nel caso bidimensionale possiamo immaginare il flusso di fase come il flusso di un liquido piano: ogni particella segue le traiettorie di fase. In questo caso $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$, conservazione dell'area, significa incompressibilità del fluido.

Esercizi

1. Dimostrare che se $\varphi(t)$ è soluzione del sistema (3.1) e $\varphi(t) \to \mathbf{y}_0$ per $t \to +\infty$ oppure $t \to -\infty$, allora $\mathbf{y}_0$ è punto di equilibrio, cioè $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.

2. Sia $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Df}(\mathbf{0})$ non sia singolare.
Dimostrare che $\mathbf{0}$ è punto di equilibrio isolato per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$.
[Suggerimento: supporre per assurdo che esista una successione $\{\mathbf{y}^k\}$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{y}^k) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^k \to \mathbf{0}$ per $k \to +\infty$. Usare la formula di Taylor per ottenere una contraddizione.]

3. Dimostrare la proposizione 3.5. [Suggerimento: sia φ una soluzione la cui semi-orbita destra sia contenuta in un compatto e per assurdo sia $T_{\max} < \infty$. Si usi l'equazione integrale di Volterra per mostrare che $\lim_{t \to T_{\max}^-} \varphi(t) = \eta$. Si proceda poi come nella parte finale della dimostrazione del teorema 1.7].

4. Studiare nel piano delle fasi la seguente equazione

$$\ddot{y} = a^2 - y^2 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Stabilire in particolare se al variare di a:
a) esistono orbite periodiche;
b) esistono soluzioni non periodiche definite in $\mathbb{R}$.

5. Sia dato il sistema autonomo bidimensionale (3.7). Dimostrare che, se l'equazione differenziale delle traiettorie è *esatta*, allora esiste un integrale primo.

6.* Siano $F(x,y)$ e $G(x,y)$ due funzioni reali di classe C^1 in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. F e G si dicono *funzionalmente dipendenti* in Ω *se esiste una funzione* $H(s,t)$, *tale che* $H(F(x,y), G(x,y)) = 0$ in Ω. Si dimostra che: *se H è di classe C^1, F e G sono funzionalmente dipendenti se e solo se*

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{in } \Omega\ .$$

Siano ora F e G *integrali primi* per il sistema (3.7). Possono essere linearmente indipendenti in Ω? Giustificare la risposta.

7.* Sia $\dot{y} = f(y)$ un'equazione scalare con $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

a) se $f(y_0) = 0$ e $f'(y_0) < 0$ allora y_0 è asintoticamente stabile ed inoltre per ξ abbastanza vicino ad y_0, la soluzione $\varphi(t) = \varphi(t; 0, \xi) \to y_0$ per $t \to +\infty$ con velocità esponenziale cioè $|\varphi(t) - y_0| \le c\,e^{-kt}$ con c e k costanti positive opportune.

b) Esaminare il caso $f(y_0) = f'(y_0) = f''(y_0) = 0$, $f'''(y_0) \neq 0$ ed $f'''(y) < 0$ in un intorno di y_0, y_0 escluso.

8. Un problemino di *farmacocinetica*. Sia $c = c(t)$ la concentrazione di una sostanza nel sangue di un paziente.
Una dose costante c_0 viene somministrata ad ogni intervallo di tempo T, in particolare al tempo $t = 0$.
Si studi l'andamento di $c(t)$ nei seguenti due casi:

a) $\dot{c}(t) = k\,c(t)$ b) $\dot{c}(t) = k\,c(t)^2$.

In particolare: tracciare il grafico di $c(t)$ in un intervallo del tipo $[0, mT]$, $m \in \mathbb{N}$. Studiare il comportamento asintotico di $c(t)$ per $t \to +\infty$ e dimostrare che esiste una concentrazione limite c_∞. È c_∞ un punto di equilibrio? È stabile? Come dipende c_∞ dalla dose iniziale c_0?

9. Determinare la natura del punto di equilibrio $(0,0)$ per i seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = -8x - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$

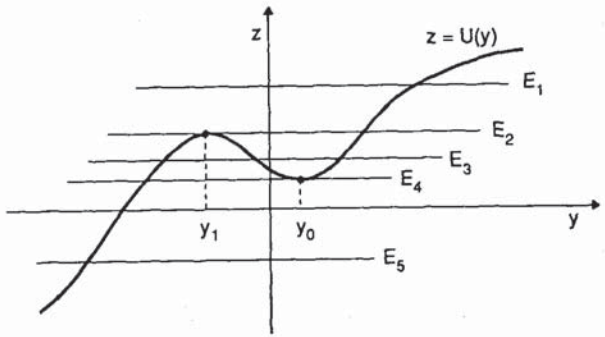


Fig. 4.37

10. Studiare il ritratto di fase per i seguenti sistemi: (punti critici, equazione differenziale delle traiettorie, risolvere se possibile tale equazione, trovare il verso di percorrenza sulle traiettorie)

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = e^y \cos x \end{cases}$$

11. Si consideri l'equazione del pendolo (senza attrito) (3.9). Calcolare l'energia meccanica necessaria per avere oscillazioni di ampiezza almeno $\pi/3$ ed almeno $\pi/2$.

12. Dato il sistema conservativo $\ddot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, poniamo $U(y) = -\int_0^y f(s)ds$, energia potenziale, $\dot{y}^2/2 + U(y) = E$, energia totale. Si supponga che il grafico di U sia quello indicato in figura 4.37.

Tracciare le orbite corrispondenti ai livelli di energia indicati (vedi Esempio 3.7).

13. Dimostrare che se V e $\dot{V}$ sono definite positive per il sistema (3.1) allora $\mathbf{0}$ è punto di equilibrio instabile.

[Dimostrare che, fissato un intorno di $\mathbf{0}$, ogni soluzione che parte da questo intorno vi esce definitivamente].

14. Studiare la stabilità dell'origine per il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x^5 \end{cases}$$

[Considerare $V(x, y) = x^6 + 3y^2$ e calcolare $\dot{V} \ldots$].

15. Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $y\,g(y) > 0$ per $y \neq 0$. Si consideri l'equazione

$$\ddot{y} + \dot{y} + g(y) = 0 .$$

Dimostrare che l'origine è punto di equilibrio e studiarne la natura.

16. Variante del modello di Lotka–Volterra.

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - hx^2 \\ \dot{y} = -cy + dxy - ky^2 \end{cases} \qquad (a, b, c, d, h, k \in \mathbb{R}_+) .$$

Interpretare il modello in termini di prede ($x = x(t)$) e predatori ($y = y(t)$).

Stabilire se esistono condizioni sui parametri che implicano l'*estinzione* dei predatori (ossia che implichi l'esistenza di un punto di equilibrio asintoticamente stabile di coordinate $(P, 0)$).

17.* Si consideri l'equazione di Van der Pol (Esempio 3.16)

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 . \qquad (\varepsilon > 0)$$

Si può dimostrare che, quando $\varepsilon \to 0_+$, la soluzione periodica dell'equazione tende ad una soluzione periodica dell'oscillatore armonico. Determinarla.

[Usare il piano delle fasi: $\dot{y} = z$, $\dot{z} = -y + \varepsilon(1 - y^2)z$. Sia $y_0(t) = \rho_0 \cos t$, $z_0(t) = \rho_0 \sin t$ la soluzione incognita dell'oscillatore armonico; possiamo allora scrivere la soluzione T_ε-periodica dell'equazione di van der Pol nel seguente modo:

$$y_\varepsilon(t) = (\rho_0 + \rho_\varepsilon(t)) \cos(t + \omega_\varepsilon(t)) ,$$

$$z_\varepsilon(t) = (\rho_0 + \rho_\varepsilon(t)) \sin(t + \omega_\varepsilon(t)) ,$$

dove $T_\varepsilon \to 2\pi$, $\rho_\varepsilon \to 0$, $\omega_\varepsilon \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Dalla periodicità di $(z_\varepsilon, y_\varepsilon)$ si ricava che

$$\int_0^{T_\varepsilon} \frac{d}{dt}(y_\varepsilon(t)^2 + z_\varepsilon(t)^2)dt = 0 . \qquad (**)$$

Osservare che

$$\frac{d}{dt}[y_\varepsilon^2(t) + z_\varepsilon(t)^2] = 2(y_\varepsilon \dot{y}_\varepsilon + z_\varepsilon \dot{z}_\varepsilon) = 2\varepsilon z_\varepsilon^2(1 - y_\varepsilon^2) =$$
$$= 2\varepsilon(\rho_0 + \rho_\varepsilon(t))^2[\sin(t + \omega_\varepsilon(t))]^2\{1 - (\rho_0 + \rho_\varepsilon(t))^2[\cos(t + \omega_\varepsilon(t))]^2\}$$

Sostituire nella $(**)$, dividere per ε e poi passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

Si trova

$$\int_0^{2\pi} \rho_0^2(\sin t)^2(1 - \rho_0^2(\cos t)^2)dz = 0 \quad \text{da cui ...]}$$

18. Studiare la stabilità dell'origine per il seguente sistema, dando informazioni sull'eventuale bacino di attrazione

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = y(x^2 - 1) \end{cases}$$

19. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(x^2 + y^2 - 1) - 2y \\ \dot{y} = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2x \end{cases}$$

Studiarne le traiettorie. Dare informazioni sull'insieme massimale di esistenza delle soluzioni.

[Passare in coordinate polari: $x(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = \rho(t)\sin\theta(t)$; si noti che da $\rho(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ si ricava $\dot{\rho} = (x\dot{x} + y\dot{y})/\rho$; da $\operatorname{tg}\theta(t) = y(t)/x(t)$ si trova $\dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})/\rho^2$. Risolvere poi le equazioni in ρ e θ].

20. Illustrare geometricamente il flusso di fase associato al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = kx + y \end{cases} \qquad \text{al variare di } k \in \mathbb{R}.$$

21. Può un sistema Hamiltoniano avere un fuoco come punto di equilibrio?

22. Che cosa significa geometricamente per il sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, che $\operatorname{div}\mathbf{f} < 0$ oppure $\operatorname{div}\mathbf{f} > 0$?

Misura e integrazione 5

Presentiamo, in questo capitolo, la teoria dell'integrazione multipla e la teoria della misura degli insiemi di $\mathbb{R}^n$; le due teorie sono, in modo naturale, profondamente interrelate. Nello sviluppare l'argomento, ci siamo attenuti al seguente schema.

Dapprima (Sez. 1) è presentato l'integrale multiplo secondo Riemann. Questa sezione è il naturale prolungamento del capitolo ottavo del volume I e racchiude gli aspetti più elementari della teoria. I dettagli sono sviluppati soprattutto per l'integrale doppio con cenni agli integrali generalizzati nella versione più semplice. Avendo la nozione di integrale a disposizione, si definisce rapidamente la classe (più tecnicamente, l'*algebra*) degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan.

Nelle sezioni 2 e 3 sono esposti gli aspetti più rilevanti della teoria della misura e dell'integrale secondo Lebesgue.

Se nella prima sezione si è partiti dalla nozione di integrale per arrivare a quella di misura, ora il punto di vista cambia. Si comincia col definire una misura per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, più flessibile e completa di quella di Peano-Jordan (la misura di Lebesgue), per arrivare alla nozione di integrale secondo Lebesgue.

La trattazione, nelle sezioni 2 e 3, ha un carattere meno elementare rispetto a quella della sezione 1.

Concludiamo con un'osservazione sul percorso didattico che l'eventuale utilizzatore può seguire. Un corso di carattere elementare può fermarsi alla sezione 1, ignorando le altre, senza con ciò pregiudicare la comprensione degli argomenti successivi.

In un corso più avanzato si può passare direttamente alle sezioni 2 e 3, ritornando poi alla sezione 1 per gli aspetti più algoritmici riguardanti il calcolo degli integrali (in particolare al paragrafo 1.6: Cambiamento delle variabili di integrazione, e 1.8: Alcune applicazioni).

1. INTEGRALE MULTIPLO SECONDO RIEMANN

1.1 Integrale doppio per funzioni definite su un rettangolo

Cominciamo col definire l'integrale doppio secondo Riemann per funzioni definite e limitate su un rettangolo. Il procedimento ricalca quello seguito nella sezione 1, capitolo 8, volume 1, per definire l'integrale di Riemann per funzioni di una variabile, limitate su un intervallo.

Consideriamo il rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$ e siano $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ suddivisioni di $[a,b]$ e $[c,d]$, rispettivamente, date da

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{r-1}, x_r = b\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0 = c, y_1, \dots, y_{s-1}, \ y_s = d\} .$$

Il prodotto cartesiano $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ è detto *suddivisione* o *partizione* di Q. Relativamente a $\mathcal{D}$ poniamo:

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{per} \quad k = 1, \dots, r$$

$$J_h = [y_{h-1}, y_h], \quad \Delta y_h = y_h - y_{h-1} \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, s .$$

Il rettangolo Q risulta decomposto nell'unione degli rs rettangoli $Q_{kh} = I_k \times J_h$. Consideriamo ora una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata:

$$m \le f(x,y) \le M \qquad \forall (x,y) \in Q . \tag{1.1}$$

Per $k = 1, \dots, r$ e $h = 1, \dots, s$ poniamo:

$$m_{kh} = \inf_{Q_{kh}} f \quad , \quad M_{kh} = \sup_{Q_{kh}} f \tag{1.2}$$

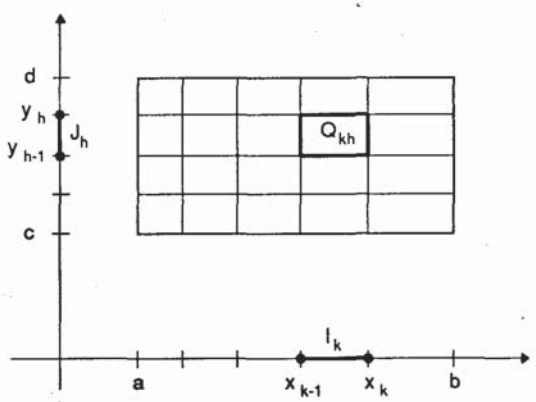


Fig. 5.1

Definiamo le somme inferiore e superiore di f relativamente alla suddivisione $\mathcal{D}$:

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \qquad \textit{(somma inferiore)}$$

$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h . \qquad \textit{(somma superiore)} .$$

Osserviamo subito che, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q, risulta, in base alle (1.1):

$$m(b-a)(d-c) \le s(\mathcal{D}, f) \le S(\mathcal{D}, f) \le M(b-a)(d-c) .$$

Sono perciò ben definite le due quantità

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) ,$$

dove estremo inferiore e superiore sono cercati al variare di tutte le possibili suddivisioni di Q.

Inoltre, come nel caso unidimensionale, si può mostrare che

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \le \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) .$$

Per una assegnata funzione f, due circostanze possono verificarsi:

o $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$

o $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$.

Definizione 1.1 - *Una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata, si dice integrabile secondo Riemann se* $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$.

Il valore comune di questi due estremi si chiama **integrale** *(di Riemann) di f in Q e si denota con uno dei simboli seguenti:*

$$\mathcal{I}(Q, f), \quad \int_Q f, \quad \iint_Q f, \quad \iint_Q f(x,y)dxdy, \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy .$$

Q si chiama *dominio di integrazione* ed *f funzione integranda*. Scriveremo anche $\mathcal{I}(f)$ qualora non sorgano ambiguità circa il dominio di integrazione.

Osserviamo che nella quarta e nella quinta notazione le variabili x ed y sono "mute" e si può usare una qualsiasi altra coppia di variabili, senza cambiare il valore dell'integrale; ad esempio:

$$\iint_Q f(u,v)du\,dv = \iint_Q f(\xi, \eta)d\xi d\eta .$$

La classe delle funzioni limitate Riemann-integrabili su Q si indicherà con il simbolo $\mathcal{R}(Q)$.

***Esempio* 1.1** - Ogni costante p è integrabile su qualunque rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$ e

$$\iint_Q p = p(b-a)(d-c) = p \text{ area}(Q) .$$

Infatti, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q si ha:

$$s = S = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} p \Delta x_k \Delta y_h = p \sum_{k=1}^{r} \Delta x_k \sum_{h=1}^{s} \Delta y_h = p(b-a)(d-c) .$$

***Esempio* 1.2** - Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ ed f la funzione di Dirichlet bidimensionale, ovvero

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in Q,\ x \text{ e } y \text{ razionali} \\ 0 & \text{negli altri punti di } Q . \end{cases}$$

Allora, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q si ha:

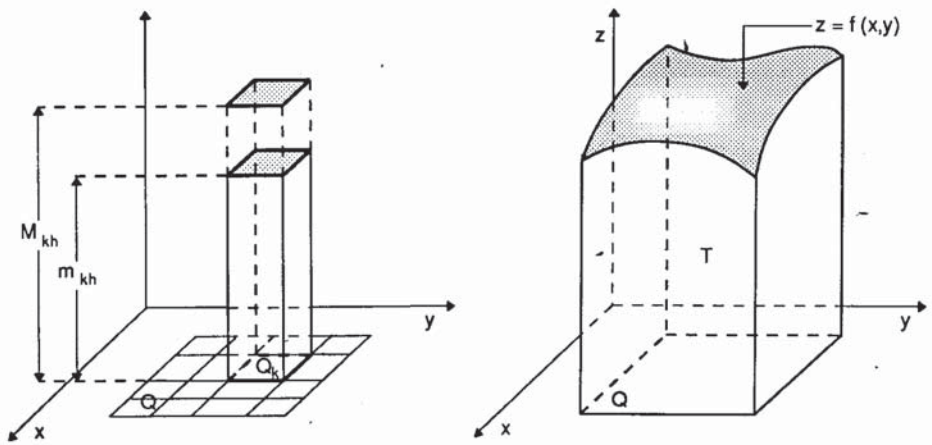
$$s = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} 0 \cdot \Delta x_k \Delta y_h = 0$$

$$S = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} 1 \cdot \Delta x_k \Delta y_h = 1$$

e perciò f *non* è integrabile in Q.

Se $f \in \mathcal{R}(Q)$ e $f \geq 0$ in Q, l'integrale $\iint_Q f$ si può interpretare come *volume* della regione tridimensionale T (detta *cilindroide*) limitata dal basso da Q e dall'alto dal grafico di f (fig. 5.2b). In tale caso, infatti, il generico addendo di $S(\mathcal{D}, f)$ (risp. $s(\mathcal{D}, f)$), dato da $M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h$, (risp. $m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h$), rappresenta il volume del parallelepipedo di base Q_{kh} ed altezza M_{kh} (risp. m_{kh}). La somma $S(\mathcal{D}, f)$ (risp. $s(\mathcal{D}, f)$) rappresenta dunque il volume di una regione che contiene T (risp. contenuta in T). Essendo $\inf_{\mathcal{D}} S = \sup_{\mathcal{D}} s = \iint_Q f$ è dunque ragionevole interpretare l'integrale come il volume di T.

Si presentano in modo naturale le seguenti questioni:



a) Significato degli addendi nelle somme inferiori e superiori

b) Il "*cilindroide*" T ha come volume $\iint_Q f$.

Fig. 5.2

- stabilire l'integrabilità di una funzione, cioè individuare classi di funzioni integrabili;
- calcolare l'integrale.

Una risposta parziale alla prima questione si trova nel seguito di questo paragrafo, alla seconda nel successivo.

Un criterio necessario e sufficiente di integrabilità è contenuto nel seguente teorema, analogo del teorema 8.1.3., volume 1, con identica dimostrazione, che perciò omettiamo.

■ **Teorema 1.1** - *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ di Q tale che*

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon . \tag{1.3}$$

Mediante il teorema 1.1 è facile dimostrare che:

■ **Teorema 1.2** - *Se f è continua in Q allora è integrabile in Q.*

Dimostrazione – Per il teorema di Cantor–Heine (Teor. 4.2.7, Vol. 1), f è uniformemente continua, essendo Q un compatto ed è limitata per il teorema di Weierstrass (Teor. 4.2.5, Vol. 1). Fissato $\varepsilon > 0$ esiste dunque δ_ε tale che su ogni sottoinsieme di Q di diametro minore di δ_ε, l'oscillazione di f è minore di ε (*). Scegliamo ora una suddivisione $\mathcal{D}$ in modo tale che i rettangoli in cui viene ripartito Q abbiano diametro minore di δ_ε. Con le solite notazioni, avremo perciò:

(*) Ricordiamo che : oscillazione di f su $E = \sup_E f - \inf_E f$.

oscillazione di f su $Q_{kh} = M_{kh} - m_{kh} < \varepsilon$.

Di conseguenza

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h < \varepsilon \cdot \text{ area } (Q) .$$

Per la (1.3) e l'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

Come nel caso unidimensionale, è possibile una definizione alternativa di integrale di Riemann, mediante un procedimento di limite su somme in generale diverse da quelle superiori ed inferiori. Lo accenniamo brevemente.

Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ è una suddivisione di $Q = [a, b] \times [c, d]$, chiameremo *ampiezza* di $\mathcal{D}$ il numero $|\mathcal{D}| := \max\{|\mathcal{D}_1|, |\mathcal{D}_2|\}$ dove $|\mathcal{D}_1| = \max_{k=1,\dots,r} \Delta x_k$ e $|\mathcal{D}_2| = \max_{h=1,\dots,s} \Delta y_h$ sono le ampiezze delle suddivisioni di $[a, b]$ e $[c, d]$ rispettivamente.

Introduciamo le *somme di Riemann* mediante la formula

$$\sigma(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} \mu_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \tag{1.4}$$

dove μ_{kh} è un qualunque valore compreso tra m_{kh} e M_{kh}.

Per $l \in \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \sigma(\mathcal{D}, f) = l$$

se: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che $|\sigma(\mathcal{D}, f) - l| < \varepsilon$ per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ con $|\mathcal{D}| < \delta_\varepsilon$ e per ogni scelta dei valori μ_{kh}.

Sussiste il seguente teorema:

■ **Teorema 1.3** - *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata. Allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ se e solo se*

$$\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \sigma(\mathcal{D}, f) = l \in \mathbb{R} .$$

In tal caso risulta

$$l = \mathcal{I}(f) .$$

La dimostrazione è identica a quella del teorema 8.1.4, volume 1.

1.2 Calcolo di un integrale doppio mediante due integrazioni semplici

Il teorema che esponiamo in questo paragrafo permette, sotto opportune ipotesi, di ridurre il calcolo di un integrale doppio a quello di due integrali unidimensionali.

■ **Teorema 1.4** - (di riduzione) *Sia $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = [a, b] \times [c, d]$.*

a) Se, per ogni $y \in [c, d]$, esiste l'integrale $G(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, allora la funzione $y \mapsto G(y)$ è integrabile in $[c, d]$ e vale la formula

$$\iint_Q f = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \tag{1.5}$$

b) Se, per ogni $x \in [a, b]$, esiste l'integrale $H(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, allora la funzione $x \mapsto H(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e vale la formula

$$\iint_Q f = \int_a^b H(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx . \tag{1.6}$$

Anteponiamo alla dimostrazione del teorema alcune osservazioni ed un esempio.

Osservazione 1.1 - Le formule (1.5) e (1.6) prendono il nome di *formule di riduzione*; gli integrali a destra si dicono *integrali iterati*. Se è possibile applicare entrambe le (1.5) e (1.6) si ottiene

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy , \tag{1.6'}$$

formula di *scambio dell'ordine di integrazione*.

Sottolineiamo che l'esistenza dell'integrale doppio *non* comporta automaticamente l'esistenza degli integrali iterati: questa deve essere provata per poter applicare le formule di riduzione.

Se però f è *continua* su Q (e pertanto integrabile, in base al teorema 1.2) allora, per ogni $y \in [c, d]$, la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $[a, b]$ e perciò integrabile: esiste, cioè $\forall y \in [c, d]$, l'integrale $\int_a^b f(x, y)dx$; analogamente esiste l'integrale $\int_c^d f(x, y)dy$ per ogni $x \in [a, b]$; le ipotesi del teorema sono così verificate ed è possibile utilizzare entrambe le formule (1.5) e (1.6).

Nell'esercizio 1.1 è suggerito un esempio di funzione integrabile sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, per la quale uno dei due integrali iterati non esiste.

Osservazione 1.2 - Un caso interessante si presenta quando $f(x, y) = g(x)h(y)$ (si dice che le variabili sono *separate*). Se $g \in \mathcal{R}(a, b)$ ed $h \in \mathcal{R}(c, d)$ allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ e la formula di riduzione vale nella forma seguente:

$$\iint_Q f = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy ,$$

cioè $\iint_Q f$ è uguale al prodotto dei due integrali di g ed h.

Osservazione 1.3 - Le formule di riduzione hanno un'interpretazione geometrica che le propone come generalizzazioni del noto principio di Cavalieri–Lagrange.

Consideriamo, ad esempio, la (1.5). Sia $f \geq 0$ in Q. Fissato $\overline{y} \in [c,d]$, $G(\overline{y}) = \int_a^b f(x,\overline{y})dx$ rappresenta l'area della regione (ombreggiata in fig. 5.3) che si ottiene intersecando il cilindroide T, delimitato da Q e dal grafico di f, con il piano $y = \overline{y}$. Il volume di T si ottiene integrando tali aree tra c e d.

***Esempio* 1.3** - Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^{-3}e^{y/x}$ nel rettangolo $Q = [1,2] \times [0,1]$. Poiché $f \in C(Q)$, possiamo utilizzare le formule (1.5) o (1.6). Vediamo qual è la più conveniente nel presente caso.

Con la (1.5) si deve calcolare prima $\int_1^2 x^{-3}e^{y/x}dx$, mentre con la (1.6) occorre il calcolo di $\int_0^1 x^{-3}e^{y/x}dy$.

Poiché il secondo integrale è immediato, utilizziamo la (1.6).

Si trova

$$x^{-3}\int_0^1 e^{y/x}dy = x^{-3}[xe^{y/x}]_0^1 = x^{-2}[e^{1/x}-1]\,.$$

Quindi:

$$\iint_Q f = \int_1^2 x^{-2}[e^{1/x}-1]dx = [-e^{1/x}+\frac{1}{x}]_1^2 = e-\sqrt{e}-\frac{1}{2}\,.$$

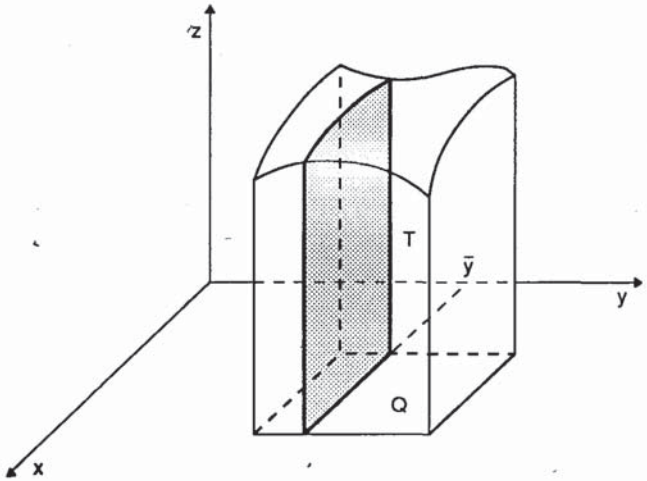


Fig. 5.3 Interpretazione geometrica del Teorema 1.4.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 1.4.

Dimostrazione – Dimostriamo solo la (1.5); per la (1.6) si procede in modo analogo. Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ una qualunque suddivisione di Q e siano I_k, J_h, x_k, y_h, Δx_k, Δy_h, m_{kh}, M_{kh} per $k = 1,\dots,r$ e $h = 1,\dots,s$ come nel paragrafo 1.1.

Poiché per ogni $y \in [c,d]$ esiste $G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, la definizione di quest'ultimo integrale implica che

$$\sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k \leq G(y) \leq \sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k \tag{1.7}$$

dove abbiamo posto $m_k(y) = \inf_{x\in I_k} f(x,y)$ e $M_k(y) = \sup_{x\in I_k} f(x,y)$.

Essendo f limitata, lo è anche G.

Consideriamo ora, relativamente alla partizione $\mathcal{D}_2$ di $[c,d]$, le somme superiori ed inferiori di G:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_2,G) &= \sum_{h=1}^{s}\Gamma_h\Delta y_h \quad \text{dove } \Gamma_h = \sup_{J_k} G(y) \\ s(\mathcal{D}_2,G) &= \sum_{h=1}^{s}\gamma_h\Delta y_h \quad \text{dove } \gamma_h = \inf_{J_k} G(y)\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dalla (1.7) otteniamo, osservando che $\sup_{y\in J_h} M_k(y) = M_{kh}$:

$$\Gamma_h = \sup_{y\in J_h} G(y) \leq \sup_{y\in J_h}\sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{r}\sup_{y\in J_h} M_k(y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k\,.$$

Analogamente, sempre dalla (1.7), osservando che $\inf_{y\in J_h} m_k(y) = m_{kh}$:

$$\gamma_h = \inf_{y\in J_h} G(y) \geq \inf_{y\in J_h}\sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{r}\inf_{y\in J_h} m_k(y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k\,.$$

Di conseguenza, sostituendo nelle (1.8), otteniamo:

$$S(\mathcal{D}_2,G) \leq \sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k\Delta y_h = S(\mathcal{D},f)$$

e (1.9)

$$s(\mathcal{D}_2,G) \geq \sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k\Delta y_h = s(\mathcal{D},f)\,.$$

Dalle (1.9) si deduce che

$$S(\mathcal{D}_2,G) - s(\mathcal{D}_2,G) \leq S(\mathcal{D},f) - s(\mathcal{D},f)\,. \tag{1.10}$$

Sia $\varepsilon > 0$ e si scelga $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ in modo che $S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) < \varepsilon$; ciò è possibile grazie al teorema 1.1. Allora dalla (1.10) si ricava che anche $S(\mathcal{D}_2, G) - s(\mathcal{D}_2, G) < \varepsilon$. Ancora in base al teorema 1.1 deduciamo che $G \in \mathcal{R}(c, d)$. Inoltre dalle (1.9) si ha, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q:

$$s(\mathcal{D}, f) \leq s(\mathcal{D}_2, G) \leq \int_c^d G(y)dy \leq S(\mathcal{D}_2, G) \leq S(\mathcal{D}, f)$$

che implica $\displaystyle\int_c^d G(y) = \iint_Q f$. □

1.3 Integrale su regioni più generali. Misura di Peano–Jordan

La definizione di integrale doppio per funzioni definite su rettangoli risulta troppo restrittiva per le applicazioni.

In questo paragrafo consideriamo regioni Ω del piano *limitate* e funzioni $f: \Omega \to \mathbb{R}$ *limitate*.

Per utilizzare la definizione di integrale che già conosciamo, racchiudiamo Ω in un rettangolo Q e definiamo una nuova funzione $\tilde{f}$ nel modo che segue:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \backslash \Omega \,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Definizione 1.2 - *Diciamo che f è integrabile in Ω (secondo Riemann) se $\tilde{f}$ è integrabile in Q e poniamo*

$$\mathcal{I}(\Omega, f) = \iint_\Omega f := \iint_Q \tilde{f} \,.$$

La definizione è corretta in quanto né l'integrabilità di f né il valore di $\displaystyle\iint_\Omega f$ dipendono dal rettangolo Q che si usa per racchiudere Ω; la verifica di questa

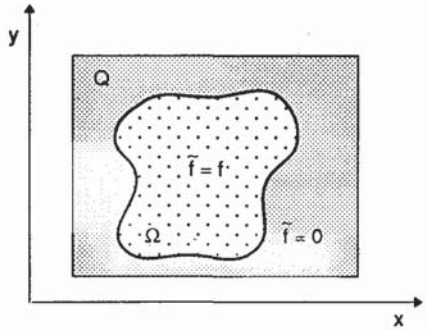


Fig. 5.4

affermazione è molto semplice ed è lasciata al lettore. Indicheremo con $\mathcal{R}(\Omega)$ la classe delle funzioni limitate integrabili in Ω.

La definizione 1.2 è sufficientemente generale. Tuttavia, data l'enorme varietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, si presenta in modo più sostanziale il problema di riconoscere l'integrabilità di una funzione e quello del calcolo dell'integrale.

Per lo sviluppo della teoria è allora conveniente legare l'integrale al problema della *misura* (o area) dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Il primo punto da affrontare è stabilire a quali insiemi sia possibile associare un'area.

Avendo a disposizione una nozione di integrale, si può procedere nel seguente modo, che conduce al concetto di misurabilità secondo Peano-Jordan.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitato, e sia $\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega(x, y)$ la sua funzione caratteristica (*).

Definizione 1.3 - *Un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitato, si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) (**) se $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{R}(\Omega)$. In questo caso diremo area o misura di Ω e scriveremo $|\Omega|$, il numero non negativo*

$$|\Omega| := \mathcal{I}(\mathbf{1}_\Omega) = \iint_\Omega dxdy \,. \tag{1.12}$$

Evidentemente ogni rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ è misurabile e $|Q| = \text{area } (Q) = (b - a)(d - c)$. Si vedrà in seguito che gli insiemi della geometria elementare (poligoni, cerchi, etc..) sono tutti misurabili e l'area secondo la definizione 1.3 coincide con l'area che tutti conoscono.

Un insieme limitato non misurabile secondo Peano–Jordan è l'insieme dei punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ con entrambe le coordinate razionali. Nell'esempio 1.2 abbiamo infatti visto che la funzione caratteristica di questo insieme *non* è integrabile.

Ritorneremo nella sezione 2 sulla classe degli insiemi misurabili secondo Peano–Jordan, da un punto di vista più strutturale.

Per lo sviluppo della teoria dell'integrazione, giocano un ruolo importante gli *insiemi di misura nulla*. Dalla definizione 1.3 segue che un insieme Z ha *misura nulla* se $\mathbf{1}_Z$ è integrabile in Z e $\displaystyle\iint_Z dxdy = 0$.

Un'utile e più diretta caratterizzazione degli insiemi di misura nulla è contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 1.5 - *Un insieme $Z \subset \mathbb{R}^2$ è di misura nulla (secondo Peano–Jordan) se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esistono un numero finito N_ε di rettangoli, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N_\varepsilon}$ tali che*

(*) Cioè $\mathbf{1}_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$

(**) In questa sezione, parlando di insiemi misurabili, intenderemo sempre "secondo Peano–Jordan", anche se non sarà esplicitamente detto.

$$i) \quad Z \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} Q_j$$

$$ii) \quad \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |Q_j| < \varepsilon.$$

Dimostrazione – Sia $|Z| = 0$ e Q un rettangolo contenente Z. Fissato $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q tale che $S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) < \varepsilon$.

Tra i rettangoli in cui Q resta suddiviso siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ quelli che hanno intersezione non vuota con Z. La loro unione contiene Z e $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| = S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) < \varepsilon$.

Viceversa, siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N_\varepsilon}$ rettangoli tali che valgano *i*) e *ii*). Aumentando eventualmente il loro numero possiamo ritenere che i rettangoli Q_j siano a due a due non sovrapposti. Evidentemente Z risulta limitato; sia Q un rettangolo che contiene tutti i Q_j, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$. Sia inoltre $\mathcal{D}$ una suddivisione di Q tale che fra i rettangoli in cui Q è suddiviso vi siano anche i $Q_j, j = 1, \ldots, N_\varepsilon$.

Allora:

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |Q_j| < \varepsilon$$

che implica $|Z| = 0$ in base al teorema 1.1. □

Con una dimostrazione dello stesso stile (Esercizio 2) si prova la seguente caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano–Jordan.

Proposizione 1.6 - *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile (secondo Peano–Jordan) se e solo se $\partial\Omega$ è misurabile e $|\partial\Omega| = 0$.*

Esempi

I seguenti sono insiemi di $\mathbb{R}^2$ di misura nulla.

1.4 Un insieme costituito da un numero finito di punti.

1.5 Un segmento di retta.

1.6 Se $Z_1 \subset Z$ e Z ha misura nulla, allora anche Z_1 ha misura nulla.

1.7 L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla. In particolare il bordo di un poligono di m lati.

Lasciamo la facile verifica al lettore. Un esempio meno elementare è indicato nel seguente enunciato.

Proposizione 1.7 - *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata, integrabile. Allora il suo grafico ha misura nulla.*

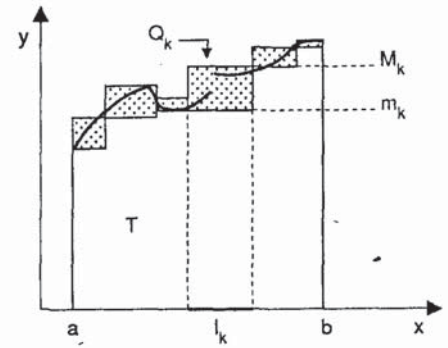


Fig. 5.5

Dimostrazione – Sia $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = b\}$ una partizione di $[a, b]$ tale che $S(\mathcal{D}_1, g) - s(\mathcal{D}_1, g) < \varepsilon$. Consideriamo i rettangoli Q_k aventi per base $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ e altezza $[m_k, M_k]$ (fig. 5.5) dove, al solito, $m_k = \inf_{I_k} g$ e $M_k = \sup_{I_k} g$.

Allora $\text{graf}(g) \subset \bigcup_{k=1}^{r} Q_k$ e $\sum_{k=1}^{r} |Q_k| = S(\mathcal{D}_1, g) - s(\mathcal{D}_1, g) < \varepsilon$. Ciò implica che il grafico di g ha misura nulla. □

Osservazione 1.4 - La proposizione 1.7 si estende senza difficoltà alle curve regolari $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. I sostegni di tali curve, come insiemi di punti in $\mathbb{R}^3$ (o in $\mathbb{R}^2$, se la curva è piana) hanno misura nulla. Tale misura non va ovviamente confusa con la *lunghezza* della curva, data dalla formula (1.8) del capitolo 1, che è positiva. La lunghezza di una curva rettificabile è una specie di misura unidimensionale per insiemi che non sono contenuti in una retta.

Dalla proposizione 1.7 segue che il trapezioide T individuato da una funzione g, integrabile in $[a, b]$, è misurabile. Con un ulteriore piccolo sforzo si dimostra poi che se $g \geq 0$, $|T| = \int_a^b g$, in accordo con quanto visto nel capitolo 8, vol. 1.

In particolare, il grafico di una funzione *continua* su un intervallo $[a, b]$ ha misura nulla e risultano misurabili regioni del tipo seguente:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \in [a, b] \ , \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \tag{1.13}$$

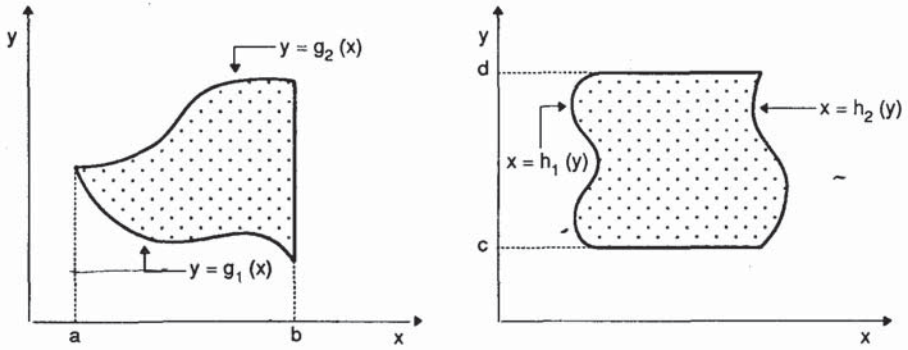
con g_1 e g_2 continue,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y \in [c, d], \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \tag{1.14}$$

con h_1 ed h_2 continue.

Le regioni definite dalle (1.13) e (1.14) si dicono *semplici* (o *normali*) relativamente all'asse y e all'asse x, rispettivamente (fig. 5.6).

Ad esempio, il cerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una regione semplice rispetto ad entrambi gli assi essendo delimitata dai grafici di $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ o dai grafici di $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Esso è dunque misurabile ed è facile verificare che la sua misura di Peano–Jordan è π.



a) regione semplice relativamente all'asse y b) regione semplice relativamente all'asse x

Fig. 5.6

1.4 Funzioni generalmente continue

Siamo ora in grado di stabilire l'integrabilità di una vasta classe di funzioni per le quali sia anche possibile il calcolo dell'integrale mediante le formule di riduzione.

Premettiamo anzitutto la seguente definizione.

Definizione 1.4 - *Sia Q un rettangolo ed $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è* **generalmente continua** *se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.*

Vale il seguente risultato.

■ **Teorema 1.8** - *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata. Se f è generalmente continua allora è integrabile.*

Dimostrazione – Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia Z l'insieme dei punti di discontinuità di f. Poiché $|Z| = 0$ si può trovare una partizione $\mathcal{D}$ di Q tale che:

i) l'unione dei rettangoli che contengono punti di Z ha misura $< \varepsilon$;
ii) sui restanti rettangoli l'oscillazione di f è minore di ε (f è uniformemente continua sull'unione di tali rettangoli).

Sia $M_1 = \sup_Q |f|$. Allora si può scrivere, con le solite notazioni:

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h = \sum_{(i)}\sum \cdots + \sum_{(ii)}\sum \cdot$$

dove le prime somme sono estese agli indici h, k relativi ai rettangoli del tipo *i*), le seconde sono relative a rettangoli del tipo *ii*). Abbiamo perciò

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) \leq 2M_1\varepsilon + |Q|\varepsilon \, .$$

Per il teorema 1.1 segue la tesi. □

Dal teorema 1.8 si ricava subito che:

a) *le funzioni continue su un compatto Ω, misurabile, sono integrabili in Ω.*

Infatti, se Q è un rettangolo contenente Ω ed $\tilde{f}$ estende f a zero in $Q \setminus \Omega$, le sole discontinuità di $\tilde{f}$ sono contenute in $\partial\Omega$ che ha misura zero.

b) *Le funzioni limitate e continue su un aperto Ω misurabile sono integrabili in Ω.*

Si ragiona esattamente come al punto a).

In particolare vale la seguente proposizione molto usata nelle applicazioni.

Proposizione 1.9 - *Sia Ω una regione semplice rispetto ad uno dei due assi. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è limitata e continua in $\mathring{\Omega}$ (l'interno di Ω) allora è integrabile in Ω e valgono le seguenti formule di calcolo:*

$$\iint_\Omega f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \quad (\Omega \text{ semplice rispetto all'asse } y) \tag{1.15}$$

$$\iint_\Omega f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \quad (\Omega \text{ semplice rispetto all'asse } x) \tag{1.16}$$

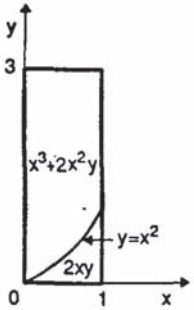
Dimostrazione – L'unica cosa che occorre verificare sono le formule (1.15) e (1.16). Occupiamoci della (1.16). Siano $Q = [\alpha, \beta] \times [c, d] \supset \Omega$ ed $\tilde{f}$ definita come al solito. La funzione $x \mapsto \tilde{f}(x, y)$ ha, per ogni $y \in [c, d]$, due soli punti eventuali di discontinuità e pertanto l'integrale $\int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx$ esiste per ogni $y \in [c, d]$. D'altra parte, essendo $\tilde{f} = 0$ fuori da Ω, si ha $\int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$.

Dunque, in base al teorema 1.4:

$$\iint_\Omega f := \iint_Q \tilde{f} = \int_c^d dy \int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \ \square$$

***Esempio* 1.8** - Siano $Q = [0, 1] \times [0, 3]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ definite da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy & \text{se } y \leq x^2 \ , \ (x,y) \in Q \\ x^3 + 2x^2 y & \text{se } y > x^2 \ , \ (x,y) \in Q. \end{cases}$$



La funzione è discontinua lungo l'arco di parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, che ha misura zero. Dunque f è integrabile in Q. Per ogni $x \in [0,1]$, la funzione $y \to f(x,y)$ ha un solo punto di discontinuità e perciò $\int_0^3 f(x,y)dy$ esiste per ogni $x \in [0,1]$.

Valgono dunque le ipotesi del teorema 1.4 e possiamo applicare la formula di riduzione (1.6). Si ha:

$$\int_0^3 f(x,y)dy = \int_0^{x^2} 2xy\, dy + \int_{x^2}^3 (x^3 + 2x^2y)dy = 3x^3 + 9x^2 - x^6$$

ed infine

$$\iint_Q f = \int_0^1 (3x^3 + 9x^2 - x^6)dx = \frac{61}{12}\,.$$

***Esempio* 1.9** - Si voglia calcolare il volume del cilindroide delimitato, dall'alto, dal grafico della funzione $z = xy$, sul dominio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{3}{4}x \ ,\ x^2 + y^2 - 25 \le 0\} \quad \text{(fig. 5.7)}$$

La funzione $z = xy$ è continua sul dominio Ω, semplice rispetto ad entrambi gli assi.

Essendo $xy \ge 0$ su Ω, il volume cercato è $\iint_\Omega xy\, dxdy$.

Utilizziamo per il calcolo la formula (1.16), con $h_1(y) = \frac{4}{3}y$, e $h_2(y) = \sqrt{25 - y^2}$; si ha:

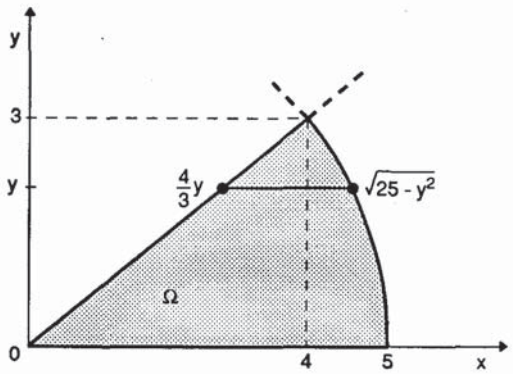


Fig. 5.7

$$\iint_\Omega xydxdy = \int_0^3 dy \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xydx = \int_0^3 \left[\frac{25}{2}y - \frac{25}{18}y^3\right]dy = \frac{225}{8}\,.$$

1.5 Proprietà dell'integrale

L'operazione di integrazione "produce" numeri a partire da funzioni. Precisamente, ad ogni funzione $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, Ω limitato in $\mathbb{R}^2$, associa un numero reale. Può essere dunque considerata come un'applicazione (un *funzionale*) da $\mathcal{R}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$.

Presentiamo in questo paragrafo le proprietà fondamentali di questa applicazione.

■ **Teorema 1.10** - *Siano $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

1. Linearità: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(\Omega)$ e

$$\iint_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_\Omega f + \beta \iint_\Omega g\,.$$

2. Monotonia:

i) $f \ge g \Rightarrow \iint_\Omega f \ge \iint_\Omega g$.

ii) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ e si ha $\left|\iint_\Omega f\right| \le \iint_\Omega |f|$.

In particolare, se Ω è misurabile e $M_1 = \sup_\Omega |f|$,

$$\left|\iint_\Omega f\right| \le M_1 |\Omega|\,. \tag{1.17}$$

3. Teorema della media:

i) Se Ω è misurabile e $m = \inf_\Omega f$, $M = \sup_\Omega f$ si ha:

$$m \le \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f \le M$$

($\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f$ si chiama valor medio di f su Ω).

ii) Se Ω è misurabile compatto e connesso e se $f \in C(\Omega)$ allora esiste $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che

$$\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f = f(x_0, y_0)\,.$$

La dimostrazione può essere effettuata sulla falsariga di quella del teorema 8.1.8 (Vol. 1) con gli ovvi cambiamenti dovuti alla dimensione 2. Lasciamo i dettagli al lettore.

Un'altra importante proprietà riguarda l'additività rispetto al dominio di integrazione.

Proposizione 1.11 - *Siano Ω_1 ed Ω_2 domini limitati in $\mathbb{R}^2$ tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sia un insieme di misura nulla. Se f è integrabile su Ω_1 e su Ω_2 allora è integrabile su $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e vale la formula*

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f \,. \tag{1.18}$$

Dimostrazione – Sia $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Allora si ha: $f = f\mathbf{1}_{\Omega_1} + f\mathbf{1}_{\Omega_2} - f\mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.
Le funzioni $f\mathbf{1}_{\Omega_1}$ e $f\mathbf{1}_{\Omega_2}$ sono integrabili su Ω ed inoltre $\iint_\Omega f\mathbf{1}_{\Omega_1} = \iint_{\Omega_1} f$, $\iint_\Omega f\mathbf{1}_{\Omega_2} = \iint_{\Omega_2} f$. Osserviamo poi, che essendo $\Omega_1 \cap \Omega_2$ misurabile con misura nulla, dalla (1.17) si deduce $\iint_\Omega f\mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \iint_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f = 0$.
Dalla 1. dello stesso teorema si deduce facilmente la (1.18). □

Si noti come la proposizione 1.11 non sia invertibile; ad esempio, sia f la funzione caratteristica del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ ovviamente integrabile; tuttavia se Ω_1 è l'insieme dei punti a coordinate razionali e Ω_2 il suo complementare (rispetto al quadrato), si vede che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, e quindi $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$, ma f non è integrabile su Ω_1 né su Ω_2.
Vale però la seguente proposizione, molto utile nelle applicazioni.

Proposizione 1.12 - *Siano $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ misurabili tali che $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$.*

Se $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ allora $f \in \mathcal{R}(\Omega_1) \cap \mathcal{R}(\Omega_2)$ e vale la (1.18).

Per la dimostrazione si veda l'esercizio 12.

Supponiamo ora che la funzione integranda dipenda, oltre che dalle variabili di integrazione, anche da un parametro t (eventualmente un vettore di parametri). Una volta effettuata l'integrazione si trova una funzione di tale parametro:

$$\phi(t) = \iint_\Omega f(x,y,t)dxdy \,.$$

È importante stabilire se valgono per $\phi(t)$ proprietà quali la continuità e la derivabilità e se le operazioni di limite e di derivazione si possono scambiare con quella di integrazione. Raduniamo i principali risultati in un unico teorema nel quale il lettore non mancherà di riscontrare la forte analogia con i teoremi del paragrafo 8.1.8 (Vol. 1) e quelli del capitolo 3 sull'argomento.

■ **Teorema 1.13** - *Sia $f : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato e $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\forall t \in [a,b]$.*

a) Se $t \mapsto f(x,y,t)$ è continua in $[a,b]$, uniformemente rispetto ad $(x,y) \in \Omega$, allora, se $t_0 \in [a,b]$

$$\lim_{t \to t_0} \iint_\Omega f(x,y,t)dxdy = \iint_\Omega f(x,y,t_0)dxdy.$$

b) Se $t \mapsto f(x,y,t)$ e $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)$ sono continue in $[a,b]$, uniformemente rispetto ad $(x,y) \in \Omega$ e $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\forall t \in [a,b]$ allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_\Omega f(x,y,t)dxdy = \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)dxdy \,.$$

Le ipotesi del teorema 1.13 sono verificate se, ad esempio, f e $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times [a,b])$.
La dimostrazione del teorema 1.13 è identica a quella dei teoremi citati del capitolo 8 (Vol. 1) e perciò la omettiamo.

1.6 Cambiamento delle variabili di integrazione

L'obiettivo del presente paragrafo è esaminare il comportamento dell'integrale rispetto ai cambiamenti di variabili nel piano. Ciò conduce ad una generalizzazione della formula (1.35) del Capitolo 8, Vol. 1, (metodo di sostituzione per l'integrale unidimensionale) che costituisce un importante strumento per il calcolo degli integrali.
Se ne ricaverà altresì un'interessante interpretazione del determinante Jacobiano di una trasformazione del piano in sé.
Consideriamo nel piano un aperto *limitato* Ω ed una trasformazione *biunivoca* $\mathbf{T} : \Omega \leftrightarrow \mathbf{T}(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ assegnata dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \tag{1.19}$$

o anche, in forma compatta,

$$\mathbf{T}(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \,.$$

Sia ora A un aperto misurabile, tale che $\overline{A} \subset \mathbf{T}(\Omega)$ e $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Ci si chiede come si trasforma l'integrale

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy \tag{1.20}$$

operando la trasformazione di variabili (1.19).

Intuitivamente ci si aspetta un integrale esteso a $S = \mathbf{T}^{-1}(A)$ mentre $f(x,y)$ si trasforma in $\overline{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Il punto chiave sta nel capire come si trasforma "*l'elemento d'area*" $dxdy$.

Contrariamente a quanto ingenuamente ci si potrebbe aspettare $dxdy$ *non* si trasforma nel prodotto $d\varphi d\psi$. Per arrivare alla corretta formula lasciamoci guidare dal caso *lineare*, dal caso cioè in cui $\mathbf{T}$ è una trasformazione lineare. Fissata la base canonica in $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}$ è allora rappresentata da una matrice $\mathbf{M}$ e, invece della (1.19), possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} . \tag{1.21}$$

Se ora Q è un rettangolo nel piano u, v, individuato dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, $\mathbf{T}(Q)$ sarà un parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{w}_1 = \mathbf{M}\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}\mathbf{v}_2$.

Dall'algebra lineare è noto (*) che

$$\text{area}(\mathbf{T}(Q)) = |\det \mathbf{M}| \cdot \text{ area } (Q) . \tag{1.22}$$

Se invece di un'applicazione lineare ne abbiamo una *affine* (composizione di una lineare e di una traslazione), cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} ,$$

la formula (1.22) rimane inalterata.

Ritorniamo alla (1.19) e consideriamo un rettangolo $Q \subset \Omega$. Nasce subito un problema: $\mathbf{T}(Q)$ *sarà misurabile*? Supponiamo per il momento che lo sia e cerchiamo di calcolare $|\mathbf{T}(Q)|$ sfruttando la (1.22). L'idea è di approssimare $\mathbf{T}$ con una trasformazione lineare o affine nel miglior modo possibile. Sapendo, però, che tale approssimazione avrà carattere locale, supponiamo che Q sia di dimensioni du, dv molto piccole ("infinitesime", direbbero i pionieri del calcolo integrale).

Su Q approssimiamo $\mathbf{T}$ mediante la trasformazione affine $\mathbf{L}$ assegnata dalle formule seguenti, dove $(u_0, v_0) \in Q$:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \varphi(u_0,v_0) + \varphi_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \varphi_v(u_0,v_0)(v-v_0) \\ y(u,v) &= \psi(u_0,v_0) + \psi_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \psi_v(u_0,v_0)(v-v_0) . \end{aligned} \tag{1.23}$$

Si noti che la (1.23) si può scrivere nella forma $\mathbf{L} = \mathbf{T}(u_0,v_0) + d\mathbf{T}(u_0,v_0)$.

Ad $\mathbf{L}$ corrisponde la matrice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0,v_0) & \varphi_v(u_0,v_0) \\ \psi_u(u_0,v_0) & \psi_v(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{array}{l}\text{Jacobiana della trasformazione } \mathbf{T} \\ \text{nel punto } (u_0,v_0)\end{array}$$

Euristicamente, abbiamo:

(*) Si veda comunque l'esercizio 20.

$$dxdy \approx \text{ area}(\mathbf{T}(Q)) \approx \text{ area } (\mathbf{L}(Q)) = |\det \mathbf{J}| \text{ area } (Q) = \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv . \tag{1.24}$$

Ci aspettiamo dunque che l'integrale (1.20) si trasformi nell'integrale

$$\iint_S \overline{f}(u,v) \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv .$$

Tutto funziona bene se valgono le seguenti ipotesi su $\mathbf{T}$:

i) $\mathbf{T} \in C^1(\Omega)$; vale a dire: φ e ψ sono differenziabili con continuità in Ω;
ii) Lo jacobiano della trasformazione *non* si annulla in Ω; vale a dire

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Si noti che se valgono *i)* e *ii)*, in base al teorema di inversione locale (Teor. 7.2.3, Vol. 1), $\mathbf{T}$ trasporta punti interni in punti interni e quindi $\mathbf{T}(\Omega)$ è aperto. Di conseguenza $\mathbf{T}^{-1}$ ha le stesse proprietà di $\mathbf{T}$.

Vale il seguente risultato.

■ **Teorema 1.14** - *Sia* $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbf{T}(\Omega)$, Ω *aperto in* $\mathbb{R}^2$, *una applicazione biunivoca, soddisfacente i) e ii). Sia* S *un insieme tale che* $\overline{S} \subset \Omega$. *Allora:*

a) S *è misurabile se e solo se* $\mathbf{T}(S)$ *è misurabile.*

b) Se S *è misurabile e* $f \in C\,(\mathbf{T}(\overline{S}))$, *vale la formula*

$$\iint_{\mathbf{T}(S)} f(x,y)dxdy = \iint_S \overline{f}(u,v) \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv . \tag{1.25}$$

La dimostrazione del teorema, piuttosto complessa, è riportata alla fine del paragrafo.

Prima di dare esempi di applicazione del teorema 1.14 è opportuna qualche osservazione.

Osservazione 1.5 - Nei casi concreti Ω e $\mathbf{T}(\Omega)$ sono spesso aperti misurabili. In tal caso, se $\mathbf{T}$ e le sue derivate sono *continue e limitate* in Ω, *a)* vale senza l'ipotesi $\overline{S} \subset \Omega$ e *b)* vale se f è *continua e limitata* in $\mathbf{T}(S)$. Si può poi ammettere che l'ipotesi di biunivocità di $\mathbf{T}$ e l'ipotesi *ii)* valgano su Ω eccetto *un insieme di misura nulla*. In tal caso è ancora vero che, se $S \subset \Omega$ è misurabile, allora $\mathbf{T}(S)$ è misurabile e continua a valere la (1.25).

La dimostrazione di questi fatti si ottiene modificando lievemente quella del teorema 1.13.

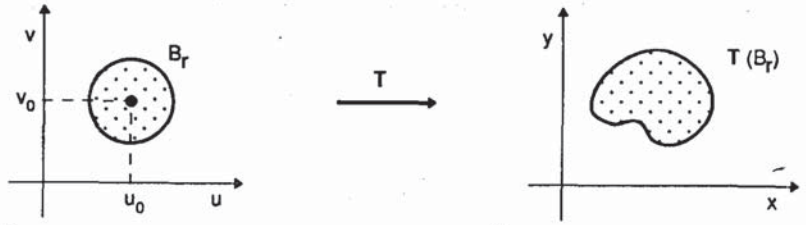


Fig. 5.8

Osservazione 1.6 - Nella (1.25), $\left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|$ rappresenta un *fattore locale di ingrandimento per le aree*. Ciò si mette maggiormente in evidenza considerando un cerchio $B_r = B_r(u_0, v_0)$, con centro in (u_0, v_0) e raggio r ed il suo trasformato $\mathbf{T}(B_r)$ (fig. 5.8).

Dalla (1.25) e dal teorema della media (3. *ii*) del teorema 1.10) si ha:

$$\frac{\text{area }(\mathbf{T}(B_r))}{\text{area }(B_r)} = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r}\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|_{u=\overline{u},v=\overline{v}}$$

dove $(\tilde{u}, \tilde{v})$ è un opportuno punto di B_r.

Ne segue, passando al limite per $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\text{area }(\mathbf{T}(B_r))}{\text{area }(B_r)} = \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|_{|u=u_0,v=v_0} \tag{1.26}$$

Dunque, il determinante jacobiano in un punto rappresenta il *tasso (puntuale) di variazione relativa dell'area, subordinato alla trasformazione* **T**.

× ***Esempio* 1.10** - *(Coordinate polari).*

Sia $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\rho, \theta)$ definita dalle equazioni:

$$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$$

$$y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta\ .$$

Abbiamo già incontrato questa trasformazione nella sezione 7.2 (Vol. 1).

Se $\Omega = (0, +\infty)\times(0, 2\pi)$ allora $\mathbf{T}(\Omega)$ coincide con il piano privato del semiasse $y = 0,\ x \geq 0$. Poiché $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$ (Esempio 7.2.6 Vol. 1), **T** soddisfa le ipotesi del teorema 1.14.

Se $A \subset \mathbf{T}(\Omega)$ è misurabile e limitato ed f continua e limitata su A si ha, dunque

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbf{T}^{-1}(A)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta\ . \tag{1.27}$$

L'elemento d'area in coordinate polari $\rho d\rho d\theta$ ha un significato intuitivo che invitiamo il lettore ad individuare esaminando la seguente figura:

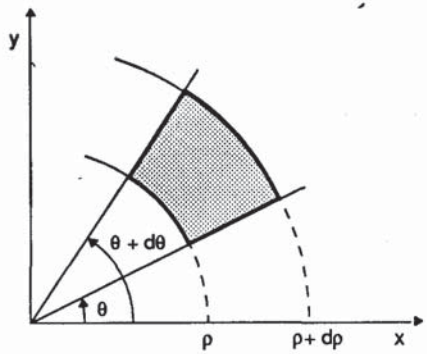


Fig. 5.9 L'area della regione ombreggiata è circa $\rho d\rho d\theta$.

Nella (1.27) A può essere, in realtà, un *qualunque sottoinsieme limitato e misurabile* del piano. Infatti $\iint_A f$ non cambia togliendo da A la sua intersezione con il semiasse reale positivo poiché tale intersezione ha misura nulla.

Applichiamo la (1.27) al caso seguente.

Sia $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, $A = \{(x,y) : 0 < y < \sqrt{3}x,\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$.

La funzione è continua in $\overline{A}$, misurabile, quindi è integrabile.

Passando a coordinate polari si ha (fig. 5.10)

$$S = \mathbf{T}^{-1}(A) = \{(\rho,\theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, 1 < \rho < 2\}$$

e

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{1}{1+\rho^2}\ .$$

Pertanto, dalla (1.27):

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_S f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{6}\log\frac{5}{2}\ .$$

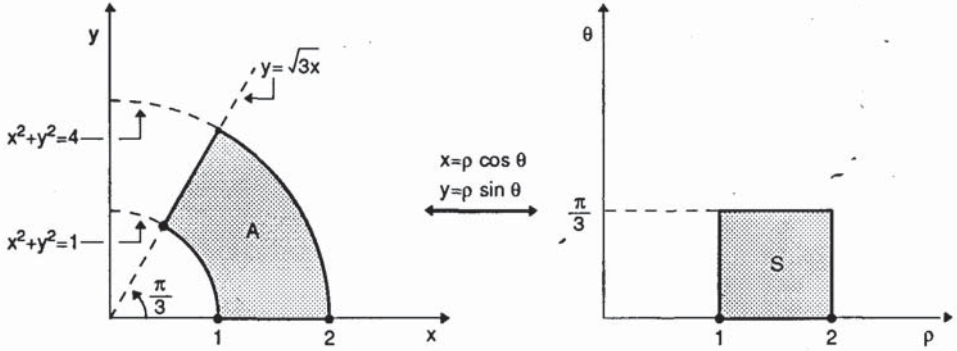


Fig. 5.10 Il rettangolo S è trasformato nel segmento di corona circolare dal cambiamento a coordinate polari.

***Esempio* 1.11** - Si voglia integrare la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\log(1 + (x+y)^4)$$

nella regione $A = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < 2 - x\}$ (fig. 5.11).

Poiché $f \in C(\overline{A})$, l'integrale esiste. La forma di f suggerisce di porre

$$u = x + y \quad \text{e} \quad v = x - y$$

ovvero

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

La trasformazione è lineare e non singolare, rappresentata dalla matrice $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |\det \mathbf{M}| = \frac{1}{2}$.

La regione A corrisponde alla regione $S = \{(u,v) : v < u < 2,\ u > -v\}$ e $f(x(u,v), y(u,v)) = uv\log(1+u^4)$.

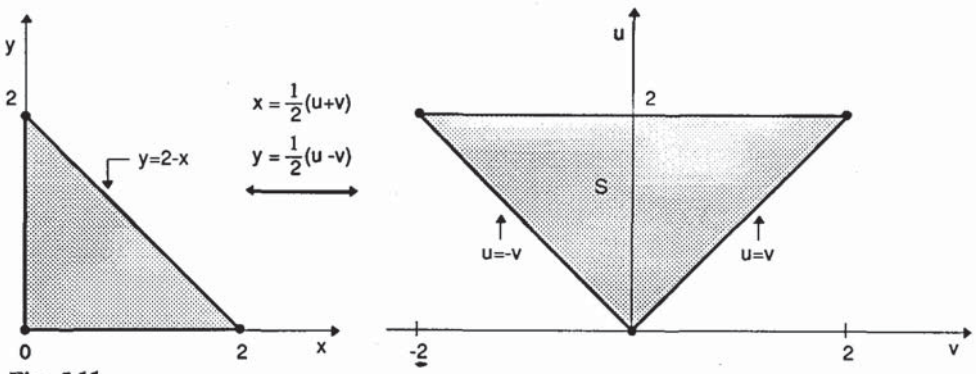


Fig. 5.11

Dalla (1.27):

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_S \frac{1}{2} f(x(u,v), y(u,v))dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_{-u}^{u} v dv\right) u\log(1+u^4)du = 0\ .$$

Dimostrazione del Teorema 1.14 – Essendo un po' complicata la suddividiamo in vari passi. In ciascuno di essi indicheremo con K una costante tale che $|\varphi_u|, |\psi_u|, |\varphi_v|, |\psi_v| \le K$ in $\overline{S}$.

1. *S misurabile $\Leftrightarrow$ $\mathbf{T}(S)$ misurabile.*

Sia S misurabile e $Q \subset \Omega$ un rettangolo. Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione di Q e siano I_{kh} i rettangoli della suddivisione, con $k = 1, \dots, r$ e $h = 1, \dots, s$. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché $\mathbf{T}$ è di classe C^1, è possibile scegliere $\mathcal{D}$ in modo tale che l'oscillazione di ciascuna delle derivate $\varphi_u, \psi_u, \varphi_v, \psi_v$ sia $< \varepsilon$ su ogni I_{kh}. Esaminiamo il trasformato di I_{kh}.

A tale scopo approssimiamo $\mathbf{T}$ su I_{kh} con la mappa affine $\mathbf{L}_{kh}$ data dalla formula seguente:

$$\varphi_{kh}(u,v) = \varphi(u_k, v_h) + \varphi_u(u_k, v_h)(u - u_k) + \varphi_v(u_k, v_h)(v - v_h)$$

$$\psi_{kh}(u,v) = \psi(u_k, v_h) + \psi_u(u_k, v_h)(u - u_k) + \psi_v(u_k, v_h)(v - v_h)$$

dove (u_k, v_h) è un vertice di I_{kh}.

Dato $(u,v) \in I_{kh}$, valutiamo la distanza tra $\mathbf{T}(u,v)$ e $\mathbf{L}_{kh}(u,v)$.

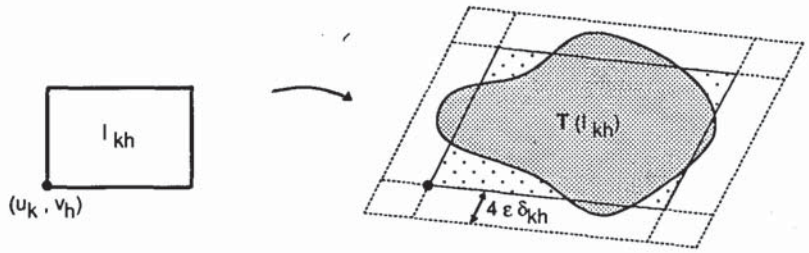


Fig. 5.12. La regione ombreggiata è $\mathbf{T}(I_{kh})$; quella indicata dal parallelogramma punteggiato è $\mathbf{L}_{kh}(I_{kh})$.

Osserviamo che, per il teorema di Lagrange, si ha:

$$\varphi(u,v) = \varphi(u_k, v_h) + \varphi_u(\overline{u}_k, \overline{v}_h)(u - u_k) + \varphi_v(\overline{u}_k, \overline{v}_h)(v - v_h)\ ,$$

$(\overline{u}_k, \overline{v}_h)$ opportuno in I_{kh},

$$\psi(u,v) = \psi(u_k, v_h) + \psi_u(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h)(u - u_k) + \psi_v(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h)(v - v_h)\ ,$$

$(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h)$ opportuno in I_{kh}.

Dunque,

$$|\varphi(u,v)-\varphi_{kh}(u,v)| \le |\varphi_u(\overline{u}_k,\overline{v}_h)-\varphi_u(u_k,v_h)|\,|u-u_k|+$$
$$+\,|\varphi_v(\overline{u}_k,\overline{v}_h)-\varphi_v(u_k,v_h)|\,|v-v_h| \le 2\varepsilon\delta_{kh}$$

dove δ_{kh} = diametro di I_{kh}.

Analogamente, $|\psi(u,v)-\psi_{kh}(u,v)| \le 2\varepsilon\delta_{kh}$, e quindi $||\mathbf{T}(u,v)-\mathbf{L}_{kh}(u,v)|| \le 4\varepsilon\delta_{kh}$.

Ciò implica che I_{kh} viene trasformato in un insieme i cui punti distano da quelli di $\mathbf{L}_{kh}(I_{kh})$ al massimo di $4\varepsilon\delta_{kh}$. Poiché $\mathbf{L}_{kh}(I_{kh})$ è un parallelogramma di area

$$|\det \mathbf{J}(u_k,v_h)|\;|(I_{kh})|$$

si deduce che $\mathbf{T}(I_{kh})$ è contenuto in un parallelogramma di area

$$(1+c\varepsilon)|\det \mathbf{J}(u_k,v_h)|\;|(I_{kh})|\,,$$

dove c dipende solo dalla costante K (*).

Sia ora $Z \subset Q$ di misura nulla. Allora $|\mathbf{T}(Z)| = 0$. Infatti se $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ sono rettangoli in Ω tali che $\bigcup_{j=1}^{N} Q_j \supset Z$ e $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| < \varepsilon$, si vede che $\mathbf{T}(Z)$ è contenuto nell'unione dei $\mathbf{T}(Q_j)$, e si ha:

$$\sum_{j=1}^{N} |\mathbf{T}(Q_j)| \le (1+c\varepsilon)\ \operatorname*{Max}_{Q} |\det \mathbf{J}| \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \le \varepsilon(1+c\varepsilon)\max_{Q} |\det \mathbf{J}|\,. \qquad (1.28)$$

Dunque, se S è misurabile in Ω, $\mathbf{T}(S)$ è misurabile, in quanto $|\partial S| = 0$ implica $|\mathbf{T}(\partial S)| = |\partial \mathbf{T}(S)| = 0$. In particolare $\mathbf{T}(Q)$ risulta misurabile.

Poiché $\mathbf{T}^{-1}$ ha le stesse proprietà di $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}(S)$ misurabile $\Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(S)) = S$ misurabile.

2. *Se S è misurabile e $\overline{S} \subset \Omega$, $|\mathbf{T}(S)| = \iint_S \left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv$.*

Poniamo $\Delta = |\det \mathbf{J}| = \left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|$. Per l'additività dell'integrale (e quindi della misura):

$$|\mathbf{T}(Q)| = \sum_{h,k} |\mathbf{T}(I_{kh})| \le (1+c\varepsilon)\sum_{k,h} |\det \mathbf{J}(u_k,v_h)|\,|I_{kh}| \le$$
$$\le \sum_{k,h} \operatorname*{Max}_{I_{kh}} \Delta\ |I_{kh}| + c\varepsilon \operatorname*{Max}_{Q} \Delta\ |Q|\,.$$

(*) Con un po' di buona volontà si potrebbe calcolare esattamente c.

Ciò implica, per l'arbitrarietà di ε, che, essendo $\sum_{k,h} \operatorname*{Max}_{kh} \Delta\ |I_{kh}|$ una generica somma superiore di Δ,

$$|\mathbf{T}(Q)| \le \iint_Q \Delta dudv\,. \qquad (1.29)$$

La (1.29) vale anche per S. Sia infatti $\tilde{Q}$ un rettangolo contenente S e si consideri una suddivisione $\mathcal{D}$ di $\tilde{Q}$ in rettangoli J_{rs} in modo che quelli che intersecano S siano tutti contenuti in Ω. Indichiamo con J^*_{rs} i sottorettangoli di $\tilde{Q}$ tali che $J^*_{rs} \cap \partial S \ne \emptyset$. È possibile fare in modo che $\sum |J^*_{rs}| < \varepsilon$, essendo $|\partial S| = 0$. Considerando poi solo i J_{rs} interni ad S (se non ce ne sono allora $S = \partial S$), si ha, usando l'additività della misura e le (1.28) e (1.29):

$$|\mathbf{T}(S)| \le \sum |\mathbf{T}(J_{rs})| + \sum |\mathbf{T}(J^*_{rs})| \le \sum \iint_{J_{rs}} \Delta dudv +$$
$$+\,\varepsilon(1+c\varepsilon)\max_{\overline{S}} \Delta \le \iint_S \Delta dudv + \varepsilon(1+c\varepsilon)\max_{\overline{S}} \Delta\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε si deduce

$$|\mathbf{T}(S)| \le \iint_s \Delta dudv\,. \qquad (1.30)$$

Poiché $\mathbf{T}^{-1}$ ha le stesse proprietà di $\mathbf{T}$, possiamo sostituire $\mathbf{T}(S)$ ad S nella (1.30), ottenendo, essendo $\mathbf{J}_{\mathbf{T}^{-1}} = \mathbf{J}^{-1}$ (e quindi $\Delta_{T^{-1}} = \Delta^{-1}$), con $\tilde{\Delta}(x,y) = \Delta(u(x,y),v(x,y))$:

$$|S| \le \iint_{\mathbf{T}(S)} \frac{1}{\tilde{\Delta}} dxdy \le (\min_{\mathbf{T}(\overline{S})} \tilde{\Delta})^{-1} |\mathbf{T}(S)|$$

ovvero

$$|\mathbf{T}(S)| \ge |S| \min_{\mathbf{T}(\tilde{S})} \tilde{\Delta}\,.$$

Applichiamo quest'ultima disuguaglianza ai rettangoli J_{rs} interni ad S, della suddivisione $\mathcal{D}$ precedentemente considerata. Si ha, essendo $\sum(J^*_{rs}) < \varepsilon$:

$$|\mathbf{T}(S)| \ge \sum |\mathbf{T}(J_{rs})| \ge \sum \min_{\mathbf{T}(J_{rs})} \tilde{\Delta}\,|J_{rs}| = \sum \min_{J_{rs}} \Delta\,|J_{rs}| =$$
$$= s(\mathcal{D},\Delta) - \sum \min_{J^*_{rs}} \Delta\,|J^*_{rs}| \ge s(\mathcal{D},\Delta) - \varepsilon \min_{\overline{S}} \Delta\,.$$

Essendo $s(\mathcal{D},\Delta)$ una generica somma inferiore di Δ ne segue $|\mathbf{T}(S)| \ge \iint_S \Delta dudv$, che assieme alla (1.29) completa la dimostrazione del punto 2.

3. *Sia S misurabile, $\overline{S} \subset \Omega$ e $f \in C(\mathbf{T}(S))$. Allora valè la fomula* (1.25).

Siano I_{kh} i rettangoli di una suddivisione di un rettangolo contenente S, con le seguenti proprietà: se $I_{kh} \subset \overset{\circ}{S}$, l'oscillazione di f su $\mathrm{T}(I_{kh})$ è $< \varepsilon$; se $I^*_{kh} \cap \partial S \neq \emptyset$ allora $\sum |I^*_{kh}| < \varepsilon$.

Consideriamo i rettangoli $I_{kh} \subset \overset{\circ}{S}$; poiché in virtù del punto 2., $|\mathrm{T}(I^*_{kh})| = \iint_{I^*_{kh}} \Delta du dv$, abbiamo

$$\left| \iint_{\mathrm{T}(S)} f - \iint_{\cup \mathrm{T}(I_{kh})} f \right| \leq \iint_{\cup \mathrm{T}(I^*_{kh})} |f| \leq \operatorname*{Max}_{\overline{S}} |f| \sum |\mathrm{T}(I^*_{kh})| \leq$$
$$\leq \operatorname*{Max}_{\overline{S}} |f| \operatorname*{Max}_{\overline{S}} \Delta \, \varepsilon \, .$$

Dunque, se l'ampiezza della suddivisione tende a zero, si ha

$$\iint_{\cup \mathrm{T}(I_{kh})} f \to \iint_{\mathrm{T}(S)} f \, . \tag{1.31}$$

Analogamente:

$$\iint_{\cup I_{kh}} \Delta \overline{f} \, du dv \to \iint_S \Delta \overline{f} \, du dv \, . \tag{1.32}$$

D'altra parte, per il teorema della media ponderata (Esercizio 7), si ha:

$$\iint_{I_{kh}} \Delta \overline{f} du dv = \overline{f}(\overline{u}_k, \overline{v}_h) \iint_{I_{kh}} \Delta du dv = \overline{f}(\overline{u}_k, \overline{v}_h) |\mathrm{T}(I_{kh})| \, . \tag{1.33}$$

Utilizziamo ora il fatto che l'oscillazione di f su $\mathrm{T}(I_{kh})$ è minore di ε; ponendo $\mathrm{T}(\overline{u}_k, \overline{v}_h) = (\overline{x}_k, \overline{y}_h)$ e quindi $\overline{f}(\overline{u}_k, \overline{v}_h) = f(\overline{x}_k, \overline{y}_h)$ si ricava:

$$\left| \iint_{\mathrm{T}(I_{kh})} f(x,y) dx dy - f(\overline{x}_k, \overline{y}_h) |\mathrm{T}(I_{kh})| \right| = \left| \iint_{\mathrm{T}(I_{kh})} (f(x,y) - f(\overline{x}_k, \overline{y}_h)) dx dy \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon |\mathrm{T}(I_{kh})| \, . \tag{1.34}$$

Ne segue, dalla (1.33) e dalla (1.34), che

$$\left| \iint_{\cup \mathrm{T}(I_{kh})} f(x,y) dx dy - \iint_{\cup I_{kh}} \Delta \overline{f} \, du dv \right| \leq \varepsilon \sum |\mathrm{T}(I_{kh})| \leq$$
$$\leq \varepsilon |\mathrm{T}(S)| \, . \tag{1.35}$$

La tesi segue da (1.31), (1.32) e (1.35). □

Esercizi

1. Sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ ed $f \in \mathcal{R}(Q)$. Mostrare che non è vero che $\forall x \in [a,b]$, la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile in $[c,d]$; che rilevanza ha questo fatto relativamente al teorema 1.4?

[Suggerimento: considerare la funzione $f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ per } x = \frac{1}{2}, \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \, y \text{ razionale} \\ 0 \text{ negli altri punti di } [0,1] \times [0,1] \, . \end{cases}$]

2.* Dimostrare la proposizione 1.6.

3. Sia Ω un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$ ed $f = 0$ in Ω. È vero che $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ e $\iint_\Omega f = 0$?

4. Sia Ω limitato in $\mathbb{R}^2$ ed $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Se $g : \Omega \to \mathbb{R}$, è uguale ad f tranne che su un insieme di misura nulla, allora $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ e $\iint_\Omega f = \iint_\Omega g$. Vero o falso?

5. Calcolare il volume del tetraedro limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

[Risposta: 1/6]

6. Verificare l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato a lato. Calcolare poi l'integrale.

a) $x^2 + y^2$ $\qquad Q = [0,1] \times [1,2]$

b) $\dfrac{1}{(x+y)^2}$ $\qquad Q = [3,4] \times [1,2]$

c) $\begin{cases} x + y & \text{se } x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y^2 & \text{se } x + y - 1 < 0 \end{cases}$ $\qquad Q = [0,2] \times [0,2]$

d) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, 1 \leq x < 2\}$

e) $\dfrac{\sin y^2}{y}$ $\qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$

7. Dimostrare il seguente teorema della *media ponderata*.
Siano $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $g \geq 0$ in Ω. Allora

$$(\inf_\Omega f) \iint_\Omega g \leq \iint_\Omega f g \leq (\sup_\Omega f) \iint_\Omega g \, .$$

Se poi $\overline{\Omega}$ è connesso e f è continua in $\overline{\Omega}$, esiste $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$ tale che $\iint_\Omega fg = f(x_0, y_0) \iint_\Omega g$.

8. Un solido V è inscritto nella semisfera con centro nell'origine e raggio r. Le sezioni di V coi i piani $y = \overline{y}$, $\overline{y} \in [-r, r]$ sono triangoli inscritti nella corrispondente sezione della semisfera come indicato in figura. Calcolare il volume di V.

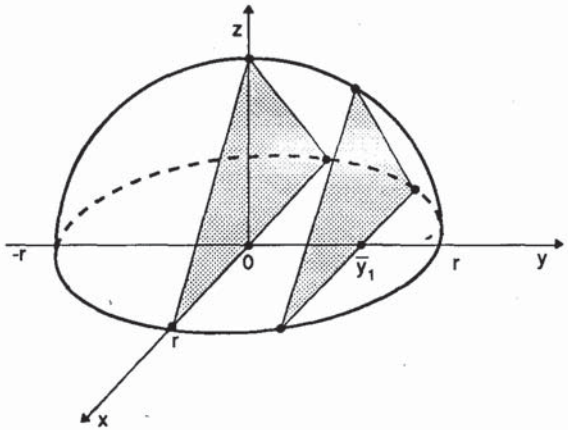


Fig. 5.13 Sezioni del solido V (Esercizio 8) con piani $y = \overline{y}_1$, $y = 0$.

9. Sia Ω limitato in $\mathbb{R}^2$, *non* chiuso e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. È vero che $f \in \mathcal{R}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\overline{\Omega})$ e che $\iint_\Omega f = \iint_{\overline{\Omega}} f$? E se Ω è misurabile?

10. Siano $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ limitati in $\mathbb{R}^2$ con $|\Omega_j \cap \Omega_k| = 0$ se $j \neq k$. Mostrare che se $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ per ogni $j = 1, \ldots, N$ allora f è integrabile in $\bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j$ e

$$\iint_{\bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j} f = \sum_{j=1}^{N} \iint_{\Omega_j} f \, .$$

11.* Dimostrare che, se $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, allora $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$.

12. a) Sia $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Se Ω_1 è un sottoinsieme misurabile di Ω allora $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$. [Usare l'esercizio 11*].

b) Dimostrare la proposizione 1.12.

13. Sia $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ed $\Omega_1 \subset \Omega$, misurabile. Mostrare che se $f \geq 0$ allora $\iint_{\Omega_1} f \leq \iint_\Omega f$.

14. Trovare l'errore:

$$\pi = \iint_{x^2+y^2<1} dx\,dy = \begin{bmatrix} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{bmatrix} = \iint_{u^2+v^2<1} 4(u^2+v^2)\,du\,dv = 2\pi \, .$$

15. Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2<1} (x-y)\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

16. Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x^2$ sulla regione interna alla cardioide di equazione $\rho = 1 + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

17. *Calcolare l'integrale di* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *sulla regione*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, \ x^2+y^2 < 4, \ x^2+y^2 > 1\} \, .$$

18. Calcolare l'area racchiusa dalle due curve di equazione polare $\rho^2 = \cos\theta$, $\rho^2 = 2\cos 2\theta$.

19. Nel caso unidimensionale, la formula di cambio di variabili è la seguente (sotto le ipotesi opportune):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$$

Per coerenza con il caso bidimensionale (formula 1.25) non dovrebbe comparire $|x'(t)|$ anziché $x'(t)$?

1.7 Integrali multipli

In questo paragrafo estendiamo a dimensioni $n \geq 3$ la teoria svolta nei precedenti paragrafi. L'intera argomentazione concernente l'integrale doppio può essere generalizzata all'integrale n–dimensionale.

Ci limitiamo dunque ad indicare le variazioni dovute al cambio di dimensione, ripercorrendo i paragrafi dall'1.1 all'1.6.

Paragrafo 1.1

I rettangoli sono sostituiti dagli *n–intervalli*, ovvero da insiemi del tipo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. I 3–intervalli sono gli usuali parallelepipedi. *Una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q è data dal prodotto cartesiano di n–suddivisioni* di $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ rispettivamente. Tale suddivisione ripartisce Q in un numero finito di sotto–n–intervalli.

È chiaro come si definiscono le somme superiore ed inferiore di una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ esse prendono la forma seguente, con ovvio significato dei simboli:

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{h,k,j} M_{hkj} \Delta x_h \Delta y_k \Delta z_j \ , \quad M_{hkj} = \sup_{Q_{hkj}} f$$

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{h,k,j} m_{hkj} \Delta x_h \Delta y_k \Delta z_j \ , \quad m_{hkj} = \inf_{Q_{hkj}} f \, .$$

La definizione 1.1 rimane inalterata: *f limitata è integrabile in Q, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(Q)$, se $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$ e l'integrale di f è il valore comune dei due estremi.*

Le notazioni in uso per gli integrali n–upli sono le seguenti:

$$\int_Q f, \int_Q \dots \int f, \int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \int_Q f(x_1,\dots,x_n)dx_1,\dots dx_n \ , \tilde{\mathcal{I}}(Q,f) \ .$$

Per gli integrali tripli ($n = 3$) si usano anche le notazioni

$$\iiint_Q f \ , \iiint_Q f(x,y,z)dxdydz \ .$$

I teoremi 1.1, 1.2, 1.3 sono ancora validi con identici enunciati e dimostrazioni. Tralasciamo per il momento la formula di riduzione.

Paragrafo 1.3. Misura n–dimensionale di Peano–Jordan.

L'integrale di una funzione f su insiemi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitati, si definisce in modo analogo. Si racchiude Ω in un n–intervallo Q; si pone $\tilde{f} = f$ in Ω e $\tilde{f} = 0$ in $Q \backslash \Omega$; *f è integrabile in Ω se $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ e*

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_Q \tilde{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \ .$$

Così pure, *un insieme Ω è misurabile* (secondo Peano–Jordan) *in $\mathbb{R}^n$ se $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{R}(\Omega)$ e si pone* $|\Omega| := \int_\Omega d\mathbf{x}$ (*).

Per $n = 3$ la misura di Peano–Jordan si chiama *volume*.

Ogni n–intervallo $Q = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ è misurabile e $|Q| = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$.

Qualche cautela occorre osservare con gli insiemi di misura nulla.

La definizione è sempre la stessa, soltanto è riferita agli n–intervalli, anziché ai rettangoli. Precisamente: $Z \subset \mathbb{R}^n$ è di misura nulla (in $\mathbb{R}^n$!) se, fissato $\varepsilon > 0$, esistono N n–intervalli di misura totale $< \varepsilon$ la cui unione contenga Z.

Osserviamo che un insieme può essere di misura nulla in $\mathbb{R}^n$ ma non in $\mathbb{R}^k$ con $k < n$; ad esempio, un 2–intervallo (contenuto in un piano) ha misura 3–dimensionale nulla ma misura bidimensionale ovviamente diversa da zero. Occorre dunque precisare sempre la dimensione dello spazio in cui si lavora per decidere se un insieme ha misura nulla o meno.

Vale ancora la proposizione 1.6: *Un insieme S è misurabile in $\mathbb{R}^n$ se e solo se* $|\partial S|_n = 0$ (**).

La proposizione 1.7 si modifica nel modo seguente (la dimostrazione è identica):

(*) Se è necessario precisare la dimensione dello spazio, scriveremo $|\cdot|_n$.

(**) Anche ∂S va intesa ovviamente come frontiera di S in $\mathbb{R}^n$.

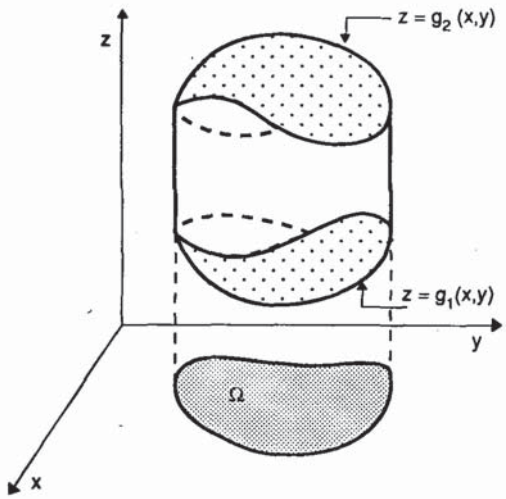


Fig. 5.14 Dominio semplice rispetto all'asse z.

Proposizione 1.7' - *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ misurabile e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile in Ω. Allora il suo grafico ha misura n–dimensionale nulla.*

Con questa definizione di misura, risultano misurabili in $\mathbb{R}^3$ tutti gli insiemi più comuni della geometria euclidea (sfere, cilindri, prismi, poliedri in generale, etc.) con volumi coincidenti con quelli noti.

Particolarmente frequenti nei casi concreti sono insiemi in $\mathbb{R}^3$ definiti nel modo seguente:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y) < z < g_2(x,y) \ , \ (x,y) \in \Omega\} \qquad \text{(fig. 5.14)}$$

dove g_1, g_2 sono continue in $\overline{\Omega}$ ed Ω è misurabile. Il bordo di E è costituito dai grafici di g_1 e g_2, che hanno misura nulla per la proposizione 1.7', e da una superficie cilindrica che pure, come è facile verificare, ha misura nulla. Dunque E è misurabile e, seguendo la terminologia del paragrafo 1.3, diremo che E è un dominio *semplice o normale* rispetto all'asse z. In modo analogo si definiscono i domini normali rispetto agli altri assi.

Paragrafo 1.5. Si estende inalterato al caso n–dimensionale.

Paragrafi 1.2 – 1.4. Formule di riduzione

Continua a valere l'integrabilità delle funzioni generalmente continue in un intervallo. Ciò implica l'integrabilità di funzioni continue in compatti misurabili oppure anche di funzioni limitate e continue su un aperto misurabile.

Veniamo ora alle *formule di riduzione.*

Nel caso n–dimensionale esistono molti modi di ordinare e raggruppare le variabili; a ciascuno di essi corrisponde, in linea di principio, una formula di riduzione.
Sia $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ un n–intervallo.
Raggruppiamo le variabili nel modo seguente:

$$\xi = (x_1, \ldots, x_k)\ ,\ \eta = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

con $\xi \in Q_\xi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k]$ e $\eta \in Q_\eta = [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

A questa scomposizione delle variabili corrisponde una formula del tipo:

$$\int_Q f = \int_{Q_\xi} d\xi \int_{Q_\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta = \int_{Q_\xi} dx_1 \ldots dx_k \int_{Q_\eta} f(x_1, \ldots, x_n)\ dx_{k+1} \ldots dx_n \quad (1.36)$$

La (1.36) riduce l'integrale n–uplo al calcolo di un integrale $(n-k)$–dimensionale e ad uno k–dimensionale. Lo stesso procedimento è poi applicabile a ciascuno dei due integrali fino ad arrivare al calcolo di integrali uni–dimensionali.
Ad esempio, nel caso $n = 3$, al raggruppamento $\xi = x$ e $\eta = (y, z)$ (o $\eta = (z, y)$) corrisponde la formula

$$\iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} dx \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z) dy dz\ . \quad (1.37)$$

Al raggruppamento $\xi = (x, y)$ (oppure $\xi = (y, x)$) ed $\eta = z$ corrisponde invece la formula

$$\iiint_Q f = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz\ . \quad (1.38)$$

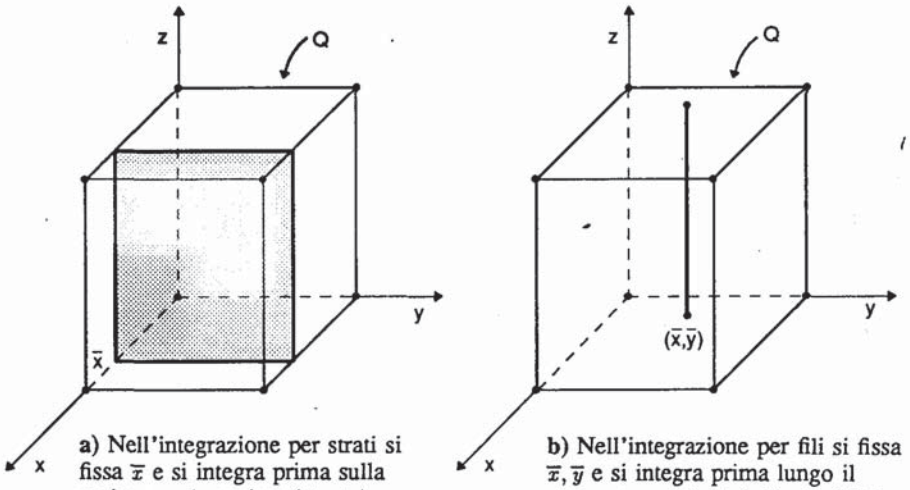
Le (1.37) e (1.38) si chiamano formule di integrazione *per strati* e *per fili*, rispettivamente. Il significato di tale terminologia è illustrato in figura 5.15.

Nel caso poi di funzioni definite su domini E, semplici rispetto all'asse z, la formula (1.38) prende la forma seguente:

$$\iiint_E f = \iint_\Omega dx dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz\ . \quad (1.39)$$

Si noti che Ω coincide con la *proiezione* di E sul piano x, y.
Le ipotesi sotto le quali è valida la (1.36) sono indicate nel teorema seguente.

■ **Teorema 1.15** - *Sia Q un n–intervallo, $Q = Q_\xi \times Q_\eta$ dove Q_ξ è un k–intervallo e Q_η un $(n-k)$–intervallo. Se $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile in Q e per ogni $\xi \in Q_\xi$ esiste l'integrale $G(\xi) = \int_{Q(\eta)} f(\xi, \eta) d\eta$, allora G è integrabile in Q_ξ e vale la* (1.36).



a) Nell'integrazione per strati si fissa $\overline{x}$ e si integra prima sulla regione ombreggiata *(strato)*

b) Nell'integrazione per fili si fissa $\overline{x}, \overline{y}$ e si integra prima lungo il segmento verticale indicato *(filo)*

Fig. 5.15

La dimostrazione ricalca, con qualche complicazione tecnica, quella del teorema bidimensionale e perciò la omettiamo.

***Esempio* 1.12** - Si voglia calcolare il volume del solido T, intersezione di due cilindri di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$ (fig. 5.16).
Osserviamo che, sezionando il solido con piani del tipo $x = \overline{x}$, si ottengono dei quadrati $Q_{\overline{x}}$. Integrando per strati (*) si ha

$$\mathrm{Vol}(T) = \int_{-r}^{r} dx \iint_{Q_x} dy dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{area}(Q_x) dx \quad (1.40)$$

Per calcolare $\mathrm{area}(Q_x)$, consideriamo la sfera B inscritta in T che ha raggio r e quindi $\mathrm{vol}(B) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ogni sezione $B_{\overline{x}}$ della sfera con un piano $x = \overline{x}$ è un cerchio inscritto in $Q_{\overline{x}}$. Allora si ha: $\frac{\mathrm{area}(Q_x)}{\mathrm{area}(B_x)} = \frac{4}{\pi}$ ovvero $\mathrm{area}(Q_x) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{area}(B_x)$.

(*) O utilizzando il principio di Cavalieri(!).

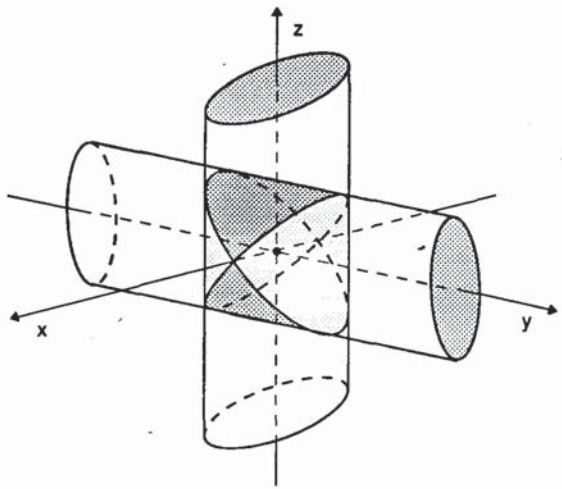


Fig. 5.16 Intersezione dei due cilindri dell'esempio 1.12.

Sostituendo nella (1.40) si trova, usando ancora l'integrazione per strati:

$$\mathrm{Vol}(T) = \frac{4}{\pi}\int_{-r}^{r} \mathrm{area}(B_x)dx = \frac{4}{\pi}\int_{-r}^{r} dx \int_{B_x} dydz = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{vol}(B) = \frac{16}{3}r^3 .$$

***Esempio* 1.13 -** (Volume dei solidi di rotazione).

Sia V un solido ottenuto ruotando attorno all'asse z il trapezioide corrispondente alla funzione $y = \varphi(z)$, $a \le z \le b$, φ continua (fig. 5.17). Si voglia calcolarne il volume.

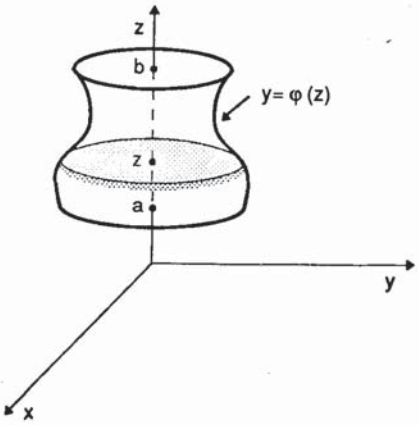


Fig. 5.17

Fissato $\overline{z} \in [a, b]$, sia $A(\overline{z})$ l'area della sezione di V con il piano $z = \overline{z}$. Integrando per strati si trova

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_a^b A(z)dz .$$

Essendo poi $A(z) = \pi[\varphi(z)]^2$ si ottiene

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi\int_a^b [\varphi(z)]^2\, dz .$$

Ad esempio, se il profilo del "vaso" di figura 5.17 è $y = \sin z + 1$, $\pi \le z \le 3\pi$, si trova

$$\text{Volume } = \pi\int_\pi^{3\pi} (\sin z + 1)^2 dz = 3\pi^2 .$$

***Esempio* 1.14 -** Calcoliamo il "volume" dell'n–tetraedro di lato a, dato da

$$T_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n < a\} .$$

Poiché $T_n(a)$ si ottiene con una dilatazione di rapporto a dal tetraedro $T_n(1)$ si ha

$$|T_n(a)| = a^n\,|T_n(1)|_n \qquad \text{(Esercizio 21)} .$$

Usiamo l'integrazione per strati, fissando x_n tra 0 ed 1 e lasciando variare le altre variabili sulla corrispondente sezione, che risulta essere l'insieme

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\ ,\ x_1 > 0, \ldots, x_{n-1} > 0\ ,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1 - x_n\}$$

e che coincide con $T_{n-1}(1 - x_n)$. Dalla (1.39) abbiamo:

$$|T_n(1)|_n = \int_{T_n(1)} d\mathbf{x} = \int_0^1 dx_n \int_{T_{n-1}(1-x_n)} dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \int_0^1 |T_{n-1}(1 - x_n)|_{n-1}\, dx_n .$$

Essendo

$$|T_{n-1}(1 - x_n)|_{n-1} = (1 - x_n)^{n-1}\,|T_{n-1}(1)|_{n-1}$$

si ricava

$$|T_n(1)|_n = |T_{n-1}(1)|_{n-1}\int_0^1 (1 - x_n)^{n-1} dx_n = \frac{1}{n}|T_{n-1}(1)|_{n-1} . \qquad (1.41)$$

La (1.41) è una formula di ricorrenza per $|T_n(1)|_n$. Essendo

$$|T_2(1)| = \text{area}(T_2(1)) = \frac{1}{2}\,,$$

otteniamo

$$|T_3(1)|_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ ,\quad |T_4(1)|_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

ed infine $|T_n(1)|_n = \dfrac{1}{n!}$. In conclusione si ha $|T_n(a)|_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

È curioso notare che $\lim\limits_{n\to+\infty} |T_n(a)|_n = 0$, qualunque sia il lato a.

Paragrafo 1.6. Cambiamento di variabili.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbf{T}(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ una trasformazione *biunivoca* assegnata dalle formule

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1,\dots,u_n)\\ x_2 &= \varphi_2(u_1,\dots,u_n)\\ &\vdots\\ x_n &= \varphi_n(u_1,\dots,u_n)\ . \end{aligned}$$

Se $\mathbf{T} \in C^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)} \neq 0$ in Ω, il teorema 1.14 si estende direttamente al caso multi–dimensionale insieme alle varianti indicate nell'osservazione 1.5. La formula (1.25) prende la forma seguente:

$$\int_{\mathbf{T}(S)} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int_S \overline{f}(u_1,\dots,u_n)\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}\right| du_1\dots du_n \qquad (1.42)$$

dove S è un sottoinsieme misurabile in Ω e $f \in C(\mathbf{T}(\overline{S}))$.

Nella (1.42) il determinante jacobiano della trasformazione appare come un fattore di ingrandimento per la misura n–dimensionale.

Particolarmente importanti ed utili risultano le trasformazioni in coordinate *cilindriche* e *sferiche* (polari), che consideriamo per $n = 3$ nei prossimi due esempi e che abbiamo già incontrato negli esempi 2.8 e 2.9 del paragrafo 7.2.1 volume 1.

Nell'esercizio 27 è presentato il cambiamento in coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$.

***Esempio* 1.15** - (Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$, rispetto all'asse z).

$\mathbf{T}$ è definita dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\\ y = \rho\sin\theta\\ z = z\ . \end{cases} \qquad (1.43)$$

Si lascia cioè z invariato e si introducono coordinate polari nel piano x, y.

Chiaramente la (1.43) è adatta in presenza di simmetrie assiali.

Se $(\rho,\theta,z) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} = \Omega$, $\mathbf{T}$ realizza una corrispondenza biunivoca tra Ω e lo spazio $\mathbb{R}^3$ con esclusione del semipiano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x \geq 0\}$.

Come per $n = 2$, tale limitazione non crea inconvenienti in quanto l'intersezione di questo semipiano con un qualunque insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$, misurabile, ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$. Quindi S, nella formula (1.42), può essere un qualunque insieme misurabile.

Nell'esempio 7.2.7 volume 1, abbiamo trovato che

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho\ ;$$

perciò la (1.42) diventa in questo caso

$$\iiint_{\mathbf{T}(S)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz\ .$$

Si voglia, a titolo di applicazione, calcolare il volume del solido V intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e del paraboloide $x^2+y^2-3z = 0$.

Si tratta di un insieme a simmetria assiale (rispetto all'asse z) la cui proiezione sul piano x, y è il cerchio $x^2+y^2 < 3$. Si ha:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 3\ ,\ \frac{1}{3}(x^2+y^2) < z < \sqrt{4-x^2-y^2}\}\ .$$

Passando a coordinate cilindriche, ponendo $S = \mathbf{T}^{-1}(V)$ si ha:

$$S = \{(\rho,\theta,z) : \rho < \sqrt{3}\ ,\ \frac{1}{3}\rho^2 < z < \sqrt{4-\rho^2}\}$$

e perciò (integrando per fili rispetto a z):

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_S \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho d\theta \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} [\rho\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^3}{3}]d\rho = \frac{19}{3}\pi\ .$$

✗ *Esempio* **1.16** - (Coordinate sferiche o polari in $\mathbb{R}^3$).

T è definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\theta \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta \\ x = \rho \cos\psi \end{cases} \tag{1.44}$$

Se $(\rho, \psi, \theta) \in \Omega = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, **T** realizza una corrispondenza biunivoca tra Ω e lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato ancora del semipiano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$. Nell'esempio 7.2.8 volume 1, abbiamo visto che

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \psi, \theta)} = \rho^2 \sin\psi \neq 0 \text{ in } \Omega \ ,$$

perciò la (1.42) diventa in questo caso:

$$\iiint_{\mathbf{T}(S)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S \overline{f}(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin\psi d\rho d\psi d\theta \ .$$

A titolo di esempio calcoliamo $\iiint_V xyz dx dy dz$ dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 > 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

In coordinate sferiche.

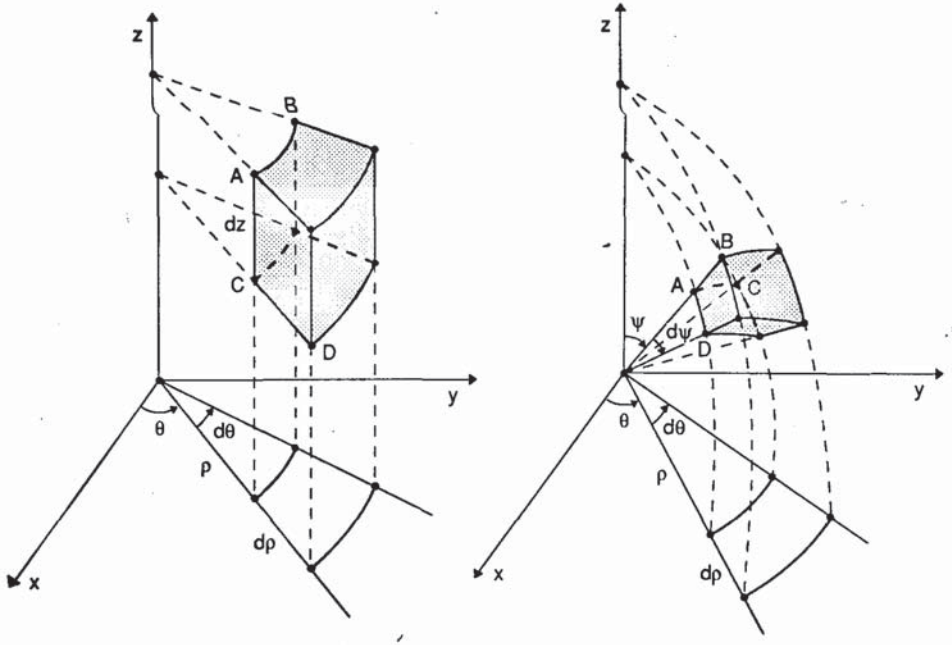
$$\mathbf{T}^{-1}(V) = S = \{(\rho, \psi, \theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \ 0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \ 1 < \rho < 2\} \ .$$

e perciò

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \iiint_{\mathbf{T}^{-1}(V)} \rho^5 (\sin\psi)^3 \cos\theta \sin\theta \cos\psi d\rho d\psi d\theta =$$

$$= \int_1^2 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\psi (\sin\psi)^3 d\psi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{63}{48} \ .$$

In figura 5.18 sono illustrati i significati intuitivi degli elementi di volume in coordinate cilindriche e sferiche.



a) Elemento di volume in coordinate cilindriche
$AB = \rho d\theta$, $AC = dz$, $CD = d\rho$

b) Elemento di volume in coordinate sferiche
$AB = d\rho$, $AD = \rho d\psi$, $AC \simeq \rho \sin\psi d\theta$

Fig. 5.18

Esercizi

20. Dare una dimostrazione diretta della formula (1.22).
[Suggerimento: dati due vettori $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, ortogonali, dimostrare che $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ = area del parallegramma da essi individuato. Considerare poi il caso **u** e **v** non ortogonali. Considerare infine il parallelogramma individuato dai vettori **Lu** ed **Lv** con $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$].

Estendere poi la formula ad n–dimensioni.

21. Sia **T** una omotetia (dilatazione o contrazione) con centro in $\mathbf{0}$, da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, di rapporto $a > 0$: $\mathbf{Tx} = a\mathbf{x}$.

Dimostrare che: area$(\mathbf{T}(S)) = a^n$ area(S) per ogni insieme misurabile $S \subset \mathbb{R}^n$.

22. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $\mathbf{M}$ è una matrice ortogonale di ordine n, allora, posto $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ e $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y})$ dimostrare che si ha

$$\int_{||\mathbf{x}||<R} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{||\mathbf{y}||<R} \tilde{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \ .$$

23.** Calcolare $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \sin(x+y+z)dxdydz.$

[Usare un'opportuna trasformazione mediante una matrice ortogonale in $\mathbb{R}^3$].

24.* Dimostrare che, se

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j \ , \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1 \ , \ \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0\} \ ,$$

allora

$$|E|_n = \frac{1}{n!} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \ .$$

[Con un'opportuna trasformazione di variabili riportarsi al caso dell'esempio 1.14 (in cui $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j$)].

25. Calcolare il volume della porzione di cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$ compresa tra il piano $x + y + z = 4$ e il paraboloide $z = -2 + x^2 + y^2$.

26. Calcolare il volume del solido definito da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 9(1 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

27. *Coordinate polari in* $\mathbb{R}^n$.

In $\mathbb{R}^n$ il passaggio a coordinate polari è definito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi_1 \\
x_2 &= \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\
x_3 &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\
x_n &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \ ,
\end{aligned}$$

dove

$$(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \times \ldots \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ .$$

Abbreviando si può scrivere $\mathbf{x} = \rho\mathbf{v}$.

a) Dimostrare che $||\mathbf{v}|| = 1$.

b) Verificare che per $n = 2$ ed $n = 3$ si ritrovano le trasformazioni a coordinate polari nel piano e nello spazio.

Si può dimostrare che

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} (\sin\varphi_1)^{n-2} \ (\sin\varphi_2)^{n-3} \ldots \sin\varphi_{n-2} \ . \qquad (*)$$

28. a) Sia f una funzione da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, radiale, cioè $f(\mathbf{x}) = f(||\mathbf{x}||)$. Mostrare che

$$\int_{||x||<R} f(||\mathbf{x}||)d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f(\rho)\rho^{n-1} d\rho \qquad (**)$$

dove ω_n è un numero che dipende solo dalla dimensione dello spazio.

b) Dimostrare che

$$\omega_n = n \cdot \text{(misura della ipersfera di raggio 1)} \ . \qquad (***)$$

In particolare: $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$; che cosa rappresenta ω_n?.

1.8 Alcune applicazioni

Integrali doppi e tripli possono essere utilizzati per il calcolo dei baricentri o di momenti di inerzia per distribuzioni continue di massa bi o tri–dimensionali.

Se $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sono masse dislocate rispettivamente in punti $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k$, il *baricentro* della loro distribuzione è definito dal punto $\mathbf{b} := \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_j \mathbf{p}_j$ dove $m = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_j$ è la massa totale. Il *momento di inerzia* rispetto ad una retta r o ad un polo $\mathbf{p}$ è definito dalla formula

$$I = \sum_{j=1}^{k} d_k^2 m_k$$

dove d_k indica la distanza di $\mathbf{p}_k$ dalla retta o dal polo.

Supponiamo ora che un corpo occupi una regione piana Ω (si pensi ad esempio ad una lamina con la forma di Ω). Se $\mu = \mu(x, y)$ indica la *densità superficiale di massa* (massa per unità di superficie), la massa totale m del corpo è data dall'integrale $\displaystyle\iint_\Omega \mu(x, y)dxdy$.

Le coordinate del baricentro sono assegnate dalle formule seguenti:

$$x_{\mathbf{b}} := \frac{1}{m}\iint_\Omega x\mu(x,y)dxdy \ , \ y_{\mathbf{b}} := \frac{1}{m}\iint_\Omega y\mu(x,y)dxdy \ . \tag{1.45}$$

Se la densità è costante, $\mu = k$ (corpo *omogeneo*), il baricentro si chiama anche *centroide* e, essendo $m = k$ area(Ω), le (1.45) diventano

$$x_{\mathbf{b}} = \frac{1}{\text{area}(\Omega)}\iint_\Omega x\, dxdy \ , \ y_{\mathbf{b}} = \frac{1}{\text{area}(\Omega)}\iint_\Omega y\, dxdy \ . \tag{1.45'}$$

Il momento di inerzia rispetto ad una retta r o ad un polo $\mathbf{p}$, giacenti nel piano di Ω, è assegnato dalla formula

$$I := \iint_\Omega [\delta(x,y)]^2\mu(x,y)dxdy \tag{1.46}$$

dove $\delta = \delta(x,y)$ indica la distanza del punto (x,y) dalla retta o dal polo. Ad esempio, per i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati si ha:

$$I_x = \iint_\Omega y^2\mu(x,y)dxdy \ , \ I_y = \iint_\Omega x^2\mu(x,y)dxdy$$

mentre per quello rispetto all'origine

$$I_{\mathbf{0}} = I_x + I_y = \iint_\Omega (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy \ .$$

Le formule (1.45) e (1.46) si estendono ad una distribuzione tridimensionale di massa con densità $\mu = \mu(x,y,z), (x,y,z) \in V$.

Per il baricentro si avrà

$$x_{\mathbf{b}} := \frac{1}{m}\iiint_V x\mu(x,y,z)\, dxdydz \ ,$$

$$y_{\mathbf{b}} := \frac{1}{m}\iiint_V y\mu(x,y,z)\, dxdydz \ ,$$

$$z_{\mathbf{b}} := \frac{1}{m}\iiint_V z\mu(x,y,z)\, dxdydz \ ,$$

con $m = \iiint_V \mu dxdydz$, massa totale, mentre per il momento di inerzia:

$$I := \iiint_V [\delta(x,y,z)]^2\mu(x,y,z)dxdydz \ .$$

***Esempio* 1.17** - Si voglia calcolare le coordinate del centroide di una lamina omogenea (densità =1) la cui forma è il quarto di ellisse, Ω, definito dalle relazioni $x \geq 0, y \geq 0$, $x^2 + 4y^2 \leq 1$. Si ha, essendo area$(\Omega) = \frac{1}{8}\pi$:

$$x_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi}\iint_\Omega x\, dxdy \ , \ y_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi}\iint_\Omega y\, dxdy \ .$$

Eseguendo la trasformazione (variante delle coordinate polari)

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta$$

Ω si trasforma nel dominio $\{(\rho,\theta), \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Lo jacobiano della trasformazione è $\frac{1}{2}\rho$ e pertanto:

$$x_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\rho^2\cos\theta d\rho = \frac{4}{3\pi} \ , \ y_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{4}\rho^2\sin\theta d\theta = \frac{2}{3\pi} \ .$$

***Esempio* 1.18** - Si voglia calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine di una sfera S con centro nell'origine e raggio R, sapendo che la densità è proporzionale alla distanza dal piano x,y: $\mu(x,y,z) = k|z|$ $(k \in \mathbb{R}^+)$.

Usando le coordinate polari si trova:

$$I_{\mathbf{0}} = \iiint_S k(x^2+y^2+z^2)z\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\psi \int_0^R k\rho^5 \sin\psi|\cos\psi| d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}k\pi R^6 \ .$$

Un altro notevole uso degli integrali multipli concerne l'espressione di potenziali e di forze di attrazione ad esempio gravitazionali o elettrostatiche. Consideriamo le prime, per fissare le idee.

La legge di attrazione di Newton dà la forza che una particella di massa m, posizionata nel punto (ξ,η,ζ), esercita su una particella mobile di massa unitaria, posta in un punto (x,y,z). Se indichiamo con $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ la distanza tra le particelle, con $\mathbf{F}$ la forza, e con γ la costante di gravitazione, si ha:

$$\mathbf{F} = \gamma m\,\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma m\left[\frac{(\xi-x)}{r^3}\mathbf{i} + \frac{(\eta-y)}{r^3}\mathbf{j} + \frac{(\zeta-z)}{r^3}\mathbf{k}\right] \ .$$

Lo scalare $U(x,y,z) = \gamma m\frac{1}{r}$ rappresenta il *potenziale* generato dalla massa m.

Se si ha un numero finito di particelle di massa $m_1, m_2, \ldots, m_k$ a distanza r_k dalla particella "sonda", la forza esercitata su quest'ultima è la somma di quelle esercitate da ciascuna particella e perciò avremo

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{k} \gamma m_j \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r_j}\right).$$

Supponiamo ora che, anziché essere concentrata in un numero finito di punti, la massa sia distribuita con continuità in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, con densità μ. Allora il potenziale gravitazionale di questa massa in un punto (x, y, z) è assegnato dalla formula

$$U(x,y,z) := \gamma \iiint_\Omega \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta . \tag{1.47}$$

La forza gravitazionale è data da $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ e, supponendo di poter eseguire la derivazione sotto il segno di integrale, si trova, indicando con F_1, F_2, F_3 le componenti di $\mathbf{F}$:

$$F_1(x,y,z) = -\gamma \iiint_\Omega \frac{x-\xi}{r^3}\mu(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

$$F_2(x,y,z) = -\gamma \iiint_\Omega \frac{y-\eta}{r^3}\mu(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

$$F_3(x,y,z) = -\gamma \iiint_\Omega \frac{z-\zeta}{r^3}\mu(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

***Esempio* 1.19** - Si voglia calcolare il potenziale e la forza gravitazionale generata da una sfera omogenea (densità =1) di raggio R.

Calcoliamo il potenziale in un punto $(0, 0, z)$ sull'asse z, $z > R$. Dalla (1.47) si ha:

$$U(0,0,z) = \gamma \iiint_{\text{sfera}} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} .$$

Usando le coordinate polari si trova, essendo

$$r^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho\cos\psi \ :$$

$$U(0,0,z) = \gamma \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\psi}{\sqrt{z^2+\rho^2-2z\rho\cos\psi}} d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{z}\gamma \int_0^R \rho\,[(z^2+\rho^2-2z\rho\cos\psi)^{1/2}]_0^\pi\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{a}\gamma \int_0^R \rho[(z+\rho)-(z-\rho)]d\rho = \gamma\frac{4\pi R^3}{3z} .$$

Il potenziale coincide dunque con quello di una particella puntiforme posta nell'origine e di massa $m = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, ovvero la massa di tutta la sfera.

In questo sistema di riferimento abbiamo inoltre:

$$F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0 \ , \ \ F_3(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = -\gamma\frac{4\pi R^3}{3z^2} .$$

Esercizi

29. Trovare baricentro e momento di inerzia rispetto all'asse di un cono di altezza h e raggio a, riempito di un materiale con densità proporzionale alla distanza dalla base.

30. Trovare il baricentro di una calotta sferica riempita di materiale omogeneo (R = = raggio della sfera, R_0 raggio della calotta).

31. (*Teorema di Pappo* (*)).

Sia A un insieme limitato misurabile contenuto nel piano y, z. Sia inoltre V il solido che si ottiene da A mediante una rotazione completa attorno all'asse z. Dimostrare che

$$\operatorname{Vol}(V) = 2\pi y_c \text{ area } (A) , \tag{$*$}$$

dove y_c è la y–coordinata del centroide di A.

32. Usare la $(*)$ dell'esercizio 31 per:

a) calcolare il volume di un toro di raggi R ed r;

b) determinare il centroide di una lamina omogenea a forma di semiellisse di semiassi a e b.

33. Calcolare il potenziale gravitazionale dell'ellissoide

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1$$

in un punto nell'asse z, di coordinate $(0, 0, c)$, $c > b > 0$.

(*) Pappo Alessandro ($\sim$ 300 a.C.)

34. Sia S un corpo di massa totale m, con centro di gravità nell'origine. Dimostrare che, se ρ è la distanza di un punto $\mathbf{p}$ dall'origine, detto $U(\mathbf{p})$ il potenziale generato da S in $\mathbf{p}$, si ha:

$$U(\mathbf{p}) \sim \gamma \frac{m}{\rho} \quad \text{per } \rho \to +\infty .$$

35. Calcolare il momento di inerzia della figura delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$ e la retta $x = 2$, rispetto alla retta $y = -2$.

36. Calcolare il momento di inerzia di un cono circolare rispetto ad un diametro della base.

1.9 Cenno agli integrali multipli generalizzati

Quando la funzione integranda o il dominio di integrazione, o entrambi, non sono limitati, si parla di integrale generalizzato o improprio.

Consideriamo per primo il caso in cui la funzione integranda non è limitata ma il dominio Ω di integrazione resta limitato.

Le funzioni che si integrano, nella maggioranza dei casi concreti, sono funzioni continue, illimitate in un intorno di insiemi di misura nulla, ad esempio nell'intorno di un numero finito di punti isolati.

L'idea allora è quella di togliere dalla regione Ω di integrazione un insieme S di misura piccola, contenente i punti "irregolari", integrare su $\Omega \setminus S$, indi calcolare il limite facendo tendere a zero la misura di S.

Se il limite esiste, si chiamerà *integrale improprio* o *generalizzato* di f in Ω. Poiché non vogliamo che il limite dipenda dalla particolare scelta degli insiemi S, ci limitiamo alla situazione più semplice in cui esiste non solo l'integrale improprio di f, bensì anche quello di $|f|$, cioè al caso in cui le funzioni sono *assolutamente integrabili* (in senso generalizzato).

Precisamente, siano Ω una regione *misurabile e limitata* di $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supponiamo di poter trovare una successione $\{\Omega_j\}_{j \geq 1}$ di sottoinsiemi di Ω con le seguenti proprietà:

1) $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ per $j \geq 1$;
2) ogni Ω_j è misurabile e $|\Omega_j| \to |\Omega|$ se $j \to +\infty$;
3) $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ (e quindi anche $|f| \in \mathcal{R}(\Omega_j)$) e

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega_j} |f|$$

esiste finito.

Allora si può dimostrare (Esercizio 42) che anche

$$I = \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega_j} f \tag{1.48}$$

esiste finito e che *non* dipende dalla particolare scelta della successione $\{\Omega_j\}$ approssimante Ω.

Il numero I che compare nella (1.48) si chiama integrale *generalizzato o improprio* di f su Ω e si indica ancora con i simboli $\int_\Omega f$, $\int_\Omega f(x,y)dxdy$ etc.

***Esempio* 1.20** - Siano $f(x,y) = \dfrac{-1}{x+y}$ e $\Omega = \{(x,y) : x < 0, x^2 + y^2 < 1 , 0 < y < -x\}$.

La funzione è illimitata nell'intorno del segmento di retta $y = -x$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$, che ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$. Inoltre $f > 0$ in Ω.

Come Ω_j scegliamo i seguenti insiemi, definiti in coordinate polari:

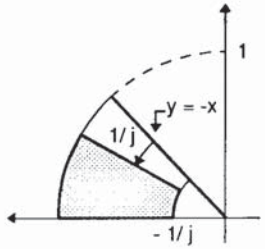


Fig. 5.19

$$\Omega_j = \{(\rho,\theta) : \frac{1}{j} < \rho < 1 , \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{j} < \theta < \pi\} \quad \text{(fig. 5.19)} ;$$

evidentemente area$(\Omega_j) \to$ area(Ω) e $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$.

Usando le coordinate polari si ha:

$$\iint_{\Omega_j} f = \int_{1/j}^{1} d\rho \int_{\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{j}}^{\pi} \frac{-1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \int_{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{j}}^{\pi} \frac{-d\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{3}{4}\pi - \theta)} .$$

Essendo $\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi - \theta\right) \sim \dfrac{3}{4}\pi - \theta$ quando $\theta \to \dfrac{3}{4}\pi$, si deduce che

$$\iint_{\Omega_j} f \to +\infty \quad \text{per } j \to +\infty .$$

Dunque f *non* è integrabile in Ω.

***Esempio* 1.21** - Siano $f = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. La funzione è illimitata; scegliamo $\Omega_j = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{1}{j} < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Allora $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ (f è > 0) e vol$(\Omega_j) \to$ vol(Ω).

Si ha, passando a coordinate polari:

$$\iiint_{\Omega_j} f = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \int_{\frac{1}{j}}^{1} \rho^{2-2\alpha} \sin\psi d\psi = \begin{cases} 4\pi \log j & \alpha = 3/2 \\ \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}[1 - j^{(2\alpha-3)}] & \alpha \neq 3/2 \end{cases}$$

Dunque, se $\alpha \geq 3/2$, $\iiint_{\Omega_j} f \to +\infty$ per $j + \infty$ ed f non è integrabile, mentre se $\alpha < 3/2$, f è integrabile e

$$\iiint_{\Omega} f = \lim_{j \to +\infty} \iint_{\Omega_j} f = \frac{4\pi}{3-2\alpha} .$$

Passiamo ora a considerare l'integrale di una funzione su un dominio illimitato. Il procedimento per definire l'integrale è sostanzialmente lo stesso considerato in precedenza.

Siano Ω misurabile ed illimitato in $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Supponiamo di poter trovare una successione $\{\Omega_j\}$ di sottoinsiemi *limitati* e misurabili di Ω per la quale valgono le proprietà 1) e 3) precedentemente enunciate e la seguente:

2') *Per ogni K, compatto contenuto in Ω, esiste j tale che $K \subset \Omega_j$.*

Valgono allora le stesse considerazioni fatte nel caso precedente e si può coerentemente definire

$$\int_{\Omega} f := \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega_j} f . \tag{1.49}$$

***Esempio* 1.22** - Mediante gli integrali doppi generalizzati si può calcolare facilmente l'importante integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx .$$

Infatti, consideriamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy .$$

Scegliendo $\Omega_j = B_j$ = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio j, le ipotesi 1) e 2') sono certamente verificate. Notiamo inoltre che $e^{-x^2-y^2} > 0$ in $\mathbb{R}^2$.

Si ha, usando le coordinate polari

$$\iint_{B_j} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{j} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi[1 - e^{-j^2}] \to \pi$$

se $j \to +\infty$.

Pertanto

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi . \tag{1.50}$$

D'altra parte, si deve ottenere lo stesso risultato scegliendo

$$\Omega_j = Q_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < j \ , \ |y| < j\} .$$

Ora

$$\iint_{\Omega_j} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-j}^{j} e^{-x^2} dx \int_{-j}^{j} e^{-y^2} dy \to \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = I^2 ,$$

per $j \to +\infty$.

Quindi $I^2 = \pi$ e perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} . \tag{1.51}$$

Sottolineiamo ancora che, con le precedenti definizioni, abbiamo ritenuto integrabili (in senso generalizzato) quelle funzioni che risultino assolutamente integrabili. Altre definizioni sono possibili, in cui l'integrale $\int_{\Omega} f$ è definito come il limite di integrali del tipo (1.48) o (1.49) *rispetto ad una determinata successione* Ω; ma non ci soffermeremo su questi casi.

Esercizi

37. Siano $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$.
Stabilire per quali valori di α f è integrabile in Ω.

38. (Generalizzazione dell'esercizio 37).
Siano $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{||\mathbf{x}||^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, e $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| < 1\}$.
Stabilire per quali valori di α f è integrabile in Ω.

39. Siano $f(x,y) = y$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, -\dfrac{1}{\sqrt{x}} < y < \dfrac{1}{\sqrt{x}}\}$.
Stabilire se f è integrabile in Ω.

40. Dimostrare i seguenti criteri di integrabilità e di non integrabilità.
a) Se f è integrabile in Ω e $|g| \leq |f|$ in Ω allora g è integrabile in Ω.
b) Se f *non* è integrabile in Ω e $|g| \geq |f|$ in Ω allora g *non* è integrabile in Ω.

41. Sia $f \in \mathcal{R}([1,+\infty])$ $f \geq 0$, tale che $\int_1^{+\infty} f(u)du = 3$.
Calcolare $\iint_{\Omega} f(xy)dxdy$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \dfrac{1}{x}, x < y < 4x\}$.

42.* Dimostrare che se $\{\Omega_j\}$ soddisfa le proprietà 1) 2) e 3) del paragrafo 1.9 allora $\lim_{j\to+\infty}\int_{\Omega_j} f$ esiste finito e non dipende dalla particolare scelta della successione $\{\Omega_j\}$ approssimante Ω.

[Suggerimento: per la prima parte usare il criterio di Cauchy per la successione $I_j = \int_{\Omega_j} f$. Per la seconda parte, considerare una successione $\{\Omega'_k\}$ di insiemi con le proprietà 1,2,3.

Posto $J = \lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega_k} f$, dimostrare che, fissato $\varepsilon > 0$, per k e j abbastanza grandi si ha $|J - \int_{\Omega'_k\cap\Omega_j} f| < \varepsilon$, etc.]

43. *Calcolo del "volume della ipersfera n–dimensionale, di raggio 1,* B_1, in termini della funzione Γ di Eulero.

Ricordiamo che $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0)$.

Calcoliamo $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\mathbf{x}||^2}d\mathbf{x}$ in due modi:

a) Dalla (**) dell'esercizio 28 a) si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\mathbf{x}||^2}d\mathbf{x} = \omega_n\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho^{n-1}d\rho = \quad (\text{ponendo } \rho^2 = t) =$$

$$= \frac{\omega_n}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt = \frac{\omega_n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

b) D'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\mathbf{x}||^2}d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}dx_1\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}dx_2\ldots\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

per quanto visto nell'esempio 1.22.

Dalla (***) dell'esercizio 28 abbiamo dunque

$$|B_1|_n\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{\frac{n}{2}}$$

da cui

$$|B_1|_n = \frac{2}{n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Osserviamo che:

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},\ldots$$

$$|B_1|_2 = \pi\ ,\ |B_1|_3 = \frac{4}{3}\pi\ ,\ |B_1|_4 = \frac{\pi^2}{2}\ ,\ |B_1|_5 = \frac{8}{15}\pi^2,\ldots$$

2. MISURA DI LEBESGUE DEGLI INSIEMI DI $\mathbb{R}^n$. INSIEMI MISURABILI E FUNZIONI MISURABILI

Nella sezione 1, parlando dell'integrale di Riemann, abbiamo definito la misura (secondo Peano–Jordan) di una vasta classe di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Per le più comuni applicazioni la classe degli insiemi PJ–misurabili (misurabili secondo Peano–Jordan) è sufficientemente ampia, anche se, come abbiamo visto, non è difficile trovare esempi di insiemi che non sono PJ–misurabili.

La classe degli insiemi L–misurabili (misurabili secondo Lebesgue), che definiremo in questa sezione, è un ampliamento della prima; il vantaggio della nuova definizione non consiste tanto (o non consiste solo) nel fatto che, ora, è ben più vasta la classe di insiemi di $\mathbb{R}^n$ che risultano misurabili ("praticamente" tutti) ma piuttosto risiede nelle proprietà della nuova misura, che sono assai più soddisfacenti, come sarà messo in luce nel paragrafo 2.2. Il vantaggio sarà poi reso più evidente nella sezione 3, quando, sulla base dei risultati conseguiti in questa sezione, sarà definito l'integrale di Lebesgue.

La nuova teoria dell'integrazione, sviluppata soprattutto ad opera di Lebesgue all'inizio di questo secolo, ma alla quale hanno dato contributi fondamentali anche matematici italiani, come Vitali, Fubini, Tonelli .., costituisce uno dei capisaldi dell'Analisi moderna. I risultati di questa teoria hanno trovato applicazione in svariati campi, sia della matematica, che delle scienze applicate, consentendo uno sviluppo straordinario, per esempio, nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, nel calcolo delle probabilità, nella meccanica quantistica.

Lo scopo di questa e della prossima sezione è quello di presentare i risultati principali di questa teoria, avendo in vista soprattutto l'impiego che di essi si fa nelle applicazioni. Noi riteniamo infatti che le nozioni fondamentali sulla misura degli insiemi di $\mathbb{R}^n$ e sull'integrale di Lebesgue debbano far parte del bagaglio culturale non solo, come è ovvio, di ogni matematico, ma anche di ogni fisico e di molti ingegneri.

Infine vogliamo far notare che, dato il carattere di questa esposizione, che è finalizzata soprattutto all'utilizzazione dei risultati della teoria, e per non rendere eccessivamente gravoso un testo già abbastanza denso di argomenti, abbiamo rinunciato, soprattutto nella sezione 3, a dare le dimostrazioni di *tutti* i risultati enunciati, limitandoci ad alcune che abbiamo ritenuto particolarmente significative e importanti.

2.1 Misura degli insiemi limitati

Defineremo, in questo paragrafo, la misura (secondo Lebesgue) degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^n$. Procederemo per gradi, a partire dagli insiemi geometricamente più semplici (gli n–intervalli) per arrivare a insiemi di tipo qualsiasi. Indicheremo con $|E|$ la misura dell'insieme E di $\mathbb{R}^n$ (*).

(*) Scriveremo $|E|_n$ quando sia necessario precisare la dimensione dello spazio. Queste notazioni

1. *Intervalli e plurintervalli*

Sia Q un intervallo limitato di $\mathbb{R}^n$, o, come anche si dice, un n–intervallo, cioè il prodotto cartesiano di n intervalli di $\mathbb{R}$:

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \tag{2.1}$$

(si osservi che gli intervalli considerati sono *chiusi*). La misura (n–dimensionale) di Q è semplicemente il prodotto delle misure degli intervalli $[a_i, b_i]$:

$$|Q| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n) .$$

Tale definizione, già usata nella sezione 1, è la naturale estensione delle definizioni di area di un rettangolo e volume di un parallelepipedo.

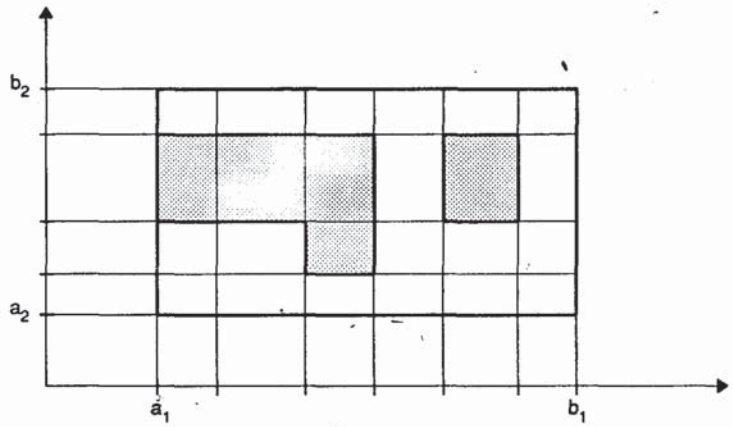


Fig. 5.20 Plurintervalli in $\mathbb{R}^2$.

Sia ora $\mathcal{D}_1$ una suddivisione dell'intervallo $[a_1, b_1]$, $\mathcal{D}_2$ una suddivisione di $[a_2, b_2], \ldots, \mathcal{D}_n$ una suddivisione di $[a_n, b_n]$; il prodotto $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \ldots \mathcal{D}_n$ determina una suddivisione di Q in tanti sottointervalli di $\mathbb{R}^n$; chiamiamo *plurintervallo* (o *plurirettangolo*) l'unione di un numero finito di questi sottointervalli:

$$R = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$$

dove i Q_i sono sottointervalli di Q relativi alla suddivisione $\mathcal{D}$.

sono le stesse già utilizzate nella sezione 1, per indicare la misura di E secondo Peano–Jordan; poiché, come vedremo, la misura di Lebesgue è un'estensione della precedente, l'uso degli stessi simboli non porta alcuna confusione.

La misura di un plurintervallo viene definita come la somma delle misure degli intervalli di cui è costituito:

$$|R| := \sum_{i=1}^{N} |Q_i| . \tag{2.2}$$

È chiaro che uno stesso plurintervallo può risultare dalla unione di intervalli diversi, corrispondenti a diverse suddivisioni di Q; ma è altresì chiaro che la sua misura non dipende dalla scelta della suddivisione (Esercizio 1).

Nel seguito utilizzeremo alcune proprietà della misura dei plurintervalli, che sono del tutto elementari (ma che l'allievo avrà cura di verificare, sfruttando la definizione (2.2)); in particolare, se R_1 e R_2 sono plurintervalli, si ha

i) $|R_1| \leq |R_2|$ se $R_1 \subseteq R_2$;

ii) $|R_1 \cup R_2| \leq |R_1| + |R_2|$; il segno uguale vale se e solo se R_1 e R_2 non hanno intervalli in comune.

2. *Insiemi aperti e insiemi chiusi*

Passiamo ora a definire la misura degli aperti e dei chiusi di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1 - *Sia $A \subset Q$ (Q n–intervallo) un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$; la misura di A è l'estremo superiore delle misure dei plurintervalli contenuti in A:*

$$|A| := \sup\{|H| : H \text{ plurintervallo} , \ H \subset A\} . \tag{2.3}$$

Risulta chiaramente $|A| \leq |Q|$; risulta anche $|A| > 0$; infatti se $\mathbf{x} \in A$, esiste un intorno $B(\mathbf{x}, r)$ di $\mathbf{x}$ di raggio $r > 0$ tutto contenuto in A; questo intorno contiene almeno un intervallo: per esempio, il cubo n–dimensionale di lato $r/\sqrt{2}$.

Osserviamo anche che, se $R \subseteq Q$ è un plurintervallo, ed $\overset{\circ}{R}$ è l'aperto costituito dai punti interni di R, risulta $|\overset{\circ}{R}| = |R|$ (Esercizio 2).

Definizione 2.2 - *Sia $C \subseteq Q$ un chiuso di $\mathbb{R}^n$; la misura di C è l'estremo inferiore delle misure dei plurintervalli contenenti C:*

$$|C| := \inf\{|K| : K \text{ plurintervallo} , \ K \supseteq C\} . \tag{2.4}$$

È chiaro che, nella (2.4) possiamo limitarci a considerare i plurintervalli $K \subseteq Q$; risulta perciò $|C| \leq |Q|$, se poi $C = Q$, si ha evidentemente $|C| = |Q|$. Che possa poi essere $|C| = 0$ anche per insiemi chiusi non vuoti è già noto: infatti la definizione di insieme di misura nulla, data in 1.4 (Proposizione 1.5) è un caso particolare, se l'insieme è chiuso, della definizione 2.2.

Le proprietà principali della misura degli aperti e dei chiusi, sopra introdotta, sono raccolte nella proposizione seguente.

Proposizione 2.1 - *Siano A, A_1, A_2 insiemi aperti, C, C_1, C_2 chiusi, B_1, B_2 aperti oppure chiusi (contenuti in Q). Risulta allora:*

i) $|B_1| \le |B_2|$ *se* $B_1 \subseteq B_2$

ii) $|A_1 \cup A_2| \le |A_1| + |A_2|$
$|C_1 \cup C_2| \le |C_1| + |C_2|$

iii) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$ *se* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2|$ *se* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

iv) $|A \backslash C| = |A| - |C|$ *se* $C \subset A$

È immediato estendere la *ii)* e la *iii)* ad un numero qualsivoglia (finito) di addendi.

Dimostrazione – La dimostrazione di *i)* è suggerita nell'esercizio 3.

Proviamo la *ii)* per gli aperti. Sia H un plurintervallo contenuto in $A_1 \cup A_2$. Raffinando eventualmente la suddivisione di Q si può supporre che ogni intervallino di H sia contenuto in A_1 oppure in A_2 (Esercizio 4): sia H_1 l'unione degli intervallini di H contenuti in A_1, H_2 l'unione di quelli contenuti in A_2: abbiamo $H = H_1 \cup H_2$ e perciò

$$|H| \le |H_1| + |H_2| \le |A_1| + |A_2|$$

per ogni plurintervallo $H \subset A_1 \cup A_2$; da ciò segue la tesi.

Se poi A_1 e A_2 sono disgiunti, sarà anche $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, e allora $|H| = |H_1| + |H_2|$, da cui ricaviamo $|A| \ge |H_1| + |H_2|$; facendo variare H_1 e H_2 in tutti i modi possibili, si ha $|A| \ge |A_1| + |A_2|$, che, combinata con la precedente, dà la *iii)* per gli aperti.

Proviamo la *ii)* per i chiusi. Siano K_1 e K_2 due plurintervalli che ricoprono C_1 e C_2 rispettivamente; allora $K_1 \cup K_2$ ricopre $C = C_1 \cup C_2$ e perciò

$$|C| = |C_1 \cup C_2| \le |K_1 \cup K_2| \le |K_1| + |K_2| .$$

Teniamo fisso K_2 e facciamo variare K_1; risulta allora: $|C| \le |C_1| + |K_2|$, cioè $|K_2| \ge |C| - |C_1|$; facciamo ora variare K_2; otteniamo $|C_2| \ge |C| - |C_1|$, da cui la tesi.

Proviamo la *iii)* per i chiusi. Sia $r = d(C_1, C_2)$ la distanza di C_1 da C_2, cioè

$$r = \inf_{\mathbf{x}^1 \in C_1, \mathbf{x}^2 \in C_2} d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) ;$$

questa distanza è > 0 poiché la funzione $d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, continua sul compatto $C_1 \cup C_2$, essendo positiva ha un minimo positivo. Sia K un plurintervallo che ricopre $C_1 \cup C_2$, costituito da intervallini, ognuno con diametro $< r/2$. Sia K_1 l'unione degli intervallini di K che hanno punti in comune con C_1, K_2 l'unione di quelli che hanno punti in comune con C_2; abbiamo

$$K_1 \cup K_2 \subseteq K \qquad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

$$C_1 \subseteq K_1 \qquad C_2 \subseteq K_2$$

e perciò

$$|K| \ge |K_1 \cup K_2| = |K_1| + |K_2| \ge |C_1| + |C_2| ;$$

allora, tenuto conto della *ii)*, segue la tesi.

Proviamo infine la *iv)*. Osserviamo anzitutto che $A \backslash C$ è un aperto. Sia ora B un aperto tale che $B \supset C$ e $|B| < |C| + \varepsilon$ (basta prendere la parte interna di un plurintervallo R con

$|R| < |C| + \varepsilon$). Allora, osservando che l'aperto $A = C \cup (A \backslash C)$ è contenuto nell'aperto $B \cup (A \backslash C)$, si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|A| \le |B \cup (A \backslash C)| \le |B| + |A \backslash C| \le |C| + |A \backslash C| + \varepsilon$$

da cui

$$|A| \le |C| + |A \backslash C| . \tag{2.1}$$

Sia ora D un chiuso (per esempio, un plurintervallo), $D \subset A \backslash C$ e $|D| > |A \backslash C| - \varepsilon$; si ha

$$|A| = |C \cup (A \backslash C)| \ge |C \cup D| = |C| + |D| > |C| + |A \backslash C| - \varepsilon$$

da cui

$$|A| \ge |C| + |A \backslash C| . \tag{2.2}$$

Combinando le (2.1) e (2.2) otteniamo la tesi. Il teorema è completamente dimostrato. □

3. *Insiemi di tipo generale*

Avendo così acquisito la misura degli aperti e dei chiusi, possiamo ora considerare un generico insieme di $\mathbb{R}^n$, limitato.

Definizione 2.3 - *Sia $E \subseteq Q$, Q intervallo di $\mathbb{R}^n$. La* **misura esterna** *di E, $|E|^*$, è l'estremo inferiore delle misure degli aperti che ricoprono E; la* **misura interna** *di E, $|E|_*$, è l'estremo superiore delle misure dei chiusi contenuti in E.*

$$|E|^* := \inf\{|A| : \ A \text{ aperto} , \ A \supseteq E\}$$

$$|E|_* := \sup\{|C| : \ C \text{ chiuso} , \ C \subseteq E\}$$

Proposizione 2.2 - *Per ogni insieme $E \subseteq Q$ risulta:*

$$|E|^* \ge |E|_* \tag{2.3}$$

Dimostrazione – Sia C un chiuso e A un aperto con $C \subseteq E \subseteq A$.
Abbiamo, per la *i)* della Proposizione 2.1,

$$|C| \le |A| . \tag{2.4}$$

Essendo la (2.4) valida per ogni chiuso $C \subseteq E$ e ogni aperto $A \supseteq E$, segue la (2.3). □

Osservazione 2.2 - Se E è un aperto e $|E|$ è la sua misura, precedentemente definita, si ha:

$$|E|^* = |E| = |E|_* .$$

La prima uguaglianza è ovvia; per la seconda si osservi che, essendo i plurintervalli particolari insiemi chiusi, si ha:

$$|E| = \sup\{|H| : \ H \text{ plurintervallo}, H \subset E\} \leq$$

$$\leq \sup\{|C| : \ C \text{ chiuso}, C \subset E\} = |E|_*$$

e perciò, tenuto conto della (2.3), sarà $|E| = |E|_*$.

Analogamente, se E è un chiuso, risulta $|E|_* = |E| = |E|^*$.

Gli aperti e i chiusi non sono certo gli unici insiemi per cui accade che la misura interna coincida con la misura esterna; anzi questa circostanza, come vedremo, è praticamente la regola.

Definizione 2.4 - *Un insieme E limitato di $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile (secondo Lebesgue) se le sue misure interna ed esterna sono uguali. Il numero*

$$|E| := |E|_* = |E|^*$$

si chiama **misura** *(n–dimensionale) di E.*

Segue subito dalla definizione che: *condizione necessaria e sufficiente perché E sia misurabile è che, fissato $\varepsilon > 0$, esistano un aperto A e un chiuso C, con $C \subseteq E \subseteq A$, tali che*

$$|A| - |C| < \varepsilon \tag{2.5}$$

o anche, tenuto conto della *iv*) della Proposizione 2.1,

$$|A \backslash C| < \varepsilon \tag{2.6}$$

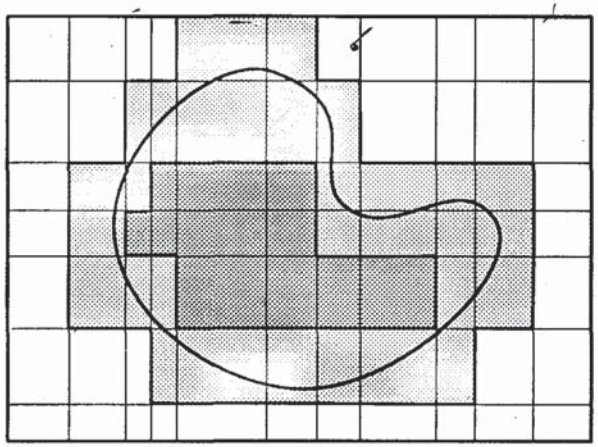


Fig. 5.21 Misura di Peano Jordan. Plurirettangoli contenuti in e contenenti un insieme.

Osservazione 2.3 - (Misura di Lebesgue e misura di Peano–Jordan)

Nella sezione 1 abbiamo definito la misura secondo Peano–Jordan; un insieme $E \subseteq Q$ è PJ–misurabile se esiste l'integrale multiplo $\int_Q \mathbf{1}_E dx$, e il valore di questo integrale è la PJ–misura di E. Ma una somma inferiore $s(\mathcal{D})$ di questo integrale (relativa ad una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q) rappresenta la misura di un plurintervallo contenuto in E, mentre una somma superiore $S(\mathcal{D})$ rappresenta la misura di un intervallo contenente E; perciò $\sup_{\mathcal{D}} s$ viene definita come la misura interna (secondo Peano–Jordan) di E, $\inf_{\mathcal{D}} S$ come misura esterna.

La misura di Peano–Jordan differisce dunque da quella di Lebesgue per il fatto che le misure interna ed esterna di un insieme E vengono definite utilizzando plurintervalli, invece che insiemi chiusi e aperti. D'altra parte, tenendo conto che la misura di un plurintervallo R coincide con la misura dell'aperto $\overset{\circ}{R}$ si vede che un insieme PJ–misurabile è anche misurabile (nel senso di Lebesgue) e le due misure coincidono.

D'ora in avanti, parlando di insiemi misurabili, intenderemo sempre nel senso di Lebesgue.

Osservazione 2.4 - (Sugli insiemi di misura nulla).

Gli insiemi di misura nulla occupano una particolare posizione nella teoria di Lebesgue, poiché essi non giocano alcun ruolo in molte questioni, come vedremo parlando dell'integrale; perciò essi sono anche detti insiemi *trascurabili*.

Affinché un insieme E sia misurabile con misura nulla, occorre e basta che sia $|E|^* = 0$, cioè che, fissato $\varepsilon > 0$, si possa trovare un aperto $A_\varepsilon \supset E$, tale che sia $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ (si noterà che gli insiemi di misura nulla introdotti in 1.4 rientrano ovviamente in questa classe). Più avanti vedremo vari esempi di insiemi trascurabili; per ora osserviamo che: *ogni sottoinsieme di un insieme trascurabile è pure trascurabile.*

2.2 Proprietà della misura

Definizione 2.5 - *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi contenuti in un intervallo Q di $\mathbb{R}^n$* (in questa definizione l'intervallo potrebbe anche non essere limitato, per esempio concidere con $\mathbb{R}^n$), *cioè $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Q)$.*

Diremo che $\mathcal{F}$ costituisce un' **algebra** *se:*

i) $\emptyset, Q \in \mathcal{F}$

ii) $E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow E \cup F, E \backslash F \in \mathcal{F}$

Da *i*) e *ii*) si ricava che anche $E \cap F = E \backslash (E \backslash F) \in \mathcal{F}$ e il complementare (rispetto a Q) di ogni insieme $E \in \mathcal{F}$ appartiene pure ad $\mathcal{F}$, essendo $C_Q E = Q \backslash E$.

È inoltre chiaro che, se $E_1, E_2, \ldots, E_N \in \mathcal{F}$ anche $\bigcup_{i=1}^{N} E_i$ e $\bigcap_{i=1}^{N} E_i \in \mathcal{F}$; in altre

parole, la famiglia $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alle operazioni fondamentali definite sugli insiemi, ripetute un numero finito di volte.

Per esempio, la coppia $\{\emptyset, Q\}$ forma un'algebra (minima) così come la totalità dei sottoinsiemi di Q, $\mathcal{P}(Q)$, forma un'algebra (massima).

■ **Teorema 2.3** - *Dati due insiemi misurabili E, F (contenuti nell'intervallo Q) anche gli insiemi $E \cup F, E \cap F, E \backslash F, C_Q E$ sono misurabili e risulta:*

$$|E| \leq |F| \qquad se \quad E \subseteq F \tag{2.7}$$

$$|E| + |F| = |E \cup F| + |E \cap F| \,. \tag{2.8}$$

In particolare, se E ed F sono disgiunti, o almeno la loro intersezione è un insieme trascurabile, risulta:

$$|E \cup F| = |E| + |F| \,; \tag{2.9}$$

La dimostrazione del teorema 2.4 sarà presentata nel prossimo paragrafo. Osserviamo che il teorema afferma, tra l'altro, che *la famiglia degli insiemi misurabili costituisce un'algebra.* Si potrebbe dimostrare che la stessa proprietà vale anche per gli insiemi PJ–misurabili; anch'essi formano un'algebra, contenuta nell'algebra degli insiemi misurabili. Il teorema 2.3 non presenta dunque alcun risultato nuovo rispetto a quanto si sarebbe potuto dimostrare già nella sezione 1 per gli insiemi PJ–misurabili. L'importanza decisiva della nuova misura rispetto a quella di Peano–Jordan è costituita dal fatto che la classe degli insiemi misurabili resta *chiusa* rispetto alle operazioni insiemistiche fondamentali (unione e intersezione) ripetute un'*infinità numerabile* di volte.

■ **Teorema 2.4** - *Siano $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ insiemi misurabili (tutti contenuti nell'intervallo Q); sia $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$; si ha:*

i) E *è misurabile*

ii) $|E| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$

iii) $|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \quad se\ E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

iv) $|E| = \lim_{i \to \infty} |E_i| \quad se\ E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$

v) G *è misurabile*

vi) $|G| = \lim_{i \to \infty} |E_i| \quad se\ E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots .$

Le proprietà espresse dalla *ii)* e dalla *iii)* vengono dette rispettivamente, *subadditività* e *additività numerabile* (o *completa)* della misura; si dice anche che *la*

*famiglia degli insiemi misurabili costituisce una σ–**algebra**:* con ciò si intende dire che essa costituisce un'algebra, e, in più, l'unione e l'intersezione di una infinità numerabile di insiemi della famiglia è ancora un insieme dello stesso tipo.

Per comprendere l'importanza delle proprietà sopra elencate (la cui dimostrazione sarà data nel prossimo paragrafo) si osservi che l'intersezione di una infinità numerabile di aperti non è in generale un aperto, e l'unione di una infinità numerabile di chiusi non è in generale un chiuso; tuttavia l'insieme definito da queste operazioni, per complicato che sia, resta misurabile, come lo sono tutti i chiusi e tutti gli aperti.

Notiamo infine un'ultima proprietà della misura (condivisa anche dalla misura di Peano–Jordan), di natura diversa da quelle espresse nei teoremi 2.3 e 2.4, che avremo occasione di richiamare nel seguito.

Proposizione 2.5 - *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ (contenuto nell'intervallo Q);*

i) dato il vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, si consideri l'insieme

$$E_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}\ ,\ \mathbf{x} \in E\}\ ;$$

$E_{\mathbf{h}}$ è misurabile e $|E| = |E_{\mathbf{h}}|$ (invarianza per traslazioni)

ii) data una matrice $\mathbf{A}$, $n \times n$, ortogonale, si consideri l'insieme

$$F = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x} \in E\}$$

F è misurabile e $|E| = |F|$ (invarianza per trasformazioni ortogonali).

La dimostrazione della proposizione è accennata nell'esercizio 5.

Diamo ora alcuni esempi significativi di insiemi misurabili.

Esempi

2.1. L'insieme X dei numeri razionali compresi tra 0 e 1 è misurabile, con misura (unidimensionale) nulla. Ciò può essere provato direttamente: sia $\{r_1, r_2, \ldots\}$ la successione dei numeri razionali compresi tra 0 e 1; fissato $\varepsilon > 0$, copriamo r_1 con un intervallino (aperto) di misura $\varepsilon/2$, r_2 con uno di misura $\varepsilon/2^2$, r_3 con uno di misura $\varepsilon/2^3$ e così via; l'unione di questi intervallini aperti è un aperto A_ε che contiene Q; la misura di A_ε, per la *ii)* del teorema 2.4, è $\leq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$.

Più semplicemente, si può osservare che: un punto ha misura nulla; un'infinità numerabile di punti, per la *iii)* del teorema 2.4, ha pure misura nulla; dunque Q ha misura nulla.

Più in generale, *l'unione di una infinità numerabile di insiemi di misura nulla è un insieme di misura nulla.*

Si ricordi che l'insieme X, essendo $\partial X = [0, 1]$, non è misurabile secondo Peano–Jordan.

2.2. L'insieme Y dei numeri irrazionali compresi tra 0 e 1 è misurabile con misura 1. Infatti risulta $Y = [0,1]\backslash X$; perciò Y è misurabile (Teor. 2.3); inoltre $Y \cup X = [0,1]$ e $Y \cap X = \emptyset$; perciò $|Y| + |X| = 1$, cioè $|Y| = 1$.

2.3. *Insieme di Cantor.* Gli insiemi di misura nulla non sono soltanto quelli con la potenza del numerabile. Questo è un esempio di insieme (della retta) con la potenza del continuo e di misura nulla.

Consideriamo l'intervallo $[0,1]$, dividiamolo in tre parti uguali e togliamo l'intervallo aperto di mezzo, cioè l'intervallo $(1/3, 2/3)$.

Ora suddividiamo ciascuno dei rimanenti due intervalli $[0,2/3]$ e $[2/3,1]$ in tre parti uguali e ancora togliamo gli intervalli aperti di mezzo, cioè $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$. Procediamo allo stesso modo indefinitamente. I primi tre passi di questa costruzione sono illustrati in figura 5.22.

Se indichiamo con C_k l'unione degli intervalli rimasti al k–esimo passo, definiamo *insieme di Cantor* l'insieme

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

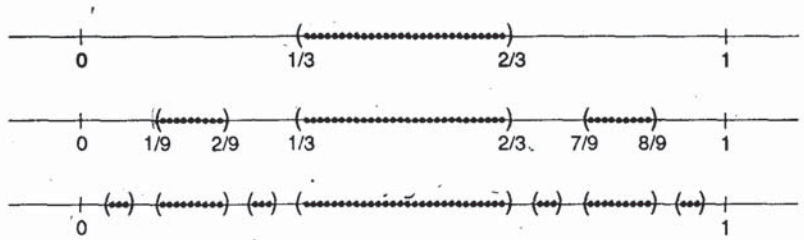


Fig. 5.22

Poiché ogni C_k è chiuso, C è chiuso. Ogni C_k consiste di 2^k intervalli chiusi e disgiunti, ognuno di lunghezza 3^{-k}. Poiché $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, abbiamo, per la *vi*) del teorema 2.4,

$$|C| = \lim_{k\to\infty} |C_k| = \lim_{k\to\infty} 2^k \cdot 3^{-k} = 0 .$$

Nell'esercizio 7 si proverà che C ha la potenza del continuo.

C è misurabile anche secondo Peano-Jordan?

2.4. Siano X_1, X_2, X_3 gli insiemi dei punti del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ rispettivamente con ascissa razionale, con ordinata razionale, con entrambe le coordinate razionali.

Poiché tutti e tre questi insiemi hanno la potenza del numerabile, essi hanno misura (bidimensionale) nulla.

La classe degli insiemi misurabili è così vasta che è lecito chiedersi se esistano insiemi non misurabili. La risposta è affermativa; ma va detto che, per la costruzione di un esempio di insieme non misurabile si fa uso sostanziale dell'assioma di Zermelo (v. App. al Cap. 1, Vol. 1); il che significa che, in nessun caso, possiamo assegnare una legge esplicita per la costruzione di detto insieme, ma possiamo soltanto affermarne l'esistenza.

Nell'esercizio 8 è accennata la costruzione di un insieme non misurabile.

2.3 Dimostrazione delle proprietà della misura

Dimostrazione del teorema 2.3 – Mostriamo anzitutto che $E\backslash F$ è misurabile. Fissato $\varepsilon > 0$, siano A_1, A_2 due aperti, C_1, C_2 due chiusi tali che

$$C_1 \subseteq E \subseteq A_1 \ , \ |A_1\backslash C_1| < \varepsilon/2$$

$$C_2 \subseteq F \subseteq A_2 \ , \ |A_2\backslash C_2| < \varepsilon/2 .$$

Posto $A = A_1\backslash C_2$ e $C = C_1\backslash A_2$, A è un aperto e C è un chiuso tali che

$$C \subseteq E\backslash F \subseteq A .$$

Mostriamo che $|A\backslash C| < \varepsilon$. Infatti $A\backslash C$ è un aperto e

$$A - C \subseteq (A_1\backslash C_1) \cup (A_2\backslash C_2)$$

e perciò

$$|A\backslash C| \le |A_1\backslash C_1| + |A_2\backslash C_2| < \varepsilon .$$

Ciò prova che $E\backslash F$ è misurabile.

Segue allora immediatamente che sono misurabili anche gli insiemi $C_Q E = Q\backslash E$, e $E \cap F = E\backslash(E\backslash F)$.

Mostriamo che $E \cup F$ è misurabile; basta provare l'affermazione nel caso che E ed F siano disgiunti, perché, diversamente, si scrive

$$E \cup F = (E \cap F) \cup (E\backslash F) \cup (F\backslash E) \tag{2.10}$$

e gli insiemi a secondo membro della (2.10) sono a due a due disgiunti.

Supponiamo dunque che E ed F siano disgiunti; siano A_1, A_2, C_1, C_2 scelti come in precedenza. Posto ora $A = A_1 \cup A_2$ e $C = C_1 \cup C_2$ risulta

$$A \supseteq E \cup F \supseteq C$$

Poiché, per la *iii*) della proposizione 2.1, $|C| = |C_1| + |C_2|$, abbiamo

$$|A\backslash C| = |A| - |C| \le |A_1| + |A_2| - |C_1| - |C_2| = |A_1\backslash C_1| + |A_2\backslash C_2| < \varepsilon$$

Perciò $E \cup F$ è misurabile.

Proviamo ora la (2.9). Essendo

$$|C_1| \le |E| \le |A_1| < |C_1| + \varepsilon/2$$

$$|C_2| \le |E| \le |A_2| < |C_2| + \varepsilon/2$$

deduciamo che

$$|C| = |C_1| + |C_2| \le |E| + |F| < |C_1| + |C_2| + \varepsilon = |C| + \varepsilon \ ;$$

ma, essendo anche

$$|C| \le |E \cup F| \le |A| < |C| + \varepsilon \ ,$$

ne consegue

$$\Big| \, |E \cup F| - |E| - |F| \, \Big| < \varepsilon \ ;$$

per l'arbitrarietà di ε, la (2.9) è provata.

Per provare la (2.8) basterà scrivere

$$E = (E \cap F) \cup (E \backslash F) \ , \quad F = (E \cap F) \cup (F \backslash E)$$

e perciò

$$|E| = |E \cap F| + |E \backslash F| \ , \quad |F| = |E \cap F| + |F \backslash E| \ ;$$

essendo anche, per la (2.10)

$$|E \cup F| = |E \cap F| + |E \backslash F| + |F \backslash E| \ ,$$

otteniamo la (2.8) combinando le ultime tre relazioni scritte.

Infine la (2.7) segue dal fatto che, essendo, se $F \supseteq E$, $F = E \cup (F \backslash E)$ con $E \cap (F \backslash E) = \emptyset$, abbiamo

$$|F| = |E| + |F \backslash E| \ge |E|$$

Il teorema 2.3 è completamente dimostrato. □

Alla dimostrazione del teorema 2.4 premettiamo due lemmi.

Lemma 2.6 - *Sia $A_1, A_2, \ldots$ una successione di aperti e sia $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ limitato; allora risulta*

$$|A| \le \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| \tag{2.11}$$

$$|A| = \lim_{i \to \infty} |A_i| \quad \textit{se } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \tag{2.12}$$

Dimostrazione – Essendo A un aperto, A è misurabile. Sia H un plurintervallo contenuto in A; la famiglia di aperti $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ costituisce una copertura di H; poiché H è compatto, si può estrarre da essa una famiglia *finita* $A_1, \ldots, A_p$ di aperti che sia ancora una copertura di H:

$$H \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p \ . \tag{2.13}$$

Avremo allora

$$|H| \le \sum_{i=1}^{p} |A_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| \ ; \tag{2.14}$$

poiché la (2.14) è vera per ogni plurintervallo contenuto in A, è vera la (2.11).

Supponiamo ora che $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$; allora $A_i \subseteq A$ e perciò $|A_i| \le |A|$ per ogni i; d'altra parte la successione $\{|A_i|\}$ è monotona crescente e limitata; perciò ammette limite finito e risulta

$$\lim_{i \to \infty} |A_i| \le |A| \ . \tag{2.15}$$

Ma, se H è un plurintervallo contenuto in A, ragionando come sopra, dalla (2.13) ricaviamo anche che $H \subset A_p$ e perciò $|H| \le |A_p|$ per un certo p. E allora, essendo la successione $\{|A_i|\}$ crescente, risulta che

$$|H| \le \lim_{i \to \infty} |A_i| \ . \tag{2.16}$$

La (2.16) vale per ogni plurintervallo contenuto in A; ne consegue che

$$|A| \le \lim_{i \to \infty} |A_i| \ ;$$

questa disuguaglianza, insieme con la (2.15), prova la (2.12). □

Lemma 2.7 - *Siano $E_1, E_2, \ldots$ insiemi misurabili limitati e sia $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$; allora*

$$|E|^* \le \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \tag{2.17}$$

$$|E|_* \ge \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \quad \text{se } E_i \cap E_j = \emptyset \qquad \forall i \ne j \ . \tag{2.18}$$

Dimostrazione – Fissato $\varepsilon > 0$, sia A_i un aperto tale che

$$A_i \supseteq E_i \quad , \quad |A_i| < |E_i| + \varepsilon 2^{-i} \ .$$

Posto $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A è un aperto che contiene E e perciò (usando la (2.11))

$$|E|^* \le |A| \le \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| < \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε, segue la (2.17).

Per dimostrare la (2.18) basta osservare che, per ogni intero p, risulta $E \supseteq \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ e perciò (*)

$$|E|_* \geq \left|\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |E_i| \; ;$$

da questa, passando al limite per $p \to \infty$, otteniamo la (2.18). □

Dimostrazione del teorema 2.4 – Dimostriamo la *iii*). Per la (2.17) e la (2.18) risulta

$$|E|^* \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \leq |E|_* \, .$$

Ciò significa che E è misurabile e $|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$.

Dimostriamo la *i*). Si ponga

$$F_1 = E_1 \; , \; F_2 = E_2 \backslash E_1, \ldots, F_k = E_k \backslash (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1})$$

Ora, gli F_i sono misurabili e a due a due disgiunti; poiché E è l'unione degli F_i, E è misurabile per la *iii*).

Dimostriamo la *ii*). Sempre per la *iii*), tenuto conto che $F_i \subseteq E_i \;\; \forall i$, e perciò $|F_i| \leq |E_i|$, risulta anche

$$|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |F_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \, .$$

Dimostriamo la *iv*). Per ipotesi $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$; risulta, $\forall i = 2, 3, \ldots$:

$$E_i = E_{i-1} \cup (E_i \backslash E_{i-1})$$

da cui $|E_i| = |E_{i-1}| + |E_i \backslash E_{i-1}|$, cioè $|E_i \backslash E_{i-1}| = |E_i| - |E_{i-1}|$, e perciò, essendo

$$E = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1) \cup \ldots \cup (E_i \backslash E_{i-1}) \cup \ldots$$

(unione di insiemi a due a due disgiunti) abbiamo

$$|E| = |E_1| + (|E_2| - |E_1|) + \ldots + (|E_i| - |E_{i-1}|) + \ldots = \lim_{i \to \infty} |E_i| \, .$$

Dimostriamo la *v*). Siccome gli E_i sono misurabili, tali sono anche i CE_i. Inoltre $CG = C(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} CE_i$ e perciò CG è misurabile, e dunque anche G lo è (l'operazione C è fatta rispetto all'intervallo A che contiene tutti gli E_i).

(*) Se E è un insieme limitato (non necessariamente misurabile) e $B \subseteq E$ (B misurabile), allora $|E|_* \geq |B|$; infatti, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un chiuso C, $C \subseteq B$, $|C| > |B| - \varepsilon$, e perciò $|E|_* \geq |C| > |B| - \varepsilon$, da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue l'asserto.

Dimostriamo la *vi*). Con l'ipotesi $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ possiamo scrivere

$$E_1 = G \cup (E_1 \backslash E_2) \cup \ldots \cup (E_i \backslash E_{i+1}) \cup \ldots$$

(unione di insiemi misurabili a due a due disgiunti) e dunque abbiamo

$$|E_1| = |G| + (|E_1| - |E_2|) + \ldots + (|E_i| - |E_{i+1}|) + \ldots = |G| + |E_1| - \lim_{i \to \infty} |E_i| \, ,$$

da cui segue la *vi*).

Il teorema è completamente dimostrato. □

2.4 Insiemi non limitati

Definiamo una misura anche per insiemi non limitati di $\mathbb{R}^n$. È naturale aspettarsi che, in tal caso, un insieme possa avere misura infinita.

Definizione 2.6 - *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\{Q_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la successione degli intervalli (ipercubi): $|x_i| \leq k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Diremo allora che E è misurabile se $E \cap Q_k$ è misurabile $\forall k$; porremo

$$|E| := \lim_{k \to \infty} |E \cap Q_k| \, .$$

Si osservi che il limite indicato esiste poiché la successione $\{|E \cap Q_k|\}$ è crescente; tale limite può essere finito o $+\infty$.

Indicheremo con $\mathcal{M}$ la classe degli insiemi misurabili.

Osservazione 2.5 - Perché la definizione abbia senso, bisogna mostrare che la misurabilità di E (e la sua misura) dipendono soltanto dall'insieme E stesso, e non dagli insiemi Q_k utilizzati nella definizione.

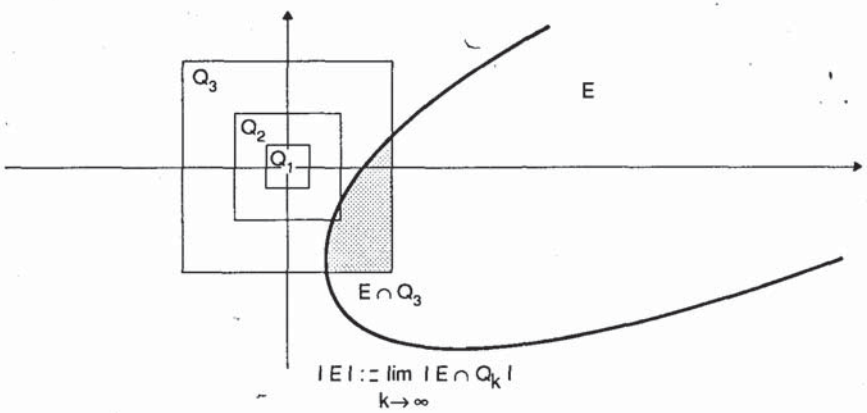


Fig. 5.23

Infatti, sia $\mathcal{B}$ la totalità degli insiemi misurabili e limitati di $\mathbb{R}^n$. Preso un qualsiasi elemento $B \in \mathcal{B}$, esiste un $Q_{\overline{k}}$ che lo contiene; perciò

$$E \cap B = E \cap (Q_{\overline{k}} \cap B) = (E \cap Q_{\overline{k}}) \cap B \ ;$$

dunque la misurabilità di tutti gli insiemi $E \cap Q_k$ implica la misurabilità di $E \cap B$, qualunque sia B; e viceversa. Con analogo ragionamento si vede anche che:

$$|E| = \lim_{k \to \infty} |E \cap Q_k| = \sup_k |E \cap Q_k| = \sup_{B \in \mathcal{B}} |E \cap B| \ .$$

È evidente, da quanto detto, che, nella definizione 2.6, in luogo degli intervalli Q_k si possono considerare intorni sferici dell'origine di raggio k o altre convenienti figure geometriche.

Esempi

2.5. Tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ è misurabile con misura (n–dimensionale) $+\infty$. Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k < n$ è misurabile con misura (n–dimensionale) nulla.

2.6. L'insieme costituito dalla totalità dei punti di $\mathbb{R}^n$ con almeno una coordinata razionale è di misura nulla (ricorda l'Esempio 2.4). In particolare l'insieme dei punti della retta aventi ascissa razionale è un insieme trascurabile.

Le affermazioni contenute nei teoremi 2.3 e 2.4 (tranne la vi)) e nella proposizione 2.5 si trasportano inalterate al caso generale di insiemi non necessariamente limitati. La tecnica dimostrativa è standard e non presenta difficoltà. Come esempio, estendiamo al caso generale la proprietà iii) del teorema 2.4.

Sia Q_k la successione di intervalli: $|x_i| \leq k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e poniamo $S_1 = Q_1$, $S_k = Q_k \backslash Q_{k-1}$ per $k \geq 2$. Gli insiemi $E_{j,k} = E_j \cap S_k$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ sono limitati, disgiunti, e misurabili; inoltre $E_j = \bigcup_k E_{j,k}$; perciò abbiamo

$$\left|\bigcup_j E_j\right| = \left|\bigcup_{j,k} E_{j,k}\right| = \sum_{j,k} |E_{j,k}| = \sum_j \sum_k |E_{j,k}| = \sum_j |E_j| \qquad \square$$

Abbiamo allora il seguente

■ **Teorema 2.8** - *Siano $E_1, E_2, \ldots$ insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$; sia $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$; allora anche E e G sono misurabili e risulta*

$$|E| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \tag{2.19}$$

$$|E| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| \qquad se\ E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \tag{2.20}$$

$$|E| = \lim_{i \to \infty} |E_i| \qquad se\ E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \tag{2.21}$$

Osservazione 2.6 - Le (2.19), (2.20), (2.21) sono significative quando gli insiemi E_i, eventualmente illimitati, hanno misura finita; esse infatti diventano banali se, per almeno un i, risulta $|E_i| = +\infty$.

La vi) del teorema 2.4 non si trasporta al caso di insiemi illimitati; infatti, sia E_i il complementare (in $\mathbb{R}^n$) della palla di centro $\mathbf{0}$ e raggio i; allora $|E_i| = +\infty$ per ogni i, $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $\bigcap_i E_i = \emptyset$; perciò risulta $\lim_{i \to \infty} |E_i| = +\infty$ mentre $\left|\bigcap_i E_i\right| = 0$.

*2.5 Misura e dimensione. Insiemi frattali

Riprendiamo in esame l'insieme di Cantor C dell'esempio 2.3.

Si tratta di un insieme compatto, coincidente con il suo derivato C', ovvero tutti i punti di C sono di accumulazione per C stesso; C è dunque un insieme *perfetto*. Come abbiamo visto, C ha la potenza del continuo, tuttavia, per la misura di Lebesgue, esso è trascurabile, essendo $|C| = 0$. Tutto ciò può sembrare piuttosto sorprendente. Si potrebbe pensare che la misura di Lebesgue non sia abbastanza raffinata da tener conto delle caratteristiche di C.

L'insieme C è un esempio, forse il più semplice, di insieme *frattale* (dal latino: *fractus* = rotto, spezzato), termine coniato da B. Mandelbrot negli anni 70 per indicare insiemi che non rientravano negli schemi classici della Geometria e dell'Analisi.

Un altro esempio di frattale, questa volta nel piano, è la curva di Von Koch. Essa è costruita nel modo seguente: si parte dal segmento $E_0 = [0, 1]$; sia E_1 la spezzata che si ottiene rimuovendo il terzo medio di E_0, $(1/3,\ 2/3)$, e rimpiazzandolo con due segmenti di lunghezza $1/3$ in modo che questi ultimi formino con il terzo medio rimosso un triangolo equilatero. Si costruisce E_2 applicando la stessa procedura ad ognuno dei quattro segmenti di E_1; in generale, si costruisce E_k applicando ancora la medesima procedura, ai 4^{k-1} segmenti di E_{k-1}. Quando $k \to +\infty$ la successione di poligonali E_k definisce un insieme limite E, detto *curva di Von Koch* (fig. 5.24).

Non esiste oggi una soddisfacente definizione di frattale. L'atteggiamento corrente è quello di considerare frattale un insieme F che abbia proprietà *simili* alle quattro elencate qui di seguito:

i) *Autosimilarità*: F è unione di un numero di parti che, ingrandite di un certo fattore, riproducono tutto F; in altri termini F è unione di copie di sè stesso a scale differenti.

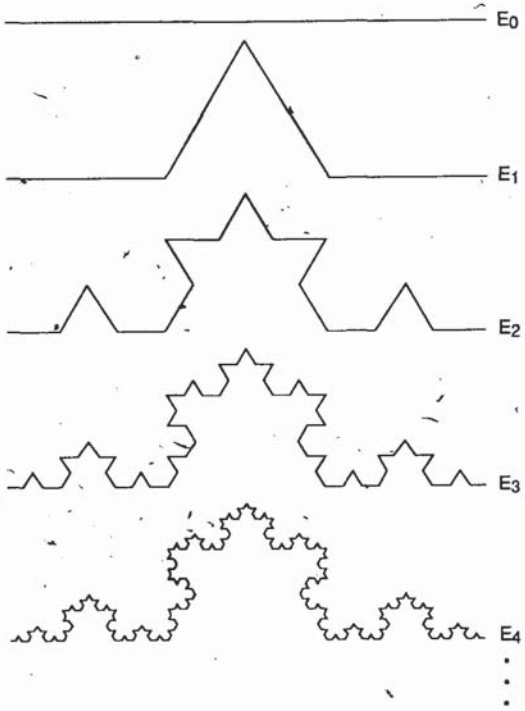


Fig. 5.24 Costruzione della curva di Von Koch.

Per esempio l'insieme di Cantor è l'unione di 4 copie di sè stesso scalate di un fattore $1/9$ (o di 16 copie scalate di un fattore $1/27$ etc.).

La curva di Von Koch è l'unione di 4 copie di se stessa scalate di un fattore $1/3$.

ii) *Struttura fine*: F rivela dettagli ad ogni ingrandimento. Per esempio, più si ingrandisce la figura dell'insieme di Cantor, e un maggior numero di spazi vuoti si rivelano all'osservatore.

iii) *Irregolarità*: F non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche.

La quarta proprietà fa intervenire il concetto di *dimensione* ed è forse la più importante e distintiva.

Il concetto di dimensione è stato introdotto a proposito degli spazi vettoriali euclidei. Sappiamo che lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n , cioè ogni sua *base* è composta precisamente di n vettori. Per la considerazione degli insiemi frattali è conveniente estendere il concetto di dimensione agli insiemi contenuti negli spazi euclidei.

Siano dunque $A, B, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ insiemi di $\mathbb{R}^n$; indichiamo con $\dim(A)$ la dimensione dell'insieme A.

Una buona definizione di dimensione dovrebbe soddisfare, ragionevolmente, alle seguenti proprietà:

a) $A = \mathbb{R}^k \Rightarrow \dim(A) = k$; k intero, $0 < k \leq n$

b) $A \subseteq B \Rightarrow \dim(A) \leq \dim(B)$ (*monotonia*)

c) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow \dim(A) = n$

d) A numerabile $\Rightarrow \dim(A) = 0$

e) *Invarianza* per traslazioni, rotazioni, similarità

f) $\dim(A \cup B) = \max\{\dim(A), \dim(B)\}$ (*stabilità*).

Invece della f) si può richiedere la *σ–stabilità*:

f') $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \dim(A) = \max_j\{\dim(A_j)\}$.

Un esempio di estensione, abbastanza naturale, è quello di *dimensione topologica* che si può definire nel modo ricorsivo seguente:

La *dimensione topologica* di un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è sempre un intero naturale. È 0 se F è totalmente sconnesso (*), è 1 se ogni punto ha un intorno (in F) arbitrariamente piccolo con frontiera di dimensione 0, è 2 se ogni punto ha un intorno (in F) arbitrariamente piccolo con frontiera di dimensione 1, e così via.

Evidentemente si ha, per l'insieme C di Cantor e la curva E di Von Koch:

$$\dim_{top}(C) = 0 \ , \ \dim_{top}(E) = 1 \ .$$

Anche questo tipo di dimensione non distingue tra C e, ad esempio, l'insieme dei razionali in $[0, 1]$.

Cambiamo punto di vista: sia $F \subset \mathbb{R}^n$; se operiamo una dilatazione su F di rapporto $\delta > 0$, otteniamo l'insieme $\delta F := \{\delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in F\}$.

La formula $|\delta F| = \delta^n |F|$ (v. Esercizio 2.6) indica un legame tra la dimensione dello spazio e la misura di Lebesgue. Se ora $|F| > 0$ e F è unione di m copie (disgiunte) di sè stesso scalate di un fattore $\delta < 1$, avremo $|F| = \sum_{j=1}^{m} \delta^n |F| = m\delta^n |F|$, cioè $1 = m\delta^n$ ed infine

$$n = -\frac{\log m}{\log \delta} \ .$$

Si noti come in quest'ultima formula la misura di Lebesgue non compaia: la dimensione dipende da m e da δ soltanto.

(*) Un insieme è totalmente sconnesso se non possiede sottoinsiemi connessi all'infuori di quelli costituiti da un solo punto.

Si può allora ragionevolemente definire, per insiemi che hanno la proprietà di autosimilarità, una dimensione nel modo seguente.

Definizione 2.7 - *Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è unione di $m(>1)$ copie (disgiunte) di sè stesso scalate di un fattore $\delta < 1$, si chiama dimensione di autosimilarità di F il numero reale non negativo.*

$$\dim_{\text{sim}}(F) := -\frac{\log m}{\log \delta} . \tag{2.22}$$

Abbiamo, per l'insieme di Cantor C e la curva di Von Koch E:

$$\dim_{\text{sim}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} , \quad \dim_{\text{sim}}(E) = \frac{\log 4}{\log 3} .$$

Si noti come

$$0 < \frac{\log 2}{\log 3} < 1 \quad \text{e} \quad 1 < \frac{\log 4}{\log 3} < 2 .$$

La quarta proprietà si può ora enunciare nella forma seguente:

iv) dimensione di autosimilarità > dimensione topologica.

Nella *iv)* possono trovar posto dimensioni frattali diverse da quella di autosimilarità; infatti questa si applica ad una classe troppo ristretta di insiemi. Molti dei frattali che si incontrano nelle applicazioni non sono rigorosamente autosimili. Inoltre rimane irrisolto il problema di "misurare" un frattale.

Da un punto di vista teorico il tipo di "dimensione frattale" più significativo è forse quello dovuto ad Hausdorff, sviluppatosi indipendentemente e molto tempo prima della teoria dei frattali. La dimensione di Hausdorff è basata sulla definizione di *misura* di Hausdorff, che risolve anche il problema di assegnare un "contenuto" ad un frattale. Ne diamo qui un rapido cenno, limitandoci a sottoinsiemi del piano.

Per $F \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\delta > 0$ chiamiamo *δ–copertura* di F una famiglia $\{C_j\}_{j\geq 1}$ di cerchi di diametro $d_j \leq \delta$.

Poniamo, per s reale non negativo:

$$H^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} d_j^s : \{C_j\} \ \ \delta\text{–copertura di } F \right\} . \tag{2.23}$$

H^s_δ rappresenta una sorta di "misurazione alla scala δ".

Quando $\delta \to 0$ le coperture $\{C_j\}$ ammissibili diminuiscono; pertanto H^s_δ cresce ed ha limite per $\delta \to 0_+$.

Definizione 2.8 - *Si chiama misura (esterna) s–dimensionale di Hausdorff dell'insieme F, il numero reale non negativo:*

$$H^s(F) := \lim_{\delta \to 0_+} H^s_\delta(F) . \tag{2.24}$$

H^s è ben definita per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e risulta *monotona* ($E \subseteq F \Rightarrow H^s(E) \leq H^s(F)$) e *numerabilmente subadditiva* ($E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \Rightarrow H^s(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} H^s(E_j)$). Inoltre $H^s(\emptyset) = 0$.

Si può mostrare che: $H^0(F)$ = numero dei punti di F ($= +\infty$ se F è infinito), $H^1(F) = |F|_1$, $H^2(F) = \frac{4}{\pi}|F|_2$. Queste proprietà chiariscono il legame tra la misura di Hausdorff e quella di Lebesgue. Il punto chiave è espresso dalla seguente

Proposizione 2.9 - *Per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^2$ esiste $\overline{s}$ tale che*

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & se\ s < \overline{s} \\ 0 & se\ s > \overline{s} . \end{cases} \tag{2.25}$$

$H^{\overline{s}}(F)$ può essere ∞ o un numero reale non negativo.

Definizione 2.9 - *Il valore critico $\overline{s}$ soddisfacente la* (2.25) *si chiama dimensione di Hausdorff di F e si indica con* $\dim_H(F)$.

La dimensione di Hausdorff verifica tutte le proprietà a) – f').

Una volta determinata $\dim_H = \overline{s}$, $H^{\overline{s}}(F)$ assegna il "contenuto" appropriato ad F.

Se F è autosimile allora $\dim_H(F) = \dim_{\text{sim}}(F)$.

Per l'insieme di Cantor C si ha dunque $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$; si può mostrare poi, che $H^{\log 2/\log 3}(C) = 1$.

Altre definizioni di dimensione, non meno significative di quelle qui presentate, sono state introdotte per un migliore adattamento della teoria all'ambito applicativo.

La forte interazione con scienze sperimentali quali ad esempio la meteorologia, la fluidodinamica, l'ecologia, la biologia, è infatti una caratteristica della teoria dei frattali che ne sta determinando un rapido sviluppo, anche se per ora piuttosto di natura descrittiva.

2.6 Funzioni misurabili

Al concetto di insieme misurabile, sviluppato nei precedenti paragrafi, viene associato, in maniera naturale, il concetto di funzione misurabile; insiemi misurabili e funzioni misurabili sono i due ingredienti con i quali sarà confezionato l'integrale di Lebesgue.

Sarà conveniente, qui e nel seguito di questo capitolo, considerare funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^*$, cioè permettere alle funzioni di assumere i valori $+\infty$ e $-\infty$; quando vorremo escludere tale circostanza, diremo che la funzione è *finita*.

Definizione 2.10 - *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile; una funzione $f : E \to \mathbb{R}^*$ si dice misurabile se, $\forall t \in \mathbb{R}$, l'insieme*

$$\Omega_t(f, E) := \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) > t\}$$

è misurabile.

Si osservi che, prolungando la funzione f da E a tutto $\mathbb{R}^n$ (ponendo, per esempio, $f = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus E$) $f : E \to \mathbb{R}^*$ è misurabile se e solo se il suo prolungamento è misurabile; possiamo perciò riferirci a funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n$. In tal caso scriveremo semplicemente $\Omega_t(f)$ in luogo di $\Omega_t(f, \mathbb{R}^n)$ o anche semplicemente Ω_t, se è chiaro dal contesto quale sia la funzione f e $\{f > t\}$ (e simili) in luogo di $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}$.

Esempi

2.7. Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua è misurabile. Ciò segue dal fatto che, $\forall t \in \mathbb{R}$, l'insieme Ω_t è un aperto, quindi misurabile: infatti, se $f(\mathbf{x}^0) > t$, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno di $\mathbf{x}^0$ in cui risulta ancora $f(\mathbf{x}) > t$ e perciò $\mathbf{x}^0$ è punto interno di Ω_t.

2.8. La funzione di Dirichlet (da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) è misurabile; infatti, se $t < 0$, $\Omega_t = \mathbb{R}$, se $0 \le t < 1$, $\Omega_t = Q$ (insieme dei numeri razionali), se $t \ge 1$, $\Omega_t = \emptyset$. Si noti che questa funzione è discontinua in *ogni* punto di $\mathbb{R}$.

La misurabilità di Ω_t, $\forall t \in \mathbb{R}$, è equivalente alla misurabilità di vari altri insiemi, precisamente, posto

$$\Omega_t^1 := \{f \le t\}$$

$$\Omega_t^2 := \{f < t\}$$

$$\Omega_t^3 := \{f \ge t\}$$

abbiamo la seguente

Proposizione 2.10 - *Le affermazioni*

(i): Ω_t^i è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$

sono tra loro equivalenti e sono equivalenti all'affermazione

(0): Ω_t è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione –

$(0) \Rightarrow (1)$ $\quad \Omega_t^1 = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t$

$(1) \Rightarrow (2)$ $\quad \Omega_t^2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{t-1/k}^1$

$(2) \Rightarrow (3)$ $\quad \Omega_t^3 = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t^2$

$(3) \Rightarrow (0)$ $\quad \Omega_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{t+1/k}^3$ $\quad \square$

Inoltre, se f è misurabile, risulterà anche misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\Omega_t^4 := \{f = t\} = \Omega_t^1 \setminus \Omega_t^2$, cioè gli *insiemi di livello* di una funzione misurabile sono misurabili.

Gli enunciati contenuti nella proposizione seguente mostrano che, eseguendo sulle funzioni misurabili le operazioni elementari, otteniamo ancora funzioni misurabili.

Indichiamo con $\mathcal{M}$ la classe delle funzioni misurabili.

Proposizione 2.11 - *Siano $f, g \in \mathcal{M}$, $c \in \mathbb{R}$. Abbiamo*

i) $cf, f + c \in \mathcal{M}$

ii) l'insieme $\{f > g\}$ è misurabile

iii) se f e g sono finite (*), anche $f + g$, fg, f/g (se $g \neq 0$) $\in \mathcal{M}$

iv) $f_+, f_-, |f| \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione –

i) Viene lasciata per esercizio.

ii) Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})$; esiste allora un numero razionale r compreso tra $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$. Se $\{r_k\}$ è la successione dei numeri razionali, abbiamo

$$\{f > g\} = \bigcup_k \{f > r_k > g\} = \bigcup_k \{f > r_k\} \cap \{g < r_k\}$$

iii) Proviamo che $f + g \in \mathcal{M}$. Infatti $t - g \in \mathcal{M}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (per la *i)*) e l'insieme $\{f > t - g\}$, che coincide con l'insieme $\{f + g > t\}$, è misurabile per la *ii)*.

Proviamo che $f^2 \in \mathcal{M}$. Infatti per $t \ge 0$, si ha: $\{f^2 > t\} = \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\}$, mentre, per $t < 0$, $\{f^2 > t\} = \mathbb{R}^n$.

Allora $fg \in \mathcal{M}$ poiché $fg = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$.

(*) Poiché consentiamo alle funzioni f, g di assumere anche i valori $+\infty$ e $-\infty$, può accadere che le espressioni $f + g$, fg, f/g non siano ben definite (possono intervenire le forme di indecisione $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \ldots$). Perciò assumiamo qui che le funzioni siano *finite*. Si potrebbe in alternativa, introdurre delle convenzioni apposite, tendenti ad eliminare le forme di indecisione.

Proviamo che $1/g \in \mathcal{M}$ $(g \neq 0)$. Infatti, per $t > 0$, si ha: $\{1/g < t\} = \{g > 1/t\} \cup \{g < 0\}$; se $t < 0$, ...
Allora $f/g \in \mathcal{M}$ $(g \neq 0)$.

iv) $\{|f| > t\}$ concide con $\mathbf{R}^n$ se $t < 0$ mentre coincide con $\{f > t\} \cup \{f < -t\}$ se $t \geq 0$. Perciò $|f|$ è misurabile e, di conseguenza, lo sono anche f_+, f_-. □

Anche la seguente proposizione è importante.

Proposizione 2.12 - *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili. Allora le funzioni*

i) $\sup_k f_k(\mathbf{x})$, $\inf_k f_k(\mathbf{x})$ *sono misurabili;*

ii) $\lim_{k\to\infty} \sup f_k(\mathbf{x})$, $\lim_{k\to\infty} \inf f_k(\mathbf{x})$ *sono misurabili.*

iii) In particolare, se $\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x})$ *esiste, la funzione limite è misurabile.*

L'affermazione *iii)* si enuncia dicendo che *la classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto all'operazione di passaggio al limite (puntuale)*. Possiamo confrontare questa proprietà con una analoga valida per l'insieme delle funzioni continue: esso è chiuso rispetto all'operazione di limite uniforme (non lo è, in generale, se il limite è puntuale).

Dimostrazione –

i) $\{\sup_k f_k > t\} = \bigcup_k \{f_k > t\}$; $\qquad \inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$

ii) $\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_j \{\sup_{k\geq j} f_k\}$; $\qquad \liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_j \{\inf_{k\geq j} f_k\}$. □

A proposito degli insiemi di misura nulla, è invalso nell'uso un modo di dire assai comune e molto comodo: *si dice che una proprietà è valida quasi ovunque* (abbreviato: q.o.) *in E, se essa vale in tutti i punti di E ad eccezione di un insieme trascurabile di E*. Per esempio, dire che $f = 0$ q.o. in E significa che $f(\mathbf{x}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in E \backslash Z$, con $Z \subset E$, $|Z| = 0$; analogo significato per la frase: la successione $\{f_k\}$ converge q.o. in E, etc...

***Esempio* 2.9** - La funzione di Dirichlet è q.o. nulla. La successione $f_k(x) = (\sin x)^k$ converge q.o. a zero.

Proposizione 2.13 - *Se f è misurabile e $g = f$ q.o., anche g è misurabile.*

Dimostrazione – Sia $Z = \{f \neq g\}$, $|Z| = 0$; allora
$\{g > t\} \cup Z = \{f > t\} \cup Z$;
perciò $\{g > t\} \cup Z$ è misurabile e dunque anche $\{g > t\}$ è misurabile poiché differisce dal precedente insieme per un insieme di misura nulla. Risulta anche

$$|\{g > t\}| = |\{g > t\} \cup Z| = |\{f > t\} \cup Z| = |\{f > t\}| \ . \ \square$$

Il precedente risultato suggerisce, in maniera naturale, di estendere la definizione 2.10 in modo da includere funzioni che sono definite q.o. in E; basterà dire che una tale funzione è misurabile in E se è misurabile un suo prolungamento (ottenuto, per esempio, ponendo uguale a zero la funzione nei punti di E in cui non è definita). Pertanto, quando parleremo di funzioni f misurabili su E, sarà inteso che f è definita q.o. sull'insieme (misurabile) $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Le funzioni $f : E \to \mathbb{R}^*$ misurabili possono essere caratterizzate anche in termini di un certo insieme detto l'*insieme delle ordinate* di f: se $f \geq 0$ si chiama così il sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^{n+1}$ così definito:

$$\Gamma(f, E) := \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in E \ , \ 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\} \ . \tag{2.26}$$

Spesso scriveremo $\Gamma(f)$ o semplicemente Γ in luogo di $\Gamma(f, E)$, quando l'insieme E o la stessa f siano chiari dal contesto.

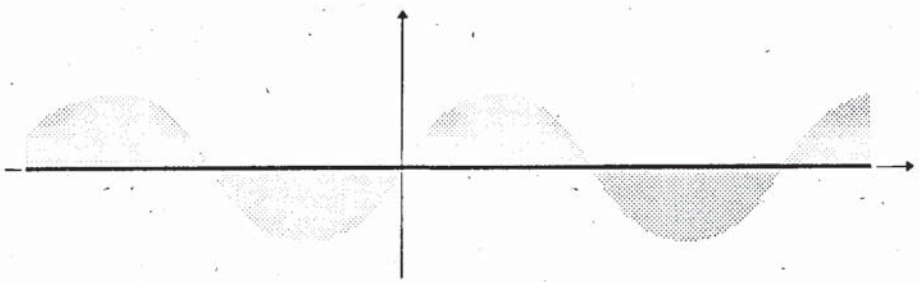


Fig. 5.25 Insieme delle ordinate della funzione $x \mapsto \sin x$.

***Esempio* 2.10** - L'insieme Γ delle ordinate della funzione di Dirichlet definita su $[0, 1]$ è costituito dai punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ aventi ascissa razionale e dal segmento $[0, 1]$ dell'asse delle x; risulta perciò (Esempio 2.4) $|\Gamma| = 0$.

Se $f \leq 0$ la definizione (2.26) va modificata ponendo $f(\mathbf{x}) \leq y \leq 0$. Se f è di segno qualsiasi, consideriamo i due insiemi

$$\Gamma_+ = \Gamma(f_+, E) \ , \ \Gamma_- = \Gamma(-f_-, E) \ .$$

Chiameremo insieme delle ordinate di f l'insieme

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

La seguente proposizione, che enunciamo senza dimostrazione, sarà utile nella sezione 3, per l'interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue.

Proposizione 2.14 -

f misurabile $\Leftrightarrow$ Γ misurabile

Nella (2.26) si sarebbe anche potuto scrivere .. $0 \leq y < f(\mathbf{x})$, dal momento che è indifferente, dal punto di vista della misura, includere o non il grafico di f nell'insieme delle ordinate; si dimostra infatti che, *se f è misurabile, il suo grafico è misurabile ed ha misura ($(n+1)$–dimensionale) nulla*; questa affermazione va confrontata con la proposizione 1.7 (v. anche *Osservazione 1.4*).

La classe delle funzioni misurabili è vastissima; ci si può chiedere addirittura se esistano funzioni non misurabili.

Si osserva subito che la funzione caratteristica $\mathbf{1}_E$ di un insieme E non misurabile è non misurabile; cioè, l'esistenza di un insieme non misurabile implica l'esistenza di una funzione non misurabile; anche il viceversa è vero, come segue subito dalla definizione di misurabilità. Perciò, dare un esempio di funzione non misurabile è equivalente a dare un esempio di insieme non misurabile; ciò significa che *tutte* le funzioni che capiterà di incontrare nelle applicazioni sono misurabili.

Esercizi

1. Sia R un plurintervallo che, in relazione a due diverse suddivisioni $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ dell'intervallo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, si può rappresentare in due modi diversi: $R = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ e $R = \bigcup_{i=1}^{N'} Q'_i$. Mostrare che la misura di R non dipende dalla suddivisione considerata.
[Si prenda la suddivisione $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, più fine di entrambe...]

2. Provare le proprietà della misura dei plurintervalli utilizzate nel testo:

i) $|R_1| \leq |R_2|$ se $R_1 \subseteq R_2$

ii) $|R_1 \cup R_2| \leq |R_1| + |R_2|$; vale il segno $=$ se e solo se ...

iii) $|\overset{\circ}{R}| = |R|$

[Per la *iii)* si osservi che, $\forall \varepsilon > 0$, esiste un plurintervallo $H_\varepsilon \subset \overset{\circ}{R}$ tale che

$$|R| - \varepsilon \lesssim |H_\varepsilon| \leq |\overset{\circ}{R}| \leq |R| \ ].$$

3. Dimostrare la *i)* della Proposizione 2.1.
[Se B_2 è un chiuso, ogni plurintervallo K che ricopre B_2 ricopre anche B_1, perciò $|B_2| = \inf\{|K|\} \geq \ldots$]

4. Siano A_1 e A_2 due aperti (contenuti nell'intervallo Q) e H un plurintervallo contenuto in $A_1 \cup A_2$. Mostrare che, $\forall \mathbf{x} \in H$, esiste un intorno $B(\mathbf{x}, r)$ tutto contenuto in A_1 oppure in A_2.
[Sia $d_1(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus A_1)$, $d_2(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus A_2)$; la funzione $d_1(\mathbf{x}) + d_2(\mathbf{x})$ è continua e positiva sul compatto H, perciò avrà un minimo positivo; sia $2r$ tale minimo ...]

5.* Dimostrare la Proposizione 2.5.
[La procedura standard consiste nel provare l'asserto per gli intervalli, poi per i plurintervalli, etc. ...]

6.* Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, $t > 0$; posto $tE = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}/t \in E\}$ si dimostri che tE è misurabile e $|tE| = t^n |E|$.

7.* Ogni numero $x \in [0,1]$, rappresentato in base 3, si può scrivere nella forma: $x = 0.a_1 a_2 a_3, \ldots$ dove $a_i = 0$ oppure 1 oppure 2. Tale rappresentazione non è unica: per esempio $1/3 = 0.1\overline{0}$ ma anche $1/3 = 0.0\overline{2}$; in simili casi decidiamo di scegliere la rappresentazione che contiene meno numeri 1; in tal modo, ogni numero è rappresentato in modo univoco.

Dimostrare che x appartiene all'insieme di Cantor se e solo se la sua rappresentazione (in base 3) non contiene la cifra 1. Si osservi ora che le rappresentazioni composte con le cifre 0 e 2 sono tante quante quelle composte con le cifre 0 e 1 e di queste ultime ve ne è una infinità continua (cioè, con la potenza del continuo) poiché ogni numero dell'intervallo $[0,1]$ si può rappresentare con una tale successione usando il sistema binario. In conclusione, i punti dell'insieme di Cantor sono una infinità continua.

8. ***Un insieme non misurabile***

Questo esempio è dovuto a Vitali. Sui punti dell'intervallo $[0,1]$ poniamo la seguente relazione di equivalenza: $x \approx y$ se $x - y$ è un numero razionale. Sia A l'insieme delle classi (ovviamente disgiunte) di questa equivalenza (cioè l'insieme quoziente di $[0,1]$ rispetto all'equivalenza introdotta). Sia ora $E \subset [0,1]$ un insieme ottenuto scegliendo esattamente un punto (un rappresentante) da ciascuna delle classi di A. (Per affermare l'esistenza di un tale insieme facciamo ricorso all'assioma della scelta). Mostriamo, ragionando per assurdo, che E non è misurabile. Sia E misurabile e, per ogni numero razionale r, $0 \leq r < 1$, poniamo:

$$F_r = E \cap [r,1] \ , \ G_r = E \cap [0,r) \ , \ F_r \cup G_r = E \ , \ \text{cosicché} \ F_r \cap G_r = \emptyset$$

e

$$H_r = \tau_r G_{1-r} \cup \tau_{r-1} F_{1-r}$$

dove $\tau_h T$ è l'insieme T traslato di h verso destra: $\tau_h T = \{x \in \mathbb{R} : x - h \in T\}$.

Si osservi ora che:

H_r è misurabile (Proposizione 2.5) e $|H_r| = |E|$

$H_r \cap H_s = \emptyset$ se $r \neq s$ razionali, perché altrimenti un punto x apparterrebbe a due classi distinte di A;

$[0,1] = \bigcup_r H_r$, perché ogni $x \in [0,1]$ differisce per un numero razionale da un punto di E.

Allora $\sum_r |H_r| = |[0,1]| = 1$ e anche, essendo $|H_r| = |E|$, $\sum_r |E| = 1$; ma, se $|E| = 0$, $\sum_r |E| = 0$ mentre se $|E| > 0$, $\sum_r |E| = +\infty$. Essendo pervenuti ad una contraddizione, si conclude che E non è misurabile.

9.* Dimostrare che la composizione di una funzione misurabile con una funzione continua è una funzione misurabile. Si potrebbe dimostrare che, in generale, la composizione di due funzioni misurabili non è misurabile.

3. INTEGRALE SECONDO LEBESGUE

3.1 Integrale di funzioni misurabili e limitate

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di misura finita e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e limitata, la cui immagine sia strettamente contenuta nell'intervallo $[m, M]$:

$$m < f(x) < M \qquad \forall x \in \Omega \ . \tag{3.1}$$

Introduciamo le somme inferiori e superiori (alla Lebesgue) di f nella maniera seguente. Facciamo una suddivisione $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ dell'intervallo $[m, M]$, con $\alpha_0 = m < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = M$; consideriamo gli insiemi (fig. 5.26)

$$\Omega^i = \{\mathbf{x} \in \Omega : \alpha_{i-1} \le f(\mathbf{x}) < \alpha_i\} = f^{-1}([\alpha_{i-1}, \alpha_i)) \ (i = 1, 2, \ldots, N) \ .$$

Tali insiemi sono tutti misurabili; poniamo allora

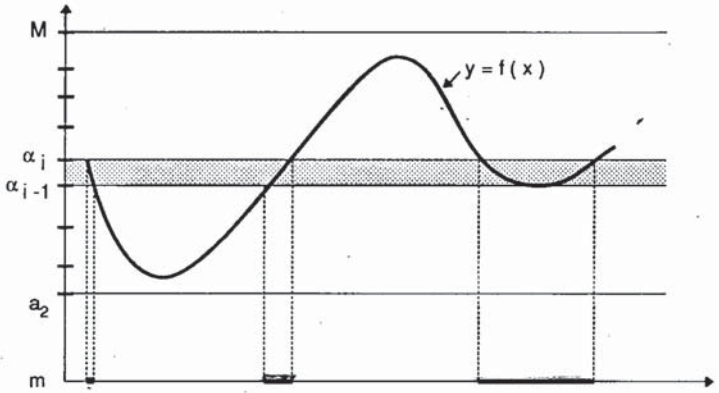


Fig. 5.26 I tre intervalli più marcati sull'asse x costituiscono $f^{-1}([\alpha_{i-1}, \alpha_i)) = \Omega^i$.

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i-1} |\Omega^i|$$

$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |\Omega^i| \ .$$

Risulta ovviamente

$$m|\Omega| \le s(\mathcal{D}, f) \le S(\mathcal{D}, f) \le M|\Omega| \ . \tag{3.2}$$

La (3.2) confronta la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla stessa suddivisione. Tuttavia si vede facilmente che, infittendo la suddivisione $\mathcal{D}$, le somme superiori non aumentano e le somme inferiori non diminuiscono: infatti, sia $\mathcal{D}'$ una suddivisione più fine di $\mathcal{D}$; sia, per esempio, β un punto della suddivisione $\mathcal{D}'$ che non compare in $\mathcal{D}$, $\alpha_{i-1} < \beta < \alpha_i$ (per un certo i); allora il termine

$$\alpha_i |\Omega^i| = \alpha_i |\{\alpha_{i-1} \le f < \alpha_i\}|$$

nella somma $S(\mathcal{D}, f)$ viene sostituito, nella somma $S(\mathcal{D}', f)$, dal termine

$$\beta |\{\alpha_{i-1} \le f < \beta\}| + \alpha_i |\{\beta \le f < \alpha_i\}|$$

che risulta minore di

$$\alpha_i |\{\alpha_{i-1} \le f < \beta\}| + \alpha_i |\{\beta \le f < \alpha_i\}| = \alpha_i |\Omega^i| \ ;$$

analoghe disuguaglianze valgono per le somme inferiori. Ciò permette di concludere che: *ogni somma inferiore è $\le$ ogni somma superiore*; infatti, se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono due qualsiansi suddivisioni, e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, posto s_1, s_2, s, S_1, S_2, S le rispettive somme inferiori e superiori, si ha

$$s_1 \le s \le S \le S_2 \ .$$

Sia ora $\mathcal{D}$ una qualunque suddivisione di $[m, M]$; abbiamo naturalmente

$$s(\mathcal{D}, f) \le \sup_{\mathcal{D}} s \le \inf_{\mathcal{D}} S \le S(\mathcal{D}, f) \ . \tag{3.3}$$

Fin qui, a parte la diversa definizione di s e S, il discorso ripete gli stessi argomenti già utilizzati per definire l'integrale di Riemann; ma ora osserviamo che

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) |\Omega^i| \le \delta |\Omega| \tag{3.4}$$

dove abbiamo indicato con δ l'ampiezza della suddivisione.

Poiché δ può essere preso piccolo quanto si vuole, dalle (3.3) e (3.4) si ricava che, per *ogni* f, risulta

$$\sup_{\mathcal{D}} s = \inf_{\mathcal{D}} S \ . \tag{3.5}$$

Definizione 3.1 - *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata. Il numero $\sup_{\mathcal{D}} s = \inf_{\mathcal{D}} S$ viene detto integrale (secondo Lebesgue) di f su Ω.*

Dunque tutte le funzioni misurabili e limitate sono integrabili (secondo Lebesgue) su un insieme di misura finita.

***Esempio* 3.1** - Dalla definizione precedente discende direttamente che, $\forall c \in \mathbb{R}$, risulta

$$\int_\Omega c = c|\Omega| \ .$$

Osservazione 3.1 - Da quanto precede si vede che si può anche definire l'integrale come

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\Omega^i| \tag{3.6}$$

dove β_i è un qualsiasi numero nell'intervallo $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$; infatti le somme che compaiono nella (3.6), che sono dette *somme integrali alla Lebesgue*, sono intermedie tra s e S e perciò tendono al limite comune di s e S quando $\delta \to 0$.

La definizione precedente illustra chiaramente la differenza tra le somme integrali di Riemann e quelle di Lebesgue: mentre le prime (riferiamoci, per semplicità, a funzioni di una variabile) vengono costruite facendo una suddivisione dell'intervallo di integrazione, quindi moltiplicando la misura di ogni intervallino della suddivisione per un'ordinata compresa tra gli estremi inferiore e superiore di f in quell'intervallino e infine sommando su tutti gli intervallini, le seconde sono basate su una suddivisione di un intervallo che contiene l'immagine della funzione integranda: si moltiplica una ordinata qualsiasi di un intervallino $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ della suddivisione per la misura della controimmagine $f^{-1}([\alpha_{i-1}, \alpha_i))$ di questo intervallino, quindi si somma su tutti gli intervallini. In questo modo siamo certi che l'ordinata scelta è effettivamente rappresentativa della funzione f sull'insieme $\Omega^i = f^{-1}([\alpha_{i-1}, \alpha_i))$, anche se questa funzione è molto "irregolare"; mentre, nel procedimento di Riemann, la scelta dell'ordinata rappresentativa di f è piuttosto arbitraria, a meno che la funzione, non sia, per esempio, continua o, comunque, non abbia troppe discontinuità. Questo discorso risulta più chiaro se si considera la funzione di Dirichlet nell'intervallo $[0, 1]$; fatta una suddivisione di questo intervallo, la scelta di un'ordinata compresa tra 0 e 1 per rappresentare $f(x)$ in un intervallino è comunque del tutto arbitraria; come già sappiamo, tale funzione non è integrabile nel senso di Riemann.

Procedendo secondo Lebesgue invece, le somme inferiori e superiori per questa funzione, relative ad una suddivisione

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} = 1 < \alpha_n$$

sono

$$s = \alpha_0|\{0 \le f < \alpha_1\}| + \alpha_1|\{\alpha_1 \le f < \alpha_2\}| + \ldots + \alpha_{n-1}|\{1 \le f < \alpha_n\}| =$$
$$= 0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + 1 \cdot 0 = 0$$

$$S = \alpha_1|\{0 \le f < \alpha_1\}| + \alpha_2|\{\alpha_1 \le f < \alpha_2\}| + \ldots + \alpha_n|\{1 \le f < \alpha_n\}| =$$
$$= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_1$$

Poiché α_1 può essere scelto piccolo quanto si vuole, risulta $\inf_{\mathcal{D}} S = 0$, cosicché la funzione è integrabile con integrale nullo.

Possiamo chiederci: quanto discontinua può essere la funzione, perché risulti ancora integrabile secondo Riemann?

Lebesgue ha dimostrato che *una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se i suoi punti di discontinuità formano un insieme trascurabile*. Abbiamo così risposto alla questione posta alla fine del paragrafo 8.1.3 del volume 1.

Naturalmente, il vantaggio della nuova definizione di integrale non è quello di poter integrare funzioni così "bizzarre" come la funzione di Dirichlet, ma risulterà dalle proprietà che esso possiede, che discuteremo ai paragrafi 3.3, 3.4 e 3.5.

D'ora in avanti, parlando di funzioni integrabili e di integrale, intenderemo sempre secondo Lebesgue. Per indicare l'integrale di f su Ω useremo le stesse notazioni già usate per indicare l'integrale di Riemann; ciò, come vedremo, non può dar luogo a confusione. Soltanto quando i due integrali saranno messi a confronto useremo, per distinguerli, le notazioni $\mathcal{L}\int_\Omega f$ e $\mathcal{R}\int_\Omega f$, con evidente significato e parleremo di funzioni $\mathcal{L}$-integrabili e di funzioni $\mathcal{R}$-integrabili.

Significato geometrico dell'integrale

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata, $|\Omega| < \infty$; inoltre sia $f \ge 0$. Sia $\Gamma = \Gamma(f, \Omega)$ l'insieme delle ordinate di f su Ω, definito dalla formula (2.26). Sappiamo (Proposizione 2.14) che Γ è misurabile e, essendo limitato, di misura finita.

Mostriamo che risulta

$$\int_\Omega f = |\Gamma|_{n+1} \ (*) \tag{3.7}$$

Infatti, con riferimento ad una suddivisione $\mathcal{D}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ di $[m, M]$, sia $\varphi(x)$ la funzione uguale a α_{i-1} in Ω^i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ e $\psi(x)$ la funzione uguale a α_i in ogni Ω^i; risulta allora

$$\Gamma(\varphi) \subseteq \Gamma(f) \subseteq \Gamma(\psi) \tag{3.8}$$

e, ricordando la definizione delle somme inferiori e superiori,

$$s(\mathcal{D}, f) = |\Gamma(\varphi)| \ , \ S(\mathcal{D}, f) = |\Gamma(\psi)| \ .$$

(*) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora $\Gamma(f, \Omega) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; nel seguito scriveremo semplicemente $|\Gamma|$ in luogo di $|\Gamma|_{n+1}$.

Facendo tendere a zero l'ampiezza della suddivisione, s e S tendono entrambi a $\int_\Omega f$; dalla (3.8), prendendo le misure degli insiemi, si ricava la (3.7).

Se f è di segno qualsiasi, posto $f = f_+ - f_-$, risulta, con ragionamento analogo a quello svolto sopra,

$$\int_\Omega f = |\Gamma_+| - |\Gamma_-| \tag{3.9}$$

essendo $\Gamma_+ = \Gamma(f_+, \Omega)$ e $\Gamma_- = \Gamma(-f_-, \Omega)$.

Le formule (3.7) e (3.9) illustrano il significato geometrico dell'integrale. Esse forniscono anche una definizione alternativa ed equivalente dell'integrale, più intuitiva di quella basata sulle somme integrali.

Le stesse formule permettono anche di mostrare rapidamente la seguente proposizione, di importanza fondamentale.

Proposizione 3.1 - *Sia f limitata e $\mathcal{R}$-integrabile sull'insieme Ω limitato e PJ-misurabile; allora f è misurabile e pertanto $\mathcal{L}$-integrabile e i due integrali sono uguali:*

$$\mathcal{R}\int_\Omega f = \mathcal{L}\int_\Omega f \,. \tag{3.10}$$

Dimostrazione – Sia $f \geq 0$. Le somme inferiore e superiore di Riemann, $\mathcal{R}s$ e $\mathcal{R}S$, rappresentano la misura di plurintervalli contenenti e contenuti nell'insieme delle ordinate $\Gamma(f, \Omega)$: risulta

$$\mathcal{R}s \leq |\Gamma|_* \leq |\Gamma|^* \leq \mathcal{R}S \tag{3.11}$$

Facendo tenderte a zero l'ampiezza della suddivisione, $\mathcal{R}s$ e $\mathcal{R}S$ tendono ad un limite comune, $\mathcal{R}\int_\Omega f = |\Gamma|_* = |\Gamma|^*$; cioè Γ risulta $\mathcal{L}$-misurabile e, per la Proposizione 2.26, f è misurabile; il suo integrale, $\mathcal{L}\int_\Omega f$, coincide con $|\Gamma|$ (per la (3.7)) e perciò con $\mathcal{R}\int_\Omega$.

Se f è di segno qualsiasi, si ragiona su f_+ e f_- utilizzando la (3.9). □

3.2 Funzioni sommabili

Estendiamo ora la definizione dell'integrale a funzioni non limitate e ad insiemi di misura non finita; nella teoria di Riemann integrali di tal genere si dicono generalizzati o impropri.

Procediamo per gradi:

1. Sia Ω di misura finita e $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ una funzione misurabile ≥ 0. Per un

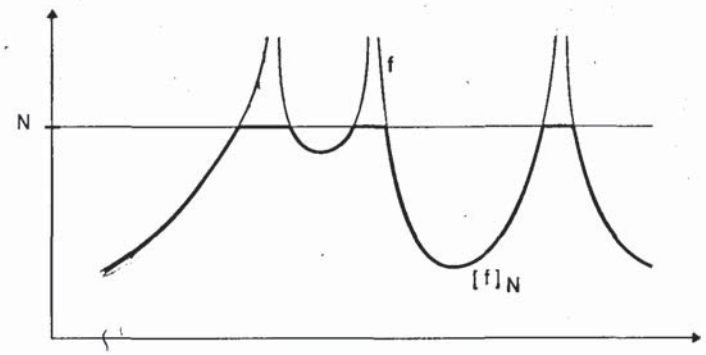


Fig. 5.27 In nero il grafico della troncata $[f]_N$.

intero $N > 0$ definiamo la funzione troncata $[f]_N$:

$$[f(\mathbf{x})]_N = f(\mathbf{x}) \quad \text{per quegli } \mathbf{x} \text{ in cui } f(\mathbf{x}) \leq N$$
$$[f(\mathbf{x})]_N = N \quad \text{per quegli } \mathbf{x} \text{ in cui } f(\mathbf{x}) > N \,.$$

Per ogni N, l'integrale $\int_\Omega [f]_N$ esiste e, posto $\Gamma_N = \Gamma([f]_N, \Omega)$, abbiamo

$$\int_\Omega [f]_N = |\Gamma_N| \,.$$

La successione $|\Gamma_N|$ è crescente con N, perciò ammette limite per $N \to \infty$; *se questo limite è finito diremo che la funzione f è integrabile (o sommabile)* su Ω e porremo

$$\int_\Omega f := \lim_{N\to\infty} |\Gamma_N| \tag{3.12}$$

Poiché $\Gamma_N \subseteq \Gamma_{N+1}$ e $\bigcup_{N=1}^{\infty} \Gamma_N = \Gamma = \Gamma(f, \Omega)$, per la *iv*) del teorema 2.4 abbiamo

$$\int_\Omega f = |\Gamma| \,.$$

2. Sia ora f di segno qualsiasi (e Ω come in 1.).

Consideriamo le funzioni non negative f_+ e f_-. *La funzione f si dirà integrabile (o sommabile (*)) su Ω se risultano integrabili entrambe le funzioni f_+ e f_-;* si pone allora

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f_+ - \int_\Omega f_- = |\Gamma_+| - |\Gamma_-| \tag{3.14}$$

dove si è posto, come al solito, $\Gamma_+ = \Gamma(f_+)$ e $\Gamma_- = \Gamma(-f_-)$.

3. Sia ora Ω misurabile (di misura finita o infinita) e f misurabile non negativa. Sia $\{Q_k\}$ la successione degli intervalli: $|x_i| \le k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$; poniamo $\Omega_k = \Omega \cap Q_k$ e $\Gamma_k = \Gamma(f, \Omega_k)$.
Se f è integrabile su ogni Ω_k $(k = 1, 2, \dots)$ abbiamo:

$$\int_{\Omega_k} f = |\Gamma_k| \, .$$

La successione $|\Gamma_k|$ è crescente; *se il suo limite, per $k \to \infty$,* (che coincide con $|\Gamma(f, \Omega)|$) *è finito, la funzione f si dice integrabile* su Ω e si pone

$$\int_\Omega f := |\Gamma| \, . \tag{3.15}$$

4. Infine, se f è di segno qualsiasi (e Ω come in 3.), *diremo che f è sommabile su Ω se sono tali f_+* e f_- e porremo ancora

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f_+ - \int_\Omega f_- = |\Gamma_+| - |\Gamma_-| \, . \tag{3.16}$$

In conclusione, con le notazioni e le ipotesi sopra adottate, abbiamo, se $f \ge 0$,

$$\int_\Omega f = \lim_{k \to \infty} \lim_{N \to \infty} \int_{\Omega_k} [f]_N \, . \tag{3.17}$$

Lo studente si convincerà facilmente che, trattandosi di successioni monotone (e limitate) è indifferente l'ordine in cui i due limiti sono calcolati (Esercizio 3.1.20).

Dall'insieme di definizioni 1., 2., 3., 4. si ricava la seguente

Proposizione 3.2 - *Una funzione misurabile $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.*

Dimostrazione – La proposizione

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow f_+, f_- \text{ integrabili} \Leftrightarrow |f| \text{ integrabile}$$

(*) Alcuni autori distinguono tra funzioni sommabili (quelle per cui sia f_+ che f_- hanno integrale finito) e funzioni integrabili (quelle per cui almeno una delle due funzioni f_+ e f_- ha integrale finito). Noi riteniamo sinonimi le due espressioni.

si scrive, in termini di insiemi delle ordinate,

$$|\Gamma(f)| < \infty \Leftrightarrow |\Gamma(f_+)| < \infty \, , \quad |\Gamma(f_-)| < \infty \Leftrightarrow |\Gamma(|f|)| < \infty \, ;$$

poiché $\Gamma(f) = \Gamma(f_+) \cup \Gamma(-f_-)$, $\Gamma(|f|) = \Gamma(f_+) \cup \Gamma(f_-)$, e ovviamente $|\Gamma(f_-)| = |\Gamma(-f_-)|$, l'asserto è provato. Inoltre, osservando che $|\Gamma_+ \cap \Gamma_-| = 0$ (l'insieme $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$, essendo contenuto in $\mathbb{R}^n$, ha misura $(n+1)$–dimensionale nulla) abbiamo: $|\Gamma(|f|)| = |\Gamma_+| + |\Gamma_-|$, cioè

$$\int_\Omega |f| = |\Gamma_+| + |\Gamma_-| \qquad \square \tag{3.18}$$

Perciò, nella teoria di Lebesgue, l'integrabilità coincide con l'integrabilità assoluta. Ancora si può dimostrare che, *se f è assolutamente integrabile in senso improprio (secondo Riemann) è integrabile (secondo Lebesgue) e i due integrali coincidono*. Lo studente già conosce esempi di funzioni integrabili in senso generalizzato, ma non assolutamente integrabili; per tali funzioni l'integrale di Lebesgue non è definito.

3.3 Prime proprietà dell'integrale di Lebesgue

Supporremo, negli enunciati che seguono, che le funzioni e gli insiemi considerati siano misurabili. Indichiamo con $\mathcal{L}(\Omega)$ la classe delle funzioni integrabili su Ω.

■ **Teorema 3.3** - *Valgono le seguenti proprietà (da 1. a 5.):*

1. *Omogeneità. Se $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $cf \in \mathcal{L}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega cf = c \int_\Omega f$$

2. *Additività (rispetto alla funzione integranda). Se $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$, anche $f + g \in \mathcal{L}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g \, .$$

Da 1. e 2. discende che $\mathcal{L}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale lineare.

3. *Monotonia*

i) Se $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $f \le g$, allora $\int_\Omega f \le \int_\Omega g$,

ii) $\left| \int_\Omega f \right| \le \int_\Omega |f| \qquad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$.

iii) Teorema della media. Se $m \le f \le M$ e $|\Omega| < \infty$, allora esiste λ, $m \le \lambda \le M$, tale che

$$\int_\Omega f = \lambda|\Omega| .$$

iv) Se $|f| \le g$ e $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, anche $f \in \mathcal{L}(\Omega)$.

4. *Additività completa rispetto al dominio di integrazione*

Se $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$ per $k \ne j$, allora

$$\int_\Omega f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} f .$$

5. *Insiemi di misura nulla*

i) Se $|\Omega| = 0$, $\int_\Omega f = 0$

ii) Se $f = 0$ q.o. in Ω, $\int_\Omega f = 0$

iii) Se $f = g$ q.o. in Ω e $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, anche $g \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $\int_\Omega f = \int_\Omega g$.

iv) Se $f \ge 0$ e $\int_\Omega f = 0$, allora $f = 0$ q.o. in Ω.

Le proprietà sopra elencate, pur estendendo quelle dell'integrale di Riemann, non giustificano ancora pienamente il lavoro svolto per sviluppare la nuova teoria. Nel prossimo paragrafo illustreremo la proprietà principale del nuovo integrale, che mostra quanto esso sia flessibile rispetto all'operazione di passaggio al limite; è questa proprietà che lo rende preferibile al più semplice integrale di Riemann.

NO *Dimostrazione del Teorema 3.3* – La 1. viene lasciata per esercizio.

Dimostriamo la 3. *i)* Se $f \ge 0$, risulta $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$ e perciò $|\Gamma(f)| \le |\Gamma(g)|$. Incidentalmente, ciò prova anche la *iv)*, risultando, per l'ipotesi, $|\Gamma(|f|)| < |\Gamma(g)| < \infty$. Se f è di segno qualsiasi, essendo $f_+ \le g_+$ e $f_- \ge g_-$ su Ω, risulta

$$|\Gamma(f_+)| \le |\Gamma(g_+)| \quad \text{e} \quad |\Gamma(f_-)| \ge |\Gamma(g_-)|$$

da cui

$$|\Gamma(f_+)| - |\Gamma(f_-)| \le |\Gamma(g_+)| - |\Gamma(g_-)| .$$

ii) Segue subito dalle (3.16) e (3.17).

(*iii*) Segue dalla disuguaglianza $m \le f \le M$, integrando su Ω,applicando la *i)* e ricordando l'esempio 3.1.

Dimostriamo la 4. Sia $f \ge 0$, $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ dove $\Gamma = \Gamma(g, \Omega)$ e $\Gamma_k = \Gamma(f, \Omega_k)$. Poiché $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$ $(k \ne j)$ risulta $\Gamma_k \cap \Gamma_j = \emptyset$ e perciò $|\Gamma| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_k|$. Se f è di segno qualsiasi, si procede scomponendo $f = f_+ - f_-$ etc..

Dimostriamo la 2. Questa proprietà richiede una dimostrazione non immediata. Assumiamo dapprima che f e g siano limitate e $|\Gamma| < \infty$. Proviamo la tesi nel caso $g = c$ (costante). Se $s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i-1}|\Omega^i|$ è una somma inferiore per f, allora $s' = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_{i-1} + c)|\Omega^i| = s + c|\Omega|$ è una somma inferiore per $f + c$. Facendo tendere a zero l'ampiezza della suddivisione $\mathcal{D}$ abbiamo allora (ricordando l'esempio 3.1)

$$\int_\Omega (f + c) = \int_\Omega f + \int_\Omega c .$$

Se g non è costante (ma ancora limitata), si considerino gli insiemi Ω^i relativi alla funzione f e ad una suddivisione $\mathcal{D}$; abbiamo (utilizzando le proprietà 4. e 3*i*)

$$\int_\Omega (f + g) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^i} (f + g) \ge \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega^i} (\alpha_{i-1} + g) = s(\mathcal{D}, f) + \int_\Omega g$$

$$\int_\Omega (f + g) \le \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i + g) = S(\mathcal{D}, f) + \int_\Omega g .$$

Facendo tendere a zero l'ampiezza della suddivisione, ricaviamo la tesi.

Lasciamo cadere ora l'ipotesi di limitatezza per f e g. Se f e g sono non negative, per le corrispondenti funzioni troncate abbiamo

$$[f + g]_N \le [f]_N + [g]_N \le [f + g]_{2N}$$

Integrando le precedenti disuguaglianze e passando al limite per $N \to \infty$ otteniamo la tesi. Se invece f e g non sono sempre ≥ 0, dobbiamo suddividere Ω in sei (al più) sottoinsiemi (ovviamente misurabili) in cui f, g, $f + g$ sono di segno costante e procedere in ognuno di essi come sopra; per esempio, dove f e $f + g$ sono ≥ 0 e $g \ge 0$ risulta: $f = (f + g) + (-g)$ e perciò $\int f = \int (f + g) + \int (-g)$, da cui ancora la tesi.

Infine, se $|\Omega| = \infty$, detti Q_k i soliti ipercubi centrati nell'origine con lato di semilunghezza k, abbiamo , per quanto visto sopra,

$$\int_{\Omega \cap Q_k} (f + g) = \int_{\Omega \cap Q_k} f + \int_{\Omega \cap Q_k} g$$

e, facendo tendere k all'infinito, otteniamo la tesi.

Dimostriamo le 5. La *i*) è ovvia. *ii*) Sia $\Omega = Z \cup (\Omega \setminus Z)$ dove Z è l'insieme trascurabile in cui $f \neq 0$. Risulta allora, per la 4.

$$\int_\Omega f = \int_Z f + \int_{\Omega \setminus Z} f$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo (per la *i*)), il secondo è nullo poiché $f = 0$.
iii) È un immediato corollario di *ii*)
iv) Ragioniamo per assurdo: supponiamo che sia $f > 0$ sull'insieme $G \subset \Omega$, $|G| > 0$; decomponiamo G nella maniera seguente: $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ dove $G_k = \{f > 1/k\}$. Poiché, per un certo $\overline{k}$, deve essere $|\{f > 1/\overline{k}\}| > 0$, avremo

$$\int_\Omega f = \int_G f \geq \int_{G_{\overline{k}}} f \geq \frac{1}{\overline{k}} |G_{\overline{k}}| > 0$$

contro l'ipotesi. L'allievo confronti questa proprietà con quella espressa negli esercizi 8.1.2, 8.1.3, 8.1.4, del volume 1. □

3.4 Limite, serie e derivata di integrali

Presenteremo, in questo paragrafo, le proprietà più importanti dell'integrale di Lebesgue. Supporremo sempre, negli enunciati che seguono, che le funzioni e gli insiemi considerati siano misurabili.

■ **Teorema 3.4** - (di Lebesgue, della convergenza dominata).
Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$, misurabili. Se
i) $f_k \to f$ q.o. in Ω,
ii) esiste $g \in \mathcal{L}(\Omega)$ tale che: $|f_k| \leq g \quad \forall k$,
allora
iii) $f \in \mathcal{L}(\Omega)$;
iv) $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k = \int_\Omega f$.

Questo teorema va confrontato col teorema 3.1.8 che illustra un'analoga proprietà per l'integrale di Riemann: si vede che, per la validità di passaggio al limite sotto il segno di integrale, l'ipotesi di *convergenza uniforme* è sostituita qui dall'ipotesi, di impiego assai più largo, di *convergenza dominata*, cioè convergenza ordinaria (quasi ovunque) accompagnata dall'esistenza di una maggiorante integrabile. Si noti come questa ipotesi implichi che ogni f_k sia integrabile, in base alla 3.iv) del teorema 3.3.

Senza l'ipotesi che una maggiorante integrabile esista, il teorema è falso; anzitutto il limite f, che di certo è misurabile, potrebbe non essere integrabile; anche se risultasse integrabile potrebbe esser falsa la *iv*), come vedremo nell'esempio 3.2.

Osserviamo che l'ipotesi *ii*) del teorema è soddisfatta se, per esempio,

$$|\Omega| < \infty \ , \ |f_k| \leq M \quad \forall k$$

con M costante; si parla, in questo caso, di *convergenza limitata*. Si noti che, anche con queste ipotesi più restrittive, il teorema sarebbe falso per l'integrale di Riemann per la semplice ragione che la funzione limite di una successione convergente di funzioni $\mathcal{R}$-integrabili può essere una funzione non $\mathcal{R}$-integrabile, anche se le funzioni sono equilimitate (cioè limitate uniformemente rispetto a k).

Dal teorema 3.4 si ricava immediatamente il seguente corollario, da confrontare con il teorema 3.2.7.

Corollario 3.5 - (Scambio della serie con l'integrale).
Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$, integrabili. Se

i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = F$ *q.o. in Ω*

ii) esiste $G \in \mathcal{L}(\Omega)$ tale che: $|\sum_{k=1}^{n} f_k| \leq G \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

allora
iii) $F \in \mathcal{L}(\Omega)$
iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k = \int_\Omega F$.

Esempi

3.2. Siano $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definite, per $k = 1, 2, \ldots$: (fig. 5.28)

$$f_k(x) = \begin{cases} -2xk^2 + 2k & \text{per } 0 \leq x \leq 1/k \\ 0 & \text{per } 1/k < x \leq 1 \end{cases}$$

$f_k(x) \to 0 \quad \forall x \in (0,1]$, mentre $\int_0^1 f_k(x)dx = 1 \quad \forall k$; dunque la *iii*) del teorema 3.4 è vera, ma la *iv*) è falsa; si noti che la *ii*) non è soddisfatta.

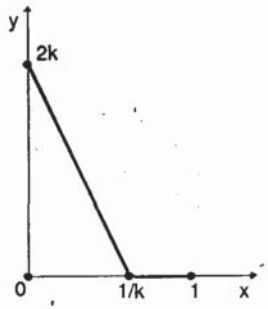


Fig. 5.28

3.3. $f_k(x) = \dfrac{kx}{1+k^2x^2}$, $x \in [0,1]$. Poiché $|f_k(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall k$, applicando il criterio della convergenza limitata si ha: $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = 0$. Si osservi che non si può applicare il criterio della convergenza uniforme.

3.4. $f_k(x) = \dfrac{k^{3/2}x}{1+k^2x^2}$, $x \in [0,1]$; $f_k(x)$ è massima per $x = 1/k$, dove vale $\dfrac{1}{2}\sqrt{k}$; perciò la successione non è limitata; tuttavia si verifica facilmente che $|f_k(x)| \leq 1/\sqrt{x}$ $\forall k$; perciò, applicando il criterio della convergenza dominata, abbiamo: $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = 0$. Anche in questo caso il criterio della convergenza uniforme non è applicabile.

Non c'è alcuna difficoltà ad estendere l'enunciato del teorema 3.4 al caso in cui, invece di una famiglia numerabile di funzioni, $\{f_k(x)\}$, abbiamo una famiglia continua, $f(x,t)$.

***Esempio* 3.5 -**

$$\lim_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{x^{3/2}}dx = \int_0^\infty \lim_{t\to 0} \frac{\sin xt}{x^{3/2}}dx = 0 .$$

Infatti abbiamo le maggiorazioni seguenti:

$$\left|\frac{\sin xt}{x^{3/2}}\right| \leq |x|^{-3/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{|\sin xt|}{|x|^{3/2}} = \left|\frac{\sin xt}{xt}\right| \cdot \frac{|t|}{|x|^{1/2}} \leq |x|^{-1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, |t| < 1 .$$

Perciò la funzione $g(x) = x^{-1/2}$ per $x \in [0,1]$, $= x^{-3/2}$ per $x > 1$ è una maggiorante integrabile del modulo della funzione integranda; possiamo perciò applicare il criterio della convergenza dominata.

***Esempio* 3.6 -** Il teorema 3.4 non è applicabile all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}\, dx$$

Tale integrale infatti vale 1 $\forall t \in (0,+\infty)$ (Esempio 1.22), mentre la funzione integranda, per $t \to 0^+$, tende alla funzione q.o. nulla; di fatto non esiste una maggiorante integrabile (indipendente da t) della funzione integranda.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema 3.4, il seguente

Lemma 3.6 - *Sia $f \in \mathcal{L}(\Omega)$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che: $\int_A |f| < \varepsilon$ per ogni insieme misurabile $A \subset \Omega$, con $|A| < \delta$.*

Dimostrazione – Per la 3*ii*) del teorema 3.3 possiamo assumere $f \geq 0$.

Se f è limitata, $f \leq M$, l'affermazione segue dalla maggiorazione: $\int_A f \leq M|A|$, prendendo $\delta = \varepsilon/M$.

Se f non è limitata, essendo $\int_\Omega f = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega [f]_N$, risulterà, $\forall \varepsilon > 0$,

$$0 \leq \int_\Omega f - \int_\Omega [f]_N = \int_\Omega (f - [f]_N) < \varepsilon/2$$

se $N \geq \overline{N}(\varepsilon)$; perciò risulta anche, $\forall A \subset \Omega$,

$$0 \leq \int_A (f - [f]_{\overline{N}}) = \int_A f - \int_A [f]_{\overline{N}} < \varepsilon/2 .$$

Preso $\delta = \varepsilon/2\overline{N}$ abbiamo allora, se $|A| < \delta$,

$$\int_A [f]_{\overline{N}} < \overline{N}|A| < \varepsilon/2$$

la quale, combinata con la precedente disuguaglianza, dimostra la tesi. □

Dimostrazione del teorema 3.4 – Anzitutto, essendo $|f_k| \leq g$, risulterà anche $|f| \leq g$, e perciò,per la 3.*iv*) del teorema 3.3 , f è integrabile.

Assumiamo, per il momento, $|\Omega| < \infty$. Sia $B \subset \Omega$ l'insieme in cui $f_k \to f$; risulta $|B| = |\Omega|$ e $\forall \mathbf{x} \in B$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \overline{k} = \overline{k}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ tale che:

$$|f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/2|\Omega| \quad \text{se } k \geq \overline{k} . \tag{3.19}$$

Sia $B_k \subset \Omega$ l'insieme in cui vale la (3.19); abbiamo

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad , \quad B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

e perciò

$$\lim_{k\to\infty} |B_k| = |B| = |\Omega| .$$

Osserviamo ora che, per il precedente Lemma, esiste $\delta > 0$ tale che, $\forall A \subset \Omega$ con $|A| < \delta$, abbiamo $\int_A g < \varepsilon/4$ e perciò anche, $\forall k$, $\int_A |f_k| < \varepsilon/4$ e $\int_A |f| < \varepsilon/4$. Prendiamo $A = \Omega \setminus B_{\overline{k}}$ con $\overline{k}$ abbastanza grande in modo che risulti $|A| < \delta$ e valga la (3.19). Abbiamo allora

$$\int_\Omega |f_k - f| = \int_{B_{\overline{k}}} |f_k - f| + \int_A |f_k - f| .$$

Per $k \geq \overline{k}$ abbiamo

$$\int_{B_{\overline{k}}} |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}|B_{\overline{k}}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_A |f_k - f| \leq \int_A |f_k| + \int_A |f| < \varepsilon/2$$

e perciò

$$\left|\int_\Omega f - \int_\Omega f_k\right| \leq \int_\Omega |f - f_k| < \varepsilon \, .$$

Il teorema è così dimostrato se $|\Omega| < \infty$. Sia ora $|\Omega| = \infty$; posto $\Omega_j = \Omega \cap Q_j$ (dove i Q_j sono i soliti ipercubi: $|x_i| \leq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$), da quanto precede risulta, $\forall j = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_j} f_k = \int_{\Omega_j} f \, .$$

Abbiamo allora

$$\int_\Omega f = \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} f = \lim_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_j} f_k = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, ;$$

lo scambio dei limiti operato sopra è lecito poiché $\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} f_k$ esiste uniformemente rispetto a k; infatti, $\forall \varepsilon > 0$, si ha

$$\left|\int_\Omega f_k - \int_{\Omega_j} f_k\right| = \left|\int_{\Omega\setminus\Omega_j} f_k\right| \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_j} |f_k| \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_j} g < \varepsilon$$

pur di prendere j abbastanza grande, dipendentemente da ε. □

Abbiamo visto che, in generale, il teorema è falso se l'ipotesi *ii*) (esistenza di una maggiorante integrabile) non vale.

Un caso tuttavia interessante si ha se $\{f_k\}$ è una successione monotona. Non si potrà allora affermare che il suo limite f sia integrabile; tuttavia vale ancora la conclusione *iv*), nel senso precisato dal seguente

■ **Teorema 3.7** - (di Beppo Levi). *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni integrabili su Ω e sia $f_k \leq f_{k+1}$ $\forall k$. Allora se $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, risulta*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k = \begin{cases} \int_\Omega f & se\ f \in \mathcal{L}(\Omega) \\ +\infty & se\ f \notin \mathcal{L}(\Omega) \end{cases} \tag{3.20}$$

Un analogo risultato vale per le successioni decrescenti.

Dimostrazione – Se le f_k sono tutte non negative, posto $\Gamma = \Gamma(f, \Omega)$, $\Gamma_k = \Gamma(f_k, \Omega)$, si ha $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ e $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ e perciò $\lim_{k\to\infty} |\Gamma_k| = |\Gamma|$, cioè la (3.20).

Senza ipotesi sul segno delle f_k basterà considerare la successione di funzioni non negative $f_k - f_1$ per ottenere la tesi. □

Questo teorema è forse più utile se riferito alle serie.

Corollario 3.8 - *Se $\sum \varphi_k$ è una serie di funzioni integrabili non negative, allora*

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \varphi_k \, . \tag{3.21}$$

La (3.21), pur valendo sempre, è più significativa quando l'uno o l'altro dei termini dell'equazione esiste finito.

Un altro utile corollario è il seguente.

Corollario 3.9 - *Se $\{\varphi_k\}$ è una successione di funzioni integrabili e l'uno o l'altro dei termini $\int_\Omega \sum |\varphi_k|$, $\sum \int_\Omega |\varphi_k|$ esiste finito, allora*

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \varphi_k \, . \tag{3.22}$$

Dimostrazione – Intanto, se $\int_\Omega \sum |\varphi_k|$ è finito, lo è anche $\sum \int_\Omega |\varphi_k|$ e viceversa, e sono uguali, per il corollario 3.8. Sia dunque $\int_\Omega \sum |\varphi_k|$ finito, cioè $\sum |\varphi_k|$ converge q.o. ad una funzione integrabile Φ; allora anche $\sum \varphi_k$ converge q.o. e la successione delle somme parziali è dominata da Φ; il corollario 3.5 fornisce allora la tesi. □

***Esempio* 3.7** - Si voglia calcolare l'integrale

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx \ , \quad a \in \mathbb{R} \, .$$

Poiché risulta

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin ax \ e^{-kx} \qquad 0 \leq x < +\infty$$

abbiamo, scambiando la serie con l'integrale,

$$J(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \sin ax \ e^{-kx} dx \, .$$

Lo scambio è giustificato in virtù del corollario 3.9, poiché

$$\int_0^\infty |\sin ax\ e^{-kx}|dx = \int_0^\infty \left|\frac{\sin ax}{ax} ax\ e^{-kx}\right| dx \le |a| \int_0^\infty xe^{-kx}dx = \frac{|a|}{k^2}$$

e la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Si calcola poi (farlo per esercizio)

$$\int_0^\infty \sin ax\ e^{-kx}dx = \frac{a}{a^2+k^2}\ .$$

Infine (Esercizio 3.2.13) abbiamo

$$J(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{Th}\, a\pi} - \frac{1}{a\pi}\right).$$

Sempre dal teorema fondamentale di Lebesgue si ricava il seguente, di cui non riportiamo la dimostrazione.

■ **Teorema 3.10 -** (di derivazione sotto il segno di integrale).

Sia $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ una funzione definita per quasi ogni $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{t} \in T$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^m$. Supponiamo che

i) $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{t}) \in \mathcal{L}(\Omega) \quad \forall \mathbf{t} \in T$

$\mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{t}) \in C^1(T)$ *per quasi ogni* $\mathbf{x} \in \Omega$.

ii) esistano $m+1$ funzioni $g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\Omega)$ tali che

$$|f(\mathbf{x},\mathbf{t})| \le |g_0(\mathbf{x})|$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right| \le g_j(\mathbf{x}) \qquad j = 1,2,\dots,m\ .$$

Allora

iii) la funzione $\mathbf{t} \mapsto \int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x} \in C^1(T)$ *e*

iv) $\frac{\partial}{\partial t_j}\int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x},\mathbf{t})d\mathbf{x}\ .$

***Esempio* 3.8 -** Siano $f(x)$ e $xf(x)$ funzioni integrabili su tutta la retta. La funzione

$$t \mapsto \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(x)dx$$

(detta *trasformata di Fourier* di f) è allora di classe $C^1(\mathbb{R})$; infatti le ipotesi del teorema 3.10 sono verificate: le funzioni maggioranti g_0 e g_1 sono rispettivamente $|f|$ e $|xf|$. Più in generale, se $f, xf, \dots, x^m f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R})$ e si ha

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\hat{f}(t) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-ixt}f(x)dx \qquad k = 0,1,\dots,m\ .$$

Prendendo $t = 0$, abbiamo

$$\frac{\partial^k \hat{f}}{\partial t^k}(0) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx\ . \tag{3.23}$$

Gli integrali nella (3.23) sono detti *momenti* di f. Essi hanno notevole importanza in varie questioni di Fisica, di Probabilità, etc. Le formule (3.23) consentono di calcolare i momenti di una funzione eseguendo derivate invece che integrali.

3.5 Scambio nell'ordine delle integrazioni

Abbiamo visto che, per valutare un integrale multiplo nella teoria di Riemann, si procede per integrazioni successive di una variabile per volta. Bisogna però accertarsi ogni volta che tali integrali esistano: l'esistenza dell'integrale multiplo non assicura l'esistenza degli integrali ripetuti rispetto alle singole variabili.

Nella teoria di Lebesgue, invece, ciò è garantito senza ulteriori condizioni.

Daremo gli enunciati nel caso di integrali doppi; ma tutto si estende al caso di integrali multipli qualsiansi.

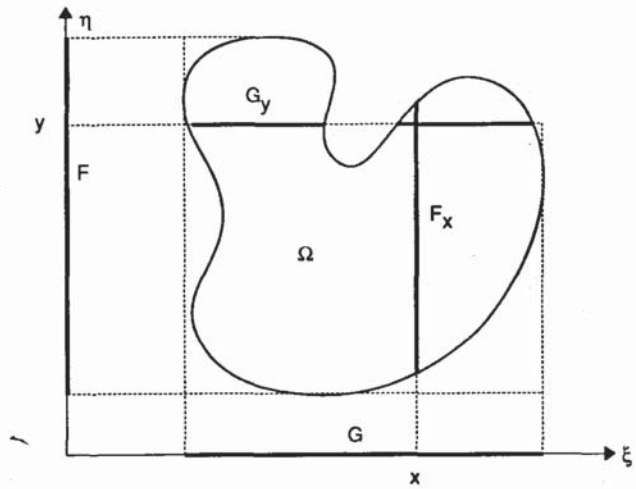


Fig. 5.29

Sia Ω un insieme piano misurabile (di misura finita o infinita). Indicheremo con F_x l'insieme (unidimensionale) ottenuto secando Ω con la retta di equazione: $\xi = x$

$$F_x = \Omega \cap \{\xi = x\} .$$

Analogamente sarà

$$G_y = \Omega \cap \{\eta = y\} .$$

Inoltre sia G la proiezione di Ω sull'asse ξ e F la proiezione di Ω sull'asse η (fig. 5.29).

▪ **Teorema 3.11** - (di Fubini). *Sia $f(x,y)$ una funzione integrabile su Ω. Allora*

i) F_x è (linearmente) misurabile per quasi ogni $x \in G$

ii) la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile su F_x per quasi ogni $x \in G$;

iii) la funzione $x \mapsto \int_{F_x} f(x,y)dy$ è integrabile su G e risulta

$$\int_G dx \int_{F_x} f(x,y)dy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy .$$

Analogamente

i') G_y è (linearmente) misurabile per quasi ogni $y \in F$;

ii') la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile su G_y per quasi ogni $y \in F$;

iii') la funzione $y \mapsto \int_{G_y} f(x,y)dx$ è integrabile su F e risulta

$$\int_F dy \int_{G_y} f(x,y)dx = \iint_\Omega f(x,y)dxdy .$$

Il teorema di Fubini ci assicura perciò la possibilità di scambiare l'ordine delle integrazioni in un integrale doppio, purché si sappia che la funzione f è integrabile su Ω; ciò richiede l'ispezione diretta dell'integrale doppio, cosa che non sempre è facile a farsi. Tuttavia l'esistenza dell'integrale doppio può essere stabilita, se l'integranda è non negativa, esaminando uno degli integrali iterati. Vale infatti il seguente

▪ **Teorema 3.12** - (di Tonelli). *Sia $f(x,y)$ una funzione misurabile su Ω, $f(x,y) \geq 0$. L'esistenza di uno qualsiasi degli integrali*

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \ , \ \int_F dx \int_{F_x} f(x,y)dy \ , \ \int_G dy \int_{G_y} f(x,y)dx$$

implica l'esistenza e l'uguaglianza di tutti e tre.

Nel caso f sia di segno qualsiasi, sarà utile il seguente

Corollario 3.13 - *Sia $f(x,y)$ misurabile su Ω; se l'integrale*

$$\int_F dx \int_{F_x} |f(x,y)|dy$$

(o, equivalentemente, $\int_G dy \int_{G_y} |f(x,y)|dx$) esiste, allora

$$\int_F dx \int_{F_x} f(x,y)dy = \int_G dy \int_{G_y} f(x,y)dx .$$

L'allievo non mancherà di rilevare l'analogia tra gli ultimi due enunciati e i Corollari 3.8 e 3.9 sulla possibilità di scambio tra serie e integrale.

Come abbiamo avvertito all'inizio della sezione 2, non riportiamo la dimostrazione di questi teoremi.

Neppure ci soffermeremo ad estendere all'integrale di Lebesgue le regole di calcolo dimostrate per l'integrale di Riemann, in particolare la regola di integrazione per parti e per sostituzione. Ciò è giustificato dal fatto che in tutte, possiamo dire, le applicazioni, gli integrali in questione hanno significato anche nel senso di Riemann e pertanto, per quanto riguarda tutte le questioni di calcolo, possiamo riferirci alla teoria svolta nel capitolo 8 (Vol. 1) e nella sezione 1 di questo capitolo; sarà conveniente invece riferirci alla teoria di Lebesgue ogniqualvolta si debbano fare operazioni come quelle illustrate nel precedente e presente paragrafo.

Una particolare segnalazione va fatta riguardo ai

Teorema fondamentale del Calcolo integrale.

Esso pure viene esteso, nella teoria di Lebesgue, nella forma seguente: *la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

di una funzione integrabile sull'intervallo (a,b)

i) è continua in $[a,b]$ (Esercizio 6)

ii) è derivabile q.o. in (a,b) e la sua derivata è integrabile;

iii) risulta anche $F' = f$ q.o. in (a,b).

Di fatto la funzione integrale possiede altre proprietà che la caratterizzano completamente; ma queste proprietà fanno parte della teoria più avanzata delle funzioni di variabile reale, che supera i limiti di questa esposizione.

A conclusione di questa sezione invitiamo lo studente ad eseguire un riepilogo di tutti i risultati a lui noti sulla commutatività delle operazioni dell'Analisi, secondo lo schema sotto riportato.

	$\lim$	$\sum$	∂	$\int$ - di Riemann - generalizzato - di Lebesgue
$\lim$	$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm}$ $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$	$\lim_{x\to x_0}\sum_n f_n(x)$	$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ $\lim_{y\to y_0}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$	$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx$ $\lim_{y\to y_0}\int f(x,y)dx$
$\sum$		$\sum_n\sum_m a_{nm}$	$\frac{\partial}{\partial x}\sum f_n(x)$	$\int(\sum f_n(x))dx$
∂			$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$	$\frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)dx$
$\int$				$\int dy\int f(x,y)dx$

* 3.6 Misure con peso. Probabilità

Nella sezione 2 il problema della misura degli insiemi di $\mathbb{R}^n$ è stato impostato e risolto concretamente, cioè fornendo esplicitamente una definizione di misura di un insieme, a partire dalla primitiva e classica nozione di misura (lunghezza, area, volume, ...) di un intervallo di $\mathbb{R}^n$. Come abbiamo visto, questa definizione comprende una vastissima classe di insiemi e possiede le proprietà che sembrano esser desiderabili da ogni punto di vista (una prima definizione di misura, quella secondo Peano–Jordan, risultava meno soddisfacente, sia per la più ristretta classe di insiemi a cui si applica, sia soprattutto, per le proprietà meno flessibili).

Un modo alternativo, più generale, di attaccare il problema della misura, è il seguente: si considera una famiglia di insiemi di $\mathbb{R}^n$ e si assume che esista un'applicazione che, ad ogni elemento della famiglia (un insieme E), associa un numero reale non negativo che soddisfa a certi requisiti ritenuti "naturali" perché questo numero possa essere chiamato misura dell'insieme E.

Più precisamente, *se* $\sum \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *indica una* σ*–algebra di insiemi di* $\mathbb{R}^n$, *chiamiamo misura (n–dimensionale) un'applicazione*

$$m : \sum \to \mathbb{R}^* \tag{3.24}$$

dotata delle seguenti proprietà

i) $m(E) \geq 0 \quad \forall E \in \sum$

ii) se $E_i \in \sum$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ $(E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ *allora*

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i.$$

In altre parole, una misura è un *funzionale non negativo e completamente additivo sugli insiemi disgiunti*. Si può dimostrare che, da questa proprietà, seguono anche le altre: la *subadditività* e le proprietà che potremmo chiamare di *continuità*, e cioè:

(a) *se* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ *e* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$ *(in breve: se* $E_i \nearrow E$*), allora* $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = m(E)$

(b) se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ *e* $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E$ *(in breve: se* $E_i \searrow E$*) e* $m(E_{i_0}) < +\infty$ *per almeno un* i_0 (*), *allora* $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = m(E)$.

Con l'applicazione (3.24), $\mathbb{R}^n$ viene ad essere dotato di una ulteriore struttura, in aggiunta alle molte altre che già possiede: la struttura di *spazio misurabile*; più precisamente, costituisce spazio misurabile la terna $(\mathbb{R}^n, \sum, m)$: gli elementi di $\sum$ si dicono insiemi misurabili. Questi concetti si possono poi estendere da $\mathbb{R}^n$ a spazi più generali; si sviluppa così la teoria della misura e dell'integrazione negli spazi astratti, una branca importante della matematica moderna.

La misura di Lebesgue, e cioè la terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, |\cdot|)$, dove $\mathcal{M}$ è la σ–algebra degli insiemi $\mathcal{L}$–misurabili e $|\cdot|$ è la misura introdotta nella sezione 2, è *un esempio* soddisfacente ai requisiti richiesti. Certamente non è l'unico. Si osservi infatti che, tra i requisiti ritenuti naturali per una misura, non abbiamo elencato il seguente:

iii) se E *è un intervallo* $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, *allora* $m(E) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.

Questa proprietà, che è stata il nostro punto di partenza per definire la misura secondo Lebesgue, era suggerita dal desiderio di cercare una misura che fosse una estensione dei concetti di area, volume, etc. della geometria euclidea; essa porta con sé la proprietà di invarianza della misura di Lebesgue rispetto ai movimenti euclidei del sistema di riferimento (traslazioni, rotazioni, etc.).

Tuttavia, in molte applicazioni, in particolare modo al Calcolo delle probabilità, è più naturale considerare misure che non godono di queste proprietà di invarianza, ma che assegnano, per così dire, un peso maggiore a punti che si trovano in determinate regioni rispetto ad altre. Un esempio di misure di questo tipo è il seguente.

***Esempio* 3.9** - (misura di Dirac). Sia **a** un punto fissato di $\mathbb{R}^n$. Prendiamo $\sum = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e poniamo, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$m(E) = 1 \quad \text{se} \quad \mathbf{a} \in E$$

$$m(E) = 0 \quad \text{se} \quad \mathbf{a} \notin E$$

(*) Questa precisazione è necessaria per la validità della proprietà (*b*), come abbiamo messo in luce nell'osservazione che segue il teorema 2.8.

Si noti che ogni insieme di $\mathbb{R}^n$ risulta misurabile e di misura finita.

La misura dell'esempio precedente è un caso limite di misure con peso. Se prendiamo $\sum = \mathcal{M}$ (la famiglia degli insiemi $\mathcal{L}$-misurabili) e φ una funzione non negativa integrabile su ogni intervallo $Q_k = \{|x_i| \leq k,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, possiamo definire una misura ponendo, $\forall E \in \mathcal{M}$,

$$m(E) = \int_E \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

dove è inteso che, se E non è limitato, $\int_E \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap Q_k}$.

Se $\varphi = 1$ si ha dunque la misura di Lebesgue: $m(E) = |E|$.

Un peso di grande interesse nelle applicazioni è fornito dalla funzione gaussiana $\varphi(\mathbf{x}) = \exp(-||\mathbf{x}||^2)$. Consideriamo, in particolare, il caso unidimensionale.

***Esempio* 3.10** - (misura di Gauss). Si consideri la famiglia di gaussiane

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi(x; a, \sigma) = \frac{\exp(-(x-a)^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \qquad a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

e si ponga: $m(E) = \int_E \varphi(x; a, \sigma) dx$. La misura dell'insieme E, per a, σ fissati, rappresenta l'area delle regioni tratteggiate in figura.

Lo studente dimostri ciò che si intuisce osservando la figura: per $\sigma \to 0$ la misura di Gauss "tende" alla misura di Dirac.

Probabilità. Possiamo a questo punto riprendere il discorso appena abbozzato nel paragrafo 1.6.3 del volume 1. Supponiamo che gli eventi elementari ω di

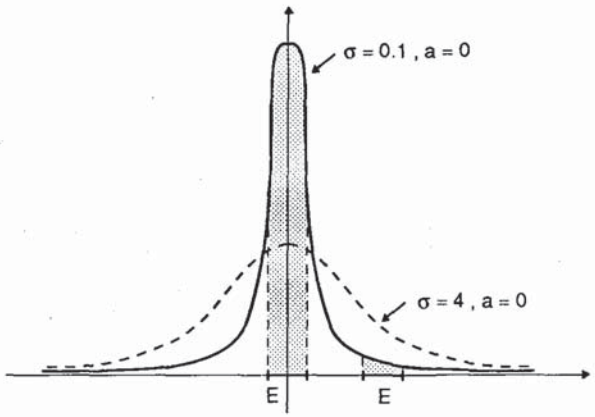


Fig. 5.30 Quando $\sigma \to 0$, la misura di Gauss "tende" a quella di Dirac.

un esperimento casuale siano rappresentabili come punti di $\mathbb{R}^n$; lo spazio dei campioni Ω sarà un insieme di $\mathbb{R}^n$ (limitato oppure no); i sottoinsiemi di Ω, cioè gli elementi di $\mathcal{P}(\Omega)$, sono gli eventi. Sia $\sum \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-algebra di eventi. *Definiamo probabilità una applicazione*

$$p: \sum \to \mathbb{R} \tag{3.25}$$

con le seguenti proprietà:

i) $p(E) \geq 0 \quad \forall E \in \sum$

ii) $p(\Omega) = 1$

iii) $p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i)$ se $E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j), E_i \in \sum$.

La terna $(\Omega, \sum, p)$ viene detta *spazio di probabilità*.

La probabilità è dunque una misura normalizzata, avendo posto uguale a 1 la misura dell'insieme Ω. Gli elementi di $\sum$ sono detti *eventi casuali*; e per essi è definita la probabilità. Se $\sum \neq \mathcal{P}(\Omega)$, possono esserci eventi per i quali non è definita la probabilità. Naturalmente possono esserci eventi non impossibili (cioè $E \neq \emptyset$) ma di probabilità nulla ed eventi non certi (cioè $E \neq \Omega$) ma di probabilità 1.

La scelta della misura più conveniente per descrivere l'esperimento in questione può essere suggerita da considerazioni di vario tipo, e, in ultima analisi, dall'esperienza.

Ad esempio, sia Ω limitato e supponiamo di non avere alcuna informazione, alcuna ragione per ritenere un evento elementare più probabile di un altro. Saremo indotti a scegliere una misura invariante per traslazioni, rotazioni, etc., cioè la misura di Lebesgue. Più precisamente, preso $\sum = \mathcal{M}$, (σ-algebra dei sottoinsiemi di Ω $\mathcal{L}$-misurabili), porremo, $\forall E \in \mathcal{M}$,

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Questa scelta corrisponde alla *distribuzione uniforme* di probabilità.

In altre situazioni, invece, è ragionevole assumere che i punti (gli eventi elementari) più vicini all'origine siano più probabili di quelli lontani; dovremo allora scegliere una misura con peso.

Per esempio, se $\Omega = \mathbb{R}$, e ancora $\sum = \mathcal{M}$, la scelta dell'esempio 3.10 corrisponde alla *distribuzione normale o gaussiana* di probabilità.

Il caso estremo della misura di Dirac, corrisponde all'informazione completa: abbiamo la certezza che l'evento elementare rappresentato dal punto **a** (e soltanto questo) si verifica.

Più in generale, anche il caso considerato nel paragrafo 1.6.3 del volume 1, di eventi elementari in numero finito (ritenuti equiprobabili) rientra in questo schema. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e $\sum = \mathcal{P}(\mathbb{R})$; siano $1, 2, \ldots, n$ i punti di $\mathbb{R}$ corrispondenti agli eventi

elementari $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ che sono i possibili esiti dell'esperimento. Poniamo, $\forall E \subseteq \mathbb{R}$,

$$p(E) = \frac{m}{n}$$

se E contiene m tra i punti $1, 2, \ldots, n$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$).
Una tale misura è detta *discreta*.

Questi brevi cenni mostrano come la teoria della probabilità sia stata legata (ad opera, soprattutto di Kolmogorov (*)) alla teoria della misura e dell'integrazione.

***Esempio* 3.11** - (Appuntamento al bar). Due amici A e B si danno appuntamento al bar, tra mezzogiorno e l'una, con l'intesa che ognuno dei due, arrivando sul luogo e non trovandovi l'altro, attende 10 minuti e poi se ne va. In tale situazione l'incontro dei due è un evento casuale, di cui vogliamo la probabilità. Rappresentiamo l'arrivo di A con un punto sull'asse t_A, compreso tra 0 e 1; l'arrivo di B viene analogamente rappresentato sull'asse ortogonale t_B; lo spazio dei campioni Ω è allora rappresentato dai punti del quadrato $[0,1] \times [0,1]$.
Se riteniamo equiprobabili i tempi d'arrivo di A e di B, porremo, per ogni evento $E \subseteq \Omega$ (misurabile):

$$p(E) = |E|$$

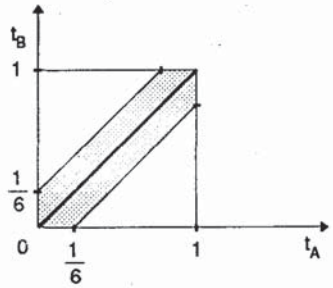


Fig. 5.31 Appuntamento al bar.

Per esempio, l'evento: i due amici giungono contemporaneamente è rappresentato dalla diagonale del quadrato; tale evento, pur non essendo impossibile, ha probabilità nulla. L'evento: i due si incontrano, è rappresentato dalla regione tratteggiata in figura; esso ha probabilità $11/36$.

***Esempio* 3.12** - (Tiro al bersaglio). Un'arma, azionata da un dispositivo "teoricamente perfetto" è puntata contro un bersaglio; vengono sparati molti colpi che, se tutto fosse veramente perfetto, centrerebbero il bersaglio; invece si registra

(*) A. N. Kolmogorov, matematico russo (1903-1987).

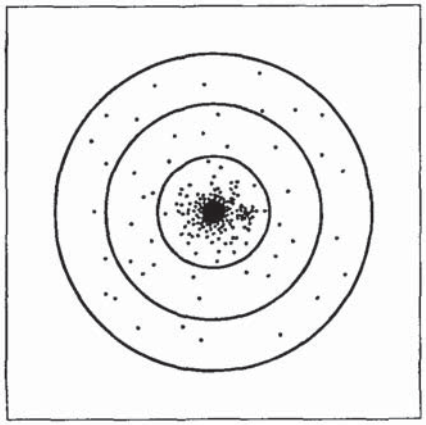


Fig. 5.32 Dispersione dei colpi attorno ad un bersaglio.

una dispersione come quella illustrata in figura. Ciò dipende dalla concorrenza di numerose cause ineliminabili, ognuna delle quali, singolarmente presa, avrebbe un effetto trascurabile sul risultato: per esempio, minime variazioni nella calibratura dei proiettili o nel meccanismo automatico di puntamento, impercettibili correnti d'aria nella stanza dovute a variazioni di temperatura, etc... La concomitanza di queste cause rende il fenomeno casuale. Ci chiediamo qual è la probabilità che un proiettile cada in una certa regione, per esempio, in una corona circolare centrata nel bersaglio.

Assumiamo il piano Oxy ortogonale alla traiettoria del proiettile con l'origine nel bersaglio come spazio dei campioni Ω; gli eventi elementari sono i punti del piano. È evidente che l'ipotesi di equiprobabilità degli eventi qui è irragionevole: i punti più vicini al bersaglio hanno una probabilità ben maggiore di essere colpiti di quelli più lontani. Gauss, che fu tra i primi a studiare matematicamente il problema, ha formulato, sulla base dell'osservazione sperimentale, la famosa "legge di distribuzione degli errori": la probabilità che un proiettile cada in una regione $E \subseteq \Omega$, $E \in \mathcal{M}$, è data da:

$$p(E) = \int_E \frac{e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} dx dy \tag{3.26}$$

dove $\sigma > 0$ è un parametro che dipende dalla precisione del dispositivo (più piccolo è σ, più preciso è il dispositivo; per esempio, si ricava dalla (3.26) che in un cerchio di raggio $R = 2\sigma\sqrt{\log 10} \approx 3\sigma$, centrato sul bersaglio, cade il 99% dei colpi sparati). La (3.26) corrisponde alla distribuzione normale (o gaussiana) bidimensionale.

Uno dei risultati più profondi del Calcolo delle Probabilità è la "dimostrazione" della congettura di Gauss, cioè il cosiddetto *teorema centrale limite*.

* 3.7 Gli spazi $L^1(E)$ e $L^2(E)$. Ancora sulle serie di Fourier

Come abbiamo visto, l'insieme $\mathcal{L}(E)$ delle funzioni integrabili sull'insieme (misurabile) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale lineare.

Vogliamo ora vedere se è possibile dotarlo di una norma.

Un primo tentativo, consistente nel porre

$$||f||_{\mathcal{L}(E)} := \int_E |f|$$

non riesce, poiché la proprietà fondamentale

$$||f|| = 0 \Rightarrow f = 0 \tag{3.27}$$

non è soddisfatta: infatti non c'è bisogno che sia $f(\mathbf{x}) = 0$ in tutti i punti di E perché risulti $\int_E |f| = 0$; basta che sia $f(\mathbf{x}) = 0$ q.o. in E (Teor. 3.3, proprietà 5.iv)). Con la definizione (3.26) le altre proprietà della norma sono invece soddisfatte, come facilmente si verifcia. Per ottemperare anche alla (3.27), procediamo come segue.

Date due funzioni $f, g \in \mathcal{L}(E)$, la relazione $f = g$ q.o. è evidentemente un'equivalenza:

$$f \approx g \Leftrightarrow f = g \quad \text{q.o. in } E\ .$$

Si considerano allora le classi di questa equivalenza che, per comodità di scrittura, saranno indicate con gli stessi simboli f, $g, \ldots$, utilizzati per indicare gli elementi di $\mathcal{L}(E)$. L'insieme di queste classi (cioè l'insieme quoziente di $\mathcal{L}(E)$ rispetto all'equivalenza introdotta) sarà indicato con $L^1(E)$. Scrivendo $f \in L^1(E)$ penseremo f come una classe di funzioni (tra loro equivalenti) oppure, indifferentemente, come una singola funzione (rappresentante della classe a cui appartiene).

Sugli elementi di $L^1(E)$ si definiscono al solito modo la somma e il prodotto per un numero, cosicché $L^1(E)$ è uno spazio lineare. Esso è anche normato, con la definizione

$$||f||_{L^1(E)} := \int_E |f|\ . \tag{3.28}$$

La definizione ora è buona, poiché, anzitutto, essa non dipende dalla funzione scelta per rappresentare la classe (funzioni q.o. uguali hanno lo stesso integrale); e poi, come facilmente si verifica, tutte le proprietà della norma sono ora soddisfatte; per esempio, la proprietà

$$||f||_{L^1(E)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

si legge ora : $\int_E |f| = 0$ se e solo se f appartiene alla classe di equivalenza che contiene la funzione 0, cioè se f è q.o. nulla (e ciò è vero, per la già ricordata proprietà 5.iv) del teorema 3.3) (*).

La metrica indotta dalla norma (3.28) è la *metrica integrale* di ordine 1 e la convergenza tipica di questo spazio è la *convergenza in media* (di ordine 1):

$$f_n \to f \quad \text{in } L^1(E) \quad \text{significa} \int_E |f_n - f| \to 0\ .$$

Il seguente risultato, che riportiamo senza dimostrazione, è stato uno dei più significativi successi della teoria di Lebesgue:

■ **Teorema 3.14** - *$L^1(E)$ è completo.*

Consideriamo ora l'insieme delle funzioni f misurabili tali che $|f|^2$ risulti integrabile su E (funzioni di quadrato integrabile). Lasciamo in vigore la convenzione precedentemente adottata circa le funzioni equivalenti e indichiamo con $L^2(E)$ l'insieme costituito dalle classi di equivalenza di queste funzioni. $L^2(E)$ è uno spazio lineare (ciò segue dalla disuguaglianza: $|f+g|^2 < 2|f|^2 + 2|g|^2$). In tale spazio possiamo introdurre un *prodotto scalare* ponendo:

$$< f, g >_{L^2(E)} := \int_E f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}d\mathbf{x} \tag{3.29}$$

(che il prodotto fg sia integrabile se f e g sono di quadrato integrabile segue dalla disuguaglianza: $|fg| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$).

Si verificano senza difficoltà tutte le proprietà del prodotto scalare, in particolare vale la *disuguaglianza di Schwarz*:

$$\left|\int_E f\overline{g}\right| \leq \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}\left(\int_E |g|^2\right)^{1/2}\ .$$

La norma indotta dal prodotto scalare (3.29) è

$$||f||_{L^2(E)} = \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}$$

e la corrispondente metrica è la *metrica integrale* di (ordine 2); la convergenza tipica di questo spazio è la *convergenza in media quadratica*:

(*) Per usare una pittoresca immagine, dovuta, sembra, allo stesso Lebesgue, possiamo dire che $L^1(E)$ è lo stesso spazio $\mathcal{L}(E)$ osservato con un microscopio il cui potere risolutore non permette di vedere gli insiemi di misura nulla, cosicché due funzioni q.o. uguali appaiono all'osservatore come la stessa funzione.

$$f_n \to f \quad \text{in } L^2(E) \quad \text{significa } \int_E |f_n - f|^2 \to 0 \ .$$

Ancora si può dimostrare il seguente risultato fondamentale.

■ **Teorema 3.15** - *$L^2(E)$ è completo.*

Abbiamo così ottenuto un esempio di spazio di Hilbert (non euclideo).

Lo spazio L^2 costituisce l'ambito più adatto per trattare adeguatamente un gran numero di problemi, sia della Matematica, che della Fisica e dell'Ingegneria. Gli conferisce questa prerogativa il fatto di essere, in un certo senso, l'estensione più naturale degli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) al caso infinito–dimensionale. Per illustrare meglio questo aspetto, riprendiamo in considerazione le serie di Fourier, già trattate nella sezione 2 del capitolo 3.

Nello spazio $L^2(-\pi,\pi)$ (sul campo reale) il sistema trigonometrico

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ , \ \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \ , \ \varphi_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \quad k = 1, \dots, 2, \dots$$

costituisce, come abbiamo già osservato, un sistema di funzioni ortogonali: abbiamo infatti

$$< \varphi_k, \varphi_j >= \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \dots,)$$

(dove abbiamo scritto $< \cdot, \cdot >$, in luogo di $< \cdot, \cdot >_{L^2(-\pi,\pi)}$). Esso possiede anche una proprietà, di fondamentale importanza, detta proprietà di *completezza*, che si può enunciare nella forma seguente:

Proposizione 3.16 - *L'unica funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ortogonale a tutte le funzioni del sistema trigonometrico è la funzione nulla* (cioè q.o. nulla).

Sia ora f una funzione 2π–periodica e di quadrato integrabile sull'intervallo $(-\pi,\pi)$; essa ammette i coefficienti di Fourier a_k e b_k, poiché gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

esistono per ogni k grazie alla disuguaglianza di Schwarz:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right| \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx \right)^{1/2}$$

Ripetendo i calcoli già svolti nel paragafo 3.2.5 (e utilizzando le stesse notazioni colà introdotte), ricaviamo i seguenti risultati:

i) anzitutto ritroviamo la disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right] \le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = ||f||^2 \ ;$$

ii) se

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k(x)$$

è la ridotta n–esima della serie di Fourier associata alla f, risulta (per $m < n$)

$$||s_n - s_m||^2 = < \sum_{k=2m+1}^{2n} c_k \varphi_k \ , \ \sum_{j=2m+1}^{2n} c_j \varphi_j >=$$

$$= \sum_{k=2m+1}^{2n} \sum_{j=2m+1}^{2n} c_k c_j < \varphi_k, \varphi_j >= \sum_{k=2m+1}^{2n} c_k^2 \ .$$

Poiché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ è convergente, la successione $\{s_n\}$ è fondamentale; per la completezza di $L^2(-\pi,\pi)$, la successione $\{s_n\}$ è convergente, cioè esiste una funzione $S \in L^2(-\pi,\pi)$ tale che

$$||s_n - S|| \to 0 \ .$$

iii) Questa funzione S possiede gli stessi coefficienti di Fourier della f; infatti, per ogni $k \le 2n$ risulta

$$< S, \varphi_k >=< S - s_n, \varphi_k > + < s_n, \varphi_k >=< S - s_n, \varphi_k > + c_k \ .$$

Prendendo il limite per n tendente all'infinito (e ricordando che si può portare il limite dentro il segno di prodotto scalare) abbiamo

$$< S, \varphi_k >= c_k \quad \forall k \ .$$

iv) Per la proposizione 3.16 risulta allora $S = f$ q.o.; infatti $S - f$ è una funzione di $L^2(-\pi,\pi)$ i cui coefficienti di Fourier sono tutti nulli, cioè è una funzione ortogonale a tutte le funzioni del sistema trigonometrico.

Abbiamo così dimostrato il seguente

■ **Teorema 3.17** - *La serie di Fourier di ogni funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ è convergente in media quadratica a f e vale la relazione*

$$||f||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \tag{3.31}$$

La (3.31) è detta *uguaglianza di Parseval*; essa segue immediatamente dalla *ii*) del Lemma 2.16.

Questo risultato, semplice e generale, indica che lo spazio L^2 è l'ambito naturale in cui sviluppare la teoria delle serie di Fourier. Ogni funzione di $L^2(-\pi,\pi)$ si rappresenta come combinazione lineare (infinita) di versori ortogonali (le φ_k), esattamente come in $\mathbb{R}^n$ ogni vettore si rappresenta come combinazione lineare (finita) dei vettori della base canonica. Viceversa, presa una qualunque successione di numeri c_k tale che $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$, risulta, per la (3.30), che la successione s_n è convergente ad una funzione f di $L^2(-\pi,\pi)$. Esiste dunque una corrispondenza $1 \leftrightarrow 1$ tra le funzioni di $L^2(-\pi,\pi)$ e le successioni $\{c_k\}$ tali che $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$ proprio come in $\mathbb{R}^n$ c'è una corripondenza $1 \leftrightarrow 1$ tra i punti $\mathbf{x}$ dello spazio e le corrispondenti coordinate cartesiane ortogonali $\{x_1,\dots,x_n\}$. L'uguaglianza di Parseval (3.31) è l'analogo dell'uguaglianza

$$||\mathbf{x}||^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

Osserviamo infine che il sistema trigonometrico è solo *un esempio* (il più noto) di sistemi di funzioni ortogonali e completi. Nelle applicazioni si incontrano molti altri sistemi di questo tipo (particolarmente utili sono i sistemi di *polinomi ortogonali*) per i quali potrebbero ripetersi, pressoché inalterate, le considerazioni sopra svolte per il sistema trigonometrico.

Esercizi

1. Dimostrare che una funzione $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ è finita q.o. in Ω.
[Prima si osservi che gli insiemi $\Omega^4_{+\infty} := \{f = +\infty\}$ e $\Omega^4_{-\infty} := \{f = -\infty\}$ sono misurabili; per esempio, $\Omega^4_{+\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k(f,\Omega)\dots$. Si ragioni poi per assurdo, utilizzando il Lemma 3.6]

2. Dimostrare le seguenti relazioni, utilizzando il teorema di Lebesgue:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/2} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \Gamma(\alpha)\ ,\ \alpha > 0$$

Queste relazioni possono essere dimostrate anche utilizzando i risultati del capitolo 3?

3. Ricavare la formula

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}\ ,\ p > -1\ .$$

[Rappresentare $\dfrac{1}{1-x}$ con la serie geometrica ...]

4. Sia $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ $(0 < a < b)$. Si calcoli esplicitamente

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \log\frac{b}{a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = 0$$

Si giustifichi il risultato.

[Conviene calcolare direttamente anche $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|dx$]

5. Dimostrare che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ di una funzione $f \in \mathcal{L}(a,b)$ è continua in $[a,b]$. [Usare il Lemma 3.6]

6. Si calcoli, giustificando il procedimento in base al teorema 3.10, la derivata delle funzioni

$$t \mapsto \int_0^1 \log(x^2 + t^2)dx$$

$$0 < t \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

7. Stabilire se, per le seguenti funzioni, esistono gli integrali iterati e se sono uguali.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1-xy)^{\alpha}}$ $\quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} x^{-4} & \text{per } y < x^2 \\ -y^{-2} & \text{per } y > x^2 \end{cases}$ $\quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$

iv) f come in *iii)* $\quad (x,y) : 0 < x < \infty, 1 < y < \infty$

8.* Se, nel teorema di Beppo Levi, cade l'ipotesi di monotonia, l'esistenza del limite non è più garantita. Vale però il seguente risultato:

Lemma di Fatou: sia f_k una successione di funzioni integrabili su Ω, non negative, allora

$$\int_{\Omega} \liminf_{k\to\infty} f_k \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k$$

[Si ponga $g_k(\mathbf{x}) = \inf_{j \ge k} f_j(\mathbf{x})$ e alla successione $\{g_k\}$ si applichi il teorema di Beppo Levi...]

Si formuli un analogo enunciato per funzioni f_k non positive.

Superfici ed integrali di superficie 6

Questo capitolo consiste essenzialmente di 2 parti.

Nella prima sono esposti gli aspetti principali della geometria differenziale delle superfici nello spazio tridimensionale. Precisamente, nella sezione 1 i concetti principali sono quelli di piano tangente, di metrica, di area. Nella sezione 2, meno elementare, si affronta lo studio delle curvature delle sezioni di una superficie, pervenendo così alle nozioni di *curvatura media* e *curvatura gaussiana*.

La seconda parte del capitolo è dedicata ai teoremi di Green, Gauss e Stokes, fondamentali sia in geometria differenziale che nella teoria (matematica e fisica) dei campi vettoriali.

In tutto il capitolo gli integrali possono essere considerati sia come integrali secondo Riemann sia secondo Lebesgue.

1. SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

1.1 Definizioni principali. Superfici regolari

La definizione di *curva* come coppia insieme-parametrizzazione rispecchia la duplice natura geometrico–cinematica di regione dello spazio nella quale una particella si muove con un grado di libertà.

Analogamente si pensa ad una *superficie* come ad una regione dello spazio in cui una particella ha la possibilità di muoversi con *due* gradi di libertà.

Diversamente dal caso delle curve, l'aspetto cinematico è però meno rilevante di quello geometrico. Ciò, in ultima analisi, è dovuto al fatto che le superfici, contrariamente alle curve, possiedono una *geometria intrinseca*. È questo un concetto profondo che può essere sviluppato solo in un corso di *geometria differenziale*. Si pensi comunque alle proprietà metriche di una curva. Esse sono identiche a quelle di una retta: introducendo come parametro l'ascissa curvilinea si può *deformare* la curva in un segmento di retta in modo che le lunghezze rimangano invariate.

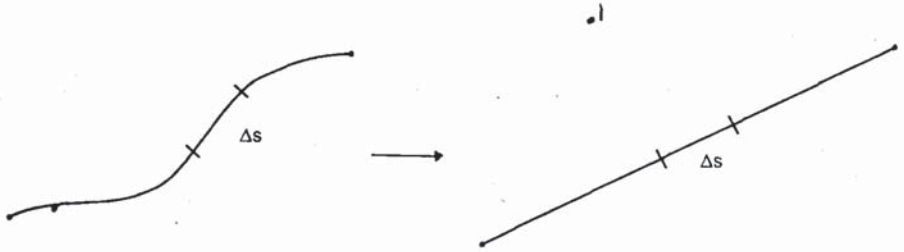


Fig. 6.1 Deformazione isometrica di una curva in un segmento di retta.

Non così per una superficie, per lo meno non per tutte. Ad esempio la metrica su una sfera (ovvero il modo di calcolare le distanze tra i punti su di essa), è *diversa* da quella del piano: se si deforma una calotta in una porzione di piano le distanze tra i punti si alterano. Il concetto chiave in queste questioni è quello di curvatura gaussiana che svilupperemo nella sezione 2. Può essere interessante osservare che Gauss orientò le sue ricerche verso la geometria differenziale delle superfici per risolvere problemi di topografia.

Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e T un insieme tale che:

$$A \subseteq T \subseteq \overline{A}$$

(ciò implica, fra l'altro, che l'insieme dei punti interni di T, $\overset{\circ}{T}$, coincide con A). Sia

$$\mathbf{r}\colon T \to \mathbb{R}^3$$

una funzione *continua*; indichiamo con Σ l'immagine di T: $\Sigma = \mathbf{r}(T)$; si noti che Σ è connesso. La funzione $\mathbf{r}$ si chiama *parametrizzazione* di Σ.

Definizione 1.1 - *Si dice* **superficie** *in* $\mathbb{R}^3$ *una coppia* $(\Sigma, \mathbf{r})$ *dove* Σ *è un insieme di* $\mathbb{R}^3$ *ed* $\mathbf{r}$ *una sua parametrizzazione* (*).

La definizione 1.1 è analoga a quella data per le curve; tuttavia, per le ragioni sopra esposte, nel caso delle superfici fisseremo maggiormente l'attenzione sull'insieme Σ e sulle sue proprietà geometriche, cioè quelle indipendenti dalla parametrizzazione. Ciò giustifica l'uso di locuzioni improprie ma comode quali: "la superficie Σ di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$" oppure semplicemente, "la superficie Σ", sottintendendo la parametrizzazione.

Esplicitamente una parametrizzazione è assegnata mediante l'equazione

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in T.$$

(*) In Geometria differenziale la parametrizzazione si chiama più propriamente "carta" della superficie.

oppure, in forma vettoriale,

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}\ . \tag{1.1}$$

Si noti che nella definizione 1.1 rientrano i grafici di funzioni $f\colon T \to \mathbb{R}$, $f \in C(T)$, che chiameremo *superfici cartesiane*; infatti, se, ad esempio, Σ è il grafico di una funzione del tipo $z = f(x,y)$, una parametrizzazione di Σ è assegnata dall'equazione

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k} \quad (x,y) \in T\ . \tag{1.2}$$

D'altra parte, senza ulteriori restrizioni, Σ può degenerare in insiemi che sono ben lontani dall'idea intuitiva di superficie. Ad esempio, se $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0$ (costante), Σ si riduce ad un punto, mentre se $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(u)$ oppure $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(v)$, Σ si riduce ad una curva.

Restringeremo perciò le nostre considerazioni a superfici *non degeneri* nel senso che ora preciseremo.

Anzitutto, *se* $\mathbf{r} \in C^k(\overset{\circ}{T})$, $k \geq 1$, *diremo che la superficie è di classe* C^k.

Definizione 1.2 - *Sia* Σ *una superficie di classe* C^1 *di equazione* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in T$. *Un punto* $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0,v_0)$, *dove* $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{T}$, *si dice regolare se la matrice*

$$\begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ha caratteristica 2. In caso contrario il punto si dirà singolare.

La superficie Σ *si dirà regolare se è di classe* C^1 *e se per ogni* $(u,v) \in \overset{\circ}{T}$, $\mathbf{r}(u,v)$ *è punto regolare.*

Osserviamo subito che *una superficie cartesiana è regolare se la funzione* f *che la definisce è di classe* C^1; ad esempio, se l'equazione della superficie è la (1.2), la matrice (1.3) prende la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix}$$

che ha sempre caratteristica 2.

Il significato geometrico della definizione di regolarità 1.3 è il seguente: se $\mathbf{p}$ è un punto regolare, allora in un intorno di $\mathbf{p}$, la superficie ammette una rappresentazione cartesiana. Sia infatti Σ una superficie di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ e sia $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ un suo punto di regolarità; allora almeno uno dei tre determinanti seguenti è diverso da zero in (u_0,v_0):

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = y_u z_v - y_v z_u$$

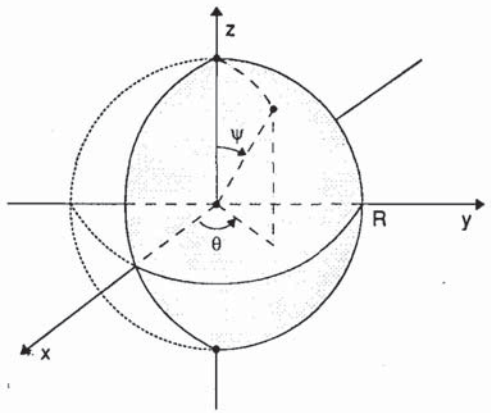


Fig. 6.2 L'emisfero destro della superficie sferica di raggio R e centro $\mathbf{0}$: θ è la *longitudine*, ψ la *colatitudine*.

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = z_u x_v - z_v x_u \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u \ .$$

Sia, per fissare le idee, il terzo di questi determinanti non nullo.

In base al teorema di inversione locale (Teor. 7.2.3, Vol. I), dalle equazioni

$$\begin{cases} x = & x(u,v) \\ y = & y(u,v) \end{cases}$$

si possono ricavare, in un intorno di $\mathbf{p}$, $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ che, sostituite in $z = z(u,v)$, forniscono l'equazione cartesiana di Σ

$$z = z(u(x,y), v(x,y)) := f(x,y) \ .$$

***Esempio* 1.1** - L'emisfero destro della superficie sferica di raggio R e centro $\mathbf{0}$ può essere descritto dall'equazione cartesiana

$$y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2} \quad (x,z) \in T = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 < R^2\} \tag{1.5}$$

oppure dall'equazione parametrica

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta,\psi) &= R\cos\theta\sin\psi\,\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\psi\,\mathbf{j} + R\cos\psi\,\mathbf{k} \\ (\theta,\psi) &\in T = (0,\pi)\times(0,\pi) \end{aligned} \tag{1.6}$$

La matrice (1.3) in questo caso è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\psi & y_\psi & z_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\psi & R\cos\theta\sin\psi & 0 \\ R\cos\theta\cos\psi & R\sin\theta\cos\psi & -R\sin\psi \end{pmatrix}$$

che ha caratteristica 2 per $(\theta,\psi) \in T$. Si tratta di una superficie di classe C^∞, regolare.

Si osservi che scegliendo, nella (1.6), $T = [0,2\pi]\times[0,\pi]$, l'equazione descrive *tutta* la superficie sferica.

***Esempio* 1.2** - Le equazioni

$$z = \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2} \ , \ (x,y) \in R^2\backslash\{0,0\}, a,b \in \mathbb{R}_+ \tag{1.7}$$

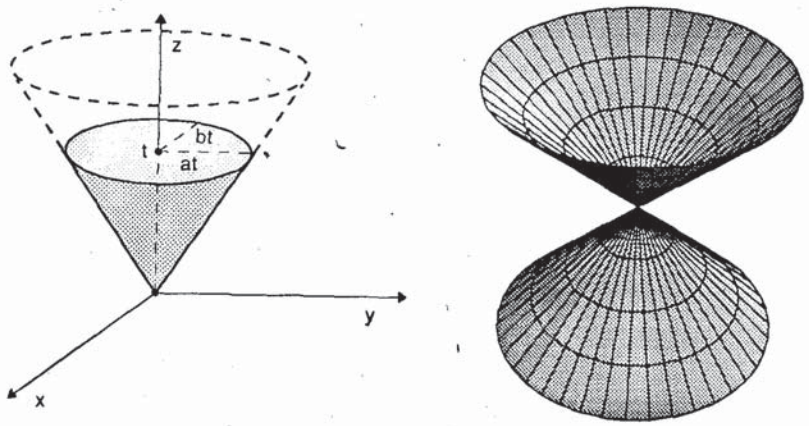
oppure

$$\mathbf{r}(\theta,t) = at\cos\theta\,\mathbf{i} + bt\sin\theta\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \ \text{ con } (\theta,t) \in T = [0,2\pi]\times\mathbb{R}_+ \tag{1.8}$$

definiscono una superficie regolare di classe C^∞ che, come mostrato in figura 6.3a, è un cono a sezione ellittica, privato del vertice. Se, nella (1.8), si prende $T = [0,2\pi]\times\mathbb{R}$, l'equazione descrive il cono doppio (a due falde); l'origine è allora un punto singolare.

Oltre a superfici definite mediante equazioni parametriche o cartesiane, è utile considerare un terzo tipo di superfici definite come insiemi di livello di funzioni di tre variabili. Precisamente, sia $F: A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^3$, $F \in C^1(A)$ e consideriamo l'insieme di livello E_0 di equazione

$$F(x,y,z) = 0 \ . \tag{1.9}$$



a) Cono a sezione ellittica. **Fig. 6.3** b) Cono doppio.

Diremo che E_0 definisce una superficie Σ *se* $\nabla F(x,y,z) \neq \mathbf{0}$ *in ogni punto di* E_0, *tranne al più in un numero finito di punti.*

Tale definizione di superficie si concilia localmente con quella data come coppia insieme–parametrizzazione. Infatti se $(x_0, y_0, z_0) \in E_0$ e $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}, E_0$ coincide, in un intorno di (x_0, y_0, z_0) (Teor. 7.3.5 Vol. I), con il grafico di una funzione di due variabili, dunque con una superficie cartesiana. Si dice che (1.9) definisce Σ implicitamente.

I punti E_0 in cui $\nabla F = \mathbf{0}$ si dicono *singolari* in accordo con quanto già visto nel paragrafo 7.3.5, volume 1. Se non esistono punti singolari la superficie Σ si dirà *regolare*.

***Esempio* 1.3** - L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ definisce implicitamente una sfera; non vi sono punti singolari. L'equazione $z^2 - x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ definisce un cono ellittico (a due falde) che ha un punto singolare nell'origine. Più in generale, un'equazione del tipo

$$Q(x,y,z) = 0 \ ,$$

dove Q è un polinomio di secondo grado soddisfacente opportune condizioni (Esercizio 1), definisce una superficie algebrica di nome *quadrica*.

1.2 Bordo di una superficie. Superfici regolari a pezzi

Se Σ è una superficie di equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ e la restrizione di $\mathbf{r}$ a $\mathring{T}$ è 1–1, la superficie si dice *semplice*.

L'emisfero dell'esempio 1.1 è una superficie semplice. In generale, le superfici in forma cartesiana sono semplici. Anche la superficie sferica di equazione (1.6) con $T = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ è semplice; si noti che, scegliendo ad esempio $T = \mathbb{R}^2$, si ottiene invece una superficie non semplice.

Avremo bisogno più avanti delle nozioni di *bordo* di una superficie e di superficie *chiusa*. Si tratta di concetti piuttosto delicati e perciò, in questa introduzione, ci limitiamo a superfici Σ di equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) \in C^1(T)$, dove T è *aperto*.

Chiamiamo *bordo* di Σ l'insieme

$$\partial\Sigma := \overline{\Sigma} \backslash \Sigma$$

dove $\overline{\Sigma}$ è la chiusura di Σ in $\mathbb{R}^3$.

Il *bordo* di Σ può ridursi ad un punto come nel caso del cono privato del vertice: $\overline{\Sigma} \backslash \Sigma$ si riduce al vertice stesso. Può essere una linea regolare: nel caso dell'emisfero dell'esempio 1.1, $\partial\Sigma$ coincide con il cerchio massimo passante per i poli.

Può anche essere vuoto come nel caso del paraboloide di equazione

$$z = x^2 + y^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Se Σ *coincide* con l'insieme di livello $F(x,y,z) = 0$ (con F di classe C^1), per la continuità di F, Σ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^3$ e quindi $\overline{\Sigma} \backslash \Sigma = \emptyset$. È il caso, ad esempio, della sfera.

Le superfici senza bordo (cioè con $\partial\Sigma = \emptyset$) e *limitate* in $\mathbb{R}^3$ si dicono *chiuse*. Si osservi dunque che la superficie è *chiusa* non quando Σ è un chiuso in $\mathbb{R}^3$, bensì quando è anche *limitato*, ovvero un compatto in $\mathbb{R}^3$. Ciò è in accordo con l'intuizione in quanto, secondo questa definizione, un paraboloide *non* è una superficie chiusa mentre una sfera lo è.

Come si nota dalla definizione i concetti di bordo e di superficie chiusa *non* dipendono dalla parametrizzazione (ricordiamo che T deve essere *aperto*).

Possiamo infine allargare il nostro concetto di superficie a quelle di classe C^1 a pezzi. Come modello si può pensare ad un poliedro, che può essere suddiviso da un numero finito di segmenti (*spigoli*) in un numero finito di superfici piane (*facce*).

Definizione 1.3 - *Diremo che* $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ *rappresenta una superficie* C^1 *a pezzi se esistono un numero finito di curve regolari a tratti (dette spigoli)* $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, *contenute in* Σ, *che suddividono* Σ *in un numero finito* N_0 *di superfici di classe* C^1 *(dette facce).*

Più precisamente deve essere: $\Sigma \backslash \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Sigma_i$ dove ogni Σ_i ammette una parametrizzazione $\mathbf{r}: T_i \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \in C^1(T_i)$, T_i aperto di $\mathbb{R}^2$ e dove ogni γ_j non può essere parte del bordo di più di due facce.

Il bordo $\partial\Sigma$ di Σ è in questo caso costituito dall'unione dei bordi delle Σ_j con esclusione degli spigoli che appartengono al bordo di due facce adiacenti.

Se ogni faccia di una superficie C^1 a pezzi è regolare diremo che la superficie è regolare a pezzi.

Diremo che Σ, C^1 a pezzi, è *chiusa* se $\partial\Sigma = \emptyset$ e se è limitata.

Tipici esempi di superfici regolari a pezzi sono, oltre ai già citati poliedri, l'unione di due calotte sferiche aventi il bordo circolare in comune o la superficie laterale di un tronco di piramide (fig. 6.4).

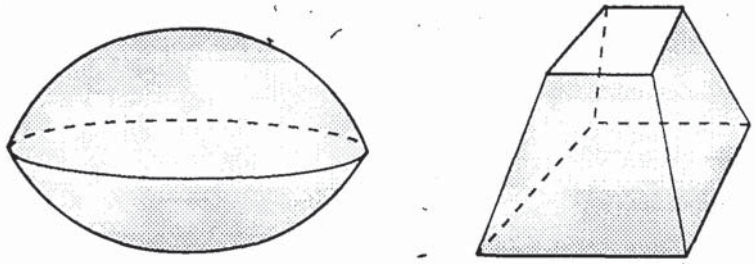


Fig. 6.4 Esempi di superfici C^1 a pezzi: guscio formato da due calotte sferiche (superficie chiusa) e superficie laterale di un tronco di piramide ($\partial\Sigma$ è l'unione dei bordi di due quadrilateri, basi del tronco.

1.3 Linee coordinate. Coordinate locali. Cambiamento di parametri

La condizione di regolarità di un punto può essere espressa in un altro modo, più utile per il prosieguo della teoria. A tale scopo, per una superficie regolare di equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, introduciamo le curve di equazione

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, \overline{v}) \ , \quad v \mapsto \mathbf{r}(\overline{u}, v) \tag{1.10}$$

che si ottengono, cioè, considerando $v = \overline{v} =$ costante o $u = \overline{u} =$ costante.

Le (1.10) si chiamano *linee coordinate sulla superficie* (fig. 6.5). In questo contesto u e v si chiamano *coordinate locali* dei punti sulla superficie.

Ad esempio, per la superficie sferica di equazione (1.6) con $(\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times (0, \pi)$, le linee coordinate corrispondono ai meridiani ($\theta =$ costante) ed ai paralleli ($\psi =$ costante).

I vettori tangenti alle linee coordinate, sono assegnati dalle formule seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(u, v) &= x_u(u, v)\,\mathbf{i} + y_u(u, v)\,\mathbf{j} + z_u(u, v)\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= x_v(u, v)\,\mathbf{i} + y_v(u, v)\,\mathbf{j} + z_v(u, v)\,\mathbf{k} \ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ora, eseguendo il prodotto vettoriale tra $\mathbf{r}_u$ ed $\mathbf{r}_v$ si ottiene:

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{k} \ .$$

Ricordando le (1.4) si deduce che:

$\mathbf{r}(u, v)$ *è regolare se e solo se* $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ *ovvero se* $\mathbf{r}_u$ *ed* $\mathbf{r}_v$ *sono linearmente indipendenti.*

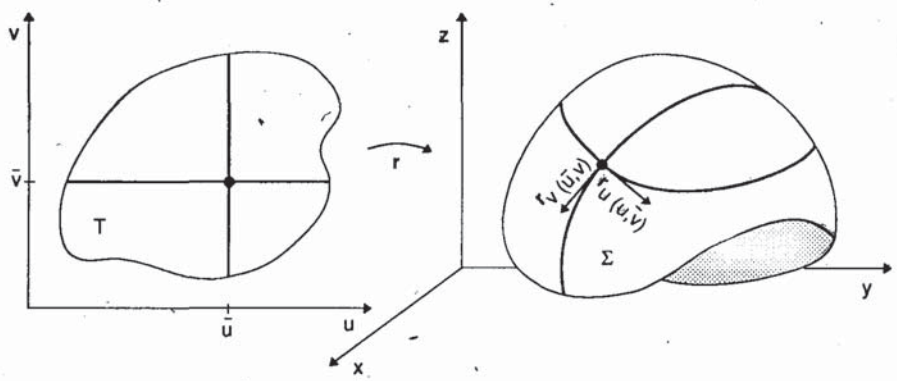


Fig. 6.5 Linee coordinate e vettore tangente.

I vettori $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ giocheranno un ruolo fondamentale nel seguito.

Come abbiamo già visto negli esempi 1.1 e 1.2 diverse equazioni parametriche possono individuare lo stesso insieme Σ. Dal punto di vista geometrico è importante isolare le quantità che rimangono invariate in un cambiamento di parametri (o di coordinate locali).

Sia Σ una superficie regolare di equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \ , \ (u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Introduciamo il cambiamento di parametri definito dalle equazioni

$$u = \varphi(s, t) \ , \quad v = \psi(s, t) \tag{1.12}$$

dove $(s, t) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\varphi, \psi \in C(S)$.

Supponiamo che $\varphi, \psi \in C^1(\overset{\circ}{S})$, che $\partial(\varphi, \psi)/\partial(s, t) \neq 0$ in $\overset{\circ}{S}$ e che le (1.12) realizzino una corrispondenza biunivoca tra S e T. Se valgono le ipotesi indicate il cambiamento di variabile si dirà *regolare*. La superficie è allora descritta dall'equazione

$$\tilde{\mathbf{r}}(s, t) = \tilde{x}(s, t)\,\mathbf{i} + \tilde{y}(s, t)\,\mathbf{j} + \tilde{z}(s, t)\,\mathbf{k}$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s, t) &= x(\varphi(s, t), \ \psi(s, t)), \\ \tilde{y}(s, t) &= y(\varphi(s, t), \ \psi(s, t)), \\ \tilde{z}(s, t) &= z(\varphi(s, t), \ \psi(s, t)) \ . \end{aligned}$$

Nelle nuove coordinate locali si ha:

$$\tilde{\mathbf{r}}_s = \mathbf{r}_u \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \psi}{\partial s} \ , \quad \tilde{\mathbf{r}}_t = \mathbf{r}_u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_s \wedge \tilde{\mathbf{r}}_t &= \left(\mathbf{r}_u \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \wedge \left(\mathbf{r}_u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, t)} \ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \ . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si deduce dalla (1.14) che la regolarità dei punti *non* cambia se si opera una trasformazione regolare di parametri: se $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, in $\mathbf{p} \in \Sigma$ anche $\tilde{\mathbf{r}}_s \wedge \tilde{\mathbf{r}}_t \neq \mathbf{0}$ in $\mathbf{p}$.

Le (1.13) indicano che le coppie di vettori $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ e $\tilde{\mathbf{r}}_s, \tilde{\mathbf{r}}_t$ individuano lo stesso piano, che, come vedremo nel prossimo paragrafo, sarà detto *piano tangente* alla superficie.

Due parametrizzazioni $\mathbf{r}$ ed $\tilde{\mathbf{r}}$ di una stessa superficie Σ si dicono *equivalenti* se sono legate da un cambiamento regolare di parametri con determinante jacobiano *positivo*. In questo caso si vede che i due vettori $\tilde{\mathbf{r}}_s \wedge \tilde{\mathbf{r}}_t$ e $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ hanno *stessa direzione e verso*.

È facile verificare che la relazione appena introdotta tra le parametrizzazioni di una stessa superficie è una relazione di equivalenza. Ritorneremo più avanti sul suo significato geometrico.

Esempi

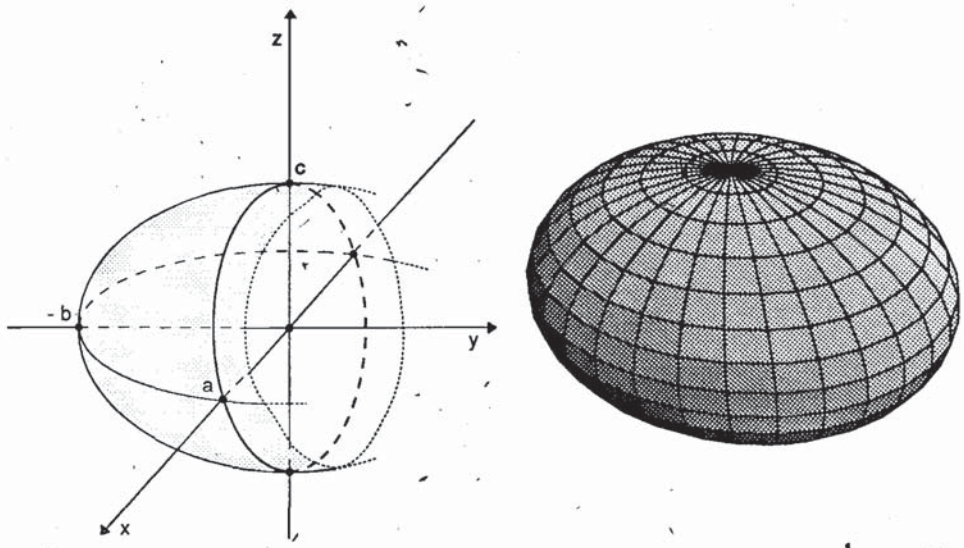
1.4. Sia $\mathbf{r}(u,v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v)\mathbf{i} + (y_0 + a_2 u + b_2 v)\mathbf{j} + (z_0 + a_3 u + b_3 v)\mathbf{k}$ dove $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, 2, 3$.

Se i due vettori $\mathbf{r}_u = \mathbf{a} := a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_v = \mathbf{b} := b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ sono indipendenti, allora l'equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ definisce un piano passante per (x_0, y_0, z_0) e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ è un vettore normale al piano. In questo caso la superficie è regolare.

Le linee coordinate $u = \overline{u}$ e $v = \overline{v}$ costituiscono una rete di rette parallele rispettivamente a $\mathbf{b}$ e ad $\mathbf{a}$.

Il piano può essere descritto dall'equazione (implicita):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$



a) b)

Fig. 6.6 Ellissoide.

1.5. L'equazione

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}_+)$$

definisce una superficie chiusa di classe C^∞ che si chiama *ellissoide* di semiassi a, b, c (fig. 6.6). Infatti $\nabla F(x,y,z) = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ e non vi sono punti singolari; la rappresentazione cartesiana è possibile in un intorno di ciascun punto. Ad esempio, nell'intorno del punto $(0,0,c)$ l'equazione definisce

$$z = c(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2} .$$

Lo stesso ellissoide si può rappresentare mediante l'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(\theta, \psi) = a\cos\theta\sin\psi\,\mathbf{i} + b\sin\theta\sin\psi\,\mathbf{i} + c\cos\psi\,\mathbf{k} \tag{1.15}$$

con $(\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Si ha

$$\mathbf{r}_\theta = -a\sin\theta\sin\psi\,\mathbf{i} + b\cos\theta\sin\psi\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_\psi = a\cos\theta\cos\psi\,\mathbf{i} + b\sin\theta\cos\psi\,\mathbf{j} - c\sin\psi\,\mathbf{k} .$$

Si noti che i due vettori $\mathbf{r}_\theta$ e $\mathbf{r}_\psi$ sono linearmente indipendenti per $\psi \neq 0, \pi$.

1.6 L'equazione (in $\mathbb{R}^3$)

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (z \in \mathbb{R})$$

con $R > 0$, definisce un cilindro infinito di raggio R.

Si tratta di una superficie di classe C^∞; non vi sono punti singolari.

Lo stesso cilindro ammette la rappresentazione parametrica

$$\mathbf{r}(\theta, v) = R\cos\theta\,\mathbf{i} + R\sin\theta\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$$

con $(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

In questa rappresentazione le linee coordinate sono cerchi (v = costante) e rette parallele all'asse z (θ = costante). Si ha:

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, v) = -R\sin\theta\,\mathbf{i} + R\cos\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_v(\theta, v) = \mathbf{k}$$

e pertanto i due vettori sono linearmente indipendenti per ogni $(\theta, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$; non vi sono punti singolari.

Limitandosi a $|z| < M$ si ottiene un cilindro finito di altezza $2M$. In questo caso la superficie ha come *bordo* l'unione delle due circonferenze

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x^2 + y^2 = R^2,\; z = +M\}$ e $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2 + y^2 = R^2,\; z = -M\}$.

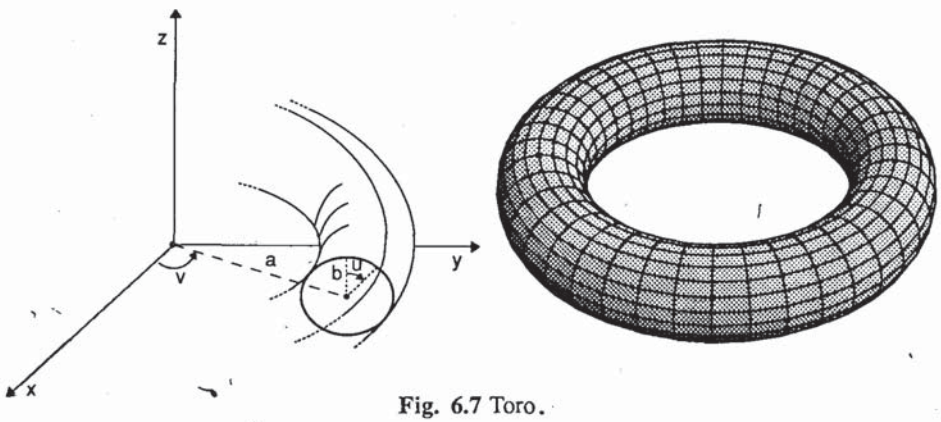


Fig. 6.7 Toro.

1.7. Sia $\mathbf{r}(u,v) = (a + b\sin u)\cos v\,\mathbf{i} + (a + b\sin u)\sin v\,\mathbf{j} + b\cos u\,\mathbf{k}$ con

$$0 < b < a \quad \text{e} \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] .$$

Si tratta di una superficie chiusa, di classe C^∞, che si chiama *toro*; la forma è quella di una ciambella o di un salvagente, come si vede in figura 6.7, dove sono indicati anche i significati di u, v e di a, b.

Le linee coordinate si chiamano *cerchi meridiani* (v = costante) e *cerchi paralleli* (u = costante).

Si ha:

$$\mathbf{r}_u(u,v) = b\cos u\cos v\,\mathbf{i} + b\cos u\sin v\,\mathbf{j} - b\sin u\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v(u,v) = -(a + b\sin u)\sin v\,\mathbf{i} + (a + b\sin u)\cos v\,\mathbf{j} .$$

Per $u \neq 0, \pi$ è chiaro che $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ sono indipendenti; per $u = 0$ e $u = \pi$ sono ortogonali, dunque ancora indipendenti. Non vi sono pertanto punti singolari.

Si noti che lo stesso *toro* è rappresentabile implicitamente dall'equazione

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 .$$

1.8. (*Superfici di rivoluzione*). Se si fa ruotare una curva piana γ intorno ad una retta (asse) giacente nel piano della curva si ottiene una *superficie di rivoluzione*; γ si chiama *generatrice*.

Se il piano è il piano di equazione $x = 0$, la retta è l'asse z e la curva ha equazioni parametriche

$$y = f(t) \ , \ z = g(t) \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R} ,$$

la corrispondente superficie di rivoluzione ha equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(\theta,t) = f(t)\cos\theta\,\mathbf{i} + f(t)\sin\theta\,\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k} \tag{1.16}$$

dove $(\theta,t) \in [0,2\pi] \times I$ (fig. 6.8).

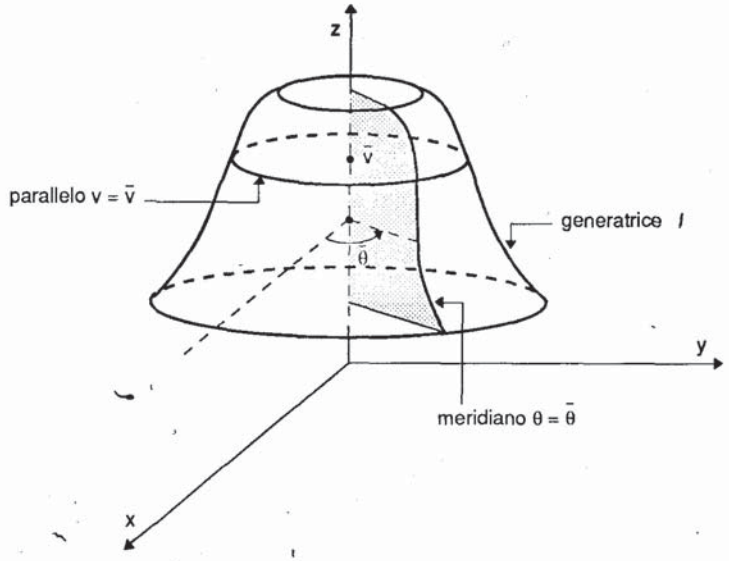


Fig. 6.8 Superficie di rivoluzione.

Se la curva è di classe $C^k(I)$, la superficie sarà della stessa classe.

Se la curva è *chiusa* anche la superficie risulterà *chiusa*. Sfera, toro, ellissoide (con 2 semiassi uguali), cono (a sezione circolare) sono esempi di superfici di rivoluzione; le prime 3 sono inoltre chiuse.

Le linee coordinate θ = costante corrispondono alle diverse posizioni assunte dalla generatrice e si chiamano *linee meridiane* mentre quelle corrispondenti a t = costante sono cerchi e si chiamano *paralleli*.

Ad esempio, prendiamo come generatrice la *catenaria* di equazione

$$y = \mathrm{Ch}\,t , \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

La superficie di rivoluzione corrispondente si chiama *catenoide*; è semplice e di classe C^∞ in $[0,2\pi] \times \mathbb{R}$ ed ha equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(\theta,t) = \mathrm{Ch}\,t\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{Ch}\,t\sin\theta\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} .$$

Si ha:

$$\mathbf{r}_\theta(\theta,t) = -\mathrm{Ch}\,t\sin\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{Ch}\,t\cos\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_t(\theta,t) = \mathrm{Sh}\,t\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{Sh}\,t\sin\theta\,\mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

Essendo questi vettori sempre linearmente indipendenti, la catenoide è regolare.

Esercizi

1. Le *quadriche* sono superfici definite da equazioni della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \ .$$

Con una roto–traslazione le quadriche *non degeneri e reali* si riducono alle seguenti:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(ellissoide)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(iperboloide ad una falda)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(iperboloide a due falde)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad \text{(paraboloide ellittico)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad \text{(paraboloide iperbolico: sella di cavallo)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \quad \text{(cono doppio)}$$

Verificare regolarità, connessione e chiusura delle quadriche indicate.
Trovare una rappresentazione parametrica, studiandone le linee coordinate.

2. La superficie di equazione

$$\mathbf{r}(u,v) = v\cos f(u)\,\mathbf{i} + v\sin f(u)\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$$

dove $f(u)$ è una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo $[a,b]$, si chiama *conoide retto*.
Studiarne la regolarità e le linee coordinate $u =$ costante e $v =$ costante; calcolare $\mathbf{r}_u$ ed $\mathbf{r}_v$.

3. *Elicoide*. Esaminare più in dettaglio il caso particolare di conoide, dato dall'equazione

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k} \ .$$

Questa superficie si chiama *elicoide* ed è rappresentata in figura 6.24.

4. Verificare che il toro dell'esempio 1.7 è una superficie di rivoluzione chiusa.
Qual è la generatrice?

5. Sia $\mathbf{r}(u,v)$ il toro dell'esempio 1.7. Descrivere la curva $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(\alpha u, u)$, $u \in \mathbb{R}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Sia $z = f(y)$ una curva nel piano y, z. Verificare che la superficie di rivoluzione attorno all'asse z ha equazione $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

7. Per la superficie di rivoluzione (1.16) dell'esempio 1.8 calcolare $\mathbf{r}_\theta(\theta,t)$ e $\mathbf{r}_t(\theta,t)$.

1.4 Vettore normale. Piano tangente. Orientazione

D'ora in poi, per lo sviluppo della teoria, interverranno solo i punti interni a T; per evitare un appesantimento nelle notazioni *supporremo*, nel prosieguo di questa sezione, T *aperto*.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), (u,v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$ l'equazione di una superficie Σ regolare. I due vettori $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ sono pertanto linearmente indipendenti per ogni $(u,v) \in T$.

Sia ora γ una curva regolare contenuta in T di equazioni parametriche $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. La curva di equazione

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \tag{1.17}$$

è allora una curva regolare giacente sulla superficie con vettore tangente

$$\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \mathbf{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{r}_v(u(t), v(t))v'(t) \ . \tag{1.18}$$

La (1.18) indica che $\tilde{\mathbf{r}}'$ è contenuto nel piano dei vettori $\mathbf{r}_u$ ed $\mathbf{r}_v$.

D'altra parte, fissato un punto $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, ogni curva regolare passante per $\mathbf{p}_0$ e giacente su Σ si può rappresentare localmente nella forma (1.17) (*) e quindi il suo vettore tangente è contenuto nel piano dei vettori $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$, per quanto spiegato nel paragrafo precedente. Il piano parallelo a questo e passante per $\mathbf{p}_0$, contiene dunque *tutte* le rette tangenti ad ogni curva regolare passante per $\mathbf{p}_0$ e giacente sulla superficie. Per questa ragione è detto *piano tangente* a Σ nel punto $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Le formule (1.13) indicano che tale piano è invariante per cambi di parametrizzazione regolari. La sua equazione è la seguente, ricordando che $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ è normale ad $\mathbf{r}_u$ ed $\mathbf{r}_v$.

$$< \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}(u_0, v_0) \ , \ \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{r}_v(u_0, v_0) >= 0$$

dove $\boldsymbol{\xi} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ è il punto corrente sul piano. La formula precedente può essere scritta nella forma seguente:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Il vettore $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ è un *vettore normale* alla superficie; il versore corrispondente sarà indicato con la lettera $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|} \ . \tag{1.19}$$

(*) Ricordando che localmente Σ è rappresentabile, ad esempio, dall'equazione $z = f(x,y)$ si deduce che ogni curva $(x(t), y(t), z(t))$ giacente in Σ si potrà scrivere nella forma (1.17)

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + f(x(t), y(t))\,\mathbf{k} \ .$$

***Esempio* 1.9** - Sia $z = f(x, y)$ l'equazione di una superficie, con $f \in C^1(T)$, T aperto connesso di $\mathbb{R}^2$.

L'equazione vettoriale della superficie ha la forma

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k} \ .$$

Dunque si ha:

$$\mathbf{r}_x(x, y) = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \ , \ \mathbf{r}_y(x, y) = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \ , \ \|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \ ,$$

ed infine

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) \ .$$

Il piano tangente alla superficie nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0 \ , \quad (z_0 = f(x_0, y_0))$$

che coincide con la (7.1.8) del volume 1.

Tra i due versori normali $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ converremo di chiamare $\mathbf{n}$ *il versore* normale. La scelta di $\mathbf{n}$ o $-\mathbf{n}$ come *versore normale* corrisponde intuitivamente a privilegiare uno dei due "lati" di una superficie (*); ad esempio, il lato interno o quello esterno di una superficie sferica. Situazioni in cui occorre scegliere un verso per la normale si presentano spesso nelle scienze applicate, come vedremo più avanti.

Più precisamente, la scelta di uno dei due versori $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ è legata al concetto di *orientazione* di una superficie. Sia Σ una superficie regolare; supponiamo che sia possibile scegliere il versore normale in modo che, partendo da un punto $\mathbf{p}_0 \in \Sigma$ e seguendo una qualunque curva regolare e chiusa (che, dunque, ritorni in $\mathbf{p}_0$) sulla superficie, il versore normale vari con continuità e ritorni nella posizione iniziale. In tale caso diremo che la superficie è *orientabile* e che la scelta del versore normale determina l'orientazione.

Una superficie regolare semplice con dominio base T aperto è orientabile, come facilmente si verifica, essendo $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ un vettore continuo su T (fig. 6.9).

(*) Come al solito, è efficace pensare $\mathbf{n}$ come spiccato da $\mathbf{p}_0$ anziché da $\mathbf{0}$.

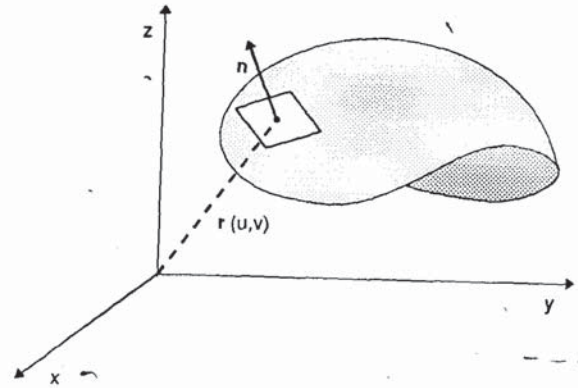


Fig. 6.9 Superficie orientabile.

È altresì facile verificare che tutte le superfici considerate negli esempi 1.2–1.8 sono orientabili.

Il più famoso esempio di superficie *non orientabile* è il *nastro di Möbius*, definito dalla seguente equazione:

$$\mathbf{r}(\theta, t) = \left(2\cos\theta + t\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \left(2\sin\theta + t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{j} + t\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{k}$$

con $(\theta, t) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Per la periodicità di $\mathbf{r}$ ci si può limitare a $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times (-1, 1)$. Questa superficie è illustrata in figura 6.10.

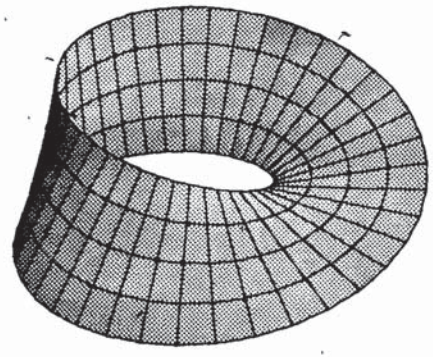


Fig. 6.10 Nastro di Möbius.

Per mostrare il fatto che questa superficie non è orientabile calcoliamo il versore normale $\mathbf{n}$ nel punto $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(0,0) = 2\mathbf{i}$. Si ottiene:

$$\mathbf{r}_\theta(0,0) = 2\mathbf{j} \ , \ \mathbf{r}_t(0,0) = \mathbf{i} \ , \ \mathbf{r}_\theta(0,0) \wedge \mathbf{r}_t(0,0) = -2\mathbf{k}$$

e quindi $\mathbf{n}(0,0) = -\mathbf{k}$.

Seguiamo ora, partendo da $\mathbf{p}_0$, il meridiano centrale $\mathbf{r}(\theta,0)$, $\theta \in [0,2\pi]$. Si ha:

$$\mathbf{r}_\theta(\theta,0) = -2\sin\theta\,\mathbf{i} + 2\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_t(\theta,0) = \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{i} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{j} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta,0) \wedge \mathbf{r}_t(\theta,0) = 2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{i} + 2\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{j} - 2\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{k}$$

e quindi, essendo $\|\mathbf{r}_\theta(\theta,0) \wedge \mathbf{r}_t(\theta,0)\| = 2$,

$$\mathbf{n}(\theta,0) = \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{i} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{j} - \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{k} \ ,$$

Quando $\theta \to 2\pi_-$, $\mathbf{n}(\theta,0) \to \mathbf{k} = -\mathbf{n}(0,0)$.

D'altra parte, quando $\theta \to 2\pi_-$, il punto $\mathbf{r}(\theta,0)$ tende a $\mathbf{r}(2\pi,0) = \mathbf{r}(0,0)$. Dunque, seguendo un percorso continuo lungo la superficie, il versore normale *ha cambiato verso*: la superficie *non* è orientabile. Per renderci conto della *non* orientabilità del *nastro di Möbius* immaginiamo di partire da $\mathbf{p}_0$ e muoverci lungo il meridiano centrale; dopo un giro ci ritroviamo in $\mathbf{p}_0$, ma sul "lato" opposto del nastro.

Esistono anche superfici chiuse *non* orientabili; la più nota tra esse si chiama *ôtre di Klein* ed è illustrata in figura 6.11. Come si vede, l'*otre di Klein* è una superficie connessa ma *non* è frontiera di alcun aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^3$, proprietà che, si può dimostrare, caratterizza le superfici connesse chiuse e orientabili.

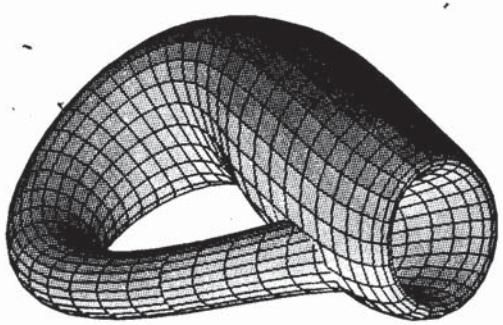


Fig. 6.11 L'*otre di Klein*. È una superficie chiusa ma non si può parlare di *interno* od *esterno* alla superficie.

Per queste ultime vale un analogo del teorema di Jordan per le curve chiuse semplici nel piano: una superficie *chiusa, connessa* ed *orientabile* suddivide lo spazio $\mathbb{R}^3$ in due parti; una è limitata e si chiama *interno* della superficie, l'altra è illimitata e prende il nome di *esterno*. Sono così ben definiti i versori normali *interno*, $\mathbf{n}_i$, ed *esterno* $\mathbf{n}_e$.

Effettuando un cambio di parametri regolare, abbiamo già osservato che, in base alle (1.13), il piano tangente rimane invariato. Il versore normale (1.19) cambia verso se lo Jacobiano del cambiamento di variabili è negativo, mentre rimane invariato se è positivo, come mostra la (1.14).

Ciò significa in particolare che, se una superficie Σ è orientabile, l'orientazione rimane inalterata rispetto a parametrizzazioni equivalenti.

Si può allora definire **superficie orientata** (regolare) *un insieme* Σ *con una classe di equivalenza di parametrizzazioni regolari.*

Un po' più delicato è il problema dell'orientazione delle superfici regolari a pezzi. Per quelle connesse e chiuse, che siano frontiera di aperti in $\mathbb{R}^3$, un'orientazione è determinata scegliendo su ciascuna delle facce sempre il versore $\mathbf{n}_e$ oppure il versore $\mathbf{n}_i$. In questo modo si è stabilita una orientazione simile a quella delle superfici regolari. Il fatto che i versori non siano definiti sui bordi delle facce non causa problemi. Sull'orientazione delle superfici regolari a pezzi, non chiuse, torneremo in seguito.

Esercizi

8. Sia $F(x,y,z) = 0$ l'equazione di una superficie regolare chiusa. Determinare l'espressione dei versori normali esterno ed interno e l'equazione del piano tangente in un punto generico della superficie. Verificare che questa coincide con la (3.23) del paragrafo 7.3.5, volume 1.

9. Verificare che, se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ il cambio di parametri $s = v$ e $t = u$ (scambio tra u e v) cambia l'orientazione della superficie.

10. Verificare che le superfici degli esempi 3.5 (ellissoide), 3.6 (toro) e 3.8 (catenoide) sono orientabili.

1.5 Metrica sulla superficie. Prima forma fondamentale

In questo paragrafo ci occupiamo della lunghezza delle curve giacenti su una superficie regolare.

Sia Σ una superficie regolare di equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$ (T aperto) e $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t),v(t))$, $t \in [a,b]$, una curva regolare giacente su Σ. Per la lunghezza di $\tilde{\mathbf{r}}$ vale la formula (1.8), Cap. 1

$$l(t) = \int_a^t \|\tilde{\mathbf{r}}'(t)\|dt \quad (l = l(t) = \text{ lunghezza d'arco}) \ .$$

Poiché $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v'$ si ha

$$\|\tilde{\mathbf{r}}'(t)\|^2 = \|\mathbf{r}_u\|^2(u')^2 + 2 < \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v > u'v' + \|\mathbf{r}_v\|^2(v')^2 .$$

Ponendo:

$$E = \|\mathbf{r}_u\|^2 \ , \ F =< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v > \ , \ G = \|\mathbf{r}_v\|^2 \tag{1.20}$$

si ricava la formula seguente per il differenziale della lunghezza d'arco:

$$dl^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 . \tag{1.21}$$

La forma quadratica a secondo membro della (1.21) si chiama **prima forma fondamentale** o **metrica riemanniana** della superficie; essa verrà indicata anche con il simbolo $\mathcal{F}_1$.

Dall'identità di Lagrange (proposizione 1.1c del cap. 1) si ha:

$$EG - F^2 = \|\mathbf{r}_u\|^2 \cdot \|\mathbf{r}_v\|^2 - (< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v >)^2 = \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|^2 > 0 \tag{1.22}$$

Dunque $\mathcal{F}_1$ è una forma quadratica *definita positiva* (cioè positiva per ogni $(du, dv) \neq (0,0)$).

Si noti che, in base alla (1.22), il *versore normale* alla superficie si può scrivere nella forma

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} . \tag{1.23}$$

Un primo fatto fondamentale è che *la metrica è invariante per cambi regolari di parametri.* Infatti ricordando le (1.12), si verifica facilmente che, se $u = \varphi(s,t), v = \varphi(s,t)$, posto $\tilde{\mathbf{r}}(s,t) = \mathbf{r}(\varphi(s,t), \psi(s,t))$ e definite analogamente $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$, si ha (Esercizio 11):

$$\begin{aligned} d\tilde{l}^2 &= \|\tilde{\mathbf{r}}_s\|^2 ds^2 + 2 < \tilde{\mathbf{r}}_s, \tilde{\mathbf{r}}_t > ds\,dt + \|\tilde{\mathbf{r}}_t\|^2 dt^2 = \\ &= \tilde{E}\,(\varphi_s^2 + \varphi_t^2 + 2\varphi_t\varphi_s)ds^2 + 2\tilde{F}\,(\varphi_s\psi_s + \varphi_t\psi_t + \varphi_s\psi_t + \varphi_t\psi_s)ds^2 + \\ &\quad + \tilde{G}\,(\psi_s^2 + \psi_t^2 + 2\psi_t\psi_s)ds^2 = \tilde{E}d\varphi^2 + 2\tilde{F}d\varphi d\psi + \tilde{G}d\psi^2 = \\ &= Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 = dl^2 . \end{aligned}$$

Si noti invece che E, G, F *non* sono invarianti. Infatti dalle (1.12) e (1.22) si ricava

$$EG - F^2 = (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,t)}\right)^2 \tag{1.24}$$

Esempi

1.10. *Metrica per superfici in forma cartesiana* $z = f(x,y)$. Si ha, ricordando i calcoli dell'esempio 1.9:

$$E = 1 + (f_x)^2 \ , \ F = f_x f_y \ , \ G = 1 + (f_y)^2$$

e quindi:

$$dl^2 = [1 + (f_x)^2]dx^2 + 2f_x f_y\,dx\,dy + [1 + (f_y)^2]dy^2 . \tag{1.25}$$

1.11 *Metrica per superfici in forma implicita* $F(x,y,z) = 0$.

Se $F_z \neq 0$ si può ricavare $z = f(x,y)$, localmente. Ricordando che allora

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{e} \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

si ottiene

$$E = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 \ , \ F = \frac{F_x F_y}{(F_z)^2} \ , \ G = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2 .$$

Ad esempio, per la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ si ha, pensando $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ oppure $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$:

$$dl^2 = \frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}dx^2 + \frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2}dx\,dy + \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2}dy^2 \tag{1.26}$$

1.12. *Metrica in coordinate cilindriche* e *polari* in $\mathbb{R}^3$.

È spesso più significativo esprimere la prima forma fondamentale in coordinate che non siano quelle cartesiane ortogonali. È utile in questi casi osservare che $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Nelle coordinate *cilindriche* $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, $z = z$ si ha:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= (\cos\theta d\varrho - \varrho\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta d\varrho + \varrho\cos\theta d\theta)^2 + dz^2 \end{aligned}$$

da cui

$$dl^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 + dz^2 . \tag{1.27}$$

Nelle coordinate *polari* $x = \varrho\sin\psi\cos\theta$, $y = \varrho\sin\psi\sin\theta$, $z = \varrho\cos\psi$, $\varrho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, \pi]$, si ha:

$$\begin{aligned} dl^2 &= (\sin\psi\cos\theta d\varrho + \varrho\cos\psi\cos\theta d\psi - \varrho\sin\psi\sin\theta d\theta)^2 + \\ &\quad + (\sin\psi\cos\theta d\varrho + \varrho\cos\psi\sin\theta d\psi + \varrho\sin\psi\cos\theta d\theta)^2 + \\ &\quad + (\cos\psi d\varrho - \varrho\sin\psi d\psi)^2 \end{aligned}$$

da cui:

$$dl^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2 + \varrho^2(\sin\psi)^2 d\theta^2 . \tag{1.28}$$

1.13. Ritorniamo alla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ dell'esempio 1.11. In coordinate polari l'equazione di tale sfera è $\varrho = R$. Usando la (1.28) e osservando che $d\varrho = 0$, la metrica è espressa in modo più efficace dall'equazione

$$dl^2 = R^2(d\psi^2 + (\sin\psi)^2 d\theta^2)$$

Concludiamo il paragrafo con una osservazione.

Se una superficie Σ regolare è *connessa per archi* (Esercizio 21, sez. 1, Cap. 1) allora è sempre possibile unire due punti qualunque $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ di Σ con una curva regolare contenuta in Σ. Essendo la metrica indipendente dalla parametrizzazione di Σ, ha senso definire

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \inf l(\gamma) \tag{1.29}$$

dove l'estremo inferiore è cercato al variare di γ nell'insieme delle curve regolari giacenti su Σ, che uniscono $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ e dove $l(\gamma)$ indica la lunghezza di γ.

Si dimostra che $d\colon \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ è una distanza nel senso precisato dalla definizione 1.1 del capitolo 3. Pertanto la coppia (Σ, d) è uno spazio metrico. Le linee (se esistono!) che realizzano la distanza $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ si chiamano *geodetiche*. Ad esempio, le geodetiche su una superficie sferica risultano archi di cerchio massimo.

Le geodetiche per una superficie, giocano lo stesso ruolo dei segmenti di retta in un piano.

Esercizi

11. Eseguire i calcoli della verifica che $\mathcal{F}_1$ è invariante per cambi regolari di parametri. Dimostrare la formula (1.24).

12. Dimostrare che, se si esegue una trasformazione di variabili ortogonale, allora la prima forma fondamentale $\mathcal{F}_1$ rimane invariata.

[Posto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, si ha:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 \ ] \tag{1.30}$$

13. Calcolare la metrica riemanniana per il toro.

14. Dimostrare che la metrica riemanniana per il cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, si può scrivere nella forma $dl^2 = ds^2 + dz^2$, dove ds indica il differenziale della lunghezza d'arco per le curve sulla superficie.

15. Calcolare la metrica riemanniana per il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

16. Siano: $\mathbf{r}(u, v)$ una superficie regolare, $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ un punto sulla superficie, $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t))$ ed $\mathbf{r}_2(\tau) = \mathbf{r}(u_2(\tau), v_2(\tau))$ due curve sulla superficie passanti per $\mathbf{p}$ (ad esempio $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{p}$).

Dimostrare che se ϕ, $0 \le \phi < 2\pi$, è l'angolo tra le due curve in $\mathbf{p}$, si ha:

$$\cos\phi = \frac{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{[E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2]^{1/2} \cdot [E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2]^{1/2}}$$

dove E, F, G si intendono calcolati in $u = u_0$, $v = v_0$.

Utilizzando la formula verificare che le linee coordinate u = costante e v = costante sono ortogonali se e solo se $F = 0$.

17. Verificare che per la superficie di rivoluzione

$$\mathbf{r}(\theta, t) = f(t)\cos\theta\,\mathbf{i} + f(t)\sin\theta\,\mathbf{j} + g(t)\,\mathbf{k} \quad (f, g \text{ di classe } C^1)$$

le linee coordinate formano una rete ortogonale.

1.6 Area di una superficie. Integrali superficiali

Alla definizione di area di una superficie si potrebbe pervenire mediante un procedimento simile a quello che ha condotto alla definizione 1.1.5 di lunghezza di una curva (e alla conseguente formula (1.1.8)) e cioè: approssimare la superficie Σ con una superficie poliedrica "appoggiata" su Σ, per la quale la nozione di area è quella della geometria elementare, quindi definire area di Σ il limite delle aree delle superfici poliedriche al tendere a zero del massimo diametro delle facce. Tale procedimento non risulta così elementare come nel caso delle curve e pertanto daremo una definizione più diretta di area preoccupandoci solo di giustificarla euristicamente.

Se $\boldsymbol{\xi}$ ed $\boldsymbol{\eta}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti, allora $\|\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}\|$ rappresenta l'area del parallelogramma $\tilde{R}$ da essi individuato (v. fig. 6.12). Se si vuole poi ottenere l'area della sua proiezione R sul piano xy, è sufficiente moltiplicare $\|\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}\|$ per $\cos\alpha$ dove α, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, è l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}$ e $\mathbf{k}$. In altri termini vale la formula

$$a(R) = a(\tilde{R})\cos\alpha\ . \tag{1.31}$$

Applichiamo queste considerazioni ad una superficie *semplice* e *regolare* Σ, di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2$, T *aperto limitato*.

Consideriamo una porzione di Σ (parallelogramma curvilineo) individuato da due coppie di linee coordinate, definite da $u = \overline{u}$, $u = \overline{u} + du$ e da $v = \overline{v}$, $v = \overline{v} + dv$, con $du > 0$, $dv > 0$, come mostrato in figura 6.13. I due vettori $\mathbf{r}_u du = \mathbf{r}_u(u, \overline{v})du$ e $\mathbf{r}_v dv = \mathbf{r}_v(\overline{u}, v)dv$ individuano un parallelogramma la cui area $\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| du\, dv$ intuitivamente coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $du^2 + dv^2$, con quella del parallelogramma curvilineo. Tale area è intuitivamente pari a $\|\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}\|$ dove

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u du + o(du)$$
$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_v dv + o(dv)$$

(v. fig. 6.13)

È allora ragionevole chiamare **elemento d'area** l'espressione simbolica

$$d\sigma := \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| du\, dv \tag{1.32}$$

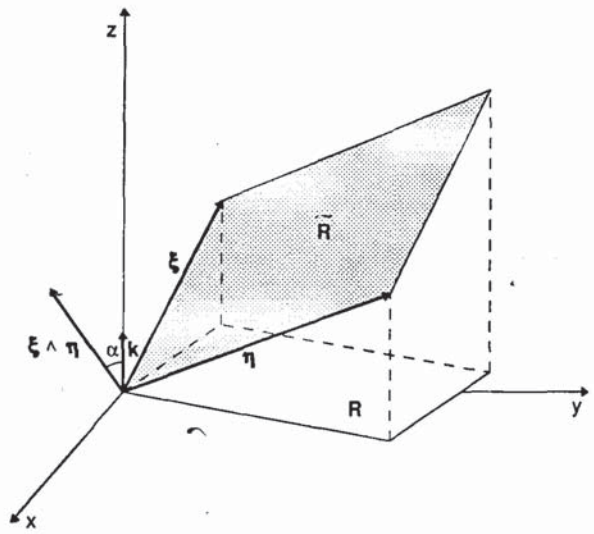


Fig. 6.12 Area $(R) =$ area $(\tilde{R})\cos\alpha$.

e dare la seguente

Definizione 1.4 - *L'area di Σ è assegnata dalla formula seguente*

$$a(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma := \iint_T \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| du\, dv \ . \tag{1.33}$$

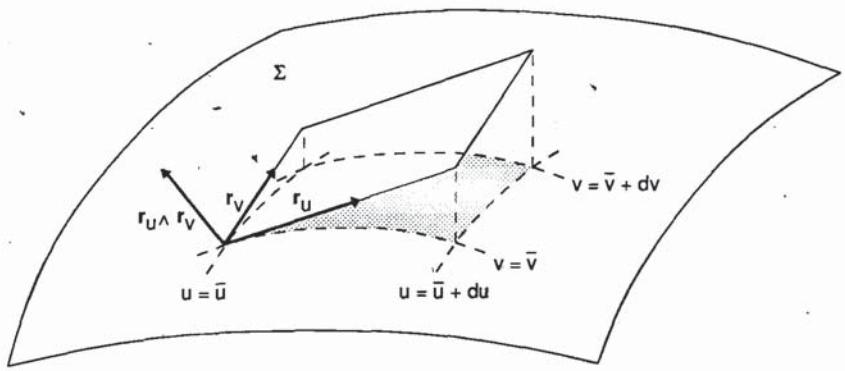


Fig. 6.13 I lati del parallelogramma curvilineo sono approssimati a meno di infinitesimi di ordine superiore a du e dv da quelli del parallelogramma rettilineo individuato dai vettori $\mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{r}_v dv$.

Alternativamente, in base alla (1.22), si può scrivere

$$a(\Sigma) := \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \ , \tag{1.33'}$$

La norma $\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|$ appare nella (1.33) come un fattore di ingrandimento per l'area nella trasformazione dal piano u, v, dove l'elemento d'area è $du\, dv$, alla superficie.

***Esempio* 1.14** - Per la superficie sferica di equazione (1.6), $(\theta, \psi) \in (0, 2\pi) \times \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$d\sigma = R^2 \sin\psi d\theta d\psi \quad (\theta \textit{ longitudine}, \psi \textit{ colatitudine})$$

e quindi

$$a(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi R^2 \sin\psi d\psi = 4\pi R^2 \ ,$$

risultato non ... sorprendente.

Può essere utile scrivere la formula (1.33) o (1.33') nel caso di superfici in forma cartesiana.

Se Σ ha equazione $z = f(x, y)$, $(x, y) \in T$, T aperto limitato del piano, allora, ricordando i calcoli nell'esempio 1.8, si ha:

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k} \ , \ \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \ ,$$

$$\|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$$

e di conseguenza

$$a(\Sigma) = \iint_T \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\, dx\, dy \ . \tag{1.34}$$

***Esempio* 1.15** - L'area del paraboloide $z = (x^2 + y^2)/2$ con $(x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 8\}$, si trova con la formula

$$a(\Sigma) = \iint_T \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy \ .$$

Passando a coordinate polari nel piano si ottiene facilmente

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \varrho^2}\, \varrho d\varrho = \frac{52}{3}\pi \ .$$

La formula (1.34) ha un *significato geometrico* esplicito.

Infatti se $\mathbf{k} = (0,0,1)$ e $\alpha, -\pi/2 < \alpha < \pi/2$, è l'angolo tra i due vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y$, si ha:

$$1 = < \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y \ , \ \mathbf{k} > = \|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| \ \cos\alpha = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \cos\alpha$$

da cui l'interessante relazione

$$\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} = \frac{1}{\cos\alpha} \ .$$

Come conseguenza si ottiene $d\sigma = \dfrac{1}{\cos\alpha} dx\, dy$ ovvero

$$dx\, dy = \cos\alpha \ d\sigma \ ,$$

formula in perfetto accordo con la (1.31) e che mostra come $(1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2}$ sia un *fattore di proiezione locale* per le aree.

Per una superficie data in forma implicita $F(x,y,z) = 0$, con $F_z \neq 0$, si ha, localmente, $z = f(x,y)$ e pertanto l'elemento d'area in termini di F è dato dalla formula seguente:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2} = \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx\, dy \ . \tag{1.35}$$

Veniamo ora alla definizione di *integrale di superficie*.

Se $h = h(x,y,z)$ è una funzione reale definita su Σ si definisce l'*integrale di h su Σ* mediante la formula

$$\iint_\Sigma h d\sigma := \iint_T h(\mathbf{r}(u,v)) \ \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| \ du\, dv \tag{1.36}$$

quando l'integrale a destra della (1.36) è ben definito.

L'integrale (1.36), ed in particolare l'area di Σ, sono invarianti per cambi regolari di parametrizzazione. Infatti, posto $u = \varphi(s,t)$, $v = \psi(s,t)$, $(s,t) \in \widetilde{T}$, ricordando la (1.13) e la formula del cambiamento di variabile negli integrali doppi si ha:

$$\begin{aligned}
&\iint_T h(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| du\, dv = \\
&= \iint_{\widetilde{T}} h(\widetilde{\mathbf{r}}(s,t)) \|\widetilde{\mathbf{r}}_s \wedge \widetilde{\mathbf{r}}_t\| \cdot \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,t)}\right|^{-1} \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,t)}\right| ds\, dt = \\
&= \iint_{\widetilde{T}} h(\widetilde{\mathbf{r}}(s,t)) \|\widetilde{\mathbf{r}}_s \wedge \widetilde{\mathbf{r}}_t\| ds\, dt \ .
\end{aligned}$$

Ciò giustifica la notazione usata per gli integrali di superficie.

Le definizioni di area e di integrale di superficie si estendono senza difficoltà al caso delle superfici regolari a tratti.

Se Σ_j, $j = 1, \ldots, N$ sono le facce di Σ allora

$$\iint_\Sigma h\, d\sigma := \sum_{j=1}^N \iint_{\Sigma_j} h\, d\sigma \ .$$

1.7 Alcune applicazioni fisiche e geometriche

In questo paragrafo presentiamo alcune applicazioni degli integrali di superficie.

Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia

Sia Σ una superficie *regolare* e *semplice* e $\delta = \delta(x,y,z)$ definita su Σ. Se δ si interpreta come *densità superficiale* di una massa distribuita su Σ, l'integrale $m = \int_\Sigma \delta\, d\sigma$ rappresenta la massa totale.

In questo caso gli integrali

$$x_b = \frac{1}{m} \iint_\Sigma x\delta\, d\sigma \ , \ y_b = \frac{1}{m} \iint_\Sigma y\delta\, d\sigma \ , \ z_b = \frac{1}{m} \iint_\Sigma z\delta\, d\sigma$$

rappresentano le coordinate del *baricentro* della distribuzione di massa.

***Esempio* 1.16** - Una massa m è distribuita con densità superficiale $\delta = x^2 + y^2$ su un *emisfero* Σ di raggio R.

Abbiamo, utilizzando la parametrizzazione (1.6) con $(\theta, \psi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$:

$$m = \iint_\Sigma \delta d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (R\sin\psi)^2 R^2 \sin\psi d\psi = \frac{4}{3}\pi R^3 \ .$$

Per le coordinate del baricentro, ovviamente si ha $x_b = y_b = 0$, mentre

$$\begin{aligned}
z_b &= \frac{1}{m} \iint_\Sigma z\delta\, d\sigma = \\
&= \frac{3}{4\pi R^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (R\cos\psi)(R\sin\psi)^2 R^2 \sin\psi\, d\psi = \frac{3}{8} R \ .
\end{aligned}$$

Se la densità è costante le coordinate del baricentro (che in questo caso si chiama più propriamente *centroide*) sono date da

$$x_b = \frac{1}{a(\Sigma)} \iint_\Sigma x\, d\sigma \ , \ y_b = \frac{1}{a(\Sigma)} \iint_\Sigma y\, d\sigma \ , \ z_b = \frac{1}{a(\Sigma)} \iint_\Sigma z\, d\sigma \ .$$

Analogamente, se $d = d(x,y,z)$ rappresenta la distanza di (x,y,z) da un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ o da un asse, l'integrale $\iint_\Sigma d^2\delta\, d\sigma$ rappresenta il *momento di inerzia* della distribuzione di massa rispetto a $\mathbf{p}$ o all'asse, rispettivamente.

***Esempio* 1.17** - Si voglia calcolare il momento di inerzia di una massa distribuita uniformemente (densità costante = 1) su una superficie torica di raggi 1 e 2, rispetto all'asse di rivoluzione.

Usando le equazioni parametriche dell'esempio 1.7, l'asse di rivoluzione è l'asse z; in tal caso si ha:

$$d^2 = x^2 + y^2 = (2 + \sin u)^2 \ , \ \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| = 2 + \sin u \ .$$

Pertanto

$$I = \iint_\Sigma d^2 d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (2 + \sin u)^3 du = 16\pi + 12\pi^2 \ .$$

Flussi

Consideriamo ora un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ definito in una regione U dello spazio contenente una superficie regolare e orientabile Σ. Se $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie, l'*integrale del campo vettoriale* $\mathbf{F}$ su Σ si chiama *flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso* Σ *nella direzione* $\mathbf{n}$ ed è dato dalla formula

$$\iint_\Sigma < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma = \iint_\Sigma [F_1 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + F_2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + F_3 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})] d\sigma \ (*)$$

Come si vede il flusso è invariante per cambi di parametrizzazione equivalenti (a Jacobiano positivo) ma cambia segno se cambia il verso di $\mathbf{n}$, ovvero l'orientazione di Σ.

***Esempio* 1.18** - Il campo di velocità di un fluido a densità costante $\delta = 1$ è dato dal vettore $\mathbf{F} = (-y, x, 1)$. Si voglia calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la porzione di paraboloide di equazione $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, $0 \le z < 4$. Scegliendo l'orientazione del paraboloide data dal versore

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}(-f_x, -f_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}(-2x, -2y, 1)$$

si ottiene:

$$\text{Flusso} = \iint_\Sigma < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2<4\}} [2xy - 2xy + 1] \, dx \, dy = 4\pi \ .$$

In questo caso il flusso rappresenta *la massa di fluido che attraversa la superficie nell'unità di tempo nella direzione e verso di* $\mathbf{n}$.

(*) Abbiamo indicato con $(\mathbf{n}, \mathbf{i})$ l'angolo tra i versori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{i}$; così pure per $(\mathbf{n}, \mathbf{j})$ ed $(\mathbf{n}, \mathbf{k})$. Si noti che $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = < \mathbf{n}, \mathbf{i} >$ etc...

Formule di coarea e di Guldino

Come ultima applicazione consideriamo il seguente problema di natura geometrica con interessanti aspetti cinematici.

Consideriamo una famiglia di superfici regolari Σ_t di equazione

$$\phi(x, y, z) = t \tag{1.37}$$

dove $t \in [t_1, t_2]$ gioca il ruolo di parametro. Essendo Σ_t regolare per ogni t avremo $\nabla\phi \neq \mathbf{0}$ in ogni punto. Ricordiamo che il vettore $\boldsymbol{\nu} = \nabla\phi/\|\nabla\phi\|$ è ortogonale alla superficie ed è *diretto nel verso delle t crescenti*. Se interpretiamo t come tempo, possiamo pensare ad una superficie che si muove nello spazio. Tipicamente si può pensare ai fronti d'onda in un campo elettromagnetico.

Al variare di t da t_1 a t_2, Σ_t descrive una regione $D \in \mathbb{R}^3$,

$$D = \{(x, y, z) : t_1 \le \phi(x, y, z) \le t_2\}.$$

Supponiamo che *ogni punto di D appartenga ad una e ad una sola delle superfici* Σ_t.

Come si calcola il volume di D in termini delle aree delle superfici Σ_t? Si ha evidentemente $\text{Vol}(D) = \iiint_D dx\, dy\, dz$.

Eseguiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$\xi = x \ , \ \eta = y \ , \ t = \phi(x, y, z) \ ;$$

lo jacobiano della trasformazione è

$$\frac{\partial(\xi, \eta, t)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{vmatrix} = \phi_z \ .$$

Pertanto

$$\iiint_D dx\, dy\, dz = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Sigma_t} \frac{1}{|\phi_z|} d\xi\, d\eta \ .$$

D'altra parte, ricordando la (1.35), l'elemento d'area su Σ_t è $d\sigma = \|\nabla\phi\|/|\phi_z| d\xi\, d\eta$, perciò otteniamo l'importante formula, detta formula di *coarea*.

$$\text{Vol}(D) = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Sigma_t} \frac{1}{\|\nabla\phi\|} d\sigma \ . \tag{1.38}$$

La (1.38) diventa più interessante dal punto di vista cinematico se si fa intervenire la *velocità* con cui si spostano le Σ_t.

A tale scopo, come mostrato in figura 6.14, pensiamo Σ_t composta da particelle puntiformi la cui traiettoria nello spazio è descritta dal vettore posizione $(x(t), y(t), z(t))$. Poiché per ogni t, $(x(t), y(t), z(t)) \in \Sigma_t$, avremo

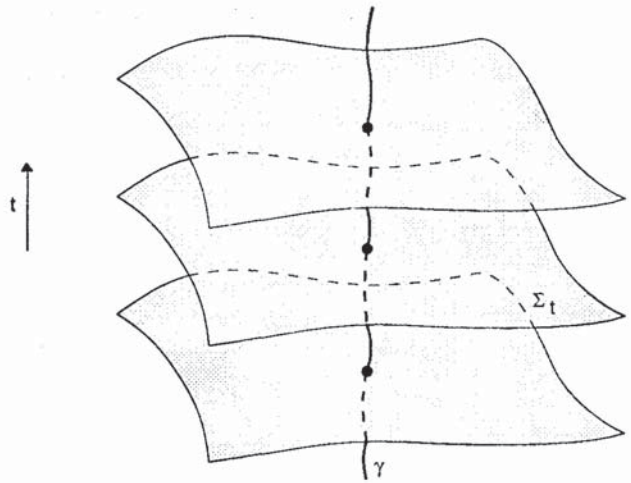


Fig. 6.14 Superficie mobile nello spazio; γ è la traiettoria di un punto $(x(t), y(t), z(t))$ su $\sum_t$.

$$\phi(x(t), y(t), z(t)) = t \ , \quad t \in [t_1, t_2] \ . \tag{1.39}$$

Derivando la (1.39) otteniamo

$$x'\phi_x + y'\phi_y + z'\phi_z = 1 \ .$$

Ponendo $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ (= vettore velocità della particella) e dividendo per $||\nabla\phi||$, si deduce l'equazione

$$< \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} >= \frac{1}{||\nabla\phi||} \ . \tag{1.40}$$

La (1.40) indica che l'integrando in (1.38), calcolato in $\mathbf{p} \in \Sigma_t$, ha il significato di *componente normale* della velocità con la quale $\mathbf{p}$ si muove nello spazio. Indicando con $c_{\boldsymbol{\nu}}$ tale componente si ha dunque

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Sigma_t} c_{\boldsymbol{\nu}} d\sigma \ . \tag{1.41}$$

Un'analoga formula vale per aree descritte da una famiglia di curve piane $\phi(x, y) = t$ (Esercizio 25).

Un esempio di applicazione della (1.41) è il seguente.

***Esempio* 1.19** - (*Formula di Guldino* generalizzata). Sia Σ_t una famiglia di superfici piane che descrive una regione $D \in \mathbb{R}^3$ in modo tale che ogni punto di D appartenga ad una e una sola delle Σ_t. Anziché descrivere Σ_t mediante l'equazione implicita (1.37) usiamo la rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v, t) = \\ &= (x_0(t) + a_1(t)u + b_1(t)v)\,\mathbf{i} + (y_0(t) + a_2(t)u + b_2(t)v)\,\mathbf{j} + \\ &+ (z_0(t) + a_3(t)u + b_3(t)v)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

con $(u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$ (T indipendente da t) e $t \in [t_0, t_1]$.

Ponendo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$, $\mathbf{b} = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ (con $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), si può anche scrivere l'equazione di Σ_t nella forma

$$< \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \ , \boldsymbol{\nu} >= 0 \tag{1.42}$$

dove $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})/||\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}||$ è il versore normale a Σ_t.

Dato un punto $\mathbf{r}(u(t), v(t), t) \in \Sigma_t$, calcoliamone la componente della velocità $c_{\boldsymbol{\nu}} =< \mathbf{r}', \boldsymbol{\nu} >$.

Dalla (1.42) abbiamo, derivando rispetto a t:

$$< \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0', \boldsymbol{\nu} >= - < \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\nu}' > \ . \tag{1.43}$$

In particolare la (1.43) vale quando

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b = \frac{1}{a(\Sigma_t)} \iint_{\Sigma_t} \mathbf{r}(u, v, t) d\sigma$$

e cioè quando $\mathbf{r}_b$ è il centroide, essendo $\mathbf{r}_b$ nello stesso piano di Σ_t. Dalla (1.41), abbiamo, per il volume della regione D descritta da Σ_t:

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Sigma_t} < \mathbf{r}', \boldsymbol{\nu} > d\sigma \ .$$

Dalla (1.43)

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_t} < \mathbf{r}', \boldsymbol{\nu} > d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma_t} [< \mathbf{r}_0', \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\nu}' > - < \mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}' >] d\sigma = (*) \\ &= [< \mathbf{r}_0', \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\nu}' > - < \mathbf{r}_b, \boldsymbol{\nu}' >] a(\Sigma_t) = \\ &= (\text{per la (1.43) applicata ad } \mathbf{r}_b) =< \mathbf{r}_b', \boldsymbol{\nu} > a(\Sigma_t) \ . \end{aligned}$$

(*) essendo $\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\nu}$ indipendenti da u, v, ed essendo $\iint_{\Sigma_t} < \mathbf{r}, \nu' > d\sigma =< \mathbf{r}_b, \boldsymbol{\nu}' > a(\Sigma_t)$.

Da questa otteniamo la formula (di Guldino generalizzata):

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{t_0}^{t_1} < \mathbf{r}'_b, \boldsymbol{\nu} > a(\Sigma_t)\, dt \,. \tag{1.44}$$

La (1.44) indica che *il volume di D si ottiene integrando nel tempo il prodotto dell'area di Σ_t per la componente normale della velocità del centroide.*

In particolare se $a(\Sigma_t) = a$ (costante) e il centroide si muove lungo una traiettoria γ ortogonale alle Σ_t per ogni t, si ricava, essendo in tal caso $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathbf{r}'_b}{||\mathbf{r}'_b||}$:

$$\mathrm{Vol}(D) = a \int_{t_0}^{t_1} ||\mathbf{r}'_b|| dt = a\, l(\gamma) \,. \tag{1.45}$$

Esercizi

18. Sia γ una curva piana semplice e regolare di equazione $z = f(u)$, $u \in [u_0, u_1]$. Dimostrare che l'area della superficie di rivoluzione attorno all'asse z, generata da γ, è data dalla formula (di Guldino)

$$a = 2\pi u_b\, l(\gamma) \tag{1.46}$$

dove u_b è la u–coordinata del centroide di γ.

19. Calcolare area e volume del toro di raggi a e b, $a > b > 0$, utilizzando le formule (1.45) e (1.46).

20. Calcolare la superficie comune ai due cilindri di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

21. Calcolare il centroide della superficie del tetraedro individuato dai piani coordinati e dal piano $x + y + z = 1$.

22. Sulla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ è distribuita uniformemente una carica elettrica. Calcolare il potenziale elettrostatico da essa generato fuori e dentro la sfera.

23. Calcolare il flusso del vettore $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ attraverso il tetraedro dell'esercizio 21. (La 1.36 ha perfettamente senso per superfici chiuse orientabili, regolari a pezzi.)

24. Una massa m è distribuita uniformemente sul tronco di cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \le z \le 2$. Calcolarne il momento di inerzia rispetto all'asse z.

25*. Sia γ_t una famiglia di curve regolari e semplici di equazione $\varphi(x, y) = t$, $t \in [t_0, t_1]$. Al variare di t tali curve descrivono una regione A del piano, in modo che *ogni punto di A appartenga ad una sola curva γ_t.*

Dimostrare, con un ragionamento analogo a quello dell'esempio 1.19, le seguenti formule

$$\mathrm{area}(A) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\gamma_t} \frac{1}{||\nabla\varphi||} ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\gamma_t} c_{\boldsymbol{\nu}}\, ds$$

(ds = differenziale d'arco su γ_t).

26. Verificare che la famiglia di segmenti di equazione

$$tx - t^2 y = 1 \quad x \in [0, 1]$$

al variare di t tra $\frac{1}{2}$ ed 1, soddisfa le ipotesi indicate nell'esercizio 25. Calcolare l'area da essi coperta.

1.8 Generalizzazione a dimensioni superiori

I concetti di curva e superficie in $\mathbb{R}^3$ si generalizzano in modo naturale a quello di *k-superficie* nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente una k-superficie ($k < n$) è una regione di $\mathbb{R}^n$ dove una ipotetica particella è libera di muoversi con k gradi di libertà, tra gli n disponibili.

Più rigorosamente, dato un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ed un insieme T tale che $A \subseteq T \subseteq \overline{A}$, definiremo *$k$-superficie di classe C^s una coppia* $(\Sigma, \mathbf{r})$ dove $\mathbf{r}: T \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} \in C^s(A)$, e $\Sigma = \mathbf{r}(T)$.

Più esplicitamente una k-superficie è assegnata da n equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, \dots, u_k) \\ x_2 &= x_2(u_1, \dots, u_k) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1, \dots, u_k) \end{aligned} \qquad (u_1, u_2, \dots, u_k) \in T$$

dove $(u_1, \dots, u_k)$ fungono da *coordinate locali* su Σ.

Un punto $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{T}$ è *regolare* se la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_k} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

ha caratteristica k in $\mathbf{u}$ o, equivalentemente, se i k *vettori tangenti* $\mathbf{r}_{u_1}, \mathbf{r}_{u_2}, \dots, \mathbf{r}_{u_k}$ sono *linearmente indipendenti.*

In questo caso, il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ da essi generato prende il nome di *spazio tangente* alla k–superficie in $\mathbf{p}$.

Si riconosce che nei casi $n = 3$ e $k = 1$ o $k = 2$ si ritrovano i concetti illustrati nei paragrafi precedenti.

Nel caso $k = n - 1$ una k–superficie si chiama *ipersuperficie*.

Se tutti i punti $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$, con $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{T}$, sono regolari, una k-superficie prende il nome di *varietà differenziabile* di dimensione k.

Una k-superficie o una varietà di dimensione k può essere definita implicitamente mediante un sistema di $n - k$ equazioni del tipo

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

tale che la matrice jacobiana $(\partial g_i / \partial x_s)$ abbia rango massimo.

Abbiamo già incontrato varietà differenziabili di dimensione $(n - 1)$ nel capitolo 2 a proposito dell'ottimizzazione di una funzione in presenza di vincoli di uguaglianza.

Le varietà 1-dimensionali sono le curve regolari in $\mathbb{R}^n$.

Se nell'equazione di una varietà k–dimensionale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$ si specifica $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, l'equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}(t))$ definisce una curva in $\mathbb{R}^n$, contenuta in Σ.

Si possono definire le nozioni di varietà semplice e chiusa in modo analogo al caso $n = 3$.

Il concetto di orientazione è invece molto più delicato.

Lo accenniamo solo per le ipersuperfici, restando ad un livello intuitivo.

In questo caso lo spazio tangente in ogni punto è $(n-1)$–dimensionale, generato dagli $(n-1)$ vettori tangenti $\mathbf{r}_{u_1}, \dots, \mathbf{r}_{u_{n-1}}$. Per ogni $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{T}$ esiste un unico versore $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$, ortogonale ad ogni $\mathbf{r}_{u_j}$, tale che

$$\det(\mathbf{r}_{u_1}, \mathbf{r}_{u_2}, \dots, \mathbf{r}_{u_{n-1}}, \mathbf{n}) > 0 \ .$$

Tale versore si chiama *versore normale* alla varietà e determina l'orientazione *positiva* , il suo opposto, $-\mathbf{n}$, determina l'orientazione negativa.

Una varietà è orientabile, se sostanzialmente, il versore $\mathbf{n}$ (oppure il suo opposto) varia con continuità lungo qualunque curva chiusa giacente su di essa.

Infine si può generalizzare la nozione di *area e di integrale* su una varietà.

L'elemento d'area è assegnato dalla formula

$$d\sigma := \left\{ \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \left(\frac{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} \right)^2 \right\}^{1/2} du_1 \dots du_k \ .$$

L'integrale di $f : \sum \to \mathbb{R}$ su $\sum$ è definito da

$$\int_\Sigma f \, d\sigma :=$$

$$\int_T f \circ \mathbf{r}(u_1, \dots, u_k) \left\{ \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \left(\frac{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} \right)^2 \right\}^{1/2} du_1 \dots du_k \ .$$

*2. CURVATURE

2.1 Seconda forma fondamentale

Studiamo ora una superficie esaminandone la deviazione dal suo piano tangente in un intorno del punto di tangenza. Tale studio porta in modo naturale a considerare le curvature delle linee giacenti sulla superficie.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ l'equazione vettoriale di una superficie di classe C^3 e dominio base T aperto.

Introduciamo la funzione $\varrho : T \to \mathbb{R}$ definita dalla formula seguente:

$$\varrho(u, v) = < \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \ , \ \mathbf{n}(u_0, v_0) >$$

dove $\mathbf{n}(u_0, v_0)$ è il versore normale alla superficie in $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

La funzione ϱ rappresenta la distanza (con segno) del punto $\mathbf{r}(u, v)$ dal piano tangente alla superficie in $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ (fig. 6.15).

Usando la formula di Taylor, possiamo scrivere, per $(du, dv) \to (0, 0)$,

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = d\mathbf{r}(u_0, v_0) + \frac{1}{2} d^2\mathbf{r}(u_0, v_0) + o(du^2 + dv^2) \qquad (2.1)$$

Essendo $< d\mathbf{r}, \mathbf{n} >= 0$ ricaviamo, sottintendendo che le derivate di $\mathbf{r}$ siano calcolate in (u_0, v_0):

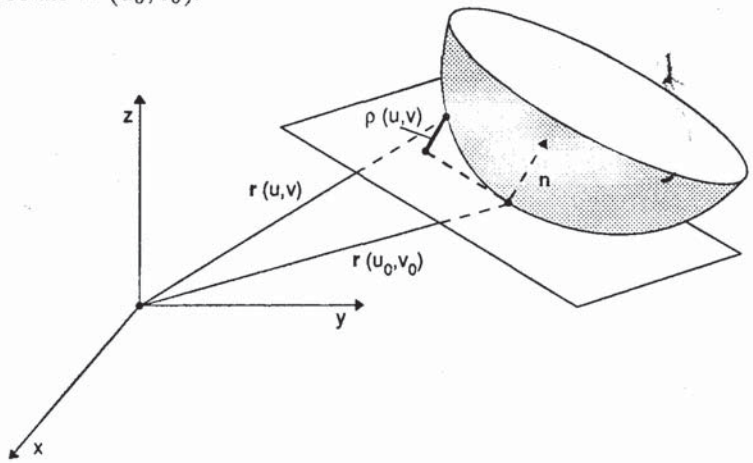


Fig. 6.15 $\rho(u, v)$ misura la deviazione della superficie dal piano tangente in $\mathbf{r}(u_0.v_0)$.

$$\varrho(u,v) = \frac{1}{2} < d^2\mathbf{r}, \mathbf{n} > + o(du^2 + dv^2)$$
$$= \frac{1}{2}\{< \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} > du^2 + 2 < \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} > du\,dv + < \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} > dv^2\} + o(du^2 + dv^2)\ .$$

Poniamo

$$L := < \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} > \ , \ M := < \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} > \ , \ N := < \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} > \ .$$

La forma quadratica

$$\mathcal{F}_2 = < d^2\mathbf{r}, \mathbf{n} > = L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2 \tag{2.2}$$

si chiama *seconda forma fondamentale* della superficie nel punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Per valori piccoli di du e dv, $\mathcal{F}_2$ approssima a meno di infinitesimi di ordine superiore a $du^2 + dv^2$ la quantità $2\varrho(u,v)$, e quindi uno studio della (2.2) dà informazioni circa la forma della superficie in prossimità del punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

In base al suo significato geometrico risulta che $\mathcal{F}_2$ è invariante rispetto a cambiamenti di riferimento in $\mathbb{R}^3$ che conservino l'orientazione destrorsa degli assi e a cambiamenti di parametrizzazione che conservino l'orientazione di $\mathbf{n}$ (*). Lasciamo comunque al lettore come esercizio la dimostrazione di tali proprietà (Esercizio 1).

Accanto alla $\mathcal{F}_2$ può essere utile considerare la seguente superficie nello spazio euclideo (u, v, ϱ):

$$\varrho = \frac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2) \tag{2.3}$$

che si chiama *paraboloide osculatore* nel punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. La natura del paraboloide determina alcuni aspetti qualitativi della superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ in un intorno di $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Distinguiamo 4 casi, in dipendenza del segno del determinante $LN - M^2$.

a) *Caso ellittico*: $LN - M^2 > 0$. Il paraboloide è *ellittico*: le sue sezioni con piani $\varrho =$ costante sono ellissi. Inoltre ϱ ha segno costante (positivo se $L > 0$, negativo se $L < 0$). La superficie, in un intorno di $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, si mantiene da un solo lato del piano tangente (fig. 6.16 *a*), *b*)).

b) *Caso iperbolico*: $LN - M^2 < 0$. Il paraboloide è *iperbolico*: le sue sezioni con piani $\varrho =$ costante sono iperboli. Le rette di equazione

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + (u - u_0)\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + (v - v_0)\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$

(*) Si noti come $d^2\mathbf{r}$ non sia affatto invariante per cambiamenti di parametro mentre lo è la sua proiezione sulla normale $\mathbf{n}$.

con $(u - u_0)$ e $(v - v_0)$ legati dall'equazione

$$L(u - u_0)^2 + 2M(u - u_0)(v - v_0) + N(v - v_0)^2 = 0$$

dividono il piano tangente in quattro regioni in cui la superficie sta alternativamente da una parte e dall'altra rispetto al piano stesso (fig. 6.16*c*)).

c) *Caso parabolico*: $LN - M^2 = 0$, ma almeno uno tra i coefficienti L, M, N è diverso da zero. La quadrica è allora un cilindro parabolico: le sezioni con piani $\varrho =$ costante sono coppie di rette parallele (nel piano u, v). La superficie sta localmente da una sola parte del piano tangente (fig. 6.16 *d*)).

d) *Caso planare*: $L = N = M = 0$. Il paraboloide degenera in un piano. La forma della superficie in un intorno di $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ è determinata dai termini di ordine superiore al secondo nello sviluppo di Taylor (2.1).

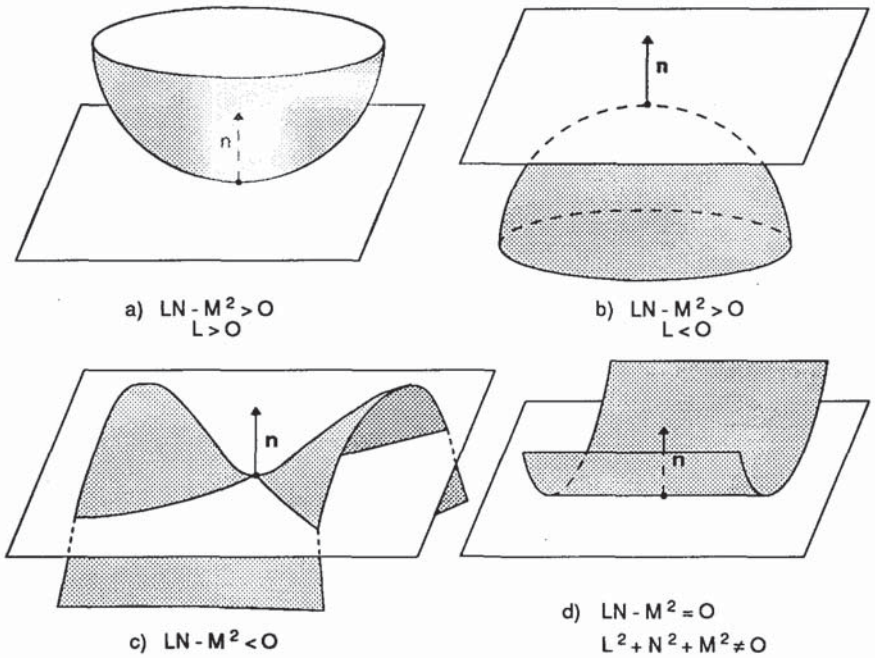


Fig. 6.16

***Esempio* 2.1** - Consideriamo il toro, definito dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u,v) = (a + b\sin u)\cos v\,\mathbf{i} + (a + b\sin u)\sin v\,\mathbf{j} + b\cos u\,\mathbf{k}$$

con $0 < b < a$ e $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.
Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{uu} &= -b\sin u\cos v\,\mathbf{i} - b\sin u\sin v\,\mathbf{j} - b\cos u\,\mathbf{k}\\
\mathbf{r}_{uv} &= -b\cos u\sin v\,\mathbf{i} + b\cos u\cos v\,\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_{vv} &= -(a + b\sin u)\cos v\,\mathbf{i} - (a + b\sin u)\sin v\,\mathbf{j}\\
\mathbf{n} &= -\cos v\sin u\,\mathbf{i} - \sin v\sin u\,\mathbf{j} - \cos u\,\mathbf{k}\ .
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
L &= <\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}> = b,\\
M &= <\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}> = 0,\\
N &= <\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}> = (a + b\sin u)\sin u\ .
\end{aligned}$$

Finalmente abbiamo $LN - M^2 = b(a + b\sin u)\sin u$ e concludiamo che, essendo $a + b\sin u > 0$:
i punti tali che $\sin u > 0$, cioè $0 < u < \pi$, sono ellittici;
quelli tali che $\sin u < 0$, ovvero $\pi < u < 2\pi$ sono iperbolici;
quelli tali che $\sin u = 0$, ovvero $u = 0$ e $u = \pi$ sono parabolici.
Il lettore individui a quali punti sulla superficie corrisponde questa suddivisione.

***Esempio* 2.2** - Calcoliamo l'espressione della seconda forma fondamentale per una superficie cartesiana di equazione $z = f(x,y)$, di classe C^2.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}\ ,\\
&\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x\,\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y\,\mathbf{k}\ ,\\
&\mathbf{r}_{xx} = f_{xx}\,\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{r}_{xy} = f_{xy}\,\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{r}_{yy} = f_{yy}\,\mathbf{k}\ ,\\
&\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\ .
\end{aligned}$$

Dunque:

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\ ,\ M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\ ,\ N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\ ,$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\{f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2\} = \frac{d^2 f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\ .$$

Essendo $LN - M^2 = \det \mathbf{H}_f = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ avremo punti ellittici, iperbolici o parabolici in dipendenza del segno del determinante hessiano di f, ritrovando una situazione già esaminata da altri punti di vista nel paragrafo 7.3.3, volume 1.

2.2 Curvature delle linee su una superficie

Le informazioni qualitative riguardanti la forma di una superficie nell'intorno di un suo punto, ricavate considerando il paraboloide osculatore, diventano più accurate esaminando la curvatura delle linee sulla superficie passanti per quel punto.

Consideriamo una curva regolare $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$; se questa curva è contenuta in T, la funzione composta $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ è una curva regolare sulla superficie che denotiamo per semplicità con $\mathbf{r}(t)$. Indichiamo con $\boldsymbol{k}$ la sua curvatura e con $\boldsymbol{N}$ la sua normale principale.

Dalla seconda formula di Frénet sappiamo che

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = kN \quad (s \text{ ascissa curvilinea})\ .$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$ e chiamando α, $0 \le \alpha < \pi$, l'angolo formato da N ed $\mathbf{n}$ otteniamo

$$\frac{< d^2\mathbf{r}, \mathbf{n} >}{ds^2} = k\cos\alpha$$

ovvero

$$k\cos\alpha = \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\ ; \tag{2.4}$$

$k\cos\alpha$ si chiama *curvatura normale* e viene indicata con k_n.

La formula (2.4) è densa di conseguenze.

a) La direzione del vettore tangente $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t)$ è determinata, in un dato punto della superficie, una volta assegnato il rapporto u'/v'. Ciò significa che: *curve sulla superficie passanti per un punto* $\mathbf{p}$, *in cui hanno la stessa tangente, hanno la stessa curvatura normale in* $\mathbf{p}$, *essendo per esse identico il secondo membro della* (2.4).

b) *Se due curve su una superficie hanno stessa tangente in un punto* $\mathbf{p}$ *e stessa normale principale, hanno anche stessa curvatura se il piano osculatore in* $\mathbf{p}$ *non è un piano tangente alla superficie.*

Infatti in tal caso $\cos\alpha$ è non nullo ed identico per le due curve, come pure il secondo membro di (2.5), avendo le curve la stessa tangente.

Le conseguenze a) e b) indicano che, per calcolare la curvatura in un punto **p** delle linee sulla superficie, passanti per **p**, ci si può restringere alla considerazione delle *sezioni normali* in **p** alla superficie stessa, ovvero a curve che si ottengono intersecando la superficie con un piano contenente la normale in **p** alla superficie (fig. 6.17). Evidentemente vi sono infinite sezioni normali in un punto **p** e se ne può selezionare una fissando una direzione nel piano tangente. Così, ad ogni curva passante per **p**, possiamo far corrispondere un'unica sezione normale, quella determinata dalla tangente alla curva in **p**.

Per una sezione normale, la normale principale coincide con **n** oppure con $-\mathbf{n}$, per cui $\cos\alpha = \pm 1$.

Come terza conseguenza della (2.4), abbiamo

c) *La curvatura di una linea sulla superficie in un punto* **p** *in cui il piano osculatore non è tangente è data dalla formula*

$$k = \frac{k_n}{\cos\alpha} \tag{2.5}$$

dove k_n è la curvatura normale della sezione normale corrispondente.

***Esempio* 2.3** - Consideriamo la sfera di raggio R, di equazione

$$\mathbf{r}(\psi,\theta) = R\sin\psi\cos\theta\,\mathbf{i} + R\sin\psi\sin\theta\,\mathbf{j} + R\cos\psi\,\mathbf{k}\,,\ (\psi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

Abbiamo già visto che

$$\mathcal{F}_1 = dl^2 = R^2(d\psi^2 + (\sin\psi)^2 d\theta^2)\ .$$

Inoltre, essendo

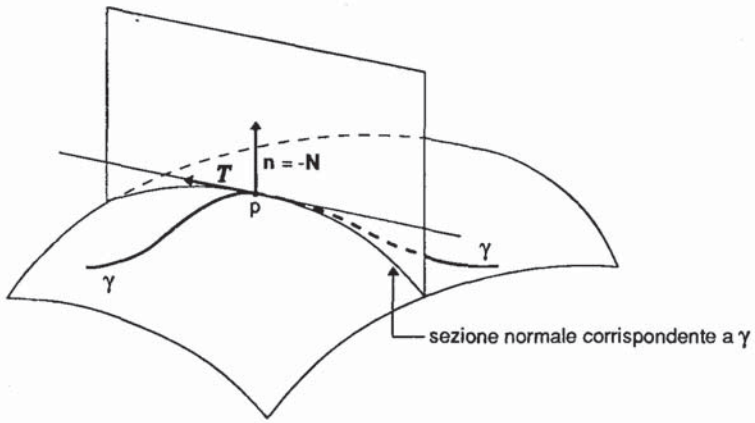


Fig. 6.17 Sezione nomale ad una superficie in **p**.

$$\mathbf{r}_{\psi\psi} = -R\sin\psi\cos\theta\,\mathbf{i} - R\sin\psi\sin\theta\,\mathbf{j} - R\cos\psi\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{\psi\theta} = -R\cos\psi\sin\theta\,\mathbf{i} + R\cos\psi\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{\theta\theta} = -R\sin\psi\cos\theta\,\mathbf{i} - R\sin\psi\sin\theta\,\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\sin\psi\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\psi\sin\theta\,\mathbf{j} - \cos\psi\,\mathbf{k}$$

si ha:

$$L = <\mathbf{r}_{\psi\psi},\mathbf{n}> = R\ ,\ M = <\mathbf{r}_{\psi\theta},\mathbf{n}> = 0\ ,\ N = <\mathbf{r}_{\theta\theta},\mathbf{n}> = R(\sin\psi)^2\ .$$

Per le sezioni normali abbiamo dunque

$$k_n = \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} = \frac{R d\psi^2 + R(\sin\psi)^2 d\theta^2}{R^2 d\psi^2 + R^2(\sin\psi)^2 d\theta^2} = \frac{1}{R}$$

in accordo col fatto che le sezioni normali sono i cerchi massimi (quelli che hanno raggio R) con curvatura $1/R$. Osserviamo che la formula (2.5) esprime una ben nota relazione geometrica quando si consideri come linea sulla superficie un qualunque altro cerchio, come indicato in figura 6.18.

***Esempio* 2.4** - Calcoliamo l'espressione delle curvature delle sezioni normali per una superficie di equazione $z = f(x,y)$.

Si ha, rivedendo i risultati nell'esempio 2.2:

$$k_n = \frac{f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2}{[1+(f_x)^2]dx^2 + 2f_x f_y\,dx\,dy + [1+(f_y)^2]dy^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$$

***Esempio* 2.5** - Consideriamo il toro dell'esempio 2.1. Si ha, per le sezioni normali,

$$k_n = \frac{b\,du^2 + (a+b\sin u)\sin u\,dv^2}{b^2du^2 + (a+b\sin u)^2dv^2}\ .$$

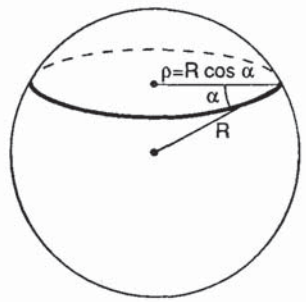


Fig. 6.18 Per il cerchio di raggio ρ si ha $\rho = R\cos\alpha$, cioè $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{R\cos\alpha}$ che corrisponde esattamente alla (2.5).

Le sezioni normali corrispondenti a $dv = 0$ sono cerchi con curvatura $1/b$.

Osserviamo poi che le sezioni corrispondenti a $du = 0$ hanno curvatura uguale a $\sin u/(a + b \sin u)$, minima nei punti $(\pi/2, v)$ del parallelo esterno dove vale $1/(a + b)$ e massima in quelli del parallelo interno $(3\pi/2, v)$, dove vale $1/(a - b)$.

2.3. Curvature principali. Curvatura gaussiana e curvatura media

Introduciamo in questo paragrafo due importanti quantità geometriche: la *curvatura gaussiana* e la *curvatura media*. Esse sono invarianti rispetto a cambiamenti di parametri che mantengono l'orientazione. In più la curvatura gaussiana non cambia mutando l'orientazione ed è invariante rispetto ad un'altra classe importante di trasformazioni dello spazio: i *diffeomorfismi isometrici*.

Cominciamo col considerare ancora la formula (2.4) per la curvatura delle sezioni normali. Fissato il punto $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u, v)$, tale formula assegna k_n come funzione delle due variabili u' e v' che determinano la direzione della tangente alla sezione normale. Inoltre essendo $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ omogenee di secondo grado in u', v' ne segue che $k_n = k_n(u', v')$ è omogenea di grado zero: $k_n(\lambda u', \lambda v') = k_n(u', v')$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Quindi possiamo restringere le nostre considerazioni all'insieme $\{(u', v') : u'^2 + v'^2 = 1\}$. Essendo questo un compatto di $\mathbb{R}^2$, k_n vi ammetterà *massimo* e *minimo*, possibilmente coincidenti (*). Il massimo ed il minimo di k_n prendono il nome di *curvature principali* in $\mathbf{p}$ e le direzioni in cui k_n è massima o minima si chiamano *direzioni principali*.

Vediamo come si calcolano le curvature principali.

Introduciamo a tale scopo le matrici simmetriche seguenti, associate rispettivamente alla prima ed alla seconda forma fondamentale:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Si definisce *autovalore della coppia* di matrici $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$ (nell'ordine) un numero λ soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{G}) = (L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0 \,. \tag{2.7}$$

Se $\mathbf{G} = \mathbf{I}_3$ ritroviamo la nozione usuale di autovalore della matrice $\mathbf{Q}$. Per la simmetria di $\mathbf{G}$ e $\mathbf{Q}$, le soluzioni di (2.7) sono reali. Vale il seguente risultato.

■ **Teorema 2.1** - *Supponiamo che $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$, ovvero che il punto $\mathbf{p}$ non sia planare. Allora vale la seguente alternativa.*

a) *L'equazione* (2.7) *ha due soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = k \neq 0$, coincidenti. In tal caso tutte le direzioni sono principali.*

Oppure:

(*) Escludiamo il caso in cui $L = M = N = 0$.

b) *L'equazione* (2.7) *ha due soluzioni $\lambda = k_1$ e $\lambda = k_2$, coincidenti rispettivamente con il minimo ed il massimo di k_n* (ovvero le curvature principali). *Inoltre le direzioni principali sono ortogonali.*

Nel caso a) il punto $\mathbf{p}$ è detto *umbilicale*.

Dimostrazione - Come sappiamo, se una funzione differenziabile ha un estremo in un punto, in tale punto il gradiente è nullo. Dunque, le direzioni (u', v') che massimizzano o minimizzano $k_n(u', v')$, devono annullare il gradiente. Annullando $\partial k_n/\partial u'$ e $\partial k_n/\partial v'$ si trova

$$\begin{cases} (L\,\mathcal{F}_1 - E\mathcal{F}_2)u' + (M\mathcal{F}_1 - F\mathcal{F}_2)v' = 0 \\ (M\mathcal{F}_1 - F\mathcal{F}_2)u' + (N\,\mathcal{F}_1 - G\mathcal{F}_2)v' = 0 \,. \end{cases}$$

Dividendo per $\mathcal{F}_1$ e ponendo $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 = \lambda$ si trova

$$\begin{cases} (L - \lambda E)u' + (M - \lambda F)v' = 0 \\ (M - \lambda F)u' + (N - \lambda G)v' = 0 \,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Tale sistema ammette soluzioni $(u', v') \neq (0, 0)$ se e solo se la matrice dei coefficienti u' e v' è singolare ovvero se λ è soluzione dell'equazione (2.7). Se questa ha due soluzioni (non nulle) coincidenti, allora il massimo ed il minimo della curvatura delle sezioni normali coincidono, cosicché ogni direzione è direzione principale.

Viceversa, l'equazione (2.7) possiede 2 radici $\lambda = k_1$ e $\lambda = k_2$ reali e distinte. In tal caso, a ciascuno dei valori k_1 e k_2 (supponiamo $k_1 < k_2$) corrisponde una ben determinata direzione (u_1', v_1') e (u_2', v_2') soluzione del sistema (2.8), tale che $k_n(u_1', v_1') = k_1 =$ =minima curvatura e $k_n(u_2', v_2') = k_2 =$ massima curvatura.

Per far vedere che le direzioni principali sono ortogonali, poniamo $\mathbf{w}_1 = (u_1', v_1')$ e $\mathbf{w}_2 = (u_2', v_2')$. Allora si ha

$$(\mathbf{Q} - k_1\mathbf{G})\mathbf{w}_1 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{Q} - k_2\mathbf{G})\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \,.$$

Essendo $\mathbf{G}$ invertibile, le due equazioni precedenti sono equivalenti rispettivamente a

$$(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q} - k_1\mathbf{I}_3)\mathbf{w}_1 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q} - k_2\mathbf{I}_3)\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \,.$$

Moltiplicando scalarmente la prima equazione per $\mathbf{w}_2$ e la seconda per $\mathbf{w}_1$ e poi sottraendo membro a membro si trova (*)

$$(k_2 - k_1) < \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >= 0$$

da cui, essendo $k_2 - k_1 \neq 0$, segue l'ortogonalità di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. □

Sviluppando l'equazione (2.7) si trova

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \tag{2.9}$$

(*) Tenendo conto della simmetria di $\mathbf{G}^{-1}$ e $\mathbf{Q}$ si ha

$$< \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >=< \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 > \,.$$

dove i coefficienti H e K sono definiti come segue:

$$H = \frac{1}{2}\frac{E\,N - 2F\,M + G\,L}{E\,G - F^2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{2.10}$$

$$K = \frac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2} = \frac{\det \mathbf{Q}}{\det \mathbf{G}} = k_1\,k_2\ . \tag{2.11}$$

H si chiama **curvatura media** e K **curvatura gaussiana.**

***Esempio* 2.6** - I punti di una sfera sono tutti umbilicali essendo la curvatura costante ed uguale a $1/R$ se si orienta la normale verso l'interno. La curvatura media è quindi $1/R$ e quella di Gauss $1/R^2$.

Per il toro usiamo i risultati dell'esempio 2.1.

Abbiamo

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\sin u)^2 \end{pmatrix}\ , \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b\sin u)\sin u \end{pmatrix}\ .$$

Le curvature principali sono soluzione dell'equazione

$$(b - \lambda b^2)\,[(a + b\sin u)\sin u - \lambda(a + b\sin u)^2] = 0\ ;$$

perciò

$$k_2 = \frac{1}{b} \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{\sin u}{a + b\sin u} \quad (k_1 < k_2)$$

che riconosciamo essere le curvature dei cerchi meridiani e di quelli paralleli rispettivamente, che costituiscono le direzioni principali.

Dunque

$$K = k_1 k_2 = \frac{\sin u}{b(a + b\sin u)}\ .$$

Osserviamo che nella parte interna (punti iperbolici) $K < 0$, in quella esterna (punti ellittici) $K > 0$ mentre lungo i due cerchi $u = 0$ e $u = \pi$ (punti parabolici) $K = 0$.

***Esempio* 2.7** - Esaminiamo curvatura gaussiana e curvatura media per superfici della forma $z = f(x, y)$. Si ha:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + (f_x)^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + (f_y)^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Dalla (2.11) otteniamo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{[1 + (f_x)^2]f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + [1 + (f_y)^2]f_{xx}}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dalla (2.10)

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2}{[1 + (f_x)^2 + (f_y)^2]^2}\ . \tag{2.13}$$

In particolare se $z = (x^2 - y^2)/2$, abbiamo:

$$z_x = x\ ,\ z_y = -y\ ,\ z_{xx} = 1\ ,\ z_{yy} = -1\ ,\ z_{xy} = 0$$

quindi:

$$H = \frac{1}{2}\frac{y^2 - x^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$K = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\ .$$

***Esempio* 2.8** - Per un cilindro di raggio R si ha $k_1 = 0$ e, se la normale è interna, $k_2 = 1/R$, dunque $H = 1/2R$, $K = 0$.

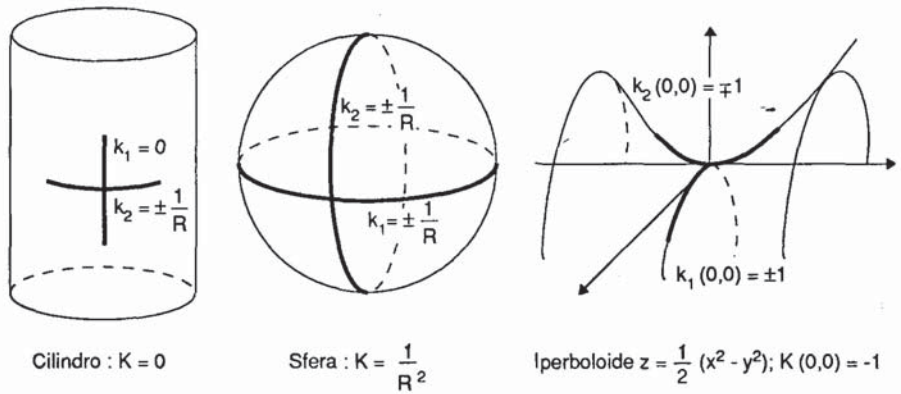


Fig. 6.19 I segni $\pm$ dipendono dall'orientazione del versore normale.

2.4 Mappa di Gauss. Theorema Egregium

Abbiamo introdotto nel precedente paragrafo la curvatura media $H = (k_1+k_2)/2$ e quella gaussiana $K = k_1 k_2$.

Che differenza c'è tra queste due quantità? Che cosa "misurano" effettivamente H e K? Ad esempio ci si può chiedere che cosa significhi per una superficie avere curvatura media o curvatura gaussiana nulle in tutti i suoi punti.

La curvatura media è legata alla variazione dell'area di una superficie quando questa subisce una deformazione; si tratta di una questione tipica del *calcolo delle variazioni*, oggetto del capitolo 7, sezione 2, sulla quale ritorneremo dunque in seguito.

Ci occuperemo invece subito del profondo significato geometrico della curvatura gaussiana.

Intanto sottolineiamo che il segno di K coincide con quello di $\det \mathbf{Q} = LN - M^2$ e pertanto esso fissa in modo qualitativo la forma della superficie vicino ad un dato punto: se $K > 0$ il punto è ellittico, se $K < 0$ il punto è iperbolico, se $K = 0$ il punto è parabolico o planare.

Un livello più quantitativo si raggiunge introducendo la cosiddetta *mappa di Gauss*, definita come segue ed illustrata nella figura 6.20.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$, l'equazione di una superficie regolare Σ. La *mappa di Gauss* associa ad ogni punto $\mathbf{r}(u,v)$ il versore normale $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u,v)$, ossia $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v)/\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|$.

Dunque la mappa di Gauss è una mappa

$$\Sigma \to S^2$$

dove S^2 indica la superficie sferica unitaria in $\mathbb{R}^3$, centrata in $\mathbf{0}$.

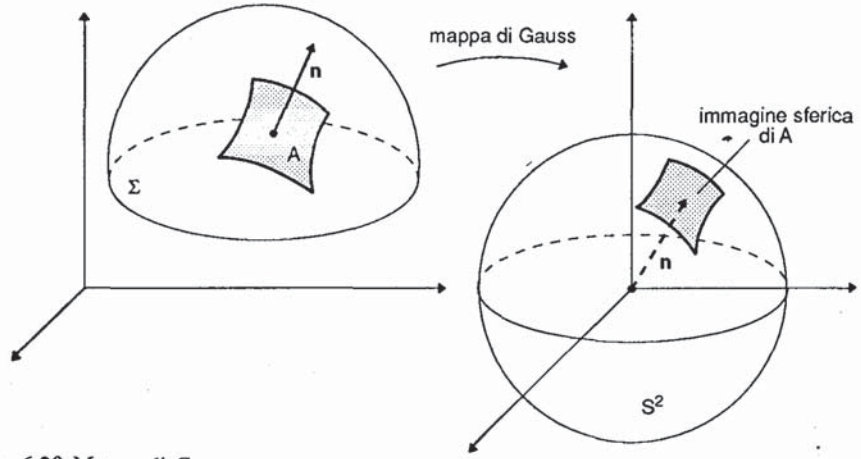


Fig. 6.20 Mappa di Gauss.

Se $A \subseteq \Sigma$, la sua immagine tramite la mappa di Gauss si chiama *immagine sferica di A*.

Risulta così definita una nuova superficie regolare di equazione vettoriale $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u,v)$, $(u,v) \in T$, che chiameremo *superficie di Gauss* associata a Σ.

Essendo Σ regolare possiamo considerare i vettori $\mathbf{n}_u$ e $\mathbf{n}_v$ che, in base al lemma 1.5 del capitolo 1, risultano ortogonali ad $\mathbf{n}$ stesso, essendo $\mathbf{n}$ un versore. Si deduce dunque che il vettore fondamentale $\mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v$, della superficie di Gauss, è parallelo a $\mathbf{n}$. Vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2 - *Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$, l'equazione vettoriale di una superficie regolare (almeno di classe C^3). Vale la formula*

$$\mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v = K\, \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \,. \tag{2.14}$$

Dimostrazione - Poiché $\mathbf{n}_u \perp \mathbf{n}$ e $\mathbf{n}_v \perp \mathbf{n}$, esistono $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u &= a\, \mathbf{r}_u + b\, \mathbf{r}_v \\ \mathbf{n}_v &= c\, \mathbf{r}_u + d\, \mathbf{r}_v \,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Moltiplichiamo scalarmente le (2.15) per $\mathbf{r}_u$ ed $\mathbf{r}_v$; osservando che (Esercizio 14, Sez. 1), $L = -<\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u>$, $M = -<\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v>$, $N = -<\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v>$, e ricordando che

$$E = \|\mathbf{r}_u\|^2 \,,\ F = <\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v> \,,\ G = \|\mathbf{r}_u\|^2 \,,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} -L &= aE + bF & -M &= cE + dF \\ -M &= aF + bG & -N &= cF + dG \,. \end{aligned}$$

Queste quattro equazioni corrispondono all'unica equazione matriciale seguente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}$$

che implica, per il Teorema di Binet sui determinanti:

$$(ad - bc)(EG - F^2) = (LN - M^2)$$

ovvero che

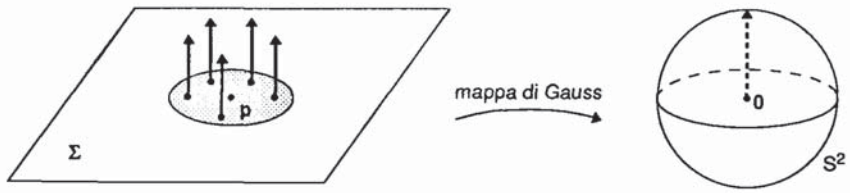
$$(ad - cd) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K \,.$$

D'altra parte dalle (2.15), per calcolo diretto, otteniamo:

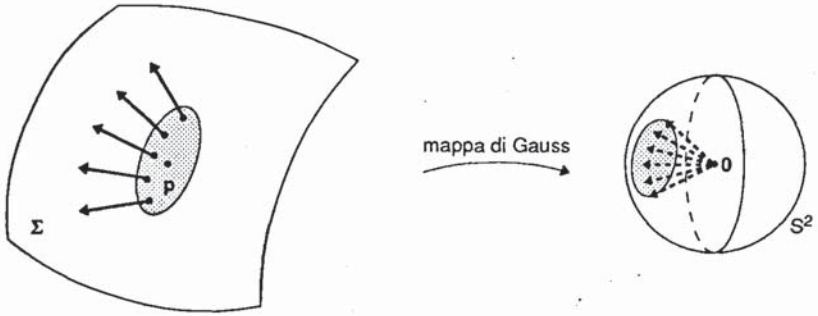
$$\mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v = (ad - bc)\, \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \,. \ \square$$

Conseguenza immediata della (2.14) è la seguente formula

$$|K| = \frac{d\sigma_G}{d\sigma} \tag{2.16}$$



a) La superficie è piana, le normali sono parallele e la dispersione è zero: $d\sigma_G = 0$



b) La superficie è "curva"e le normali si disperdono (in direzione) intorno al punto **p**

Fig. 6.21

dove $d\sigma = \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| du\, dv$ e $d\sigma_G = \|\mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v\| du\, dv$ indicano rispettivamente l'elemento d'area di Σ e quello della superficie di Gauss Σ_G associata a Σ. Ne ricaviamo la seguente interpretazione: *il modulo della curvatura gaussiana in un punto* **p** *rappresenta il limite del rapporto tra l'area dell'immagine sferica di un intorno superficiale di* **p** *e l'area di quest'ultimo, quando il diametro dell'intorno tende a zero.*

Quel rapporto caratterizza *il grado di dispersione del fascio di normali alla superficie* in un intorno del punto **p**, come illustrato in figura 6.21.

Ma c'è qualcosa di più profondo.

Esaminiamo il caso di un cilindro come quello della figura 6.22.

Un esame della figura indica che l'immagine sferica del cilindro è l'equatore; quindi ritroviamo il fatto che un cilindro ha curvatura gaussiana nulla.

D'altra parte, tagliando il cilindro lungo una generatrice, possiamo deformarlo in una parte di piano, come indicato in figura 6.23.

Il fatto cruciale è però che nella deformazione *la metrica si conserva* ovvero una curva rettificabile sul cilindro è trasformata in una curva rettificabile nel piano con la *stessa lunghezza*; infatti la metrica sul cilindro (Esercizio 14, Sez. 1) è data da

$$dl^2 = dz^2 + ds^2$$

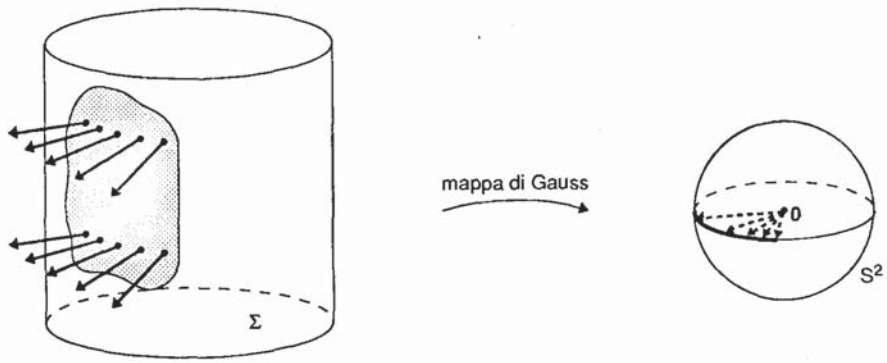


Fig. 6.22 Mappa di Gauss per un cilindro: l'immagine sferica della parte ombreggiata è l'arco di equatore in neretto.

dove ds è il differenziale d'arco nel piano x, y, che è esattamente quella del cilindro "sviluppato".

In termini appropriati: *il cilindro è diffeomorfo isometricamente ad una parte di piano*, cioè ad una superficie che ha pure curvatura gaussiana nulla in ogni punto.

Questo fatto non è casuale. Vale infatti il seguente teorema, forse il più importante di tutta la geometria differenziale.

Theorema Egregium (di Gauss). *Siano Σ_1 e Σ_2 due superfici in $\mathbb{R}^3$. Se esiste un diffeomorfismo tra Σ_1 e Σ_2 che sia anche una isometria, allora la curvatura gaussiana in punti corrispondenti è la stessa.*

Il teorema sostanzialmente afferma che K, definita in termini di $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, prima e seconda forma fondamentale, in realtà dipende solo dai coefficienti della prima

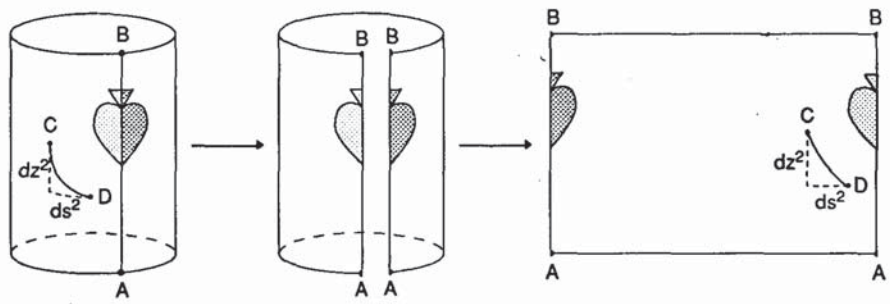


Fig. 6.23 Sviluppo di un cilindro in un rettangolo piano.

forma fondamentale (*). Per la sua dimostrazione rimandiamo ai testi di geometria differenziale.

Un classico esempio illustra il *theorema egregium*.

***Esempio* 2.9** - Consideriamo le due superfici seguenti: la *catenoide* di equazione

$$\mathbf{r}(z,\theta) = \cos\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{i} + \sin\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad (z,\theta) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi]\ ,$$

che abbiamo già introdotto nell'esempio 1.6,
e l'*elicoide* di equazione

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k} \quad (u,v) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi]\ ,$$

che abbiamo introdotto nell'esercizio 7, sezione 1 (si vedano le figure 6.24 e 6.25).

Ricordando i calcoli nei due esempi citati, abbiamo:
per la *catenoide*:

$$E = (\operatorname{Ch} z)^2\ , F = 0\ ,\ G = (\operatorname{Ch} z)^2 \ \Rightarrow\ dl^2_{cat} = (\operatorname{Ch} z)^2(dz^2 + d\theta^2)\ ,$$
$$\mathbf{n} = (\operatorname{Ch} z)^{-2}(-\cos\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{i} - \sin\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{j} + \operatorname{Ch} z \operatorname{Sh} z\,\mathbf{k})\ ;$$

per l'*elicoide*:

$$E = 1\ ,\ F = 0\ ,\ G = 1 + u^2 \ \Rightarrow\ dl^2_{el} = du^2 + (1+u^2)dv^2\ ,$$
$$\mathbf{n} = (1+u^2)^{-1/2}(\sin v\,\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k})\ .$$

Osserviamo ora che la coppia di equazioni

$$u = \operatorname{Sh} z$$
$$v = \theta$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano (z,θ) e quelli del piano (u,v); inoltre è di classe C^∞. Pertanto costituisce un diffeomorfismo tra *catenoide* ed *elicoide*.

Inoltre

$$dl^2_{el} \underset{\substack{u=\operatorname{Sh} z\\ v=\theta}}{\longrightarrow} (\operatorname{Ch} z)^2 dz^2 + (1+\operatorname{Sh} z)^2 d\theta^2 = (\operatorname{Ch} z)^2(dz^2 + d\theta^2) = dl^2_{cat}$$

da cui si vede che la trasformazione è una *isometria* tra le due superfici.

(*) Nella dipendenza intervengono anche alcune derivate prime e seconde di E, F, G.

Dal *theorema egregium* si deduce che le due superfici devono avere curvatura gaussiana coincidente in punti corrispondenti.

Verifichiamolo.

Per la catenoide abbiamo:

$$\mathbf{r}_{zz} = \cos\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{i} + \sin\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad L = <\mathbf{r}_{zz},\mathbf{n}> = -1$$
$$\mathbf{r}_{\theta z} = -\sin\theta \operatorname{Sh} z\,\mathbf{i} + \cos\theta \operatorname{Sh} z\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad M = <\mathbf{r}_{\theta z},\mathbf{n}> = 0$$
$$\mathbf{r}_{\theta\theta} = -\cos\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{i} - \sin\theta \operatorname{Ch} z\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad N = <\mathbf{r}_{\theta\theta},\mathbf{n}> = 1$$

Dunque

$$K(z,\theta) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(\operatorname{Ch} z)^4}\ .$$

Per l'elicoide:

$$\mathbf{r}_{uu} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = <\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}> = 0$$
$$\mathbf{r}_{uv} = -\sin v\,\mathbf{i} + \cos v\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad M = <\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}> = -(1+u^2)^{-1/2}$$
$$\mathbf{r}_{vv} = -u\cos v\,\mathbf{i} - u\sin v\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad N = <\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}> = 0$$

Dunque

$$K(u,v) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}\ .$$

Si vede che con la trasformazione $u = \operatorname{Sh} z$ $v = \theta$, $K(u,v)$ coincide con $K(z,\theta)$.

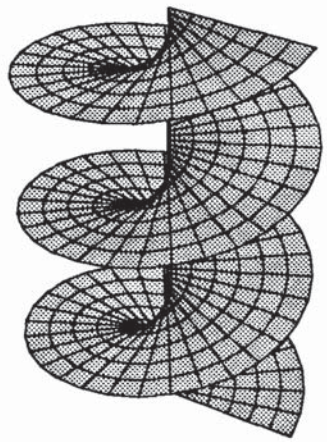


Fig. 6.24 Elicoide.

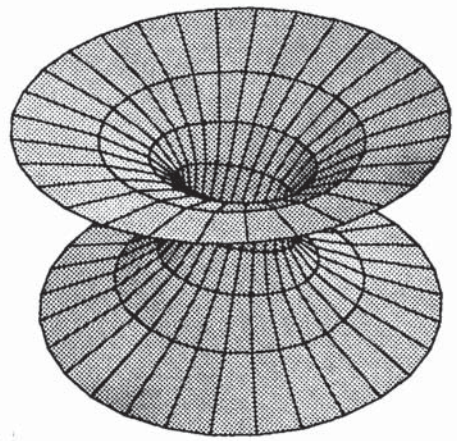


Fig. 6.25 Catenoide.

Concludiamo con qualche osservazione di carattere generale.

In base al *theorema egregium* due superfici diffeomorfe ed isometriche hanno la stessa curvatura K in punti corrispondenti. L'enunciato non è invertibile: due superfici diffeomorfe con medesima curvatura gaussiana in punti corrispondenti *non* sono in generale isometriche (Esercizio 14).

C'è tuttavia un caso speciale importante in cui ciò accade: è il caso delle superfici con curvatura gaussiana *costante*.

In altre parole, se K è costante, la prima forma fondamentale ovvero la metrica riemanniana sulla superficie è univocamente determinata da K.

In particolare se $K = 0$ la metrica sulla superficie è sostanzialmente (cioè a meno di diffeomorfismi) quella euclidea del piano. Per questa ragione una superficie a curvatura gaussiana nulla è detta *sviluppabile*: coni e cilindri sono esempi di superfici sviluppabili.

Sulle superfici a curvatura costante $K > 0$ l'elemento di lunghezza è quello della sfera (di raggio $1/\sqrt{K}$). Queste superfici costituiscono un modello della geometria non–euclidea chiamata *geometria ellittica*. È questa una geometria in cui, sostanzialmente, l'ultimo degli assiomi di Euclide è sostituito dal seguente: "dati in un "piano" un punto p ed una retta r, con $p \notin r$, non esistono rette parallele ad r passanti per p".

Le superfici a curvatura costante $K < 0$ hanno una metrica un po' più complicata e costituiscono un modello di Geometria non–euclidea chiamata *iperbolica*. L'ultimo assioma di Euclide è sostituito dal seguente: "dati in un "piano" un punto p ed una retta r, esistono infinite rette parallele ad r".

Infine ricordiamo anche che una conseguenza del *theorema egregium* è la possibilità di trattare la geometria da un punto di vista *intrinseco*, che eviti cioè il riferimento allo spazio circostante.

Il passo decisivo in questa direzione è dovuto a Riemann, verso la metà del secolo scorso. Contemporaneamente ci si libera dal vincolo delle 2 dimensioni permettendo di costruire una geometria su "oggetti" di dimensione qualunque. Si parla così, in geometria differenziale moderna, di *geometria riemanniana* quando su un insieme localmente omeomorfo (topologicamente equivalente) ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ si assegna una forma quadratica definita positiva

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du^i du^j \qquad , \tag{2.17}$$

che rappresenta l'elemento di lunghezza e che determina, attraverso le sue proprietà, tutte le caratteristiche geometriche quali la curvatura gaussiana, le linee di minima lunghezza tra due punti assegnati, eccetera.

Un'ulteriore generalizzazione si compie se non si richiede che la (2.17) sia definita positiva. Si parla allora di geometria *pseudo–riemanniana*. Un esempio è lo spazio–tempo quadridimensionale $\mathbb{R}^4_1$ (detto di Minkowsky) della relatività ristretta di Einstein in cui l'elemento di lunghezza è dato dalla formula

$$dl^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{2.18}$$

con ovvio significato dei simboli. Essendo nella (2.18) i coefficienti costanti la metrica si chiama *pseudo–euclidea*.

In questa teoria si rivela appieno l'importanza di poter lavorare intrinsecamente nello spazio–tempo.

Anche la relatività generale viene sviluppata in uno spazio quadridimensionale (il *cronotopo*) in cui l'elemento di lunghezza non è più "pseudoeuclideo" ma ha la forma generale (2.17) in cui i coefficienti g_{ij}, non più costanti, sono determinati dalla distribuzione delle masse nell'universo.

Esercizi

1. Sia $\mathbf{r}(u,v)$ una superficie di classe $C^3(T)$, $T \subseteq \mathbf{R}^2$, regolare. Si operi il cambiamento di coordinate

$$u = \varphi(s,t)\ ,\ v = \varphi(s,t) \qquad (s,t) \in T' \subseteq \mathbb{R}^2$$

con $\varphi, \psi \in C^2(T')$, che realizzi una corrispondenza biunivoca tra T e T' e tale che $\partial(\varphi,\psi)/\partial(s,t) \neq 0$ per ogni $(s,t) \in T'$.

Poniamo $\widetilde{\mathbf{r}}(s,t) = \mathbf{r}(\varphi(s,t), \psi(s,t))$. Ricavare le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
\widetilde{L} &= L(\varphi_s)^2 + 2M\varphi_s\psi_s + N(\psi_s)^2 \\
\widetilde{M} &= L\varphi_s\varphi_t + M(\psi_s\varphi_t + \psi_t\varphi_s) + N\psi_t\psi_s \\
\widetilde{N} &= L(\varphi_t)^2 + 2M\varphi_t\psi_t + N(\psi_t)^2 \ .
\end{aligned}$$

Dedurre che $\widetilde{L}\widetilde{N} - \widetilde{M}^2 = \partial(\varphi,\psi)/\partial(s,t)\,(LN - M^2)$.

2. Calcolare la curvatura delle sezioni normali dell'emisfero di equazione $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $0 \leq x^2 + y^2 < R$.
Commentare il risultato confrontandolo con quello dell'esempio 2.3.

3. Dimostrare che $\mathbf{p}$ è un punto *umbilicale* di una superficie se e solo se $L/E = M/F = N/G$.

4. Verificare la formula (2.12) per la curvatura media di una superficie cartesiana.

5. Calcolare curvatura gaussiana e curvatura media per una superficie di equazione $z = f(x) + g(y)$.

6. Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ l'equazione vettoriale di una superficie regolare (almeno C^2).
Verificare che $L = <\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}> = -<\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u>$, $M = <\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}> = -<\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v> = -<\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u>$ e $N = <\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}> = -<\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v>$.

7. Determinare la metrica sull'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ .$$

Determinare poi direzioni principali, curvatura media e gaussiana.

8. Sia data la superficie di rivoluzione

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = f(t)\cos\varphi\,\mathbf{i} + f(t)\sin\varphi\,\mathbf{j} + g(t)k$$

generata dalla rotazione della curva regolare che nel piano (y, z) ha equazioni parametriche

$$y = f(t)\ ,\ z = g(t).$$

Dimostrare le seguenti formule:

$$H = \frac{1}{2}\frac{g'(f')^2 + (g')^3 + f(f'g'' - f''g')}{f[(f')^2 + (g')^2]^{3/2}}$$

$$K = \frac{g'(f'g'' - f''g')}{f[(f')^2 + (g')^2]^2}\ .$$

9. Calcolare curvature principali, curvatura media e gaussiana per la superficie di equazione $x \sin z - y \cos z = 0$.

10. Dimostrare che la curvatura gaussiana di un cono è nulla (tranne che nel vertice). Un cono è deformabile isometricamente in una superficie piana?

11. Studiare la superficie $z = x^2 - y^3$ determinandone la metrica, la natura dei punti, le curvature principali H e K.

12. Per una superficie di rivoluzione $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ determinare i punti ellittici, iperbolici, parabolici.

13. Dimostrare che k_1 e k_2 sono date da $H \pm \sqrt{H^2 - K}$ rispettivamente.

14. Dimostrare che le due superfici di equazione

$$\mathbf{r}\ (u, \theta) = u \cos\theta\, \mathbf{i} + u \sin\theta\, \mathbf{j} + \log u\, \mathbf{k} \qquad (u, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$$

$$\mathbf{r}_1(v, \psi) = v \cos\psi\, \mathbf{i} + v \sin\psi\, \mathbf{j} + v\, \mathbf{k} \qquad (v, \psi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$$

hanno curvatura $K = 1/(1 + u^2)^2$ e $K^1 = -1/(1 + v^2)^2$ rispettivamente e che, dunque, hanno curvatura coincidente nei punti corrispondenti tramite il diffeomorfismo

$$\begin{cases} u = & v \\ \theta = & \psi\ . \end{cases}$$

Si può tuttavia dimostrare che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ *non sono isometriche.*

15. Verificare che la catenoide (Esempio 2.9) ha curvatura media nulla. Calcolare quella dell'elicoide.

16. Tra le superfici di rotazione di equazione

$$\mathbf{r}(u, \theta) = u \cos\theta\, \mathbf{i} + u \sin\theta\, \mathbf{j} + g(u)\, \mathbf{k}$$

oppure

$$\mathbf{r}(u, \theta) = f(u) \cos\theta\, \mathbf{i} + f(u) \sin\theta\, \mathbf{j} + u\, \mathbf{k}$$

determinare quelle sviluppabili (a curvatura $K = 0$ in ogni punto), identificandole.

3. I TEOREMI DI GREEN, GAUSS E STOKES

3.1 La formula di Gauss–Green nel piano

In questo paragrafo ci occupiamo della relazione tra integrali doppi ed integrali curvilinei di forme differenziali.

Ricordiamo che se D è un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$, la cui frontiera ∂D sia una curva di Jordan regolare a tratti, si dice che ∂D è orientata positivamente se è orientata in senso antiorario; per sottolinearlo useremo il simbolo $\partial^+ D$.

In tale caso, descrivendo la frontiera nel verso positivo, si lasciano i punti di D a sinistra.

Cominciamo col considerare domini D *semplici* (o *normali*) rispetto agli assi (fig. 6.26) ed un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ definito sulla chiusura di $D, \overline{D} = D \cup \partial D$. Vale il seguente lemma.

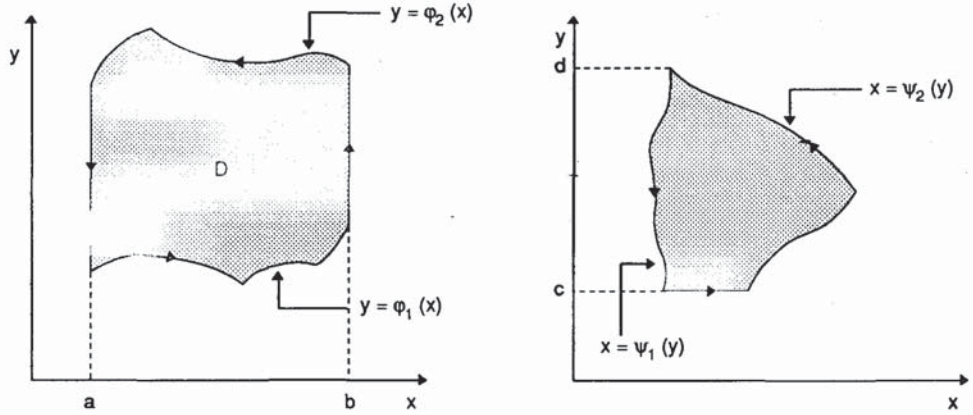
Lemma 3.1 - *Sia* $\mathbf{F} \in C^1(\overline{D})$.

a) *Se* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ *con* φ_1, φ_2 *regolari a tratti, allora*

$$\iint_D P_y dx\, dy = -\int_{\partial^+ D} P\, dx \tag{3.1}$$

b) *Se* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c < y < d;\ \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ *con* ψ_1 *e* ψ_2 *regolari a tratti, allora:*

$$\iint_D Q_x dx\, dy = \int_{\partial^+ D} Q\, dy\ . \tag{3.2}$$



a) Dominio semplice rispetto all'asse y con orientazione positiva. **Fig. 6.26** b) Dominio semplice rispetto all'asse x con orientazione positiva.

Dimostrazione - a) Si ha, ricordando il teorema di riduzione per integrali doppi:

$$\iint_D P_y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P_y\,dy = \\ = \int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx\ . \tag{3.3}$$

D'altra parte, essendo $dx = 0$ sui tratti rettilinei del bordo:

$$\int_{\partial^+ D} P\,dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = \\ = \int_a^b [P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))]\ . \tag{3.4}$$

Dalle (3.3) e (3.4) si ottiene la (3.1).

b) Ancora per il teorema di riduzione si ha:

$$\iint_D Q_x\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q_x\ dx = \\ = \int_c^d [Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)]dy\ . \tag{3.5}$$

Inoltre, essendo $dy = 0$ sui tratti rettilinei del bordo di D:

$$\int_{\partial^+ D} Q\,dy = \int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy + \int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy = \\ = \int_c^d [Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)]dy\ . \tag{3.6}$$

Dalle (3.5) e (3.6) si ricava la (3.2). □

Il seguente teorema è la versione più semplice del teorema di Gauss–Green (*) nel piano.

■ **Teorema 3.2** - *Sia D un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti e che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \in C^1(\overline{D})$, allora vale la formula*

(*) George Green, matematico inglese (1793–1841).

$$\iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy\ . \tag{3.7}$$

Dimostrazione - Nelle ipotesi del teorema valgono entrambe le (3.1) e (3.2) del lemma. Sottraendo membro a membro la (3.1) dalla (3.2) si ottiene la (3.7). □

La formula (3.7) vale per domini molto più generali di quelli considerati finora. Chiameremo *ammissibili* i domini per i quali è valido il teorema di Gauss–Green. Una descrizione accurata della classe dei domini ammissibili esula dalla presente trattazione. Ci limitiamo ad osservare che in questa classe rientrano domini D la cui frontiera è unione disgiunta di un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti e che siano *decomponibili* in un numero finito di sottodomini $D_1, D_2, \ldots, D_k$ semplici rispetto ad entrambi gli assi; risulti cioè:

$$D = \bigcup_{j=1}^{k} D_j \quad \text{e} \quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j\ .$$

Chiameremo questi domini *s–decomponibili* (*). Si noti che un dominio s–decomponibile può non essere semplicemente connesso.

L'orientazione positiva di ∂D si ottiene orientando le singole curve che la compongono in modo tale che, percorrendole, *si lasci il dominio alla propria sinistra.*

Il caso tipico è quello in cui ∂D è unione di una curva γ e di N curve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ interne a γ, come in figura 6.27. L'orientazione positiva di ∂D richiede il senso antiorario per γ e quello orario per $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$.

Proposizione 3.3 - *Se D è s–decomponibile e $\mathbf{F} \in C^1(\overline{D})$ allora vale la* (3.7).

Dimostrazione - Sia $D = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$, $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$, D_j semplice rispetto ad entrambi gli assi, per ogni $j = 1, \ldots, k$. Usando la (3.7) su ciascun D_j, si ha:

$$\iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} (Q_x - P_y)dx\,dy = \\ = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial^+ D_j} P\,dx + Q\,dy\ . \tag{3.8}$$

Osserviamo ora che gli archi di curva che fanno parte del bordo di due domini adiacenti compaiono due volte nella somma a destra della (3.8) con orientazione opposta e perciò si elidono (fig. 6.27). Rimangono gli archi di curva che compongono $\partial^+ D$. Dunque $\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial^+ D_j} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy$, da cui la (3.8). □

(*) "s" sta per "*semplicemente*".

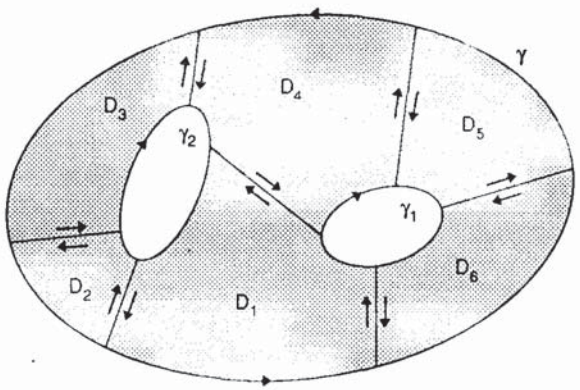


Fig. 6.27 Dominio s–decomponibile per il teorema di Gauss–Green.

Si noti che nel caso di domini come quello in figura 6.27 la (3.8) si può scrivere *più esplicitamente nella forma seguente:*

$$\iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \quad (3.8')$$

***Esempio* 3.1** - Sia D il dominio indicato in figura 6.28 e $\mathbf{F}$ il campo vettoriale di componenti $P(x,y) = y^2$ e $Q(x,y) = x^2$.

Si voglia calcolare $\int_{\partial^+ D} y^2 dx + x^2 dy$.

Usando il teorema di Gauss–Green si ha:

$$\int_{\partial^+ D} y^2 dx + x^2 dy = \iint_D (2x - 2y)dx\,dy = 0\ ,$$

essendo D simmetrico rispetto alla bisettrice, mentre $2x - 2y$ cambia segno scambiando x con y.

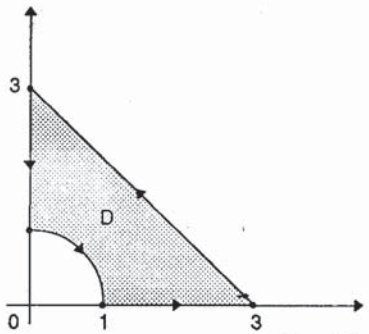


Fig. 6.28

3.2 Applicazioni

a) *Calcolo di aree mediante integrali curvilinei*

Le formule (3.1), (3.2) o (3.7) possono essere usate per calcolare l'area di un dominio D, ammissibile per il teorema 3.2, mediante un integrale curvilineo esteso a ∂D. Infatti, scegliendo $P(x,y) = y$ nella (3.1) otteniamo:

$$\text{area}(D) = \iint_D dx\,dy = -\int_{\partial^+ D} y\,dx \quad (3.9)$$

Scegliendo $Q(x,y) = x$ nella (3.3), otteniamo:

$$\text{area}(D) = \iint_D dx\,dy = \int_{\partial^+ D} x\,dy\ . \quad (3.10)$$

Infine, sommando le (3.9) e (3.10) e dividendo poi per due, si ricava:

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx\ . \quad (3.11)$$

***Esempio* 3.2** - Sia D l'interno dell'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. L'orientazione positiva del bordo si ottiene con la parametrizzazione

$$x(\theta) = a\cos\theta\ ,\ y(\theta) = b\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]\ .$$

Dalla (3.11):

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [ab(\cos\theta)^2 + ab(\sin\theta)^2]d\theta = \pi ab\ .$$

b) Una seconda applicazione geometrica riguarda l'*invarianza rispetto a deformazioni della traiettoria* per integrali curvilinei di campi vettoriali irrotazionali.

Siano γ_1 e γ_2 curve di Jordan regolari a tratti, tali che γ_1 sia contenuta nell'interno di γ_2. Indichiamo con D l'intercapedine tra γ_1 e γ_2, cioè l'insieme dei punti del piano esterni a γ_1 ed interni a γ_2 (fig. 6.29).

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.4 - *Sia* $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\overline{D})$, *irrotazionale, tale cioè che* $P_y = Q_x$ *in* D.

Allora

$$\oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \quad (3.12)$$

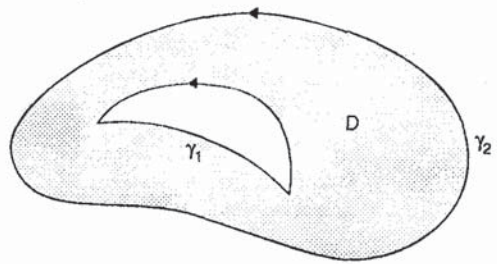


Fig. 6.29

In altri termini gli integrali della forma differenziale $\omega = P\,dx + Q\,dy$ estesi alle due curve γ_1 e γ_2 *con la medesima orientazione* coincidono.

Dimostrazione - Essendo $Q_x = P_y$ in D si ha

$$\iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = 0\ .$$

Osserviamo ora che $\partial^+ D$ è l'unione di γ_1, orientata positivamente e di γ_2, orientata negativamente; dunque, dalla (3.7):

$$0 = \iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \ \square$$

La (3.12) risulta utile in situazioni simili a quella dell'esempio seguente.

***Esempio* 3.3** - Siano $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$ e $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$.
La forma differenziale corrispondente, $\omega = P\,dx + Q\,dy$, è quella dell'esempio 2.9 cap. 1, dove abbiamo verificato che $P_y = Q_x$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.
Si voglia ora calcolare $\oint_\gamma \omega$ dove γ è la curva indicata in figura 6.30.

Apparentemente, senza conoscere una parametrizzazione di γ, il calcolo è improponibile. Indichiamo con γ_1 la circonferenza di raggio ε con centro nell'origine. Se ε è sufficiente piccolo, γ_1 è contenuta nell'interno di γ. Dalla proposizione 3.4, si ha ora:

$$\oint_\gamma \omega = \oint_{\gamma_1} \omega = 2\pi$$

come è facile verificare.

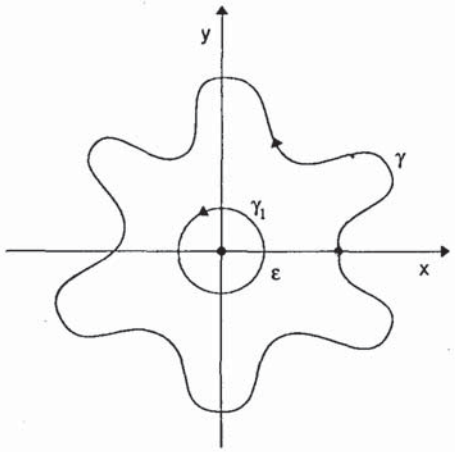


Fig. 6.30

Le considerazioni precedenti e quelle nell'esempio 2.9 del capitolo 1 permettono di associare all'integrale dell'importante forma differenziale $\omega = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ un notevole significato geometrico.

Ricordiamo che, se si pensa al piano "tagliato" lungo il semiasse positivo delle x in modo da impedire ad una curva di avvolgersi attorno all'origine, ω si può interpretare come il differenziale $d\theta = d\theta(x,y)$ dove $\theta = \theta(x,y)$, $0 \le \theta < 2\pi$, è l'anomalia del punto (x,y). Se si ricuce il taglio e si permettono giri completi attorno all'origine, la funzione $\theta = \theta(x,y)$ diventa una funzione a più valori (multivoca, Vol. 1, par. 1.4.2): partendo da un punto (x,y), e ritornandovi dopo un giro completo attorno all'origine in senso antiorario (risp. orario), si trova il valore di $\theta(x,y)$ incrementato di 2π (risp. -2π).

Dunque, se si considera una curva γ che si avvolge un numero k di volte attorno all'origine non ha senso parlare di $\oint_\gamma d\theta$; ha però sempre senso l'integrale $\oint_\gamma \omega$ e si può dimostrare, grazie alla proposizione 3.4, che è uguale a $2\pi\,k$ (se l'avvolgimento è in senso antiorario) o a $-2k\pi$ (se l'avvolgimento è in senso orario) (*). È pertanto ragionevole chiamare la quantità

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \omega$$

indice di avvolgimento di γ rispetto all'origine.

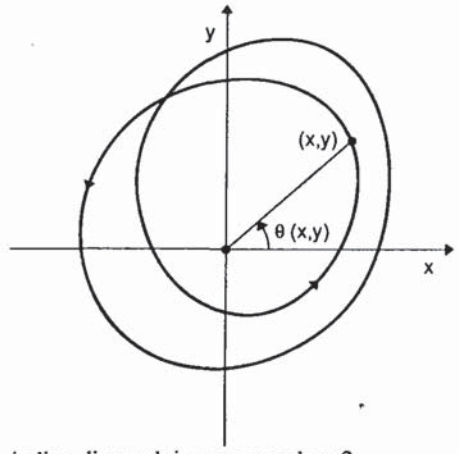


Fig. 6.31 Curva con indice di avvolgimento uguale a 2.

c) *Significati fisici della* (3.7).

La (3.7) può essere riscritta in modi diversi che ne mettono in luce il significato fisico.

(*) Sostanzialmente, nell'integrale $\oint_\gamma \omega$, si può sostituire γ con una circonferenza con centro nell'origine percorsa k volte nello stesso senso di γ.

Introducendo il versore $\mathbf{k} = (0,0,1)$ e ricordando che per il vettore piano $\mathbf{F}$ si ha $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (Q_x - P_y)\mathbf{k}$, abbiamo, per il primo membro della (3.7), ponendo $\operatorname{rot}_z \mathbf{F} = < \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{k} >$

$$\iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \iint_D \operatorname{rot}_z \mathbf{F}\,dx\,dy\ . \tag{3.13}$$

L'integrale curvilineo a destra nella (3.7) si può scrivere come $\int_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds$ dove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente di $\partial^+ D$ e ds è il differenziale della lunghezza d'arco. La conclusione è la seguente versione del teorema di Gauss–Green:

Teorema 3.2 (II) - *Se D è un dominio ammissibile per il teorema* 3.2 *e* $\mathbf{F} \in C^1(\overline{D})$, *allora:*

$$\iint_D \operatorname{rot}_z \mathbf{F}\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds\ . \tag{3.14}$$

La (3.14) si chiama anche *formula di Stokes* (*) nel piano. Il suo significato fisico è evidente: *il flusso del vettore* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *attraverso D nella direzione e verso di* $\mathbf{k}$ *uguaglia la circuitazione di* $\mathbf{F}$ *lungo* $\partial^+ D$.

Si può poi usare la (3.14) per ottenere una interpretazione di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, nel modo che segue.

Consideriamo un cerchio C di raggio r e centro in un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, con la frontiera orientata positivamente. Dividiamo ambo i membri della (3.14) per l'area del cerchio πr^2 e passiamo al limite per $r \to 0$. Essendo $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ continuo in $\overline{D}$, dal teorema 5.1.10 si deduce che

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_C \operatorname{rot}_z \mathbf{F}\,dx\,dy = \operatorname{rot}_z \mathbf{F}(\mathbf{p})\ .$$

Dunque

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{area}(C)} \int_{\partial^+ C} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds \tag{3.15}$$

ovvero: *il rotore di un campo vettoriale piano rappresenta la densità superficiale di circuitazione di* $\mathbf{F}$ *nel punto* $\mathbf{p}$ (una misura di "quanto" ruota $\mathbf{F}$ per unità di area).

Una terza versione del teorema 3.2 si ottiene ponendo, nella (3.7), P al posto di Q e $-Q$ al posto di P. La formula diventa

$$\iint_D (P_x + Q_y)dx\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dy - Q\,dx\ . \tag{3.16}$$

L'integranda a primo membro è $\operatorname{div}\mathbf{F}$; mentre, se introduciamo il versore normale esterno a $\partial^+ D$, $\mathbf{n}_e = dy/ds\,\mathbf{i} - dx/ds\,\mathbf{j}$, si può scrivere

$$\int_{\partial^+ D} P\,dy - Q\,dx = \int_{\partial^+ D} (P\frac{dy}{ds} - Q\frac{dx}{ds})ds = \int_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > ds\ .$$

(*) G. Stokes, matematico irlandese (1819–1903).

La conclusione è la seguente:

Teorema 3.2 (III) - *Se D è un dominio ammissibile per il teorema* 3.2, *allora*

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > ds \tag{3.17}$$

La (3.17) si chiama *formula della divergenza nel piano*. Il suo significato fisico è il seguente: *il flusso di* $\mathbf{F}$ *uscente da* $\partial^+ D$ *uguaglia l'integrale della divergenza in* D.

Dalla (3.17) si ottiene un'interpretazione fisica della divergenza di un campo vettoriale piano. Operando come abbiamo fatto per la (3.14), si ottiene

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{area}(C)} \int_{\partial^+ C} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > ds \tag{3.18}$$

da cui l'interpretazione della divergenza di $\mathbf{F}$ in $\mathbf{p}$ come *densità superficiale di flusso uscente*. Se poi $\mathbf{F}$ è il vettore velocità di un fluido di densità ϱ, il vettore $\varrho\mathbf{F}$ si chiama vettore *densità di corrente* e allora $\int_{\partial^+ C} < \varrho\mathbf{F}, \mathbf{n}_e > ds$ rappresenta la quantità di fluido uscita da C nell'unità di tempo. Dunque in questo caso, $\operatorname{div}(\varrho\mathbf{F})$ rappresenta *la variazione della massa di fluido per unità di area e per unità di tempo*.

Ritorneremo più avanti su ulteriori applicazioni fisiche, dopo aver esteso il teorema 3.2 nelle versioni (II) e (III) a campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$.

3.3 Il teorema di Stokes nello spazio

Esamineremo ora la relazione tra integrali su una superficie orientabile e integrali curvilinei estesi al bordo della superficie stessa. Il teorema principale (di Stokes) generalizza quello di Gauss–Green nel piano, nella versione II. Come in quel caso cominciamo col considerare superfici Σ di tipo particolare estendendo poi il risultato a casi più generali, frequenti nelle applicazioni.

Sia Σ una superficie *semplice, regolare* (di classe C^1), *orientabile* e con bordo $\partial\Sigma$ costituito da una *curva chiusa regolare a tratti*.

Come nel caso dei domini piani occorre definire che cosa si intende per orientazione positiva di $\partial\Sigma$ o, più precisamente, per *orientazione positiva di $\partial\Sigma$ rispetto all'orientazione di Σ*.

Scegliendo un verso per la normale $\mathbf{n}$ si determinano su Σ due lati che chiameremo convenzionalmente *positivo*, quello verso il quale punta $\mathbf{n}$, e *negativo* l'altro.

Diremo che $\partial\Sigma$ è orientato positivamente rispetto a Σ se, percorrendo $\partial\Sigma$ mantenendosi sul lato positivo di Σ si lasciano i punti di Σ alla sinistra. Scriveremo in tal caso $\partial^+\Sigma$.

Certamente, questo modo di definire l'orientazione di $\partial\Sigma$ ha carattere intuitivo, ma una definizione rigorosa ci porterebbe troppo lontano.

In un modo più "ingegneristico" si potrebbe definire positiva l'orientazione di $\partial\Sigma$ quando risulti *destrorsa* un'ipotetica vite che ruoti nel senso di $\partial\Sigma$ e avanzi nel verso di $\mathbf{n}$.

In casi frequenti Σ ha una parametrizzazione

$$\mathbf{r}: \overline{T} \to \mathbb{R}^3$$

dove T è l'interno di una curva di Jordan regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$, biunivoca tra $\overline{T}$ e Σ.

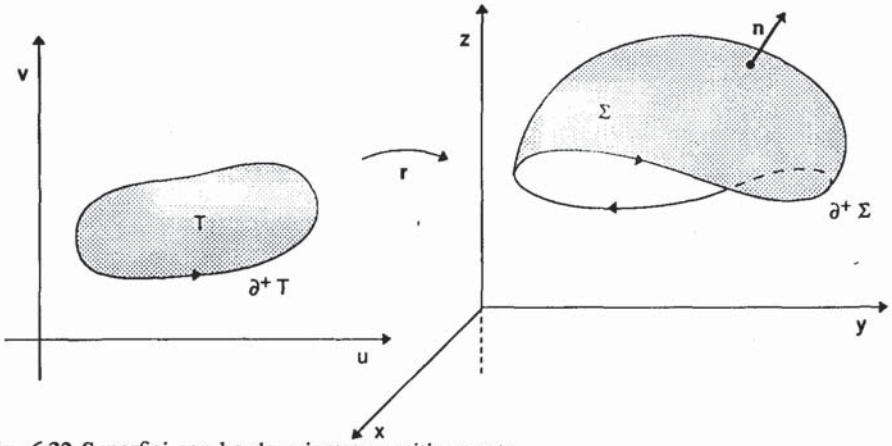


Fig. 6.32 Superfici con bordo orientato positivamente.

In tal caso $\mathbf{r}(\partial T) = \partial\Sigma$; se, inoltre, $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, è una parametrizzazione di $\partial^+ T$, allora $\mathbf{r}(u(t), v(t))$, con la scelta del versore normale $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v)/||\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v||$, è automaticamente una orientazione positiva di $\partial\Sigma$ (fig. 6.32). Lasciamo la facile verifica al lettore.

Generalizzando un po', introduciamo la seguente classe di superfici:

Definizione 3.1 - *Indichiamo con $\mathcal{S}$ la classe delle superfici Σ che ammettono una parametrizzazione $\mathbf{r}: \overline{T} \to \mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà:*

i) *T è un dominio s–decomponibile, la cui frontiera è unione di un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$;*

ii) *$\mathbf{r} \in C^2(\overline{T})$ e $\mathbf{r}$ è biunivoca tra $\overline{T}$ e Σ.*

Il bordo di una superficie $\Sigma \in \mathcal{S}$ consiste di un numero finito di curve chiuse, Γ_j, immagini delle γ_j. Scelto un verso per la normale a Σ, si orienta positivamente $\partial\Sigma$ scegliendo il verso di percorrenza su ciascuna delle Γ_j in modo da lasciare i punti di Σ a sinistra. Se $(u_j(t), v_j(t))$, $t \in I_j$, dove $I_j \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, è una parametrizzazione di γ_j^+ allora $\mathbf{r}(u_j(t), v_j(t))$ è una parametrizzazione di Γ_j^+, con ovvio significato dei simboli (fig. 6.33).

Una prima versione del teorema di Stokes è la seguente:

■ **Teorema 3.5** - *Sia Σ una superficie appartenente alla classe $\mathcal{S}$, contenuta in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia poi $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Vale la formula:*

$$\iint_\Sigma < \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, \mathbf{T} > ds \tag{3.19}$$

dove $\mathbf{T}$ indica il versore tangente a $\partial^+\Sigma$.

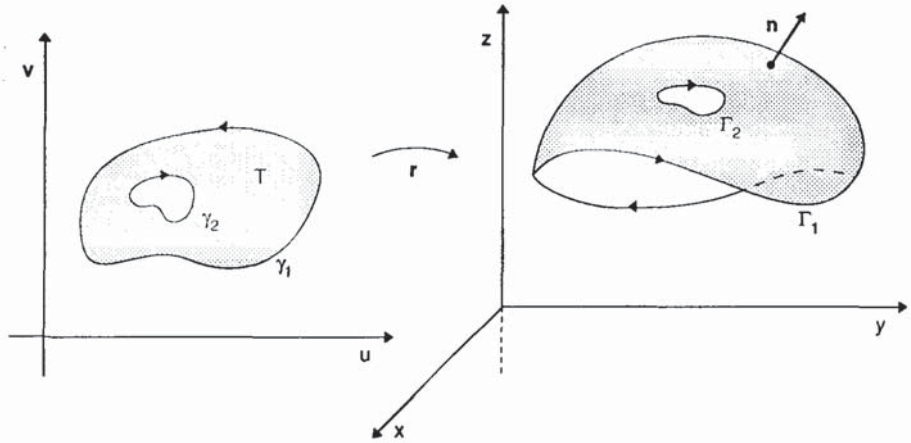


Fig. 6.33 Superficie nella classe $\mathcal{S}$ con bordo orientato positivamente.

Il significato fisico della (3.19) è il seguente: *il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ nella direzione $\mathbf{n}$ uguaglia la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo $\partial^+\Sigma$.*

Si noti che, se $\Sigma = D \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, si ha $\partial^+\Sigma = \partial^+ D$ e la (3.19) si riduce alla (3.14).

La (3.19) si può scrivere in una forma più esplicita ricordando che

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\mathbf{k}$$

e osservando che l'integrale a secondo membro è l'integrale esteso a $\partial^+\Sigma$ della forma differenziale $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. La (3.19) diventa:

$$\iint_\Sigma \{(R_y - Q_z)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + (P_z - R_x)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + (Q_x - P_y)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\} d\sigma =$$

$$= \int_{\partial^+\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{3.19}$$

Dimostrazione - Sia $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in T$. Per ogni funzione $g = g(x, y, z)$ poniamo $\tilde{g} = \tilde{g}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Si ha:

$$\iint_\Sigma < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n} > d\sigma = \iint_T < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v > du\,dv =$$
$$\iint_T \left\{ (R_y - Q_z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (P_z - R_x)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (Q_x - P_y)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\,dv\ . \tag{3.20}$$

D'altro canto, $\int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F},\boldsymbol{T} > ds = \int_{\partial^+\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$; consideriamo $\int_{\partial^+\Sigma} P\,dx$. Si ha:

$$\int_{\partial^+\Sigma} P\,dx = \int_{\partial^+ T} \widetilde{P}(x_u du + x_v dv)\ .$$

Usando il teorema di Gauss–Green nel piano e ... un po' di pazienza si ottiene:

$$\int_{\partial^+ T} \widetilde{P}x_u du + \widetilde{P}x_v dv = \iint_T \{(\widetilde{P}x_v)_u - (\widetilde{P}x_u)_v\} du\,dv =$$
$$= \iint_T (\widetilde{P}_u x_v - \widetilde{P}x_u) du\,dv =$$
$$= \iint_T \{(P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u)x_v - (P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v)x_u\} du\,dv =$$
$$= \iint_T \{P_y\,(y_u x_v - x_u y_v) + P_z\,(z_u x_v - x_u z_v)\} du\,dv =$$
$$= \iint_T \left\{ -P_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + P_z \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right\} du\,dv\ .$$

Dunque:

$$\int_{\partial^+\Sigma} P\,dx = \iint_T \left\{ -P_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + P_z \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right\} du\,dv\ . \tag{3.21}$$

Analogamente:

$$\int_{\partial^+\Sigma} Q\,dy = \iint_T \left\{ -Q_z \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q_x \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\,dv \tag{3.22}$$

$$\int_{\partial^+\Sigma} R\,dz = \iint_T \left\{ -R_x \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R_y \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right\} du\,dv\ . \tag{3.23}$$

Sommando membro a membro le (3.21) - (3.23) si vede che $\int_{\partial^+\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ coincide con il secondo membro della (3.20) e quindi con $\iint_\Sigma < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n} > d\sigma$. □

Il teorema di Stokes vale per superfici più generali di quelle appartenenti alla classe $\mathcal{S}$.

Come già per il teorema di Gauss–Green useremo il termine *ammissibile* per indicare una superficie alla quale si può applicare la formula (3.19).

Alla classe delle superfici ammissibili appartengono, ad esempio, superfici Σ *orientabili*, anche regolari a tratti, che si possono decomporre nell'unione di un numero finito di superfici $\Sigma_j \in \mathcal{S}$, tali che $\overset{\circ}{\Sigma}_i \cap \overset{\circ}{\Sigma}_j \neq \emptyset$ se $i \neq j$.

Risultano dunque ammissibili superfici come tronco di cono o di piramide.

Un cilindro di equazioni parametriche $\mathbf{r}(t,\theta) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ non appartiene alla classe $\mathcal{S}$, non essendo $\mathbf{r}$ biunivoca, ma è chiaramente decomponibile nell'unione dei due semicilindri corrispondenti a $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi]$ e $(t,\theta) \in [0,1] \times [\pi,2\pi]$, che appartengono entrambi ad $\mathcal{S}$.

La dimostrazione del teorema è in tal caso perfettamente analoga a quella data nel caso dei domini s–decomponibili per il teorema 3.2: scelto il verso della normale a Σ e quindi ad ognuna delle $\Sigma_j, j = 1,\ldots,k$, è automaticamente fissata l'orientazione di $\partial^+\Sigma_j$. Applicando ad ognuna delle Σ_j il teorema di Stokes si ha:

$$\iint_\Sigma < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n} > d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \iint_{\Sigma_j} < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n} > d\sigma =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial^+\Sigma_j} < \mathbf{F},\boldsymbol{T} > d\sigma\ .$$

Nell'ultima somma, gli archi comuni a due Σ_j compaiono due volte con orientazione opposta e perciò si elidono. Rimane così l'integrale esteso a $\partial^+\Sigma$ ottenendo la (3.19).

***Esempio* 3.4** - Si voglia calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

dove γ è la circonferenza intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con il piano $x + y + z = 0$.

Siano Σ la superficie racchiusa da γ sul piano $x + y + z = 0$ ed $\mathbf{F} = (y+z)\,\mathbf{i} + (z+x)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$. Orientiamo Σ con la normale $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ e γ positivamente rispetto a Σ. Dal teorema di Stokes:

$$\int_{\gamma^+} \omega = \iint_\Sigma < \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n} > d\sigma = 0$$

essendo $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

***Esempio* 3.5** - (Equazioni di Maxwell). Due leggi essenziali sull'elettromagnetismo, generalizzazioni delle leggi di Biot-Savart e di Faraday, si possono esprimere sotto la forma seguente.

Siano:

E ed **H** i vettori campo elettrico e magnetico;
ε e μ costante dielettrica e permeabilità magnetica del mezzo;
λ coefficiente di conduttività del mezzo;
c velocità della luce nel vuoto.

Sia inoltre Σ una superficie arbitraria con normale **n** e bordo γ. Allora, indicati con H_s, E_s le componenti tangenziali a γ di **H** ed **E** e con H_n, E_n quelle normali a Σ si ha:

$$\int_{\gamma^+} H_s\, ds = \frac{1}{c} \iint_\Sigma \left(\lambda E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) d\sigma$$

(*circolazione del campo magnetico lungo* γ^+ = *flusso del vettore corrente totale attraverso* Σ)

$$\int_{\gamma^+} E_s d\, s = -\frac{1}{c} \iint_\Sigma \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} d\sigma$$

(*circolazione del campo elettrico lungo* γ^+ = *velocità di variazione del flusso di induzione magnetica attraverso* Σ)

In virtù del teorema di Stokes gli integrali a primo membro sono rispettivamente uguali a

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}_n\, \mathbf{H} d\sigma \quad \text{e} \quad \iint_\Sigma \mathrm{rot}_n\, \mathbf{E} d\sigma\ ,$$

cosicché le equazioni precedenti si possono scrivere nella forma

$$\iint_\Sigma \left[c\, \mathrm{rot}_n\, \mathbf{H} - \lambda E_n - \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t} \right] d\sigma = 0$$
$$\iint_\Sigma \left[c\, \mathrm{rot}_n\, \mathbf{E} + \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} \right] d\sigma = 0$$

Essendo Σ arbitraria, tale è anche la normale **n**; si deducono allora le seguenti due equazioni in forma differenziale

$$c\, \mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$c\, \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \text{(eq. di Maxwell)}$$

Mediante la (3.19) si può dare un'interpretazione fisica di $\mathrm{rot}\, \mathbf{F}$ analoga a quella vista nel caso bidimensionale.

Sia Π un piano con versore normale **n** e Σ_ϱ un cerchio di raggio ϱ centrato in un punto $\mathbf{p} \in \Pi$; dividiamo per $\mathrm{area}(\Sigma_\varrho) = \pi\varrho^2$ la (3.19) e passiamo al limite per $\varrho \to 0$. Si ha, ponendo $\mathrm{rot}_\mathbf{n}\, \mathbf{F} = < \mathrm{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} >$,

$$\lim_{\varrho \to 0} 1/\mathrm{area}\,(\Sigma_\varrho) \iint_{\Sigma_\varrho} \mathrm{rot}_\mathbf{n}\, \mathbf{F}\, d\sigma = \mathrm{rot}_\mathbf{n}\, \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

e di conseguenza:

$$\mathrm{rot}_\mathbf{n}\, \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\mathrm{area}\,(\Sigma_\varrho)} \int_{\partial^+ \Sigma_\varrho} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds\ .$$

Da qui l'interpretazione seguente: $\mathrm{rot}_\mathbf{n}\mathbf{F}(\mathbf{p})$ *è la densità superficiale di circuitazione di* **F** *in* **p**, *in un piano perpendicolare ad* **n**. Scegliendo $\mathbf{n} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si ottengono le interpretazioni per le singole componenti di $\mathrm{rot}\, \mathbf{F}$.

3.4 Potenziale vettore

La formula di Stokes (3.19) permette di calcolare l'integrale di linea $\int_{\partial^+ \Sigma} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds$ mediante un integrale di superficie, flusso di $\mathrm{rot}\, \mathbf{F}$ attraverso Σ.

Viceversa sia dato un integrale di flusso del tipo $\iint_\Sigma < \mathbf{V}, \mathbf{n} > d\sigma$, dove **V** è un campo vettoriale definito in un aperto contenente $\overline{\Sigma}$; se si vuole applicare la formula di Stokes, occorre determinare un vettore **F** tale che $\mathrm{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{V}$. In tal caso **F** si chiama **potenziale vettore** di **V**.

La seguente proposizione indica che, se $\mathrm{div}\, \mathbf{V} \neq 0$, *non* può esistere un potenziale vettore di **V**.

Proposizione 3.6 - Sia $\mathbf{V} \in C^1(A)$, A *aperto* di $\mathbb{R}^2$. *Se esiste* $\mathbf{F} \in C^2(A)$ *tale che* $\mathrm{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{V}$ *allora* $\mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0$.

Dimostrazione - È immediata ricordando che, se $\mathbf{F} \in C^2(A)$, $\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{F} = 0$. □

Ci chiediamo ora se la condizione $\mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0$ è anche sufficiente per l'esistenza di un potenziale vettore **F** di **V**. Il seguente contro–esempio mostra che non è così.

***Esempio* 3.6** - Siano $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{V} = \varrho^{-3}\, (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

$(\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Mostriamo che $\mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0$ in A ma che non esiste in A un potenziale vettore di **V**.

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\varrho^{-3}) = \varrho^{-5}(\varrho^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\varrho^{-3}) = \varrho^{-5}(\varrho^2 - 3y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\varrho^{-3}) = \varrho^{-5}(\varrho^2 - 3z^2) .$$

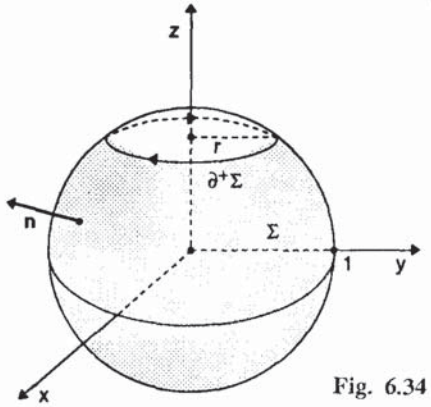


Fig. 6.34

Pertanto

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \varrho^{-5}\{(\varrho^2 - 3y^2) + (\varrho^2 - 3x^2) + (\varrho^2 - 3z^2)\} = \varrho^{-5}\{3\varrho^2 - 3\varrho^2\} = 0 .$$

Supponiamo ora per assurdo che esista $\mathbf{F} \in C^2(A)$ tale che $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{V}$ in A. Dal teorema di Stokes abbiamo allora che, per ogni superficie ammissibile Σ:

$$\iint_\Sigma < \mathbf{V}, \mathbf{n} > d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, T > ds . \tag{3.24}$$

Scegliamo come Σ la superficie sferica di raggio unitario con centro nell'origine, privata della calotta di raggio r e centro nel polo nord $(0, 0, 1)$ come mostrato in figura 3.64.

Su Σ scegliamo

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_e = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} .$$

Allora $\partial^+\Sigma$ è costituito dal bordo della calotta percorso in senso *orario*.

Si ha, essendo $\varrho = 1$ su Σ:

$$< \mathbf{V}, \mathbf{n} > = < \mathbf{n}, \mathbf{n} > = 1$$

e pertanto

$$\iint_\Sigma < \mathbf{V}, \mathbf{n} > d\sigma = \iint_\Sigma d\sigma = \text{area}(\Sigma) .$$

Dalla (3.24) si deduce quindi

$$\text{area}(\Sigma) = \int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds . \tag{3.25}$$

Facciamo ora tendere r a zero. Allora l'area della calotta tende a zero cosicché area$(\Sigma) \to$ area (sfera) $= 4\pi$.

D'altra parte, se $M = \max_{\partial\Sigma} \|\mathbf{F}\|$, si ha $| < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > | \leq M$ e quindi

$$\left| \int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds \right| \leq M \int_{\partial^+\Sigma} ds = M\, l(\partial^+\Sigma) ;$$

se $r \to 0$, $l(\partial^+\Sigma) \to 0$ in contraddizione con la (3.25).

Dunque la condizione $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ non è sufficiente per l'esistenza di un potenziale vettore di $\mathbf{V}$. La situazione è analoga a quella della ricerca di un potenziale scalare per un campo vettoriale irrotazionale, questione affrontata nel capitolo 1 sezione 2. Infatti, affinché $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ diventi anche sufficiente, occorrono condizioni topologiche sull'aperto A in cui si vuole cercare il potenziale vettore. Questa volta però la *semplice connessione* di A *non* basta ed infatti l'aperto $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ dell'esempio 3.6 è semplicemente connesso. Una condizione su A sufficiente è la seguente: *A è connesso e per ogni superficie $\Sigma \subset A$ regolare e chiusa, frontiera di un dominio limitato tridimensionale D, si ha $D \subset A$.* Diciamo allora che A è *fortemente connesso* in $\mathbb{R}^3$. Vale allora il seguente risultato:

Proposizione 3.7 - *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$ fortemente connesso e $\mathbf{V} \in C^1(A)$ un campo vettoriale solenoidale* ($\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$). *Allora esiste $\mathbf{F} \in C^2(A)$ tale che* $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{V}$ *in A. Inoltre ogni altro potenziale vettore di $\mathbf{V}$ in A è della forma*

$$\mathbf{F} + \operatorname{grad} \varphi \tag{3.26}$$

dove $\varphi \in C^2(A)$ è uno scalare.

Dimostrazione - La diamo solo nel caso particolare in cui A è un parallelepipedo del tipo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$. Sia dato $\mathbf{V} = V_1\,\mathbf{i} + V_2\,\mathbf{j} + V_3\,\mathbf{k}$ con $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ in A. Cerchiamo un potenziale vettore della forma $\mathbf{F} = F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$.

Deve essere $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{V}$ e quindi, essendo

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\,\mathbf{k} ,$$

si deve avere:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = V_1 \ , \ \frac{\partial F_3}{\partial x} = -V_2 \ , \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = V_3 \ . \tag{3.27}$$

Le ultime due equazioni sono soddisfatte se scegliamo

$$F_3(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} V_2(t,y,z)dt + h(y,z)$$

e

$$F_2(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} V_3(t,y,z)dt + k(y,z)$$

dove h e k sono da determinarsi in modo da soddisfare la prima delle (3.27).

Derivando sotto il segno di integrale si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y,z)dt - \frac{\partial k}{\partial z}(y,z) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_3}{\partial z}(t,y,z)dt = \\
&= \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) - \frac{\partial k}{\partial z}(y,z) - \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial V_2}{\partial y}(t,y,z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(t,y,z) \right) dt = \\
&= \left(\text{ricordando che } \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) - \frac{\partial k}{\partial z}(y,z) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_1}{\partial x}(t,y,z)dt = \\
&= \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) - \frac{\partial k}{\partial z}(y,z) + V_1(x,y,z) - V_1(x_0,y,z) \ .
\end{aligned}$$

La prima delle (3.27) sarà dunque verificata se si scelgono h e k in modo che:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y,z) - \frac{\partial k}{\partial z}(y,z) = V_1(x_0,y,z) \ . \tag{3.28}$$

Basterà scegliere $k(y,z) = 0$ e $h(y,z) = \int_{y_0}^{y} V_1(x_0,s,z)ds$.

Il campo vettoriale $\mathbf{F} = F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ dove

$$\begin{aligned}
F_2(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} V_3(t,y,z)dt \\
F_3(x,y,z) &= -\int_{x_0}^{x} V_2(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} V_1(x_0,s,z)ds
\end{aligned} \tag{3.29}$$

è pertanto un potenziale vettore di $\mathbf{V}$.

La (3.26) segue subito osservando che, se $\mathbf{G}$ è un altro potenziale vettore di $\mathbf{V}$, allora $\mathrm{rot}(\mathbf{G}-\mathbf{F}) = \mathbf{V} - \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Dunque $\mathbf{G}-\mathbf{F}$ è irrotazionale in una regione A semplicemente connessa di $\mathbb{R}^3$. Ne segue che esiste $\varphi: A \to \mathbf{R}$ tale che $\varphi \in C^2(A)$ e $\mathbf{G}-\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$. □

Altre formule analoghe alla (3.29) possono essere trovate dal lettore.

***Esempio* 3.7** - Sia Σ la porzione di paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$, $z > 0$. Si voglia calcolare il flusso del vettore $\mathbf{V} = xz\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ nella direzione della normale $\mathbf{n} = (-2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{1+4x^2+4y^2}$.

Cerchiamo di determinare un potenziale vettore $\mathbf{F}$ di $\mathbf{V}$ in $\mathbb{R}^3$. Usando la (3.29) con $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ si trova

$$F_1 = 0 \ , \ F_2 = -\int_0^x 2dt = -2x \ , \ F_3 = \int_0^x yz\,dt = xyz \ .$$

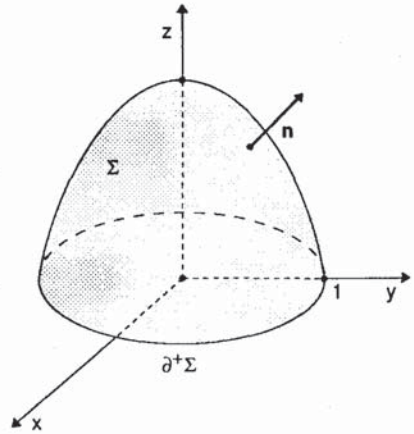


Fig. 6.35

Dunque $\mathbf{F} = -2x\,\mathbf{j} - xyz\,\mathbf{k}$.

Dalla formula di Stokes abbiamo

$$\iint_{\Sigma} < \mathbf{V}, \mathbf{n} > d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds \ .$$

Una parametrizzazione di $\partial^+\Sigma$ è $\mathbf{r}(\theta) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ con $\boldsymbol{T} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$, cosicché, su $\partial^+\Sigma$, $< \mathbf{F}, \boldsymbol{T} >= -2(\cos\theta)^2$ e perciò $\int_{\partial^+\Sigma} < \mathbf{F}, \boldsymbol{T} > ds = -\int_0^{2\pi} 2(\cos\theta)^2 d\theta = -2\pi$.

3.5 Il teorema della divergenza

Il risultato principale di questo paragrafo, noto come teorema di Gauss (*) o della divergenza, connette integrali di volume con integrali superficiali. Anche questo

(*) È noto anche come teorema di Ostrogradsky, matematico russo (1801–1861).

teorema, come vedremo, è denso di significati fisici e risulta una generalizzazione a 3 dimensioni del teorema di Gauss–Green nel piano, nella versione III.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio limitato la cui frontiera ∂D sia una *superficie chiusa, regolare* e *orientabile* (ad esempio un ellissoide o un toro). Stabiliamo come *orientazione positiva* di ∂D quella corrispondente alla scelta del versore $\mathbf{n}_e$, *normale esterno*. Useremo in tal caso il simbolo $\partial^+ D$.

Cominciamo con lo stabilire il seguente lemma, valido in un dominio D *semplice rispetto all'asse* z, ovvero

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x,y) < z < \varphi_2(x,y)\ ,\ (x,y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}\ ,$$

dove B è un aperto semplicemente connesso del piano e φ_1, φ_2 sono funzioni di classe $C^1(\overline{B})$ (fig. 6.36).

Lemma 3.8 - *Sia* $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} \in C^1(\overline{D})$. *Vale la formula*

$$\iiint_D R_z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial^+ D} R\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})\,d\sigma\ . \tag{3.30}$$

Dimostrazione - Dalla formula di riduzione per gli integrali tripli si ha:

$$\begin{aligned}\iiint_D R_z\,dx\,dy\,dz &= \iint_B dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} R_z\,dz = \\ &= \iint_B [R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))]\,dx\,dy\ .\end{aligned} \tag{3.31}$$

Ora, la frontiera di D consiste dell'unione di 3 superfici:

Σ_1, di equazione $z = \varphi_1(x,y)$ con normale esterna

$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla\varphi_1\|^2}}(\varphi_{1x}\,\mathbf{i} + \varphi_{1y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ed elemento d'area $d\sigma = \sqrt{1+\|\nabla\varphi_1\|^2}\,dx\,dy$;

Σ_2, di equazione $z = \varphi_2(x,y)$ con normale esterna

$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla\varphi_2\|^2}}(-\varphi_{2x}\,\mathbf{i} - \varphi_{2y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ed elemento d'area $d\sigma = \sqrt{1+\|\nabla\varphi_2\|^2}\,dx\,dy$;

infine Σ, la parte laterale "cilindrica", dove $\mathbf{n}_e$ è perpendicolare a $\mathbf{k}$.

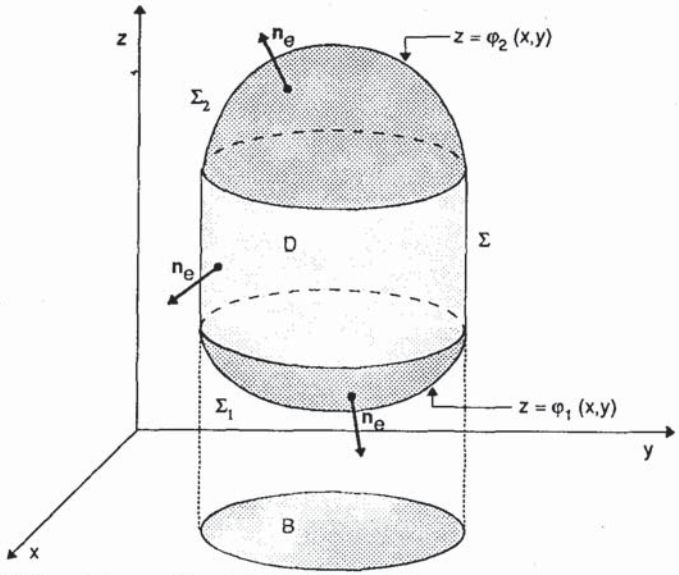


Fig. 6.36 Dominio semplice rispetto all'asse z.

Si ha, essendo $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = 0$ su Σ e $\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k}) = <\mathbf{n}_e, \mathbf{k}>$ su Σ_1 e Σ_2:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial^+ D} R\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})\,d\sigma &= \iint_{\Sigma_2} R\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})\,d\sigma + \iint_{\Sigma_1} R\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})\,d\sigma = \\ &= \iint_B R(x,y,\varphi_2(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla\varphi_2\|^2}}\,d\sigma - \\ &- \iint_B R(x,y,\varphi_1(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla\varphi_1\|^2}}\,d\sigma = \\ &= \iint_B [R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))]\,dx\,dy\end{aligned}$$

e, dalla (3.31), segue il lemma. □

In modo analogo si può dimostrare che:

se D è semplice rispetto all'asse y, allora

$$\iiint_D Q_y\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial^+ D} Q\cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{j})\,d\sigma\ ; \tag{3.32}$$

se D è semplice rispetto all'asse x, allora:

$$\iiint_D P_x dx\, dy\, dz = \iint_{\partial^+ D} P \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{i})\, d\sigma \,. \tag{3.33}$$

La seguente è una prima versione del *teorema della divergenza.*

Teorema 3.9 - *Sia D un dominio semplice rispetto a tutti e 3 gli assi cartesiani. Sia poi $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(\overline{D})$.*
Allora vale la formula:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx\, dy\, dz = \iint_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma \tag{3.34}$$

La (3.34) significa che il flusso di $\mathbf{F}$, uscente da ∂D, uguaglia l'integrale della divergenza di $\mathbf{F}$ in D. Più esplicitamente, la (3.34) si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} &\iiint_D (P_x + Q_y + R_z) dx\, dy\, dz = \\ &= \iint_{\partial^+ D} \{P \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{i}) + Q \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{j}) + R \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})\} d\sigma \,. \end{aligned} \tag{3.34'}$$

Dimostrazione - È sufficiente sommare membro a membro le (3.31), (3.32) e (3.33). □

Il teorema 3.9 è valido per una classe di domini, che ancora chiameremo *ammissibili*, molto più vasta di quelli semplici rispetto ad una terna di riferimento.

Con una tecnica che ormai dovrebbe essere familiare allo studente si può estendere il teorema a domini D limitati, la cui frontiera è costituita dall'unione di un numero finito di superfici Σ_j chiuse, regolari, orientabili e disgiunte, e che siano *decomponibili* in un numero finito di sottodomini semplici rispetto ai tre assi, intendendo con ciò che esiste un numero finito di domini di quest'ultimo tipo, $D_1, \ldots, D_k$, tali che

$$D = \bigcup_{j=1}^{k} D_j \,, \quad \overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

Si può anche rilassare l'ipotesi di regolarità richiedendo che le Σ_j siano solo regolari a pezzi.

Un caso tipico è, ad esempio, quello di una "scatola" D privata di N sferette come in figura 6.37. In questo caso si noti che la normale esterna a $D, \mathbf{n}_e$, corrisponde a quella *interna* su *ciascuna sferetta.*

Osserviamo infine che la 3.34 continua a valere nella forma

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma$$

nel caso in cui ∂D sia una varietà $(n-1)$–dimensionale, chiusa ed orientabile.

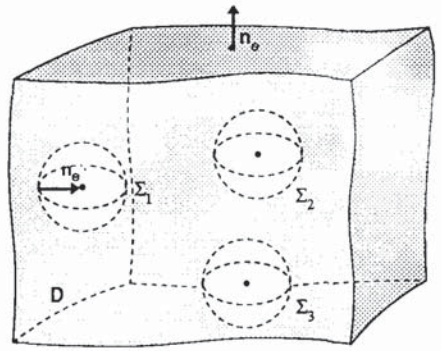


Fig. 6.37 Dominio ammissibile per il teorema della divegenza.

***Esempio* 3.8** - Sia $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; allora $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$ ed otteniamo dalla (3.34)

$$\iint_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma = \iiint_D 3\, dx\, dy\, dz = 3\,\mathrm{Vol}(D) \,.$$

Ad esempio, il flusso uscente di $\mathbf{F}$ attraverso il tetraedro

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \,,\; y > 0 \,,\; z > 0 \,,\; x + y + z < 1\}$$

è: $3\,\mathrm{Vol}(D) = 1/2$ ($\mathrm{Vol}(D) = 1/6$, come mostrato nell'esempio 5.1.14).

***Esempio* 3.9** - Sia D il cubo unitario in $\mathbb{R}^3$; vale a dire $D = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$. Si voglia calcolare il flusso uscente di $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$. Dal teorema 3.9 si ha:

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial^+ D} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx\, dy\, dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z) dx\, dy\, dz = 3 \,. \end{aligned}$$

Dalla (3.34) si ricava la seguente interpretazione fisica della divergenza. Sia $B_\varrho(\mathbf{p})$ una sfera di centro $\mathbf{p}$ e raggio ϱ. Dividiamo la (3.34) per $\mathrm{Vol}(B_\varrho(\mathbf{p})) = 4\pi\varrho^3/3$.

Dal teorema della media per integrali tripli si ha, essendo $\mathbf{F}$ di classe C^1,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varrho(\mathbf{p}))} \iiint_{B_\varrho(\mathbf{p})} \operatorname{div} \mathbf{F}\; dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_\varrho)$$

dove $\boldsymbol{\eta}_\varrho$ è un opportuno punto di $B_\varrho(\mathbf{p})$.

Perciò

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varrho(\mathbf{p}))}\iiint_{B_\varrho(\mathbf{p})}\operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0}\operatorname{div}\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_\varrho) = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{p})$$

per la continuità della divergenza di $\mathbf{F}$. Si deduce dalla (3.34) che:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_\varrho(\mathbf{p}))}\iint_{\partial^+ B_\varrho(\mathbf{p})} < \mathbf{F},\mathbf{n}_e > d\sigma$$

ovvero: *la divergenza in* $\mathbf{p}$ *di* $\mathbf{F}$ *è la densità di flusso in* $\mathbf{p}$ *per unità di volume.*

3.6 Applicazioni

Fra le numerose applicazioni del teorema della divergenza ne presentiamo alcune riguardanti la fluidodinamica. Alcune altre, peraltro non meno significative, si trovano negli esercizi.

Equazione di continuità

Indichiamo con x, y, z i punti di $\mathbb{R}^3$ e con t il tempo.

Consideriamo il moto di un fluido di densità $\varrho = \varrho(x,y,z,t)$ la cui velocità sia il vettore $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_2\mathbf{k}$, $u_j = u_j(x,y,z,t)$, $j = 1,2,3$. Supponiamo che il moto sia regolare cosicché le funzioni u_j ed anche ϱ siano continue insieme a tutte le loro derivate prime.

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ una regione limitata di $\mathbb{R}^3$ occupata dal fluido, la cui frontiera è una superficie chiusa regolare a pezzi, ad esempio una sferetta o un cubo. Indichiamo con $d\sigma$ un elemento di superficie su ∂D centrato in un punto regolare di ∂D.

Allora la quantità di fluido che attraversa $d\sigma$ nell'unità di tempo è bene approssimata da $\varrho U_e d\sigma$, dove abbiamo posto $U_e =< \mathbf{u}, \mathbf{n}_e >=$ componente di $\mathbf{u}$ rispetto ad $\mathbf{n}_e$.

In questo caso dunque si ha che il flusso del vettore $\varrho\mathbf{u}$, cioè $\iint_{\partial^+ D}\varrho\, U_e d\sigma$ rappresenta la massa totale di fluido "uscita" da D nell'unità di tempo.

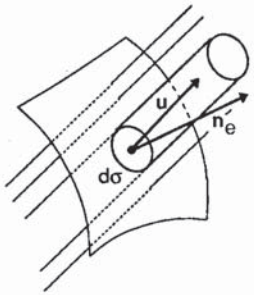


Fig. 6.38

Dalla (3.34)

$$\iint_{\partial^+ D}\varrho U_e d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u})dx\,dy\,dz$$

dove la divergenza è solo rispetto alle variabili spaziali, e perciò:

$$\iiint_D \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u})\,dx\,dy\,dz = \tag{3.35}$$

$$= \textit{massa di fluido uscita da } D \textit{ nell'unità di tempo.}$$

D'altra parte la massa totale di fluido contenuta in D al tempo t è data da $m = \iiint_D \varrho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz$. Di conseguenza

$$-\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_D \varrho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz = (*)$$

$$-\iiint_D \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = \tag{3.36}$$

$$= \textit{decremento della massa di fluido contenuta in } D \textit{ nell'unità di tempo.}$$

Se non vi sono in D *pozzi* o *sorgenti* di fluido, la massa di fluido "uscita" da D nell'unità di tempo uguaglia il decremento di fluido all'interno di D e perciò deve essere

$$\iiint_D \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u})\,dx\,dy\,dz = -\iiint_D \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,. \tag{3.37}$$

La (3.37) si chiama *equazione di continuità* in forma integrale ed esprime il principio di *conservazione della massa* per il fluido in esame.

Possiamo ottenere l'equazione di continuità in *forma differenziale*, supponendo che D sia una sferetta di raggio ϱ, dividendo la (3.37) per $\mathrm{Vol}(D)$ e passando al limite per $\varrho \to 0$; utilizzando, come in precedenza, il teorema della media, essendo $\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u})$ e ϱ_t continue, si ricava

$$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,. \tag{3.38}$$

La (3.38) può essere riscritta in una forma diversa che mette ancor più in luce il significato della divergenza nel presente caso. Se si considera una particella di fluido in moto, questa avrà coordinate dipendenti dal tempo: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. La sua densità ϱ dipenderà quindi da t anche attraverso x, y, z, ovvero $\varrho = \varrho(x(t), y(t), z(t), t)$. La variazione di densità della particella sarà data da:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial\varrho}{\partial x}x' + \frac{\partial\varrho}{dy}y' + \frac{\partial\varrho}{dz}z'$$

(*) Essendo ϱ di classe C^1 si può derivare sotto il segno di integrale.

che, essendo $(x', y', z') = \mathbf{u}$ la velocità della particella, si può scrivere

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + < \operatorname{grad} \varrho, \mathbf{u} > , \tag{3.39}$$

dove il gradiente è preso rispetto alle variabili spaziali.

Essendo poi $\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = < \operatorname{grad} \varrho, \mathbf{u} > + \varrho \operatorname{div} \mathbf{u}$, usando la (3.38) si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$$

che esprime la divergenza del vettore velocità come *variazione relativa della densità di una particella in moto nell'unità di tempo.*

Notiamo infine che se il fluido è *incompressibile* si ha $d\varrho/dt = 0$ da cui la condizione di *incompressibilità* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Se inoltre il moto del fluido è irrotazionale (non vorticoso) e cioè $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ allora, almeno localmente, $\mathbf{u}$ deriva da un potenziale ψ: $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \psi$. Inserendo $\operatorname{grad} \psi$ nell'equazione $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ otteniamo

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

che mostra come ψ sia una funzione *armonica.*

Relazione tra forze di volume e forze di superficie

Mediante il teorema della divergenza si può chiarire la connessione tra *forze di volume* (ad esempio la forza gravitazionale) e *forze di superficie* (ad esempio la pressione), agenti su un continuo deformabile.

Limitiamo le considerazioni ad un fluido *perfetto* di densità $\varrho = \varrho(x, y, z)$, in cui, cioè, le sole forze interne si riducono alla pressione normale in modo che l'azione del resto del fluido su una parte D isolata di esso, limitata da una superficie Σ, risulti in una forza $\mathbf{F}$ diretta, in tutti i punti di Σ, secondo la normale interna.

Indichiamo con p (pressione) l'intensità di tale forza per unità di superficie e con $\mathbf{n}_e$, al solito, la normale *esterna* a Σ.

Su ogni elemento di superficie $d\sigma$, agirà una forza data da $-p\,\mathbf{n}_e d\sigma$, cosicché la risultante $\mathbf{F}$ di tutte le forze agenti su Σ sarà

$$\mathbf{F} = -\iint_\Sigma p\,\mathbf{n}_e d\sigma \ . \tag{3.40}$$

Le componenti di $\mathbf{F}$ rispetto ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono, nell'ordine:

$$-\iint_\Sigma p \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{i})d\sigma \ , \ -\iint_\Sigma p \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{j})d\sigma \ , \ -\iint_\Sigma p \cos(\mathbf{n}_e, \mathbf{k})d\sigma \ ;$$

utilizzando le formule (3.30), (3.32) e (3.33), tali componenti si possono scrivere rispettivamente:

$$-\iiint_D p_x \, dx\, dy\, dz \ , \ -\iiint_D p_y \, dx\, dy\, dz \ , \ -\iiint_D p_z \, dx\, dy\, dz \ .$$

Ne segue che $\mathbf{F}$ può essere espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{F} = -\iiint_D \operatorname{grad} p \, dx\, dy\, dz \ . \tag{3.41}$$

Le formule (3.40) e (3.41) forniscono la relazione cercata: *la forza di pressione di densità - p, che agisce perpendicolarmente ad ogni elemento di superficie, uguaglia la forza di densità* $-\operatorname{grad} p$, *che agisce su ogni elemento di volume.*

Caratteristica dei campi solenoidali

Il flusso di un campo vettoriale derivabile con continuità e *solenoidale*, cioè a divergenza nulla, presenta un'*invarianza* rispetto a *deformazioni della superficie.* Precisamente, siano Σ_1 e Σ_2 superfici regolari a tratti *connesse, chiuse ed orientabili* ciascuna delle quali sia frontiera di un aperto limitato in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che Σ_1 sia contenuta nell'interno di Σ_2 e chiamiamo D l'intercapedine tra Σ_1 e Σ_2, cioè l'insieme dei punti esterni a Σ_1 ed interni a Σ_2.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.10 - *Sia* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\overline{D})$, *tale che* $\operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 0$ *in* D. *Allora*

$$\iint_{\Sigma_1} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma = \iint_{\Sigma_2} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma \tag{3.42}$$

Dimostrazione - Applichiamo il teorema della divergenza ad $\mathbf{F}$ in D. Si ha, osservando che la normale esterna a Σ_1 è la normale interna a D:

$$0 = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx\, dy\, dz = \iint_{\Sigma_2} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma - \iint_{\Sigma_1} < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma$$

da cui la (3.42). □

La (3.44) è utile in casi come il seguente.

***Esempio* 3.10** - Si voglia calcolare il flusso del campo elettrostatico $\mathbf{E}$, generato da una carica puntiforme q, posta nell'origine, attraverso una *qualunque* superficie chiusa Σ che racchiuda q.

Tale campo, in un conveniente sistema di misurazione, coincide con il gradiente della funzione (*potenziale elettrostatico*)

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\varrho} \qquad (\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \ .$$

Si ha dunque

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{q}{4\pi\varrho^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

e di conseguenza

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} .$$

In base alla proposizione 3.10 il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso Σ è uguale al flusso di $\mathbf{E}$ attraverso una superficie sferica Σ_R centrata nell'origine e di raggio R abbastanza grande da contenere Σ. Perciò

$$\text{flusso di } \mathbf{E} = \iint_{\Sigma_R} < \mathbf{E}, \mathbf{n}_e > d\sigma .$$

Su Σ_R si ha:

$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{R}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) , \quad \varrho = R \quad \text{e} \quad < \mathbf{E}, \mathbf{n}_e >= \frac{q}{4\pi R^2}$$

e perciò

$$\text{flusso di } \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} d\sigma = q ,$$

risultato ben noto in elettrostatica.

Esercizi

1. Usare il teorema di Gauss–Green per valutare i seguenti integrali: $\oint_{\gamma^+} y^2 dx + x\,dy$ dove γ è il bordo del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ e dove γ è l'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

2. Dimostrare le seguenti formule di *integrazione per parti* per integrali doppi: *siano* $f, g \in C^1(\overline{D})$, *D ammissibile per il teorema* 3.2, allora:

$$\iint_D f\,g_x dx\,dy = \int_{\partial^+ D} f g\,dy = \iint_D f_x\,g\,dx\,dy$$

e

$$\iint_D f\,g_y\,dx\,dy = -\int_{\partial^+ D} f g\,dx - \int\int_D f_y\;g\,dx\,dy .$$

3. Usare il teorema 3.2 per dimostrare che, se D è semplicemente connesso e ammissibile per il teorema 3.2, allora la forma differenziale $Pdx + Qdy$, con $P, Q \in C^1(\overline{D})$, è esatta in D se e solo se $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in D.

4. Sia γ una curva chiusa semplice e regolare di equazione polare $\varrho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Se γ è la frontiera di D, dimostrare che

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta .$$

Calcolare l'area della cardioide.

5. Sia γ una curva chiusa semplice e regolare di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Se γ è la frontiera di D orientata positivamente, mostrare che

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt .$$

6. Come si può definire l'indice di avvolgimento di una curva γ rispetto ad un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$?

$$\left[\int_\gamma \omega, \text{ dove } \omega = -\frac{y - y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}dx + \frac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}dy\right].$$

7. Sia $D \subseteq \mathbf{R}^2$ ammissibile per il teorema 3.2 ed $f \in C^2(\overline{D})$. Poniamo $D_{\mathbf{n}} f =< \operatorname{grad} f, \mathbf{n} >$ su ∂D. Dimostrare che

a) $\displaystyle\int_{\partial^+ D} D_{\mathbf{n}_e} f\,ds = \iint_D \Delta f\,dx\,dy.$

b) Dedurre che, se f è armonica in D, $\displaystyle\int_{\partial D} D_{\mathbf{n}} f\,ds = 0.$

8*. Sia $D_\varrho, 0 < \varrho \leq 1$, una famiglia di cerchi con centro $(0,0)$ e di raggio ϱ. Sia poi $f \in C^2(\overline{D}_1)$. Mostrare che, posto

$$\psi(\varrho) = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\partial D_\varrho} f\,ds = \text{ media di } f \text{ su } \partial D_\varrho ,$$

a) $\displaystyle\psi'(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f_x \cos\theta + f_y \sin\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\partial D_\varrho} D_{\mathbf{n}_e} f\,ds ;$

b) dedurre da a) e dall'esercizio 7 che, se f è armonica, $\psi'(\varrho) = 0$ e quindi $\psi(\varrho) =$ =costante;

c) concludere che

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\partial D_\varrho} f\,ds$$

(*proprietà di media* per funzioni armoniche).

9. Sia D il disco unitario con centro in $(0,0)$. Siano f e g di classe $C^2(\overline{D})$. Dimostrare che:

a) se $f = g = 0$ su ∂D:

$$\iint_D g\Delta f\,dx\,dy = \iint_D f\Delta g\,dx\,dy ;$$

b) se $f = 0$ o $g = 0$ su ∂D:

$$\iint_D f_x g_y\;dx\;dy = \iint_D f_y\;g_x\;dx\;dy .$$

10. Sia Σ una superficie chiusa ammissibile per il teorema della divergenza. Mostrare che

$$\iint_\Sigma \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})d\sigma = \iint_\Sigma \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})d\sigma = \iint_\Sigma \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})d\sigma = 0 .$$

11. Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ ammissibile per il teorema della divergenza; poniamo

$$\mathcal{J}(D) = \iint_{\partial^+ D} (x\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + y\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + z\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}))d\sigma .$$

Mostrare che, se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, allora $\mathcal{J}(D_1) \leq \mathcal{J}(D_2)$.

12. Trasformare con la formula di Stokes i seguenti integrali curvilinei (su $\partial^+\Sigma$) in integrali di superficie (su Σ).

a) $\displaystyle\int_{\partial^+\Sigma} (z^2 + y)dx + z\,dy + y\,dz$

b) $\displaystyle\int_{\partial^+\Sigma} (y - x)dx + (2y + z)dy - z\,dz.$

13. Calcolare il seguente integrale curvilineo sia utilizzando la formula di Stokes sia direttamente

$$\int_\gamma (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x - y)\,dz$$

dove γ è il cerchio intersezione tra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il piano $z = y$.

14. Calcolare mediante la formula di Stokes il flusso del vettore $\mathbf{V} = (x + y)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + x^3 y\,\mathbf{k}$ attraverso il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

15. (Generalizzazione dell'esercizio 7). Sia $D \subset \mathbf{R}^3$ ammissibile per il teorema della divergenza ed $f \in C^2(\overline{D})$. Poniamo $D_{\mathbf{n}} f = < \operatorname{grad} f, \mathbf{n} >$.

Mostrare che

$$\iint_{\partial^+ D} D_{\mathbf{n}_e} f\,d\sigma = \iiint_D \Delta f\,dx\,dy\,dz .$$

Si noti che, se $\Delta f = 0$, allora $\iint_{\partial^+ D} D_{\mathbf{n}_e} f\,d\sigma = 0$.

16.* Sia $H(x, y, z)$ una funzione omogenea di grado μ, tale che $\Delta H = 1$ in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che, se D è la sfera unitaria con centro in $(0, 0, 0)$, allora

$$\iint_{\partial^+ D} H\,d\sigma = \frac{4\pi}{\mu}$$

[Suggerimento: utilizzare la formula di Eulero (Teor. 7.1.9 Vol. 1) e poi il teorema della divergenza].

17. Sia Σ una superficie connessa chiusa e regolare con normale $\mathbf{n}$. Poniamo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Mostrare che $\displaystyle\iint_\Sigma \mathbf{r} \wedge \mathbf{n}\,d\sigma = 0.$

18.* *Integrazione per parti negli integrali tripli.*

Sia D ammissibile per il teorema della divergenza. Siano poi $f \in C^1(\overline{D})$ uno scalare e $\mathbf{F} \in C^1(\overline{D})$ un vettore. Allora

$$\iiint_D f\,\operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial^+ D} f < \mathbf{F}, \mathbf{n}_e > d\sigma - \iiint_D < \nabla f, \mathbf{F} > dx\,dy\,dz .$$

Dedurre che, se $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ e φ è armonica, allora

$$\iint_{\partial^+ D} f\,D_{\mathbf{n}_e}\varphi d\sigma = \iiint_D < \nabla f, \nabla\varphi > dx\,dy\,dz .$$

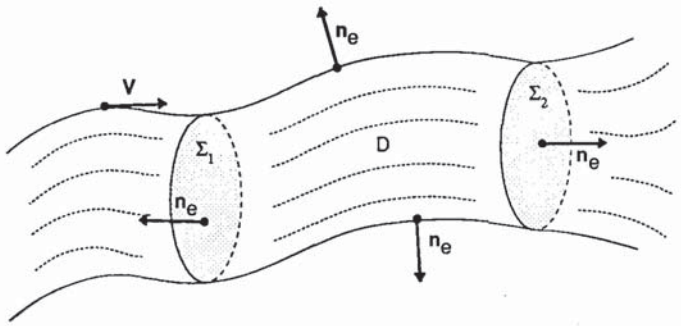


Fig. 6.39 Tubo di flusso con due sezioni.

19. Sia $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ il campo di velocità di un fluido, tale che $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Chiamiamo *linea di corrente* una curva γ tale che in ciascuno dei suoi punti la direzione tangente sia quella di $\mathbf{V}$.

Se Σ è una superficie in $\mathbb{R}^3$, consideriamo il fascio di linee di corrente che passano attraverso Σ. Il loro insieme si chiama *tubo di flusso*. Dimostrare che, se Σ_1 e Σ_2 sono due sezioni piane di un tubo di flusso (figura 6.39), allora

$$\iint_{\Sigma_1} < \mathbf{V}, \mathbf{n}_e > d\sigma + \iint_{\Sigma_2} < \mathbf{V}, \mathbf{n}_e > d\sigma = 0$$

Interpretare il risultato in termini fisici.

[Suggerimento: applicare il teorema della divergenza alla regione D in figura 6.39].

Equazioni alle derivate parziali e calcolo delle variazioni

7

1. EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Per mezzo di *equazioni differenziali ordinarie* siamo in grado di costruire modelli matematici che descrivono l'evoluzione temporale di sistemi il cui stato, in ogni istante, può essere determinato da un numero finito di parametri: a questa categoria appartengono, per esempio, i sistemi costituiti da un numero finito di punti, i corpi rigidi, etc. ... Ma per descrivere la configurazione di una corda ad un generico istante t è necessario prescrivere la posizione di *tutti* i suoi punti (un'infinità continua!) in quell'istante, è necessario cioè assegnare una funzione $u = u(x,t)$; le leggi della fisica stabiliscono dei legami tra le derivate temporali e spaziali di u, cioè l'evoluzione temporale della corda è descritta da un'equazione in cui compaiono le derivate parziali di u: una tale equazione è detta perciò *equazione alle derivate parziali* (EDP).

Per mezzo di equazioni di questo tipo si costruiscono modelli matematici adatti a descrivere un grandissimo numero di fenomeni che interessano ogni tipo di scienza: dalla fisica all'economia, dall'ingegneria alla biologia, alle scienze sociali, etc. ...

La teoria delle EDP è ormai così vasta che è impossibile darne, in poche pagine, un'idea, anche sommaria. Pur restringendo le nostre considerazioni alle EDP lineari del secondo ordine, come faremo, quello che segue è, più che una introduzione, un "assaggio" di un grande capitolo della matematica, ancora in pieno e rigoglioso sviluppo.

Questa sezione è dedicata soprattutto a quegli studenti di Ingegneria che esauriscono i loro studi matematici nel biennio; per gli altri è auspicabile che un così importante argomento trovi più adeguato spazio nei corsi futuri.

1.1 Generalità

Una equazione alle derivate parziali è una relazione della forma

$$F(x, y, t, \ldots, u, u_x, u_y, u_t, \ldots, u_{xy}, \ldots) = 0 \tag{1.1}$$

dove F è una funzione delle variabili reali $x, y, t, \ldots, u, u_x, u_y, u_t, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$; $u = u(x, y, t, \ldots)$ è una funzione incognita delle variabili indipendenti $x, y, t, \ldots$. Una *soluzione* (particolare) della (1.1) è una funzione $u(x, y, \ldots)$ la quale, quando sia sostituita nella (1.1) insieme con le sue derivate parziali $u_x, u_y, u_t, \ldots$ faccia diventare la relazione (1.1) una identità.

Una equazione del tipo (1.1) si dirà di *ordine* n se contiene almeno una derivata parziale di ordine n e nessuna di ordine maggiore di n.

La (1.1) si dirà *lineare* se F è lineare nella funzione incognita u e nelle sue derivate $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$; si dirà *quasi lineare* se F è lineare (soltanto) nelle derivate di ordine massimo. Per esempio, l'equazione

$$u_t + u\, u_x = 0$$

nella funzione incognita $u = u(x, t)$ è quasi lineare del 1° ordine; l'equazione

$$\Delta u = f \ ,$$

cioè

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

nella funzione $u = u(x, y, z)$ è lineare del 2° ordine; l'equazione

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)$$

è non lineare del 2°.

Vediamo ora alcuni semplicissimi esempi di equazioni alle derivate parziali; si intende, negli esempi che seguono, che tutte le funzioni considerate siano sufficientemente regolari, in modo che le operazioni di integrazione e di derivazione che su di esse vengono fatte abbiano significato.

1. L'equazione

$$u_x = 0 \tag{1.2}$$

nella funzione $u(x, t)$ stabilisce che u non dipende da x e ammette pertanto, come più generale soluzione,

$$u = w(t) \tag{1.3}$$

dove w è una funzione arbitraria di t.

2. L'equazione

$$u_x - u_t = 0 \tag{1.4}$$

si riconduce ad una del tipo 1. con la seguente trasformazione di variabili

$$\begin{cases} x + t & = \xi \\ x - t & = \eta \\ u(x, t) & = \omega(\xi, \eta) \ . \end{cases} \tag{1.5}$$

Abbiamo allora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

e perciò la (1.4) diventa

$$2\omega_\eta = 0$$

che ammette come soluzione un'arbitraria funzione di ξ

$$\omega = w(\xi)$$

e pertanto, tornando alle vecchie variabili,

$$u = w(x + t) \ . \tag{1.6}$$

Quando l'equazione (1.4) si incontra in certi problemi di fisica, l'incognita u ha spesso il significato di densità di un certo mezzo ed è funzione della variabile spaziale x e della variabile temporale t. La (1.4) descrive allora il propagarsi di una perturbazione (una variazione di densità) attraverso il mezzo in esame nella direzione delle x negative e con velocità unitaria: infatti, dalla (1.6) abbiamo che, se all'istante $t = 0$ e nel punto $x = \overline{x}$ la densità ha il valore $w(\overline{x})$, lo stesso valore si riscontra, per esempio, all'istante $t = 3$, ma nel punto $x = \overline{x} - 3$.

Dello stesso tipo della (1.4) si presenta l'equazione

$$\alpha u_x + \beta u_t = 0 \tag{1.7}$$

(con α e β costanti). La (1.7) si tratta come la (1.4) usando il cambiamento di variabili

$$\beta x - \alpha t = \xi \ , \ \beta x + \alpha t = \eta \ ;$$

si ottiene la soluzione generale

$$u = w(\beta x - \alpha t) \tag{1.8}$$

che rappresenta il propagarsi di un disturbo (o di un'onda, come si dice comunemente) con velocità α/β (velocità positiva significa propagazione nel senso delle x crescenti, velocità negativa, in senso contrario); in due punti x_1 e x_2 distanti tra loro una lunghezza l lo stesso disturbo verrà osservato con uno scarto di tempo di $l\beta/\alpha$.

3. Consideriamo ora l'equazione

$$u_{xy} = 0 \tag{1.9}$$

nella funzione incognita $u(x, y)$. La (1.9) ci dice anzitutto che u_x non dipende da y, cioè

$$u_x = \Phi(x) \tag{1.10}$$

dove Φ è un'arbitraria funzione di x; integrando ora la (1.10) abbiamo

$$u = \int \Phi(x)dx + \psi(y)$$

dove ψ è un'arbitraria funzione di y e $\int \Phi(x)dx$ è una qualsiasi primitiva di Φ (che è funzione arbitraria di x) e dunque una funzione arbitraria di x che indicheremo con $\varphi(x)$. Abbiamo così la soluzione generale della (1.9):

$$u = \varphi(x) + \psi(y) \tag{1.11}$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie degli argomenti.

4. L'equazione

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \tag{1.12}$$

(v costante) si riconduce alla precedente col cambiamento di variabili

$$x + vt = \xi \ , \ x - vt = \eta \ , \ u(x,t) = \omega(\xi, \eta) \ ;$$

la (1.12) diventa infatti

$$4v^2 \omega_{\xi\eta} = 0$$

la quale ammette l'integrale generale

$$\omega(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

e, tornando alle variabili x e t,

$$u(x,t) = \varphi(x + vt) + \psi(x - vt) \tag{1.13}$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie degli argomenti. Il significato fisico dei due termini che compongono il secondo membro della (1.13) è il seguente: $\varphi(x + vt)$ rappresenta una perturbazione che si propaga nel senso delle x negative con velocità v; $\psi(x - vt)$ rappresenta un'analoga perturbazione che si propaga in senso contrario con la stessa velocità.

Negli esempi precedenti abbiamo ricavato elementarmente l'integrale generale delle equazioni considerate; si sarà osservato che esso dipende da un certo numero di *funzioni arbitrarie*. Nelle applicazioni, noi saremo di solito interessati a risolvere particolari *problemi*, che si formulano mediante equazioni accompagnate da condizioni supplementari che selezionano una (o più) soluzioni particolari.

Nei problemi associati ad equazioni differenziali ordinarie (per esempio, molti problemi di Meccanica) spesso il procedimento adottato è il seguente: si cerca l'integrale generale delle equazioni differenziali il quale contiene un certo numero di costanti arbitrarie; quindi si cerca di determinare tali costanti imponendo le condizioni supplementari del problema (ad esempio, posizione e velocità iniziali) il che conduce a risolvere equazioni algebriche o trascendenti, ma sempre con un numero finito di incognite. Invece, quando si tratta di equazioni a derivate parziali, l'integrale generale contiene funzioni arbitrarie e quindi, anche se si riesce a trovarlo (cosa che accade assai raramente nei problemi concreti) per determinare poi queste funzioni per mezzo delle condizioni supplementari, si devono risolvere, generalmente, problemi matematici piuttosto difficili (per esempio, equazioni integrali). Si preferisce quindi assai spesso tener conto fin dall'inizio delle condizioni supplementari (o di una parte di esse) in modo da ricercare non l'integrale generale, ma un integrale di un "grado limitato" di generalità, per esempio, contenente alcune costanti arbitrarie (vedremo applicate queste osservazioni nei paragrafi 1.7, 1.8).

1.2 Equazioni lineari del 2° ordine. Classificazione

In questa breve introduzione alle equazioni alle derivate parziali limiteremo le nostre considerazioni alle equazioni *lineari del 2° ordine*, cioè ad equazioni del tipo

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} + a(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}) \tag{1.14}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le variabili indipendenti; supporremo che i *coefficienti* $a_{ij}(\mathbf{x})$, $a_i(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$ dell'equazione e il *termine noto* $f(\mathbf{x})$ siano definiti in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

La ragione di limitare il nostro studio ad equazioni del tipo (1.14) sta nel fatto che una grande quantità di fenomeni fisici possono essere modellizzati, almeno in prima approssimazione, da equazioni di questo tipo (vedi il prossimo paragrafo).

Nella (1.14) la parte contenente le derivate seconde, cioè il termine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} \tag{1.15}$$

viene detto *parte principale* o dominante dell'operatore $\mathcal{L}$; la classificazione dell'equazione dipende solo da questo termine (cosicché essa è valida anche per equazioni più generali della (1.14), per esempio equazioni del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + f(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0$$

che vengono dette *semilineari*).

La classificazione viene fatta punto per punto. Sia $\mathbf{x} \in \Omega$ fissato e supponiamo che i coefficienti $a_{ij}(\mathbf{x})$ non siano tutti nulli; associamo all'equazione (1.14) la forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \ . \tag{1.16}$$

Come è noto dall'algebra, una forma quadratica può sempre essere ricondotta ad una *forma canonica*, cioè ad una forma contenente solo i quadrati delle indeterminate; esiste cioè una trasformazione lineare $\mathbf{L}$ (dipendente dal punto $\mathbf{x}$) tale che, se si fa il cambiamento di coordinate

$$\zeta = \mathbf{L}\xi \tag{1.17}$$

la forma quadratica (1.16) assume la forma canonica

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i^2 \tag{1.18}$$

con $\lambda_i = 0, 1,$ o -1. È noto anche che la (1.16) può essere ricondotta alla forma del tipo (1.18) in vari modi (cioè la trasformazione $\mathbf{L}$ non è unica); ma il numero dei λ_i negativi, positivi, e nulli non dipende dalla trasformazione considerata (è un *invariante* della forma quadratica: precisamente il numero dei $\lambda_i < 0$ si chiama *indice di inerzia* e si indica con T, mentre il numero dei $\lambda_i = 0$ si chiama *indice di difetto* e sarà indicato con D).

Allora se, nel punto fissato $\mathbf{x} \in \Omega$, risulta

i) $D = 0$ e $T = 0$ oppure $D = 0$ e $T = n$, la *forma quadratica* (1.16) è *definita* e l'equazione (1.14) sarà detta *ellittica*;

ii) $D = 0$ e $T = 1$ oppure $D = 0$ e $T = n - 1$, la *forma quadratica* è *indefinita* e l'equazione si dice *iperbolica*; se $D = 0$ e $1 < T < n - 1$ l'equazione si dice *ultraiperbolica*.

iii) Il caso $D > 0$ viene generalmente detto *caso parabolico*; tuttavia nelle applicazioni ricorre più frequentemente il caso speciale $D = 1$ e $T = n - 1$ oppure $T = 0$; in tal caso la *forma quadratica* è *semidefinita*; quando si parla di *equazione parabolica* ci si riferisce di solito a questa situazione.

Nel caso di due sole variabili indipendenti x e y l'equazione (1.14) si può scrivere nella forma

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \cdots = f(x,y) \tag{1.19}$$

con i coefficienti a, b, c non tutti nulli nello stesso punto.

La matrice associata alla forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

e perciò la classificazione è la seguente:

i) $ac - b^2 > 0$ equazione ellittica

ii) $ac - b^2 < 0$ equazione iperbolica

iii) $ac - b^2 = 0$ equazione parabolica.

Naturalmente, se i coefficienti sono variabili, una trasformazione che porta l'equazione in forma canonica in un determinato punto $\mathbf{x}$ non produrrà in generale lo stesso effetto in un altro punto $\mathbf{x}'$, anche se l'equazione è dello stesso tipo in $\mathbf{x}$ e in $\mathbf{x}'$. A questo proposito, notiamo che vale, per i coefficienti e il termine noto dell'equazione, l'interpretazione fisica ricordata per le equazioni differenziali ordinarie: i coefficienti rappresentano generalmente le proprietà fisiche del mezzo in cui ha sede il fenomeno descritto dall'equazione stessa, e il termine noto rappresenta le forze esterne che agiscono sul sistema; perciò se il mezzo è *omogeneo* e *isotropo*, i coefficienti sono costanti;in tal caso allora, con una trasformazione di variabili, potremo portare l'equazione in forma canonica in ogni punto del dominio considerato.

1.3 Equazioni tipo e problemi associati

La classificazione fatta nel precedente paragrafo non ha solo interesse matematico, ma traduce anche proprietà fisiche dei fenomeni descritti dall'equazione, come cercheremo di mettere in luce nel presente paragrafo. Vedremo anche che fenomeni diversi sono retti da equazioni della stessa forma, differenti solo per il significato fisico dei simboli.

Questo fatto permette di raggruppare molti fenomeni in pochi tipi di problemi matematici fondamentali, che conviene dunque studiare dal punto di vista puramente analitico, prescindendo dal significato fisico delle quantità che vi figurano.

Esamineremo ora le "equazioni tipo" delle tre classi fondamentali: ellittiche, paraboliche, iperboliche, cioè equazioni a coefficienti costanti, contenenti solo la parte principale dell'operatore, già ridotte in forma canonica.

1. Il prototipo delle equazioni ellittiche è l'*equazione di Poisson*

$$\Delta u = f \tag{1.20}$$

(la sua versione omogenea, $\Delta u = 0$, è detta *equazione di Laplace*), cioè, esplicitamente,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

La (1.20) è evidentemente ellittica: la forma quadratica associata è infatti: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$.

La (1.20) si presenta in moltissimi campi della Fisica e dell'Ingegneria, quali, ad esempio: elasticità, teoria del potenziale gravitazionale, elettrostatica, magnetostatica, cinematica dei fluidi, termostatica ...

Consideriamo, ad esempio, una membrana omogenea che, in posizione di "riposo", occupa la regione Ω del piano x, y, di contorno $\gamma := \partial\Omega$. Applichiamo alla membrana, in ogni punto di Ω, una forza di densità $f(x, y)$ diretta ortogonalmente al piano (x, y). La membrana si incurverà sotto l'azione di questa forza, fino ad assumere, nella nuova posizione di equilibrio, la forma di una superficie di equazione $u = u(x, y)$ (assumiamo l'asse delle u perpendicolare al piano (x, y)). Facciamo le seguenti ipotesi: sotto l'azione di f i punti della membrana subiscono solo uno spostamento verticale (cosicchè il punto, che inizialmente aveva coordinate $(x, y, 0)$, nella nuova posizione di equilibrio avrà coordinate $(x, y, u(x, y))$; supponiamo anche che la variazione di u da punto a punto non sia troppo grande, cioè le derivate u_x e u_y siano piccole, così da poter trascurare, in una prima approssimazione, le potenze u_x^k, u_y^k con $k > 1$. Allora si dimostra che, prese opportune unità di misura, lo spostamento verticale $u(x, y)$ soddisfa l'equazione

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

I problemi che, in questo contesto, più frequentemente si presentano in concreto sono:

i) trovare la posizione di equilibrio della membrana sapendo che il suo bordo è fissato ad una curva Γ (la cui proiezione sul piano (x, y) deve coincidere con γ, cioè la frontiera di Ω); si suppongono note le equazioni parametriche di Γ, cioè

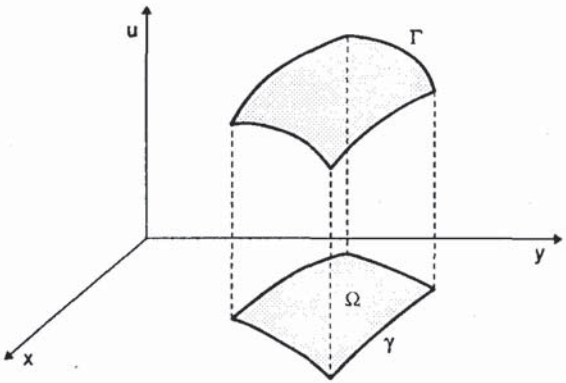


Fig. 7.1

$$\Gamma := \begin{cases} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ u &= \varphi(s) \end{cases} \qquad 0 \le s \le l$$

(se $\varphi = 0$, Γ coincide con γ).

Matematicamente il problema si formula così: trovare $u = u(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.21}$$

Tale problema si chiama *problema di Dirichlet*.

ii) Un altro problema che si incontra frequentemente nelle applicazioni è il *problema di Neumann*: trovare $u = u(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.22}$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale, punto per punto, a γ rivolto verso l'esterno di Ω. Il significato della condizione di Neumann è il seguente: oltre alla forza di densità superficiale f (che agisce sui punti interni della membrana) c'è anche una forza, di densità lineare ψ, che agisce (sempre in direzione verticale) sul bordo della membrana; sotto l'azione di queste forze il bordo è libero di muoversi (verticalmente); la configurazione di equilibrio (se esiste) è descritta appunto dalle condizioni (1.22).

Anche nelle altre circostanze sopra accennate (elettrostatica, termostatica, etc. ...) i problemi più comuni che si incontrano sono i due sopra menzionati: il problema di Dirichlet e il problema di Neumann. Osserviamo infine che, se la membrana, nell'esempio visto sopra, non è omogenea (o il dielettrico, nell'interpretazione elettrostatica, non è omogeneo etc. ...) invece della (1.20) compare una equazione con coefficienti variabili, ma sempre di tipo ellittico (in ogni punto di Ω); i fenomeni descritti dalle equazioni ellittiche hanno, in generale, questo in comune: essi sono fenomeni *stazionari*, corrispondono cioè a situazioni che hanno già raggiunto l'equilibrio.

2. Il prototipo delle equazioni paraboliche è l'equazione

$$u_t - \Delta_{\mathbf{x}} u = f \tag{1.23}$$

dove l'incognita u è funzione di $n + 1$ variabili $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ e $\Delta_{\mathbf{x}}$ è il laplaciano che opera solo sulle variabili $\mathbf{x}$: $\Delta_{\mathbf{x}} u := u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}$. La $(n+1)$–esima variabile viene indicata con t per il significato (di variabile temporale) che generalmente assume nelle applicazioni.

La forma quadratica associata alla (1.23) è:

$$-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \cdots - \xi_n^2 + 0 \cdot \xi_{n+1}^2$$

e perciò l'equazione è parabolica $(D = 1, T = n)$.

La (1.23) è detta *equazione di diffusione*, poiché descrive, sotto opportune ipotesi, la diffusione del calore nei corpi. L'incognita u rappresenta la temperatura nel punto $\mathbf{x}$ all'istante t; il termine noto f rappresenta la densità di calore prodotta (o sottratta) da una sorgente (positiva o negativa) eventualmente presente nel corpo; questo è supposto omogeneo e isotropo e il coefficiente di diffusione (costante) è stato posto uguale a 1. La (1.23) descrive anche la diffusione di un fluido in un dato ambiente: in tal caso u rappresenta la concentrazione di questo fluido.

I problemi più comuni che si incontrano sono:

i) determinare la temperatura del corpo all'istante generico $t > 0$ conoscendone la temperatura all'istante iniziale ($t = 0$) e sapendo, in ogni istante, qual è la temperatura sul bordo. Assumendo che il corpo occupi la regione Ω dello spazio $\mathbb{R}^3$, scriveremo:

$$u(\mathbf{x},0) = h(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(condizione iniziale)} \tag{1.24}$$

$$u(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \text{ (condizione al bordo di tipo Dirichlet)} \tag{1.25}$$

Il problema (1.23) (1.24) (1.25) prende il nome di *problema di Cauchy–Dirichlet*.

ii) Invece della temperatura sul bordo può essere nota la quantità di calore scambiata tra il corpo e l'ambiente circostante (per ogni istante $t > 0$): allora, al posto della (1.25), si formula la condizione seguente

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \psi(\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \qquad \begin{array}{c}\text{(condizione al bordo}\\ \text{di tipo Neumann)}\end{array} \tag{1.26}$$

(dove $\mathbf{n}$ è la normale esterna a $\partial\Omega$). Il problema (1.23), (1.24), (1.26) prende il nome di *problema di Cauchy–Neumann*.

Si noti che ci siamo posti il problema di determinare la temperatura del corpo all'istante $t > 0$ conoscendone la temperatura *iniziale* (per $t = 0$); un problema completamente diverso (e che richiederebbe uno speciale trattamento) sarebbe quello di determinare la temperatura ad un istante $t < 0$ conoscendo la temperatura *finale* (per $t = 0$): vedi il paragrafo 1.5 e l'esercizio 5; si osservi anche che l'equazione (1.23) cambia aspetto cambiando t in $-t$.

3. Il prototipo delle equazioni iperboliche è l'equazione

$$u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}} u = f \tag{1.27}$$

dove ancora u è funzione delle $n+1$ variabili $(\mathbf{x},t)$; la forma quadratica associata alla (1.27) è:

$$-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \cdots - \xi_n^2 + \xi_{n+1}^2$$

e perciò l'equazione è iperbolica. L'equazione (1.27) prende il nome di *equazione delle onde*, anche se la maggior parte delle onde non è descritta da essa. Questa equazione interviene comunque in moltissimi campi della Fisica matematica, ma principalmente in elastodinamica, in acustica, in elettromagnetismo.

Consideriamo, per esempio, la membrana descritta al punto 1. di questo paragrafo, soggetta ad una forza $f(x,y,t)$; la funzione $u = u(x,y,t)$, che descrive la forma della membrana all'istante t, soddisfa l'equazione

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x,y,t) \tag{1.28}$$

(avendo scelto opportunamente l'unità di misura dei tempi).

Un problema tipico per questa equazione (detto ancora di Cauchy–Dirichlet) consiste nel trovare una soluzione della (1.28) per $t > 0$ (oppure per $t < 0$) conoscendo posizione e velocità iniziali (o finali) dei punti della membrana, cioè

$$\begin{cases} u(x,y,0) = h(x,y) \\ u_t(x,y,0) = k(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1.29}$$

e, per ogni istante, la posizione del bordo

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y,t) \quad (x,y) \in \partial\Omega\ ,\ \forall t > 0 \text{ (oppure } t < 0) \tag{1.30}$$

(si noti che la forma dell'equazione (1.27) non cambia se si cambia t in $-t$).

Invece della condizione (1.30) possiamo considerare la condizione di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,y,t) = \psi(x,y,t) \quad (x,y) \in \partial\Omega\ ,\ \forall t > 0 (t < 0) \tag{1.31}$$

col solito significato.

1.4 Il problema di Cauchy. Caratteristiche

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, per equazioni di una determinata classe (ellittiche, paraboliche, iperboliche) si formulano problemi che sono "tipici" di quella classe: tali problemi sono suggeriti in modo naturale dalle situazioni fisiche sopra descritte.

Un importante problema, che può formularsi matematicamente in modo identico per ogni equazione come la (1.14) (ma anche per equazioni di tipo più generale) indipendentemente dalla classe cui questa appartiene è il problema di Cauchy, l'analogo, per equazioni alle derivate parziali, dell'omonimo problema considerato per le equazioni differenziali ordinarie.

Per le equazioni in due variabili indipendenti x_1, x_2 il problema si formula nel modo seguente.

Problema di Cauchy: sia dato nel piano (x_1, x_2) un arco di curva γ, definito dalle equazioni parametriche

$$\gamma := \begin{cases} x_1 = x_1(s) \\ x_2 = x_2(s) \end{cases} \qquad 0 \le s \le l$$

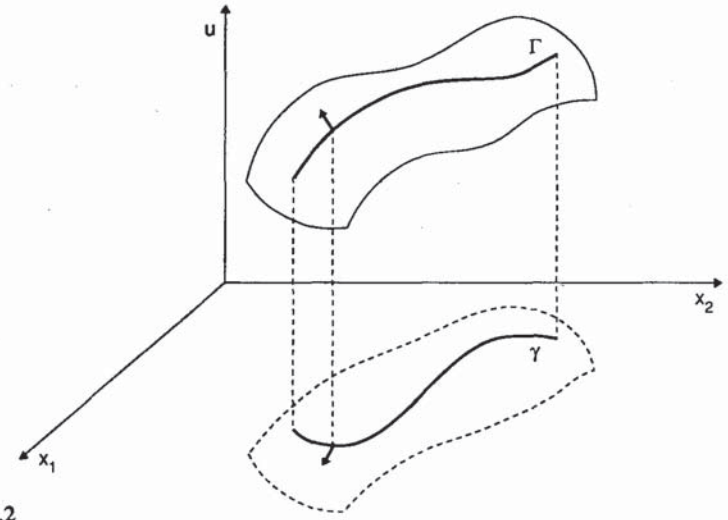


Fig. 7.2

e contenuto nella regione Ω in cui i coefficienti e il termine noto dell'equazione sono definiti; siano assegnate due funzioni $\varphi(s)$ e $\psi(s)$; trovare una soluzione u della (1.14) (con $n = 2$) che sia definita in un intorno di γ e soddisfi le condizioni

$$\begin{cases} u|_\gamma = \varphi \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_\gamma = \psi \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} u(x_1(s), x_2(s)) = \varphi(s) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_1(s), x_2(s)) = \psi(s) \end{matrix} \quad 0 \le s \le l \tag{1.32}$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale a γ.

Osservazione 1.1 - Nello spazio $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2, u) le soluzioni $u = u(x_1, x_2)$ della (1.14) rappresentano geometricamente delle superfici: le *superfici integrali* dell'equazione. Il problema posto consiste nel cercare, tra le infinite superfici integrali della (1.14), quella (o quelle) che soddisfa le condizioni (1.32): la prima di queste impone a detta superficie di passare per una assegnata curva Γ (di equazioni $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $u = \varphi(s)$) e la seconda impone che tale superficie abbia un assegnato piano tangente (o, equivalentemente, un assegnato versore normale) in ogni punto di Γ: infatti dalla prima condizione ricaviamo subito la derivata della u nella direzione tangente a γ; la seconda ci dà la derivata della u nella direzione normale a γ; l'insieme di queste due informazioni ci permette di ricavare le derivate della u in qualunque direzione, per esempio u_x e u_y e con esse ricavare facilmente l'equazione del piano tangente alla superficie.

Osservazione 1.2 - Il problema di Cauchy è un problema "in piccolo", nel senso che la soluzione è richiesta in un non precisato intorno della curva γ, portante i dati; ciò in contrasto con i problemi descritti nel paragrafo precedente (problemi al contorno) in cui la soluzione era richiesta in tutta un'assegnata regione Ω.

Osservazione 1.3 - Nel caso generale ($n > 2$) il problema di Cauchy si formulerà così: assegnata in $\mathbb{R}^n$ una ipersuperficie γ (varietà $(n-1)$–dimensionale) individuata dalle equazioni parametriche

$$x_i = x_i(\mathbf{s}) \qquad (i = 1, \dots, n) \qquad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$$

trovare una soluzione $u = u(\mathbf{x})$ della (1.14), definita in un intorno di γ, e tale che

$$u|_\gamma = \varphi \ , \ \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_\gamma = \psi$$

essendo $\varphi(\mathbf{s})$, $\psi(\mathbf{s})$ funzioni assegnate ($0 \le s_i \le l_i$: $i = 1, \dots, n-1$).

Enunceremo ora un teorema che assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Tale teorema metterà in evidenza una delle differenze più profonde tra le equazioni ordinarie e le equazioni alle derivate parziali. Per le prime sappiamo infatti che, se i coefficienti e il termine noto dell'equazione (*) sono continui, il problema di Cauchy ammette soluzione (unica); per le seconde invece può avvenire che, anche con coefficienti e termine noto di classe C^∞, il problema non abbia alcuna soluzione; questo fenomeno, scoperto da Hans Lewy, è stato l'origine di molte e importanti ricerche, anche recenti, in questo settore.

Quanto detto giustifica il fatto che, nel teorema che tra poco enunceremo, si faccia riferimento a funzioni analitiche. È però necessario introdurre prima un concetto fondamentale.

Superfici caratteristiche

Supponiamo che l'equazione $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ definisca implicitamente una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$. Tale superficie si dirà *caratteristica* per l'equazione (1.14) se la funzione Φ è soluzione dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} = 0 \ . \tag{1.33}$$

La (1.33) è una equazione non lineare del 1° ordine; essa è formata utilizzando la parte principale dell'operatore $\mathcal{L}$ e sostituendo le derivate seconde $u_{x_i x_j}$ con il prodotto delle derivate prime $\Phi_{x_i} \Phi_{x_j}$.

Consideriamo in particolare il caso di due sole variabili indipendenti x e y; l'equazione (1.33), riferita all'equazione scritta nella forma (1.19), diventa:

(*) Facciamo riferimento qui ad equazioni lineari (del 2° ordine) per mantenere l'analogia con le equazioni che stiamo trattando in questa sezione.

$$a(x,y)\Phi_x^2 + 2b(x,y)\Phi_x\Phi_y + c(x,y)\Phi_y^2 = 0\ . \tag{1.34}$$

Se l'equazione implicita $\Phi(x,y) = 0$ è risolubile, per esempio, rispetto a y, cioè se $y = y(x)$ è l'equazione cartesiana di una *linea* caratteristica, la (1.34) diventa

$$a(x,y)y'^2 - 2b(x,y)y' + c(x,y) = 0 \tag{1.35}$$

da cui, risolvendo rispetto a y', abbiamo (se $a \neq 0$)

$$y' = (b \pm \sqrt{b^2 - ac})/a\ . \tag{1.36}$$

Se $b^2 - ac > 0$ (equazione iperbolica), la (1.36) rappresenta due equazioni differenziali (nel campo reale) del 1° ordine; avremo, come soluzione, una doppia infinità di linee nel piano (x,y).

Se $b^2 - ac = 0$ (equazione parabolica) la (1.36) rappresenta una sola equazione differenziale: le linee caratteristiche formano una famiglia ad un parametro nel piano (x,y).

Se $b^2 - ac < 0$ (equazione ellittica) non vi sono linee caratteristiche (reali).

Lo studente completerà la discussione esaminando i casi: $a = 0$ e $c \neq 0$ (basta scambiare i ruoli di x e y) oppure $a = 0$, $c = 0$ e $b \neq 0$.

Esempi

1.1. Un'equazione ellittica non ha mai caratteristiche reali; infatti l'equazione (1.33), essendo la forma quadratica $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j$ definita, è soddisfatta solo se $\Phi_{x_i} = 0\ \ \forall i = 1,\dots,n$, cioè solo se Φ è costante; allora l'equazione $\Phi = 0$ non definisce alcuna superficie in $\mathbb{R}^n$.

1.2. Per l'equazione di diffusione (in 2 variabili x,t), cioè $u_t - u_{xx} = 0$, l'equazione (1.35) (dove si deve leggere t al posto di y) diventa: $t' = 0$. Le linee caratteristiche sono perciò le rette di equazione $t =$ costante.

In generale, per l'equazione $u_t - \Delta_{\mathbf{x}} u = 0$, le superfici caratteristiche sono date implicitamente dall'equazione $\Phi(x_1,\dots,x_n,t) = 0$ dove Φ è soluzione di:

$$\Phi_{x_1}^2 + \cdots + \Phi_{x_n}^2 = 0\ .$$

Si ricava perciò che Φ è funzione solo di t, del resto arbitraria; allora l'equazione $\Phi(t) = 0$ avrà come soluzione $t =$ costante (ogni costante è accettabile, essendo Φ arbitraria). Le superfici caratteristiche sono perciò i piani di equazione: $t =$ costante.

1.3. Per l'equazione delle onde (in 2 variabili x,t), nella forma $u_{tt} - v^2 u_{xx}$ (v costante), l'equazione (1.36) (con t al posto di y) diventa: $t' = \pm 1/v$. Le linee caratteristiche sono perciò le rette del piano (x,t) con pendenza $1/v$ o $-1/v$.

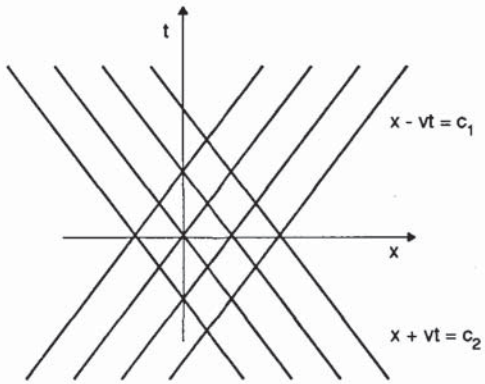


Fig. 7.3 Linee carateristiche.

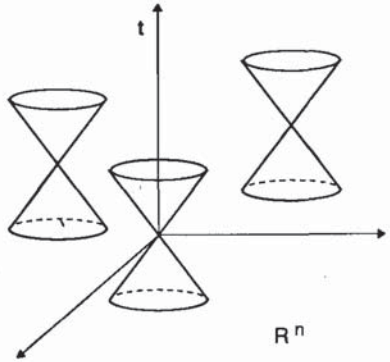


Fig. 7.4 Coni caratteristici.

Nel caso generale, per l'equazione $u_{tt} - v^2\Delta_{\mathbf{x}} u = 0$, le superfici caratteristiche sono costituite dal "cono" di equazione: $v^2t^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e da tutti quelli che si ottengono da questo con una traslazione arbitraria del vertice.

Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema.

■ **Teorema 1.1** - (di Cauchy–Kowalewskaya). *Con riferimento al problema di Cauchy sopra illustrato assumiamo che:*

i) *i coefficienti e il termine noto dell'equazione sono analitici in un intorno di* γ (*);

ii) γ *è analitica (cioè le funzioni* $x_i(\mathbf{s})$, *che definiscono parametricamente* γ, *sono analitiche;*

iii) *i dati* φ *e* ψ *sono analitici;*

iv) *la superficie* γ *non è in alcun punto tangente ad una superficie caratteristica (cioè in nessun punto* γ *ha il piano tangente in comune con una caratteristica).*

Allora esiste una sola funzione u, *analitica in un intorno di* γ, *soluzione del problema dato.*

Significato delle caratteristiche

Per comprendere il ruolo giocato dalle caratteristiche nel problema in esame consideriamo l'equazione (1.19) (due sole variabili indipendenti); la linea γ, portante i dati, sia assegnata in forma cartesiana: $y = y(x)$. I dati del problema forniscono dunque la funzione u su γ, cioè $u(x,y(x))$ e la derivata normale $\partial u/\partial\mathbf{n}(x,y(x))$; da questi dati si ricavano facilmente $u_x(x,y(x))$ e $u_y(x,y(x))$.

(*) Si assume cioè che queste funzioni, per esempio $f(x_1,\dots,x_n)$, siano sviluppabili in serie di Taylor rispetto ad ognuna delle variabili $x_1,\dots,x_n$, nell'intorno di ogni punto $\mathbf{x}^\circ \in \gamma$.

Per trovare la soluzione in un intorno di γ, nelle ipotesi di analiticità stabilite nel teorema (1.1), basterà calcolare tutte le derivate della u su γ. Cominciamo col calcolare le derivate seconde. Si hanno le relazioni:

$$\frac{du_x}{dx} = u_{xx} + u_{xy}y' \ , \quad \frac{du_y}{dx} = u_{yx} + u_{yy}y'$$

da cui si ricava

$$u_{xx} = u_{yy}y'^2 - \frac{du_y}{dx}y' + \frac{du_x}{dx}$$

$$u_{xy} = -u_{yy}y' + \frac{du_y}{dx} \ .$$

Sostituendo queste nella (1.19) abbiamo l'equazione

$$u_{yy}[a(x, y(x))y'^2 - 2b(x, y(x))y' + c(x, y(x))] + \cdots = 0 \tag{1.37}$$

(dove i puntini sostituiscono quantità note). Dalla (1.37) possiamo ricavare u_{yy} (cosicché tutte le derivate seconde saranno note) purché il termine entro parentesi quadra sia $\neq 0$. L'equazione: $[\cdots] = 0$ è precisamente la (1.35), cioè l'equazione differenziale delle caratteristiche per la (1.19). Richiedere che $[\cdots] \neq 0$ per ogni x significa perciò richiedere che la linea γ non coincida (o risulti tangente) ad una caratteristica.

Determinate così le derivate seconde, si può procedere al calcolo delle derivate successive; la condizione $[\cdots] \neq 0$ garantisce che tali derivate sono tutte univocamente determinate dai dati iniziali.

1.5 Generalità sui problemi al contorno. Nozione di problema ben posto

Riprendiamo in esame i problemi esposti nel paragrafo 1.3. La formulazione generale di tali problemi è la seguente: si richiede di trovare una funzione u soddisfacente l'equazione (1.14)

$$\mathcal{L}u = f$$

e un certo numero di condizioni supplementari (condizioni al contorno e condizioni iniziali) del tipo

$$\begin{aligned} L_1 u &= \varphi_1 \\ L_2 u &= \varphi_2 \\ &\vdots \\ L_k u &= \varphi_k \end{aligned}$$

Per esempio, per il problema di Dirichlet si richiede di trovare $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, con l'unica condizione:

$$L_1 u := u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} = \varphi_1 \ .$$

Nel problema di Cauchy–Neumann per l'equazione di diffusione si richiede di trovare $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega, t > 0$ con le condizioni:

$$L_1 u := u(\mathbf{x}, 0) = \varphi_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega$$

$$L_2 u := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega, t>0} = \varphi_2 \ .$$

Tutti i problemi considerati sono *lineari*, poiché sia l'equazione che le condizioni supplementari sono lineari.

È comodo rappresentare sinteticamente l'equazione e le condizioni supplementari nella forma:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}u = \boldsymbol{\Phi} \tag{1.38}$$

dove $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ è un vettore di operatori e $\boldsymbol{\Phi}$ un vettore di funzioni:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_k \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} f \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

La linearità degli operatori $\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_k$ comporta la validità del *principio di sovrapposizione*: se u_1 è una soluzione corrispondente al dato (insieme di dati) $\boldsymbol{\Phi}_1$ e u_2 corrisponde a $\boldsymbol{\Phi}_2$, allora al dato $\alpha\boldsymbol{\Phi}_1 + \beta\boldsymbol{\Phi}_2$ (α, β costanti) corrisponderà la soluzione $\alpha u_1 + \beta u_2$:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\boldsymbol{\Phi}_1 + \beta\boldsymbol{\Phi}_2 \ . \tag{1.39}$$

Osserviamo in particolare che le soluzioni dell'equazione omogenea: $\mathcal{L}u = 0$ formano naturalmente uno spazio lineare (ma questa volta ad infinite dimensioni, in contrasto con il caso delle equazioni lineari ordinarie); le condizioni supplementari permettono di selezionare una (o alcune) di queste soluzioni.

La soluzione u sarà cercata in uno spazio lineare metrico X (da precisarsi di volta in volta, secondo il problema in esame); il dato $\boldsymbol{\Phi}$ sarà assegnato in uno spazio lineare metrico Y (*).

Lo studio del problema (1.38) è lo studio dell'applicazione

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}: X \to Y \ .$$

(*) Più precisamente: f sarà assegnato in uno spazio Y_0, φ_1 in $Y_1, \ldots, \varphi_k$ in Y_k; il vettore $\boldsymbol{\Phi}$ sarà allora un elemento dello spazio $Y = Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_k$.

I problemi principali da affrontare sono i seguenti.

i) *Unicità della soluzione*. Può accadere che, ad uno stesso dato Φ, corrispondano due (o più) soluzioni diverse u_1, u_2? Equivalentemente possiamo chiederci: l'applicazione $\mathcal{L}$ è iniettiva? Essendo il problema lineare, la domanda può riformularsi nella maniera seguente: il problema omogeneo: $\mathcal{L}v = 0$ ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla (che, ovviamente, possiede)? Infatti, se avvenisse che: $\mathcal{L}u_1 = \Phi$ e $\mathcal{L}u_2 = \Phi$ risulterebbe (per la (1.39)) $\mathcal{L}(u_1 - u_2) = 0$ e, se il problema omogeneo ammettesse solo la soluzione nulla, seguirebbe $u_1 = u_2$.

ii) *Esistenza di una soluzione*. Preso un dato $\Phi \in Y$, è certo che esista (almeno) un elemento $u \in X$ tale che $\mathcal{L}u = \Phi$? Equivalentemente: l'applicazione $\mathcal{L}$ è suriettiva? È conveniente, a questo proposito, spezzare il problema (1.38) in vari sottoproblemi, tenendo conto del principio di sovrapposizione. Infatti, se $v, w_1, w_2, \ldots, w_k$ sono soluzione dei seguenti problemi:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{L}\, v = f & \mathcal{L}\, w_1 = 0 & \mathcal{L}\, w_2 = 0 & \ldots \quad \mathcal{L}\, w_k = 0 \\
L_1 v = 0 & L_1 w_1 = \varphi_1 & L_1 w_2 = 0 & \qquad\quad L_1 w_k = 0 \\
L_2 v = 0 & L_2 w_1 = 0 & L_2 w_2 = \varphi_2 & \qquad\quad L_2 w_k = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \qquad\quad \vdots \\
L_k v = 0 & L_k w_1 = 0 & L_k w_2 = 0 & \qquad\quad L_k w_k = \varphi_k
\end{array}$$

allora $u = v + w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ è soluzione del problema (1.38). Come si vede, in ognuno dei sottoproblemi considerati, un solo dato per volta è preso diverso da zero: cosa che può semplificare, nelle applicazioni, la ricerca della soluzione.

Questa questione richiede, per essere affrontata, metodi avanzati di analisi funzionale. Tuttavia, in alcuni casi, si può pervenire alla soluzione con metodi elementari, alcuni dei quali saranno esaminati nei prossimi paragrafi.

iii) *Stabilità della soluzione*. Se due dati Φ_1 e Φ_2 sono tra loro "vicini" (nella metrica di Y) possiamo affermare che anche le corrispondenti soluzioni u_1 e u_2 sono vicine tra loro (nella metrica di X)? In altre parole, se una successione $\{\Phi_n\}$ converge a Φ in Y, la corrispondente successione delle soluzioni, $\{u_n\}$, converge a u (soluzione corrispondente a Φ) in X? La questione è importante soprattutto in vista del calcolo approssimato (numerico) della soluzione (tenuto conto che, nei casi concreti, quasi mai si riesce ad ottenere una espressione analitica "esplicita"); infatti i dati inseriti in un calcolatore sono approssimati (per via di errori di arrotondamento o di troncamento etc. ...), cioè sono "vicini" ai dati veri del problema. La questione che ci poniamo è se la soluzione fornita dal calcolatore possa ritenersi "vicina" (e quanto) alla soluzione vera.

iv) *Algoritmi numerici* per ottenere una rappresentazione approssimata della soluzione.

È chiaro che i punti i), ii), iii) (che costituiscono l'*analisi qualitativa* del problema) sono preliminari al iv) (che è di pertinenza dell'Analisi numerica).

Noi ci limiteremo, nei prossimi paragrafi, a brevi cenni sui punti i) e ii).

Ricordiamo che un problema che soddisfi ai requisiti di esistenza, unicità e stabilità della soluzione si dice *ben posto* secondo Hadamard. Mentre un tempo si

pensava che i problemi non ben posti occorressero sporadicamente nelle applicazioni, si riconosce oggi che un gran numero di problemi concreti (legati, per esempio, alla ricostruzione di immagini in base a segnali provenienti da sorgenti lontane, a ricerche geofisiche nel sottosuolo (ricerche petrolifere) etc. etc.) appartengono a questa categoria. Un esempio classico di problema mal posto è il problema di determinare la temperatura di un corpo ad un istante $t < 0$ conoscendone la temperatura "finale", cioè all'istante $t = 0$ (Esercizio 5).

1.6 Problemi di unicità

Esamineremo la questione dell'unicità della soluzione dei problemi descritti nel paragrafo 1.3. Considereremo perciò i corrispondenti problemi omogenei e ci domanderemo se essi ammettono soluzioni diverse dalla soluzione nulla.

Il metodo utilizzato è sostanzialmente lo stesso in tutti i casi; esso prende il nome di *metodo dell'integrale dell'energia*, per le ragioni che indicheremo. Tale metodo si applica sia a problemi ellittici, che parabolici e iperbolici ed è suscettibile di generalizzazioni che lo rendono utile anche in presenza di coefficienti variabili.

Problemi di Dirichlet e Neumann per l'equazione di Laplace

Consideriamo i problemi omogenei

$$(D)\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (N)\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Dobbiamo scegliere lo spazio X delle soluzioni. È naturale richiedere che una soluzione di (D) o di (N) sia una funzione u due volte differenziabile con continuità in Ω (aperto limitato di $\mathbb{R}^n$) e continua con derivate prime continue fin sul bordo (*); scegliamo cioè:

$$X = C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\,.$$

Sia ora $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ una soluzione del problema (D) oppure (N). Moltiplicando ambo i membri dell'equazione $\Delta u = 0$ per u e integrando su Ω abbiamo

$$\int_\Omega u \Delta u \, d\mathbf{x} = 0\,.$$

Osserviamo ora che (lo studente verifichi l'identità, applicando la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto):

(*) Per il problema (D) sarebbe naturale richiedere solo la continuità di u fin sul bordo; ma il metodo che utilizziamo richiede anche la continuità delle derivate prime.

$$\mathrm{div}(u\nabla u) = u\Delta u + \|\nabla u\|^2 \,. \tag{1.40}$$

Ricavando $u\Delta u$ dalla (1.40) ed inserendo l'espressione nell'equazione precedente otteniamo

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)d\mathbf{x} - \int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = 0 \,. \tag{1.41}$$

Per il teorema della divergenza (si assume qui che il dominio Ω sia ammissibile per il teorema della divergenza) risulta:

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u < \nabla u, \mathbf{n} > d\sigma = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale a $\partial\Omega$ rivolto verso l'esterno di Ω. Poiché, su $\partial\Omega$, risulta $u = 0$ (per il problema (D)) oppure $\partial u/\partial\mathbf{n} = 0$ (per il problema (N)), l'ultimo integrale scritto è nullo e perciò otteniamo, dalla (1.41),

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = 0 \,. \tag{1.42}$$

Questo integrale è detto *integrale dell'energia* (o anche integrale di Dirichlet) poiché, in molte applicazioni, esso rappresenta l'energia del sistema (per esempio, nell'interpretazione elastica esso rappresenta l'energia potenziale della membrana, nell'interpretazione elettrostatica esso rappresenta l'energia del campo elettrico ...).

Dalla (1.42), essendo la funzione integranda continua e non negativa, si ricava che deve essere $\nabla u = 0$ in Ω, cioè $u =$ costante. Allora, se u è soluzione del problema (D), si ricava che deve essere $u = 0$ (essendo u nulla su $\partial\Omega$); nel caso del problema (N) qualunque costante è accettabile.

Abbiamo così dimostrato il seguente

▪ **Teorema 1.2** - *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, per il quale valga il teorema della divergenza. Allora il problema omogeneo (D) ammette, in $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, la sola soluzione nulla; il problema omogeneo (N) ammette come soluzioni tutte le costanti. Il problema di Dirichlet (non omogeneo) ammette, al più, una sola soluzione; il problema di Neumann (non omogeneo), se ammette soluzione, questa non sarà unica, ma determinata a meno di una costante additiva arbitraria.*

Osservazione 1.4 - Con altri metodi si può dimostrare l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet in $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$.

Osservazione 1.5 - Per il problema di Neumann non omogeneo

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi \quad \text{su } \partial\Omega$$

osserviamo subito che, se i dati f e ψ sono assegnati in maniera arbitraria, la soluzione in generale non esiste; infatti, *condizione necessaria perché il problema abbia soluzione è che i dati f e ψ soddisfino la seguente condizione di compatibilità*

$$\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} \psi d\sigma \,. \tag{C}$$

Se $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ è una soluzione del problema, la (C) si trova integrando su Ω l'equazione $\Delta u = f$ ed osservando che:

$$\int_\Omega \Delta u\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\nabla u\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} < \nabla u, \mathbf{n} > d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \,.$$

Problemi di Cauchy–Dirichlet e Cauchy–Neumann per l'equazione di diffusione

Consideriamo i problemi omogenei:

$$(CD)\left\{\begin{array}{lll} u_t - \Delta u = 0 & \mathbf{x}\in\Omega, 0<t<\bar t & \\ u(\mathbf{x},0) = 0 & \mathbf{x}\in\Omega, & \\ u(\mathbf{x},t) = 0 & \mathbf{x}\in\partial\Omega, 0<t<\bar t & \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{ll} u_t - \Delta u = 0 & \\ u(\mathbf{x},0) = 0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0 & \end{array}\right\}(CN)$$

dove si è scritto Δ al posto di $\Delta_\mathbf{x}$ con il significato dei simboli già illustrato nel paragrafo (1.3); ora siamo interessati a conoscere la soluzione $u(\mathbf{x},t)$ in un intervallo di tempo $[0,\bar t]$ fissato ad arbitrio.

È naturale richiedere che: *la soluzione u sia due volte differenziabile con continuità rispetto alle variabili spaziali $\mathbf{x}$, una volta rispetto a t nel cilindro $\Omega\times(0,\bar t)$, che sia continua per $t = 0$ e sia continua con derivate (rispetto a $\mathbf{x}$ e t) continue fin sul bordo $\partial\Omega$, per ogni t.* Esprimeremo sinteticamente tutte queste proprietà scrivendo semplicemente: $u \in X_{\Omega,\bar t}$.

▪ **Teorema 1.3** - *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, per cui vale il teorema della divergenza e sia $\bar t > 0$. Allora i problemi (CD) e (CN) ammettono, in $X_{\Omega,\bar t}$, la sola soluzione nulla. I corrispondenti problemi non omogenei ammettono, al più, una sola soluzione.*

Dimostrazione - Sia $u \in X_{\Omega,\bar t}$ una soluzione di (CD) oppure di (CN). Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$ per u e integriamo su Ω in $d\mathbf{x}$; abbiamo:

$$\int_\Omega u\, u_t\, d\mathbf{x} - \int_\Omega u\Delta u\, d\mathbf{x} = 0 \,.$$

Applicando ancora la formula (1.40) otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)d\mathbf{x} + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} = 0 \tag{1.43}$$

(lo scambio dell'integrale in $d\mathbf{x}$ su Ω con la derivata rispetto a t è giustificato dal fatto che l'integranda u^2 e la sua derivata $2u\,u_t$ sono continue su $\overline{\Omega}$).

Il secondo integrale che compare a primo membro della (1.43) è nullo (si applica, come prima, il teorema della divergenza e si tiene conto delle condizioni al contorno); otteniamo perciò:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} \le 0\,. \tag{1.44}$$

Poniamo

$$H(t) = \int_\Omega u(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x}\,.$$

La funzione continua e derivabile $H(t)$ ha le seguenti proprietà:

i) $H(t) \ge 0 \quad \forall: 0 < t < \bar{t}$

ii) $H'(t) \le 0$ per la (1.44)

iii) $H(0) = 0$ per la condizione iniziale $u(\mathbf{x},0) = 0$.

Si conclude allora che deve essere $H(t) = 0 \quad \forall t$ e perciò $u(\mathbf{x},t) = 0 \quad \forall t$. □

Osservazione 1.6 - Come abbiamo visto, se i dati sono nulli in $[0,\bar{t})$, lo stesso avviene per la soluzione del problema; più in generale, se i dati sono nulli in $[0,t_1)$ con $t_1 < \bar{t}$, la soluzione sarà nulla fino al tempo t_1 (e, in seguito, potrà naturalmente essere diversa da zero). In altre parole, se assegnamo due diversi dati nell'intervallo $[0,\bar{t})$ i quali però sono uguali in $[0,t_1)$, possiamo affermare che le corrispondenti soluzioni coincidono in $[0,t_1)$ (e saranno poi, in generale, diverse). La soluzione, al tempo t, in un qualunque punto $\mathbf{x} \in \Omega$, viene influenzata dai dati assegnati precisamente fino al tempo t. Chiameremo *dominio di dipendenza* corrispondente al punto $(\mathbf{x},t)$ il tronco di cilindro $\Omega \times [0,t)$ (Fig. 7.5).

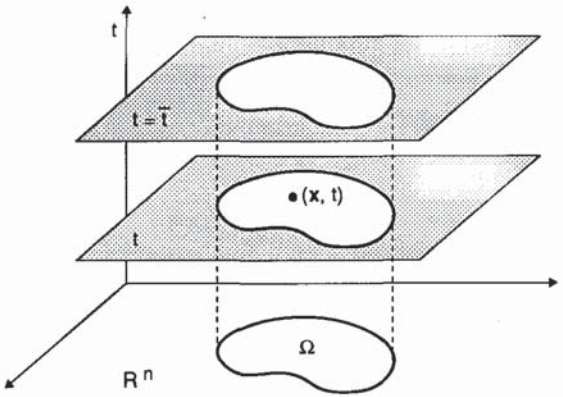


Fig. 7.5 Il valore di u in $(\mathbf{x},t)$ dipende dal valore del dato iniziale (per $t = 0$) e dal valore dei dati al contorno su $\partial\Omega \times (0,t)$.

Problema di Cauchy–Dirichlet e Cauchy–Neumann per l'equazione delle onde

Poiché in questo caso l'applicazione del metodo sopra illustrato è un po' più complicata che nei casi ellittico e parabolico, semplificheremo l'esposizione considerando solo due variabili indipendenti.

Consideriamo l'equazione omogenea:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } R = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < \bar{t}\}$$

(v costante) con condizioni iniziali omogenee

$$u(x,0) = 0\,,\ u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l$$

e condizioni al contorno omogenee

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 < t < \bar{t} \quad \text{(di tipo Dirichlet)}$$

oppure

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \qquad 0 < t < \bar{t} \quad \text{(di tipo Neumann)}$$

o anche di tipo misto, cioè di tipo Dirichlet ad un estremo e di tipo Neumann all'altro estremo.

Richiederemo che la soluzione u sia di classe $C^2(R)$ e di classe $C^1(\overline{R})$.

Preso un punto $(x,t) \in R$ tracciamo le due rette caratteristiche passanti per quel punto e consideriamo la regione (chiusa) Q illustrata nella figura 7.6 a) e b).

Sia γ la parte di ∂Q in comune con ∂R; in figura 7.6 a) γ è costituita di tre segmenti: $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, mentre in figura 7.6 b) γ è costituita di un solo segmento. Dimostreremo il seguente

■ **Teorema 1.4** - *Se i dati del problema (di Cauchy–Dirichlet oppure di Cauchy–Neumann oppure misto) sono nulli su γ, allora la soluzione è nulla in tutto Q.*

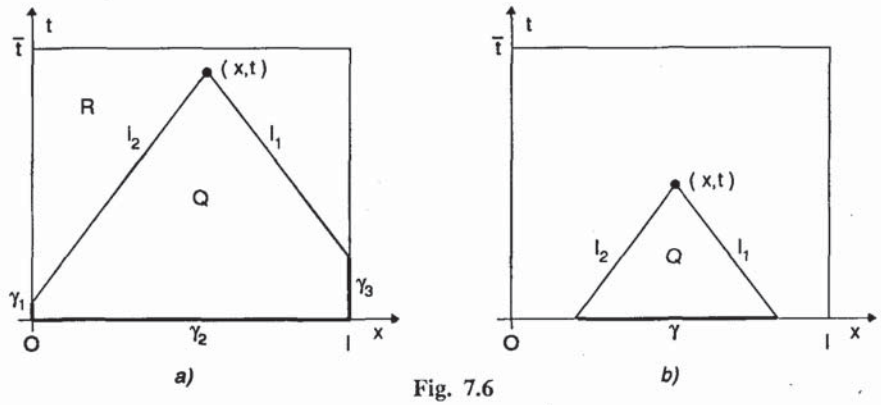


Fig. 7.6

Osservazione 1.7 - Il dominio Q viene detto *dominio di dipendenza* della soluzione (nel punto (x,t)) dai dati. Come si vede, in contrasto col caso parabolico, ora la soluzione nel punto (x,t) viene influenzata non da *tutti* i dati assegnati fino all'istante t, ma solo da alcuni, in dipendenza dalla posizione di x. Questa osservazione sarà ripresa e sviluppata più estesamente nel prossimo paragrafo.

Dimostrazione - Sia u una soluzione del problema; moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione: $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ per u_t e integriamo su Q in $dt\,dx$; otteniamo

$$\int_Q (u_t u_{tt} - v^2 u_t u_{xx}) dt\,dx = 0$$

che possiamo anche riscrivere nella seguente forma

$$\int_Q \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{v^2}{2}u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-v^2 u_t u_x\right)\right] dt\,dx = 0\,. \tag{1.45}$$

Il primo membro della (1.45) è del tipo:

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{V} dt\,dx$$

dove $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ con $V_1 = -v^2 u_t u_x$ e $V_2 = (u_t^2 + v^2 u_x^2)/2$ e $\operatorname{div}\mathbf{V} = \partial V_1/\partial x + \partial V_2/\partial t$. Applicando il teorema della divergenza, questo integrale diventa

$$\int_{\partial Q^+} < \mathbf{V}, \boldsymbol{N} > ds$$

essendo $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2)$ il versore normale (esterno) alla frontiera ∂Q.

Esaminando i vari pezzi di cui si compone la frontiera, e tenendo conto delle condizioni (iniziali o al contorno) si trova:

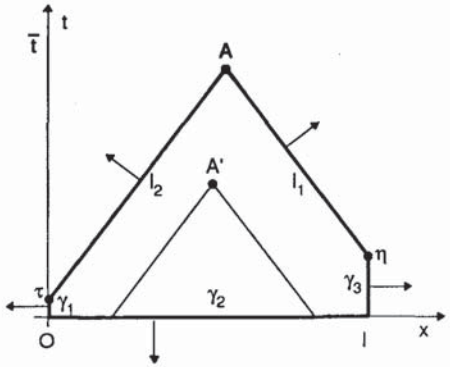


Fig. 7.7

$$\text{su } \gamma_1 : N_2 = 0, N_1 = -1 \text{ e perciò } \int_{\gamma_1} = \int_\tau^0 v^2 u_t(0,t) u_x(0,t) dt = 0$$

$$\text{su } \gamma_2 : N_1 = 0, N_2 = -1 \text{ e perciò } \int_{\gamma_2} = -\int_0^l \left(\frac{1}{2}u_t(x,0)^2 + \frac{v^2}{2}u_x(x,0)^2\right) dx = 0$$

$$\text{su } \gamma_3 : N_2 = 0, N_1 = 1 \text{ e perciò } \int_{\gamma_3} = -\int_0^\eta v^2 u_t(l,t) u_x(l,t) dt = 0\,.$$

Su l_1 risulta: $N_2 = vN_1$ mentre su l_2: $N_2 = -vN_1$; perciò abbiamo

$$\int_{l_1} + \int_{l_2} = \frac{N_2}{2}\left[\int_{l_1} (v\,u_x - u_t)^2 ds + \int_{l_2} (v\,u_x + u_t)^2 ds\right].$$

Dovendo questa espressione essere zero (per la (1.45)), ricaviamo

$$vu_x - u_t = 0 \text{ su } l_1 \qquad vu_x + u_t = 0 \text{ su } l_2\,. \tag{1.45'}$$

Queste relazioni, indicando con $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$ rispettivamente le direzioni definite dalle caratteristiche l_1 e l_2, si possono anche scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}_1} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}_2} = 0\,.$$

Risulta perciò che la funzione u si mantiene costante muovendosi lungo le direzioni caratteristiche. Supponiamo ora che i dati al contorno siano di tipo Dirichlet; allora la funzione u risulta nulla sul bordo γ, e perciò si manterrà nulla in tutta la regione Q i cui punti $(A, A', \ldots)$ risultano all'incrocio delle caratteristiche provenienti dal bordo γ.

Supponiamo invece che i dati al contorno siano di tipo Neumann, cioè sia $u_x = 0$ su γ_1 e su γ_3. Poiché su *ogni* caratteristica che parte da γ_1 o da γ_3 devono valere le (1.45'), risulterà, in ogni punto di γ_1, $u_t = -vu_x$ e in ogni punto di γ_3 $u_t = vu_x$ e cioè $u_t = 0$ su $\gamma_1 \cup \gamma_3$; ciò implica che u è costante lungo γ_1 e γ_3; ma, essendo nulla su γ_2 (in particolare per $x = 0$ e $x = l$) risulta $u = 0$ su γ_1 e γ_3; e la conclusione segue come nel caso di Dirichlet. □

1.7 Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cerchio. Proprietà delle funzioni armoniche

Occupiamoci ora della questione dell'esistenza delle soluzioni. Affronteremo il problema cercando, con metodi elementari, di procurarci una rappresentazione analitica della soluzione. Naturalmente ciò sarà possibile solo in casi speciali. Tuttavia in questi casi rientrano molti problemi di interesse fisico.

Considereremo intanto equazioni omogenee e utilizzeremo il principio di sovrapposizione; la strategia consiste nel procurarci un gran numero (infinite!) di soluzioni particolari dell'equazione omogenea; allora ogni combinazione di queste è ancora una soluzione; cercheremo quella combinazione che soddisfa anche le condizioni supplementari del problema.

Le soluzioni particolari cercate sono funzioni a variabili separate: il metodo è detto perciò di *separazione delle variabili*. Illustriamolo su di un esempio.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \Omega := \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\} \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.46}$$

Cerchiamo una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$; sappiamo che (Osservazione 1.4) se una tale soluzione esiste, è unica.

È naturale introdurre coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. L'equazione di Laplace, in queste coordinate, si scrive

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \ . \tag{1.47}$$

La funzione $u = u(r,\theta)$ deve essere di classe C^2 per $r < 1$, continua in $r \le 1$ e tale che

$$u(1,\theta) = \varphi(\theta) \ . \tag{1.48}$$

La funzione $\varphi(\theta)$ è una assegnata funzione di classe C^1 e 2π–periodica; anche la soluzione u deve essere 2π–periodica in θ.

Cerchiamo soluzioni della (1.47) a variabili separate, cioè della forma: $R(r)\Theta(\theta)$; sostituendo questa espressione nella (1.47) abbiamo

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \ .$$

Moltiplichiamo per r^2 e dividiamo per $R\Theta$; otteniamo

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \ . \tag{1.49}$$

Il primo membro della (1.49) è funzione della sola r, il secondo della sola θ; dovendo l'uguaglianza sussistere per ogni r e θ, significa che entrambe queste espressioni sono uguali alla medesima costante λ:

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} = \lambda \ , \ -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \ .$$

La separazione delle variabili ha ricondotto una equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti a due equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo l'equazione in Θ; cerchiamo soluzioni 2π–periodiche; abbiamo perciò il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta &= 0 \qquad \text{in } (-\pi,\pi) \\ \Theta(-\pi) &= \Theta(\pi) \\ \Theta'(-\pi) &= \Theta'(\pi) \ . \end{cases} \tag{1.50}$$

Questo problema (o meglio, uno del tutto simile) è stato discusso nell'esempio 2.14, capitolo 4; si è trovato che esso ammette soluzioni se e solo se $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). In corrispondenza a questi autovalori, abbiamo le autosoluzioni $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$ (due autofunzioni corrispondono ad ogni autovalore, eccettuato l'autovalore $\lambda = 0$).

Consideriamo ora l'equazione in R; essa si scrive

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \ .$$

È un'equazione del tipo di Eulero (par. 2.5, Cap. 4); due integrali indipendenti sono dati da: r^n e r^{-n} se $n \neq 0$, 1 e $\log r$ se $n = 0$. Poichè cerchiamo soluzioni continue nel cerchio $r \le 1$, scartiamo le soluzioni r^{-n} e $\log r$. Otteniamo infine le seguenti soluzioni della (1.47) a variabili separate:

$$r^n\cos n\theta \ , \ r^n\sin n\theta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Queste funzioni sono dette *armoniche elementari* nel piano. Ogni combinazione lineare di esse è ancora una funzione armonica; cerchiamo allora di risolvere il problema (1.47), (1.48) con una serie

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nr^n\cos n\theta + b_nr^n\sin n\theta) \ . \tag{1.51}$$

Ponendo $r = 1$, la condizione (1.48) impone che i coefficienti a_n e b_n siano scelti in modo che risulti

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$$

cioè a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier del dato $\varphi(\theta)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\,d\theta \ . \end{aligned} \tag{1.52}$$

Dobbiamo ora verificare che la funzione data dalla (1.51) sia effettivamente la soluzione del nostro problema; dobbiamo verificare cioè che la serie converge, la sua somma appartiene a $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, è una funzione armonica in Ω e assume il valore φ su $\partial\Omega$.

Sia $c = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(\theta)|d\theta$; allora $|a_n| \le c$, $|b_n| \le c$; perciò la serie per u è maggiorata dalla serie $c\sum r^n$. Analogamente si trova che le serie per u_r e u_θ sono maggiorate dalla serie $c\sum n\,r^{n-1}$ e le serie per le derivate seconde sono maggiorate da $2c\sum n^2r^{n-2}$. Tutte queste serie convergono uniformemente per $r \le r_0$, per ogni $r_0 < 1$. Perciò u è di classe C^2 per $r < 1$ e un semplice calcolo, che si esegue derivando termine a termine le serie, mostra che u è armonica.

Osservazione 1.7 - Calcolando anche le serie per le derivate successive alle seconde si trova che esse sono tutte uniformemente convergenti per $r \le r_0 < 1$ e perciò u è addirittura di classe C^∞ nel cerchio $r < 1$.

Esaminiamo infine la serie per u nel cerchio chiuso $r \leq 1$. Poiché φ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, la serie dei suoi coefficienti è assolutamente convergente: $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n| < \infty$; allora anche la serie per u è uniformemente convergente per $r \leq 1$; $u(r,\theta)$ è continua per $r \leq 1$ e assume con continuità il dato $\varphi(\theta)$ per $r = 1$. La funzione rappresentata dalla (1.15) è dunque la soluzione del problema (1.47), (1.48).

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema

▪ **Teorema 1.5** - *Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, 2π–periodica. La funzione rappresentata per serie dalle* (1.51), (1.52) *appartiene a $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ed è (l'unica) soluzione del problema* (1.47), (1.48).

Formula di Poisson

Possiamo rappresentare la soluzione nel cerchio $r < 1$ mediante un integrale invece che per serie. Si sostituiscano le espressioni (1.52) per i coefficienti nella (1.51) e si scambi la serie con gli integrali (scambio giustificato dalla uniforme convergenza delle serie); si ottiene:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta')d\theta' + \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta')[\cos n\theta \cos n\theta' + \sin n\theta \sin n\theta']d\theta' = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta')\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta-\theta')\right]d\theta' . \end{aligned}$$

Sommiamo la serie entro parentesi quadra:

$$\begin{aligned} [\cdots] &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta-\theta')} = -\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}[r\,e^{i(\theta-\theta')}]^n = \\ &= -\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-r\,e^{i(\theta-\theta')}} = \frac{1-r^2}{2(r^2+1-2r\cos(\theta-\theta'))} \qquad (r<1) . \end{aligned}$$

Abbiamo così

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\theta')d\theta'}{1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')} \qquad (r<1) . \tag{1.53}$$

La (1.53) è detta *formula di Poisson*.

I risultati precedenti restano validi *nella ipotesi che φ sia continua* (invece che di classe C^1). Si dimostra infatti che: *la soluzione $u(r,\theta)$ definita per $r < 1$, dalla serie* (1.51) *o dall'integrale* (1.53) *e, per $r = 1$, da $u(r,\theta) = \varphi(\theta)$, è continua per $r \leq 1$.*

Principio della media

La soluzione del problema in un cerchio di raggio R si ottiene dalla precedente con un cambio di scala: $\overline{r} = r/R$. Si ottiene la formula seguente:

$$u(r,\theta) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\theta')d\theta'}{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\theta')} \qquad (r<R) . \tag{1.54}$$

Ponendo $r = 0$ nella (1.54) si trova

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta')d\theta'$$

cioè, *il valore di u nel centro di ogni cerchio entro il quale essa è armonica è uguale alla media dei valori che essa prende sul bordo.*

Un'altra proprietà delle funzioni armoniche, che può facilmente derivarsi dalla precedente, o può essere dimostrata direttamente, è il

Principio del massimo

Se u è armonica in Ω e continua in $\overline{\Omega}$, il massimo e il minimo di u sono raggiunti su $\partial\Omega$ (non in Ω, a meno che u sia costante).

Ricordiamo infine un'ultima proprietà delle funzioni armoniche, che ha relazione con l'argomento trattato nella prossima sezione.

Principio di Dirichlet

Sia V l'insieme delle funzioni $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che assumono sul bordo $\partial\Omega$ lo stesso dato φ:

$$V: \{v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}): v|_{\partial\Omega} = \varphi\} .$$

In V esiste una (sola) funzione armonica (noi abbiamo precedentemente dimostrato questa affermazione nel caso che Ω sia un cerchio; l'affermazione è vera in generale, purché la frontiera di Ω sia "non troppo singolare"). Il principio di Dirichlet stabilisce che: *l'integrale di Dirichlet*

$$\int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx\,dy$$

al variare di $v \in V$, assume il valore minimo quando v è armonica.

1.8 Problema di Cauchy–Dirichlet per l'equazione del calore

Applichiamo la separazione delle variabili al seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - k\,u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & \\ u(l,t) = 0 & \\ u(x,0) = h(x) & h(0) = h(l) = 0 \end{cases} \tag{1.55}$$

L'incognita u rappresenta la temperatura di una sbarra omogenea, con coefficiente di diffusione $k > 0$, i cui estremi, posti in $x = 0$ e $x = l$, sono costantemente tenuti a temperatura zero; al tempo iniziale $t = 0$, la temperatura della sbarra è $h(x)$ e poiché agli estremi la temperatura è nulla, dovrà essere $h(0) = h(l) = 0$. Supponiamo inoltre $h \in C^1([0,l])$.

Cerchiamo soluzioni particolari dell'equazione nella forma $T(t)X(x)$; otteniamo l'equazione

$$T'X - kTX'' = 0\ , \quad \text{cioè} \quad \frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X}$$

che si separa nelle due equazioni ordinarie

$$T' + \lambda T = 0 \tag{1.56}$$

$$kX'' + \lambda X = 0 \tag{1.57}$$

con λ costante.

Cerchiamo, già nella scelta delle soluzioni particolari, di soddisfare a qualche condizione supplementare, per esempio, alle condizioni al contorno; queste infatti sono omogenee; perciò, sopvrapponendo soluzioni particolari che soddisfano a tali condizioni troveremo altre soluzioni che pure soddisfano alle stesse condizioni. Cerchiamo dunque X in modo che risulti:

$$X(0) = X(l) = 0\ . \tag{1.58}$$

Il problema ai limiti (1.57), (1.58) ha gli autovalori

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2 k}{l^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e le corrispondenti autofunzioni sono $\sin(n\pi x/l)$.

L'equazione (1.56) ha allora le soluzioni $\exp(-n^2\pi^2 kt/l^2)$. Abbiamo così trovato le seguenti soluzioni particolari dell'equazione del calore

$$\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\ .$$

Cerchiamo una soluzione del problema (1.55) nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\ . \tag{1.59}$$

Poiché le soluzioni particolari trovate già soddisfano le condizioni al contorno, basterà soddisfare la condizione iniziale, che si scrive

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\ . \tag{1.60}$$

Questa condizione determina i coefficienti b_n, i quali devono essere i coefficienti di Fourier di h nello sviluppo in soli seni ($h(x)$ viene prolungata dispari in $(-l, +l)$ e quindi estesa per periodicità a tutta la retta; grazie alle condizioni di annullamento

in 0 e l, essendo inizialmente di classe $C^1([0,l])$ risulterà, così prolungata, di classe $C^1(\mathbb{R})$):

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\ . \tag{1.61}$$

Dobbiamo ora verificare che la funzione $u(x,t)$, rappresentata dalla (1.59), effettivamente è la soluzione del problema (1.55), cioè possiede tutte le proprietà di regolarità richieste.

Posto $c = 2/l\int_0^l |h(x)|dx$, risulta $|b_n| \le c\,\forall n$. Perciò la serie (1.59) è dominata dalla serie $\sum c\exp(-n^2\pi^2 k\,t/l^2)$, la quale converge $\forall t > 0$, uniformemente in x e t per $t \ge t_0 > 0$; lo stesso vale dunque per la serie in (1.59).

La serie che si ottiene derivando termine a termine la serie per u rispetto a t è dominata da $\sum c\exp(-n^2\pi^2 kt/l^2)k\pi^2 n^2/l^2$, che ancora converge uniformemente per $t \ge t_0 > 0$. Perciò u_t esiste per ogni $t > 0$ e può ottenersi per derivazione della serie di u termine a termine. Analogamente convergono uniformemente, sempre per $t \ge t_0 > 0$ le serie per u_x e u_{xx} e perciò *la funzione u è continua con le derivate u_t, u_x e u_{xx} continue nella regione* $0 \le x \le l, t > 0$; un calcolo diretto mostra che *essa soddisfa l'equazione*: $u_t - ku_{xx} = 0$; inoltre *essa soddisfa le condizioni al contorno.*

Rimane da vedere se la u è continua per $t = 0$. Essendo $h \in C^1(\mathbb{R})$, la serie dei coefficienti di Fourier di h converge assolutamente. Poiché, per $t \ge 0$, $0 < \exp(-n^2\pi^2 kt/l^2) \le 1$ la serie (1.59) pure converge uniformemente per $t \ge 0$. Perciò la funzione $u(x,t)$ rappresentata dalla (1.59) *è continua anche per $t = 0$ ed assume con continuità il dato $h(x)$.*

Osservazione 1.8 - È facile vedere che, derivando ripetutamente termine a termine rispetto a t e rispetto a x la serie (1.59) la soluzione u del problema è di classe C^∞ per $0 < x < l$, $t > 0$. Inoltre il risultato di esistenza sopra stabilito sussiste anche con h continua (invece che C^1). Il processo di diffusione del calore è perciò un processo *regolarizzante*, cioè, per quanto bassa sia la regolarità del dato iniziale, immediatamente, ad un istante $t > 0$, la temperatura è diventata una funzione infinitamente differenziabile. Questa proprietà è analoga a quella notata per le funzioni armoniche (Osservazione 1.7).

1.9 Problema della corda vibrante con estremi fissi

Consideriamo il problema

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \qquad \text{in } 0 < x < l, t > 0 \qquad (\text{oppure } t < 0) \tag{1.62}$$

$$\begin{cases} u\ (x,0) & = h(x) \\ u_t(x,0) & = k(x) \end{cases} \qquad \text{per } 0 \le x \le l \tag{1.63}$$

$$\begin{cases} u\ (0,t) & = 0 \\ u\ (l,t) & = 0\ . \end{cases} \qquad \text{per } t \ge 0 \qquad (\text{oppure } t \le 0) \tag{1.64}$$

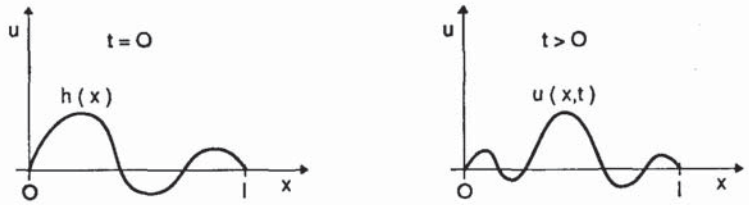


Fig. 7.8

essendo v una costante positiva. La soluzione $u(x,t)$ di questo problema descrive il moto di una corda omogenea, non soggetta ad alcuna forza esterna (eq. (1.62)) la quale, inizialmente, aveva la configurazione indicata dalla funzione $h(x)$ e la velocità dei suoi punti data dalla funzione $k(x)$ (eq. (1.63)); i capi della corda in $x = 0$ e $x = l$, sono mantenuti fermi, a quota 0, in ogni istante (eq. (1.64)) (fig. 7.8). Dovremo perciò assumere, conseguentemente

$$h(0) = h(l) = k(0) = k(l) = 0 \ . \tag{1.65}$$

Possiamo, anche a questo problema, applicare il metodo di separazione delle variabili. Preferiamo però applicare un altro metodo, più diretto, detto *metodo di riflessione*. Teniamo conto del fatto che, per l'equazione (1.62), noi conosciamo la forma dell'integrale generale (eq. (1.63)), che è dato da

$$u(x,t) = \varphi(x + vt) + \psi(x - vt) \tag{1.66}$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie.

Cerchiamo allora di determinare le funzioni φ e ψ in modo da soddisfare alle condizioni iniziali e al contorno.

Problema di Cauchy. Formula di D'Alembert.

Esaminiamo prima il caso ideale di una corda infinitamente lunga; consideriamo cioè il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (\text{oppure } t < 0) \\ u(x,0) \ = h(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = k(x) & x \in \mathbb{R} \ . \end{cases} \tag{1.67}$$

Dall'espressione (1.66), imponendo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) & = h(x) \\ v\varphi'(x) - v\psi'(x) & = k(x) \ . \end{cases} \tag{1.68}$$

Differenziamo la prima di queste equazioni, moltiplichiamola per v e sommiamola alla seconda; otteniamo

$$2v\varphi'(x) = vh'(x) + k(x) \ .$$

Integrando (e indicando con ξ l'argomento di φ) abbiamo

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}h(\xi) + \frac{1}{2v}\int_0^{\xi} k(\tau)d\tau + c$$

con c costante arbitraria. Dalla prima delle (1.68) ricaviamo allora (indicando con η l'argomento di ψ)

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}h(\eta) - \frac{1}{2v}\int_0^{\eta} k(\tau)d\tau - c \ .$$

Abbiamo infine

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x + vt) + \psi(x - vt) = \\ &= \frac{1}{2}[h(x + vt) + h(x - vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} k(\tau)d\tau \ . \end{aligned} \tag{1.69}$$

La (1.69) si chiama *formula di D'Alembert*. Vale la seguente proposizione, la cui dimostrazione è immediata.

Proposizione 1.6 - *Se $h \in C^2(\mathbb{R})$ e $k \in C^1(\mathbb{R})$, la funzione u data dalla* (1.69) *è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ ed è soluzione del problema* (1.67).

Notiamo che la soluzione u, nel punto (x,t), si costruisce utilizzando soltanto i dati contenuti nel segmento $[x - vt, x + vt]$; più precisamente, del dato iniziale h vengono utilizzati solo i valori negli estremi $x - vt$ e $x + vt$, mentre del dato k vengono utilizzati tutti i valori dell'intervallo $[x - vt, x + vt]$. Una variazione dei dati nel punto $\overline{x} > x$ comincerà a farsi sentire nel punto x a partire dal tempo $\overline{t} = (\overline{x} - x)/v$ (fig. 7.9); l'equazione perciò descrive il propagarsi di perturbazioni con velocità v.

Torniamo ora al problema della corda con estremi fissi. La soluzione u è cercata nella striscia $0 < x < l, t > 0$. Nella regione triangolare

$$T = \{t \le x/v \ , \ t \le (l - x)/v \ , \ t \ge 0\}$$

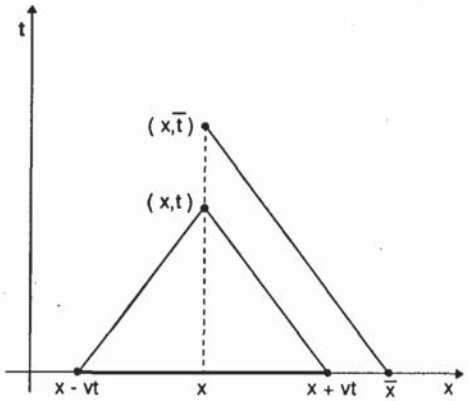


Fig. 7.9

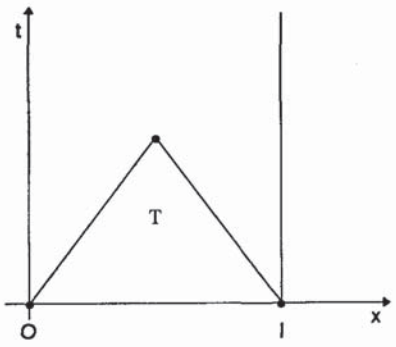


Fig. 7.10

illustrata in figura 7.10 la soluzione è rappresentata dalla formula di D'Alembert (1.69); infatti nel triangolo T la soluzione del problema è univocamente determinata dai dati iniziali $h(x)$ e $k(x)$ ed è indipendente dalle condizioni al contorno.

Per avere la soluzione nei punti della striscia non appartenenti a T cerchiamo di prolungare artificialmente i dati h e k, assegnati solo nell'intervallo $[0, l]$, a tutta la retta, in modo tale che la funzione fornita dalla formula di D'Alembert, ristretta alla striscia $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, automaticamente soddisfi le condizioni al bordo.

Cominciamo col prolungare h e k all'intervallo $[-l, l]$ come funzioni dispari ed estendiamole poi a tutta la retta come funzioni $2l$–periodiche (e dispari); indichiamo con $\widetilde{h}$ e $\widetilde{k}$ i prolungamenti di h e k così ottenuti.

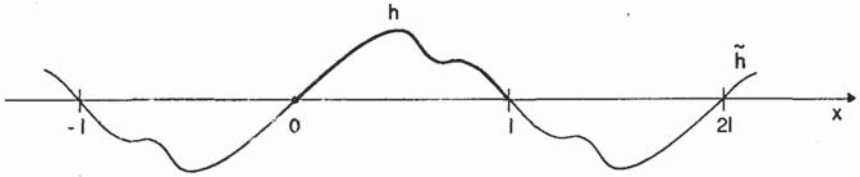


Fig. 7.11

Consideriamo ora la formula (1.69) con $\widetilde{h}$ e $\widetilde{k}$ al posto di h e k. La funzione u è tale che:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{h}(vt) + \widetilde{h}(-vt)] + \frac{1}{2v}\int_{-vt}^{vt} \widetilde{k}(\tau)d\tau = 0 \qquad \forall t$$

essendo $\widetilde{h}$ e $\widetilde{k}$ dispari, e

$$u(l,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{h}(l+vt) + \widetilde{h}(l-vt)] + \frac{1}{2v}\int_{l-vt}^{l+vt} \widetilde{k}(\tau)d\tau = 0 \qquad \forall t$$

poiché

$$\widetilde{h}(l-vt) = \widetilde{h}(-l-vt) = -\widetilde{h}(l+vt)$$

e

$$\int_{l-vt}^{l+vt} \widetilde{k}(\tau)d\tau = \int_{-vt}^{vt} \widetilde{k}(\tau)d\tau = 0 \ .$$

Perciò le condizioni al contorno sono verificate. Le condizioni iniziali sono pure manifestamente verificate. Rimane da verificare l'equazione; come sappiamo dalla Proposizione 1.6 questa è verificata purché $\widetilde{h} \in C^2(\mathbb{R})$ e $\widetilde{k} \in C^1(\mathbb{R})$. Le condizioni perché ciò avvenga sono:

$$\begin{array}{ll} h \in C^2((0,l)) & k \in C^1((0,l)) \\ h \in C^0([0,l]) & k \in C^0([0,l]) \\ h(0) = h(l) = 0 & k(0) = k(l) = 0 \\ h'(0+), h'(l-) \text{ esistono finiti} & k'(0+), k'(l-) \text{ esistono finiti} \\ h''(0+), h''(l-) \text{ esistono finiti} & \\ h''(0+) = h''(l-) = 0 \ . & \end{array} \tag{1.70}$$

Abbiamo perciò il seguente

■ **Teorema 1.7** - *Siano h e k funzioni assegnate in $[0, l]$ soddisfacenti le condizioni* (1.70). *Siano $\widetilde{h}$ e $\widetilde{k}$ i prolungamenti dispari e $2l$–periodici di h e k a tutta la retta. Allora la funzione u rappresentata dalla* (1.69) *con $\widetilde{h}$ e $\widetilde{k}$ al posto di h e k è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$; la sua restrizione alla striscia $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ (oppure $t \leq 0$) è (l'unica) soluzione del problema* (1.62), (1.63), (1.64).

Esercizi

1. Classificare le seguenti equazioni a coefficienti costanti e trovare la famiglia delle caratteristiche (se esitono):

i) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$
iii) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

2. Indicare, per ognuna delle seguenti equazioni, le regioni del piano (x, y) in cui è ellittica, parabolica, iperbolica; trovare le linee caratteristiche

i) $x\,u_{xx} - (x+y)u_{xy} + y\,u_{yy} = 0$
ii) $4u_{xx} - 4\sin x\ u_{xy} - (\cos x)^2 u_{yy} = 0$
iii) $u_{xx} - 3xu_{xy} - 4x^2 u_{yy} = 0$
iv) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

3. *Riduzione a forma canonica*

Diamo esplicitamente le trasformazioni di variabili che riducono una equazione in *due variabili* indipendenti, a *coefficienti costanti*, alla forma canonica. L'allievo è invitato a verificare la validità della seguente tabella

Equazione $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} +$ + (termini di ordine inferiore) $= 0$	Iperbolica	Parabolica	Ellittica
Segno di $ac - b^2$	$-$	0	$+$
Famiglia/e di linee caratteristiche	2 $\begin{cases} ay + (-b + \sqrt{b^2 - ac})x = \text{cost} \\ ay + (-b - \sqrt{b^2 - ac})x = \text{cost} \end{cases}$ se $a = 0$ $\begin{cases} x = \text{costante} \\ 2by - cx = \text{costante} \end{cases}$	1 $ay - bx = \text{cost}$. se $a = b = 0$ $x = \text{costante}$	0
Trasformazione di variabili	(1) $\begin{cases} \xi = ay + (-b + \sqrt{b^2 - ac})x \\ \eta = ay + (-b - \sqrt{b^2 - ac})x \end{cases}$ se $a = 0$ $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 2by - cx \end{cases}$ oppure (2) $\begin{cases} \xi = (ay - bx)/\sqrt{b^2 - ac} \\ \eta = x \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = ay - bx \\ \eta = x \end{cases}$ se $a = b = 0$: $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = \dfrac{ay - bx}{\sqrt{ac - b^2}} \\ \eta = x \end{cases}$
Forma standard	$u_{\xi\eta} + \cdots = 0$ oppure $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \cdots = 0$	$u_{\eta\eta} + \cdots = 0$	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} +$ $+ \cdots = 0$
Integrale generale dell'equazione con i soli termini principali: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$	$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$ dove ξ, η sono date dalle (1) e φ, ψ sono funzioni arbitrarie	$u = \varphi(\xi) + \eta\psi(\xi)$	$u =$ parte reale (o immaginaria) di una qualunque funzione analitica

Ridurre in forma canonica e trovare l'integrale generale delle equazioni dell'esercizio 1.

4. Se i coefficienti dell'equazione non sono costanti, ma le variabili indipendenti sono *due*, è ancora possibile trovare una trasformazione di coordinate (non lineare!) che riduca l'equazione in forma canonica in tutta una regione. Il caso più interessante si ha quando l'equazione, che scriviamo nella forma

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \cdots = 0 \qquad (*)$$

è iperbolica nella regione R del piano (x, y), cioè quando $b^2 - ac > 0$ in R. Allora siano:

$$\phi(x,y) = \text{ costante }, \ \psi(x,y) = \text{ costante}$$

le due famiglie di linee caratteristiche. Allora la trasformazione di variabili

$$\xi = \phi(x,y) \ , \ \eta = \psi(x,y)$$

porta la $(*)$ nella forma standard del tipo:

$$u_{\xi\eta} + \cdots = 0$$

Lo studente dimostri la precedente affermazione, operando una generica trasformazione di variabili: $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ ed imponendo che, nell'equazione trasformata, i coefficienti delle derivate seconde $u_{\xi\xi}$ e $u_{\eta\eta}$ siano nulli.

Riduca poi in forma canonica qualcuna delle equazioni dell'esercizio 2., nelle regioni in cui queste sono iperboliche.

5. *Problema retrogrado per l'equazione del calore*

Si consideri la famiglia di problemi:

$$u_t - k\,u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < 1 \ , \ -1 < t < 0$$

$$u(x,0) = f_n(x) \qquad \text{con } f_n(x) = e^{-n}\sin(n\pi x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ .$$

a) Trovare, col metodo di separazione delle variabili, una soluzione (per ogni n) e calcolare questa soluzione per $t = -1$.

b) Mostrare che, quando $n \to +\infty$, $f_n \to 0$ mentre $u_n(x,-1)$ diverge in *ogni* metrica lagrangiana.

c) Interpretare fisicamente il problema e il risultato.

6. *Problema di Dirichlet nel rettangolo*

a) Col metodo di separazione delle variabili trovare una soluzione del seguente problema:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } R = \{0 < x > \pi \ , \ 0 < y < l\}$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,l) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

[Soluzione: $u(x,y) = \sum_1^\infty b_n \dfrac{\operatorname{Sh} n(l-y)}{\operatorname{Sh} nl} \sin nx$ con $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx\,dx$]

b) Usando il principio di sovrapposizione, risolvere il problema più generale

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{in } R \\ &u(x,0) = \varphi_1(x) \\ &u(\pi,y) = \varphi_2(x) \\ &u(x,l) = \varphi_3(x) \\ &u(0,y) = \varphi_4(y) \end{aligned}$$

c) Precisare condizioni sufficienti su φ (per il problema a)) e su $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (per il problema b)) perché la funzione u trovata col metodo di separazione delle variabili sia effettivamente di classe $C^2(R) \cap C^0(\overline{R})$.

7. *Problema di Neumann nel rettangolo*
Risolvere il problema:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{in } R \text{ (rettangolo dell'esercizio 6.)}$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,l) = 0$$
$$u_y(x,0) = \psi(x)$$

con $\int_0^\pi \psi(x)dx = 0$

[Soluzione: $u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \frac{\operatorname{Ch} n(l-y)}{n \operatorname{Sh} nl} \cos nx$ con a_0 arbitrario e

$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\cos nx\, dx$ per $n = 1, 2, \ldots$]

Osservare che, se la condizione integrale sul dato ψ non è soddisfatta, il problema non ha soluzione; se è soddisfatta, la soluzione non è unica, in accordo con l'osservazione 1.5. Indicare una condizione sufficiente su ψ perché la funzione u sopra rappresentata per serie sia effettivamente di classe $C^2(R) \cap C^1(\overline{R})$.

8. Risolvere il problema (*problema misto*)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{in } R \text{ (rettangolo dell'esercizio 6.)}$$
$$u\ (0,y) = u_x(\pi,y) = 0$$
$$u\ (x,0) = \sin(x/2)$$
$$u_y(x,l) = 0$$

[Soluzione: $u(x,y) = \sin\frac{x}{2}\,\frac{\operatorname{Ch}(l-y)/2}{\operatorname{Ch} l/2}$]

9. Risolvere il problema

$$u_t - u_{xx} + au = 0 \qquad 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = x(\pi - x)$$

[Soluzione:

$$u(x,t) = 8\sum_1^\infty \left[\frac{4}{\pi}(2n-1)^{-3} + (-1)^n(2n-1)^{-2}\right] e^{-[(2n-1)^2+4a]t/4} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\Bigg]$$

10. Risolvere il problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{nel cerchio: } r < 1$$
$$u(1,\theta) = (\cos\theta)^2$$

[Suggerimento: senza far lunghi calcoli, ricordando che le funzioni: $r^n \cos n\theta$ e $r^n \sin n\theta$ sono armoniche nel piano, e osservando che $(\cos\theta)^2 = \cos 2\theta/2 + 1/2$, si trova subito $u(r,\theta) = 1/2 + r^2\cos 2\theta/2$]

11. In maniera analoga alla precedente, risolvere i problemi:

$a)\Delta u \quad = 0 \quad$ nel cerchio: $r < 1$

$$u(1,\theta) = (\sin\theta)^3$$

$b)\Delta u = 0 \quad$ nel cerchio: $x^2 + y^2 < 4$

$$u = x^4 \quad \text{sulla circonferenza: } x^2 + y^2 = 4\,.$$

12. Per risolvere il problema

$$\Delta u = 4 \quad \text{in } r < 1$$
$$u(1,\theta) = \sin\theta$$

conviene trovare prima una soluzione particolare dell'equazione $\Delta u = 4$, per esempio, $v = x^2 + y^2 = r^2$. Se questa soluzione soddisfacesse la condizione al contorno, sarebbe la soluzione del nostro problema. Diversamente, si ponga $u = w + v$ e si cerchi w tale che:

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } r < 1$$

$$w(1,\theta) = u(1,\theta) - v(1,\theta), \text{ cioè } w(1,\theta) = \sin\theta - 1\,.$$

Si trova $w(r,\theta) = -1 + r\sin\theta$. Allora $u = r^2 - 1 + r\sin\theta$ è la soluzione del problema iniziale.

In maniera analoga risolvere i problemi

a) $\Delta u = 2 \quad$ in $r < 1$
$u(1,\theta) = (\cos\theta)^2$
[Soluzione: $u = r^2(\cos\theta)^2 = x^2$]

13. Risolvere, con separazione di variabili, il problema:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = 0$$

[Soluzione: $u(x,t) = \sum_1^\infty b_n \cos nvt \sin nx$ con $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx$]

14.* Risolvere, con separazione di variabili, il problema:

$$u_{tt} + 2au_t + bu - v^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

[Soluzione: $u(x,t) = \sum_1^\infty b_n T_n(t)\sin nx$ con

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\, dx$$

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at}(a^2 - b - n^2v^2)^{-1/2}\,\mathrm{Sh}(a^2 - b - n^2v^2)^{1/2}t & \text{se } n^2v^2 < a^2 - b \\ t\,e^{-at} & \text{se } n^2v^2 = a^2 - b \\ e^{-at}(n^2v^2 + b - a^2)^{-1/2}\sin(n^2v^2 + b - a^2)^{1/2}t & \text{se } n^2v^2 > a^2 - b] \end{cases}$$

L'equazione considerata è detta: *equazione dei telegrafi*; essa descrive la trasmissione di impulsi elettrici in un cavo con capacità, induttanza e resistenza distribuite.

2. ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

La mitologia attribuisce alla regina Didone la soluzione del seguente problema: *determinare la figura piana con perimetro assegnato e di area massima.*

Si tratta di un tipico problema di Calcolo delle Variazioni (in breve CdV), una branca della matematica che si inserisce nella teoria dell'ottimizzazione e che costituisce oggi parte dell'Analisi Funzionale. L'oggetto matematico da ottimizzare non è però riducibile (come nel Cap. 2) ad una funzione reale di un numero finito di variabili reali, bensì è un *funzionale* reale, ovvero una applicazione che associa ad una funzione (scalare o vettoriale, di una o più variabili) un numero reale.

L'inizio di una teoria sistematica del CdV si può far risalire alla seconda metà del 17° secolo, quando Giovanni Bernoulli pose il famoso problema della brachistocrona (dal greco *brachistos* (il più breve) + *chronos* (tempo)): *determinare il percorso che un punto materiale pesante deve seguire per connettere due punti assegnati nel più breve tempo possibile.* Il problema fu risolto dallo stesso Bernoulli, da suo fratello Jakob, da Newton e de l'Hôpital.

Lo sviluppo del calcolo differenziale diede grande impulso al CdV che si impose come strumento non soltanto adatto a risolvere particolari problemi di natura meccanica, bensì anche capace di produrre principi generali, detti *principi variazionali*, come, ad esempio, il principio di Hamilton, diventati rapidamente basilari nello sviluppo della Fisica; basti pensare che Einstein ne fece intenso uso per la teoria della relatività generale e che Schrödinger li usò per derivare l'equazione che porta il suo nome, in meccanica quantistica.

La teoria classica, legata principalmente ai nomi di Eulero e Lagrange, è stata poi generalizzata in più direzioni. Agli anni 1940–50 risalgono la *teoria del controllo ottimo* e quella della *programmazione dinamica* che oggi hanno assunto un ruolo dominante, ad esempio in economia o nell'ingegneria dei sistemi elettronici.

Dall'inizio del secolo si sono poi sviluppati i cosiddetti *metodi diretti*, che utilizzano strumenti di Analisi Funzionale.

Ancora oggi il CdV è in piena evoluzione e, unitamente a metodi numerici, è in grado di affrontare problemi di notevole complessità come ad esempio quello della *segmentazione di immagini*, importante nelle telecomunicazioni.

Questa sezione costituisce una breve introduzione al CdV e si pone l'obiettivo di mettere in luce la struttura tipica dei problemi che la teoria affronta e di presentare i risultati più importanti della teoria classica, in connessione con alcuni dei principi variazionali sopra menzionati.

2.1 Alcuni problemi tipici del calcolo delle variazioni

***Esempio* 2.1** - *Problema della brachistocrona.*

Un punto materiale, soggetto alla sola forza di gravità, si trova in un punto A; dato un altro punto B (non giacente sulla verticale per A), si vuole determinare il percorso che il punto deve seguire per arrivare in B nel più breve tempo possibile.

Per formulare il problema matematicamente scegliamo il sistema di riferimento come in figura 7.12.

Sia $u = u(x)$, $x \in [0, x_1]$, una curva che passa per i punti A e B; ciò significa $u(0) = 0$, $u(x_1) = u_1$. Sia poi $v_0 \geq 0$ la velocità (scalare) del punto materiale in A.

Il tratto di curva $ds = \sqrt{1 + u'(x)^2}dx$ è allora percorso con velocità $ds/dt = \sqrt{v_0^2 + 2g\,u(x)}$, dove g è l'accelerazione di gravità. Ne segue che il tempo T impiegato a percorrere l'arco $\widehat{AB}$ è assegnato dalla formula seguente:

$$T = T[u] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gu(x)}}\,dx\,. \tag{2.1}$$

La notazione $T = T[u]$ indica che il tempo di percorrenza dipende dalla funzione $u = u(x)$ (*). Il problema consiste ora nel determinare $\min T[u]$, al variare di u tra le curve regolari che passano per i due punti A e B e per le quali l'integrale (2.1) ha senso.

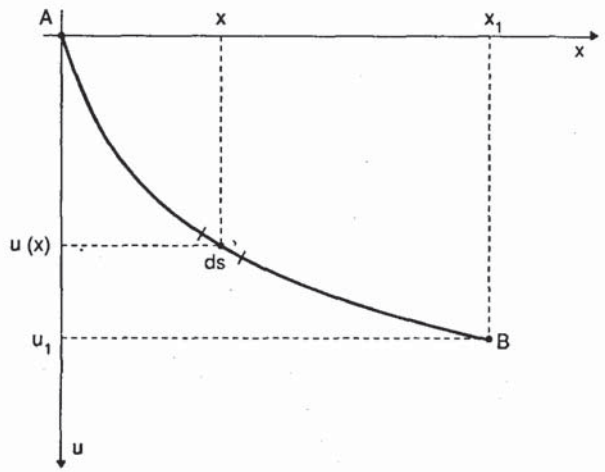


Fig. 7.12

(*) Se si usa la teoria dell'integrazione di Riemann, quando $v_0 = 0$, l'integrale in (2.1) è da intendersi in senso improprio, essendo $u(0) = 0$.

***Esempio* 2.2** - Si voglia determinare la figura piana di perimetro assegnato e di area massima.

Per formulare analiticamente il problema supponiamo che la frontiera della figura sia una curva di Jordan regolare di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$.

Indichiamo con L il perimetro assegnato, ovvero la lunghezza della curva, e con A l'area da massimizzare.

Ricordando la formula 1.8 del capitolo 1 e la formula 3.11 del capitolo 6, il problema è: massimizzare

$$A[x, y] = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt$$

al variare di tutte le curve di Jordan regolari soddisfacenti la condizione

$$\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = L$$

Come abbiamo già accennato, si tratta di un problema che rientra nella categoria dei cosiddetti problemi isoperimetrici.

***Esempio* 2.3** - *Geodetiche su una superficie*

Supponiamo di avere una superficie Σ e due punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ su di essa. Si chiama *geodetica* tra i due punti dati la curva sulla superficie che li connette ed ha minima lunghezza.

Se si conosce l'equazione parametrica della superficie, la ricerca delle geodetiche può essere formulata nel seguente modo.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in T$, l'equazione di Σ. Una curva γ su Σ è allora individuata dalle equazioni

$$u = u(t) \quad v = v(t)\ ,\ t \in [t_0, t_1]\ .$$

La sua lunghezza è data dall'integrale della prima forma fondamentale di Σ calcolata su γ e cioè dalla formula

$$l[u, v] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt$$

dove, ricordiamo, $E =< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u >$, $F =< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v >$, $G =< \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v >$.

Il problema è allora: minimizzare $l[u, v]$, al variare di $u = u(t)$ e $v = v(t)$, funzioni regolari in $[t_0, t_1]$ tali che $\mathbf{r}(u(t_0), v(t_0)) = \mathbf{p}$ e $\mathbf{r}(u(t_1), v(t_1)) = \mathbf{q}$.

***Esempio* 2.4** - Sia data una membrana perfettamente elastica che in posizione di riposo occupi un dominio Ω del piano x, y. Supponiamo ora di deformare il bordo $\partial\Omega$ della membrana in direzione parallela all'asse z, in modo cioè che la proiezione della membrana sul piano x, y sia sempre Ω. Si vuole determinare la nuova posizione di equilibrio assunta dalla membrana dopo la deformazione del

suo bordo. Considerazioni di fisica indicano che la posizione cercata è quella corrispondente al minimo dell'energia potenziale di deformazione.

Per formulare il problema analiticamente, supponiamo che ogni posizione della membrana coincida con il grafico di una funzione $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Il bordo della membrana è il grafico di una data funzione $\varphi = \varphi(x, y)$, con $(x, y) \in \partial\Omega$.

L'energia potenziale di deformazione per una posizione $u = u(x, y)$ è allora assegnata dalla formula seguente

$$V[u] = \frac{1}{2}\tau \iint_\Omega (u_x^2 + y_y^2)dx\,dy = \frac{1}{2}\tau \iint_\Omega \|\nabla u\|^2 dx\,dy \tag{2.2}$$

dove τ è la tensione della membrana; l'integrale che compare nella (2.2) è l'integrale di Dirichlet (par. 1.6).

Il problema è allora: minimizzare $V[u]$ al variare di u tra tutte le funzioni di classe $C^1(\overline{\Omega})$ tali che $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

2.2 Funzionali del calcolo delle variazioni

I problemi negli esempi del paragrafo 2.1 hanno una struttura comune: è individuato un insieme $\mathcal{U}$ di funzioni, dette funzioni *ammissibili* sul quale è definita un'applicazione

$$J: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

che prende il nome di *funzionale* e che costituisce l'obiettivo da ottimizzare.

In altri termini, riferendosi, senza perdita di generalità, alla ricerca dei minimi, si vuole determinare $\hat{u} \in \mathcal{U}$ in modo che

$$J[\hat{u}] \leq J[u] \qquad \forall u \in \mathcal{U} \tag{2.3}$$

Se $\hat{u}$ verifica la (2.3) si dirà *estremante* di J o, più precisamente, *minimante* di J.

In una formulazione generale di questo tipo non vi è a priori alcuna restrizione sulla forma o sulla natura del funzionale J o della classe delle funzioni ammissibili. I funzionali tipici del CdV sono espressi mediante integrali; ad esempio, se $u = u(x)$ è funzione di una variabile reale x,

$$J[u] = \int_a^b f(x, u, u')dx\ ;$$

il funzionale dell'esempio 2.1 è di questo tipo con $f(x, u, u') = \sqrt{1 + u'^2}/\sqrt{2gu}$. Oppure

$$J[u_1, \ldots, u_n] = \int_a^b f(x,, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')dx\ ;$$

in questa categoria rientrano i funzionali degli esempi 2.2 ($f(x, u_1, u_2) = u_1u_2' - u_1'u_2$) e 2.3 ($f(x, u, v) = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}$).

Oppure, se $u = u(x, y)$,

$$J[u] = \iint_\Omega f(x, y, u, u_x, u_y)dx\,dy \ ;$$

il funzionale di Dirichlet è di questo tipo con $f(x, y, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2$.

La classe $\mathcal{U}$ delle funzioni ammissibili influenza profondamente la natura del problema. Essa è determinata non solo in base al fatto ovvio che il funzionale J debba essere ben definito su $\mathcal{U}$ ma, in generale, anche da condizioni ulteriori.

Nel problema della brachistocrona occorre che il grafico di ogni funzione ammissibile passi per i due punti assegnati A e B, mentre in quello della membrana deve avere valori bloccati su $\partial\Omega$.

Nei problemi isoperimetrici le funzioni di $\mathcal{U}$ sono soggette a vincoli integrali del tipo

$$\int_a^b g(x, u, u')dx = L \ .$$

La formulazione (2.3) del problema di ottimizzazione non differisce in linea di principio da quella data nel capitolo 2 per le funzioni di più variabili; ed infatti le questioni che, in generale, occorre affrontare sono le medesime: esistenza ed unicità dei punti di estremo, loro caratterizzazione e costruzione di algoritmi di calcolo.

La diversa natura dell'obiettivo che, da un certo punto di vista, può essere considerato come una funzione di un numero infinito (con la potenza del continuo!) di variabili, conferisce ad un problema di ottimizzazione del CdV un ordine di complessità molto più elevato, in relazione anche alla varietà di situazioni che si possono presentare.

In questa breve introduzione ci occuperemo prevalentemente delle condizioni necessarie che i punti di estremo devono soddisfare, almeno nei casi più semplici.

2.3 Variazione prima e seconda di un funzionale

Ci occupiamo del problema seguente:
data $f\colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *minimizzare il funzionale*

$$J[u] := \int_a^b f(x, u, u')dx \tag{2.4}$$

al variare di u *nella classe delle funzioni ammissibili*

$$\mathcal{U} := \{u \in C^1([a, b])\colon u(a) = A \ , \ u(b) = B\} \tag{2.5}$$

dove A e B sono numeri reali assegnati.

Questo problema si chiama anche "*ad estremi fissi*". Incidentalmente si noti che $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme *convesso* di $C^1([a, b])$.

Ci proponiamo di trovare condizioni necessarie che una minimante $\widehat{u}$ di J deve soddisfare. Sia dunque

$$J[\widehat{u}] \le J[u] \qquad \forall u \in \mathcal{U} \ . \tag{2.6}$$

Ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ può essere scritta nella forma

$$u(x) = \widehat{u}(x) + h(x) \tag{2.7}$$

dove $h \in C^1([a, b])$ e $h(a) = h(b) = 0$.

Nella (2.7), u appare come somma di $\widehat{u}$ e di una sua "perturbazione" che ne lascia invariato il valore agli estremi. La funzione h, in questo caso, si chiama *variazione* di $\widehat{u}$ e spesso si indica con il simbolo $\delta\widehat{u}$. Tale terminologia ha condotto alla locuzione "Calcolo delle Variazioni", per significare lo studio del comportamento di un funzionale quando le funzioni da cui dipende subiscono *variazioni*.

Si noti che il sottoinsieme di $\mathcal{U}$ delle *variazioni ammissibili* costituisce uno spazio lineare (su $\mathbb{R}$).

Cercando condizioni necessarie per la minimante $\widehat{u}$ ci si può limitare a considerare una classe speciale di variazioni; ad esempio, si può fissare $h \in C^1([a, b])$ tale che $h(a) = h(b) = 0$ e considerare la famiglia di variazioni $\delta\widehat{u} = th$, dipendente dal parametro reale t, con t variabile in un intorno I di $t = 0$.

In corrispondenza a queste variazioni la (2.6) si particolarizza nella condizione seguente:

$$J[\widehat{u}] \le J[\widehat{u} + th] \qquad \forall t \in I \ . \tag{2.8}$$

Pensando sempre $\widehat{u}$ ed h fissati, consideriamo la funzione della sola variabile $t, \phi(t) = J[\widehat{u} + th]$. La (2.8) diventa

$$\phi(0) \le \phi(t) \qquad \forall t \in I$$

e cioè $t = 0$ è punto di minimo per ϕ.

Poiché

$$\phi(t) = \int_a^b f(x, \widehat{u} + th, \widehat{u} + th')dx$$

ed f è di classe C^1 rispetto ai suoi argomenti, si può derivare sotto il segno di integrale; pertanto $\phi(t)$ risulta derivabile in I e vale la formula

$$\phi'(t) = \int_a^b \{f_u(x, \widehat{u} + th, \widehat{u}' + th')h + f_{u'}(x, \widehat{u} + th, \widehat{u}' + th')h'\}dx \ . \tag{2.9}$$

Il teorema di Fermat implica allora che $\phi'(0) = 0$, ossia

$$\int_a^b \{f_u(x, \widehat{u}, \widehat{u}')h + f_{u'}(x, \widehat{u}, \widehat{u}')h'\}dx = 0 \ . \tag{2.10}$$

La (2.10) deve dunque valere per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(a) = h(b) = 0$.

L'argomentazione precedente conduce al seguente

■ **Teorema 2.1** - *Siano $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $J(u) = \int_a^b f(x,u,u')dx$. Se $\widehat{u}$ è minimante di J nella classe di funzioni ammissibili $\mathcal{U}$ data dalla* (2.5), *allora vale la* (2.10) *per ogni $h \in C^1([a,b])$ tale che $h(a) = h(b) = 0$.*

La condizione (2.10) acquista un significato più profondo se, fissata $u \in \mathcal{U}$, si introduce il funzionale, lineare in h,

$$h \mapsto \int_a^b \{f_u(x,u,u')h + f_{u'}(x,u,u')h'\}dx \tag{2.11}$$

definito sullo spazio vettoriale delle variazioni ammissibili di u.

Il funzionale (2.11) prende il nome di *variazione prima* di J calcolata in u e si indica con il simbolo $\delta J(u)$ o, più semplicemente, con δJ, se non sorgono ambiguità.

Il teorema 2.1 può essere enunciato nella forma seguente:

Se $\widehat{u}$ è minimante per $J(u)$ allora $\delta J(\widehat{u}) = 0$.

In questa forma la variazione prima appare l'analogo del differenziale di una funzione e il teorema appare l'analogo del teorema di Fermat: se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è punto di estremo per $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ allora $dg(\mathbf{x}) = 0$, ovvero $\mathbf{x}$ è punto *critico* o *stazionario* per g. La terminologia si estende anche ai funzionali: se $\delta J(\widehat{u}) = 0$, $\widehat{u}$ si dice *critico* o *stazionario* per J.

Anche alcuni abusi di notazione si estendono. Come, ad esempio, si scrive $dg(\mathbf{x}) =< \nabla g(\mathbf{x}), \mathbf{h} >$ anziché $dg(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \ldots$, così è entrato nell'uso scrivere

$$\delta J = \int_a^b \{f_u(\cdots)h + f_{u'}(\cdots)h'\}dx \quad \text{anziché} \quad \delta J[h] = \ldots .$$

Osservazione 2.1 - Il teorema di Fermat per funzioni si riferisce in realtà a punti di estremo *locale, interni* al dominio della funzione. Anche nel contesto del CdV è possibile definire la nozione di *estremo locale* inserendo una *topologia* nel dominio $\mathcal{U}$ del fuzionale J. Nel presente caso, essendo $\mathcal{U} \subset C^1([a,b])$, una topologia naturale è quella indotta dalla metrica lagrangiana introdotta nel capitolo 3 paragrafo 1.1: se u_1 e $u_2 \in \mathcal{U}$, la distanza tra u_1 e u_2 è definita da

$$d(u_1,u_2) := \max_{x\in[a,b]} |u_1(x) - u_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |u_1'(x) - u_2'(x)| .$$

Una funzione $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ è minimante *locale* se esiste $\eta > 0$ tale che $J[\widehat{u}] \le J[u]$ per ogni $u \in \mathcal{U}$ che disti da $\widehat{u}$ per meno di η.

È facile verificare che il teorema 2.1 continua a valere inalterato per $\widehat{u}$ minimante locale.

Naturalmente l'annullarsi della variazione prima $\delta J(\widehat{u})$ non è condizione sufficiente affinché $\widehat{u}$ sia effettivamente minimante. La ricerca di condizioni sufficienti esula dai limiti della presente trattazione. Ci limiteremo perciò ad enunciare la più

semplice e naturale di queste che fa intervenire la *variazione seconda* di J, analogo del differenziale secondo per le funzioni.

Se $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{U}$ si definisce *variazione seconda* di J in u e si indica con $\delta^2 J(u)$, o semplicemente con $\delta^2 J$, il funzionale seguente, quadratico in h

$$h \mapsto \int_a^b \{f_{uu}(x,u,u')h^2 + 2f_{u'u}(x,u,u')hh' + f_{u'u'}(x,u,u')h'^2\}dx .$$

Si noti che se f è convessa rispetto a u, u' la variazione seconda è non negativa. Vale la seguente

Proposizione 2.2 - *Sia $f = f(x,u,u')$ di classe $C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e sia $\widehat{u}$ un punto critico per J. Se f è convessa rispetto ad u e u' allora $\widehat{u}$ è minimante per J. Se è strettamente convessa $\widehat{u}$ è l'unica minimante.*

Dimostrazione - Sia h una variazione ammissibile. Si può scrivere, usando la formula di Taylor per f rispetto ad u e u':

$$\begin{aligned}
&f(x,\widehat{u}+h,\widehat{u}+h') - f(x,\widehat{u},\widehat{u}') = \\
&= f_u(x,\widehat{u}+\widehat{u}')h + f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')h' + \\
&+ \frac{1}{2}\{f_{uu}(x,\widehat{u}+\widehat{h},\widehat{u}'+\widehat{h}')h^2 + 2f_{uu'}(x,\widehat{u}+\widehat{u}',\widehat{u}'+\widehat{h}')hh' + \\
&+ f_{u'u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}'+\widehat{h}')h'^2\}
\end{aligned}$$

dove $\widehat{h}$ è una variazione opportuna tra 0 ed h.

Essendo f convessa rispetto ad u e u', si ha $\delta^2 J(u)[h] \ge 0$ per ogni $u \in \mathcal{U}$ ed ogni variazione h e perciò:

$$J[\widehat{u}+h] - J[\widehat{u}] = \delta J(\widehat{u})[h] + \frac{1}{2}\delta^2 J(\widehat{u})[\widehat{h}] = \frac{1}{2}\delta^2 J(\widehat{u})[\widehat{h}] \ge 0$$

che implica $\widehat{u}$ minimante.

Sia f strettamente convessa e, per assurdo, esista un'altra minimante $\widehat{v}$. Poniamo $J(\widehat{u}) = J(\widehat{v}) = \mu$ e consideriamo $u = (\widehat{u}+\widehat{v})/2$. Per la convessità stretta di f, si ha $f(x,u,u') < (f(x,\widehat{u},\widehat{u}') + f(x,\widehat{v},\widehat{v}'))/2$ per ogni x in cui $\widehat{u}(x) \ne \widehat{v}(x)$.

Per continuità, deve esistere un intervallo in cui questa disuaguaglianza è verificata.

Integrandola tra a e b si ottiene:

$$J[u] < \frac{1}{2}J[\widehat{u}] + \frac{1}{2}J[\widehat{v}] = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu ,$$

contro l'ipotesi che μ è il minimo di J. □

2.4 L'equazione di Eulero

La condizione di stazionarietà di una minimante $\widehat{u}$, espressa nel teorema 2.1, è equivalente ad un'equazione differenziale che costituisce un risultato fondamentale per il CdV.

■ **Teorema 2.3** - *Siano f e J come nel teorema 2.1. Una funzione $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ è stazionaria per J se e solo se $f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x))$ è di classe $C^1([a,b])$ e vale la seguente equazione*

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) - f_u(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) = 0 \qquad \forall x \in [a,b] \ . \tag{2.12}$$

Il teorema 2.3 esprime il fatto che, se $\widehat{u}$ è stazionario per J, $\widehat{u}$ è soluzione dell'equazione, nota come *equazione di Eulero* o *Eulero-Lagrange*,

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x, u, u') - f_u(x, u, u') = 0 \ . \tag{2.13}$$

Se $f_{xu'}$, $f_{uu'}$, $f_{u'u'}$ e u'' esistono, la (2.13) si può scrivere nella forma esplicita seguente:

$$f_{u'u'} u'' + f_{uu'} u' + f_{xu'} - f_u = 0 \tag{2.14}$$

che mostra come l'equazione di Eulero sia, in generale, un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. Le sue soluzioni sono dette *estremali*.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente

Lemma 2.4 - *Sia g continua ed integrabile in (a,b). Se*

$$\int_a^b g(x) h'(x) dx = 0 \tag{2.15}$$

per ogni $h \in C^1([a,b])$ tale che $h(a) = h(b) = 0$, allora $g(x)$ è costante in (a,b).

Dimostrazione - Siano $c = (b-a)^{-1} \int_a^b g(x)dx$ e $h(x) = \int_a^x [g(s) - c] ds$. Allora $h \in C^1([a,b])$, $h(a) = 0$ e $h(b) = \int_a^b g(s)ds - c(b-a) = \int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)ds = 0$. Inserendo questa h nella (2.15) si trova

$$0 = \int_a^b g(x)[g(x) - c]dx = \int_a^b g(x)[g(x) - c]dx - c \int_a^b [g(x) - c]dx =$$
$$= \int_a^b [g(x) - c]^2 dx \ .$$

Essendo $[g(x) - c]^2 \geq 0$ e continua in (a,b) si deduce che $g(x) = c \quad \forall x \in (a,b)$. □

Dimostrazione del teorema 2.2 - Sia $\widehat{u} \in \mathcal{U}$. Si ha:

$$\delta J(\widehat{u}) = \int_a^b f_u(x, \widehat{u}, \widehat{u}') h(x) dx + \int_a^b f_{u'}(x, \widehat{u}, \widehat{u}') h'(x) dx \ . \tag{2.16}$$

Poniamo, per comodità:

$$A(x) = \int_a^x f_u(s, \widehat{u}(s), \widehat{u}'(s)) ds \ , \ B(x) = f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) \ .$$

Integrando per parti il primo degli integrali nella (2.16), tenendo come fattore finito $h(x)$, si scrive:

$$\delta J(\widehat{u}) = [A(x)h(x)]_a^b - \int_a^b A(x)h'(x)dx + \int_a^b B(x)h'(x)dx \ .$$

Essendo $h(a) = h(b) = 0$ si ottiene

$$\delta J(\widehat{u}) = \int_a^b [B(x) - A(x)] h'(x) dx \ . \tag{2.17}$$

Se $\widehat{u}$ è stazionaria, $\delta J(\widehat{u}) = 0$; ciò implica, in base al lemma 2.3, $B(x) - A(x) = c$ (costante) per ogni $x \in [a,b]$, ossia

$$f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) - \int_a^x f_u(s, \widehat{u}(s), \widehat{u}'(s)) ds = c \qquad \forall x \in [a,b] \ . \tag{2.18}$$

Essendo $f_u(s, \widehat{u}(s), \widehat{u}'(s))$ continua in $[a,b]$, il teorema fondamentale del calcolo integrale implica che $f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) \in C^1([a,b])$; derivando la (2.18) si ottiene l'equazione di Eulero (2.12).

Se, viceversa, $f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) \in C^1([a,b])$ e vale la (2.12), per integrazione tra a ed x si ottiene la (2.18) (con $c = f_{u'}(a, \widehat{u}(a), \widehat{u}'(a))$, che, inserita nella (2.17), implica $\delta J(\widehat{u}) = 0$. □

In base al teorema 2.3, le eventuali minimanti $\widehat{u}$ di J vanno cercate fra le *estremali* che soddisfano le condizioni ai limiti $u(a) = A$ e $u(b) = B$.

Se poi $\widehat{u} \in C^2([a,b])$, allora $\widehat{u}$ soddisfa l'equazione esplicita (2.14). Sottolineiamo che, in ogni caso, anche se $\widehat{u}$ non ha due derivate, la 2.12 ha perfettamente senso, poiché $f_{u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x))$ è derivabile in $[a,b]$.

Una semplice condizione che assicura l'esistenza di due derivate per $\widehat{u}$ è espressa nella seguente proposizione che ci limitiamo ad enunciare.

Proposizione 2.5 - *Se $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ allora $\widehat{u}$ ha due derivate continue in ogni punto x in cui $f_{u'u'}(x, \widehat{u}(x), \widehat{u}'(x)) > 0$.*

Una volta calcolate le eventuali estremali occorre stabilire se sono effettivamente estremanti. Spesso un'analisi ulteriore non è necessaria. Infatti, in molti casi, considerazioni geometriche o fisiche indicano che il minimo del funzionale J esiste; se in questi casi esiste un'*unica* estremale, questa *deve* essere anche la minimante. Questo modo di procedere richiede tuttavia molta cautela, come mostra l'esempio 2.5.

Alternativamente si può utilizzare la proposizione 2.2: se f è convessa come funzione di u e u', allora ogni estremale è minimante.

Esempio 2.5 - Siano $J(u) = \int_{-1}^{1}(u')^2(1-u')^2dx$, con

$$\mathcal{U} = \{u \in C^1([-1,1]): u(-1) = 0\ ,\ u(1) = 1\}\ .$$

Si noti che $J(u) \geq 0$, $\forall u \in \mathcal{U}$. Si ha $f(x,u,u') = (u')^2(1-u')^2$ e l'equazione di Eulero è

$$u' - 3(u')^2 + 2(u')^3 = \text{ costante} \tag{2.19}$$

da cui si ricava $u' =$ costante ed infine, tenendo conto delle condizioni ai limiti, $\widehat{u}(x) = (x+1)/2$.

Esiste dunque un'unica estremale, che però non è minimante (neppure locale).

Infatti $J(\widehat{u}) = 1/8$ mentre, se consideriamo

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{n}{4}\left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2 & \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ x & -\dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

si verifica facilmente che

$$u_n \in \mathcal{U} \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad \text{e} \quad J(u_n) \to 0 < J(\widehat{u})\ .$$

In questo caso quindi il problema non ha soluzione in $\mathcal{U}$. Si noti che u_n tende uniformemente alla funzione

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1,0] \\ x & x \in (0,1] \end{cases} \tag{2.20}$$

che non è di classe $C^1([-1,1])$, ma è tale che $J(u) = 0$.

Se allarghiamo la classe delle funzioni ammissibili alle funzioni C^1 a tratti, allora la (2.20) è minimante per J.

Si noti che negli intervalli $(-1,0)$ e $(0,1)$ in cui la (2.20) è derivabile, soddisfa l'equazione di Eulero (2.19). Per questo la (2.20) si chiama *estremale spezzata*.

Osservazione 2.2 - La dimostrazione dei teoremi fondamentali 2.1 e 2.3 è stata condotta sotto l'ipotesi che $\widehat{u} \in C^1([a,b])$, ovvero che la classe delle funzioni ammissibili sia un sottoinsieme di $C^1([a,b])$. Molto spesso, tale classe risulta troppo ristretta, come abbiamo appena constatato nell'esempio 2.5 nel quale la classe "giusta" di funzioni ammissibili è l'insieme delle funzioni *continue in* $[-1,1]$, *derivabili tranne che in un numero finito di punti* e soddisfacenti le condizioni agli estremi.

È possibile oggi sviluppare la teoria in classi di funzioni appropriate che riflettano perfettamente la natura del problema in esame. Occorre però a questo proposito, utilizzare sostanzialmente la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue e i metodi dell'Analisi Funzionale che superano ampiamente i limiti della presente trattazione.

2.5 Casi particolari dell'equazione di Eulero

L'equazione di Eulero è, in generale, non agevole da risolvere. Indichiamo in questo paragrafo alcuni casi speciali in cui può essere ricondotta ad un'equazione del primo ordine o in cui le sue soluzioni si possono ottenere in termini di quadrature.

Caso a. *La funzione integranda non dipende da* u: $f = f(x,u')$.
In tal caso

$$J[u] = \int_a^b f(x,u')dx$$

e l'equazione di Eulero diventa $\dfrac{d}{dx}f_{u'} = 0$ che ha l'integrale primo

$$f_{u'} = c \tag{2.21}$$

dove c è costante.

La (2.21) è un'equazione differenziale del primo ordine che non contiene u. Se si può risolvere rispetto ad u' si trova $u' = g(x,c)$ da cui si trova facilmente u.

Si noti che se $f = f(u')$, l'equazione (2.21) implica $u' =$ costante e cioè che le estremali sono *rette*.

Caso b. *La funzione integranda non dipende da* x: $f = f(u,u')$.
In tal caso

$$J[u] = \int_a^b f(u,u')dx\ .$$

Osserviamo che, se $u' \neq 0$,

$$u'\left(\frac{d}{dx}f_{u'} - f_u\right) = \frac{d}{dx}(u'f_{u'}) - u''f_{u'} - u'f_u = \frac{d}{dx}(u'f_{u'} - f)\ .$$

Dunque, se $u' \neq 0$, l'equazione di Eulero equivale a $\dfrac{d}{dx}(u'f_{u'} - f) = 0$ e pertanto ha l'integrale primo

$$u'f_{u'} - f = c \tag{2.22}$$

dove c è costante. La (2.22) è un'equazione del primo ordine contenente solo u e u', che si può integrare, ad esempio, con il metodo indicato nell'esercizio 37, capitolo quarto, sezione 1.

Si noti che, se, in particolare, $f(u,u') = g(u)\sqrt{1+(u')^2}$, la (2.22) si riduce a

$$\frac{g(u)}{1+(u')^2} = c \tag{2.23}$$

che, integrata, dà

$$\int \frac{du}{\sqrt{[g(u)/c]^2 - 1}} = \pm x + c_1 \quad (*)$$

Caso c. *L'integranda è della forma* $f(x,u,u') = g(x,u)\sqrt{1+(u')^2}$.
In tal caso

$$J(u) = \int_a^b g(x,u)\sqrt{1+(u')^2}dx = \int_a^b g(x,u)ds\ ,$$

dove $ds = \sqrt{1+(u')^2}dx$ è la lunghezza d'arco relativa alla curva $u = u(x)$.
L'equazione di Eulero può essere ridotta alla forma:

$$g\frac{u''}{1+(u')^2} + g_x u' - g_u = 0\ . \tag{2.24}$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}f_{u'} - f_u =$$

$$= g\frac{u''}{[1+(u')^2]^{3/2}} + g_x\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} + g_u\frac{(u')^2}{\sqrt{1+(u')^2}} - g_u\sqrt{1+(u')^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}}\left[g\frac{u''}{1+(u')^2} + g_x u' - g_u\right]\ .$$

Caso d. Se f *non dipende da* u', l'equazione di Eulero ha la forma

$$f_u(x,u) = 0$$

che non è un'equazione differenziale e che, in generale, definisce implicitamente una o più estremali.

(*) Si sceglie il segno + o il segno - in accordo al segno di u'.

***Esempio* 2.6** - Ritorniamo al problema della brachistocrona dell'esempio 2.1. Cerchiamo le estremali del funzionale

$$J[u] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gu}}dx$$

con le condizioni $u(0) = 0$ e $u(x_1) = u_1$. Dalla (2.23) con $g(u) = (v_0^2 + 2gu)^{-1/2}$ si ottiene,

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2gu}\,\sqrt{1+(u')^2}} = c \qquad (c \text{ costante arbitraria}). \tag{2.25}$$

Poniamo $u' = du/dx = \operatorname{cotg}\varphi$; allora dalla (2.25) si ricava

$$u(x) = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2g\,c^2}(\sin\varphi)^2 = -\frac{v_0^2}{4g} + \frac{1}{4gc^2}(1-\cos 2\varphi)\ .$$

Perciò

$$dx = \operatorname{tg}\varphi du = \frac{1}{gc^2}\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi d\varphi = \frac{1}{2gc^2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi$$

da cui

$$x = \frac{1}{2gc^2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + c_1\ .$$

Ponendo infine $\theta = 2\varphi$ e $r = 1/4gc^2 > 0$ si ottiene la seguente famiglia di estremali in forma parametrica

$$\begin{aligned} u &= -\frac{v_0^2}{4g} + r(1-\cos\theta) \\ x &= c_1 + r(\theta - \sin\theta)\ . \end{aligned} \tag{2.26}$$

La (2.26) costituisce una famiglia di *cicloidi*, generate da un punto su una circonferenza di raggio r che rotola sulla retta $u = -v_0^2/4g$, come indicato in figura 7.13.

Imponendo le condizioni di passaggio per A e B si trova il seguente sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite $c_1, r, \theta_1, \theta_2$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{v_0^2}{4g} + r(1-\cos\theta_1) \qquad & u_1 &= -\frac{v_0^2}{4g} + r(1-\cos\theta_2) \\ 0 &= c_1 + r(\theta_1 - \sin\theta_1) \qquad & x_1 &= c_1 + r(\theta_2 - \sin\theta_2)\ . \end{aligned} \tag{2.27}$$

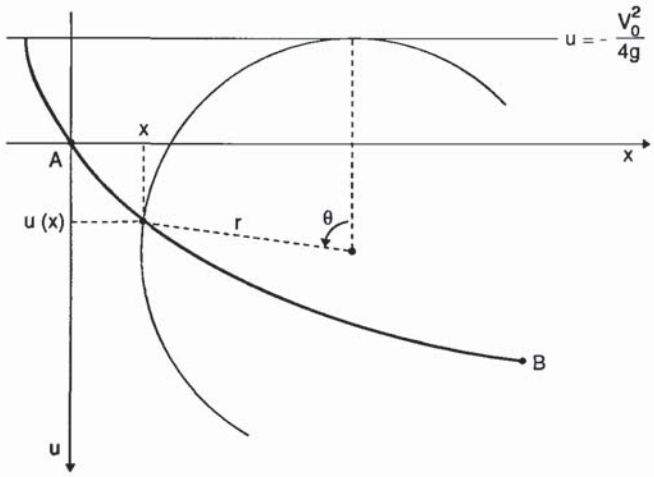


Fig. 7.13

Lasciamo al lettore (Esercizio 5) la verifica che il sistema (2.27) ha esattamente una soluzione. Pertanto esiste una sola estremale verificante le condizioni ai limiti. Si può dimostrare (ma la dimostrazione è piuttosto complessa) che l'arco di cicloide trovato dà effettivamente il minimo di $J(u)$ in $\mathcal{U} = \{u \in C^1([0,x_1]: u(0) = 0, u(x_1) = u_1\}$, quando $v_0 > 0$. Se $v_0 = 0$ l'arco di cicloide è ancora minimante ma non è più di classe C^1 essendo $u'(0) = +\infty$.

2.6 Estremi variabili. Condizioni naturali

Oltre al problema ad *estremi fissi* considerato nel paragrafo 2.3 vi sono molti altri tipi di problemi. Discutiamo qui brevemente il caso in cui i valori di u agli estremi dell'intervallo $[a,b]$ non siano prescritti. Chiameremo questo *problema ad estremi variabili*. Precisamente si tratta di minimizzare il funzionale (2.4) tra tutte le funzioni il cui grafico ha i punti estremi sulle rette $x = a$ e $x = b$. Ciò corrisponde a scegliere $\mathcal{U} = C^1([a,b])$ come classe delle funzioni ammissibili. I discorsi fatti nei paragrafi 2.3 e 2.4 si possono ripetere pari pari tenendo conto che, ora, ogni funzione $h \in C^1([a,b])$ è una variazione ammissibile.

I teoremi 2.1 e 2.3 restano pertanto in vigore; in più, la (2.10) vale per ogni $h \in C^1([a,b])$.

Il fatto di avere a disposizione una classe più ampia di variazioni porta come conseguenza che $\widehat{u}$ deve soddisfare, oltre che l'equazione di Eulero, ulteriori condizioni. Infatti, consideriamo l'equazione (2.10); essendo, in base al teorema 2.3,

$f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')$ di classe $C^1([a,b])$, possiamo scrivere

$$\int_a^b f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')h'dx = [f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')h]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')\, h\, dx\ , \tag{2.28}$$

che, inserita nella 2.10, dà la seguente equazione, valida per ogni $h \in C^1([a,b])$:

$$\begin{aligned}\delta J(\widehat{u}) = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}') - f_u(x,\widehat{u},\widehat{u}') \right\} h(x)dx + \\ + f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')h(x)|_{x=b} - f_{u'}(x,\widehat{u},\widehat{u}')h(x)|_{x=a} = 0\ .\end{aligned} \tag{2.29}$$

L'integrale è nullo poiché $\widehat{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero e perciò la (2.29) si riduce a

$$f_{u'}(b,\widehat{u}(b),\widehat{u}'(b))h(b) = f_{u'}(a,\widehat{u}(a),\widehat{u}'(a))h(a) = 0 \tag{2.30}$$

per ogni $h \in C^1([a,b])$. Scegliendo nella (2.30) h in modo che $h(a) = 0$ e $h(b) \neq 0$ si trova

$$f_{u'}(b,\widehat{u}(b),\widehat{u}'(b)) = 0\ , \tag{2.31}$$

mentre scegliendo h in modo che $h(a) \neq 0$ e $h(b) = 0$ si trova

$$f_{u'}(a,\widehat{u}(a),\widehat{u}'(a)) = 0\ . \tag{2.32}$$

Dunque un'estremante nel problema ad estremi variabili deve soddisfare oltre l'equazione di Eulero, anche le condizioni (2.31) e (2.32) dette *condizioni ai limiti naturali* o anche condizioni di *trasversalità*.

Con lo stesso metodo si può trattare il caso *misto* in cui un estremo è fisso e l'altro variabile. In tal caso solo la condizione di trasversalità relativa all'estremo variabile deve valere.

Esempio 2.7 - Una variante del problema della brachistocrona consiste nel prescrivere la posizione di partenza $A = (0,0)$ e nel richiedere che la particella pesante raggiunga la retta verticale $x = x_1$ nel più breve tempo possibile.

Si tratta di un problema misto in cui il valore $u(x_1)$ non è prescritto. La condizione di trasversalità in $x = x_1$ ha la forma

$$f_{u'} = \frac{u'}{\sqrt{v_0^2 + 2gu}\,\sqrt{1+(u')^2}} = 0$$

cioè deve essere $u'(x_1) = 0$: la tangente all'arco di cicloide nell'estremo destro deve essere orizzontale.

Se, ad esempio, $v_0 = 0$, si trova facilmente l'arco di cicloide

$$u(\theta) = \frac{x_1}{\pi}(1-\cos\theta)\ ,\ x(\theta) = \frac{x_1}{\pi}(\theta - \sin\theta)\ .$$

2.7 Funzionali dipendenti da più funzioni

In questo paragrafo ci occupiamo di condizioni necessarie per un estremo di un funzionale del tipo

$$J[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \int_a^b f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1', u_2', \ldots, u_n')dx \tag{2.33}$$

che, introducendo il vettore $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, si può scrivere nella forma

$$J[\mathbf{u}] = \int_a^b f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')dx \ . \tag{2.33$'$}$$

Se f è di classe C^1 in $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e se la classe $\mathcal{U}$ dei vettori $\mathbf{u}$ ammissibili è $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in C^1([a,b]),\ \mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\xi},\ \mathbf{u}(b) = \boldsymbol{\eta}\}$ (problema ad *estremi fissi*) oppure $\mathcal{U} = C^1([a,b])$ (*estremi variabili*), le argomentazioni dei paragrafi precedenti si generalizzano senza alcuna difficoltà.

La *variazione prima* di J, $\delta J(\mathbf{u})$, è data dalla formula:

$$(h_1, \ldots, h_n) = \mathbf{h} \mapsto \int_a^b \sum_{j=1}^n \{f_{u_j'}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')h_j' + f_{u_j}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')h_j\}dx \tag{2.34}$$

dove $\mathbf{h}$ è una variazione ammissibile.

I teoremi 2.1 e 2.2 continuano a valere con dimostrazioni pressoché identiche. Ci limitiamo pertanto ad enunciare i fatti salienti lasciando al lettore i dettagli delle dimostrazioni.

Se $u = \hat{u}$ è una minimante, allora $\delta J(\hat{\mathbf{u}}) = 0$. Poiché le componenti di una variazione ammissibile $\mathbf{h}$ sono indipendenti tra loro, possiamo scegliere $h_j \neq 0$ e $h_i = 0$ per $i \neq j$. In corrispondenza a questa variazione l'equazione $\delta J(\hat{\mathbf{u}}) = 0$ ha la forma seguente:

$$\int_a^b \{f_{u_j'}(x, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}')h_j' + f_{u_j}(x, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}')h_j\}dx = 0 \ . \tag{2.35}$$

La (2.35) è identica alla (2.10) (con $h = h_j$). Ragionando sulla (2.35) come nel paragrafo 2.3, per ogni $j = 1, \ldots, n$, si perviene al seguente

▪ **Teorema 2.6** - *Se* $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ *è minimante per il funzionale* (2.33) o (2.33)$'$ *allora deve soddisfare il seguente sistema di equazioni di Eulero:*

$$\frac{d}{dx} f_{u_j'}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') - f_{u_j}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0 \ . \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.36}$$

Nel problema ad estremi liberi devono essere inoltre verificate le condizioni naturali

$$f_{u_j'}(x, \hat{\mathbf{u}}(x), \hat{\mathbf{u}}'(x)) = 0 \quad \text{per } x = a \text{ e } x = b \ .$$

***Esempio* 2.8** - Riprendiamo il problema delle geodetiche su una superficie (Esempio 2.3). Sia $\mathbf{u} = (u(t), v(t))$. Le equazioni di Eulero (2.36) hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{2\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{2\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Particolarizziamo la superficie al cilindro di equazione $\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$.

I coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E(u,v) = R^2 \ , \ F(u,v) = 0 \ , \ G(u,v) = 1$$

e pertanto le (2.37) diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{R^2u'}{\sqrt{R^2u'^2 + v'^2}} = 0 \ , \ \frac{d}{dt}\frac{v'}{\sqrt{R^2u'^2 + v'^2}} = 0$$

ovvero

$$\frac{R^2u'}{\sqrt{R^2u'^2 + v'^2}} = c_1 \ , \ \frac{v'}{\sqrt{R^2u'^2 + v'^2}} = c_2 \ .$$

Se $u' \neq 0$ e $v' \neq 0$, dividendo le due equazioni membro a membro si ottiene

$$v' = c\,u'$$

ossia $dv/du = c$ e quindi $v = cu + c_0$.

In corrispondenza si ottiene una famiglia a due parametri di eliche di equazione $(R\cos u, R\sin u, cu + c_0)$.

Se $u' = 0$ si ottengono le generatrici del cilindro $(R\cos c, R\sin c, v)$ mentre se $v' = 0$ si ottengono gli archi di cerchio $(R\cos u, R\sin u, c_0)$. In conclusione, le geodetiche su un cilindro sono archi di elica, archi di cerchio e segmenti di generatrice.

2.8 Funzionali dipendenti da funzioni di più variabili

Il metodo usato nei precedenti paragrafi può essere utilizzato per trovare condizioni necessarie per una minimante di un funzionale del tipo

$$J[u] = \int_\Omega f(\mathbf{x}, u, \nabla u)d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})d\mathbf{x} \tag{2.38}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, di classe C^2.

Se scegliamo come classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{U} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \ ; \ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}\}$$

dove v è una assegnata funzione in $C^1(\overline{\Omega})$, si ottiene l'analogo multidimensionale del problema ad estremi fissi, mentre la scelta di $\mathcal{U} = C^1(\overline{\Omega})$ corrisponde a quello con estremi variabili. Naturalmente, molte altre scelte sono possibili.

Nel primo caso le variazioni ammissibili sono funzioni $h \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che $h|_{\partial\Omega} = 0$; nel secondo, ogni $h \in C^1(\overline{\Omega})$ è ammissibile.

Ragionando come nel paragrafo 2.3, poniamo:

$$\phi(t) = J[u + th] = \int_\Omega f(\mathbf{x}, u + th, \nabla u + t\nabla h)d\mathbf{x}$$

e calcoliamo $\phi'(t)$ mediante derivazione sotto il segno di integrale:

$$\phi'(t) = \int_\Omega \{f_u(\mathbf{x}, u + th, \nabla u + t\nabla h)h + \sum_{j=1}^n f_{u_{x_j}}(\mathbf{x}, u + th, \nabla u + t\nabla h)h_{x_j}\}d\mathbf{x}.$$

Calcolando $\phi'(0)$ si ottiene il funzionale, lineare sullo spazio delle variazioni, assegnato dalla seguente formula

$$h \mapsto \int_\Omega \{f_u(\mathbf{x}, u, \nabla u)h + \sum_{j=1}^n f_{u_{x_j}}(\mathbf{x}, u, \nabla u)h_{x_j}\}d\mathbf{x},$$

che prende il nome di *variazione prima* di J in u e che si indica col solito simbolo $\delta J(u)$.

Se $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ è minimante di J allora $\delta J(\widehat{u}) = 0$, ovvero

$$\int_\Omega \{f_u(\mathbf{x}, \widehat{u}, \nabla\widehat{u})h + \sum_{j=1}^n f_{u_{x_j}}(\mathbf{x}, \widehat{u}, \nabla\widehat{u})h_{x_j}\}d\mathbf{x} = 0 \tag{2.39}$$

per ogni variazione ammissibile h.

Dalla (2.39) si deduce il seguente teorema nel quale ci limitiamo ad $n = 3$, valido comunque in dimensione n qualunque.

■ **Teorema 2.7** - *Sia $\widehat{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ minimante del funzionale* (2.38) *e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio ammissibile per il teorema della divergenza. Allora $\widehat{u}$ è soluzione della seguente equazione differenziale (a derivate parziali) di Eulero:*

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_{u_{x_j}}(\mathbf{x}, u, \nabla u) - f_u(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0 \qquad (x \in \Omega)\,. \tag{2.40}$$

Se i valori di u su $\partial\Omega$ non sono prescritti ($\mathcal{U} = C^1(\overline{\Omega})$) allora $\widehat{u}$ deve inoltre soddisfare la seguente condizione "naturale" in $\partial\Omega$:

$$< \mathbf{F}, \mathbf{n} >= 0 \tag{2.41}$$

dove $\mathbf{n}$ è la normale a $\partial\Omega$ e $\mathbf{F} = (f_{u_{x_1}}, f_{u_{x_2}}, f_{u_{x_3}})$.

Dimostrazione - Poiché $\widehat{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, $f_{u_{x_j}}(\mathbf{x}, \widehat{u}, \nabla\widehat{u}) \in C^1(\overline{\Omega})$ e quindi si può scrivere, per ogni $j = 1, 2, 3$:

$$f_{u_{x_j}} h_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(f_{u_{x_j}} h) - \frac{\partial}{\partial x_j} f_{u_{x_j}} h\,. \tag{2.42}$$

Sommando le (2.42) si trova

$$\sum_{j=1}^3 f_{u_{x_j}} h_{x_j} = \operatorname{div}(h\mathbf{F}) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_{u_{x_j}} h\,. \tag{2.43}$$

La (2.39) prende allora la forma

$$\int_\Omega \left\{ f_u - \sum_{j=1}^3 h_{x_j} \right\} d\mathbf{x} + \int_\Omega \operatorname{div}(h\mathbf{F})d\mathbf{x} = 0\,. \tag{2.44}$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale si trova:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(h\mathbf{F})d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega+} h < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma \tag{2.45}$$

dove $\mathbf{n}$ è la normale esterna a $\partial\Omega$.

Inserendo la (2.45) nella (2.44) abbiamo la seguente formula:

$$\delta J(u) = \int_\Omega \left\{ f_u - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_{u_{x_j}} \right\} h\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega+} h < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma = 0 \tag{2.46}$$

per ogni h ammissibile.

Se i valori di u su $\partial\Omega$ sono prescritti, allora $h = 0$ su $\partial\Omega$ ed il secondo integrale nella (2.46) è nullo. La (2.40) si ottiene allora dal seguente lemma la cui dimostrazione è richiesta nell'esercizio 15a:

Lemma 2.8 - *Se $w \in C(\overline{\Omega})$ e per ogni $h \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $h|_{\partial\Omega} = 0$*

$$\int_\Omega w(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

allora $w = 0$.

Per applicare il lemma basta porre $w(\mathbf{x}) = f_u - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_{u_{x_j}}$.

Se infine i valori di u su $\partial\Omega$ *non* sono prescritti, scegliendo prima tra le variazioni ammissibili quelle nulle su $\partial\Omega$ si ottiene ancora la (2.40). Pertanto la (2.46) si riduce a

$$\int_{\partial\Omega+} h < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma = 0 \tag{2.47}$$

che implica la (2.41), in virtù di un lemma perfettamente analogo al 2.8 (Esercizio 15b). □

***Esempio* 2.9** - Riprendiamo il problema della membrana considerato nell'esempio 2.4. In questo caso, tralasciando il fattore $\tau/2$, si ha:

$$J[u] = \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) dx\, dy \ .$$

Essendo $f = u_x^2 + u_y^2$, $f_u = 0$, $f_{u_x} = 2u_x$, $f_{u_y} = 2u_y$, l'equazione di Eulero è

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 2u_{xx} + 2u_{yy} = 0$$

ossia

$$\Delta u = 0 \ .$$

Dunque, un'estremante $\hat{u}$ di classe $C^2(\overline{\Omega})$ per il problema della membrana deve essere soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \ . \end{cases}$$

***Esempio* 2.10** - Se la membrana dell'esempio 2.4 è soggetta ad una forza esterna per unità di superficie $p = p(x, y)$ allora l'energia potenziale da minimizzare è rappresentata dal funzionale

$$J[u] = \iint_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\tau(u_x^2 + u_y^2) + p\, u \right\} dx\, dy \ .$$

L'equazione di Eulero è, essendo $f_u = p$,

$$\Delta u = p/\tau \ .$$

Se la membrana è fissata agli estremi, $\hat{u}$ deve soddisfare il problema di Dirichlet con condizioni al bordo $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Se la membrana è libera di scorrere senza attrito lungo una guida verticale di sezione Ω, la posizione di equilibrio $\hat{u}$ deve soddisfare anche la condizione naturale (2.41) che in questo caso diventa: $2 < \nabla u, \mathbf{n} >= \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Pertanto $\hat{u}$ deve essere soluzione del seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} \nabla u & = p/\tau \text{ in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & = 0 \text{ su } \Omega \ . \end{cases} \tag{2.48}$$

Come abbiamo già osservato (Osservazione 1.5) il problema (2.48) ha soluzione solo se $\iint_\Omega p/\tau dx\, dy = 0$; ciò corrisponde all'ovvio fatto fisico che, se la membrana è libera agli estremi, affinché assuma una posizione di equilibrio sotto l'azione di una forza esterna, questa deve avere risultante nullo.

***Esempio* 2.11** - Problema delle superfici di area minima.

Nella sua forma più semplice fu proposto da Eulero: *trovare, fra le superfici aventi come bordo una curva chiusa assegnata, quella di area minima.*

Sia Γ la curva assegnata in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che la sua proiezione sul piano $z = 0$ sia una curva di Jordan che limiti una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supponiamo inoltre che la superficie possa essere espressa in forma cartesiana $z = z(x, y)$.

Il problema consiste allora nel minimizzare il funzionale

$$J[z] = \iint_\Omega \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy \tag{2.49}$$

fra tutte le funzioni $z \in C^1(\overline{\Omega})$ che assumono valori prefissati sul bordo $\partial\Omega$ di Ω.

L'equazione di Eulero per il funzionale (2.49) ha la forma seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_y^2 + z_y^2}} = 0$$

che, se $z \subset C^2(\Omega)$, si può scrivere nella forma:

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0 \ . \tag{2.50}$$

La (2.50) ha un notevole significato geometrico; infatti, per superfici in forma cartesiana, i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale sono dati da:

$$\begin{aligned} &E = 1 + z_x^2 \ , \ F = z_x z_y \ , \ G = 1 + z_y^2 \\ &L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \ , \ M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2 + z_y^2}} \ , \ N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_y^2 + z_y^2}} \ . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Ricordiamo ora la formula per la curvatura media H:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

dove k_1 e k_2 sono le curvature principali.

Si riconosce, dalle (2.51), che l'equazione (2.50) è equivalente a

$$H = 0 \ ,$$

ossia, *le superfici di area minima devono avere curvatura media nulla.*

2.9 Problemi isoperimetrici

Si chiamano *isoperimetrici*, per estensione di linguaggio dal classico problema di Didone (Esempio 2.2), i problemi che consistono nel minimizzare un funzionale

$J[u]$ su una classe di funzioni ammissibili soggette ad un vincolo del tipo $K[u] = L$ dove K è un funzionale dello stesso tipo di J ed L è un numero reale assegnato.

Ci limitiamo a considerare il seguente caso particolare: minimizzare

$$J[u] = \int_a^b f(x, u, u')dx$$

al variare di u in $C^1([a,b])$ tale che $u(a) = A$, $u(b) = B$ ed inoltre soggetta al vincolo

$$K[u] = \int_a^b g(x, u, u')dx = L \ .$$

Vale il seguente risultato, generalizzazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, illustrato nel capitolo 2, sezione 2.

■ **Teorema 2.9** - *Siano f e g di classe $C^1([a,b]) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $\widehat{u}$ minimante per J con la condizione $K[u] = L$. Se $\widehat{u}$ non è estremale per K, allora esiste un numero reale $\widehat{\lambda}$ tale che $\widehat{u}$ è estremale per il funzionale*

$$I[u] = \int_a^b (f - \widehat{\lambda} g)dx \ ,$$

ossia $\widehat{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx} f_{u'} - f_u - \widehat{\lambda}\left(\frac{d}{dx} g_{u'} - g_u\right) = 0 \ . \tag{2.52}$$

Dimostrazione - Non si può procedere come nella dimostrazione dei teoremi 2.1 e 2.3, poiché, se $h \in C^1([a,b])$ e $h(a) = h(b) = 0$, la funzione $u = \widehat{u} + th$, al variare di t, in generale non manterrà il valore di K costante. Scegliamo allora una famiglia di variazioni a due parametri α_1, α_2: $\alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x)$, dove h_1 e h_2 sono nulle agli estremi e di classe $C^1([a,b])$.

Poniamo

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_a^b f(x, \widehat{u} + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, \widehat{u}' + \alpha_1 h_1' + \alpha_2 h_2')dx \ ,$$

e

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_a^b g(x, \widehat{u} + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, \widehat{u}' + \alpha_1 h_1' + \alpha_2 h_2')dx \ .$$

Il problema è ricondotto a trovare condizioni necessarie affinché la funzione ϕ abbia un minimo in $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, soggetto al vincolo $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = L$. Si può applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange a patto che $(0,0)$ *non* sia punto critico per ψ, ovvero che $\partial\psi/\partial\alpha_1$ e $\partial\psi/\partial\alpha_2$ non siano entrambre nulle in $(0,0)$. Ciò è assicurato dal fatto che $\widehat{u}$ *non* è estremale per K. Infatti si ha, derivando sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}(0,0) = \int_a^b \{g_u(x, \widehat{u}, \widehat{u}')h_1 + g_{u'}(x, \widehat{u}, \widehat{u}_1')h_1'\}dx = \delta K(\widehat{u})[h_1] \ .$$

Non essendo $\widehat{u}$ estremale, è possibile fissare h_1 in modo che $\delta K(\widehat{u})[h_1] \neq 0$.

Se poniamo allora $I(\alpha_1, \alpha_2) = \phi(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda\psi(\alpha_1, \alpha_2)$, condizione necessaria affinché $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sia punto di minimo vincolato è che esista una costante $\widehat{\lambda}$ tale che

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha_1}(0,0) = \frac{\partial I}{\partial\alpha_2}(0,0) = 0 \ . \tag{2.53}$$

In termini di J e K le (2.53) significano:

$$\int_a^b \{f_{u'} - \widehat{\lambda} g_{u'})h_j' + (f_u - \widehat{\lambda} g_u)h_j\}dx = 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{2.54}$$

valida per la h_1 fissata in precedenza e per *ogni* $h_2 \in C^1([a,b])$, $h_2(a) = h_2(b) = 0$. Usando la (2.54) per $j = 2$ e ragionando come nel teorema 2.2 si ricava la (2.52). □

Il teorema si utilizza, in generale, risolvendo l'equazione di Eulero (2.48), determinando poi le due costanti di integrazione mediante le condizioni ai limiti ed il moltiplicatore $\widehat{\lambda}$ mediante il vincolo $K[\widehat{u}] = L$.

Se poi il valore di u in un estremo, ad esempio, a, non è prescritto, allora deve essere verificata la condizione di trasversalità

$$f_{u'}(a, \widehat{u}(a), \widehat{u}'(a)) - \widehat{\lambda} g_{u'}(a, \widehat{u}(a), \widehat{u}'(a)) = 0 \ .$$

Le argomentazioni precedenti si estendono senza difficoltà al caso di funzionali dipendenti da n funzioni $u_1, \ldots, u_n$.

Il vettore $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}, \ldots, \widehat{u}_n)$ minimante dovrà soddisfare il sistema di equazioni di Eulero

$$\frac{d}{dx} f_{u_j'} - f_{u_j} - \lambda\left(\frac{d}{dx} g_{u_j'} - g_{u_j}\right) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.55}$$

con λ opportuno, oltre ad eventuali condizioni agli estremi e/o di trasversalità.

***Esempio* 2.12** - Riprendiamo il problema isoperimetrico dell'esempio 2.2. Si tratta di massimizzare il funzionale

$$A[x, y] = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt$$

con il vincolo

$$K[x, y] = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} = L \ .$$

Le equazioni di Eulero (2.55) sono

$$-y' = \lambda \frac{d}{dt} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$x' = \lambda \frac{d}{dt} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

che danno

$$y - c_1 = -\frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \ , \ x - c_2 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \ .$$

Quadrando e sommando membro a membro si trova

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2 \ .$$

Pertanto le curve estremali sono cerchi e si può dimostrare che sono effettivamente le curve massimizzanti.

Se L è la lunghezza della circonferenza, l'area racchiusa è pari ad $A = L^2/4\pi$. Il risultato raggiunto si può enunciare nel modo seguente:
se una curva piana chiusa (regolare) di lunghezza L racchiude una regione di area A, vale la disuguaglianza isoperimetrica seguente:

$$L^2 \geq 4\pi A$$

con uguaglianza se e solo se la curva è una circonferenza (*).

2.10 Il principio di Hamilton

Un sistema meccanico ha n gradi di libertà se la sua configurazione è determinata da n coordinate indipendenti $q_1, \ldots, q_n$. Se il sistema è in moto le coordinate sono funzioni del tempo: $q_i = q_i(t)$; le componenti della velocità sono $\dot{q}_i(t) = dq_i/dt$.

L'energia cinetica associata al sistema è una funzione della forma:

$$T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

ovvero una forma quadratica nelle componenti della velocità con coefficienti a_{ij} funzioni note di $q_1, \ldots, q_n$, non dipendenti esplicitamente dal tempo.

Assumendo che le forze esterne siano *conservative* e dipendenti solo da $q_1, \ldots, q_n$, è definita l'*energia potenziale* $V = V(q_1, \ldots, q_n)$. Il funzionale *azione*, altrimenti detto *integrale di Hamilton*, è definito dalla formula

$$H(\mathbf{q}) = H(q_1, \ldots, q_n) := \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \tag{2.56}$$

ed in generale dipende da $(q_1(t), \ldots, q_n(t))$.

(*) Il risultato si estende a curve più generali, ad esempio quelle regolari a tratti.

Il principio di Hamilton caratterizza il moto in termini di energia senza alcun riferimento al sistema di coordinate introdotto nello spazio ambiente e può essere enunciato nel modo seguente:

Principio di Hamilton: *il moto $\widehat{\mathbf{q}}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ di un sistema dinamico in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ da una data configurazione iniziale ad una data configurazione finale è un punto stazionario per il funzionale H, ovvero $\delta H(\widehat{\mathbf{q}}) = 0$.*

Il principio di Hamilton è un principio fondamentale che racchiude in forma condensata tutte le leggi della dinamica. Le equazioni di Eulero–Lagrange per il funzionale 2.56 hanno la forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.57}$$

che devono essere soddisfatte da $\widehat{q}$, se $\widehat{q} \in C^1([t_0, t_1])$.

Dalle (2.57) si possono trarre notevoli deduzioni, come ad esempio il principio di conservazione dell'energia.

Infatti, si ha:

$$\frac{d}{dt} T = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) . \tag{2.58}$$

Essendo T omogenea di secondo grado in $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, il teorema di Eulero 7.1.9, volume 1, dà

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

e perciò

$$2\frac{d}{dt} T = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right\} =$$

$$= \text{(usando le (2.57))} \ = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} - \dot{q}_j \frac{\partial V}{\partial q_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right\} =$$

$$= \text{(per la (2.58))} \ = \frac{d}{dt} T - \frac{d}{dt} V \ .$$

Dunque $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$ e pertanto l'energia totale $T + V$ è costante.

Esercizi

1. Determinare le estremali dei seguenti funzionali

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (u^2 + u'^2 - 2u \sin x)dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{u'^2}{x^3} dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (u^2 - u'^2 - u \operatorname{Ch} x)dx$

2. Determinare la soluzione generale dell'equazione di Eulero per un funzionale della forma

$$J[u] = \int_a^b g(x)\sqrt{1+u^2}dx \ .$$

Esaminare i casi particolari $g(x) = x$ (che significato ha $J[u]$?) $g(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1/x$ $(0 < a < b)$.

3. Sia $J[u] = \int_a^b \{a(x)u'^2 + 2b(x)uu' + 2c(x)u^2\}dx$.
Scrivere l'equazione di Eulero per J.

4.* Il solido di rivoluzione di equazione $\mathbf{r}(x,\theta) = x\,\mathbf{i} + g(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + g(x)\sin\theta\,\mathbf{k}$ $0 < x < 1$ (fig. 7.14), si muove con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ ed incontra una resistenza per unità di superficie pari al cubo della componente normale della velocità. Determinare g in modo che la resistenza sia la minima possibile (ammettere che il minimo esista).

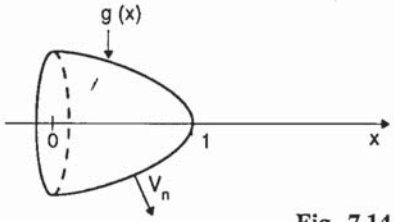


Fig. 7.14

5. Dimostrare che il sistema (2.27) ha un'unica soluzione per $0 \le \theta \le \pi$. [Studiare la funzione $h(\theta) = (\theta - \sin\theta)/(1 - \cos\theta)$].

6. Interpretare la condizione di trasversalità per funzionali del tipo $\int_a^b g(x,u)\sqrt{1+u'^2}dx$.

7. *Funzionali dipendenti dalla derivata seconda.*
Sia $J[u] = \int_a^b f(x,u,u',u'')dx$, con $f \in C^2([a,b]) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, e $\mathcal{U} = \{u \in C^2([a,b]);\ u(a) = A,\ u'(a) = A',\ u(b) = B,\ u'(b) = B'\}$.

Dimostrare che se $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ è minimante, allora annulla la variazione prima di J, data dalla formula

$$\delta J(\widehat{u})[h] = \int_a^b \{f_u h + f_{u'} h' + f_{u''} h''\}dx = 0$$

per ogni $h \in C^2(a,b)$ tale che $h(a) = h'(a) = h(b) = h'(b) = 0$.
Dedurre, almeno formalmente, che $\widehat{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{u''} - \frac{d}{dx} f_{u'} + f_u = 0 \ .$$

Generalizzare a funzionali $J[u] = \int_a^b f(x,u,u',\ldots,u^{(n)})dx$.

9. Determinare le godetiche per la sfera e per un cono circolare retto.

8. a) Dimostrare che l'equazione di Eulero per il funzionale

$$J[u] = \int_a^b f(x,y',y'')dx$$

ha l'integrale primo

$$f_{u'} - \frac{d}{dx} f_{u''} = c \ .$$

b) Determinare le estremali del funzionale quando $f = 1 + (y'')^2$.

10. Determinare le estremali del funzionale

$$J[u,v] = \int_0^{\pi/2} (u'^2 + v'^2 + 2uv)dx$$

con le condizioni $u(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$, $v(0) = 0$, $v(\pi/2) = 1$.

11. Sia $J[u,v] = \int_a^b f(u',v')dx$ tale che $f_{u'u'} f_{v'v'} - (f_{u'v'})^2 \neq 0$ in $[a,b]$. Determinare la famiglia delle estremali.

12. Determinare le estremali del funzionale $J[u] = \int_a^b (u')^2 dx$ sotto la condizione

$$K[u] = \int_a^b u^2 dx = 1 \ .$$

13. Dimostrare che l'equazione di Eulero per il funzionale

$$J[u_1,u_2,\ldots,u_n] = \int_a^b f(u_1,\ldots,u_n,u_1',\ldots,u_n')dx$$

ha l'integrale primo

$$E = f - \sum_{j=1}^n u_j' f_{u_j'} = \text{ costante} \ .$$

14. Determinare l'equazione di Eulero per i funzionali seguenti, dipendenti da funzioni di due variabili e tre variabili rispettivamente

a) $\displaystyle\iint_\Omega \{a(u_x)^2 + 2bu_x u_y + c(u_y)^2\}dx\,dy$ $\quad u = u(x,y) \quad a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^T dt \iint_\Omega \{a(u_t)^2 + b(u_x^2 + u_y^2)\}dx\,dy$ $\quad u = u(t,x,y) \quad a,b \in \mathbf{R}_+$

15.* a) Dimostrare il Lemma 2.8.

[Suggerimento: se $w(\mathbf{x}_0) > 0$ allora, per continuità, $w(\mathbf{x}) > 0$ in un intorno circolare $B_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$; scegliere $h(\mathbf{x}) = [r - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2]^2$ per $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$, $h(\mathbf{x}) = 0$ per $\mathbf{x} \in \Omega \setminus B_r(\mathbf{x}_0)$ ed arrivare ad una contraddizione].

b) Dimostrare il seguente lemma.

Sia $w \in C(\overline{\Omega})$. Se $\int_{\partial\Omega} w(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\sigma = 0$ per ogni $h \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $h|_{\partial\Omega} = 0$, allora $w|_{\partial\Omega} = 0$.

16. *Soluzione di Hurwitz del problema isoperimetrico di Didone.*

Riprendiamo il problema di massimizzare l'area racchiusa da una curva di Jordan regolare (per semplicità supponiamola di classe C^2) di perimetro L.

Siano $x = x(s), y = y(s)$, $0 \le s \le L$, le equazioni parametriche della curva riferite al parametro ascissa curvilinea.

L'idea è di utilizzare gli sviluppi in serie di Fourier e pertanto conviene porre $s = Lt/2\pi$, $0 \le t \le 2\pi$.

Essendo

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

si ha

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} . \qquad (*)$$

Il problema è massimizzare l'area A data dalla formula

$$A = \int_0^{2\pi} xy' dt$$

con il vincolo $(*)$.

Essendo $x(t)$ e $y(t)$ funzioni regolari in $[0, 2\pi]$ si possono sviluppare in serie di Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos nt + d_n \sin nt\} .$$

Inoltre:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\{-a_n \sin nt + b_n \cos nt\}$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\{-c_n \sin nt + d_n \cos nt\} .$$

Pertanto si ha, ricordando le relazioni di ortogonalità del sistema trigonometrico:

$$A = \int_0^{2\pi} xy' dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) .$$

D'altra parte, l'equazione di Bessel e $(*)$ danno:

$$\frac{L^2}{2\pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) .$$

Ne segue che

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n(a_n d_n - b_n c_n)] =$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)] .$$

L'ultima serie ha i termini non negativi, quindi si deduce

$$L^2 - 4\pi A \ge 0$$

che è la disuguaglianza isoperimetrica.

L'uguaglianza si ottiene se e solo se *tutti* i termini della serie sono nulli e cioè quando:

$$a_1 + d_1 = 0 , \; b_1 + c_1 = 0$$

e

$$c_n = d_n = 0 \quad \text{per } n \ge 2 .$$

Questo implica che

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t$$

ossia

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

che rappresenta una famiglia di cerchi.

INDICE ANALITICO

Accelerazione normale, 28, 29
  trasversale, 28, 29
Algebra di insiemi, 383
  σ–, 385, 424
Applicazione tra spazi metrici
  continua, 136
  limitata, 136
  lipschitziana, 138
Approssimazioni successive, 212
Area di una superficie, 460
Ascissa curvilinea, 23
Autovalore di una matrice, 77, 245
Autovettore di una matrice, 77, 245

Baricentro
  di un corpo solido, 368
  di un filo, 40
  di una lamina, 463
Bordo di una superficie, 442
Brachistocrona, 563, 575

Campo conservativo, 47
  irrotazionale, 50
Catenoide, 449, 484
Cerchio di convergenza, 157
  osculatore, 27
Ciclo limite, 313
Circuitazione, 56
Coefficiente di Fourier, 173
Completamento di uno spazio metrico, 134
Condizione di trasversalità, 577
Connessione per archi, 37
Contrazione, 138
Convergenza puntuale, 124, 151
  dominata, 414
  limitata, 415
  in media, 131, 180, 431
  uniforme, 125, 151
Coordinate polari
  in $\mathbb{R}^n$, 366
  piane, 346
  sferiche, 364, 457
Coseno integrale, 192
Costante del moto, v. integrale primo
Curva, 6
  chiusa, 7
  di Jordan, 7
  di von Koch, 393
  equivalente, 15
  generalmente regolare, 11
  omotopa, 58
  orientata, 9
  piana, 7,34
  regolare, 11
  rettificabile, 17
  semplice, 7
  sostegno di una, 7
Curvatura, 26
  centro di, 27
  gaussiana, 478
  media, 478
  normale, 473
  principale, 476
  raggio di, 27

Densità, 134
Dimensione, topologica, 395
  di autosimilarità, 396
  di Hausdorff, 397
Dirichlet, formula di, 185
Distanza, 117
Disuguaglianza
  di Bessel, 180
  di Schwarz, 142
Divergenza, 5
Domini semplici o normali, 337, 357, 489

ammissibile, 491, 501, 510
di dipendenza, 544, 546
s-decomponibili, 491, 510

Elicoide, 450, 484
Energia, cinetica, 47
potenziale, 47
Equazione, alle derivate parziali, 524
delle onde, 532
di diffusione, 532
di Laplace, 530
di Poisson, 529
lineare, 524, 527
parte principale, 528
quasi lineare, 524
Equazione, differenziale ordinaria, 202
autonoma, 202
di Bernoulli, 231
di Bessel, 269
di Clairaut, 235
di continuità, 512
di Eulero, 264
di Eulero-Lagrange, 570, 578, 580
di Hermite, 267
di Lagrange, 237
di Manfredi, 232
di Riccati, 232
differenziale esatta, 228
funzionale, 207
integrale di Voltena, 210
lineare, 202, 227
a variabili separabili, 229
alle variazioni, 226
Estremi liberi, 66
globali, 66
locali, 66
vincolati, 66, 94

Fattore integrante, 57, 61, 62, 234
Flusso di fase, 318
Forma differenziale, lineare, 41
esatta, 46
Forma, quadratica, 73, 528
canonica, 78
definita, 74
fondamentale, prima, 456
fondamentale, seconda, 470
indefinita, 74
semidefinita, 74
Formula/e, di riduzione, 331, 358, 422
di cambiamento di variabili, 345, 362
di coarea, 465
di d'Alembert, 555
di Guldino, 467
di Poisson, 550
Frénet, formule di, 32
Frobenius, metodo di, 267
Funzione, degli errori, 167
potenziale, 46
Funzioni, misurabili, 398
analitiche, 166
armoniche elementari, 549
continue a tratti, 182
equicontinue, 147
equilimitate, 147
ortogonali, 143, 145
sommabili, 409
Fuoco, 301

Geodetiche, 458, 564
Gradiente, 5

Indice di difetto, 528
di inerzia, 528
Insieme, stellato, 51
connesso per archi, 37
delle ordinate, 401
di Cantor, 386
di misura nulla, 335, 356, 383
frattale, 393
L misurabile, 382
$P - J$ misurabile, 335, 356
non misurabile, 403
semplicemente connesso, 57
Integrale, dell'energia, 542
curvilineo, 37, 41
di Lebesgue, 405
di Riemann, 327, 355, 407
di superficie, 462
generale, 205
generalizzato, 372
primo, 221, 289
singolare, 230
Intervallo massimale, 215
Ipersuperficie, 93

Jacobi, identità di, 2

Lagrange, identità di, 3
Lie, algebra di, 2
Linee, di flusso, 56
coordinate, 444
equipotenziali, 56
Lunghezza, di una curva, 17

Machin, formula di, 191
Mappa di Gauss, 480
Matrice, di Jordan, 246
diagonale, 245
di transizione, 254
equivalenti, 245
esponenziale, 249

norma di, 248
serie di, 248
wronskiana, 253
Metrica, discreta, 117
lagrangiana, 119
integrale, 120
riemanniana, 456
Minimi quadrati, 82
Misura, di Peano-Jordan, 335, 356, 383
con peso, 425
di Dirac, 425
di Gauss, 426
di Hausdorff, 396
di Lebesgue, 291, 382
interna, esterna di Lebesgue, 381
Modello, logistico, 198
di Lotka-Volterra, 199
di Malthus, 198
Moltiplicatori, di Lagrange, 89, 94, 103
di Kuhn-Tucker, 112
Momento di inerzia, 40, 463, 368
Moto centrale, 33

Nastro di Möbius, 453
Nodo, 298, 300

Operatore integrale, 139
Orbite (v. traiettorie)
Orientazione, di una curva, 9, 42
di una superficie, 452, 455

Parametrizzazione, di una curva, 6
di una superficie, 438
Pendolo, 241, 293, 308, 312
Piano, osculatore, 25
normale, 26
rettificante, 26
tangente, 445, 451
Plurirettangoli, Plurintervalli, 378
Polinomio trigonometrico, 180
Principio, di Hamilton, 586
del massimo, 551
della media, 551
di Dirichlet, 551
di sovrapposizione, 241
Problema, di Dirichlet, 528, 531, 541, 547
ai limiti, 275
di Cauchy, 205, 533
di Cauchy-Dirichlet, 532, 545, 551
di Cauchy–Neumann, 532, 545
di Neumann, 531, 541
isoperimetrico, 583, 590
Prodotto, scalare, 142
misto, 2
vettoriale, 1
Punto, stazionario, critico, 69, 568
critico vincolato, 88, 93
di equilibrio, 288
di sella, colle, 70, 299

Quadriche, 450

Raggio di convergenza, 157
Risonanza, 283
Rotore, 5

Seno integrale, 192
Separazione delle variabili, 547
Serie
binomiale, 169
circolari, 168
dell'arcotangente, 169
di Fourier, 171
di fuzioni, 151
di potenze, 156
di Taylor, 164
esponenziale, 167
geometrica, 151, 168
integrale, 163
iperboliche, 168
logaritmica, 168
totalmente convergente, 153
Sistema fondamentale (di soluzioni), 251
Sistemi lineari, 218, 239
hamiltoniani, 289, 320
Soluzione
asintoticamente stabile, 296
costante, 288
periodica, 288
stabile, 296
Sommabilità alla Cesaro, 195
Sottospazio, di uno spazio metrico, 135
Spazio
compatto, 132
completo, 123
delle fasi, 207, 286
di Banach, 141
di Hilbert, 142
di Lagrange, 131
di probabilità, 427
metrico, 117
normato, 140
totalmente limitato, 133
Successione
convergente, 123
di funzioni, 124
fondamentale, di Cauchy, 123
Superficie, 438
caratteristiche, 535
chiusa, 443
di area minima, 583
di rivoluzione, 448

orientabile, 452, 455
regolare, 439
regolare a pezzi, 443
semplice, 442

Tangente a una curva, 12
Torsione, 32
Traccia di una matrice, 247
Traiettorie, 207, 234, 286
ortogonali, 235

Valor medio, di una funzione, 341
Variazione prima, 568, 578, 580
seconda, 569
Varietà k-dimensionale, 93
lineare, 135
Velocità, 12
radiale, trasversale, 14
Versore tangente, 12
binormale, 25
normale, 451
normale principale, 25
Vettore curvatura, 26
di Darboux, 36
torsione, 31
Vincoli qualificati, 108

Wronskiano, 253