- $f(z) = e^{1/z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata essenziale per *f*. Se infatti prendiamo i limiti di *f(z)* per $z \to 0$ lungo l'asse dei reali prima da destra e poi da sinistra, essi sono diversi:

$$z = x \begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/z} = +\infty \\ x \in \mathbb{R}^- & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/z} = 0 \end{cases}$$

La singolarità non è quindi né un polo, né eliminabile. Essa e quindi essenziale, e si può vedere come fissato un certo valore $w \neq 0$, la funzione assume tale valore in un qualsiasi intorno di z_0.

$$w = \rho e^{i\vartheta},\ \frac{1}{z} = x + iy \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{1/z} = w; \quad e^{x+iy} = \rho e^{i\vartheta}; \quad e^x e^{iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

Le cui soluzioni sono: $x = \ln \rho$ *e* $y = \vartheta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Si ha perciò:

$$z = \frac{1}{\ln \rho + i(\vartheta + 2k\pi)}$$

il cui modulo può essere reso piccolo a piacere al variare di *k*. Fissati quindi ρ e ϑ, esistono infiniti punti *z* in cui la funzione assume il valore $\rho e^{i\vartheta}$ in un qualunque intorno di *0* se $\rho \neq 0$.

- $f(z) = |z| \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \; v(x,y) = 0$
- $f(z) = \mathrm{Re}(z) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = x, \; v(x,y) = 0$
- $f(z) = \mathrm{Im}(z) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = y, \; v(x,y) = 0$

1. ***Funzione esponenziale***: $e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Le principali proprietà di questa funzione sono:

- $e^z\big|_{\Re} = e^x$
- $\left|e^z\right| = \left|e^x(\cos x + i\sin y)\right| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$

  La funzione esponenziale in campo complesso è quindi periodica di periodo T=2πi. Ciò implica quindi che essa non è biunivoca e per questa ragione non esiste globalmente la sua funzione inversa.

Alla funzione coseno in campo complesso possiamo quindi associare le seguenti due funzioni di variabile reale:

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(x,y) = \cos x \cosh y \\ v(x,y) = -\sin x \sinh y \end{cases}$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad \Rightarrow \quad \cos(iy) = \cosh(y), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = l_1, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = l_2$$

Dalla teoria sulle forme differenziali si può quindi dedurre che:

- f ammette primitive se e solo se ω_1 e ω_2 sono esatte.
- f è olomorfa se e solo se ω_1 e ω_2 sono chiuse.
- Se f ammette primitive, allora f è olomorfa.
- Se f olomorfa e Ω è semplicemente connesso, allora f ammette primitive.

Questi risultati sono riassunti brevemente nel seguente schema:

$$\begin{tikzcd}
f \textit{ ammette primitive} \arrow[r, Leftrightarrow] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ sono esatte} \arrow[d, Rightarrow, shift right=2] \arrow[r, Leftrightarrow] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ ammettono potenziale} \\
f \textit{ è olomorfa} \arrow[r, Leftrightarrow] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ sono chiuse} \arrow[u, Rightarrow, shift right=2, "\boxed{\textit{solo se } \Omega \textit{ è semplicemente connesso}}"'] \arrow[r, Leftrightarrow] & u_x = v_y \textit{ e } u_y = -v_x
\end{tikzcd}$$

Sia γ un cammino nel piano complesso e $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$, con $r: [a,b] \rightarrow \Omega$, una sua parametrizzazione. Si definisce l'integrale di $f(z)$ lungo γ come:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

Tale integrale può essere scritto in forma estesa nella seguente maniera:

$$\int_a^b f(r(t))r'(t)dt = \int_a^b \{[u(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - v(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)] + i[v(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - u(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)]\}dt$$

Dalle relazioni precedenti si ricava che:

- $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (\omega_1 + i\omega_2)$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \omega_i = 0 \;\; i = 1,2$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ se e solo se *f* ammette primitive.
- ***Teorema di Morera:*** se $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ allora *f* è olomorfa.
- ***Teorema di Cauchy:*** se *f* è olomorfa allora $\int_\gamma f(z)dz$ dipende solo dalla classe di omotopia di γ.

Osservazioni:

- Dal teorema di Cauchy segue subito che dati due circuiti γ_1 e γ_2 tra loro omotopi e f olomorfa:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Si dice che la serie converge puntualmente in z se esiste finito (in $\mathbb{C}$) il limite della successione delle somme parziali $S_N(z)$.

- Si dice che la serie converge uniformemente a $S(z)$ su Ω se $\lim\limits_{N \to +\infty} \sup \left| S_N(z) - S(z) \right|_C = 0$

- Si dice che la serie converge assolutamente in z se ivi converge la serie dei moduli $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - z_0|^n$.

Per le serie di potenze complesse valgono in particolare i seguenti risultati:

1. L'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} : \ S_N(z) \ \mathit{converge}\}$ è detto *dominio di convergenza* della serie. In particolare per le serie di potenze si può dimostrare che l'interno di tale insieme è un disco di raggio R (che viene chiamato *raggio di convergenza*):
$$\overset{o}{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$
Sui punti di frontiera dell'insieme D è invece necessario effettuare un'analisi punto per punto. La serie converge inoltre assolutamente in D e uniformemente in ogni compatto incluso in D, in particolare in ogni insieme $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq \rho, \ \rho < R\}$.

2. Ripetendo la dimostrazione come nel caso reale, si ha che il raggio di convergenza è:
$$R = \frac{1}{l}, \quad \mathit{dove} \ \ l := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

3. Le serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza della serie di potenze e quindi è possibile derivare per serie infinite volte

- $f(z)=e^{1/z}$: $z_0 = 0$ è una singolarità isolata essenziale per *f*. Se infatti prendiamo i limiti di *f(z)* per $z \to 0$ lungo l'asse dei reali prima da destra e poi da sinistra, essi sono diversi:

$$z = x \begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/z} = +\infty \\ x \in \mathbb{R}^- & \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/z} = 0 \end{cases}$$

La singolarità non è quindi né un polo, né eliminabile. Essa e quindi essenziale, e si può vedere come fissato un certo valore $w \neq 0$, la funzione assume tale valore in un qualsiasi intorno di z_0.

$$w = \rho e^{i\vartheta},\ \frac{1}{z} = x + iy \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{1/z} = w; \quad e^{x+iy} = \rho e^{i\vartheta}; \quad e^x e^{iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

Le cui soluzioni sono: $x = \ln\rho$ *e* $y = \vartheta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Si ha perciò:

$$z = \frac{1}{\ln\rho + i(\vartheta + 2k\pi)}$$

il cui modulo può essere reso piccolo a piacere al variare di k. Fissati quindi ρ e ϑ, esistono infiniti punti z in cui la funzione assume il valore $\rho e^{i\vartheta}$ in un qualunque intorno di 0 se $\rho \neq 0$.

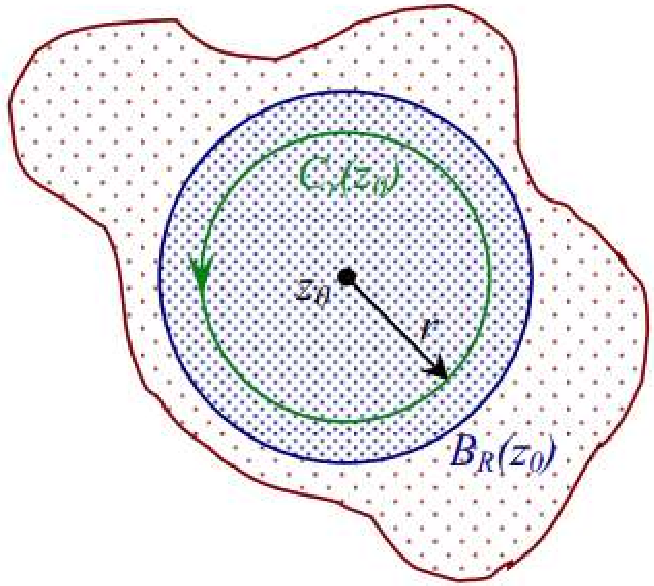
Esempi:

- $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$: $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f. Res(f, 0) = c_{-1} = 0.
- $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$: $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2, infatti: $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

  $$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{2} = 0$$

Prima di proseguire si calcoli il risultato del seguente integrale, necessario per lo sviluppo della trattazione, dove m è un intero relativo:

$$\int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^m \, dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} i r e^{it} \, dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} \, dt = \begin{cases} 0 & se\ m \neq -1 \\ 1 & se\ m = -1 \end{cases}$$



Utilizzando tale risultato e la proprietà di scambio serie - integrale (garantita dalla convergenza uniforme), si ottiene quindi che:

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz = \int_{C_r(z_0)} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \right] dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} \, dz \right] = 2\pi i \, c_k$$

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$: è possibile riscrivere tale integrale nella forma seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right]$$

Si può però notare come la parte immaginaria di tale integrale sia nulla, e quindi la parte reale dell'integrale coincide con l'integrale stesso. Infatti:

$\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$ per la disparità dell'integrando.

- $f(z) = z\cot z = \dfrac{z\cos z}{\sin z}, \quad \sin z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
    - $k = 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}\right)\cos z = 1$: $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile. Res(f, 0) = 0.
    - $k \neq 0$: $z_0 = k\pi$ è un polo di ordine 1.

$$\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)z\frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to k\pi} z\cos z\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin z} = (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi+k\pi)} =$$

$$= (-1)^k k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)\cos(k\pi)+\cos(z-k\pi)\sin(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(-1)^k}k\pi \lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)}{\sin(z-k\pi)} = k\pi = \mathrm{Res}(f, k\pi)$$

I.15 - TEOREMA DEI RESIDUI

Teorema dei residui: sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, γ un circuito in Ω omotopo a zero e f: $\Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa sul suo dominio, dove S, detto "insieme singolare", è tale che:

- S non abbia punti di accumulazione in Ω: $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega = 0$.
- La curva γ sia interamente contenuta in $\Omega \setminus S$: $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$.

Allora si ha che:

1. L'indice di avvolgimento di γ è diverso da zero per al più un numero finito di punti di S.
2. $\oint_\gamma f(z)dz = (2\pi i)\sum_{z\in S} \operatorname{Ind}(\gamma, z)\operatorname{Res}(f, z)$

I.15 - TEOREMA DEI RESIDUI

Teorema dei residui: sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, γ un circuito in Ω omotopo a zero e *f*: $\Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa sul suo dominio, dove *S*, detto "insieme singolare", è tale che:

- *S* non abbia punti di accumulazione in Ω: $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega = 0$.
- La curva γ sia interamente contenuta in $\Omega \setminus S$: $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$.

Allora si ha che:

1. L'indice di avvolgimento di γ è diverso da zero per al più un numero finito di punti di *S*.
2. $\oint_\gamma f(z)dz = (2\pi i)\sum_{z\in S} \operatorname{Ind}(\gamma, z)\operatorname{Res}(f, z)$

Proposizione: se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ tranne che in un numero finito di punti, allora la somma di tutti i residui di f (compreso quello all'infinito) è uguale a zero.

Esempio:

$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1}$: la funzione ha 5 singolarità, che sono in tutte contenuto all'interno della circuito $C_2(0)$.

Esse hanno inoltre tutte lo stesso indice (che è +1) ed essendo f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tranne questi 5 punti, possiamo quindi scrivere:

$$\int_{C_2(0)} \frac{z^2 e^{1/z}}{z^4+1} = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{\left(1/z^2\right) e^z}{(1/z^4)+1} = -\frac{e^z}{1+z^4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to 0}\left[-\frac{e^z}{1+z^4}\right] = -1$$

Tale funzione ha nell'origine una singolarità eliminabile e quindi il suo residuo è ivi nullo. L'integrale che si voleva calcolare è quindi nullo.

A questo punto non rimane altro che risolvere l'equazione algebrica: $\widehat{f_k} = \widehat{u_k} P(i\xi_k)$.

1. $P(i\xi_k) \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$: $\widehat{u_k} = \dfrac{\widehat{f_k}}{P(i\xi_k)} \ \forall k \in \mathbb{Z}$ e bisogna controllare che tale successione stia in l^2.

   Poiché, per ipotesi, $\widehat{f_k} \in l^2(\mathbb{Z})$, allora anche $\widehat{u_k} P(i\xi_k) \in l^2(\mathbb{Z})$. Ma $|P(i\xi_k)| \sim |k|^N$ per $|k| \to \infty$

   e quindi $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{u_k}\right|^2 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2N} \left|\widehat{u_k}\right|^2 \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|P(i\xi_k)\widehat{u_k}\right|^2 < +\infty$.

   La soluzione è quindi unica ed è data dalla serie di Fourier con coefficienti gli $\widehat{u_k}$ appena trovati se sono verificate le ipotesi di derivazione per serie utilizzate precedentemente. In particolare la u deve essere ad esempio assolutamente continua insieme alle sue prime $(n\text{-}1)$ derivate.

Esempio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}} = \int_0^{2\pi} \frac{2idt}{4i+e^{it}-e^{-it}} = 2\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{4ie^{it}+e^{2it}-1} = 2\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

L'ultimo integrale può essere risolto con il teorema dei residui, considerando:

$$g(z) = \frac{1}{z^2+4iz-1}, \quad \Omega = \mathbb{C}, \quad S = \{z:\ z^2+4iz-1=0\}$$

- *Caso 3:*

Integrali impropri di funzioni: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$ con le seguenti caratteristiche:

- *f(x)*$e^{i\omega x}$ ammette estensione *f(z)*$e^{i\omega z}$ in tutto un dominio Ω che comprende il semipiano dei numeri con parte immaginaria positiva: $\Omega \supseteq \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- *f(z)* abbia un numero finito di singolarità su $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ e nessuna su $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- $\lim_{R\to+\infty}\left[\sup_{C_R^+(0)} |f(z)| = 0\right], \quad \omega \in \mathbb{R}^+$

Con le stesse considerazioni del caso precedente, utilizzando in questo caso il lemma di Jordan, si arriva a concludere che anche in questo caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega z}dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z_i)$$

Risultati analoghi si possono ottenere applicando, con gli opportuni cambiamenti, le altre versioni del Lemma di Jordan.

Esempio:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$: è possibile riscrivere tale integrale nella forma seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right]$$

Si può però notare come la parte immaginaria di tale integrale sia nulla, e quindi la parte reale dell'integrale coincide con l'integrale stesso. Infatti:

$\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\left[e^{ix}\right]}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$ per la disparità dell'integrando.

II.1 - Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$). Si dice **norma** su V un'applicazione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ con le seguenti proprietà:

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \forall v \in V$ (positività)
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,(o\,\mathbb{C}), \ \forall v \in V$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Da cui seguono immediatamente anche:

4. $\|0\| = 0$
5. $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$

Uno **spazio normato** è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su V.

Esempi:

- $V = \mathbb{R}, \quad \|\cdot\| = |\cdot|$: modulo
- $V = \mathbb{R}^N, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$: norma euclidea
- $V = \mathbb{R}^N, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$: norma p, con $p \geq 1$
- $V = \mathbb{R}^N, \quad \|x\|_\infty := \max_{i \in [1,N]} \{|x_i|\}$: norma del massimo
- $V = \mathbb{C}, \quad \|\cdot\| = |\cdot|_{\mathbb{C}}$: modulo complesso
- $V = C^0([a,b]), \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$
- $V = C^0([a,b]), \quad \|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Sia E un sottoinsieme di V, si definiscono:

- <u>parte interna</u> di E: $\overset{o}{E} := \{v \in V : \exists \mathcal{U}(v) \subseteq E\}$
- <u>chiusura</u> di E: $\overline{E} := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \mathcal{U}(v) \cap E \neq 0\}$
- <u>frontiera</u> di E: $\partial E = E \setminus \overset{o}{E}$
- <u>punti di accumulazione</u> di E: $acc(E) := \{v \in V : \forall \mathcal{U}(v) \ \mathcal{U}(v) \cap (E \setminus \{v\}) \neq 0\}$

Sia $f : V \to W$ una funzione tra due spazi vettoriali normati $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$. Si dice che il **limite** di f per $v \to v_0$ (con $v, v_0 \in V$) è l (con $l \in W$) se:

$$\forall \mathcal{U}(l) \ \exists \mathcal{U}(v_0) : \forall v \in \mathcal{U}(v_0) \setminus \{v_0\} \ f(v) \in \mathcal{U}(l)$$

II.2 - Norme equivalenti

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale V si dicono **equivalenti** se:

- $\exists c_1 : \|v\|_1 \le c_1 \|v\|_2 , \quad \forall v \in V$
- $\exists c_2 : \|v\|_2 \le c_2 \|v\|_1 , \quad \forall v \in V$

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, si può dimostrare che tutte le norme su di esso sono equivalenti. Ciò è invece falso in generale per gli spazi a dimensione infinita.

Esempi:

- $V = \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \\ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\} \end{cases}$, spazio di dimensione finita.

$$\left.\begin{array}{l} - \ \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \le 2\max\{|x_1|,|x_2|\} = 2\|\underline{x}\|_\infty \\ - \ \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\} \le |x_1| + |x_2| = \|\underline{x}\|_1 \end{array}\right\} \text{le due norme sono equivalenti.}$$

- $v = C^0([a,b])$: $\left\langle \begin{array}{l} \|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \\ \|f\|_\infty = \max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| \end{array} \right.$, spazio di dimensione infinita.

  Si può vedere che solo una delle due disuguaglianze della definizione di equivalenza è sempre verificata. Infatti:

  – $\|f\|_1 = \int_a^b |f(v)|\,dv \le (b-a) \max\limits_{v\in[a,b]} |f(v)| = (b-a)\|f\|_\infty$

  – si costruisce ora un controesempio in cui la seconda disuguaglianza non vale:

  $$[a,b]=[0,1], \quad f_n(x) = x^n : \left\langle \begin{array}{l} \|f_n\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = 1, \ \forall n \\ \|f_n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\,dx = \left.\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0, \ per \ n \to +\infty \end{array} \right.$$

  si vede facilmente quindi come sia impossibile trovare una costante (indipendente da n) tale che $\|f_n\|_\infty \le c\|f_n\|_1$.

In particolare, la continuità nell'origine significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad 0 < \|x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(x)\| < \varepsilon$$

che è equivalente alla proprietà di limitatezza:

$$\exists M > 0: \quad \|T(x)\| < M\|x\|, \quad \forall x \in V$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

- per l'implicazione "limitato" $\Rightarrow$ "continuo in 0", basta scegliere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.
- per l'altra implicazione, si procede per assurdo: sia T non limitato, $\exists \{x_n\}: \quad \|T(x_n)\| = 1, \quad \|x_n\| \to 0$

  $\dfrac{x_n}{\|T(x_n)\|} = x_n \to 0,$ *ma* $T\left(\dfrac{x_n}{\|T(x_n)\|}\right) = \dfrac{T(x_n)}{\|T(x_n)\|} \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad T$ *non è continuo*

Esempio:

$V = C^0([a,b])$, $W = \mathbb{R}$; Si fissi $c \in [a,b]$ e si consideri l'operatore lineare:

$$T : V \to W; \quad T : f \mapsto f(c)$$

- $\|T(f)\|_\infty = |f(c)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$: T è limitato con $M = 1$.

$$\sup_{s_R \le f} \int s \le \sup_{s_L \le f} \int s \le \inf_{s_L \ge f} \int s \le \inf_{s_R \ge f} \int s$$

Esempio:

$$f(x)=\begin{cases} n & se \;\; x=n\in\mathbb{N} \\ 0 & x\notin\mathbb{N} \end{cases}$$ è essenzialmente limitata e $\|f\|_\infty = 0$

Dimostrazione:

Sia u una funzione in $L^q(A)$. Se si considerano ora:

- $f = |u|^s$: essa appartiene a $L^{q/s}(A)$, infatti $\int |f|^{\frac{q}{s}} = \int \left(|u|^s\right)^{\frac{q}{s}} = \int |u|^q$
- $g = \chi_A$: essa appartiene a $L^{(q/s)'}(A)$ poiché A ha misura finita

per la disuguaglianza di Hölder si ha: $\int_A |u|^s = \int_A \chi_A |u|^s \le \left(\int_A |u|^{s\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_A \chi_A \right)^{\frac{1}{(q/s)'}} = \left(\|u\|_q \right)^s |A|^{\frac{q-s}{s}}$

Elevando tutto alla (*1/s*) si ha infine che $\|u\|_s \le |A|^{\frac{q-s}{sq}} \|u\|_q$, e quindi che $u \in L^s(A)$.

In particolare si può vedere che $L^q(A)$ si immerge in $L^s(A)$ con "immersione continua", ovvero si può dimostrare che l'operatore identità $i : L^q(A) \to L^s(A), \quad i : f \mapsto f$ è lineare e quindi continuo.

Disuguaglianza di Hölder: sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Date due funzioni $f \in L^p(A)$ e $g \in L^{p'}(A)$, allora il prodotto $f \cdot g \in L^1(A)$ e vale la seguente disuguaglianza:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove p′ è l'<u>esponente coniugato</u> di p (con $p \geq 1$), definito come $p' := \dfrac{p}{p-1}$ oppure $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

In particolare: $(2)' = 2, \quad p \geq 2 \iff p' \leq 2, \quad (1)' = +\infty, \quad (+\infty)' = 1$.

Proprietà di immersione: sia A un insieme di misura finita. Se $q \geq s$, allora $L^q(A) \subseteq L^s(A)$.

Valgono invece i seguenti risultati:

- La convergenza q.o. in A implica la convergenza in $L^p(A)$ se esiste una funzione $\varphi \in L^p(A)$ tale che $|f_n| \le \varphi$ q.o. in A.
- Se una successione $\{f_n\}$ tende ad una funzione f in $L^p(A)$, allora esiste una sua sottosuccessione che tende ad f q.o. in A.

Conseguenze:

- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ q.o. in A, allora $f = g$ q.o. in A.
- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ in $L^q(A)$, allora $f = g$ q.o. in A.

- $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\quad \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\,dx = \left\langle \begin{array}{l} \xi > 0:\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}, -i\right) = \pi e^{-\xi} \\ \xi < 0:\ 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}, i\right) = \pi e^{\xi} \end{array} \right\rangle = \pi e^{-|\xi|}$

  Nel calcolo dell'integrale si è utilizzato il lemma di Jordan e il teorema dei residui. È interessante notare a questo punto che:

  $u(x) = e^{-|x|}$; $\quad \hat{u}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$; $\quad \hat{\hat{u}}(x) = \mathcal{F}\left[\hat{u}\right](x) = 2\pi e^{-|x|} = 2\pi u(x)$

  In realtà ciò non vale solo in questo caso, ma è una proprietà più generale della trasformata di Fourier che verrà trattata più avanti.

- $$u(x)=\frac{1}{1+x^2};\quad \hat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}dx=\left\langle\begin{array}{l}\xi>0:\ -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},-i\right)=\pi e^{-\xi}\\[2ex] \xi<0:\ 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},i\right)=\pi e^{\xi}\end{array}\right\rangle=\pi e^{-|\xi|}$$

  Nel calcolo dell'integrale si è utilizzato il lemma di Jordan e il teorema dei residui. È interessante notare a questo punto che:

  $$u(x)=e^{-|x|};\quad \hat{u}(\xi)=\frac{2}{1+\xi^2};\quad \hat{\hat{u}}(x)=\mathcal{F}\left[\hat{u}\right](x)=2\pi e^{-|x|}=2\pi u(x)$$

  In realtà ciò non vale solo in questo caso, ma è una proprietà più generale della trasformata di Fourier che verrà trattata più avanti.