Serie di funzioni

Successioni e serie di funzioni.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo la *successione di funzioni*

$$f_n \,:\, I \to \mathbb{R}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

Se per ogni $x \in I$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è convergente, diremo che la successione f_n *converge puntualmente* in I.

Possiamo allora definire la funzione $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Diremo che la funzione f è il *limite (puntuale) della successione* $\{f_n\}$.

Esempi

La successione

$$f_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ con limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x^2} = x\,, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbb{R}$, dove $f(x) = x$.

La successione

$$f_n(x) = x\, e^{-nx}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

converge a zero in $I = [0, +\infty)$ poiché

$$\lim_{n\to\infty} x\, e^{-nx} = 0\,, \qquad \forall\ x \geq 0\,.$$

Definizione

Una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ *converge uniformemememente in I a f* se vale

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (semplice), ma non viceversa.

Infatti, si può verificare che la successione del primo esempio converge puntualmente, ma *non* uniformemente in $\mathbb{R}$ mentre quella del secondo esempio converge uniformemente (a zero) in $[0, +\infty)$.

Esercizio:

verificare l'ultima affermazione calcolando il massimo di xe^{-nx} su $[0, +\infty)$ per ogni $n = 1, 2, ...$

L'importanza della convergenza uniforme sta nella possibilità di effettuare lo *scambio dei limiti* con le usuali operazioni dell'analisi:

Sia $f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

- Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$;
- Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Sia $f_n \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

- Se $f_n(x) \to f(x)$ e se $f_n' \to g$ *uniformemente* in $[a,b]$, allora anche f_n converge uniformemente a f e vale $f' = g$.

Si può dimostrare con controesempi che nessuno dei tre risultati è garantito senza l'ipotesi di convergenza uniforme.

Le precedenti definizioni e proprietà sono rilevanti anche nello studio delle **serie di funzioni**:

data una successione di funzioni $\{f_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...,$ $(f_n : I \to \mathbb{R})$ la *successione delle somme parziali*

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)\,,$$

si dice **serie** di termini $f_n(x)$ e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

La serie si dirà *convergente* (semplicemente, uniformemente,...) in I se lo è la successione delle somme parziali $\{s_n\}$.

Il *limite* di questa successione si dice *somma* della serie e si indica con lo stesso simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
Se dunque vale $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, scriveremo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Esempi

La serie di termini $f_n(x) = x^n$ è detta *serie geometrica* ed è un esempio di *serie di potenze*. Dall'identità

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \,,$$

segue che per $x \in (-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.
Dunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \,, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \,,$$

è un esempio di *serie trigonometrica*.
Dalla disuguaglianza

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \,,$$

e dal criterio del confronto delle serie numeriche, segue che la serie converge (assolutamente) in $\mathbb{R}$.

Anche per le serie la convergenza uniforme (delle somme parziali) garantisce la possibilità di scambio di limiti con la somma.

Tuttavia, è utile introdurre per le serie una nozione di convergenza più restrittiva (ma più semplice da verificare): la *convergenza totale*.

Definizione

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I se esiste una successione di numeri $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ tale che:

i) $|f_n(x)| \leq a_n$, per ogni $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si dimostra che la convergenza totale di una serie in I è condizione *sufficiente* per la convergenza uniforme in I.

Osserviamo che la convergenza totale implica anche la convergenza *assoluta* della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in I$.

Sia $f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente in $[a,b]$ e se f è la sua somma, allora $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$;
- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente a f in $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Sia $f_n \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni x e la *serie delle derivate* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge totalmente in $[a,b]$ e se

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

sono le rispettive somme, allora $f' = g$ (derivazione termine a termine).

Esempio

La serie trigonometrica di pag. 7 verifica le condizioni i) e ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $a_n = 1/n^2$, $n = 1, 2, ...$ Dunque la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ a una funzione continua $f(x)$.

Integrando termine a termine sull'intervallo $[0, 2\pi]$ troviamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx = 0\,.$$

Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza (puntuale) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \qquad (*)$$

Scrivere la serie delle derivate e verificare che converge totalmente in ogni intervallo $[\delta, +\infty)$, con $\delta > 0$.
Dimostrare che la serie $(*)$ è derivabile termine a termine in tutti i punti dell'insieme di convergenza.

Serie di potenze

Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione di numeri reali e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

si dice *serie di potenze* di centro x_0 e coefficienti a_n.

L'insieme di convergenza di una serie di potenze ha una proprietà particolare:

Teorema

Se una serie di potenze di centro x_0 converge in un punto $\bar{x}$ e se poniamo $r = |\bar{x} - x_0|$, allora la serie converge (assolutamente) in tutti i punti dell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dimostrazione

Scriviamo il valore assoluto del termine generale della serie nella forma

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \frac{|x-x_0|^n}{|\bar{x}-x_0|^n} = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n .$$

Poiché per ipotesi la serie converge in $\bar{x}$, deve valere

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n = 0 .$$

(condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche).
Esiste allora un intero $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, $|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leq 1$. Per tali n avremo allora

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq \left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n .$$

Ma se $|x-x_0| < r$, a destra abbiamo il termine generale della serie geometrica di ragione $q = |x-x_0|/r < 1$, che è convergente.

Per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ converge per $|x-x_0| < r$, ovvero per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Alla luce del precedente teorema, possiamo definire il **raggio di convergenza** R di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ come l'estremo superiore dei numeri r tali che la serie converge per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Per definizione abbiamo $R \geq 0$, ma può anche essere $R = 0$ o $R = +\infty$.

Sempre dalla definizione segue che per $|x - x_0| < R$ la serie converge assolutamente, mentre non converge se $|x - x_0| > R$.
Nulla si può dire in generale sul carattere della serie nei punti $x_0 \pm R$ (estremi dell'intervallo di convergenza).

Per il *calcolo* del raggio di convergenza, si possono usare i criteri della radice e del rapporto:

a) Sia $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$.
Se $L > 0$, $R = 1/L$; se $L = 0$, $R = +\infty$; se $L = +\infty$, $R = 0$.

b) Sia $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = L$.
Se $L > 0$, $R = 1/L$; se $L = 0$, $R = +\infty$; se $L = +\infty$, $R = 0$.

Esempi

La serie (esponenziale)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + ...$$

ha raggio di convergenza infinito. Infatti, usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Con lo stesso criterio del rapporto, verificare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x - x_0)^n\,,$$

ha raggio di converhenza $R = 0$, cioè converge solo per $x = x_0$ (nel centro).

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{2^n} (x-1)^n ,$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\alpha}}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha/n} = \frac{1}{2} .$$

Risulta allora $R = 2$ e la serie converge (assolutamente) per $|x-1| < 2$, quindi nell'intervallo $(-1, 3)$.

Proprietà delle serie di potenze

Supponiamo che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$ e sia r tale che $0 < r < R$.

Allora la serie converge *totalmente* nell'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Infatti, in questo intervallo sono soddisfatte le condizioni per la convergenza totale in quanto

i) $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r^n \,, \quad \forall\, x \in [x_0 - r, x_0 + r],\; n \in \mathbb{N}\,;$

ii) la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge.

Da questa osservazione e dalle proprietà delle serie totalmente convergenti discusse a pag. 9, otteniamo:

Teorema

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ la somma di una serie di potenze (di centro x_0) con raggio di convergenza $R > 0$.

Allora f è una funzione continua in $(x_0 - R, x_0 + R)$.
Inoltre, la serie è integrabile termine a termine in ogni intervallo $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n\, dx \,.$$

Dimostrazione

Se $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, esiste $r < R$ tale che $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

La serie converge totalmente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ e quindi la somma f è continua in questo intervallo; in particolare, f è continua in x.

Allo stesso modo, se $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ esiste $r < R$ tale che $[a, b] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$, per cui la serie converge totalmente in $[a, b]$ e si può integrare termine a termine in $[a, b]$.

Dal precedente teorema segue che anche una *primitiva* di f è la somma di una serie di potenze che converge nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Infatti, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ e $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, abbiamo

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}\,.$$

Cambiando l'indice di somma con la sostituzione $m = n + 1$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1}}{m} (x - x_0)^m\,.$$

Esempio

Dalla relazione

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)\,,$$

e ricordando la serie geometrica ricaviamo

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \qquad x \in (-1,1)\,.$$

Cambiando x in $-x$ e chiamando ancora n l'indice di somma abbiamo

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n\,.$$

La relazione

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n\,,$$

è stata ottenuta integrando termine a termine nell'intervallo $(-1,1)$ e quindi non si può considerare valida al di fuori di tale intervallo. In effetti, se si calcola il raggio di convergenza della serie a destra si ottiene ancora $R=1$.

Osserviamo tuttavia che nel punto $x=1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,,$$

che *converge* per il criterio di Leibniz.

Si può dimostrare (Teorema di Abel) che se una serie di potenze converge ad un estremo dell'intervallo di convergenza, diciamo x_0+R, la sua somma è una funzione *continua* in $(\,x_0-R, x_0+R\,]$.

La relazione

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n\,,$$

è stata ottenuta integrando termine a termine nell'intervallo $(-1,1)$ e quindi non si può considerare valida al di fuori di tale intervallo. In effetti, se si calcola il raggio di convergenza della serie a destra si ottiene ancora $R = 1$.

Osserviamo tuttavia che nel punto $x = 1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,,$$

che *converge* per il criterio di Leibniz.

Si può dimostrare (Teorema di Abel) che se una serie di potenze converge ad un estremo dell'intervallo di convergenza, diciamo $x_0 + R$, la sua somma è una funzione *continua* in $(\,x_0 - R, x_0 + R\,]$.

Applicando questo risultato alla serie in alto ricaviamo l'identità:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Derivazione termine a termine delle serie di potenze

Partiamo dalla seguente osservazione:

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza R, si dimostra che la *serie delle derivate*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\, a_{m+1}(x - x_0)^m$$

ha lo stesso raggio di convergenza R.

Come a pag. 16, si conclude che anche la serie delle derivate converge *totalmente* in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, dove $0 < r < R$.

Sono allora soddisfatte le condizioni di pag. 9 per la derivabilità termine a termine della somma della serie in ogni punto $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Vale allora il seguente risultato:

Teorema

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ in $(x_0 - R, x_0 + R)$, allora f è derivabile nello stesso intervallo, con derivata uguale a

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\, a_{m+1}(x - x_0)^m \,. \ \square$$

Poiché gli argomenti della pagina precedente si possono iterare un numero arbitrario di volte, si conclude che la somma f di una serie di potenze che converge in $(x_0 - R, x_0 + R)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

Le derivate si calcolano allora con la formula

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)\, a_n\,(x - x_0)^{n-k} =$$

(sostituendo $n - k = m$)

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(m+k)(m+k-1)...(m+1)\, a_{m+k}\,(x - x_0)^m \,.$$

Ponendo $x = x_0$, tutti i termini della serie successivi al primo si annullano e ricaviamo l'identità:

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k\,.$$

La relazione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si può allora riscrivere nella forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n\,.$$

La serie a destra si dice *serie di Taylor* di f (di McLaurin se $x_0 = 0$).

Esercizio

Calcolare tutte le derivate della funzione $\ln(1 + x)$ nell'origine, scrivere la serie di McLaurin e riottenere la serie di pag. 20.

Le proprietà delle serie di potenze discusse sopra suggeriscono la seguente definizione:

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$, dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto (non necessariamente un intervallo).
Si dice che f è *analitica* in $x_0 \in A$ se esiste un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ in cui vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n , \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r) .$$

In altri termini, una funzione f di classe $\mathcal{C}^\infty$ è analitica in un punto se si può rappresentare come somma di una serie di potenze (la serie di Taylor di f) in un intorno del punto. Si dice anche che f è *sviluppabile in serie di Taylor*.

Osservazione

Come abbiamo già osservato nel caso della funzione $\ln(1 + x)$, per ricavare la serie di Taylor di una funzione f non è sempre necessario calcolare le derivate di tutti gli ordini di f, ma si possono utilizzare sviluppi già noti.
Per quanto dimostrato, in qualunque modo si ricavi una rappresentazione di f come serie di potenze, quella è la sua serie di Taylor.

Esempi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(serie esponenziale)}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R} .$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n , \qquad x \in (-1,1) \quad \text{(serie binomiale)}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)/n!$.

A partire da questi sviluppi si ottengono altre rappresentazioni di funzioni interessanti. Per esempio, sostituendo $x \to -x^2$ nella serie esponenziale si ottiene

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Integrando termine a termine, si ottiene una rappresentazione in serie di potenze della *funzione degli errori di Gauss*:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\, x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Osservazione

Esistono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ che *non* sono analitiche in $\mathbb{R}$.

Il motivo si capisce scrivendo la *formula di Taylor* di ordine n arbitrario

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^k + R_n(x)\,,$$

e poi facendo il limite per $n \to \infty$.

Si vede allora che la serie di Taylor converge a $f(x)$ *se vale la condizione* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ per ogni x in un intorno di x_0 .

Questa condizione non è sempre soddisfatta, ma richiede qualche limitazione sulla crescita delle derivate $f^{(n)}(x)$ al crescere di n.

Esercizi

i) Verificare che

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n} \,,$$

per $x \in (-1, 1)$.

Trovare lo sviluppo di McLaurin di $f(x) = \arctan x$ integrando termine a termine la serie precedente.

ii) Scrivere la serie di Taylor con centro in $x_0 = 1$ per la funzione $f(x) = 1/x$.

iii) Scrivere i primi 3 termini dello sviluppo in serie binomiale della funzione $f(x) = (1+x)^{-1/2}$.

Dimostrare che vale la seguente approssimazione per l'*energia relativistica* di una particella di massa m e velocità v:

$$E := \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{3}{8}\, m\frac{v^4}{c^2} + ...$$

Convergenza in media quadratica delle serie di Fourier

Per la definizione e le proprietà elementari delle serie di Fourier vedere il file *Serie di Fourier*.

Nello spazio delle funzioni limitate e integrabili su $(-\pi, \pi)$ definiamo lo *scarto quadratico* :

$$\|f-g\| := \left[\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)-g(x)\big)^2\, dx\right]^{1/2}.$$

Data una funzione f limitata e $2\pi-$periodica, denotiamo con

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

la somma parziale $n-$esima della serie di Fourier associata.
I coefficienti a_k, b_k sono quindi i *coefficienti di Fourier* di f:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx\,; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx\,.$$

Con calcoli elementari, utilizzando le *relazioni di ortogonalità*, si dimostra che s_n verifica la seguente proprietà di minimo:

Detto $\sigma_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right]$ un *generico* polinomio trigonometrico di ordine n, lo scarto quadratico

$$\|f - \sigma_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - \sigma_n(x)\big)^2 \, dx$$

assume il valore minimo per $\sigma_n = s_n$ e risulta:

$$\|f - s_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \pi \Big[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big({a_k}^2 + {b_k}^2\big) \Big] .$$

Da questa relazione si ricavano notevoli proprietà dei coefficienti di Fourier di una funzione (a quadrato integrabile):

Osserviamo subito che vale la disuguaglianza (di Bessel)

$$\pi\Big[\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big({a_k}^2+{b_k}^2\big)\Big]\le\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx\,,$$

da cui segue che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big({a_k}^2+{b_k}^2\big)$$

è convergente.

Ma il termine generale di una serie convergente tende a zero, per cui ricaviamo facilmente le relazioni

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0\,.$$

(Lemma di Riemann-Lebesgue). Questa relazione viene usata per dimostrare il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier.

Infine, per quanto riguarda la convergenza delle serie di Fourier nel senso dello scarto quadratico (o convergenza in media quadratica) si dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$$

e di conseguenza vale la relazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \Big[\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left({a_k}^2 + {b_k}^2 \right) \Big]$$

(Identità di Parseval)

Esempio

Dallo sviluppo $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nx)\,, \; \big(x \in (-\pi, \pi) \big)$ e dall'identità di Parseval, si ottiene

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \pi \Big[\frac{2}{9}\pi^4 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Big] ,$$

da cui segue l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$