Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Esame di Analisi III, 7 febbraio 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)

Sia

$$f(z) := \frac{z^2+4}{z(z^2+1)},$$

e sia γ la curva del piano complesso parametrizzata da $r(t) = 4e^{it}$, per $t \in [0, 2\pi)$.

(a) Determinare le singolarità isolate di f e classificarle.

(b) Determinare l'indice di γ rispetto a ciascuna di tali singolarità.

(c) Calcolare $\int_\gamma f(z)\,dz$.

Soluzione.

(a) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, tutti poli semplici

(b) $\mathrm{Ind}(\gamma, z_i) = 1$ per $i = 1, 2, 3$.

(c) $2\pi i$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito) Siano f, g e h le funzioni definite su $[0, 2\pi]$ aventi serie di Fourier date rispettivamente da:

$$f(x) : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx), \qquad g(x) : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{1}{n^4} \sin(nx), \qquad h(x) : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nx)\,.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa.

(a) $f \in L^2(0, 2\pi)$

(b) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, ma $g \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

(c) La serie di Fourier di h converge uniformemente a h

(d) $\|h\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$

Soluzione.

(a) **F**

(b) **V**

(c) **V**

(d) **F**

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)

Sia

$$u_n(x) := n^3(x-n)^2\chi_{[n-\frac{1}{n},n+\frac{1}{n}]}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Determinare il limite puntuale quasi ovunque della successione u_n.

(b) Stabilire se la successione u_n converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$.

(c) Stabilire se la successione u_n ammette limite in $L^\infty(\mathbb{R})$.

(d) Stabilire per quali $p \in [1,+\infty)$ la successione u_n ammette limite in $L^p(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) Si ha $u_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, per n abbastanza grande si ha $x \notin [n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}]$, e quindi $u_n(x) = 0$.

(b) Se K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$, per n abbastanza grande si ha $K \cap [n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}] = \emptyset$, e quindi $u_n(x) \equiv 0$ su K. Quindi $u_n \to 0$ uniformemente su K.

(c) La successione u_n non converge in $L^\infty(\mathbb{R})$, in quanto

$$u_n\big(n+\frac{1}{n}\big) = n^3\big(n+\frac{1}{n}-n\big)^2 = n \to +\infty\,.$$

(d) Se u_n ammette un limite in $L^p(\mathbb{R})$, tale limite deve coincidere con il limite puntuale. D'altra parte si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|^p\,dx = n^{3p}\int_{n-\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} (x-n)^{2p}\,dx = n^{3p}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} y^{2p}\,dy = 2n^{3p}\int_0^{\frac{1}{n}} y^{2p}\,dy = \frac{2}{2p+1}\frac{n^{3p}}{n^{2p+1}} = \frac{2}{2p+1}n^{p-1}\,.$$

Quindi la successione non converge in $L^p(\mathbb{R})$ per nessun $p \in [1,+\infty)$.

TEORIA. (7 punti)

(a) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, per $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \chi_{[0,1]}(x) & \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

(b) Enunciare il Teorema di Fubini.

(c) Dimostrare che $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$

Soluzione.

(a) $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x-1}^{x} e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy\,.$

(b)-(c) Si veda uno dei testi consigliati.