Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova intermedia di Analisi III, 14 novembre 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)

(a) Sviluppare $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ in serie di Laurent di potenze di z, nel cerchio di centro 0 e raggio 1 (privato dell' origine).

$$\sum_{k=-3}^{+\infty} z^k$$

(b) Calcolare $\int_\gamma \frac{\sin z}{z-i}\, dz$ dove $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\pi(e^{-1} - e)$$

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) $L^\infty(\mathbb{R})$ munito della norma $\operatorname{esssup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ è uno spazio di Banach.

(b) $L^1(\mathbb{R})$ munito della norma $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ è uno spazio di Hilbert.

(c) La funzione di Heaviside $H(x)$ che vale 1 se $x \geq 0$ e 0 se $x < 0$ appartiene allo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(d) La funzione di Heaviside $H(x)$ di cui al punto precedente appartiene allo spazio di Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

Sono vere (a) e (c)

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Stabilire se f_n converge:

(a) puntualmente quasi ovunque su $\mathbb{R}$

(b) in $L^1(\mathbb{R})$

(c) in $L^\infty([1,+\infty))$

(d) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

e nei casi affermativi determinare il limite.

Soluzione.
(a) Per ogni $x \neq 0$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Pertanto il limite puntuale quasi ovunque di f_n è la funzione $f(x) = 0$.

(b) Si ha, utilizzando il cambio di variabile $nx = y$,

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = 1\,.$$

Pertanto f_n non converge in $L^1(\mathbb{R})$ (se convergesse, per il punto (a), il limite dovrebbe essere 0, ma la norma in $L^1(\mathbb{R})$ vale 1 per ogni $n \in \mathbb{N}$).

(c) Poiché $f_n(x)$ è monotona decrescente si ha, per ogni $x \geq 1$

$$0 = f_n(x) = |f_n(x)| \leq |f_n(1)|.$$

Pertanto

$$\|f_n\|_{L^\infty([1,+\infty))} = |f_n(1)| = \frac{n}{\pi(1+n^2)}\,,$$

e quindi f_n converge a 0 in $L^\infty([1,+\infty))$.

(d) Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ una funzione test. Si ha, usando di nuovo il cambio di variabile $nx = y$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{(1+n^2x^2)}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y^2)}\varphi\big(\frac{y}{n}\big)\,dy\,.$$

La successione

$$g_n(y) := \frac{1}{(1+y^2)}\varphi\big(\frac{y}{n}\big)$$

converge puntualmente a

$$g(y) := \frac{1}{(1+y^2)}\varphi(0)\,,$$

ed è maggiorata in modulo da

$$\|\varphi\|_\infty \frac{1}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Pertanto, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty} g_n(y)\,dy = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+y^2)}\,dy = \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle\,.$$

Concludiamo che

$$f_n \to \delta_0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,.$$

TEORIA. (7 punti)

(a) Enunciare la definizione di funzione assolutamente continua.

(b) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in uno spazio di Hilbert.