Derivate parziali, derivate direzionali, differenziabilità

1. a) Calcolare le derivate direzionali e le derivate parziali in $(0,1)$ di $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$. b) Vale la formula del gradiente? f è differenziabile in $(0,1)$? c) Calcolare $D_{\underline{v}} f(0,1)$, dove $\underline{v}$ è il versore individuato dalla retta $y = \sqrt{3}x$ orientato nel verso delle x crescenti. d) Calcolare $D_{\underline{v}} f(0,1)$, dove $\underline{v}$ è il versore individuato dalla retta $y = 2x$ orientato nel verso delle x crescenti.

2. Calcolare le derivate parziali in $(0,0)$ di $f(x,y) = \sqrt[5]{y^3 \sin^2 x}$.

3. Calcolare, se esistono, le derivate parziali in $(0,3)$ di $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$.

4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostrare che f non è continua in $(0,0)$, ma che ammette derivate direzionali in $(0,0)$ lungo qualunque direzione.

5. Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. a) Disegnare il grafico di f. b) Calcolare, dove esistono, le derivate parziali di f.

6. Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$. a) Disegnare il grafico di f. b) Mostrare che f è differenziabile nel punto $(1,1)$, utilizzando la definizione. c) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$.

7. Sia $f(x,y) = xe^{x^2}\sqrt{y}$. a) Determinare il dominio D di f. b) Calcolare, dove esistono, le derivate parziali di f.

8. Sia $f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$. a) Determinare il dominio D di f. b) Calcolare, dove esistono, le derivate parziali di f. c) Mostrare che f è differenziabile in $(0,0)$. d) Stabilire dove f è differenziabile.

9. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcolare le derivate parziali di f. b) Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$. c) Vale la formula del gradiente in $(0,0)$? d) Mostrare che f non è differenziabile in $(0,0)$.

10. Dire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua, derivabile, differenziabile in $(0,0)$.

11. Calcolare la derivata della funzione $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{x^2-y^2}$ nella generica direzione $\underline{v}$, nel punto $(1,1)$.

12. Si consideri la funzione $f(x,y) = y^2 e^{4x}$. a) La funzione è differenziabile nel punto $(0,-1)$? Vale la formula del gradiente nel punto $(0,-1)$? Si calcolino gradiente e derivate direzionali nel punto $(0,-1)$. b) Qual è la direzione di massima crescita di f nel punto $(0,-1)$? Quale quella in cui $D_{\underline{v}}f(0,-1) = 0$?

13. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di $f(x,y) = e^x \sin y$ in $(1,\pi)$, giustificandone l'esistenza. Calcolare poi $D_{\underline{v}}f(1,\pi)$, dove $\underline{v} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

14. Sia $f(x,y) = (x+1)y + \log(1+2x)$. a) Calcolare $\nabla f(0,0)$ e determinare massimo e minimo di $\nabla f(0,0) \cdot \underline{v}$, al variare di $\underline{v}$ versore qualunque del piano x, y. b) Verificare che $\nabla f(0,0)$ è ortogonale in $(0,0)$ alla linea di equazione $y = -\dfrac{\log(1+2x)}{1+x}$.

15. Data la superficie S di equazione $z = x^y$, dire in quale punto di S il piano tangente è parallelo al piano x, y.

16. Sia $f(x,y) = x \sin y$. Determinare lungo quale direzione $D_{\underline{v}}f(1,1) = 0$.

17. Sia $f(x,y) = y^4 e^{3x}$. Determinare lungo quale direzione $D_{\underline{v}}f(0,-1) = 1$.

18. Sia $f(x,y) = e^{3x}\dfrac{\sqrt{y}}{x}$. a) Calcolare il gradiente di f nel punto $P = (1,1)$; b) determinare l'equazione della linea di livello C di f passante per P e calcolare il coefficiente angolare della retta tangente a C in P; c) verificare che il gradiente di f è perpendicolare a C in P.

19. Sia $f(x,y) = ye^{-x^2y}$. a) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di f nel punto $(1,2,\frac{2}{e^2})$; b) sia C la linea di livello passante per $P=(1,2)$, scrivere l'equazione della retta tangente a C in P.

Soluzioni.

1. a) Se $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $D_{\underline{v}}f(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, 1+t\sin\theta) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\cos^2\theta t\sin\theta}}{t} = \sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta}$. In particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$.
b) Non vale la formula del gradiente, pertanto f non è differnziabile in $(0,1)$.
c) Si ha che $\underline{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quindi $D_{\underline{v}}f(0,1) = \frac{\sqrt[6]{3}}{2}$. d) Si ha che $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, con $\tan\theta = 2$, quindi $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, quindi $D_{\underline{v}}f(0,1) = \sqrt[3]{\frac{2}{5\sqrt{5}}}$.

2. Si ha che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{5}\frac{y^3\sin x\cos x}{\sqrt[5]{(y^3\sin^2 x)^4}}$, dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Calcoliamola allora con la definizione: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$, analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,3)-f(0,3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|(h^2+5)}}{h} = \infty$, quindi non esiste; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,3+h)-f(0,3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$.

4. Poiché $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1 \neq 0$, si può concludere che f non è continua in $(0,0)$. Calcoliamo le derivate direzionali in $(0,0)$:

$$D_{\underline{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2\cos^2\theta t\sin\theta}{(t^4\cos^4\theta + t^2\sin^2\theta)t} = 2\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta},$$

se $\sin\theta \neq 0$; se $\sin\theta = 0$ si ha che $D_{\underline{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t\cos\theta,0) - f(0,0)}{t} = 0$.

5. a) Il grafico di f è un cono circolare retto. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste, infatti $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ non esiste; analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

6. a) Il grafico di f è un paraboloide. b) f è differenziabile in $(1,1)$ infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,1+k) - f(1,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)^2 + (1+k)^2 - 2 - 2h - 2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

c) L'equazione del piano tangente è: $z = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 2x + 2y - 2$.

7. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{y}e^{x^2}(1+2x^2)$, esiste in D. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{xe^{x^2}}{2\sqrt{y}}$ se $y \neq 0$; se $x \neq 0$ e $y = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ non esiste; in $(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$. Dunque la derivata parziale di f rispetto a y esiste in D eccetto che nei punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$.

8. a) $D = \mathbb{R}^2$. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt[3]{y}$, esiste in $\mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$ se $y \neq 0$; se $x \neq 0$ e $y = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ non esiste; in $(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$. Dunque la derivata parziale di f rispetto a y esiste in $\mathbb{R}^2$ eccetto che nei punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. c) f è differenziabile in $(0,0)$ infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[3]{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$\lim_{\rho\to 0} \dfrac{\rho\cos\theta\sqrt[3]{\rho\sin\theta}}{\rho} = 0$, qualunque sia θ. N.B. f è differenziabile in $(0,0)$

nonostante che in $(0,0)$ non sia verificata la condizione sufficiente di differenziabilità. d) f è differenziabile in tutti i punti del tipo (x,y) con $y \neq 0$, perché in tali punti ammette derivate parziali e le derivate parziali sono continue in un intorno di tali punti; f è differenziabile anche in $(0,0)$ per il punto precedente.

9. a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$. In $(0,0)$ si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$.
b) $D_{\underline{v}}f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^3} = \cos\theta\sin^2\theta$.
c) In $(0,0)$ non vale la formula del gradiente, infatti: $D_{\underline{v}}f(0,0) = \cos\theta\sin^2\theta \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\sin\theta = 0$. d) Ovviamente f non sarà differenziabile in $(0,0)$, altrimenti varrebbe la formula del gradiente. Mostriamolo con la definizione:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} = \cos\theta\sin^2\theta,$$ dipende da θ, quindi non esiste.

10. La funzione è continua in $(0,0)$, infatti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho} + 1 = \lim_{\rho\to 0} \rho|\cos\theta\sin\theta| + 1 = 1,$$

qualunque sia θ. Poiché se $x = 0$, oppure se $y = 0$, la funzione è identicamente uguale a 1, entrambe le derivate parziali esistono nell'origine e sono nulle. Per la differenziabilità, calcoliamo il $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k)-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2} = |\cos\theta\sin\theta|$; tale limite dipende da θ, quindi non esiste e f non è differenziabili in $(0,0)$.

11. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^2$, dunque differenziabile. Applicando la formula del gradiente si trova che $D_{\underline{v}}f(1,1) = 2\cos\theta - 2\sin\theta$.

12. a) f è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^2$, dunque è differenziabile ovunque, e vale la formula del gradiente. $\nabla f(0,-1) = (4,-2)$. $D_{\underline{v}}f(0,-1) = 4\cos\theta - 2\sin\theta$. b) La direzione di massima crescita è quella del gradiente: $\underline{v} = \dfrac{(4,-2)}{2\sqrt{5}}$.

$D_{\underline{v}}f(0,-1) = 0$ se $\underline{v}$ è perpendicolare al gradiente, cioè se $\underline{v} = \dfrac{(2,4)}{2\sqrt{5}}$, o $\underline{v} = \dfrac{(-2,-4)}{2\sqrt{5}}$.

13. Si ha che: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$, le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2$, dunque f è ovunque differenziabile. L'equazione del piano tangente in $(1,\pi)$ è: $z = f(1,\pi) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,\pi)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)(y-\pi)$, cioè $z + ey = e\pi$. Poiché f è differenziabile in $(1,\pi)$, per calcolare la derivata direzionale possiamo applicare la formula del gradiente: $D_{\underline{v}}f(1,\pi) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,\pi)\dfrac{3}{5} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)\dfrac{4}{5} = -\dfrac{4}{5}e$.

14. a) Si ha che: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \dfrac{2}{1+2x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+1$, quindi $\nabla f(0,0) = (2,1)$. $\nabla f(0,0) \cdot \underline{v}$ è massimo nella direzione e verso del gradiente, cioè se $\underline{v} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; è minimo $\underline{v} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. b) La curva data è tangente in $(0,0)$ alla retta di coefficiente angolare: $y'(0) = -2$; si tratta quindi di mostrare che $\nabla f(0,0)$ è ortogonale a tale retta. Sia $\underline{w} = (1,-2)$, un vettore direzione della retta, poiché $\nabla f(0,0) \cdot \underline{w} = (2,1) \cdot (1,-2) = 0$, il gradiente è ortogonale alla retta $y = -2x$.

15. Il piano tangente in $P = (x, y, f(x,y))$ è parallelo al piano x, y se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Calcoliamo le derivate parziali: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \log x$; esse si annullano contemporaneamente per $x = 1, y = 0$, dunque il piano tangente in $(1,0,1)$ è parallelo al piano x, y e ha equazione $z = 1$.

16. La derivata direzionale è nulla nella direzione ortogonale al gradiente. Si ha che: $\nabla f(1,1) = (\sin 1, \cos 1)$, quindi $\underline{v} = (\cos 1, -\sin 1)$ oppure $\underline{v} = (-\cos 1, \sin 1)$.

17. $\nabla f(0,-1) = (3,-4)$; sia $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$; $D_{\underline{v}}f(0,-1) = 0$ se $\underline{v}$ è ortogonale al gradiente, cioè se $3\cos\theta - 4\sin\theta = 0$. Tenendo conto della relazione $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0$, si trova $\underline{v} = \pm\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

18. a) $\nabla f(1,1) = (2e^3, \dfrac{e^3}{2})$; b) $y = x^2 e^{6-6x},\ y'(1) = -4$; c) $\nabla f(1,1) \cdot (1,-4) = 0$.

19. a) $z = \dfrac{1}{e^2}(12 - 8x - y)$; b) $y = -8x + 10$.