Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 10/11/2018
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 8) Si consideri, al variare del parametro $k \geq 0$, la funzione complessa di variabile complessa $f_k : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_k(z) = \frac{2-kz}{1-iz}.$$

- Stabilire, al variare del parametro $k \geq 0$, per quali $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ $f_k(z)$ è reale.
- Sia, al variare del parametro $k \geq 0$, $A_k \subset \mathbb{C}$ l'insieme determinato al punto precedente. Calcolare, per ogni $z \in A_k$ la quantità $|e^z|$. Successivamente stabilire se l'insieme $B_k \subset \mathbb{R}$ definito come $B_k := \{s \text{ t.c. } s = \left|e^{iz}\right|, z \in A_k\}$ è limitato.

Soluzione. Scritto $z = x + iy$ si ottiene, moltiplicando e dividendo per il complesso coniugato del denominatore, cioè $1 + i\overline{z}$:

$$\begin{aligned}\frac{2-kz}{1-iz} &= \frac{[2-k(x+iy)]\,[1+i(x-iy)]}{(1+y)^2+x^2} \\ &= \frac{(2-kx)(1+y)+kxy+i[x(2-kx)-ky(1+y)]}{(1+y)^2+x^2}.\end{aligned}$$

Dunque $f_k(z)$ è reale se e solo se $2x - kx^2 - ky - ky^2 = 0$. Se $k = 0$ si ottiene $x = 0$, dunque il luogo dei punti cercati è l'asse immaginario privato del punto $z = -i$, se $k > 0$ invece deve valere $x^2 + y^2 + y - \frac{2}{k}x = 0$. Tale equazione individua la circonferenza di centro $\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}$, privata del punto $z = -i$.

Circa il secondo punto, se $z = x + iy$ allora per definizione $e^z = e^x\, e^{iy}$ e dunque $|e^z| = e^x$. Nel caso $k = 0$ dunque il modulo cercato vale sempre uno, mentre se $k > 0$ il modulo cercato vale appunto, se $z = x+iy$, e^x per ogni $x \in \left[\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]$. Analogamente, $\left|e^{iz}\right| = e^{-y}$ Tale quantità è evidentemente limitata per ogni $k > 0$, essendo y limitata se $x = x + iy$ sta sulla circonferenza prima trovata, mentre non lo è se $k = 0$ dato che in tal caso y può assumere qualsiasi valore.

2. (punti 12) Sia k un parametro reale e sia data $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+kx_2-x_3\\-x_2+(k-1)x_3+x_4\\3x_1+2kx_2-x_3+kx_4\end{pmatrix}$$

- Determinare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di f al variare del parametro k.
- Determinare una base per il nucleo in un caso in cui esso sia bidimensionale.
- Posto $k=0$, determinare la controimmagine della retta $(t,2t,3t)^T$ attraverso f_0

Soluzione.

- La matrice associata alla funzione f è:

$$A=\begin{pmatrix}1&k&-1&0\\0&-1&k-1&1\\3&2k&-1&k\end{pmatrix}$$

Sono presenti minori di ordine due non nulli, per esempio quello formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne. I minori orlati di ordine tre sono:

$$\det\begin{pmatrix}1&k&-1\\0&-1&k-1\\3&2k&-1\end{pmatrix}=k^2-k-2=(k+1)(k-2)\qquad \text{e}\qquad \det\begin{pmatrix}1&k&0\\0&-1&1\\3&2k&k\end{pmatrix}=0\quad\forall k\in\mathbb{R}.$$

Entrambi si annullano solo per $k=-1$ o $k=2$. Quindi, per il teorema di Kronecker, il rango della matrice A vale due se $k=-1\vee k=2$, vale tre se $k\neq-1\wedge k\neq 2$.
Dal teorema di nullità più rango si ha: Dim $(\mathrm{Im}\,(f))+\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\,(f))=4$. Quindi:

Dim $(\mathrm{Im}\,(f))=2$ e Dim $(\mathrm{Ker}\,(f))=2$ se $k=-1\vee k=2$,
Dim $(\mathrm{Im}\,(f))=3$ e Dim $(\mathrm{Ker}\,(f))=1$ se $k\neq-1\wedge k\neq 2$.

- Occorre risolvere il sistema omogeneo in uno dei casi $k=-1\vee k=2$. Sia per esempio $k=2$:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Valendo due il rango della matrice, si è scelto di omettere la terza riga in quanto è ridondante. La forma a scala della matrice suggerisce di scegliere come parametri liberi le variabili x_3 e x_4, pertanto la soluzione risulta essere: $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$, $x_2=\alpha+\beta$, $x_1=-\alpha-2\beta$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Il nucleo risulta quindi formato dall'insieme di vettori:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-2\beta\\\alpha+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Due vettori indipendenti di questo spazio formano una base, ad esempio si possono scegliere $\boldsymbol{v}_1=(-1,1,1,0)^T$ e $\boldsymbol{v}_2=(-2,1,0,1)^T$

- Occorre risolvere il sistema non omogeneo:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&-1&1\\3&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\2t\\3t\end{pmatrix}$$

Si è precedentemente stabilito che la matrice dei coefficienti ha rango tre e coincide col rango della matrice completa. Per il teorema di Rouché-Capelli segue che il sistema ammette ∞^1 soluzioni per ogni fissato $t\in\mathbb{R}$.
Sottraendo il triplo della prima riga alla terza riga, la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&t\\0&-1&-1&1&2t\\0&0&2&0&0\end{array}\right)$$

da cui si ricava immediatamente che $x_3=0$. Posto $x_4=\alpha$, segue inoltre: $x_1=t$ e $x_2=2t+\alpha$.

3. (punti 12) Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} -5 & h-3 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ -6 & 2h-4 & 4 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quale valore di h la matrice A_h non è diagonalizzabile.
- Stabilire per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v}_h = (1, h, 3)^T$ è autovettore di A_h

Soluzione.

- Si determinano gli autovalori della matrice A_h ponendo uguale a zero il polinomio caretteristico:

$$0 = \det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (h-\lambda)\left[(-5-\lambda)(4-\lambda)+18\right] = (h-\lambda)\left[\lambda^2+\lambda-2\right] = (h-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

da cui si ricava che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = h$.
Se $h \neq -2 \wedge h \neq 1$ gli autovalori sono tutti semplici pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = 1$ esiste un autovettore $(\lambda_2 = 1)$ con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:

$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango uno, quindi la molteplicità geometrica è uguale a due e coincide con la molteplicità algebrica. Dunque per $h = 1$ la matrice è ancora diagonalizzabile.
Se $h = -2$ esiste ancora un autovettore $(\lambda_1 = -2)$ con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:

$$A_{-2} + 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

In questo caso le righe non nulle non sono proporzionali, quindi la matrice ha rango due. la molteplicità geometrica è uguale a uno ed è diversa dalla molteplicità algebrica. Pertanto per $h = -2$ la matrice non è diagonalizzabile.

- Deve valere, per qualche valore $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -5 & h-3 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ -6 & 2h-4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{cases} -5 + h(h-3) + 9 = \lambda \\ h^2 = h\lambda \\ -6 + h(2h-4) + 12 = 3\lambda \end{cases}$$

Se $h = 0$ dalla prima equazione segue $\lambda = 4$ ma dalla terza: $\lambda = 2$ pertanto il sistema è impossibile.
Se $h \neq 0$ dalla seconda equazione si ricava $h = \lambda$. La prima equazione diventa: $h^2 - 4h + 4 = 0$, dalla quale si ottiene $h = 2$, valore che soddisfa anche la terza equazione.
Quindi il vettore $\boldsymbol{v}_h$ è autovettore della matrice A_h (relativo all'autovalore $\lambda = 2$) se e solo se $h = 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 10/11/2018
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 8) Si consideri, al variare del parametro $k \geq 0$, la funzione complessa di variabile complessa $f_k : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f_k(z) = \frac{2 + kz}{1 + iz}.$$

- Stabilire, al variare del parametro $k \geq 0$, per quali $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ $f_k(z)$ è reale.
- Sia, al variare del parametro $k \geq 0$, $A_k \subset \mathbb{C}$ l'insieme determinato al punto precedente. Calcolare, per ogni $z \in A_k$ la quantità $|e^z|$. Successivamente stabilire se l'insieme $B_k \subset \mathbb{R}$ definito come $B_k := \{s \text{ t.c. } s = \left|e^{iz}\right|, z \in A_k\}$ è limitato.

Soluzione. Scritto $z = x + iy$ si ottiene, moltiplicando e dividendo per il complesso coniugato del denominatore, cioè $1 + i\overline{z}$:

$$\begin{aligned}\frac{2 + kz}{1 + iz} &= \frac{[2 + k(x + iy)]\,[1 - i(x - iy)]}{(1 - y)^2 + x^2} \\ &= \frac{(2 + kx)(1 - y) + kxy + i[ky(1 - y) - x(2 + kx)]}{(1 - y)^2 + x^2}.\end{aligned}$$

Dunque $f_k(z)$ è reale se e solo se $ky - ky^2 - 2x - kx^2 = 0$. Se $k = 0$ si ottiene $x = 0$, dunque il luogo dei punti cercati è l'asse immaginario privato del punto $z = i$, se $k > 0$ invece deve valere $x^2 + y^2 - y + \frac{2}{k}x = 0$. Tale equazione individua la circonferenza di centro $\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}$, privata del punto $z = i$.

Circa il secondo punto, se $z = x + iy$ allora per definizione $e^z = e^x\, e^{iy}$ e dunque $|e^z| = e^x$. Nel caso $k = 0$ dunque il modulo cercato vale sempre uno, mentre se $k > 0$ il modulo cercato vale appunto, se $z = x + iy$, e^x per ogni $x \in \left[-\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}, -\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]$. Analogamente, $\left|e^{iz}\right| = e^{-y}$ Tale quantità è evidentemente limitata per ogni $k > 0$, essendo y limitata se $x = x + iy$ sta sulla circonferenza prima trovata, mentre non lo è se $k = 0$ dato che in tal caso y può assumere qualsiasi valore.

2. (punti 12) Sia k un parametro reale e sia data $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 - x_3 - 3x_4 \\ -x_1 - x_2 + (2k-1)x_4 \\ kx_1 + 3kx_2 + 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

- Determinare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di f al variare del parametro k.
- Determinare una base per il nucleo in un caso in cui esso sia bidimensionale.
- Posto $k = 0$, determinare la controimmagine della retta $(t, 2t, t)^T$ attraverso f_0

Soluzione.

- La matrice associata alla funzione f è:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 2k-1 \\ k & 3k & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sono presenti minori di ordine due non nulli, per esempio quello formato dagli elementi appartenenti alle prime due righe e alla seconda e terza colonna. I minori orlati di ordine tre sono:

$$\det\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ k & 3k & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2k-1 \\ 3k & 2 & 3 \end{pmatrix} = -3(2k^2 - k - 1) = -3(2k+1)(k-1).$$

Entrambi si annullano solo per $k = 1$ o $k = -1/2$. Quindi, per il teorema di Kronecker, il rango della matrice A vale due se $k = 1 \vee k = -1/2$, vale tre se $k \neq 1 \wedge k \neq -1/2$.
Dal teorema di nullità più rango si ha: $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{Im}\,(f)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\,(f)) = 4$. Quindi:

$\mathrm{Dim}\ (\mathrm{Im}\,(f)) = 2$ e $\mathrm{Dim}\ (\mathrm{Ker}\,(f)) = 2$ se $k = 1 \vee k = -1/2$,
$\mathrm{Dim}\ (\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ e $\mathrm{Dim}\ (\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$ se $k \neq 1 \wedge k \neq -1/2$.

- Occorre risolvere il sistema omogeneo in uno dei casi $k = 1 \vee k = -1/2$. Sia per esempio $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Valendo due il rango della matrice, si è scelto di omettere la terza riga in quanto è ridondante. La matrice può essere ridotta a scala sommando la prima riga alla seconda. Scegliendo come parametri liberi le variabili x_3 e x_4 la soluzione risulta essere: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_1 = \alpha + 3\beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il nucleo risulta quindi formato dall'insieme di vettori:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Due vettori indipendenti di questo spazio formano una base, ad esempio si possono scegliere $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1, 0)^T$ e $\boldsymbol{v}_2 = (3, -2, 0, 1)^T$

- Occorre risolvere il sistema non omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

Si è precedentemente stabilito che la matrice dei coefficienti ha rango tre e coincide col rango della matrice completa. Per il teorema di Rouchè-Capelli segue che il sistema ammette ∞^1 soluzioni per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Sommando la prima riga alla terza riga la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 & t \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2t \end{array}\right)$$

da cui si ricava immediatamente che $x_3 = 2t$ e $x_4 = -t$. Posto $x_1 = \alpha$ segue inoltre: $x_2 = -\alpha - t$.

3. (punti 12) Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} -4 & 3h-2 & -6 \\ 0 & h & 0 \\ 3 & 2-2h & 5 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quale valore di h la matrice A_h non è diagonalizzabile.
- Stabilire per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v}_h = (h, 3, 0)^T$ è autovettore di A_h

Soluzione.

- Si determinano gli autovalori della matrice A_h ponendo uguale a zero il polinomio caretteristico:
$$0 = \det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (h-\lambda)\left[(-4-\lambda)(5-\lambda)+18\right] = (h-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-2\right] = (h-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$
da cui si ricava che gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = h$.
Se $h \neq -1 \wedge h \neq 2$ gli autovalori sono tutti semplici pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Se $h = 2$ esiste un autovettore $(\lambda_2 = 2)$ con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:
$$A_2 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
Le due righe non nulle risultano tra loro proporzionali, quindi la matrice ha rango uno, la molteplicità geometrica è uguale a due e coincide con la molteplicità algebrica. Dunque per $h = 2$ la matrice è ancora diagonalizzabile.
Se $h = -1$ esiste ancora un autovettore $(\lambda_1 = -1)$ con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:
$$A_{-1} + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
In questo caso le righe non nulle non sono proporzionali, quindi la matrice ha rango due. la molteplicità geometrica è uguale a uno ed è diversa dalla molteplicità algebrica. Pertanto per $h = -1$ la matrice non è diagonalizzabile.
- Deve valere, per qualche valore $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{pmatrix} -4 & 3h-2 & -6 \\ 0 & h & 0 \\ 3 & 2-2h & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} h \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ovvero:
$$\begin{cases} -4h + 3(3h-2) = h\lambda \\ 3h = 3\lambda \\ 3h + 3(2-2h) = 0 \end{cases}$$
Dalla seconda equazione si ricava $h = \lambda$. Dalla terza equazione si ottiene $h = 2$, valore che soddisfa anche la prima equazione.
Quindi il vettore $\boldsymbol{v}_h$ è autovettore della matrice A_h (relativo all'autovalore $\lambda = 2$) se e solo se $h = 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 15/1/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Calcolare il polinomio di di Taylor di ordine quattro, centrato in $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = \left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x-1)\right]\left(1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}\right).$$

Soluzione. Sviluppiamo separatamente le singole funzioni che appaiono nell'espressione di f. Si ha, posto $t = x - 1$, cosicché $t \to 0$ se $x \to 1$:

$$\begin{aligned}\sin(\log x) &= \sin[\log(1+(x-1))] = \sin[\log(1+t)] = \sin\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\right)\\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)\right)^3 + o(t^4)\\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)\\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4).\\ e^{(x-1)\sin(\log x)} &= e^{t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^5)} = 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^5) + \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^5)\right)^2 + o(t^4)\\ &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)\\ &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + o(t^4).\end{aligned}$$

Quindi, essendo $\cos(x-1) = \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$, si ha che, per $x \to 1$, cioè per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x-1) &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4\right) + o(t^4)\\ &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{8}t^4 + o(t^4).\end{aligned}$$

Si noti quindi che basterà ora sviluppare il fattore $1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}$ al secondo ordine. Si ha, sempre per $x \to 1$, cioè per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)} &= 1 - \frac{1}{1+\sin t} = 1 - \frac{1}{1+t+o(t^2)} = 1 - \left[1 - (t + o(t^2)) + \left(t + o(t^2)\right)^2 + o(t^2)\right]\\ &= t - t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

A posteriori, questo mostra che sarebbe bastato sviluppare all'ordine tre il primo fattore che compare nell'espressione di f, ma abbiamo preferito per maggior chiarezza procedere senza far uso di considerazioni non immediatamente evidenti. In conclusione:

$$\begin{aligned}\left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x-1)\right]\left(1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}\right) &= \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)\right)\left(t - t^2 + o(t^2)\right)\\ &= \frac{3}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^4 + o(t^4)\\ &= \frac{3}{2}t^3 - 2t^4 + o(t^4).\end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor cercato è dunque, tornando alla variabile originaria x, $P_4(x) = \frac{3}{2}(x-1)^3 - 2(x-1)^4$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,\frac{x-1}{x+2}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 2$. Non vi sono simmetrie. Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-2)^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

Si noti che $f(x) \sim x^{1/3}$ per $x \to \pm\infty$, dunque non vi sono asintoti obliqui. Lo studio degli zeri e del segno è immediato: risulta $f(x) = 0$ se s solo se $x = 0$ oppure $x = 1$, $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ altrimenti. La funzione è derivabile nel suo dominio tranne che nel punto $x = 0$ (la radice cubica non lo è) e calcoli elementari mostrano che, se $x \neq -2, x \neq 0$, vale

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x - 2}{3x^{2/3}(x+2)^2}.$$

L'espressione scritta mostra che

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty.$$

Dunque la tangente al grafico di f tende a diventare verticale se $x \to 0$.

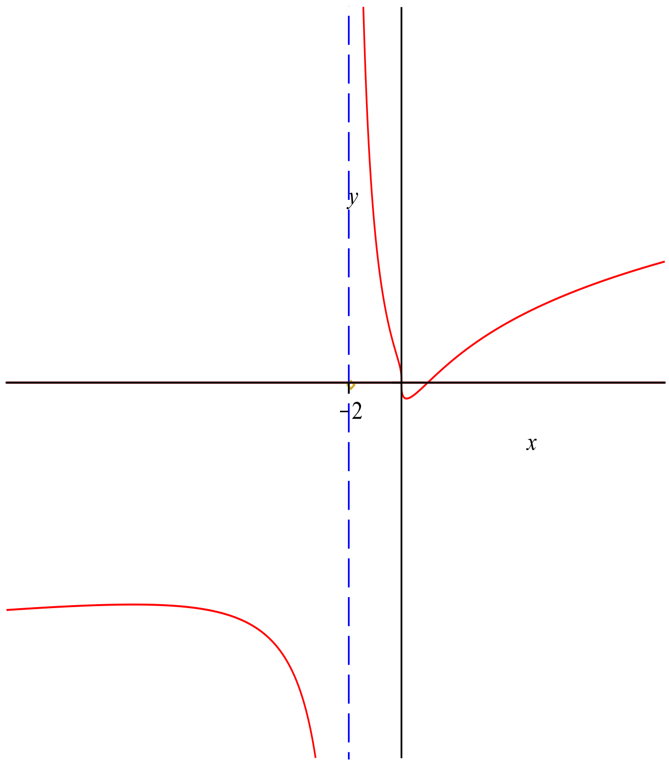
Il numeratore che compare nell'espressione di f' si annulla se e solo se $x = x_{1,2} := -5 \pm \sqrt{27} = -5 \pm 3\sqrt{3}$. Si noti che $x_1 = -5 - \sqrt{27}$ è strettamente negativa mentre $x_2 = -5 + \sqrt{27}$ appartiene all'intervallo $(0, 1)$. Il denominatore è sempre strettamente positivo nel dominio di derivabilità di f. Il segno di f' concide dunque con il segno del polinomio $x^2 + 10x - 2$. Dunque $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, mentre $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (x_1, 0) \cup (0, x_2)$. Ne segue che il punto x_1 è di massimo relativo per f, mentre il punto x_2 è di minimo relativo per f. È chiaro che tali estremanti sono solo locali, visto che la funzione è illimitata sia dall'alto che dal basso (si vedano i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$).

La funzione è due volte derivabile se $x \neq -2, x \neq 0$. Calcoli espliciti mostrano che, per tali x,

$$f''(x) = -\frac{2(x^3 + 21x^2 - 18x - 4)}{9x^{5/3}(x+2)^3}.$$

Il numeratore ha chiaramente la radice $x_3 = 1$. Scomponendo, il numeratore risulta uguale a $(x-1)(x^2+22x+4)$, che ha gli ulteriori zeri $x = x_{4,5} := -11 \pm \sqrt{117} = -11 \pm 3\sqrt{13}$. È evidente che $x_4 = -11 - \sqrt{117} < x_1$, e che $x_5 = -11 + \sqrt{117} < 0$. È inoltre semplice vedere che $x_5 > -2$. Lo studio del segno di f'' è immediato e mostra che $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, x_5) \cup (-2, x_4) \cup (0, 1)$, cosicché f è convessa separatamente in ciascuno degli intervalli appena scritti, mentre $f''(x) < 0$ se e solo se $x \in (x_5, -2) \cup (x_4, 0) \cup (1, +\infty)$, cosicché f è concava separatamente in ciascuno degli intervalli appena scritti. I punti $x_3 = 1, x_{4,5} = -11 \pm 3\sqrt{13}$ sono dunque punti di flesso a tangente obliqua, mentre il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



y
−2
x

3. (punti 10) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

- Determinare una primitiva di f .
- Sia $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Mostrare, senza far uso della primitiva calcolata al punto precedente, che il dominio di F è l'intervallo $(0, +\infty)$, e calcolare $\lim_{x\to 0} F(x)$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Facoltativo (2 punti). Stabilire, sempre senza far uso della primitiva calcolata, se F ammette o meno un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Soluzione. Poniamo $\sqrt{4+x^2} = t$. Dunque $x^2 = (t^2 - 4)$ e $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$, dunque vale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^2-4} t\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{(t-2)} - \frac{1}{(t+2)}\right)\mathrm{d}t \\
&= t + \log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \\
&= \sqrt{4+x^2} + 2\log\left(\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{4+x^2}+2}\right),
\end{aligned}$$

dove si è notato che l'argomento del logaritmo è positivo per $x \neq 0$ e si è scelta per comodità uguale a zero la costante arbitraria.

Circa il secondo punto, si noti che la funzione integranda non è definita solo per $x = 0$ e che vale $f(t) \sim \frac{2}{t}$ per $t \to 0$. Dunque, per il criterio del confronto asintotico ($f(x)$ è positiva se x è positivo) f non è integrabile in senso improprio in un intorno dell'origine. Quindi, non essendovi altre singolarità della funzione integranda, F è definita per $x \in (0, +\infty)$ e, per quanto appena spiegato,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\infty,$$

dove il segno meno deriva dal fatto che f è positiva in un intorno destro dell'origine ma l'intervallo di integrazione, per $x \to 0^+$, è orientato negativamente. Inoltre $f(t) \to 1$ per $t \to +\infty$, dunque f non è integrabile in senso improprio nemmeno in un intorno di $+\infty$ e vale (l'intervallo di integrazione è in questo caso orientato positivamente)

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Riguardo alla domanda facoltativa notiamo che per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che F è derivabile per $x > 0$ e vale $F'(x) = f(x)$ per $x > 0$. Dunque la regola dell'Hospital permette di concludere che, valendo $F'(x) = f(x) \to 1$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Inoltre:

$$F(x) - x = \int_1^x \frac{\sqrt{4+t^2}}{t}\,\mathrm{d}t - x = \int_1^x \left(\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1\right)\mathrm{d}t - 1$$

dato che $\int_1^x \mathrm{d}t = x - 1$. Si consideri ora la funzione integranda che appare nell'ultimo integrale scritto. Vale, per $t > 0$:

$$\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1 = \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}} - 1.$$

Quindi:

$$\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1 = \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}} - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico (si noti che f è positiva per t positivo) ne segue che $g(t) := \frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1$ è integrabile in senso improprio per $t \to +\infty$, quindi esiste $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1\right)\mathrm{d}t = q.$$

Quindi per quanto detto sopra:

$$F(x) - x = \int_1^x \left(\frac{\sqrt{4+t^2}}{t} - 1 \right) \mathrm{d}t - 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} q - 1.$$

Ne segue che la retta $y = x + q - 1$ è asintoto obliquo per $F(x)$ quando $x \to +\infty$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 15/1/2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Calcolare il polinomio di di Taylor di ordine quattro, centrato in $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \left[e^{(x-2)\sin(\log(x-1))} - \cos(x-2)\right]\left(1 - \frac{1}{1+\sin(x-2)}\right).$$

Soluzione. Posto $x - 2 = t$,cosicché $t \to 0$ se $x \to 2$, si ha

$$f(x) = \left[e^{t\sin(\log(1+t))} - \cos t\right]\left(1 - \frac{1}{1+\sin t}\right).$$

Lo sviluppo al quarto ordine di tale funzione, per $t \to 0$, è calcolato nella soluzione dell'esercizio della versione A e risulta valere $\frac{3}{2}t^3 - 2t^4 + o(t^4)$. Il polinomio di Taylor cercato è dunque, tornando alla variabile originaria x, $P_4(x) = \frac{3}{2}(x-2)^3 - 2(x-2)^4$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,\frac{1+x}{2-x}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. Si veda la soluzione della versione A, in quanto indicando con $g(x)$ la funzione che appare in tale versione vale $f(x) = g(-x)$ per ogni $x \neq 2$.

3. (punti 10) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

- Determinare una primitiva di f .
- Sia $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Mostrare, senza far uso della primitiva calcolata al punto precedente, che il dominio di F è l'intervallo $(0, +\infty)$, e calcolare $\lim_{x\to 0} F(x)$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Facoltativo (2 punti). Stabilire, sempre senza far uso della primitiva calcolata, se F ammette o meno un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Soluzione. Poniamo $\sqrt{1+x^2} = t$. Dunque $x^2 = (t^2-1)$ e $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$, dunque vale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^2-1} t\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t \\
&= t + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \\
&= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right),
\end{aligned}$$

dove si è notato che l'argomento del logaritmo è positivo per $x \neq 0$ e si è scelta per comodità uguale a zero la costante arbitraria.

Circa il secondo punto, si noti che la funzione integranda non è definita solo per $x = 0$ e che vale $f(t) \sim \frac{1}{t}$ per $t \to 0$. Dunque, per il criterio del confronto asintotico ($f(x)$ è positiva se x è positivo) f non è integrabile in senso improprio in un intorno dell'origine. Quindi, non essendovi altre singolarità della funzione integranda, F è definita per $x \in (0, +\infty)$ e, per quanto appena spiegato,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\infty,$$

dove il segno meno deriva dal fatto che f è positiva in un intorno destro dell'origine ma l'intervallo di integrazione, per $x \to 0^+$, è orientato negativamente. Inoltre $f(t) \to 1$ per $t \to +\infty$, dunque f non è integrabile in senso improprio nemmeno in un intorno di $+\infty$ e vale (l'intervallo di integrazione è in questo caso orientato positivamente)

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Riguardo alla domanda facoltativa notiamo che per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che F è derivabile per $x > 0$ e vale $F'(x) = f(x)$ per $x > 0$. Dunque la regola dell'Hospital permette di concludere che, valendo $F'(x) = f(x) \to 1$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Inoltre:

$$F(x) - x = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,\mathrm{d}t - x = \int_1^x \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1\right)\mathrm{d}t - 1$$

dato che $\int_1^x \mathrm{d}t = x - 1$. Si consideri ora la funzione integranda che appare nell'ultimo integrale scritto. Vale, per $t > 0$:

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} - 1.$$

Quindi:

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico (si noti che f è positiva per t positivo) ne segue che $g(t) := \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1$ è integrabile in senso improprio per $t \to +\infty$, quindi esiste $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1\right)\mathrm{d}t = q.$$

Quindi per quanto detto sopra:

$$F(x) - x = \int_1^x \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} - 1 \right) \mathrm{d}t - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} q - 1.$$

Ne segue che la retta $y = x + q - 1$ è asintoto obliquo per $F(x)$ quando $x \to +\infty$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 5/2/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 8) Sia h un parametro reale. Si considerino le matrici:

$$A_h = \begin{pmatrix} h-1 & h & 0 \\ h & 4 & h-2 \\ 4 & 8 & 2-h \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} 1 & h-6 \\ 2 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano poi $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice A_h, $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice B_h.

- Determinare, per ogni valore di h, le dimensioni di $\ker f_A$ e di $\operatorname{Im} f_B$, e basi per tali spazi.
- Determinare i valori di h per cui $\ker f_A$ ha intersezione non banale con $\operatorname{Im} f_B$.
- Per ogni valore di h, determinare il nucleo di $f_A \circ f_B$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni.

Soluzione.

- Valendo $\det A = (h-2)^2(h-6)$ si deduce che il rango della matrice A è 3 se $h \neq 2 \wedge h \neq 6$, pertanto, in tali casi, il nucleo è formato dal solo vettore nullo. Se $h = 2$ La matrice diventa:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango vale evidentemente uno (due colonne sono proporzionali tra loro e la terza è identicamente nulla). Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo, che si riduce alla sola equazione $x + 2y = 0$. Come base del nucleo può essere scelta la coppia di vettori: $(2, -1, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$. Se $h = 6$ la matrice diventa:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Il rango vale due (esistono minori di ordine due non nulli). Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Da cui: $x = 6t$, $y = -5t$, $z = -4t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $(6, -5, -4)^T$. Essendo il rango della matrice B_h uguale a due $\forall h \in \mathbb{R}$, l'immagine di f_B è sempre bidimensionale e come base può essere scelta la coppia di vettori colonna della matrice B_h.

- Se $h \neq 2 \wedge h \neq 6$ allora: $\ker f_A = \mathbf{0}$, quindi: $\ker f_A \cap \operatorname{Im} f_B = \mathbf{0}$. Se $h = 6$ ancora si ha: $\ker f_A \cap \operatorname{Im} f_B = \mathbf{0}$, infatti:

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ciò implica che il generatore del nucleo di f_A è linearmente indipendente dai generatori dell'immagine di f_B.

Se $h = 2$ i due piani $\ker f_A$ e $\operatorname{Im} f_B$, visti come sottspazi di $\mathbb{R}^3$, hanno un punto in comune (il vettore nullo), quindi devono avere almeno una retta in comune. Tale intersezione si potrebbe calcolare scrivendo l'equazione cartesiana dell'immagine di f_B (che risulta essere $2x - 9y + 8z = 0$) e ponendola a sistema con l'equazione cartesiana del nucleo di f_A: $x + 2y = 0$, ottenendo: $x = -2t, y = t, z = \frac{13}{8}t$. Si ricorda comunque che il quesito non richiedeva il calcolo esplicito dell'interzezione, ma soltanto di stabilire per quale valore di h ci fosse intersezione non banale, e questo accade soltanto per $h = 2$.

- Si è già detto che il rango di B_h vale sempre due pertanto il nucleo di f_B è formato dal solo elemento nullo. Il nucleo di $f_A \circ f_B$ coincide con la controimmagine attraverso f_B del sottospazio $\ker f_A$. Infatti, posto $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$, se $f_B(\boldsymbol{v}) \in \ker f_A$ allora: $(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, viceversa se $f_B(\boldsymbol{v}) \notin \ker f_A$ allora: $(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$. Nel punto precedente si è già stabilito che $\ker f_A \cap \operatorname{Im} f_B = \mathbf{0}$ se $h \neq 2$. In tal caso, poichè $\ker f_B = \mathbf{0}$, si ha: $f_B^{-1}(\ker f_A) = \mathbf{0}$. Se $h = 2$ occorre determinare $f_B^{-1}(\ker f_A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 4\beta \\ 2\alpha \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f_A \text{ sse } x + 2y = 0$$

da cui $5\alpha - 4\beta = 0$. In conclusione, se $h \neq 2$ Il nucleo di $f_A \circ f_B$ è formato dal solo elemento nullo, se $h = 2$ il nucleo di $f_A \circ f_B$ è formato dai vettori appartenenti alla retta

$$\begin{cases} \alpha = 4t \\ \beta = 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. (punti 6) Determinare l'insieme A delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\frac{1}{(z+2)^6} = (1+i\sqrt{3})^3.$$

Successivamente determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = e^z, z \in A\}$, stabilire se vi sono elementi di B di modulo massimo e in tal caso calcolarli.

Soluzione. Si noti che $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Quindi $(1+i\sqrt{3})^3 = 8e^{i\pi} = -8$. Ovviamente lo stesso risultato poteva essere ottenuto svolgendo il cubo del binomio. Occorre quindi trovare le radici seste di -8, che hanno tutte modulo $8^{1/6} = \sqrt{2}$ e hanno argomento $\theta = \theta_k = \frac{\pi+2k\pi}{6}$ per $k = 0,\ldots,5$. Gli argomenti sono dunque $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. Si noti che i reciproci w_k di tali numeri hanno modulo $1/\sqrt{2}$ e argomenti anch'essi dati dai precedenti θ_k (infatti $-\vartheta$ è una fase dell'inverso di un numero complesso di fase ϑ). In coordinate cartesiane, i punti w_k sono dunque $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}\right), \pm i/\sqrt{2}, \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}\right)$. Dunque le soluzioni cercate sono della forma $z = z_k = w_k - 2$, per $k = 0,\ldots,5$, dove w_k sono i numeri complessi individuati sopra.

Si noti poi che se $z = x+iy$ allora per definizione $e^z = e^x e^{iy}$. Quindi l'insieme B è costituito dai sei numeri complessi il cui modulo è e^{x_k}, con $x_k = \operatorname{Re} z_k$, e una cui fase è $y_k = \operatorname{Im} z_k$. Essendo l'insieme B finito vi sono necessariamente punti di massimo modulo in esso. Il massimo modulo si ottiene in corrispondenza della massima parte reale dei w_k, dunque degl z_k (valendo, come già ricordato, l'uguaglianza $|e^z| = e^x$), ed è chiaro dall'espressione esplicita degli x_k calcolati sopra che la massima parte reale degli z_k si ottiene in corrispondenza dei punti $z_k = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 2 \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}$.

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = x\left(2 + \frac{1}{\log x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavitá e convessitá, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x > 0, x \neq 1$. Non vi sono simmetrie evidenti. Vale:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque $x = 1$ è asintoto verticale bilatero. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 2$, ma $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = +\infty$, quindi non vi sono asintoti obliqui. La funzione è positiva per $x \in (0, 1/\sqrt{e})$ e per $x > 1$, negativa per $x \in (1/\sqrt{e}, 1)$.

La funzione è derivabile nel suo dominio e vale, per gli x in tale dominio,

$$f'(x) = \frac{2\log^2 x + \log x - 1}{\log^2 x}.$$

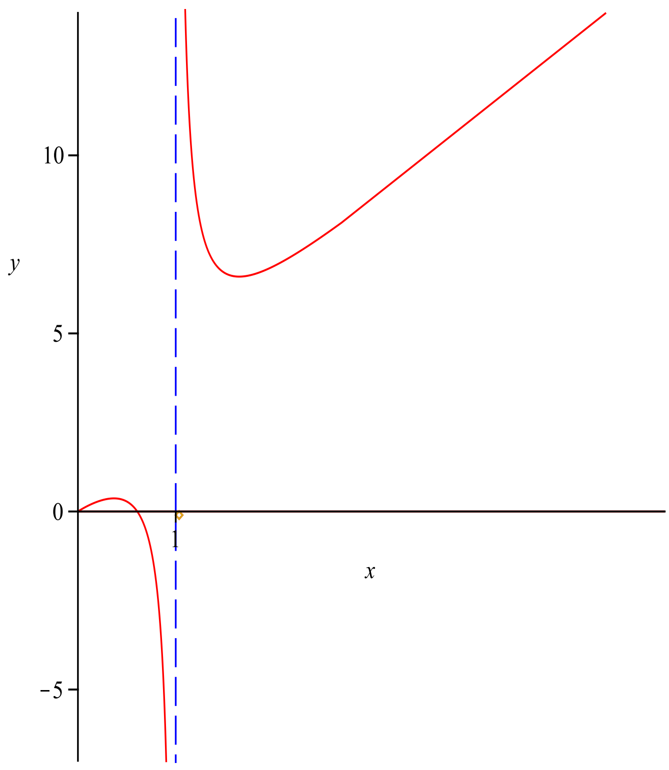
Si noti in primo luogo che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$. Inoltre la derivata si annulla (risolvere l'equazione di secondo grado in $\log x$ corrispondente al numeratore di f') per $x = 1/e$, $x = \sqrt{e}$. Lo studio del segno del numeratore mostra che f' è positiva per $x \in (0, 1/e)$ e per $x > \sqrt{e}$ e dunque f è crescente in ciascuno di tali intervalli, mentre f' è negativa per $x \in (1/e, 1)$ e per $x \in (1, \sqrt{e})$ e dunque f è decrescente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = 1/e$ è di massimo relativo (si noti che $1/e < 1/\sqrt{e}$) mentre il punto $x = \sqrt{e}$ è di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti visti i limiti di f alla frontiera del dominio.

La funzione è due volte derivabile nel suo dominio e vale, per gli x in tale dominio,

$$f''(x) = \frac{2 - \log x}{x\log^3 x}.$$

Ne segue che f'' si annulla per $x = e^2$ (si noti che $e^2 > \sqrt{e}$), che essa è positiva per $x \in (1, e^2)$, dunque f è convessa in tale intervallo, mentre f'' è negativa in $(0, 1)$ e in $(e^2, +\infty)$, dunque f è concava in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = e^2$ è un punto di flesso per f .

In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1-e^x}{e^{-2x}-1}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{x^{3/5}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Si noti che $f(x) = \frac{1-e^x}{e^{-2x}-1} = \frac{1-e^x}{1-e^{2x}} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$. Dunque, posto $e^x = t$ cosicché $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$, si ha:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = t - \log|1+t| \\ &= e^x - \log(1+e^x).\end{aligned}$$

dove si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva.

Riguardo alla seconda domanda, va studiata la singolarità della funzione integranda in $x = 0$ (non essendovene altre) e il comportamento della stessa per $x \to -\infty$. È immediato notare che

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{3/5}} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2x^{3/4}}$$

cosicché f è positiva in un intorno dell'origine e, per il criterio del confronto asintotico, ivi integrabile, e che

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^{3/5}} \frac{1}{e^{-2x}} = \frac{1}{e^{-x}x^{3/5}},$$

cosicché f è negativa in un intorno di $-\infty$ e, ancora per il criterio del confronto asintotico, ivi integrabile. Dunque l'integrale improprio proposto converge.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 5/2/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 8) Sia h un parametro reale. Si considerino le matrici:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 2 & h-2 \\ h-3 & 6 & h \\ 3-h & h+1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} 1 & h+6 \\ 3 & 0 \\ h & 9 \end{pmatrix}.$$

Siano poi $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice A_h, $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice B_h.

- Determinare, per ogni valore di h, le dimensioni di $\ker f_A$ e di $\mathrm{Im}\, f_B$, e basi per tali spazi.
- Determinare i valori di h per cui $\ker f_A$ ha intersezione non banale con $\mathrm{Im}\, f_B$.
- Per ogni valore di h, determinare il nucleo di $f_A \circ f_B$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni.

Soluzione.

- Valendo $\det A = (h-3)^2(h+6)$ si deduce che il rango della matrice A è 3 se $h \neq 3 \wedge h \neq -6$, pertanto, in tali casi, il nucleo è formato dal solo vettore nullo. Se $h = 3$ La matrice diventa:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango vale evidentemente uno (due colonne sono proporzionali tra loro e la prima è identicamente nulla). Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo, che si riduce alla sola equazione $2y + z = 0$. Come base del nucleo può essere scelta la coppia di vettori: $(1,0,0)^T$ e $(0,1,-2)^T$. Se $h = -6$ la matrice diventa:

$$A_{-6} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -9 & 6 & -6 \\ 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango vale due (esistono minori di ordine due non nulli). Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} y - 4z = 0 \\ -3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Da cui: $x = 2t$, $y = 4t$, $z = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $(2,4,1)^T$. Essendo il rango della matrice B_h uguale a due $\forall h \in \mathbb{R}$, l'immagine di f_B è sempre bidimensionale e come base può essere scelta la coppia di vettori colonna della matrice B_h.

- Se $h \neq 3 \wedge h \neq -6$ allora: $\ker f_A = \mathbf{0}$, quindi: $\ker f_A \cap \mathrm{Im}\, f_B = \mathbf{0}$. Se $h = -6$ ancora si ha: $\ker f_A \cap \mathrm{Im}\, f_B = \mathbf{0}$, infatti:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \neq 0$$

ciò implica che il generatore del nucleo di f_A è linearmente indipendente dai generatori dell'immagine di f_B. Se $h = 3$ i due piani $\ker f_A$ e $\mathrm{Im}\, f_B$, visti come sottspazi di $\mathbb{R}^3$, hanno un punto in comune (il vettore nullo), quindi devono avere almeno una retta in comune. Tale intersezione si potrebbe calcolare scrivendo l'equazione cartesiana dell'immagine di f_B (che risulta essere $3x + 2y - 3z = 0$) e ponendola a sistema con l'equazione cartesiana del nucleo di f_A: $2y + z = 0$, ottenendo: $x = 4t$, $y = -\frac{3}{2}t$, $z = 3t$. Si ricorda comunque che il quesito non richiedeva il calcolo esplicito dell'interzezione, ma soltanto di stabilire per quale valore di h ci fosse intersezione non banale, e questo accade soltanto per $h = 3$.

- Si è già detto che il rango di B_h vale sempre due pertanto il nucleo di f_B è formato dal solo elemento nullo. Il nucleo di $f_A \circ f_B$ coincide con la controimmagine attraverso f_B del sottospazio $\ker f_A$. Infatti, posto $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$, se $f_B(\boldsymbol{v}) \in \ker f_A$ allora: $(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, viceversa se $f_B(\boldsymbol{v}) \notin \ker f_A$ allora: $(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$. Nel punto precedente si è già stabilito che $\ker f_A \cap \mathrm{Im}\, f_B = \mathbf{0}$ se $h \neq 3$, in tal caso, poichè $\ker f_B = \mathbf{0}$, si ha: $f_B^{-1}(\ker f_A) = \mathbf{0}$. Se $h = 3$ occorre determinare $f_B^{-1}(\ker f_A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 9\beta \\ 3\alpha \\ 3\alpha + 9\beta \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ \mathrm{ker} f_A \text{ sse } 2y + z = 0$$

da cui $\alpha + \beta = 0$. In conclusione, se $h \neq 3$ Il nucleo di $f_A \circ f_B$ è formato dal solo elemento nullo, se $h = 3$ il nucleo di $f_A \circ f_B$ è formato dai vettori appartenenti alla retta

$$\begin{cases} \alpha = t \\ \beta = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. (punti 6) Determinare l'insieme A delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\frac{1}{(z+1)^6} = (1+i\sqrt{3})^3.$$

Successivamente determinare l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = e^z, z \in A\}$, stabilire se vi sono elementi di B di modulo massimo e in tal caso calcolarli.

Soluzione. Si noti che $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Quindi $(1+i\sqrt{3})^3 = 8e^{i\pi} = -8$. Ovviamente lo stesso risultato poteva essere ottenuto svolgendo il cubo del binomio. Occorre quindi trovare le radici seste di -8, che hanno tutte modulo $8^{1/6} = \sqrt{2}$ e hanno argomento $\theta = \theta_k = \frac{\pi+2k\pi}{6}$ per $k = 0, \ldots, 5$. Gli argomenti sono dunque $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. Si noti che i reciproci w_k di tali numeri hanno modulo $1/\sqrt{2}$ e argomenti anch'essi dati dai precedenti θ_k (infatti $-\vartheta$ è una fase dell'inverso di un numero complesso di fase ϑ). In coordinate cartesiane, i punti w_k sono dunque $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}\right), \pm i/\sqrt{2}, \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}\right)$. Dunque le soluzioni cercate sono della forma $z = z_k = w_k - 1$, per $k = 0, \ldots, 5$, dove w_k sono i numeri complessi individuati sopra.

Si noti poi che se $z = x + iy$ allora per definizione $e^z = e^x e^{iy}$. Quindi l'insieme B è costituito dai sei numeri complessi il cui modulo è e^{x_k}, con $x_k = \operatorname{Re} z_k$, e una cui fase è $y_k = \operatorname{Im} z_k$. Essendo l'insieme B finito vi sono necessariamente punti di massimo modulo in esso. Il massimo modulo si ottiene in corrispondenza della massima parte reale dei w_k, dunque degli z_k (valendo, come già ricordato, l'uguaglianza $|e^z| = e^x$), ed è chiaro dall'espressione esplicita degli x_k calcolati sopra che la massima parte reale degli z_k si ottiene in corrispondenza dei punti $z_k = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 1 \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}$.

3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = x\left(3 + \frac{4}{\log x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavitá e convessitá, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x > 0, x \neq 1$. Non vi sono simmetrie evidenti. Vale:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque $x = 1$ è asintoto verticale bilatero. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 3$, ma $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = +\infty$, quindi non vi sono asintoti obliqui. La funzione è positiva per $x \in (0, e^{-4/3})$ e per $x > 1$, negativa per $x \in (e^{-4/3}, 1)$.

La funzione è derivabile nel suo dominio e vale, per gli x in tale dominio,
$$f'(x) = \frac{3\log^2 x + 4\log x - 4}{\log^2 x}.$$

Si noti in primo luogo che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3$. Inoltre la derivata si annulla (risolvere l'equazione di secondo grado in $\log x$ corrispondente al numeratore di f') per $x = 1/e^2$, $x = e^{2/3}$. Lo studio del segno del numeratore mostra che f' è positiva per $x \in (0, 1/e^2)$ e per $x > e^{2/3}$ e dunque f è crescente in ciascuno di tali intervalli, mentre f' è negativa per $x \in (1/e^2, 1)$ e per $x \in (1, e^{2/3})$ e dunque f è decrescente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = 1/e$ è di massimo relativo (si noti che $1/e^2 < 1/e^{4/3}$) mentre il punto $x = e^{2/3}$ è di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti visti i limiti di f alla frontiera del dominio.

La funzione è due volte derivabile nel suo dominio e vale, per gli x in tale dominio,
$$f''(x) = \frac{8 - 4\log x}{x\log^3 x}.$$

Ne segue che f'' si annulla per $x = e^2$ (si noti che $e^2 > e^{2/3}$), che essa è positiva per $x \in (1, e^2)$, dunque f è convessa in tale intervallo, mentre f'' è negativa in $(0, 1)$ e in $(e^2, +\infty)$, dunque f è concava in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = e^2$ è un punto di flesso per f .

Il grafico di f è qualitativamente simile a quello della funzione che appare nel compito A.

4. (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^{2x} - 1}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x^{2/3}} f(x)\, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Si noti che $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{e^{2x}-1} = \frac{e^x-1}{e^x(e^{2x}-1)} = \frac{1}{e^x(e^x+1)}$. Dunque, posto $e^x = t$ cosicché $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{e^x(e^x+1)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2(t+1)}\, \mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{t} - \log|t| + \log|1+t| \\
&= -e^{-x} + \log(1 + e^{-x}).
\end{aligned}$$

dove si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva. Il calcolo sarebbe risultato ancora più semplice con la sostituzione $e^{-x} = t$, probabilmente però meno immediata.

Riguardo alla seconda domanda, va studiata la singolarità della funzione integranda in $x = 0$ (non essendovene altre) e il comportamento della stessa per $x \to +\infty$. È immediato notare che

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2x^{2/3}}$$

cosicché f è positiva in un intorno dell'origine e, per il criterio del confronto asintotico, ivi integrabile, e che

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^{2/3}} \frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x x^{2/3}},$$

cosicché f è positiva anche in un intorno di $+\infty$ e, ancora per il criterio del confronto asintotico, ivi integrabile. Dunque l'integrale improprio proposto converge.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 13/6/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 8) Siano A e B due matrici di dimensione 3x3 tali che $B^2 - A \cdot B + \mathbb{I} = \mathbb{O}$ (con i simboli $\mathbb{I}$ e $\mathbb{O}$ si indicano rispettivamente la matrice identitá e la matrice nulla).
Posto:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

- determinare la matrice A;
- Quale relazione sussiste tra gli autovalori della matrice A e quelli della matrice B?
- La matrice A è diagonalizzabile?

Soluzione. Vale $\det B = 2$, dunque B è invertibile. La relazione $B^2 + \mathbb{I} = AB$ fornisce allora, moltiplicando a destra per B^{-1}, $A = B + B^{-1}$. Si calcola:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$A = B + B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che, detti λ_A, λ_B gli autovalori di A e B rispettivamente, deve valere (essendo gli autovalori di B non nulli, in quanto $\det B \neq 0$) $\lambda_A = \lambda_B + \frac{1}{\lambda_B}$.
Il calcolo degli autovalori di B è particolarmente semplice e fornisce i valori $\lambda = 1$ (doppio), $\lambda = 2$ (semplice). Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 2$ (doppio), $\lambda = 5/2$ (semplice).
Si ha infine

$$A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\operatorname{rk} A - 2\mathbb{I} = 1$, dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è due, quindi A è diagonalizzabile.

2. (punti 6) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$(z - \overline{z} + i)^3 = i.$$

Soluzione.Si noti che, posto $z = x + iy$ si ha $z - \overline{z} + i = x + iy - (x - iy) + i = (2y + 1)i$. Quindi

$$(z - \overline{z} + i)^3 = (2y + 1)^3 i^3 = -(2y + 1)^3 i.$$

Dunque occorre e basta che $-(2y + 1)^3 = 1$, dove l'uguaglianza va intesa in senso reale. L'unica soluzione di tale equazione è quindi $y = -1$. Le soluzioni all'equazione di partenza sono quindi i numeri complessi del tipo $z = x - i$, con $x \in \mathbb{R}$.

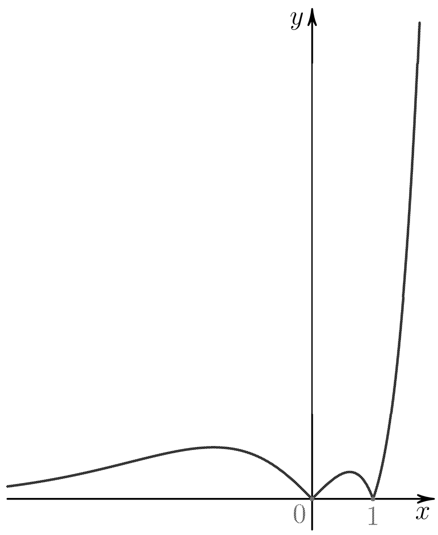
3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = e^x|x(1-x)|.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è ovunque definita. Non vi sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre non negativa, e si annulla se e solo se $x = 0$ oppure $x = 1$. Vale
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Dunque vi è l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$, mentre non vi sono asintoti obliqui visto che la funzione cresce più che linearmente in tale limite.

La funzione non è derivabile per $x = 0$ né per $x = 1$. Per $x \in (0,1)$ vale $e^x x(1-x)$ e dunque $f'(x) = -e^x(x^2 + x - 1)$. La derivata prima si annulla, in tale intervallo, solo se $x = (-1 + \sqrt{5})/2$, è positiva se $x \in (0, (-1 + \sqrt{5})/2)$, negativa se $x \in ((-1 + \sqrt{5})/2, 1)$. Il punto $x_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$ è dunque punto di massimo relativo. Si ha
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = -e.$$
Per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ si ha invece (basta cambiare segno a f, senza rifare il calcolo) $f'(x) = e^x(x^2 + x - 1)$. La derivata prima si annulla, nell'insieme considerato, solo se $x = (-1-\sqrt{5})/2$ è positiva se $x \in (-\infty, (-1-\sqrt{5})/2)$ e se $x > 1$, negativa se $x \in ((-1-\sqrt{5})/2, -1)$. Il punto $x_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$ è dunque anch'esso punto di massimo relativo. Si ha
$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = e.$$
Dunque i punti $x = 0$, $x = 1$ sono punti angolosi.

La derivata seconda vale, per $x \in (0,1)$, $f''(x) = -e^x(x^2 + 3x)$. Essa è sempre negativa nell'intervallo considerato, dunque f è concava in tale intervallo. Vale inoltre, per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $f''(x) = e^x(x^2 + 3x)$. Dunque f'' si annulla, nell'insieme considerato, se e solo se $x = -3$, è positiva per $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, negativa per $x \in (-3, 0)$. Quindi f è convessa negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$, concava nell'intervallo $(-3, 0)$. Il punto $x = -3$ è un punto di flesso. In conclusione il grafico di f è il seguente.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



y
0
1
x

4. (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Successivamente, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, stabilire se esiste finito

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^a\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soluzione. Si ponga $\sqrt{4-x^2} = t$, cosicché $x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{t}{4-t^2} t\,\mathrm{d}t = \int \frac{4-t^2-4}{4-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t = t + \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\
&= t + \log|t-2| - \log|t+2| = t + \log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \\
&= \sqrt{4-x^2} + \log\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| \\
&= \sqrt{4-x^2} + \log\left(\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)
\end{aligned}$$

dove si è posta per comodità uguale a zero la costante di integrazione (è richiesto il calcolo di *una* primitiva) e la primitiva va intesa separatamente per $x \in (0,2)$ e per $x \in (-2,0)$ in quanto la funzione f non è definita in $x = 0$, anzi tende a $\pm\infty$ per $x \to 0^\pm$ (peraltro ovviamente neppure la primitiva calcolata esiste in $x = 0$). Si noti che l'argomento dell'ultimo logaritmo scritto è evidentemente positivo per $x \in [-2,2], x \neq 0$.

Si noti infine che $t^a\, f(t) \sim t^{a-1}$ per $t \to 0^+$. Dunque il limite richiesto esiste finito se e solo se t^{a-1} è integrabile in senso improprio in un intorno destro di $x = 0$, cioè se e solo se $a > 0$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

italian italian

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 9/7/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 8) Siano π il piano di equazione $3x+y-3z=0$ e $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

- Determinare l'equazione parametrica della retta r ortogonale a π e passante per l'origine;
- determinare l'insieme $V:\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \text{ t.c. } f(\mathbf{x})\in r\}$, dove r è la retta di cui al punto precedente;
- mostrare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione.

- Il vettore direzione della retta r è $(3,1,-3)^t$, dunque l'equazione parametrica è la seguente:

$$\begin{cases} x=3t\\ y=t\\ z=-3t\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

- Per trovare gli elemento di V occorre determinare le controimmagini dei punti appartenenti alla retta r, vale a dire che si devono cercare le soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t\\t\\-3t\end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2 come la matrice completa del sistema, quindi la dimensione di V è due per ogni t fissato. Considerando la terza riga ridondante (risulta essere il triplo della seconda meno il doppio della prima) e scegliendo $x_3=\alpha$ e $x_4=\beta$ quali parametri liberi della soluzione, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1=3t-4\alpha+3\beta\\ x_2=-t+\alpha-2\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=\beta\end{cases} \qquad \alpha,\beta,t\in\mathbb{R}$$

- A priori: V risulta essere un sottospazio perchè la controimmagine di un sottospazio (in questo caso la retta r) attraverso un'applicazione lineare è anch'essa un sottospazio.
A posteriori: l'insieme V risulta essere un sottospazio in quanto è possibile rappresentarlo come c.l. di tre vettori indipendenti:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-4\\1\\1\\0\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\beta.$$

2. (punti 6) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$\left[z^2+(1+i)z\right]\left[z^2-(1+i)z\right]=-3.$$

Soluzione. L'equazione si riscrive come $z^4+(1+i)z^3-(1+i)z^3-(1+i)^2z^2=-3$ cioè, posto $z^2=w$, come $w^2-2iw+3=0$. Tale equazione ha le soluzioni $w=i+\sqrt{-4}$, dove la radice è intesa in senso complesso. Quindi le soluzioni sono $w_1=3i$, $w_2=-i$. Per calcolare i valori di z richiesti basta estrarre le radici quadrate complesse di questi ultimi valori. Dato che $w_1=3e^{i\pi/2}$, $w_2=e^{3i\pi/2}$, gli z cercati sono $z_1=\sqrt{3}e^{i\pi/4}$, $z_2=\sqrt{3}e^{5i\pi/4}$, $z_3=e^{3i\pi/4}$, $z_2=e^{7i\pi/4}$, cioè in coordinate cartesiane, $z_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, $z_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = e^{2x}(|x^2 - 1| - 2x).$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Non vi sono simmetrie evidenti. Si ha $f(0) = 1$ e
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
Non vi sono asintoti obliqui, in quanto la crescita della funzione per $x \to +\infty$ è più che lineare (esponenziale in realtà). Sia dapprima $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$, vale allora $f(x) = e^{2x}(x^2 - 2x - 1)$. Vale $x^2 - 2x - 1 = 0$ se e solo se $x = 1 \pm \sqrt{2}$, ma solo $x = 1 + \sqrt{2}$ è nell'insieme considerato. Risulta allora, in tale insieme, $f(x) > 0$ se $x > 1 + \sqrt{2}$ e se $x \leq -1$, $f(x) < 0$ se $x \in [1, 1 + \sqrt{2})$. Se invece $x \in (-1, 1)$, si ha $f(x) = e^{2x}(1 - 2x - x^2)$. Vale $1 - 2x - x^2 = 0$ se e solo se $x = -1 \pm \sqrt{2}$, ma solo $x = -1 + \sqrt{2}$ è nell'insieme considerato. Risulta allora, in tale insieme, $f(x) > 0$ se $x \in (-1, -1 + \sqrt{2})$, $f(x) < 0$ se $x \in (-1 + \sqrt{2}, 1)$.

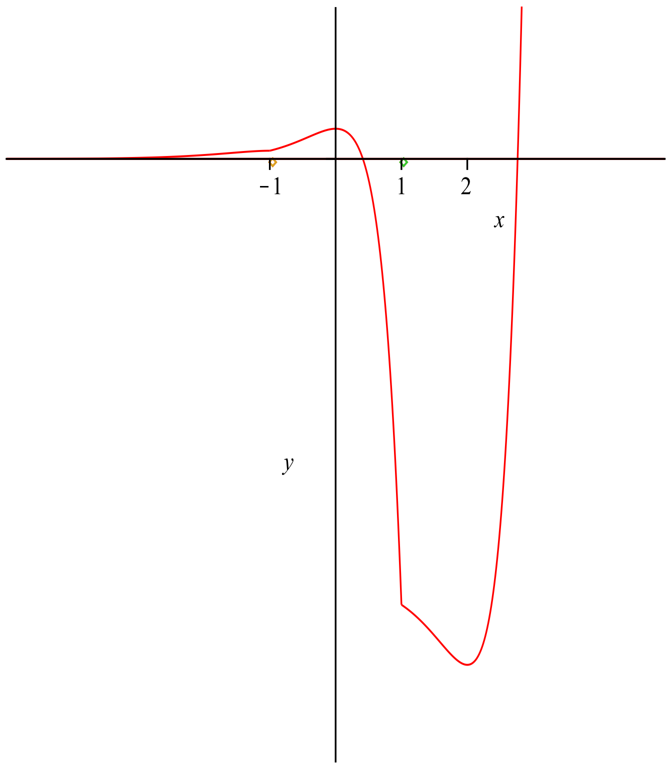
Calcoliamo le derivate. Si ha:
$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x}(x^2 - x - 2) & \text{se } |x| > 1 \\ -2e^{2x}(x^2 + 3x) & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$
La funzione non è derivabile in $x = \pm 1$. Tali punti sono angolosi, infatti
$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = 0, \quad \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 4e^{-2}, \lim_{x\to1^-} f'(x) = -8e^{-2}, \lim_{x\to1^+} f'(x) = -4e^{-2}.$$
Lo studio del segno di f' è immediato e fornisce i dati seguenti. Sia dapprima $|x| > 1$. La derivata prima si annulla, nell'insieme considerato, se e solo se $x = 2$ (l'altra radice $x = -1$ non appartiene all'insieme considerato), inoltre $f'(x) > 0$ se $x < -1$ e se $x > 2$, dunque la funzione è crescente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (1, 2)$, dunque la funzione è decrescente in tale intervallo. Il punto $x = 2$ è un punto di minimo relativo e vale $f(2) = -e^{-4}$.

Sia ora $|x| < 1$. In tale insieme la derivata si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x \in (-1, 0)$, negativa per $x \in (0, 1)$. Il punto $x = 0$ è di massimo relativo per f.

Dalle considerazioni precedenti segue infine che il punto $x = 2$ è di minimo assoluto per f. Non esiste ovviamente alcun punto di massimo assoluto, visto il limite di f per $x \to +\infty$.

Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x \neq \pm 1$. Si ha:
$$f''(x) = \begin{cases} 2e^{2x}(2x^2 - 5) & \text{se } |x| > 1 \\ -2e^{2x}(2x^2 + 8x + 3) & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$
Se $|x| > 1$ la derivata seconda si annulla se $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, è positiva per $x > \sqrt{\frac{5}{2}}$ e per $x < -\sqrt{\frac{5}{2}}$, dunque f è convessa in ciascuno di tali insiemi, la derivata seconda è negativa per $x \in (1, \sqrt{\frac{5}{2}})$ e per $x \in (-\sqrt{\frac{5}{2}}, -1)$, dunque f è concava in ciascuno di tali intervalli. I punti $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ sono punti di flesso. Si noti che $1 < \sqrt{\frac{5}{2}} < 2$ e che $-\sqrt{\frac{5}{2}} < -1$. Se $|x| < 1$ la derivata seconda si annulla solo se $x = (-4 + \sqrt{10})/2$ (l'altro zero del polinomio che appare nella derivata seconda è esterno all'intervallo considerato), è positiva se $x \in (-1, (-4 + \sqrt{10})/2)$ cosicché f è convessa in tale intervallo, negativa se $x \in ((-4 + \sqrt{10}/2), 1)$ cosicché f è concava in tale intervallo. Il punto $x = (-4 + \sqrt{10})/2$ è di flesso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:


−1
1
2
x
y

4. (punti 8) Si considerino, per $x>0$ e al variare del parametro $a>0$, le funzioni

$$f_a(x)=\sqrt[6]{x^3+2x+1}-\sqrt{x+\frac{a}{x}},\quad g_a(x)=e^{\sqrt[5]{\sin\left(\frac{a}{x^5}\right)}}-1-\frac{2}{x}.$$

- Stabilire, al variare del parametro $a>0$, per quali $b\in\mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}x^b f_a(x)$$

è finito e diverso da zero.

- Stabilire, al variare del parametro $a>0$, per quali $b\in\mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}x^b g_a(x)$$

è finito e diverso da zero.

- Stabilire per quali valori dei parametri $a>0, b\in\mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty}x^b\frac{f_a(x)}{g_a(x)}\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Esaminiamo separatamente i vari termini coinvolti. Vale, per $x\to+\infty$ (dunque, come peraltro già richiesto dal testo, $x>0$, si ricordi inoltre che per ipotesi $a>0$):

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{x^3+2x+1}&=\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac16}=\sqrt{x}\left[1+\frac16\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\&=\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\\sqrt{x+\frac{a}{x}}&=\sqrt{x}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)^{\frac12}=\sqrt{x}\left[1+\frac{a}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}x^bf_a(x)&=x^b\left\{\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]-\sqrt{x}\left[1+\frac{a}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\right\}\\&=x^{b+\frac12}\left[\left(\frac13-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].\end{aligned}$$

Vi sono due casi possibili. Se $a=2/3$, $f_{2,b}\sim cx^{b-\frac52}$ per $x\to+\infty$ e per un opportuna costante $c\neq0$. Dunque se $a=2/3$ il limite richiesto è finito e diverso da zero se e solo se $b=5/2$. Se $a\neq2/3$, risulta $f_{a,b}\sim cx^{b-\frac32}$ per $x\to+\infty$ e per un opportuna costante $c\neq0$ (dipendente da a). Dunque il limite richiesto è finito e diverso da zero se e solo se $b=3/2$.

Circa il secondo punto, calcoliamo ora:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\sin\left(\frac{a}{x^5}\right)}&=\left[\frac{a}{x^5}+o\left(\frac{1}{x^{14}}\right)\right]^{\frac15}=\frac{a^{\frac15}}{x}\left[1+o\left(\frac{1}{x^9}\right)\right]^{\frac15}=\frac{a^{\frac15}}{x}\left[1+o\left(\frac{1}{x^9}\right)\right]\\e^{\sqrt[5]{\sin\left(\frac{a}{x^5}\right)}}&=e^{\frac{a^{1/5}}{x}+o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)}=1+\frac{a^{1/5}}{x}+\frac{a^{2/5}}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\x^bg_a(x)&=x^b\left[(a^{1/5}-2)\frac1x+\frac{a^{2/5}}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Vi sono due casi possibili. Se Se $a=32$, $f_{32,b}\sim cx^{b-2}$ per $x\to+\infty$ e per un opportuna costante $c\neq0$. Dunque se $a=32$ il limite richiesto è finito e diverso da zero se e solo se $b=2$. Se $a\neq32$, risulta $f_{a,b}\sim cx^{b-1}$ per $x\to+\infty$ e per un opportuna costante $c\neq0$ (dipendente da a). Dunque se per tali a il limite richiesto è finito e diverso da zero se e solo se $b=1$.

Circa il terzo punto, dalle considerazioni precedenti possiamo dedurre come per ogni valore di a,b valga $x^b\frac{f_a(x)}{g_a(x)}\sim\frac{c}{x^\gamma}$ per $x\to+\infty$, per un'opportuna costante $c\neq0$ (dipendente da a) e per un opportuno esponente γ, anch'esso dipendente da a. Si ha in effetti $\gamma=\frac32-b$ se $a=\frac23$, con $\gamma=-\frac12-b$ se $a=32$, $\gamma=\frac12-b$ se $a\neq\frac23, a\neq32$. In particolare, $f_{a,b}$ ha sempre segno costante per $x\to+\infty$. Per il criterio del confronto asintotico, affinché l'integrale richiesto esista finito occorre e basta che $\gamma>1$. Ciò accade nei seguenti casi:

- $a = 2/3, b < \frac{1}{2}$;
- $a = 32, b < -\frac{3}{2}$;
- $a \neq 2/3, a \neq 32, b < -\frac{1}{2}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 26/8/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 9) Sia h un parametro reale. Stabilire per quali valori di h la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & h^2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

Successivamente, si determini una base del nucleo della funzione lineare associata alla matrice A_h, al variare del parametro h.

Soluzione. Calcoli immediati mostrano che il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I) = [(3-\lambda)^2 - h^2]\lambda(\lambda - 3).$$

Esso si annulla per $\lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 3 \pm h$. Se $h \neq 0, \pm 3$ tutti gli autovalori sono distinti, dunque la matrice è diagonabizzabile. Se $h = 0$ l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica pari a tre. D'altronde si ha

$$A_0 - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha evidentemente rango due (vi è una colonna di zeri, la prima e la terza colonna sono proporzionali tra loro mentre la seconda non lo è), dunque, per il teorema di nullità più rango, in tal caso la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è due, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

Se $h = \pm 3$ l'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica pari a due. Inoltre in entrambi i casi vale

$$A_{\pm 3} - 0I = A_{\pm 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente il rango di quest'ultima matrice è pari a due (la prima e la terza colonna sono proporzionali tra loro, così come la seconda e la quarta, mentre ad esempio la prima e la seconda non lo sono). Dunque, ancora per il teorema di nullità più rango, in tali casi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è due, dunque la matrice è diagonalizzabile. In conclusione l'unico valore di h per cui la matrice non è diagonalizzabile è $h = 0$.

Nella seconda domanda è richiesto di risolvere il sistema $A_h \mathbf{v} = \mathbf{0}$. La prima e la terza equazione del sistema coincidono e forniscono, posto $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, la condizione $x_3 = -2x_1$. Se $h \neq \pm 3$ la seconda e la quarta equazione implicano $x_2 = x_4 = 0$, mentre se $h = \pm 3$ le due equazioni coincidono e forniscono la condizione $x_2 = -3x_4$. In conclusione, se $h \neq \pm 3$ gli elementi del nucleo sono i vettori $\mathbf{v} = (t, 0, -2t, 0)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, il nucleo è monodimensionale e una sua base è data dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2, 0)^\top$, mentre se $h = \pm 3$ gli elementi del nucleo sono i vettori $\mathbf{v} = (t, -3s, -2t, s)^\top$, $t, s \in \mathbb{R}$, il nucleo è bidimensionale e una sua base è data dai vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -2, 0)^\top$, $\mathbf{v} = (0, -3, 0, 1)^\top$.

2. (punti 6) Si consideri il numero complesso $z = (-\sqrt{3} - i)^{46}$.

- Calcolare modulo e argomento di z ;
- scrivere z in forma cartesiana;
- calcolare le radici quarte di z .

Soluzione. Si scriva $-\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Per la formula di de Moivre si ha dunque $z = 2^{46}e^{\frac{7}{6}46\pi i}$. Inoltre $\frac{7}{6}46 = \frac{7}{3}23 = 52 + \frac{5}{3}$. Quindi $e^{\frac{7}{6}46\pi i} = e^{\left(52+\frac{5}{3}\right)\pi i} = e^{\frac{5}{3}\pi i}$, dato che $e^{52\pi i} = 1$. Quindi $|z| = 2^{46}$ e, con le usuali convenzioni sull'argomento, $\arg z = \frac{5}{3}\pi$. In forma cartesiana avremo quindi $z = 2^{46}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{45}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$. Il calcolo delle radici quarte di tale numero procede usando la formula generale per le radici n-esime di un numero complesso in forma trigonometrica (o esponenziale): le quattro radici quarte avranno modulo $\left(2^{46}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{23}{2}}$, e argomenti $\vartheta_k = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Dunque $\vartheta_0 = \frac{5}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{11}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{17}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{23}{12}\pi$.

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = (2|x| - 3)e^{-\frac{1}{x}}$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$. Non vi sono simmetrie evidenti. Si ha $f(x) > 0$ se $|x| > \frac{3}{2}$, $f(x) < 0$ se $|x| < \frac{3}{2}$, $f(x) = 0$ se $x = \pm\frac{3}{2}$. Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Si noti che da quanto sopra segue che f non ammette massimi o minimi assoluti.

Per verificare l'eventuale esistenza di asintoti obliqui notiamo che, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = (2|x| - 3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2|x| - 3 - 2\frac{|x|}{x} + o(1) = \begin{cases} 2x - 5 + o(1) & \text{per } x \to +\infty \\ -2x - 1 + o(1) & \text{per } x \to -\infty. \end{cases}$$

Dunque la retta $y = 2x - 5$ è asintoto obliquo per $f(x)$ se $x \to +\infty$, mentre la retta $-2x - 1$ è asintoto obliquo per $f(x)$ se $x \to -\infty$.

La funzione è derivabile nel suo dominio di definizione. Calcoliamo la derivata. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(2x^2 + 2x - 3) & \text{se } x > 0 \\ -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(2x^2 + 2x + 3) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si nota immediatamente che $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Dunque f è strettamente decrescente in tale intervallo. Si ha invece che $f'(x) > 0$ per $x > (-1 + \sqrt{7})/2$, $f'(x) < 0$ per $x < (-1 + \sqrt{7})/2$, $f'(x) = 0$ per $x = x_1 := (-1 + \sqrt{7})/2$. Si noti che $0 < x_1 < 3/2$. Dunque f decresce per $x \in (0, x_1)$, cresce per $x \in (x_1 + \infty)$, e $x = x_1$ è punto di minimo relativo. Si ha infine

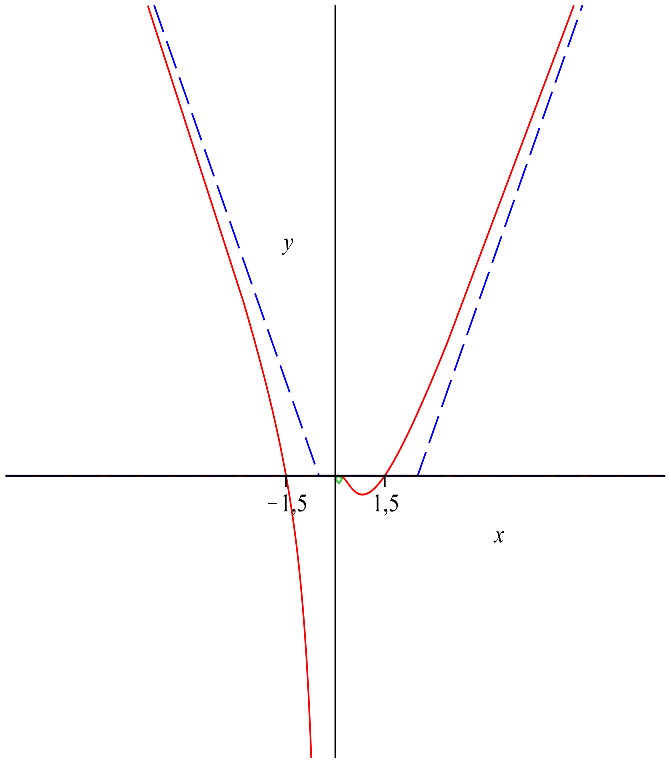
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

(l'esponenziale prevale sulla potenza), dunque il grafico di f si avvicina all'origine degli assi, per $x \to 0^+$, con tangente che tende a diventare orizzonale.

Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x \neq 0$. Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(8x - 3) & \text{se } x > 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(4x - 3) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ciò mostra immediatamente che $f''(x)$ è sempre negativa per $x < 0$, dunque f è concava in tale intervallo, mentre per $x > 0$ si ha $f''(x) < 0$ per $x \in (0, 3/8)$, $f''(x) > 0$ per $x > 3/8$, $f''(x) = 0$ per $x = x_2 := 3/8$. Quindi f è concava se $x \in (0, x_2)$, convessa se $x > x_2$, mentre $x = x_2$ è punto di flesso. Si noti che $0 < x_2 < x_1$, e che le considerazioni sulla concavità implicano anche che il grafico di f si avvicina a quello del suo asintoto obliquo per $x \to +\infty$ dall'alto, mentre si avvicina a quello del suo asintoto obliquo per $x \to -\infty$ dal basso. In conclusione, il grafico di f è il seguente.



y
−1,5
1,5
x

4. (punti 7) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to e} \frac{\left\{\log\left[(\log x)^2\right]\right\}^3}{x^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{3}}}.$$

Soluzione. Sviluppiamo le quantità presenti nel limite da risolvere con la formula di Taylor. Si ha in primo luogo

$$\log x = 1 + \frac{x-e}{e} + o(x-e) \text{ per } x \to e.$$

Ciò segue dalla formula di Taylor generale, in quanto $\log e = 1, (\log x)'\,|_{x=e} = 1/e$, ma anche dall'usuale sviluppo in $t=0$ di $\log(1+t)$, infatti $\log x = \log\left(\frac{x}{e}e\right) = 1 + \log\left(\frac{x}{e}\right) = 1 + \log\left(1 + \frac{x-e}{e}\right) = 1 + \frac{x-e}{e} + o(x-e)$ per $x \to e$, dato che $x - e \to 0$ per $x \to e$. Ne segue che

$$\log[(\log x)^2] = 2\log(\log x) = 2\log\left[1 + \frac{(x-e)}{e} + o(x-e)\right] = \frac{2}{e}(x-e) + o(x-e) \text{ per } x \to e$$

$$(\log[(\log x)^2])^3 = \left[\frac{2}{e}(x-e) + o(x-e)\right]^3 = \frac{8}{e^3}(x-e)^3 + o((x-e)^3) \text{ per } x \to e.$$

Si ha infine, ancora per la formula di Taylor generale, che

$$x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3e^{2/3}}(x-e) + o(x-e) \text{ per } x \to e$$

(ciò segue dal fatto che $(x^{\frac{1}{3}})'\,\big|_{x=e} = 1/[3e^{2/3}]$). Dunque:

$$\lim_{x\to e} \frac{\left\{\log\left[(\log x)^2\right]\right\}^3}{x^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{8}{e^3}(x-e)^3 + o(x-e)^3}{\frac{1}{3e^{2/3}}(x-e) + o(x-e)} = 0.$$