Funzioni di più variabili (2)

1) Calcolare il differenziale primo e il differenziale secondo nell'origine della funzione

$$f(x, y) = e^{x-y+\frac{1}{2}xy}$$

Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ nel punto $(0, 0, 1)$.
Dimostrare che in un intorno dell'origine il grafico della funzione f giace *al di sopra* del piano tangente.
Trovare i punti critici di f ed eventuali estremi locali di f.

2) Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = xe^{x-y}$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \geq x^2\}$$

3) Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o punti di sella.

4) Siano f, g, funzioni di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e sia $c > 0$ una costante. Si consideri la funzione di *due* variabili:

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \qquad (*)$$

Verificare, applicando le regole di derivazione, che la funzione u soddisfa *l'equazione delle onde* (in una dimensione spaziale)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Viceversa, sia $u(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ una soluzione dell'equazione. Definite due nuove variabili (ξ, η) tali che

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad t = \frac{\xi - \eta}{2c}$$

si ponga

$$v(\xi, \eta) = u\Big(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\Big)$$

Dimostrare che vale $v_{\xi\eta} = 0$ e dedurre che *ogni* soluzione di classe $\mathcal{C}^2$ dell'equazione delle onde ha la forma $(*)$.

Soluzioni

1) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Derivate parziali:

$$f_x(x,y) = (1+y/2)e^{x-y+\frac{1}{2}xy}, \qquad f_y(x.y) = (-1+x/2)e^{x-y+\frac{1}{2}xy}$$

$$f_{xx}(x,y) = (1+y/2)^2e^{x-y+\frac{1}{2}xy}, \qquad f_{yy}(x.y) = (-1+x/2)^2e^{x-y+\frac{1}{2}xy}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \big[(-1+x/2)(1+y/2)+1/2\big]e^{x-y+\frac{1}{2}xy}$$

Valutando le derivate nell'origine e denotando con (h,k) l'incremento, si ottiene:

$$df(0,0) = h-k$$

$$d^2f(0,0) = h^2 - hk + k^2$$

Il piano tangente nel punto $(0,0,1)$ ha equazione

$$z = 1+x-y$$

Grafico di f nell'intorno dell'origine:
scriviamo la formula di Taylor con centro nell'origine:

$$f(h,k) = 1+h-k+\frac{1}{2}d^2f(\delta h, \delta k)$$

dove $\delta \in (0,1)$ e

$$d^2f(\delta h,\delta k) = f_{xx}(\delta h,\delta k)h^2 + 2f_{xy}(\delta h,\delta k)hk + f_{yy}(\delta h,\delta k)k^2$$

Poiché $d^2f(0,0)$ è una forma quadratica *definita positiva*, per la permanenza del segno anche $d^2f(\delta h,\delta k)$ è definita positiva per $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$. Dalla formula di Taylor ricaviamo allora

$$f(h,k) > 1+h-k$$

per ogni vettore (h,k) (non nullo) di norma abbastanza piccola. In un intorno dell'origine possiamo sostituire $x=h$, $y=k$, per cui

$$f(x,y) > 1+x-y$$

Dunque il grafico della funzione in un intorno dell'origine giace al di sopra del *piano tangente.*

Punti critici ed estremi locali:
I punti critici si trovano annullando il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (1+y/2)e^{x-y+\frac{1}{2}xy}\,\mathbf{i} + (-1+x/2)e^{x-y+\frac{1}{2}xy}\,\mathbf{j}$$

L'unico punto critico è $(2, -2)$ e si può verificare calcolando $H_f(2, -2)$ che è un punto di sella.

2) Calcolando il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (x + 1)e^{x-y}\,\mathbf{i} - xe^{x-y}\,\mathbf{j}$$

si vede che la funzione non ha punti critici; quindi eventuali punti di massimo e minimo vanno cercati sulla frontiera $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. La restrizione di f alla frontiera di D è

$$f(x, x^2) = xe^{x-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Studiando la funzione di *una* variabile

$$x \mapsto xe^{x-x^2}$$

si ricava che essa ha un minimo assoluto in $x = -1/2$ (con valore $-\frac{1}{2}e^{-3/4}$) ed un massimo assoluto in $x = 1$ (con valore 1). Verifichiamo che i punti $(-1/2, 1/4)$ e $(1, 1)$ sono rispettivamente punto di minimo assoluto e punto di massimo assoluto di f su D. Infatti, per ogni $(x, y) \in D$ abbiamo

$$|f(x, y)| = |x|e^{x-y} \le |x|e^{x-x^2}$$

Da questa stima e dalle precedenti conclusioni sulla restrizione di f a ∂D, segue che f è limitata su D e che assume valori estremi nei punti trovati sulla frontiera.

3) Annullando il gradiente di f

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x + yz)\,\mathbf{i} + 2(y + xz)\,\mathbf{j} + 2(z + xy)\,\mathbf{k}$$

si trovano, dopo alcuni calcoli, 5 punti critici: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$.
Calcolando la matrice Hessiana

$$\mathbf{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo facilmente

$$d^2f(0, 0, 0) = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$

per cui l'origine è un minimo.

Osserviamo ora che la funzione f è simmetrica per cambiamento di segno di una qualunque *coppia* di variabili; quindi, è sufficiente esaminare uno qualsiasi degli altri punti, per esempio $(1, 1, -1)$. La matrice Hessiana $H_f(1, 1, -1)$ ha autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ (doppio) e $\lambda_3 = -2$. Dunque, abbiamo un punto di sella.
Si poteva ricavare la stessa conclusione esaminando direttamente la forma quadratica

$$d^2f(1, 1, -1) = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3)$$

e osservando che per $\mathbf{h} = (h, h, -h)$ si ottiene $d^2 f = -6h^2 < 0$, mentre con la scelta $\mathbf{h} = (h, -h, h)$ abbiamo $d^2 f = 10h^2 > 0$.

4) Indicando con un apice la derivata delle funzioni f e g rispetto al loro argomento e applicando le regole di derivazione, si trova:

$$u_x(x,t) = f'(x+ct) + g'(x-ct); \quad u_t(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct)$$

$$u_{xx}(x,t) = f''(x+ct) + g''(x-ct); \quad u_{tt}(x,t) = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)$$

Dunque si ottiene

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

Viceversa, se $u(x,t)$ è una soluzione di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e se poniamo

$$v(\xi,\eta) = u\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\Big)$$

possiamo calcolare

$$v_\eta = \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2c}u_t$$

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{4}u_{xx} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c}u_{xt} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} = -\frac{1}{4c^2}[u_{tt} - c^2 u_{xx}] = 0$$

La funzione $v_\eta(\xi,\eta)$ ha derivata identicamente nulla rispetto a ξ, per cui deve essere una funzione della sola variabile η : $v_\eta(\xi,\eta) = h(\eta)$, con h qualsiasi (di classe $\mathcal{C}^1$). Integrando rispetto ad η per ogni fissato ξ si trova allora

$$v(\xi,\eta) = \int h(\eta)d\eta + f(\xi)$$

dove f è una arbitraria funzione di classe $\mathcal{C}^2$. Ponendo $g = \int h$ e ricavando ξ ed η in funzione di x e t, si trova che $u(x,t)$ ha la forma $(*)$.