Analisi matematica 2		2 maggio 2018
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Spiegare perché la funzione
$$f(x, y) = x \cos y$$
è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ un numero arbitrario di volte.

Trovare tutti i punti critici di f e classificarli. Trovare i massimi e i minimi assoluti di f sul rettangolo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Descrivere l'insieme di definizione di $\sqrt{f}$. Dire se è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Determinare, sulla curva di equazione
$$x^2 - xy + y^2 = c \quad (c > 0)$$
i punti di massima e minima distanza dall'origine.

Suggerimento: cercare i punti critici vincolati della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ ristretta al vincolo $x^2 - xy + y^2 - c = 0$.

2.

a)

Data l'equazione differenziale
$$y' = \frac{3}{t}\left(y-1\right)^{2/3}$$

i) Stabilire in quali punti (t_0, y_0) del piano sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ (motivare la risposta).

ii) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e specificare quella che soddisfa la condizione $y(-1) = 0$.

b) Scrivere l'integrale generale dell'equazione
$$y'' - y = 1 - \cos t\,.$$

Determinare α tale che la soluzione con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = \alpha$, sia limitata su $[0, +\infty)$.

c)

i) Studiare la stabilità dell'origine per il sistema lineare :
$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

ii) Verificare che la funzione
$$E(x, y) = x^2 - xy + y^2$$
è un *integrale primo* del sistema. Spiegare perchè questo risultato conferma l'analisi della stabilità effettuata al punto *i*).

3. Si consideri la curva piana di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \sin(2t)\,\mathbf{j}\,; \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

a) Dimostrare che la curva è chiusa, regolare, ma non semplice.

b) Verificare che il sostegno γ della curva soddisfa l'equazione

$$4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0\,.$$

Disegnare γ evidenziando il verso di percorrenza.
(*Suggerimento:* risolvendo l'equazione rispetto a y, γ è unione di grafici di funzioni di x.)

c) Dire cosa si intende per *punto regolare* di una curva definita in forma implicita. Trovare al variare di $c \in \mathbb{R}$ gli eventuali *punti singolari* delle curve definite implicitamente dall'equazione

$$4x^4 - 4x^2 + y^2 = c\,.$$

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ perchè le sue derivate parziali

$$\partial_x f(x,y) = \cos y, \qquad \partial_y f(x,y) = -x \sin y$$

sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ (condizione sufficiente per la differenziabilità). Lo stesso ragionamento vale per le derivate parziali e per tutte le derivate successive, poichè le derivate di tutti gli ordini sono continue in $\mathbb{R}^2$.

Punti critici: il gradiente si annulla nei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \cos y = 0 \\ x \sin y = 0 \end{cases}$$

dunque nei punti

$$\mathbf{r}_k = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Calcolando le derivate seconde

$$\partial_{xx} f(x,y) = 0, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -\sin y, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = -x \cos y,$$

e la matrice hessiana $H_f(x,y)$, si ottiene

$$\det H_f(x,y) = -\sin^2 y$$

Nei punti critici abbiamo allora

$$\det H_f(\mathbf{r}_k) = -1$$

Si tratta dunque di punti di sella. Si osserva infatti che $f(\mathbf{r}_k) = 0$ e che in *ogni* intorno di tali punti f cambia di segno.

Poiché f non possiede estremi liberi, i punti di massimo e minimo nel rettangolo (che esistono per il teorema di Weierstrass) devono essere sulla frontiera. Consideriamo quindi le restrizioni

$$f(0,y) = 0, \quad f(1,y) = \cos y, \quad 0 \le y \le 2\pi; \qquad f(x,0) = f(x,2\pi) = x, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

Dal confronto si ricava che il massimo assoluto è $f(1,0) = f(1,2\pi) = 1$, mentre il minimo è $f(1,\pi) = -1$.

L'insieme di definizione di $\sqrt{f}$ è l'insieme dei punti (x,y) tali che $f(x,y) \ge 0$ ovvero l'insieme

$$D \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \cos y \ge 0\right\}$$

Applicando la regola dei segni si ottiene $D = D_+ \cup D_-$, dove

$$D_+ = \{(x,y) \,:\, x \ge 0, -\pi/2 + 2k\pi \le y \le \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}\,,$$

$$D_- = \{(x,y) \,:\, x \le 0, -\pi/2 + (2k+1)\pi \le y \le \pi/2 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e connesso.

b) La distanza di un punto (x, y) dall'origine è $\sqrt{x^2+y^2}$; se in un punto sul vincolo la distanza dall'origine è massima (minima) sarà anche massima (minima) la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ (quadrato della distanza) più comoda per svolgere i calcoli. Osserviamo che per ogni $c > 0$ i punti del vincolo sono tutti regolari; quindi, gli estremi vincolati della funzione f (che esistono per il teorema di Weierstrass) devono essere punti critici vincolati. Usando il metodo dei moltiplicatori, cerchiamo i punti critici della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - xy + y^2 - c)\,.$$

Si ottiene il sistema

$$2x - \lambda(2x - y) = 0, \qquad 2y - \lambda(2y - x) = 0, \qquad x^2 - xy + y^2 - c = 0\,,$$

Risolvendo si trovano 4 punti critici $(\pm\sqrt{c}, \pm\sqrt{c})$ e $(\pm\sqrt{c}/3, \mp\sqrt{c}/3))$. Valutando f in questi punti, si deduce che i primi due sono i punti di massimo e gli altri due punti di minimo. La distanza massima è quindi $\sqrt{2c}$ e la minima $\sqrt{2c/3}$.

2a)

i) La funzione $f(t, y) = \frac{3}{t}\left(y-1\right)^{2/3}$ è definita e continua per $t \neq 0$; la derivata parziale è definita per $y \neq 1$ ed è data da

$$\partial_y f(t, y) = \frac{2}{t}\left(y-1\right)^{-1/3},$$

dunque è continua per $t \neq 0$ e $y \neq 1$. Queste disuguaglianze dividono il piano (t, y) in 4 aperti connessi dove valgono le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale.

ii) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. *La funzione costante $y = 1$ è soluzione dell'equazione.* Le soluzioni non costanti si trovano (in forma implicita) applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{1}{3(y-1)^{2/3}}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

da cui si ricava

$$(y-1)^{1/3} = \ln|t| + C\,, \qquad t \neq 0\,.$$

Risolvendo rispetto ad y troviamo

$$y = 1 + \left(\ln|t| + C\right)^3.$$

Si osserva che per $|t| = e^{-C}$ le soluzioni hanno un raccordo $\mathcal{C}^1$ con la soluzione costante $y = 1$. Poiché $y(-1) = 1 + C^3$, la condizione $y(-1) = 0$ impone $C = -1$. La funzione

$$\varphi(t) = 1 + \left(\ln(-t) - 1\right)^3,$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy nell'intervallo $-e < t < 0$.

2b)

L'equazione omogenea $z'' - z = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$, dalla cui soluzione si ottiene l'integrale generale

$$z(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t}, \qquad c_1,\ c_2\ \in \mathbb{R}\,.$$

Usando il metodo di somiglianza e il principio di sovrapposizione, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{y}(t) = A + B\cos t$ (osservare che nell'equazione manca il termine con la derivata prima). Sostituendo nell'equazione si trova $A = -1$ e $B = 1/2$. L'integrale generale dell'equazione si scrive allora

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - 1\,.$$

La soluzione con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = \alpha$ si trova risolvendo il sistema

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0\,; \qquad c_1 - c_2 = \alpha\,,$$

da cui si ricava $c_1 = \alpha/2 + 1/4\,,\ c_2 = -\alpha/2 + 1/4$. Poiché le soluzioni limitate per $t \geq 0$ sono quelle con $c_1 = 0$, occorre scegliere $\alpha = -1/2$.

2c)

i) La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = 3 \neq 0$, l'origine è l'unico punto di equilibrio. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + 3 = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$, dunque l'origine è stabile.

ii) Lungo le soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema abbiamo

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \partial_x E(x(t), y(t))\, x'(t) + \partial_y E(x(t), y(t))\, y'(t)$$

$$= (2x - y)\,(x - 2y) + (-x + 2y)\,(2x - y) = 0\,.$$

Poiché le orbite sono le curve di livello $E(x, y) = c$, $c \geq 0$, e lungo tali curve la distanza dall'origine è compresa tra $\sqrt{2c/3}$ e $\sqrt{2c}$ (vedi soluzione esercizio 1b) si conferma che l'origine è un punto di equilibrio stabile per il sistema.

3.

a) La curva è chiusa perché $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{0}$, ma non è semplice, essendo pure $\mathbf{r}(\pi) = \mathbf{0}$.
La curva è regolare perché $\mathbf{r}(t)$ è derivabile con derivata continua e

$$\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2\cos(2t)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0} \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$\big(\cos t$, e $\cos(2t)$ si annullano in punti diversi$\big)$.

b) Sostituendo $x = \sin t$, $y = \sin(2t)$ nell'equazione si vede che è soddisfatta per ogni t. Risolvendo l'equazione rispetto ad y si ottengono le funzioni (continue in $[-1, 1]$ e derivabili all'interno)

$$y = \pm 2x\,\sqrt{1 - x^2}\,.$$

c) I punti singolari si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 16x^3 - 8x = 0 \\ 2y = 0 \\ 4x^4 - 4x^2 + y^2 = c \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono risolte da $P_0(0, 0)$, $P_1(1\sqrt{2}, 0)$, $P_2(-1\sqrt{2}, 0)$.
Sostituendo i valori nell'ultima equazione, vediamo che P_0 è punto singolare della curva con $c = 0$, mentre P_1 e P_2 stanno sull'insieme di livello $c = -1$ (che in effetti si riduce all'unione dei due punti). Se $c < -1$, l'ultima equazione non ha soluzioni (insieme di livello vuoto). In definitiva, le curve di livello sono regolari per $c > -1$, $c \neq 0$.