Presentazione del corso

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Orario Lezioni

Mercoledì 13:15 – 16:15,
aula B8.2.1

Venerdì 14:15 – 16:15,
aula B8.0.7

Maurizio Citterio
maurizio.citterio@polimi.it

Ricevimento studenti, su appuntamento:
mercoledì 9:15 – 10:15
venerdì 10:15 –12:15

Orario Esercitazioni

Squadra: inizio elenco – TOLZ

lunedì 16:15 – 18:15,
aula B8.2.1

Marco Boella

Squadra: TOLZ – fine elenco

lunedì 16:15 – 18:15,
aula B8.2.2

Alan Cigoli

Prerequisiti

Si richiede che lo studente abbia una buona conoscenza degli argomenti di matematica trattati nella scuola secondaria di secondo grado, incluse le nozioni di base di teoria degli insiemi. In maniera particolare si richiede la capacità di saper lavorare con i polinomi, di applicare le principali formule di trigonometria, di risolvere semplici equazioni, di saper utilizzare i metodi della geometria analitica nel piano.

Obiettivi dell'insegnamento

Coerentemente con gli obiettivi formativi del corso di studio previsti della scheda SUA-CdS, l'insegnamento ha il duplice obiettivo di fornire allo studente sia i principi fondamentali dell'algebra lineare, sia le applicazioni del metodo delle coordinate della geometria analitica. Si propone lo studio dei vettori geometrici, delle matrici e delle operazioni relative. Viene sviluppata la teoria dei sistemi lineari. Si considerano la costruzione e lo studio degli spazi vettoriali e delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Si forniscono le nozioni e i concetti fondamentali riguardanti autovalori e autovettori. Si tratta il prodotto scalare euclideo. Si approfondisce il metodo delle coordinate cartesiane nel piano e nello spazio, anche attraverso il calcolo vettoriale, e con particolari applicazioni allo studio di problemi riguardanti rette, piani, coniche e quadriche.

Argomenti del corso
Primo emisemestre

1. **Coordinate cartesiane e geometria analitica lineare**
   Riferimento cartesiano ortogonale monometrico, nel piano e nello spazio. Rappresentazioni di punti e rette. Equazioni di rette e piani, parametri direttori di rette e piani. Distanze, angolo tra due rette, parallelismo e perpendicolarità tra rette. Parallelismo e ortogonalità tra piani. Angolo tra rette e piani. Proiezione di una retta su un piano. Parallelismo e ortogonalità tra rette e piani. Rette sghembe e minima distanza. Fasci di rette, fasci di piani. Stella di rette.
2. **Matrici e vettori geometrici**
   Vettori geometrici. Alcune operazioni algebriche sui vettori geometrici. Generalità sulle matrici, operazioni, dipendenza lineare, determinante, rango, inversa di una matrice quadrata, matrici ortogonali.

Argomenti del corso
Primo emisemestre

3. **Sistemi lineari**

   Nozioni fondamentali, teorema di Rouché-Capelli, procedimenti di risoluzione di un sistema lineare, teorema di Cramer, sistemi lineari omogenei e loro autosoluzioni.

4. **Spazi vettoriali**

   Operazioni tra vettori, sottospazi, dimensione, generatori e basi, somma ed intersezione di sottospazi. Coordinate di un vettore rispetto a una base. Cambio di base.

5. **Applicazioni lineari**

   Generalità, nucleo ed immagine, applicazioni lineari e matrici, applicazioni lineari iniettive e suriettive. Endomorfismi.

Argomenti del corso
Secondo emisemestre

6. **Autovalori e autovettori**
   Nozione ed esempi di autovalori e di autovettori. Interpretazione geometrica. Matrice caratteristica, polinomio caratteristico, equazione caratteristica. Similitudine di matrici. Diagonalizzazione degli endomorfismi e teoremi relativi.
7. **Spazi euclidei**
   Prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$. Prodotto vettoriale, prodotto misto, modulo, angolo, ortogonalità tra vettori. Espressione cartesiana del prodotto scalare e del prodotto vettoriale. Basi ortonormali. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Diagonalizzazione ortogonale di matrici reali e simmetriche. Teorema spettrale.

Argomenti del corso
Secondo emisemestre

8. **Coniche**

   Nozioni sulle coniche sia come curve algebriche di secondo grado, sia come sezioni piane di un cono circolare retto. Proprietà analitiche delle coniche. Invarianti ortogonali e classificazione metrica delle coniche. Equazioni canoniche. Riduzione a forma canonica. Determinazione di centro, assi, asintoti di un'iperbole. Determinazione dell'asse e del vertice di una parabola.

9. **Quadriche**

   Definizione analitica di una quadrica. Matrice associata, autovalori e invarianti ortogonali. Classificazione metrica delle quadriche. Equazioni delle quadriche in forma canonica. Riduzione di una quadrica a forma canonica. di coni e cilindri. Studio dei cilindri. Quadriche di rotazione.

Alcuni suggerimenti bibliografici

1. F. Lastaria, M. Saita
   Appunti di algebra lineare. 2011, file PDF disponibile su Beep.

2. Enrico Schlesinger
   Algebra lineare e geometria. Zanichelli, 2011
   ISBN: 978-88-08-52069-2

3. Paolo Dulio, Walter Pacco
   Algebra lineare e geometria analitica. Teoria ed esercizi con svolgimento. Esculapio, 2015 - ISBN: 9788874888382

4. Alessandro Perotti, Raffaele Scapellato
   Geometria e Algebra Lineare - Seconda edizione. Esculapio, 2015
   ISBN: 978-88-7488-842-9

5. Alessandro Gimigliano, Alessandra Bernardi
   Algebra lineare e geometria analitica. Città Studi, 2014

Alcuni Eserciziari

1. Claretta Carrara
   Esercizi di Algebra Lineare
   file PDF disponibile su Beep.

2. L. Mauri, E. Schlesinger
   Esercizi di Algebra Lineare e Geometria
   Zanichelli, 2012 - ISBN: 9788808192523

3. Marco Boella
   Analisi Matematica 1 e Algebra lineare. Esercizi
   Pearson, 2012.

4. Marco Boella
   Analisi Matematica 2. Esercizi
   Pearson, 2014.

Risultati di apprendimento attesi

Ci si attende che lo studente conosca gli elementi fondamentali dell'algebra lineare, con particolare riferimento ai seguenti:

- studio e risoluzione di sistemi lineari;
- studio di spazi e sottospazi vettoriali (dimensione, generatori, basi, basi ortonormali);
- studio delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali;
- concetti di autovalore e autovettore, e relativa applicazione a problemi legati alla diagonalizzazione degli endomorfismi.

Ci si attende altresì la conoscenza del metodo delle coordinate cartesiane, con applicazioni particolari a

- risoluzione di problemi riguardanti piani e rette nello spazio
- calcolo vettoriale nel piano e nello spazio;
- classificazione e studio di coniche;
- classificazione e studio di quadriche.

Risultati di apprendimento attesi

Il docente si attende una comprensione che non sia limitata al solo enunciato di definizioni e di risultati, e alla risoluzione di esercizi standard, ma sia anche critica, in grado di distinguere differenti tipologie di problemi e di soluzioni, attraverso scelte consapevoli e giustificazione dei procedimenti seguiti. Ci si aspettano inoltre un'esposizione ben argomentata della teoria e un'adeguata correttezza nei calcoli.

Modalità di valutazione

L’esame può essere superato presentandosi a due prove in itinere, oppure a uno degli appelli previsti dal calendario accademico. Gli studenti che non superano l’esame con le prove in itinere devono comunque sostenere l’esame completo in un appello successivo. Con la prima modalità, non obbligatoria ma fortemente consigliata, vengono assegnate due prove scritte, dette prove in itinere, riguardanti parti distinte dell’insegnamento, una circa alla metà dell’insegnamento e l’altra al termine dello stesso, e strutturate in esercizi di varia tipologia.

Modalità di valutazione

Soltanto una valutazione positiva conseguita nella prima prova in itinere consente di accedere alla seconda. Qualora lo studente non si presenti alla prima prova in itinere, non ha comunque diritto di accedere alla seconda. Nel caso in cui entrambe le prove in itinere vengano svolte in maniera soddisfacente, viene conseguito un voto uguale alla media aritmetica dei risultati parziali e lo studente viene convocato a sostenere una prova orale. Detta prova è obbligatoria e può portare a una modifica del voto o anche a un esito negativo. A questo punto si procederà alla fase di consuntivazione, con registrazione in carriera del voto conseguito in caso di esito positivo, o rinvio dello studente agli appelli d'esame altrimenti.

Modalità di valutazione

Gli appelli d'esame comprendono una prova scritta e una prova orale. L'accesso alla prova orale è comunque subordinato a uno svolgimento soddisfacente della prova scritta. Nel caso in cui anche la prova orale, obbligatoria, risulti positiva, si procederà alla fase di consuntivazione con registrazione in carriera del voto conseguito. In caso di prova scritta o di eventuale prova orale non soddisfacente, lo studente è rinviato agli appelli d'esame successivi. Possono sostenere il singolo appello tutti e soli gli studenti che si sono regolarmente prenotati usando le modalità previste. Non è tecnicamente possibile ai docenti registrare voti per studenti che non risultano iscritti all'appello in questione.

Modalità di valutazione

Sia per le prove in itinere, sia per gli appelli d’esame, è facoltà dello studente rifiutare il voto proposto, e accedere di conseguenza agli eventuali appelli d’esame successivi. L’insegnamento deve essere ripetuto se non viene raggiunta una valutazione sufficiente in alcuno degli appelli previsti dal calendario accademico. Il giorno dell’esame scritto eventuali studenti stranieri potranno avere il testo della prova tradotto in inglese, dietro richiesta preventiva di almeno 3 giorni lavorativi.

Date provvisorie

Le date da confermare delle prossime prove sono le seguenti:

- 6 novembre 2019, prima prova in itinere;
- gennaio 2020, seconda prova in itinere;
- gennaio/febbraio 2020, primo appello.

Alcune avvertenze per gli appelli e le prove in itinere.

- Per sostenere una qualunque prova d'esame è obbligatoria l'iscrizione entro i termini stabiliti.
- Alle prove d'esame bisogna presentarsi muniti di documento d'identità con fotografia in corso di validità.
- Durante le prove d'esame è vietato comunicare con altri dentro l'aula o fuori dall'aula d'esame.
- Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni. In particolare, lo studente non deve avere cellulari, smartphone, tablet o altri apparecchi elettronici che possano essere connessi alle reti. È concessa la consultazione di un foglio (in formato A4) su cui lo studente abbia scritto le principali formule.

Vettori, rette e piani.

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Sull'insieme dei segmenti orientati (del piano o dello spazio), introduciamo la relazione di equipollenza:

> *il segmento orientato AB è equipollente al segmento orientato $A'B'$ quando esiste un movimento rigido e parallelo che faccia coincidere A con A' e B con B' .*

In altro modo, possiamo dire che:

> *il segmento orientato AB è equipollente al segmento orientato $A'B'$ quando entrambi hanno lunghezza nulla oppure hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la stessa lunghezza.*

La relazione di equipollenza è di equivalenza.

Definizione

Un *vettore geometrico* è una classe di equipollenza.

Somma

Consideriamo due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e rappresentiamo $\mathbf{u}$ con il segmento orientato AB e $\mathbf{v}$ con il segmento orientato BC

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}\,, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{BC}\,.$$

La somma di vettori è definita dalla “regola del parallelogramma”:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Si prova facilmente (esercizio) che:

- la somma di vettori geometrici è associativa;
- la somma di vettori geometrici è commutativa;
- la somma di vettori geometrici ammette come elemento neutro il vettore nullo $\mathbf{0}$, rappresentato dal segmento orientato di lunghezza nulla;
- ogni vettore $\mathbf{u}$ ha come opposto il vettore $-\mathbf{u}$ che ha la stessa direzione di $\mathbf{u}$, la stessa lunghezza di $\mathbf{u}$, ma verso opposto a $\mathbf{u}$.

Prodotto esterno

Dato un vettore non nullo $\mathbf{u}$ e uno scalare (cioè un numero reale) non nullo t, si definisce il prodotto esterno (o prodotto di un vettore per uno scalare) il vettore

$$t\mathbf{u}$$

che ha come lunghezza la lunghezza di $\mathbf{u}$ moltiplicata per $|t|$ (modulo di t), la stessa direzione di $\mathbf{u}$, lo stesso verso di $\mathbf{u}$ se $t > 0$, verso opposto a quello di $\mathbf{u}$ se $t < 0$. Si pone infine $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni scalare t e $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ per ogni vettore $\mathbf{u}$.

Si prova facilmente (esercizio) che, per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, risulta:

- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;
- $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

Inoltre, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà distributive:

- $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$;
- $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$.

Spazio vettoriale reale: definizione generale

Uno spazio vettoriale reale consiste di:

- un insieme V i cui elementi sono detti vettori;
- un'operazione interna $+ : V \times V \to V$,
  che ad una coppia di vettori v , w associa la somma $v + w$;
- un'operazione "esterna" $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
  che ad ogni numero reale k e ogni vettore v associa il prodotto kv ;

e dei seguenti assiomi:

proprietà della somma:

1. associatività;
2. commutatività;
3. esistenza del vettore nullo;
4. esistenza dell'opposto;

proprietà del prodotto:

5. per ogni $v \in V$ risulta $1 \cdot v = v$;
6. per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, $v \in V$
   risulta $h \cdot (k \cdot v) = (hk) \cdot v$;

proprietà distributive:

7. per ogni $k \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ risulta $k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v$;
8. per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, $v \in V$ risulta $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v$.

Fissato nello spazio un punto origine O e rappresentando i vettori come segmenti orientati uscenti dall'origine, stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra i vettori geometrici dello spazio e i punti dello spazio: ad ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ corrisponde il punto P e, viceversa, ad ogni punto P corrisponde il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$.

Fissato un sistema di riferimento, è nota la corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali.

Abbiamo dunque che l'insieme dei vettori geometrici dello spazio è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle terne ordinate di numeri reali:

$$\{\text{vettori geometrici dello spazio}\} \rightleftarrows \mathbb{R}^3 .$$

Note le coordinate (ascissa, ordinata e quota) del punto P

$$P = (x_P, y_P, z_P) \ ,$$

identifichiamo il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ con questa terna e scriviamo

$$\mathbf{v} = (x_P, y_P, z_P) \ .$$

Il vettore $\overrightarrow{OP}$ è detto “vettore posizione” del punto P e viene spesso indicato con la stessa lettera P sottolineata $\underline{P}$, o in grassetto $\mathbf{P}$, o con una freccetta $\vec{P}$.

Le coordinate del punto P sono dette *componenti* del vettore posizione $\overrightarrow{OP}$.

Considerati i vettori $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e lo scalare $t \in \mathbb{R}$, si ha (esercizio) la seguente espressione della somma e del prodotto esterno di vettori geometrici attraverso le terne ordinate di numeri reali:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \ ,$$
$$t\mathbf{u} = t(x_0, y_0, z_0) = (tx_0, ty_0, tz_0) \ .$$

Il vettore nullo è $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, mentre l'opposto del vettore $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)$ è $-\mathbf{u} = (-x_0, -y_0, -z_0)$.

Modulo

Attraverso il teorema di Pitagora, siamo in grado di calcolare il modulo $|\mathbf{u}|$, cioè la misura della lunghezza di un vettore geometrico $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)$:

$$|\mathbf{u}| = |(x_0, y_0, z_0)| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\ .$$

Esercizio

Provare che, per ogni vettore $\mathbf{u}$ e per ogni scalare t, risulta:

- $|\mathbf{u}| \geq 0$;
- $|\mathbf{u}| = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- $|t\mathbf{u}| = |t||\mathbf{u}|$.

Un vettore con modulo 1, viene detto *versore*, o *vettore unitario*. Ogni vettore $\mathbf{u}$ non nullo può essere *normalizzato* moltiplicando $\mathbf{u}$ per il reciproco del modulo $|\mathbf{u}|$, ottenendo il versore

$$\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}\ .$$

Distanza di due punti. Punto medio

Osserviamo che, dati due punti $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, il vettore rappresentato dal segmento orientato AB è

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) ,$$

e abbiamo

$$|\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{B} - \mathbf{A}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} .$$

Il punto medio M del segmento AB ha come vettore posizione

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

quindi le coordinate di M sono

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} , \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2} .$$

Due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, e scriviamo $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, quando hanno la stessa direzione.

Si conviene che il vettore nullo sia parallelo ad ogni vettore, mentre per vettori non nulli si ha:

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \quad \text{se e solo se} \quad \text{esiste } k \in \mathbb{R} \text{ tale che } \mathbf{u} = k\mathbf{v} \;;$$

dunque $\mathbf{u}$ è parallelo a $\mathbf{v}$ quando le terne di numeri reali $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono proporzionali.

Una retta r si può individuare assegnando un punto P, per cui passa, e un vettore $\mathbf{v}$ che determina la direzione.
I punti X della retta r sono tutti e soli i punti che verificano l'equazione vettoriale

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{v} \ , \quad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Il vettore $\mathbf{v}$ prende il nome di *vettore direttore* e le componenti di $\mathbf{v}$ sono dette *parametri direttori*. Nel caso in cui il vettore direttore $\mathbf{v}$ sia unitario, i parametri direttori sono detti *coseni direttori* della retta.
Dall'equazione vettoriale, scrivendo componente per componente, si hanno le *equazioni parametriche (scalari)* della retta r per $P(x_0, y_0, z_0)$ con la direzione di $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{cases} x = & x_0 + \alpha t \\ y = & y_0 + \beta t \\ z = & z_0 + \gamma t \end{cases} \ , \quad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

La retta passante per due punti assegnati $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ si può rappresentare con l'equazione vettoriale

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\overrightarrow{AB}\ , \quad (t \in \mathbb{R})\ .$$

e quindi in forma parametrica (scalare)

$$\begin{cases} x = & x_A + (x_B - x_A)t \\ y = & y_A + (y_B - y_A)t \\ z = & z_A + (z_B - z_A)t \end{cases} , \quad (t \in \mathbb{R})\ .$$

Due rette

$$r \ : \ \mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{v} \ , \quad r' \ : \ \mathbf{X} = \mathbf{P}' + t\mathbf{v}'$$

sono parallele quando hanno la stessa direzione, cioè quando i vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono paralleli. Quindi:

r e r' sono parallele
se e solo se
esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$.

Reciproca posizione di rette

Nel piano, due rette possono essere parallele (eventualmente coincidenti) oppure incidenti (in un solo punto).

Nello spazio, date due rette r e r', diciamo che queste sono *complanari* quando esiste un piano che contenga entrambe; mentre sono dette *sghembe* quando non sono complanari.

Nel caso di rette complanari, distinguiamo ancora tra rette parallele e rette incidenti.

Per stabilire la reciproca posizione di due rette nello spazio, basta allora studiare il parallelismo e l'incidenza; se le rette sono non parallele e non incidenti, allora sono sghembe.

Avvertenza

Nel cercare l'eventale intersezione di due rette, il sistema tra le rappresentazioni parametriche richiede una certa cautela. Se r e s hanno un punto P in comune, non è necessario che il P sia individuato con lo stesso valore del parametro sulle due rette. Occorre allora scrivere la rappresentazione di r con un parametro (per esempio t), e la rappresentazione di s con un parametro di nome diverso (per esempio k).

Definizione (Combinazione lineare)

Dati i vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ e gli scalari $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, il vettore

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$.

Definizione (Dipendenza, indipendenza)

I vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ si dicono *linearmente dipendenti* quando uno di questi si può scrive come combinazione lineare degli altri. Altrimenti diciamo che i vettori sono *linearmente indipendenti*.

Osservazione

- Due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali.
- Tre vettori non nulli sono linearmente dipendenti se e solo se sono "complanari".

Definizione (Base)

Si dice che un insieme ordinato di vettori $B = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ di uno spazio vettoriale V è una *base* di V se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B .

Si proverà che, per quanto non sia unica la base, è però costante il numero di elementi di una base; questo numero è la dimensione.

Inoltre si proverà che se la dimensione è n , allora n vettori linearmente indipendenti formano una base.

Quindi abbiamo una base del piano considerando due vettori non paralleli; mentre una base per lo spazio è una terna di vettori non complanari.

Versori fondamentali

Base canonica di $\mathbb{R}^2$

I vettori $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^2$.

I versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sono detti *versori fondamentali* del piano.

Ogni vettore del piano $\mathbf{u} = (x,y)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare dei versori fondamentali:

$$(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \ .$$

Base canonica di $\mathbb{R}^3$

I vettori $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^3$.

I versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono detti *versori fondamentali* dello spazio.

Ogni vettore del spazio $\mathbf{u} = (x,y,z)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare dei versori fondamentali:

$$(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \ .$$

Un piano π si può individuare assegnando un punto P, per cui passa, e una coppia di vettori non paralleli $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ che determinano la *giacitura* del piano.
I punti X del piano π sono tutti e soli i punti che verificano l'equazione vettoriale

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{v} + s\mathbf{u} \,, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \,.$$

Dall'equazione vettoriale, scrivendo componente per componente, si hanno le *equazioni parametriche (scalari)* del piano π per $P(x_0, y_0, z_0)$ con la giacitura determinata dai vettori $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\mathbf{u} = (\alpha', \beta', \gamma')$:

$$\begin{cases} x = & x_0 + \alpha t + \alpha' s \\ y = & y_0 + \beta t + \beta' s \\ z = & z_0 + \gamma t + \gamma' s \end{cases} \,, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \,.$$

Piano per tre punti
in rappresentazione parametrica

Il piano passante per tre punti non allineati assegnati $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ si può rappresentare con l'equazione vettoriale

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \ , \quad (t, s \in \mathbb{R}) \ .$$

e quindi in forma parametrica (scalare)

$$\begin{cases} x = & x_A + (x_B - x_A)t + (x_C - x_A)s \\ y = & y_A + (y_B - y_A)t + (y_C - y_A)s \\ z = & z_A + (z_B - z_A)t + (z_C - z_A)s \end{cases} \quad , \quad (t, s \in \mathbb{R}) \ .$$

Prodotto scalare standard

Nello spazio ordinario definiamo il *prodotto scalare (o interno) standard* di vettori geometrici $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non nulli come il numero reale

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha \ ,$$

dove $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$ sono i moduli di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, mentre α è l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (normalmente si considera $0 \leq \alpha \leq \pi$); nel caso uno dei vettori sia nullo, si pone $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Osserviamo che due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) quando il loro prodotto scalare è nullo.

Inoltre

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \ , \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \ .$$

Il prodotto scalare standard verifica le seguenti fondamentali proprietà per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e ogni scalare k:

- simmetria: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$;
- omogeneità: $(k\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (k\mathbf{v})$;
- distributività: $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$;
- positività: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0$ e inoltre $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Osservato che

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1 \,, \quad \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0 \,,$$

dalle proprietà sopra elencate si ricava (lavagna) che:

il prodotto scalare di vettori si esprime come somma dei prodotti delle componenti omonime:

$$(a, b, c) \bullet (x, y, z) = ax + by + cz \,.$$

Prodotto scalare: definizione generale

Su uno spazio vettoriale reale V , un prodotto scalare è una funzione

$$\bullet : V \times V \to \mathbb{R}$$

che verifichi i seguenti assiomi:
per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni scalare $k \in \mathbb{R}$,

- *simmetria*: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$;
- *omogeneità*: $(k\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (k\mathbf{v})$;
- *distributività*: $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$;
- *positività*: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0$ e inoltre $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare viene detto *spazio euclideo*

In ogni spazio euclideo ha senso parlare di modulo (o norma), ortogonalità, coseno dell'angolo tra due vettori, distanza di due punti, ...

L'ortogonalità di due vettori è espressa dall'annularsi del loro prodotto scalare:

$\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *sono ortogonali se e solo se* $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ *.*

Siamo ora in grado di esprimere analiticamente la condizione di ortogonalità:

$(a, b, c) \perp (x, y, z)$ ***se e solo se*** $ax + by + cz = 0$ ***.***

Proiezione ortogonale

Nel caso in cui il vettori $\mathbf{v}$ sia unitario, il prodotto scalare

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cos \alpha$$

è la misura con segno della proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$.

In generale la misura con segno della proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$ si ottiene attraverso il prodotto scalare di $\mathbf{u}$ con il normalizzato del vettore $\mathbf{v}$:

$$\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} .$$

Il vettore che è proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$ è:

$$\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} .$$

È semplice dimostrare quanto segue:

- *Teorema di Carnot*: $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.
- *Teorema di Pitagora*: se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, allora $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2$.
- *Diseguaglianza di Schwarz*: $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
- *Diseguaglianza triangolare*: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Equazione cartesiana del piano

Un piano π si può individuare assegnando un punto P, per cui passa, e un vettore (non nullo) $\mathbf{v}$ che determina la direzione ortogonale al piano.
I punti X del piano π sono tutti e soli i punti per cui il vettore $\overrightarrow{PX}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}$, quindi

$$\mathbf{v} \bullet \overrightarrow{PX} = 0 \ .$$

Dunque l'equazione del piano π passante per il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \ .$$

Scrivendo d per $-ax_0 - by_0 - cz_0$, abbiamo l'equazione cartesiana del piano (nello spazio):

$$ax + by + cz + d = 0 \ .$$

Due rette

$$r \ : \ \mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{v} \ , \quad r' \ : \ \mathbf{X} = \mathbf{P}' + t\mathbf{v}'$$

sono parallele quando hanno la stessa direzione, cioè quando i vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono paralleli. Quindi:

r e r' sono parallele
se e solo se
esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$.

Le due rette r e r' sono ortogonali quando i vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono ortogonali. Quindi:

r e r' sono ortogonali se e solo se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}' = 0$.

Due piani

$$\pi \ : \ \mathbf{v} \bullet (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0 \ , \quad \pi' \ : \ \mathbf{v}' \bullet (\mathbf{X} - \mathbf{P}') = 0$$

sono paralleli quando hanno la stessa direzione ortogonale, cioè quando i vettori ortogonali $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono paralleli. Quindi:

π e π' sono paralleli
se e solo se
esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$.

I due piani π e π' sono ortogonali quando i vettori ortogonali $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono tra loro ortogonali. Quindi:

π e π' sono ortogonali se e solo se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}' = 0$.

Un piano π ed una retta r

$$\pi \ : \ \mathbf{v} \bullet (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0 \ , \quad r \ : \ \mathbf{X} = \mathbf{Q} + t\mathbf{u}$$

sono paralleli quando la direzione ortogonale di π è ortogonale alla direzione di r, cioè quando i vettori ortogonali $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali. Quindi:

π e r sono paralleli se e solo se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = 0$.

Il piano π e la retta r sono ortogonali quando la direzione di r è ortogonale a π, cioè i vettori ortogonali $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli. Quindi:

π e r sono ortogonali
se e solo se
esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ di due vettori geometrici è definito come segue:

- se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, allora si pone $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono non paralleli, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore con:
  - *modulo* dato da
  $$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha \ ,$$
  dove α è l'angolo formato dai due vettori, con $0 \leq \alpha \leq \pi$;
  - *direzione* ortogonale alle direzioni di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, quindi $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano individuato dai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
  - *verso* dato dalla "regola della mano destra", cioè $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una terna destrorsa.

Osservazioni

- Il prodotto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è nullo se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli.
- Il modulo $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ è l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Il prodotto vettoriale verifica le seguenti proprietà per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e ogni scalare k:

- *antisimmetria*: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$;
- *omogeneità*: $(k\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge (k\mathbf{v})$;
- *distributività*:
  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ e $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

Osservato che

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

si ricava (lavagna) l'espressione analitica del prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{u} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = (x, y, z)$:

$$(a, b, c) \wedge (x, y, z) = (bz - cy, -az + cx, ay - bx) \ .$$

Determinate e prodotto vettoriale

Si studierà in un prossimo corso la nozione di determinate di una matrice; anticipiamone qui il calcolo:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix} = ay - bx \ ;$$

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c \\ y & z \end{bmatrix} \alpha - \det \begin{bmatrix} a & c \\ x & z \end{bmatrix} \beta + \det \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix} \gamma \ .$$

Scrivendo il prodotto vettoriale come combinazione lineare dei versori fondamentali

$$(a, b, c) \wedge (x, y, z) = (bz - cy)\mathbf{i} - (az - cx)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}$$

questo può essere espresso formalmente con un determinate

$$(a, b, c) \wedge (x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} \ .$$

Una retta nello spazio può essere descritta come intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Spesso il sistema che individua r viene presentato su un'unica linea:

$$ax + by + cz + d = a'x + b'y + c'z + d' = 0\ .$$

Problema

Data la retta r, come passare da una rappresentazione parametrica ad una cartesiana? E viceversa?

Fascio di piani

Fissata una retta r, l'insieme dei piani che contengono r si dice *fascio di piani* di *sostegno* r.

Data la retta r come intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

i piani del fascio di sostegno r sono tutti e soli i piani la cui equazione è del tipo:

$$k(ax + by + cz + d) + h(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

dove k e h sono numeri arbitrari (non entrambi nulli).

Prodotto misto

Il prodotto misto dei vettori geometrici $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ è il numero reale

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} .$$

Osservazioni

- Il prodotto misto $\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è nullo se e solo se i vettori $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono complanari.
- Il modulo $|\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ è il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- Si dimostra che

$$\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \mathbf{v}\bullet\mathbf{w}\wedge\mathbf{u} = -\mathbf{w}\bullet\mathbf{v}\wedge\mathbf{u} = -\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}\wedge\mathbf{w} = -\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}\wedge\mathbf{v} .$$

In particolare:

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} .$$

Determinante e prodotto misto

Siano $\mathbf{w} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{u} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = (x, y, z)$; risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (\alpha, \beta, \gamma) \bullet (a, b, c) \wedge (x, y, z) \\
&= (\alpha, \beta, \gamma) \bullet (bz - cy, -az + cx, ay - bx) \\
&= (bz - cy)\alpha - (az - cx)\beta + (ay - bx)\gamma \\
&= \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Aree e volumi

- L'area $\mathcal{A}_{ABCD}$ del parallelogramma di vertici A, B, C, D è
$$\mathcal{A}_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}| \ ,$$
dove AB e AD sono due lati.
- L'area $\mathcal{A}_{ABC}$ del triangolo di vertici A, B, C è
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| \ .$$
- Il volume $\mathcal{V}$ del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è
$$\mathcal{V} = |\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| \ .$$
- Il volume $\mathcal{V}_{ABCD}$ del tetraedro di vertici A, B, C, D è
$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}| \ .$$

Esercizi

1. In quanti modi sappiamo determinare l'equazione cartesiana del piano passate per tre punti non allineati?
2. Come determinare l'equazione del piano per un punto ed ortogonale ad una retta data? E la rappresentazione parametrica di una retta passante per un punto ed ortogonale ad un piano dato?
3. Come determinare l'equazione di un piano π contenente una retta r e:
   - passante per un punto P dato;
   - parallelo ad un piano σ dato;
   - parallelo ad una retta s data?

Distanze

Distanza punto-punto

Abbiamo già visto che la distanza tra due punti A e B è

$$dist(A, B) = |\mathbf{B} - \mathbf{A}| \ .$$

Distanza punto-retta

Dato un punto P ed una retta r, sia π il piano per P ed ortogonale a r; detto H il punto di intersezione tra π ed r, la distanza tra P e r è la distanza tra P e H:

$$dist(P, r) = dist(P, H) \ .$$

In alternativa, detti A un punto di r, $\mathbf{v}$ un vettore direttore di r, si possono utilizzare le formule (lavagna)

$$dist(P, r) = \left| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right| \ , \quad dist(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \ .$$

Distanza punto-piano

Dato un punto $P(x_P, y_p, z_P)$ ed un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, la distanza tra il punto P ed il piano π è data dalla formula (lavagna):

$$dist(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

In alternativa si può considerare la retta r per P ed ortogonale al piano π; detto H il punto di intersezione tra r e π, si ha

$$dist(P, \pi) = dist(P, H) \ .$$

Distanze

Distanza retta-retta

- Se le rette r e s si intersecano, allora

$$dist(r,s) = 0 \ .$$

- Se le rette r e s sono parallele, detto P un punto di r, si ha

$$dist(r,s) = dist(P,s) \ .$$

- Se le rette r e s sono sghembe, siano π il piano che contiene s ed è parallelo a r, P un punti di r; la distanza tra r e s è la distanza tra π e P:

$$dist(r,s) = dist(P,\pi) \ .$$

  In alternativa, scelti i punti A di r e B di s, detti $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ due vettori direttori di r e s rispettivamente, vale la formula:

$$dist(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \bullet \mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s|}{|\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{v}_s|} \ .$$

Distanza retta-piano

- Se la rette r e il piano π si intersecano, allora

$$dist(r,\pi) = 0 \ .$$

- Se la rette r e il piano π sono paralleli, detto P un punto di r, si ha

$$dist(r,\pi) = dist(P,\pi) \ .$$

Distanza piano-piano

- Se i piani π e σ si intersecano, allora

$$dist(\pi,\sigma) = 0 \ .$$

- Se i piani π e σ sono paralleli, detto P un punto di σ, si ha

$$dist(\pi,\sigma) = dist(\pi,P) \ .$$

Algebra Lineare, introduzione

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

L'algebra lineare studia
spazi vettoriali e applicazioni lineari.

Richiami. Relazione

Definizione

Una *relazione* (*binaria*) dall'insieme A all'insieme B è un (qualsiasi) sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
Una relazione sull'insieme A è un (qualsiasi) sottoinsieme del prodotto cartesiano $A^2 = A \times A$.

Per indicare che la coppia ordinata (a, b) è un elemento della relazione R da A a B , cioè $(a, b) \in R \subseteq A \times B$, useremo la notazione aRb e diremo che " a è in relazione R con b ".

Richiami. Esempi di relazioni

- I sottoinsiemi impropri di $X \times Y$ definiscono la *relazione vuota* $\emptyset$ e la *relazione totale* $X \times Y$.
- Su un insieme X , la *relazione identica* I_X è definita dall'uguaglianza di elementi:
$$xRy \quad \text{se e solo se} \quad x = y.$$
- Data una funzione $f : A \to B$, il grafico di f
$$\mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$$
è una relazione da A a B . In particolare, la relazione identica I_X è il grafico della funzione identità $Id_X : X \to X$.
- Sia $f : X \to Y$ una funzione; la relazione
$$N(f) = \{(x_1, x_2) \in X \times X |\, f(x_1) = f(x_2)\} \subseteq X \times X$$
è detta *nucleo di equivalenza* di f . Osserviamo che la condizione di iniettività di f equivale a $N(f) = I_X$.

Richiami. Esempi di relazioni

- La relazione $D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$D = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \text{ esiste } k \in \mathbb{N} : kn = m\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

  è detta relazione di divisibilità.
  Se $(n,m) \in D$, diremo che n *divide* m e scriveremo $n|m$.

- Sull'insieme $\mathbf{P}X$ la relazione

$$\subseteq_X = \{(U,V) \in \mathbf{P}X \times \mathbf{P}X | \ U \subseteq V\} \subseteq \mathbf{P}X \times \mathbf{P}X \ .$$

- Un'altra nota relazione è la relazione d'ordine su $\mathbb{N}$;

$$\leq = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ i \leq j\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Richiami. Relazioni d'ordine

Una relazione R su un insieme X si dice *relazione d'ordine* quando verifica le seguenti proprietà:

1. (*riflessività*): per ogni $x \in X$: xRx ;
2. (*antisimmetria*): per ogni $x, y \in X$, se xRy e yRx , allora $x = y$;
3. (*transitività*): per ogni $x, y, z \in X$, se xRy e yRz , allora xRz .

Solitamente si indica una relazione d'ordine con il simbolo $\leq$.

La relazione $<$ definita da " $x < y$ se e solo se $x \leq y$ e $x \neq y$ " si dice *relazione d'ordine in senso stretto* e verifica le proprietà:

1. (*antisimmetria forte*): per ogni $x, y \in X$, se x è in relazione con y e y non è in relazione con x ;
2. (*transitività*): per ogni $x, y, z \in X$, se xRy e yRz , allora xRz .

Esercizio

Quali delle relazioni precedentemente elencate sono relazioni d'ordine?

Richiami. Relazioni di equivalenza

Una importante nozione è quella di *relazione di equivalenza* su un insieme X. In molte circostanze si è condotti naturalmente a definire su un insieme X una relazione, che indichiamo con $\sim$, che ha le stesse proprietà formali della relazione di uguaglianza:

1. (*riflessività*): per ogni $x \in X$: $x \sim x$.
2. (*simmetria*): per ogni $x, y \in X$, se $x \sim y$, allora $y \sim x$.
3. (*transitività*): per ogni $x, y, z \in X$, se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x \sim z$.

Un esempio immediato è il nucleo di equivalenza

$$N(f) = \{(x_1, x_2) \in X \times X |\ f(x_1) = f(x_2)\} \subseteq X \times X$$

di una funzione $f : X \to Y$. Possiamo dire che il dato della funzione f ci conduce a considerare una diversa nozione di uguaglianza sugli elementi di X: due elementi x_1 e x_2 vengono considerati uguali, non più quando sono lo stesso elemento di X, ma quando *diventano* lo stesso elemento di Y dopo l'applicazione della funzione f.

Richiami. Classi di equivalenza

Data una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme (non vuoto) X, si definisce la *classe di equivalenza* di un elemento $x \in X$ come l'insieme

$$[x] = \{y \in X | y \sim x\} \ .$$

Osserviamo che ogni elemento di X sta in una ed una sola classe di equivalenza e ricordiamo che una *partizione* $\{U_i\}_{i \in I}$ di un insieme X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti U_i di X tale che ogni elemento di X sta in uno ed un solo sottoinsieme della famiglia.

Teorema

Ogni relazione d'equivalenza su un insieme X individua una partizione dell'insieme X e, vicersa, ogni partizione di X individua una relazione d'equivalenza su X

L'insieme delle classi di equivalenza è detto *insieme quoziente* e viene indicato con $X/\sim$.

Richiami. Esempi di relazioni d'equivalenza

Parallelismo

Sull'insieme delle rette del piano (o dello spazio), la relazione di parallelismo è di equivalenza; una classe di equivalenza è una *direzione*.

Congruenza

Sull'insieme dei segmenti del piano (o dello spazio), introduciamo la relazione di congruenza: due segmenti sono congruenti quando esiste un movimento rigido che porta gli estremi di uno a coincidere con gli estremi dell'altro. La relazione di congruenza è di equivalenza; una classe di equivalenza è una *lunghezza*.

Sull'insieme dei segmenti orientati (del piano o dello spazio), introduciamo la relazione di equipollenza:

> *il segmento orientato* AB *è equipollente al segmento orientato* $A'B'$ *quando esiste un movimento rigido e parallelo che faccia coincidere* A *con* A' *e* B *con* B'*.*

In altro modo, possiamo dire che:

> *il segmento orientato* AB *è equipollente al segmento orientato* $A'B'$ *quando entrambi hanno lunghezza nulla oppure hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la stessa lunghezza.*

La relazione di equipollenza è di equivalenza.

Definizione

Un *vettore geometrico* è una classe di equipollenza.

Richiami. La somma di vettori geometrici

Consideriamo due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e rappresentiamo $\mathbf{u}$ con il segmento orientato AB e $\mathbf{v}$ con il segmento orientato BC

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}\,, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{BC}\,.$$

La somma di vettori è definita dalla “regola del parallelogramma”:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Si prova facilmente (esercizio) che:

- la somma di vettori geometrici è associativa;
- la somma di vettori geometrici è commutativa;
- la somma di vettori geometrici ammette come elemento neutro il vettore nullo $\mathbf{0}$, rappresentato dal segmento orientato di lunghezza nulla;
- ogni vettore $\mathbf{u}$ ha come opposto il vettore $-\mathbf{u}$ che ha la stessa direzione di $\mathbf{u}$, la stessa lunghezza di $\mathbf{u}$, ma verso opposto a $\mathbf{u}$.

Richiami. Il prodotto esterno

Dato un vettore $\mathbf{u}$ e uno scalare (cioè un numero reale) t, si definisce il prodotto esterno (o prodotto di un vettore per uno scalare) il vettore

$$t\mathbf{u}$$

che ha come lunghezza la lunghezza di $\mathbf{u}$ moltiplicata per $|t|$ (modulo di t), la stessa direzione di $\mathbf{u}$, lo stesso verso di $\mathbf{u}$ se $t > 0$, verso opposto a quello di $\mathbf{u}$ se $t < 0$.

Si prova facilmente (esercizio) che, per ogni vettore $\mathbf{u}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, risulta:

- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;
- $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

Inoltre, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà distributive:

- $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$;
- $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$.

Richiami. Rappresentazione analitica dei vettori geometrici

Fissato nello spazio un punto origine O e rappresentando i vettori come segmenti orientati uscenti dall'origine, stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra i vettori geometrici dello spazio e i punti dello spazio: ad ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ corrisponde il punto P e, viceversa, ad ogni punto P corrisponde il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$.

Fissato un sistema di riferimento, è nota la corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali.

Abbiamo dunque che l'insieme dei vettori geometrici dello spazio è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle terne ordinate di numeri reali:

$$\{\text{vettori geometrici dello spazio}\} \rightleftarrows \mathbb{R}^3 .$$

Richiami. Rappresentazione analitica dei vettori geometrici

Note le coordinate (ascissa, ordinata e quota) del punto P

$$P = (x_P, y_P, z_P) \ ,$$

identifichiamo il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ con questa terna e scriviamo

$$\mathbf{v} = (x_P, y_P, z_P) \ .$$

Considerati i vettori $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e lo scalare $t \in \mathbb{R}$, si ha (esercizio) la seguente espressione della somma e del prodotto esterno di vettori geometrici attraverso le terne ordinate di numeri reali:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \ ,$$
$$t\mathbf{u} = t(x_0, y_0, z_0) = (tx_0, ty_0, tz_0) \ .$$

Il vettore nullo è $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, mentre l'opposto del vettore $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)$ è $-\mathbf{u} = (-x_0, -y_0, -z_0)$.

Definizione

Uno spazio vettoriale reale consiste di:

- un insieme V i cui elementi sono detti vettori;
- un'operazione interna $+ : V \times V \to V$,
  che ad una coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ associa la somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$;
- un'operazione "esterna" $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
  che ad ogni numero reale k e ogni vettore $\mathbf{v}$ associa il prodotto $k\mathbf{v}$;

e dei seguenti assiomi:

1. *Associatività* della somma: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V si ha
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \; .$$

2. *Commutatività* della somma: per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V si ha
$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v} \; .$$

3. Esistenza dell'*elemento neutro* per la somma:
esiste un vettore in V, detto *vettore nullo* e denotato con $\mathbf{0}$, tale che, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$, risulti
$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v} \; .$$

4. Esistenza dell'*opposto*:
per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V esiste un vettore, l'*opposto* di $\mathbf{v}$, denotato con $-\mathbf{v}$, tale che
$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0} \; .$$

5. Per ogni $\mathbf{v}$ in V si ha
$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} \; .$$

6. Per ogni $\mathbf{v}$ in V e per ogni h, k in $\mathbb{R}$ si ha
$$h(k\mathbf{v}) = (hk)\mathbf{v} \; .$$

7. *Distributività* del prodotto esterno rispetto la somma di vettori: per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha
$$k(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w} \ .$$

8. *Distributività* del prodotto esterno rispetto la somma di scalari: per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, si ha
$$(h+k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v} \ .$$

Esempio di spazio vettoriale: vettori geometrici

I vettori geometrici del piano con le usuali operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare.

I vettori geometrici dello spazio con le usuali operazioni.

Esempio di spazio vettoriale: $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ uple ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}$$

con la somma e il prodotto per uno scalare definiti “termine a termine”

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

Esempio di spazio vettoriale: $\mathbb{R}[x]$

L'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali

$$\mathbb{R}[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

con l'usuale somma di polinomi e prodotto di un polinomio per un numero reale.

$$(a_0 + a_1x + \dots) + (b_0 + b_1x + \dots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$$

$$k\,(a_0 + a_1x + \dots) = (ka_0) + (ka_1)x + \dots$$

NB: in $\mathbb{R}[x]$ troviamo polinomi di ogni grado (finito, ma non fissato).

Esempio di spazio vettoriale: $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$

L'insieme $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali di tipo $m \times n$ (fissato) con la somma di matrici e il prodotto di una matrice per uno scalare definiti “termine a termine”.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$kA = k\,(a_{ij}) = (ka_{ij}) = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio di spazio vettoriale: $\mathbb{R}^X$

L'insieme $\mathbb{R}^X$ delle funzioni da un insieme X al campo reale $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

con la somme di funzioni e il prodotto di un numero reale per una funzione definiti “puntualmente”:
date le funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$ e lo scalare $k \in \mathbb{R}$, le funzioni $f + g$, kf sono definite da

$$f + g : X \to \mathbb{R}\,, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)\ ,$$

$$kf : X \to \mathbb{R}\,, \quad (kf)(x) = k(f(x))\ .$$

Esempio di spazio vettoriale: V^X

L'insieme V^X delle funzioni da un insieme X allo spazio vettoriale reale V

$$V^X = \{f : X \to V\}$$

con la somme di funzioni e il prodotto di un numero reale per una funzione definiti "puntualmente":
date le funzioni $f, g : X \to V$ e lo scalare $k \in \mathbb{R}$, le funzioni $f + g$, kf sono definite da

$$f + g : X \to V \ , \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \ ,$$

$$kf : X \to V \ , \quad (kf)(x) = k(f(x)) \ .$$

Definizione

Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è un **sottospazio** vettoriale di V quando U è spazio vettoriale con la stessa struttura di V (cioè con le stesse operazioni di somma e prodotto per uno scalare).

Proposizione

Il sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V risulta essere un sottospazio di V se e solo se U è "chiuso" rispetto le operazioni di somma e prodotto per uno scalare ,
cioè:

1. *per ogni* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ *si ha* $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$ *;*
2. *per ogni* $\mathbf{u} \in U$ *e ogni* $k \in \mathbb{R}$ *, si ha* $k\mathbf{u} \in U$ *.*

Esempio

L'insieme $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a n (fissato) è uno spazio vettoriale, ma non lo è l'insieme $\mathbb{R}_{=n}[x]$ dei polinomi reali in x di grado uguale a n (fissato).

Esempio

L'insieme $\mathcal{C}^0(A)$ delle funzioni continue dall'intervallo reale A a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^A$, infatti la somma di funzioni continue è una funzione continua e il prodotto di una funzione continua per un numero reale è una funzione continua.

Esempio

L'insieme $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a valori reali derivabili sull'intervallo reale A è uno spazio vettoriale in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^A$, infatti la somma di funzioni derivabili è una funzione derivabile e il prodotto di una funzione derivabile per un numero reale è ancora una funzione derivabile.

Siano V e W spazi vettoriali.

Definizione (Applicazione Lineare)

Una funzione $f : V \to W$ si dice **applicazione lineare** quando verifica le seguenti proprietà:

a. *additività*: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \; ;$$

b. *omogeneità*: per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) \; .$$

Esercizio

La trasposta A^t di una matrice A è la matrice che si ottiene da A scambiando (ordinatamente) le righe con le colonne; in altri termini, la trasposizione è la funzione $(-)^t : \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R})$ che, alla matrice $A = (a_{ij})$, assegna la matrice trasposta $A^t = (a_{ji})$.
Provare che $(-)^t$ è un'applicazione lineare.

Esercizio

Sia $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n sul campo $\mathbb{R}$ e $A = \big(a_{ij}\big)$ una qualunque matrice di tale spazio. Dimostrare che la funzione *traccia*

$$\mathrm{tr} : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ , \quad \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

è lineare.

Esercizio

Sia A un intervallo dell'asse reale e sia a un punto di A. Denotiamo con $\mathcal{C}^1(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni con derivata continua su A e con $\mathcal{C}^0(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su A.

1. Mostrare che l'operatore $D : \mathcal{C}^1(A) \to \mathcal{C}^0(A)$ che assegna ad una funzione la sua derivata, cioè $Df = f'$, è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.
2. Mostrare che l'operatore $\displaystyle\int_a^{-} : \mathcal{C}^0(A) \to \mathcal{C}^1(A)$ che assegna ad una funzione f la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.

Dati due qualunque spazi vettoriali V e W, indichiamo con $\hom(V,W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V a W.

$$\hom(V,W) = \{\ f : V \to W \mid f \text{ lineare}\}\ .$$

L'insieme $\hom(V,W)$ è dotato in modo naturale di una struttura di spazio vettoriale: la somma di due applicazioni lineari $F, G \in \hom(V,W)$ e la moltiplicazione di un numero λ per $F \in \hom(V,W)$ sono definite ponendo:

$$(F+G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})\ , \quad (kF)(\mathbf{v}) = k\,F(\mathbf{v})$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni numero k.

Esercizio

Provare che $\hom(V,W)$ è un sottospazio dello spazio vettoriale $W^V = \{\ f : V \to W\}$ di tutte le funzioni da V a W.

Spazi vettoriali

Maurizio Citterio

Marco Boella   Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Richiamo: la definizione di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale sul campo numerico $\mathbb{K}$ consiste di:

- un insieme V i cui elementi sono detti vettori;
- un'operazione interna $+ : V \times V \to V$,
  che ad una coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ associa la somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$;
- un'operazione "esterna" $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$
  che ad ogni numero k e ogni vettore $\mathbf{v}$ associa il prodotto $k\mathbf{v}$;

e dei seguenti assiomi:

proprietà della somma:

1. associatività;
2. commutatività;
3. esistenza del vettore nullo;
4. esistenza dell'opposto;

proprietà del prodotto:

5. per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$;
6. per ogni $h, k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$ risulta $h \cdot (k \cdot \mathbf{v}) = (hk) \cdot \mathbf{v}$;

proprietà distributive:

7. per ogni $k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ risulta $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \cdot \mathbf{u} + k \cdot \mathbf{v}$;
8. per ogni $h, k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$ risulta $(h + k) \cdot \mathbf{v} = h \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{v}$.

Esempi di spazi vettoriali

Con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, i seguenti insiemi sono spazi vettoriali:

- l'insieme dei vettori geometrici del piano (spazio);
- l'insieme $\mathbb{K}^n$ delle $n-$ uple ordinate di numeri di $\mathbb{K}$;
- l'insieme $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$;
- l'insieme $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ delle matrici di elementi di $\mathbb{K}$ con m righe ed n colonne;
- l'insieme $\mathbb{K}^X$ delle funzioni da un insieme X al campo $\mathbb{K}$;
- l'insieme V^X delle funzioni da un insieme X allo spazio vettoriale V .

Definizione

Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è un **sottospazio** vettoriale di V quando U è spazio vettoriale con la stessa struttura di V (cioè con le stesse operazioni di somma e prodotto per uno scalare).

Proposizione

Il sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V risulta essere un sottospazio di V se e solo se U è "chiuso" rispetto le operazioni di somma e prodotto per uno scalare ,
cioè:

1. *per ogni $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ si ha $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$;*
2. *per ogni $\mathbf{u} \in U$ e ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha $k\mathbf{u} \in U$.*

Esercizio

Dimostrare la precedente proposizione.

Osservazione

Ogni sottospazio U di uno spazio vettoriale V contiene il vettore nullo, ma non tutti i sottoinsiemi di V che contengono il vettore nullo sono sottospazi.

Esempi di sottospazi vettoriali

- I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tutti e soli i seguenti:
  0. il sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$;
  1. le rette per l'origine;
  2. il sottospazio totale $\mathbb{R}^2$.
- I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono tutti e soli i seguenti:
  0. il sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$;
  1. le rette per l'origine;
  2. i piani per l'origine;
  3. il sottospazio totale $\mathbb{R}^3$.
- L'insieme $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ dei polinomi in x di grado minore o uguale a n (fissato) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.
- Sia A un intervallo reale. Sono sottospazi di $\mathbb{R}^A$ gli insiemi:
  - $\mathcal{C}^0(A)$ delle funzioni a valori reali continue su A ,
  - $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a valori reali derivabili su A ,
  - $\mathcal{C}^1(A)$ delle funzioni a valori reali con derivata continua su A .
- Fissati due spazi vettoriali V e W , l'insieme $\hom(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W è un sottospazio vettoriale di W^V .

Combinazioni lineari

Definizione

La **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ dello spazio V con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ è il vettore (di V)

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Esempi

- La terna ordinata $\mathbf{v} = (1, 5, 3)$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$, con i coefficienti $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -2$:

$$(1, 5, 3) = 1(1, 1, 1) + 4(0, 1, 1) - 2(0, 0, 1).$$

- La funzione seno iperbolico $\mathbf{v} = \mathrm{Sh}(x)$ è combinazione lineare delle funzioni $\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^x$ e $\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^{-x}$ con i coefficienti $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{Sh}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ dello spazio V, indicheremo con $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, o anche con $L\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

È semplice mostrare (esercizio) che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Diremo che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è il **sottospazio generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Dato U sottospazio di V, diremo che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un **insieme di generatori** (o anche **sistema di generatori**) per U quando ogni vettore di U si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, cioè

$$U = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Esercizio

Provare che i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ generano lo stesso sottospazio.

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \right\}.$$

Fissati $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori di V .

La combinazione lineare banale (cioè quella con tutti i coefficienti nulli) ha come somma il vettore zero

$$0\,\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \ .$$

Esistono **altre** combinazioni lineari (cioè, diverse da quella banale) di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ che danno come risultato il vettore nullo?

Se esistono, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente dipendenti**.

Se non esistono, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione (Vettori dipendenti)

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono linearmente dipendenti se esistono k numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli per i quali

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Definizione (Vettori indipendenti)

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti quando

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

soltanto per $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Esercizio

Stabilire per ciascuno dei seguenti, se si tratta di insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente dipendenti o indipendenti.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

- I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di questi si scrive come combinazione lineare degli altri.
- Se uno dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ è nullo, allora questi sono linearmente dipendenti.
- Se i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente dipendenti.

  Se i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.
- Due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali.

Definizione (Base)

Si dice che un insieme ordinato di vettori $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di uno spazio vettoriale V è una *base* di V se:

1. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti;
2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V.

Esempio (Base canonica di $\mathbb{R}^n$)

I vettori $\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ (base canonica di $\mathbb{R}^2$).
Base canonica di $\mathbb{R}^n$?

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

Base e Coordinate

Teorema

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *un insieme ordinato di vettori dello spazio* V *.*

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un base di V
se e solo se
ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

In altri termini, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un base di V se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un'unica n-upla ordinata di numeri reali $(x_1, \cdots, x_n)$ tale che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots\cdots + x_n\mathbf{v}_n \ .$$

L'insieme ordinato $(x_1, \ldots, x_n)$ si chiama n-upla delle **coordinate** di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e si usa la notazione

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Base e Coordinate

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V , ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Scriviamo $\mathbf{v}$ in due modi

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ , \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

e dimostriamo che le due scritture coincidono.

Sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, si conclude che i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli, cioè $x_1 = y_1 \ , \ \ldots \ , \ x_n = y_n$.

$\Leftarrow$ Poiché ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive (in un unico modo) come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, questi ultimi sono generatori di V . Anche il vettore nullo $\mathbf{0}$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, quindi

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \text{solo per} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \ .$$

Dunque i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono indipendenti e $\mathcal{B}$ è un base. $\square$

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nello spazio vettoriale V, consideriamo l'applicazione lineare

$$\psi : \mathbb{R}^k \to V \ , \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \ .$$

Osserviamo che

- ψ è suriettiva *se e solo se* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un insieme di generatori per V.
- ψ è iniettiva *se e solo se* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono vettori linearmente indipendenti.
- ψ è biettiva *se e solo se* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è un base per V.

Nel caso ψ sia invertibile, qual è l'inversa di ψ?

Diremo che uno spazio vettoriale V ha **dimensione finita**,
oppure è **finito-dimensionale**,
oppure è **finitamente generato**,
quando esiste un insieme finito di generatori di V.

Teorema (di esistenza della base)

Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.

Dimostrazione.

Per ipotesi, V è finitamente generato, cioè esiste un insieme finito di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ di V tali che

$$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è una base.
Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora uno di questi vettori, diciamo $\mathbf{v}_k$, può essere scritto come combinazione lineare dei restanti $k-1$ vettori, e abbiamo

$$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$$

Allora possiamo eliminare questo vettore $\mathbf{v}_k$ dalla lista dei generatori.
Ripetiamo il procedimento, fino ad arrivare a un insieme di vettori linearmente indipendenti.
Questi vettori indipendenti generano ancora V e dunque costituiscono una base di V. $\square$

Teorema (della dimensione di uno spazio vettoriale)
Tutte le basi di uno spazio vettoriale V *hanno la stessa cardinalità.*

Definizione (Dimensione)
La dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato

$$\dim V$$

è il numero di elementi di una sua qualsiasi base.

Lemma (per il teorema della dimensione)

Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *un sistema di generatori dello spazio vettoriale* V *formato da* k *vettori e sia* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *un insieme di* n *vettori di* V *linearmente indipendenti. Si ha* $n \leq k$ *.*

Dimostrazione.

Supponiamo, per assurdo, che $n > k$.
$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ e possiamo scrivere $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$.
I vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, quindi almeno uno dei coefficienti a_i , diciamo a_1 , deve essere non nullo.
Ricavando $\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{a_1}\mathbf{w}_1 - \dfrac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2 + \cdots - \dfrac{a_k}{a_1}\mathbf{v}_k$, abbiamo dunque
$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ e possiamo scrivere $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$.
I vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, quindi almeno uno dei coefficienti $b_2, b_3, \ldots, b_k$, diciamo b_2 , deve essere non nullo.
Ricavando $\mathbf{v}_2 = -\dfrac{b_1}{b_2}\mathbf{w}_1 + \dfrac{1}{b_2}\mathbf{w}_2 - \dfrac{b_3}{b_2}\mathbf{v}_3 + \cdots - \dfrac{b_k}{b_2}\mathbf{v}_k$, abbiamo dunque
$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
Ripetendo il procedimento per k volte, si giunge a $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ e quindi risulta $\mathbf{w}_{k+1} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k$, contro l'ipotesi di indipendenza. $\square$

Dimostrazione del teorema della dimensione.

Siano $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ due basi dello spazio vettoriale V .
Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ generano V e i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, per il precedente lemma risulta $k \geq n$.
Ma anche i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ generano V e i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, quindi $n \geq k$.
Dunque $n = k$. $\square$

Esempio

Una base di $\mathbb{R}^n$ è la base canonica:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1).$$

La dimensione di $\mathbb{R}^n$ è $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Esempio

Una base di $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ è la base canonica:

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La dimensione di $\mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R})$ è dunque $\dim \mathbb{M}(2\times 2,\mathbb{R}) = 4$.

Teorema (del completamento della base)

Ogni collezione di k *vettori linearmante indipendenti* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *di uno spazio vettoriale* V *di dimensione finita può essere estesa fino a diventare una base di* V *. Cioè esistono* h *vettori* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h$ *tali che*

$$(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)$$

sia una base di V *.*

Dimostrazione.

Se i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generano V , allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è una base di V .
Altrimenti esiste $\mathbf{w}_1 \in V$ tale che $\mathbf{w}_1 \notin \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
Se i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1$ generano V , allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1)$ è una base di V .
Altrimenti si itera il processo.
Poiché V ha dimensione finita, dopo un numero finito di passaggi il procedimento iterativo si arresta fornendo una base $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)$. $\square$

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$ finita e sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un qualsiasi insieme di k vettori di V.
Provare che:

1. se $k > n$, allora i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti;
2. se $k = n$ e i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V.

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Dimostrare che $U = V$ se e solo se $\dim U = \dim V$.

Somma di sottospazi

Si osserva facilmente (esercizio) che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio vettoriale, mentre l'unione di sottospazi non lo è in generale.
Infatti, per quanto l'unione sia chiusa rispetto la moltiplicazione di un vettore per uno scalare, non è chiusa rispetto la somma di vettori. Se però aggiungiamo all'insieme unione tutte le possibili somme, otteniamo un sottospazio vettoriale (esercizio):

Definizione

La somma dei sottospazio U e W è definita da

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \ : \ \mathbf{u} \in U \, , \ \mathbf{w} \in W\}$$

Esercizio

Provare che:

- L'intersezione di sottospazi è sottospazio vettoriale.
- L'unione di sottospazi non è (in generale) sottospazio vettoriale.
- La somma di sottospazi è un sottospazio vettoriale.

Esercizio
Provare che le inserzioni

$$i_U : U \to U + W \ , \quad i_V(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{0}$$
$$i_W : W \to U + W \ , \quad i_W(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{w}$$

sono applicazioni lineari.

Esercizio
Provare che

la somma $U + W$ è il "più piccolo" tra i sottospazi di V che contengono l'insieme $U \cup W$

cioè: per ogni sottospazio vettoriale A di V, se $U \cup W$ è un sottoinsieme di A, allora $U + W$ è un sottospazio di A.

Esercizio

Provare che se A e B sono insiemi di generatori rispettivamente per U e per W, allora $A \cup B$ è un insieme di generatori per $U + W$.

Esercizio

Mostrare con esempi che $\dim(U + W) \leq \dim U + \dim W$.

Enunciamo la Formula di Grassmann, posticipando la dimostrazione al prossimo capitolo.

Teorema

Siano U e W sottospazi di dimensione finita dello spazio vettoriale V. Risulta

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W) .$$

Nel caso in cui, per ogni $\mathbf{v}$ di $U+W$ esiste un'*unica* coppia di vettori $\mathbf{u}$ di U e $\mathbf{w}$ di W tali che $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, allora diciamo che la somma $U+W$ è *diretta* e scriviamo

$$U \oplus W \,.$$

Teorema

La somma $U+W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se $\mathbf{v} \in U \cap W$ fosse un vettore non nullo, allora la somma non sarebbe diretta perché $\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}$, cioè $\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}$ con $\mathbf{v} \in U, \mathbf{0} \in W$ e $\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{v}$ con $\mathbf{0} \in U, \mathbf{v} \in W$.

$\Leftarrow$ Scrivendo $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2$ con $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2 \in U$ e $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2 \in W$, si ricava che il vettore $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_1$ è nell'intersezione $U \cap W$; dunque, se $U \cap W=\{\mathbf{0}\}$, risulta $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1$, cioè la somma è diretta. □

Esercizio
Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V.
Provare che

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1\} \oplus \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_2\} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_k\}.$$

Esercizio
Sia U un sottospazio dello spazio vettoriale di dimensione finita V.
Provare che esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che

$$V = U \oplus W.$$

Prodotto di spazi vettoriali

Esercizio
Siano V e W due spazi vettoriali.
Provare che il prodotto cartesiano

$$V \times W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ : \ \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$$

è uno spazio vettoriale.

Esercizio
Provare che le proiezioni

$$pr_V : V \times W \to V \ , \quad pr_V(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$$
$$pr_W : V \times W \to W \ , \quad pr_W(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$$

sono applicazioni lineari.

Esercizio
Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita.
Provare che

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Applicazioni lineari

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Richiami sulle applicazioni lineari: definizione

Siano V e W spazi vettoriali.

Definizione (Applicazione Lineare)

Una funzione $f : V \to W$ si dice **applicazione lineare** quando verifica le seguenti proprietà:

a. *additività*: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \; ;$$

b. *omogeneità*: per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) \; .$$

Richiami sulle applicazioni lineari: osservazioni

- La funzione $f : V \to W$ è lineare se e solo se preserva le combinazioni lineari, cioè per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in V e per ogni h, k numeri reali si ha

$$f(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}) \ .$$

- Se f è lineare, allora $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
  È vero il viceversa?
- L'applicazione nulla $\quad 0 : V \to V \ , \quad 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad$ è lineare.
- L'applicazione identica

$$I : V \to V \ , \quad I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

  è lineare.
  Si indica l'applicazione identica anche con I_V , Id_V , id_V o 1_V .
- La composizione di applicazioni lineari è lineare, cioè, se $f : V \to U$ e $g : U \to W$ sono lineari, allora anche $g \circ f : V \to W$ è lineare.

Richiami sulle applicazioni lineari: lo spazio $\hom(V, W)$

Fissati gli spazi vettoriali V e W, è uno spazio vettoriale l'insieme delle applicazioni lineari da V a W

$$\hom(V, W) = \{\, f : V \to W \mid f \text{ lineare}\},$$

con la somma di due applicazioni lineari $F, G \in \hom(V, W)$ e il prodotto di un numero λ per $F \in \hom(V, W)$ definiti ponendo

$$(F + G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})\ , \quad (kF)(\mathbf{v}) = k\, F(\mathbf{v})$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni numero k.
Infatti $\hom(V, W)$ è sottospazio dello spazio vettoriale $W^V = \{\, f : V \to W\}$ di tutte le funzioni da V a W perchè:

- la somma di due applicazioni lineari $F : V \to W$, $G : V \to W$, definita da
$$F + G : V \to W\ , \quad (F + G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})$$
è un'applicazione lineare;
- il prodotto di un'applicazioni lineari $F : V \to W$ con lo scalare k, definito da
$$kF : V \to W\ , \quad (kF)\mathbf{v} = k(F(\mathbf{v}))$$
è un'applicazione lineare.

Costruzione di applicazioni lineari

Proposizione

Sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *una base dello spazio vettoriale* V *e siano* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n$ *vettori (non necessariamente distinti) dello spazio vettoriale* W *.*
Esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ *tale che*

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2,\ \ldots,\ f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

Dimostrazione.

Il generico vettore $\mathbf{v}$ di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Quindi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

definisce l'unica applicazione lineare con $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Proposizione

Ogni applicazione lineare trasforma vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente dipendenti.

Dimostrazione.

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V linearmente dipendenti, cioè esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\ .$$

Per la linearità di f, possiamo scrivere il vettore nullo di W come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= f(\mathbf{0}) \\ &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Dunque $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente dipendenti. □

Possiamo affermare una simile proposizione per vettori linearmente indipendenti?

Richiami: iniettività, immagine e suriettività

- Una funzione $F : A \to B$ si dice **iniettiva** quando

$$F(a) = F(a') \text{ \emph{implica} } a = a' .$$

  In altri termini, una funzione è iniettiva quando trasforma elementi distinti in elementi distinti.

- L'**immagine** di $F : A \to B$ è l'insieme

$$\mathrm{Im}\, F = \{b \in B \mid \exists a \in A\,,\ F(a) = b\} .$$

- Una funzione $F : A \to B$ si dice **suriettiva** quando

  ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

  In altri termini, la funzione F è suriettiva quando $\mathrm{Im}\, F = B$.

Proposizione

Ogni applicazione lineare iniettiva trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare; siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V linearmente indipendenti e supponiamo $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ siano linearmente dipendenti, cioè che esistano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \ .$$

Per la linearità di f , abbiamo anche :

$$f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \ .$$

Poiché f iniettiva, deve essere

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \ ,$$

e quindi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linearmente dipendenti, contro l'ipotesi fatta. $\square$

Proposizione

Siano V e W due spazi vettoriali finitamente generati. Se $\dim V > \dim W$, allora non esiste alcuna $f : V \to W$ lineare e iniettiva.

Esercizio

Dimostrare la proposizione.

Nucleo

Si consideri un'applicazione lineare $F : V \to W$.

Definizione (Nucleo, Kernel)

Il **nucleo**, o **kernel**, di F è l'insieme delle controimmagini del vettore nullo:

$$\ker F = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Teorema

$\ker F$ *è un sottospazio vettoriale di* V *.*

Dimostrazione.

- $\ker F$ è chiuso rispetto la somma: se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono due vettori di $\ker F$, allora anche $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ è in $\ker F$, perché

$$F(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \ .$$

- $\ker F$ è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare: se $\mathbf{v}$ è un vettore di $\ker F$ e k uno scalare, allora anche $k\mathbf{v}$ è in $\ker F$, perché

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0} \ . \qquad \square$$

Iniettività e nucleo

Teorema

F è iniettiva se e solo se $\ker F = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Per definizione di nucleo, per ogni $\mathbf{v} \in \ker F$ si ha $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Per la linearità di F, abbiamo anche $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Se F iniettiva, allora da $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{0})$, abbiamo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dunque $\ker F = \{\mathbf{0}\}$.

$\Leftarrow$ Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ vettori di V tali che $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}')$, cioè $F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$. Per la linearità di F si ha $F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ e quindi $F(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}$, cioè

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \ker F = \{\mathbf{0}\}.$$

Dunque $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ e F è iniettiva.

$\square$

Corollario

F è iniettiva se e solo se $\dim \ker F = 0$.

Suriettività e immagine

Si consideri un'applicazione lineare $F : V \to W$.

Teorema

L'immagine $\operatorname{Im} F$ *di* F *è un sottospazio vettoriale di* W *.*

Dimostrazione.

- $\operatorname{Im} F$ è chiuso rispetto la somma: se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono due vettori di $\operatorname{Im} F$, allora anche $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ è in $\operatorname{Im} F$, perché

$$\mathbf{w} + \mathbf{w}' = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \ .$$

- $\operatorname{Im} F$ è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare: se $\mathbf{w}$ è un vettore di $\operatorname{Im} F$ e k uno scalare, allora anche $k\mathbf{w}$ è in $\operatorname{Im} F$, perché

$$k\mathbf{w} = kF(\mathbf{v}) = F(k\mathbf{v}) \ . \qquad \square$$

Teorema

F *suriettiva se e solo se* $\operatorname{Im} F = W$ *se e solo se* $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$ *.*

Osservazione

Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V e $F : V \to W$ è lineare, allora i vettori $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)$ generano l'immagine $\operatorname{Im} F$ di F.

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\{F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)\} \ .$$

Proposizione

Siano V e W due spazi vettoriali finitamente generati. Se $\dim V < \dim W$, allora non esiste alcuna $f : V \to W$ lineare e suriettiva.

Esercizio

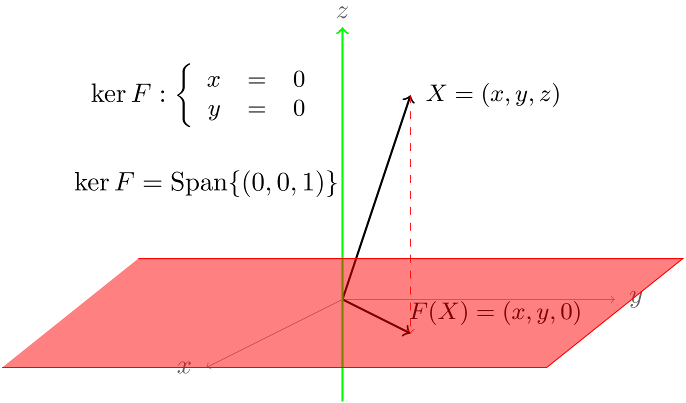
Dimostrare la proposizione.

Esempio: $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad F(x,y,z) = (x,y,0)$$

$$\ker F : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\ker F = \operatorname{Span}\{(0,0,1)\}$$

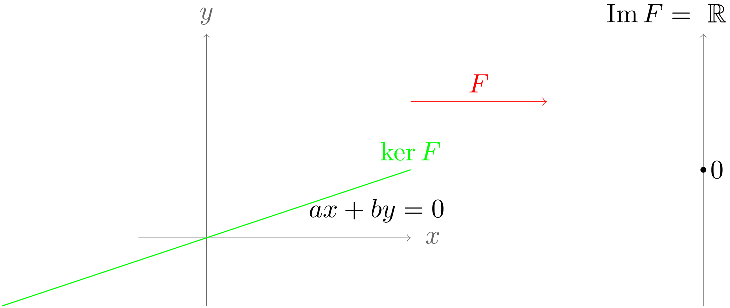


$$\operatorname{Im} F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \operatorname{Span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

Esempio: $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$

Fissati due numeri reali a e b non entrambi nulli, consideriamo

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \qquad F(x,y) = ax + by \; .$$



Nullità e rango

Definizione (Nullità di un'applicazione lineare)

Si definisce **nullità dell'applicazione lineare** F la dimensione del nucleo di F.

Definizione (Rango di un insieme di vettori)

Sia A un insieme finito di vettori dello spazio V. Si definisce **rango** $\mathrm{rk} A$ **di** A la dimensione del sottospazio generato dai vettori di A:

$$\mathrm{rk} A = \dim \mathrm{Span}\, A.$$

Definizione (Rango di un'applicazione lineare)

Si definisce **rango dell'applicazione lineare** F la dimensione dell'immagine di F:

$$\mathrm{rk}\, F = \dim \mathrm{Im}\, F\ .$$

Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V e $F : V \to W$, risulta

$$\mathrm{rk}\, F = \dim \mathrm{Im}\, F = \mathrm{rk} \{F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \dots, F(\mathbf{v}_n)\}\ .$$

Teorema “Nullità + Rango”

Teorema (delle dimensioni, o “Nullità + Rango”)

Sia $F : V \to W$ *un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, con* V *finito-dimensionale. Risulta:*

$$\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F) \ .$$

Dimostrazione:

Sia $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ una base di $\ker F$.
Estendiamola a una base di V :

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+r} \tag{1}$$

Naturalmente, $\dim \ker F = k$ e $\dim V = k + r$.
Per dimostrare la tesi, basta dimostrare che $\dim(\operatorname{Im} F) = r$.

Poniamo

$$F(\mathbf{v}_{k+1}) = \mathbf{w}_1, \ldots, F(\mathbf{v}_{k+r}) = \mathbf{w}_r \tag{2}$$

Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ costituiscono una base di $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ generano il sottospazio $\operatorname{Im} F$.
  Sia $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} F$. Dunque, esiste $\mathbf{v} \in V$

  $$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k + y_1\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r\mathbf{v}_{k+r}$$

  tale che $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$. Allora:

  $$\begin{aligned} \mathbf{w} \quad = \quad F(\mathbf{v}) \quad &= \quad F(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k + y_1\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= \quad y_1F(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + y_rF(\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= \quad y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_r\mathbf{w}_r \end{aligned}$$

  (Infatti: $F(\mathbf{v}_1) = \cdots = F(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, in quanto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ appartengono al nucleo di F).
  Dunque, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ generano lo spazio $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sono linearmente indipendenti.
  Supponiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= y_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + y_r \mathbf{w}_r \\ &= y_1 F(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + y_r F(\mathbf{v}_{k+r}) \\ &= F(y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r}) \end{aligned}$$

  Allora $y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r} \in \ker F$. Dunque

$$y_1 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + y_r \mathbf{v}_{k+r} = z_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \mathbf{v}_k$$

  ossia:

$$z_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + z_k \mathbf{v}_k - y_1 \mathbf{v}_{k+1} - \cdots - y_r \mathbf{v}_{k+r} = \mathbf{0} \tag{3}$$

  Poiché $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+r}$ sono linearmente indipendenti (formano una base di V), tutti i coefficienti della combinazione lineare (3) sono nulli. In particolare, $y_1 = \cdots = y_r = 0$.
  Dunque $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Richiami sull'invertibilità

- Una funzione F dall'insieme A all'insieme B

$$F : A \to B$$

è *invertibile* quando esiste una funzione G da B all'insieme A

$$G : B \to A$$

tale che

$$F \circ G = I_B \ , \quad G \circ F = I_A \ .$$

- La funzione G si dice *inversa* di F e si indica con F^{-1} .
- Se F è invertibile, la sua inversa F^{-1} è unica.
- Se F è invertibile, anche F^{-1} è invertibile.
- F è invertibile se e solo se F è biiettiva, cioè iniettiva *e* suriettiva.

Esercizio

Siano V , W spazi vettoriali. Se la funzione $F : V \to W$ è invertibile e lineare, allora la sua inversa F^{-1} è lineare.

Definizione (Isomorfismo)

Un'applicazione lineare invertibile si dice *isomorfismo*.

Dunque un isomorfismo è un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva.

Definizione (Spazi isomorfi)

Due spazi vettoriali V e W si dicono isomorfi, e si scrive $V \simeq W$, quando esiste un isomorfismo $F : V \to W$.

Esercizio

Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W finitamente generati di uguale dimensione. Provare che:

F iniettiva *se e solo se* F suriettiva *se e solo se* F isomorfismo.

Esercizio

Siano V e W spazi vettoriali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base per V. Dimostrare che:

1. F è iniettiva *se e solo se* $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sono vettori linearmente indipendenti.
2. F è suriettiva *se e solo se* $\operatorname{rk} F = \dim W$.
3. F è un isomorfismo *se e solo se* $(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n))$ è una base per W.

Teorema

Due spazi vettoriali V *e* W *finitamente generati sono isomorfi se e solo se* $\dim V = \dim W$ *.*

Corollario

Ogni spazio vettoriale reale V *con dimensione* $\dim V = n$ *è isomorfo a* $\mathbb{R}^n$ *.*

$$V \simeq \mathbb{R}^n$$

Osservazione

Fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di V , un isomorfismo tra V e $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n \ , \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

che assegna ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di V la $n-$ upla delle coordinate reali di $\mathbf{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione del teorema.

$\Rightarrow$ Se V e W sono isomorfi, esiste un isomorfismo $F : V \to W$.
Poiché F è iniettivo, si ha $\dim V \leq \dim W$;
poiché F è suriettivo, si ha $\dim V \geq \dim W$;
quindi $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$ Se $\dim V = \dim W$, siano $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base per V e $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ una base di W . Le applicazioni lineari che assegnano ad ogni vettore le coordinate

$$\varphi_{\mathcal{V}} : V \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \varphi_{\mathcal{W}} : W \to \mathbb{R}^n$$

sono isomorfismi, quindi

$$\varphi_{\mathcal{W}}^{-1} \varphi_{\mathcal{V}} : V \to W$$

è un isomorfismo.

$\square$

Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione finita. Consideriamo l'addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

e osserviamo che è un'applicazione lineare (esercizio) la cui immagine è

$$\mathrm{Im}\, F = U + W \ ;$$

inoltre risulta che (esercizio)

$$\ker F \quad \text{è isomorfo a} \quad U \cap W \ .$$

Teorema

Sia V *uno spazio vettoriale e siano* U *e* W *due suoi sottospazi di dimensione finita. Vale la formula di Grassmann:*

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W) \ .$$

Dimostrazione.

Il Teorema “Nullità + Rango" per l’addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

fornisce l’uguaglianza

$$\dim U \times V = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F.$$

Ricordando che $\dim U \times V = \dim U + \dim V$, $\ker F$ è isomorfo a $U \cap W$, $\operatorname{Im} F = U + W$, otteniamo la Formula di Grassmann. □

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione finita. La somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

La somma $U + W$ è definita diretta quando ogni vettore $\mathbf{v} \in U + W$ si scrive in modo unico come somma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. In altri termini, la somma $U + W$ è diretta se e solo se l'addizione

$$F : U \times W \to V \ , \quad F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

è iniettiva, quindi se e solo se $\ker F = \{\mathbf{0}\}$. Ricordando che $\ker F$ è isomorfo a $U \cap W$, abbiamo che la somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. □

Esercizio

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nello spazio vettoriale V , consideriamo la funzione

$$\psi : \mathbb{R}^n \to V \ , \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ .$$

Dopo aver verificato che ψ è lineare, provare che:

- ψ è suriettiva se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme di generatori per V ;
- ψ è iniettiva se e solo se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono vettori linearmente indipendenti;
- ψ è un isomorfismo se e solo se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V .

Nel caso in cui $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sia una base di V , descrivere l'isomorfismo inverso di ψ .

Fibre

Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.
Per ogni $\mathbf{w}$ in W, la **fibra** $F^*(\mathbf{w})$ sopra $\mathbf{w}$ è l'insieme delle controimmagini di $\mathbf{w}$, cioè

$$F^*(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V : F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \ .$$

Le fibre sono sottoinsiemi di V, ma, con un'unica eccezione, non sono sottospazi vettoriali di V.
L'unica fibra che risulta essere sottospazio vettoriale di V è

$$F^*(\mathbf{0}) = \ker F \ .$$

Esempi: ...

Teorema (di struttura delle fibre)

Sia $F : V \to W$ *un'applicazione lineare e* $\mathbf{w}$ *un vettore di* W *.*
Se la fibra $F^*(\mathbf{w})$ *sopra* $\mathbf{w}$ *non è vuota, sia* $\bar{\mathbf{v}}$ *un suo elemento.*
Si ha

$$F^*(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{v}} + \ker F \ ,$$

dove $\bar{\mathbf{v}} + \ker F = \{\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \ker F\}$.

Il teorema afferma che, data l'"equazione lineare" $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ nell'incognita $\mathbf{v}$ con il termine noto $\mathbf{w}$ fissato, se $\bar{\mathbf{v}}$ è una soluzione particolare (cioè se $\bar{\mathbf{v}}$ è *uno* dei vettori tali che $F(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w}$), allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ si ottengono sommando a $\bar{\mathbf{v}}$ i vettori del nucleo di F , cioè sommando a $\bar{\mathbf{v}}$ le soluzioni dell'"equazione lineare omogenea" $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Complemento: fibre e sottospazi affini

Se in uno spazio vettoriale V si considerano un sottospazio vettoriale U ed un vettore $\bar{\mathbf{v}}$ di V, l'insieme

$$\bar{\mathbf{v}} + U = \{\bar{\mathbf{v}} + u : u \in U\}$$

si dice *sottospazio affine* (o varietà affine) di *sostegno* U.

Ogni sottospazio affine $\bar{\mathbf{v}} + U$ è in corrispondenza biunivoca con il proprio sostegno U.

L'insieme $\bar{\mathbf{v}} + U$ può essere interpretato come la traslazione del sostegno U rispetto il vettore $\bar{\mathbf{v}}$.

Generalmente un sottospazio affine non è un sottospazio vettoriale, ma si definisce la dimensione dello spazio affine come la dimensione del sostegno:

$$\dim(\bar{\mathbf{v}} + U) = \dim U .$$

Tutte le fibre non vuote dell'applicazione lineare $F : V \to W$ sono sottospazi affini di V il cui sostegno è il nucleo di F.

Dimostrazione.

- Mostriamo che $F^*(\mathbf{w}) \subseteq \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.
  Se $\mathbf{v}_0 \in F^*(\mathbf{w})$, consideriamo la differenza $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}$.
  $F(\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}) = F(\mathbf{v}_0) - F(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$;
  quindi $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}$ è un elemento del nucleo di F , cioè $\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \in \ker F$.
  Dunque $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.

- Mostriamo che $F^*(\mathbf{w}) \supseteq \bar{\mathbf{v}} + \ker F$.
  Se $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in \bar{\mathbf{v}} + \ker F$, allora
  $F(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}) = F(\bar{\mathbf{v}}) + F(\mathbf{v}) = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w}$.
  Dunque $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \in F^*(\mathbf{w})$.

$\square$