Analisi matematica 2		8 luglio 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Sia D il dominio nel primo quadrante delimitato dalle rette verticali $x = 1$, $x = 3$ e dalle iperboli $xy = 1$, $xy = 2$.

a) Enunciare il teorema di Gauss-Green e verificarne la validità nel dominio D per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \frac{x}{y}\,\mathbf{j}$$

b) Trovare una funzione $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ (non identicamente nulla) tale che la forma differenziale

$$\omega_f = f(x)\,dx + \frac{x}{y}\,f(x)\,dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Determinare un potenziale per ω.

c) Calcolare l'area della regione $D_1 \subset D$ definita da

$$D_1 = \{(x, y) \in D\,:\, 2/x^2 \leq y \leq 3/x^2\}$$

2. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la porzione della superficie di equazione

$$z = 1 + x^2 - y^2$$

che si proietta sul cerchio $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ del piano xy.

a) Calcolare l'area di Σ.

b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{B}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

attraverso la superficie Σ orientata in modo che la proiezione della normale nella direzione dell'asse z sia positiva.

c) Verificare che il campo $\mathbf{B}$ è *solenoidale* e che $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, dove

$$\mathbf{A}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)\,\mathbf{k}$$

Calcolare $\displaystyle\oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ e spiegare perchè il risultato è in accordo con il teorema di Stokes.

3.

a1) Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$$

a2) Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $f'(0)$ giustificando il procedimento.

a3) Trovare l'espressione di $f'(x)$ e di $f(x)$.

b) Sia g la funzione $2\pi-$periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ -1 & \text{per } -\pi/2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{per } |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Discutere la convergenza della serie di Fourier associata a g. Calcolare i coefficienti di Fourier fino all'ordine $n = 6$ e scrivere la corrispondente somma di Fourier $S_6\, g$. Quale proprietà caratterizza questa somma tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine ≤ 6 ?

SOLUZIONI

1.

a)

$$\int\int_D \big(\partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\big)\, dx\, dy = \int\int_D \frac{1}{y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_1^3 \int_{1/x}^{2/x} \frac{1}{y}\, dy\, dx = \int_1^3 \big(\ln(2/x) - \ln(1/x)\big) = \int_1^3 \ln 2\, dx = 2\ln 2$$

Circolazione del campo lungo la frontiera: ∂D è una curva chiusa, unione di curve regolari; percorrendola in senso positivo a partire dal punto $(1,1)$, si può scrivere

$$\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{-\gamma_3\} \cup \{-\gamma_4\}$$

dove le curve regolari γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sono parametrizzate come segue

$$\gamma_1 :\ x = t,\ y = \frac{1}{t}\,, \quad 1 \le t \le 3\,; \qquad \gamma_2 :\ x = 3,\ y = t\,, \quad 1/3 \le t \le 2/3$$

$$\gamma_3 :\ x = t,\ y = \frac{2}{t}\,, \quad 1 \le t \le 3\,; \qquad \gamma_4 :\ x = 1,\ y = t\,, \quad 1 \le t \le 2$$

Dunque:

$$\int_{\gamma_1} dx + \frac{x}{y} dy = \int_1^3 \big(1 + t^2(-1/t^2)\big)\, dt = 0; \quad \int_{\gamma_2} dx + \frac{x}{y} dy = \int_{1/3}^{2/3} \frac{3}{t}\, dt = 3\ln 2$$

$$\int_{-\gamma_3} dx + \frac{x}{y} dy = -\int_1^3 \big(1 + (t^2/2)(-2/t^2)\big)\, dt = 0; \quad \int_{-\gamma_4} dx + \frac{x}{y} dy = -\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = -\ln 2$$

Sommando tutti i contributi si ottiene:

$$\int_{\partial D^+} dx + \frac{x}{y} dy = 3\ln 2 - \ln 2 = 2\ln 2$$

b) Poiché l'insieme $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ è semplicemente connesso, la forma ω_f è esatta se e solo se

$$\partial_x\Big(\frac{xf(x)}{y}\Big) = \partial_y\big(f(x)\big) = 0$$

Quindi $f(x) = C/x$ $(C \ne 0)$; scegliendo $C = 1$ abbiamo

$$\omega_f = \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{y}\, dy$$

Potenziale:

$$U(x,y) = \log x + \log y + c = \log(xy) + c, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

c) Con la sostituzione di variabili

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 y \end{cases}$$

la regione D_1 si trasforma biunivocamente nel nel quadrato

$$Q = \{(u,v) \,:\, 1 \le u \le 2, \quad 2 \le v \le 3\}$$

La trasformazione inversa si scrive

$$\begin{cases} x = v/u \\ y = u^2/v \end{cases}$$

Determinate Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{v}$$

Dunque

$$|D_1| = \int\int_{D_1} dxdy = \int\int_{Q} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$= \int_1^2 \int_2^3 \frac{1}{v}\, dvdu = \ln(3/2)$$

2.

a)

$$|\Sigma| = \int\int_{\Sigma} dS = \int\int_{D} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho d\theta = 2\pi\Big[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5}-1\big)$$

b) La normale moltiplicata per l'elemento di superfice è

$$\mathbf{n}\, dS = \big(-2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\, dxdy$$

Dunque:

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS =$$

$$\int\int_{D} \big(y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}\big)\cdot\big(-2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\, dxdy =$$

$$= \int\int_{D} 2\, dxdy = 2|D| = 2\pi$$

c) Il campo è solenoidale perchè

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(x,y,z) = \partial_x\, y + \partial_y\, x + \partial_z 2 = 0$$

Inoltre

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & \frac{y^2-x^2}{2} \end{vmatrix} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} = \mathbf{B}(x,y,z)$$

per cui $\mathbf{A}$ è un potenziale vettore di $\mathbf{B}$.
Per calcolare la circolazione, si parametrizza $\partial^+\Sigma$ con le equazioni

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 1 + \cos(2t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = -\sin t\ dt, \qquad dy = \cos t\, dt, \qquad dz = -2\sin(2t)\, dt$$

Dunque

$$\oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)^2 + \cos^2 t + \cos(2t)\sin(2t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[1 + \frac{1}{2}\sin(4t)\big]\, dt = 2\pi$$

3.

a1) La serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

Dunque $R = 1/2$ e la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1/2$. All' estremo $x = 1/2$ abbiamo la serie armonica che diverge; all'altro estremo $x = -1/2$, abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz. L'intervallo di convergenza è quindi $[-1/2, 1/2)$.

a2) La serie si può derivare termine a termine all'interno dell'intervallo di convergenza, per cui

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1} x^m, \qquad \forall\, x \in (-1/2, 1/2)$$

Dunque

$$f'(0) = 2$$

a3)

$$f'(x) = 2\sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^m = 2\sum_{m=0}^{\infty} (2x)^m = \frac{2}{1-2x}, \qquad |x| < 1/2$$

Osservando che $f(0) = 0$, abbiamo allora

$$f(x) = -\ln(1-2x)$$

b) La funzione g è regolare a tratti; per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, la serie associata converge a $g(x)$ nei punti dove g è continua, ovvero per $x \neq 2k\pi$ e $x \neq (k+1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Per $x = 2k\pi$ la serie converge a 0, per $x = (k+1/2)\pi$ con k *pari* (incluso $k = 0$) la serie converge a $1/2$, per $x = (k+1/2)\pi$ con k *dispari* la serie converge a $-1/2$.

Calcolo dei coefficienti di Fourier:

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

per ragioni di simmetria.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\big[1-\cos(n\pi/2)\big], \qquad n = 1, 2, ...$$

Dunque:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = \frac{2}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{5\pi}, \quad b_6 = \frac{2}{3\pi}$$

$$S_6\, g = \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{3}\sin(6x)\right]$$