Analisi matematica 2		facsimile
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y}-1}{3x}$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Descrivere l'insieme dei punti di frontiera ∂D. Dire *se* D è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Descrivere gli insiemi di livello

$$\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\} \qquad \text{e} \qquad \{(x,y) \mid f(x,y) = 1/3\}$$

Spiegare perchè non esiste il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,1)$.

c) Trovare in quali punti di D la funzione f è differenziabile. Determinare i massimi e minimi di f nell'insieme $Q = [1,2] \times [0,1]$.

2. Data la curva di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\sin t\,\mathbf{k} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Verificare che è una curva semplice, chiusa e regolare.

b) Calcolare i versori tangente e normale.

c) Calcolare la curvatura e descrivere il sostegno della curva.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y^2}{2\sqrt{t}}$$

a) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (motivare la risposta).

b) Dimostrare (senza integrare l'equazione) che ogni curva integrale non costante è *strettamente* decrescente.

c) Risolvere l'equazione e determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy $y(1) = 1$, $y(1) = -1$ precisando i rispettivi intervalli di definizione.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in
$$D = \{(x, y) : x \neq 0, y \geq 0\}$$
La frontiera di D è formata dall'unione dell'asse delle ascisse $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ e del semiasse $(0, y)$, $y > 0$. L'insieme D non è limitato, non è aperto (contiene punti della frontiera) non è chiuso (non contiene *tutta* la frontiera) e non è connesso: qualunque poligonale che unisca due punti di D con ascisse di segno opposto deve attraversare il semiasse delle ordinate positive e quindi non può essere tutta contenuta in D.

b) L'insieme di livello $f = 0$ è l'insieme
$$\{(x, y) \,|\, x > 0,\ y = 1\} \cup \{(x, y) \,|\, x < 0,\ y = 1\}$$
L'insieme di livello $f = 1/3$ è formato dai punti di D che soddisfano la relazione $\sqrt{y} - 1 = x$; quindi è l'insieme
$$\{(x, y) \,|\, x \geq -1, \quad x \neq 0, \quad y = (x + 1)^2\}$$
unione di due archi di parabola. Osserviamo che le due curve di livello si incontrano nel punto $(0, 1)$; avvicinandoci al punto $(0, 1)$ lungo la retta e lungo la parabola, si ricaverebbero allora due valori diversi per il limite. Ma il limite, se esiste, è unico, dunque la funzione non ha limite per $(x, y) \to (0, 1)$.

c) La funzione f ha derivate parziali
$$f_x(x, y) = \frac{1 - \sqrt{y}}{3x^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{6x\sqrt{y}},$$
nell'insieme aperto $\{(x, y) : x \neq 0, y > 0\}$ (insieme dei punti interni di D). Poiché le derivate sono funzioni continue in ogni punto dell'aperto, f è differenziabile in tutti i punti *interni a* D. Nei punti $x \neq 0$, $y = 0$ esiste la derivata parziale f_x ma non esiste la derivata parziale rispetto ad y; la funzione non è differenziabile in tali punti.
Consideriamo la funzione f ristretta all'insieme Q; poichè Q è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass garantisce che f (continua) assume massimo e minimo in Q. La funzione f è differenziabile all'interno di Q e non ci sono punti stazionari. Dunque, eventuali massimi e minimi si trovano sulla frontiera
$$\partial Q = (1, 2) \times \{0\} \ \cup\ \{1\} \times [0, 1] \ \cup\ (1, 2) \times \{1\} \ \cup\ \{2\} \times [0, 1]$$
Abbiamo allora da studiare le funzioni di una variabile
$$x \mapsto f(x, 0) = -\frac{1}{3x}, \quad 1 < x < 2$$
$$y \mapsto f(1, y) = \frac{1}{3}(\sqrt{y} - 1) \quad 0 \leq y \leq 1$$
$$x \mapsto f(x, 1) = 0, \quad 1 < x < 2$$
$$y \mapsto f(2, y) = \frac{1}{6}(\sqrt{y} - 1) \quad 0 \leq y \leq 1$$
Si conclude che i punti $(x, 1)$ con $1 \leq x \leq 2$ sono punti di massimo, dove $f(x, 1) = 0$, mentre il punto $(1, 0)$ è punto di minimo con $f(1, 0) = -1/3$.

2.

a) La curva è semplice e chiusa in quanto la condizione $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ equivale alla coppia di equazioni

$$\cos(t_1) = \cos(t_2) \qquad \sin(t_1) = \sin(t_2), \qquad 0 \le t_1 < t_2 \le 2\pi$$

che sono soddisfatte solo per $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi$.
La curva è regolare perchè la funzione $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ è continua con derivate continue e

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2} > 0$$

b) Poichè $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$, il versore tangente è:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$$

Calcoliamo ora la derivata del versore tangente

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{j} - \sin t\,\mathbf{k}$$

Poiché $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$, abbiamo subito $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)$.

c) La curvatura si ricava dalla definizione

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Osserviamo infine che le componenti $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ del vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ soddisfano le equazioni

$$x = y, \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

per ogni t. Il sostegno della curva è quindi la *circonferenza* ottenuta dall'intersezione del piano $x = y$ con la superficie sferica di centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$.

3.

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Il secondo membro dell'equazione

$$f(t, y) = -\frac{y^2}{2\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nel semipiano aperto

$$D = \{(t, y) \, : \, t > 0\}.$$

Osserviamo che anche la derivata parziale

$$f_y(t, y) = -\frac{y}{\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nello stesso semipiano; dunque, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate in D.

b) L'unica soluzione costante dell'equazione è $y = 0$; per l'unicità le altre curve integrali in D non possono attraversare l'asse t. Ogni soluzione non costante $\phi(t)$ soddisfa $\phi'(t) = -\frac{\phi^2(t)}{2\sqrt{t}} < 0$ in ogni punto del suo intervallo di definizione; dunque, ϕ è strettamente decrescente.

c) Le soluzioni non costanti si ottengono dalla formula risolutiva

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} + C.$$

Abbiamo dunque

$$-\frac{1}{y} = -\sqrt{t} + C,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{t} - C}$$

Sostituendo i valori $t = 1$ e $y = 1$ nell'equazione, si trova $C = 0$; sostituendo $t = 1$ e $y = -1$ si ottiene $C = 2$. Le soluzioni dei due problemi sono dunque $\phi(t) = 1/\sqrt{t}$, definita per $t > 0$ e $\psi(t) = 1/(\sqrt{t} - 2)$, nell'intervallo $(0, 4)$.