DERIVATE DIREZIONALI

2-4-2020

ESERCIZIO 1. Siano $\beta > 1$, $\underline{v} = \left(1/\sqrt{2} ; 1/\sqrt{2} \right)$ e si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1} y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Al variare di $\beta > 1$ determinare se esiste $D_{\underline{v}} f(0,0)$ e in caso affermativo calcolarla.

SOL.

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\cancel{0}+t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} ; \cancel{0} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left| t/\sqrt{2} \right|^{\beta-1} \cdot \cancel{t}/\sqrt{2}}{t^2/2 + t^2/2} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta \cancel{-1}} \cdot |t|^{\beta-1} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta} |t|^{\beta-3} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > 3 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 & \text{se } \beta = 3 \\ \underbrace{\infty}_{\text{NON ESISTE}} & \text{se } 1 < \beta < 3 \end{cases}$$

$\exists \, D_{\underline{v}} f(0,0)$ se $\beta \geq 3$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x,y) = y^4 e^{3x}$$

determinare per quali versori la $D_{\underline{v}} f(0,-1)$ è massima e nulla rispettivamente.

SOL. $f(x,y) = y^4 e^{3x}$ è differenziabile (è C^∞!)

$\Longrightarrow$ vale la formula del gradiente.

$$f_x(x,y) = 3y^4 e^{3x} \qquad f_x(0,-1) = 3$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 e^{3x} \qquad f_y(0;-1) = -4$$
$$\left.\begin{matrix} f_x(0,-1)=3 \\ f_y(0;-1)=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nabla f(0;-1) = (3;-4)$$

$$|\nabla f(0;-1)| = \sqrt{25} = 5$$

La direzione di massima crescita è quella del gradiente:

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

(RISPOSTA ALLA PRIMA DOMANDA)

La formula del gradiente afferma che:

$$D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{v}$$

$0 = D_{\underline{v}} f(0;-1) = (3;-4)\cdot(a;b)$ $(a^2+b^2=1)$

$= 3a - 4b$

$\Rightarrow 3a = 4b$ per es. $a=4$, $b=3$

$\underline{v} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ (oppure anche $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$)

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

1) Verificare che NON è differenziabile in $(0;1)$.

2) Calcolare TUTTE le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0;1)$.

SOL.

1) $f_x(0;1) = g'(0) = 0$

$g(x) = f(x,1) = 1 \Longrightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x$

$f_y(0,1) = h'(1) = 0$

$h(y) = f(0;y) = 1 \Longrightarrow h'(y) = 0 \quad \forall y$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h;1+k) - f(0;1) \cancel{- 0} \cancel{- 0}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k} \cancel{+1} \cancel{-1}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0+} \frac{\sqrt[3]{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\, \cancel{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta}}{\cancel{\rho}} =$$

$$= \sqrt[3]{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

il limite NON ESISTE.

$\Rightarrow$ f non è differenziabile.

2) Per calcolare $D_{\underline{v}} f(0,1)$ non uso la formula del gradiente uso la definizione:

$$D_{\underline{v}} f(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta ; 1+t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(0,1)}{t} =$$

$\underline{v} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cancel{t^2}\cos^2\theta\, \cancel{t}\,\mathrm{sen}\,\theta} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{t}} =$$

$$= \sqrt[3]{\cos^2\theta\, \mathrm{sen}\,\theta}\,.$$

ESERCIZIO A CASA:

Data la funzione $f(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare α affinché:

1) la direzione di massima crescita in $(0,1)$ sia lungo la tangente alla parabola $y=(x+1)^2$ nel verso negativo dell'asse x.
[RISP. $\alpha=-3/2$]

2) Il piano tangente in $(0,1)$ sia ortogonale alla retta $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$. [RISP. $\alpha=-2$]

ESERCIZIO 4. Sia $T(x,y)=e^{-x+2y}$ una funzione temperatura.

1) Determinare la curva di livello passante per $(0,0)$.

2) Verificare che tale curva è ortogonale a $\nabla T(0,0)$

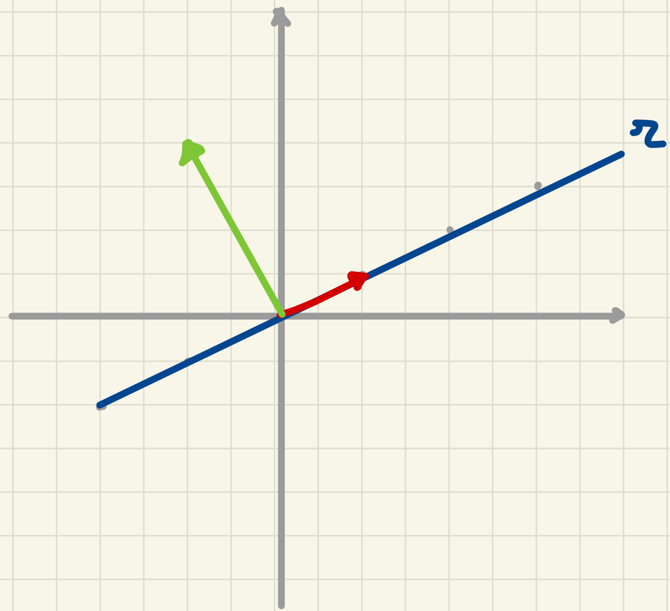
3) Calcolare la velocità di massima

crescita.

SOL.

1) $e^{-x+2y} = c \longrightarrow -x+2y = \ln c$ pono per $(0,0)$

$\Longrightarrow c = 1 \Longrightarrow$ eq. curve di livello è:



$$-x+2y = 0$$

$$r:\ y = \frac{1}{2}x$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \underline{d}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = e^{-x+2y}$$

$$\nabla T(x,y) = \left(-e^{-x+2y} ; 2e^{-x+2y}\right)$$

$$= e^{-x+2y}(-1;2)$$

$\nabla T(0,0) = (-1,2)$ $\qquad \nabla T \perp \underline{d_2}$

La direzione di massima crescita è quella del gradiente

$$\hat{v} = \frac{\nabla T(0,0)}{\|\nabla T(0,0)\|} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

La velocità di massima crescita è la derivata direzionale lungo la direzione del gradiente:

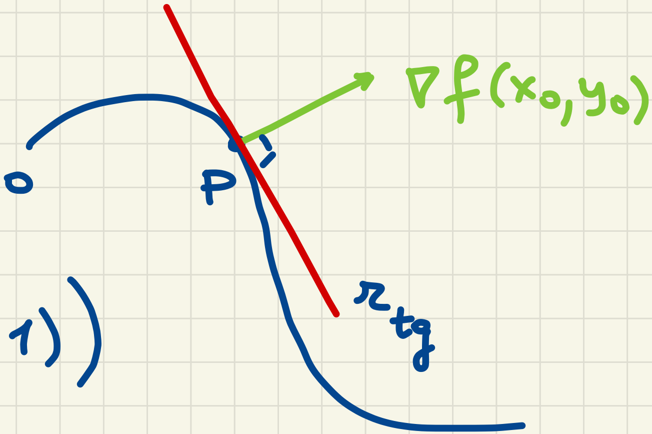
$$D_{\hat{v}} T(0,0) = \nabla T(0,0) \cdot \hat{v} = \nabla T(0,0) \cdot \frac{\nabla T(0,0)}{\|\nabla T(0,0)\|} =$$

$$= \frac{\|\nabla T(0,0)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\nabla T(0,0)\|}} = \|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{5}.$$

ESERCIZIO 5. Data la funzione $f(x,y)=x^2y+xe^y$, scrivere l'eq. della retta tangente alla curva di livello passante per $(e;1)$.

SOL.

$$r_{tg}: \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0)=0$$



$$\nabla f(e;1) = \big(f_x(e;1);\, f_y(e;1)\big)$$

$$g(x)=f(x;1)=x^2+ex \qquad g'(x)=2x+e$$

$$f_x(e;1)=g'(e)=2e+e=3e$$

$$h(y)=f(e;y)=e^2y+e^{y+1} \qquad h'(y)=e^2+e^{y+1}$$

$$f_y(e,1)=h'(1)=2e^2$$

$$\nabla f(e;1) = (3e;\ 2e^2)$$

r_{tg}: $$(3e;\ 2e^2)\cdot(x-e;\ y-1) = 0$$

$$3\cancel{e}(x-e) + 2e^{\cancel{2}}(y-1) = 0$$

$$3x - 3e + 2ey - 2e = 0$$

$$\boxed{3x + 2ey = 5e}$$

ESTREMI LIBERI

(OTTIMIZZAZIONE SU APERTI)

ESERCIZIO 6. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e stabilirne la loro natura.

1) $f(x,y) = xy - y^2 + 3$

2) $f(x,y) = (x+y+1)(x-y+1)$

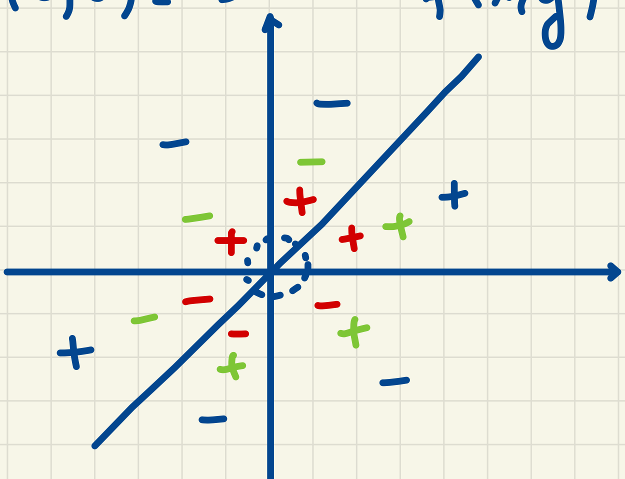
SOL.

1) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2$ $\qquad \nabla f(x,y) = (y;\ x-2y)$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0;0)$ è l'unico punto critico.

$f(0,0) = 3 \qquad f(x,y) > 3$



$$xy - y^2 + \cancel{3} > \cancel{3}$$

$$y(x-y) > 0 \quad \begin{cases} y > 0 \\ x - y > 0 \quad y < x \end{cases}$$

L'incremento intorno a $(0,0)$ cambia segno

$\Longrightarrow (0,0)$ è una sella

2) $f(x,y) = (x+y+1)(x-y+1)$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

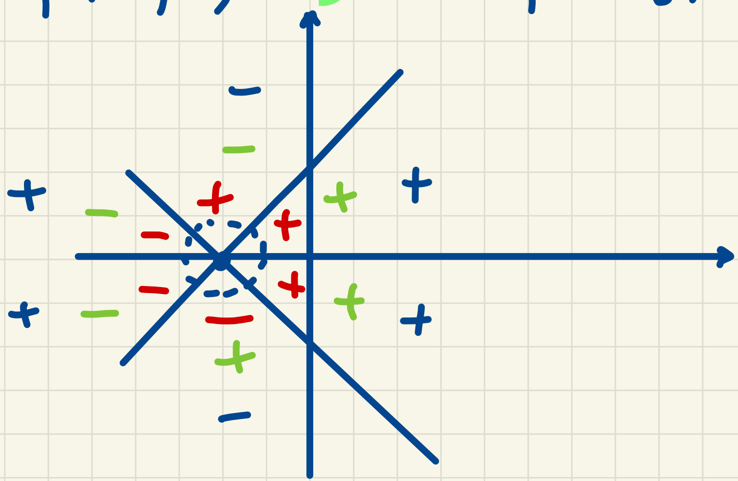
$f_x(x,y) = x-y+1+x+y+1 = 2x+2$

$\nabla f(x,y) = (2x+2, -2y)$

$f_y(x,y) = x-y+1-x-y-1 = -2y$

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ -2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (-1;0)$$

$f(-1;0) = 0$ $\qquad f(x,y) > 0$ $\qquad (x+y+1)(x-y+1) > 0$



- $x+y+1>0 \quad y>-x-1$
- $x-y+1>0 \quad y<x+1$

Intorno a $(-1,0)$ c'è un cambio di segno

$\Rightarrow (-1,0)$ è una sella.

ESERCIZIO 7. Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4 + 15$

SOL.

$$\nabla f(x,y) = 4\left(\cancel{4}(x-y) - \cancel{4}x^3 \,;\, -\cancel{4}(x-y) - \cancel{4}y^3\right)$$

$$+\begin{cases} x - y - x^3 = 0 \\ -x + y - y^3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y - x^3 = 0 \\ +x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y - x^3 = 0 \\ (x+y)\,\cancel{(x^2 - xy + y^2)} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - x^3 = 0 \to x(2-x^2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$x = 0 \ \vee \ x = \pm\sqrt{2}$$

$P_1(0;0)$ $P_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

$P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$

MATRICE HESSIANA $H_f(x,y)$

$$\nabla f(x;y) = \left(4(x-y) - 4x^3 \,;\, -4(x-y) - 4y^3\right)$$

$$H_f(x;y) = \begin{bmatrix} 4-12x^2 & -4 \\ -4 & 4-12y^2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix} \qquad \det H_f(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = 384 > 0$$

$\Longrightarrow (\sqrt{2};-\sqrt{2})$ è un massimo relativo

$$H_f(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$$

anche $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ è un massimo relativo

$$H_f(0;0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det H_f(0,0) = 0$$

CASO DUBBIO.

Studio il punto $(0;0)$ con il metodo precedente:

$$f(0;0) = 15 \qquad f(x,y) > 15$$

$$2(x-y)^2 - x^4 - y^4 + \cancel{15} > \cancel{15}$$

$$2(x-y)^2 - x^4 - y^4 > 0$$

Pongo $g(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$

- Restringo $g(x,y)$ all'asse x $(y=0)$

$$g(x,0) = 2x^2 - x^4 \qquad 2x^2 - x^4 > 0$$

$$x^2(2-x^2) > 0$$

$$x^2 > 0 \to \forall x \neq 0 \ ; \quad 2-x^2 > 0 \to -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

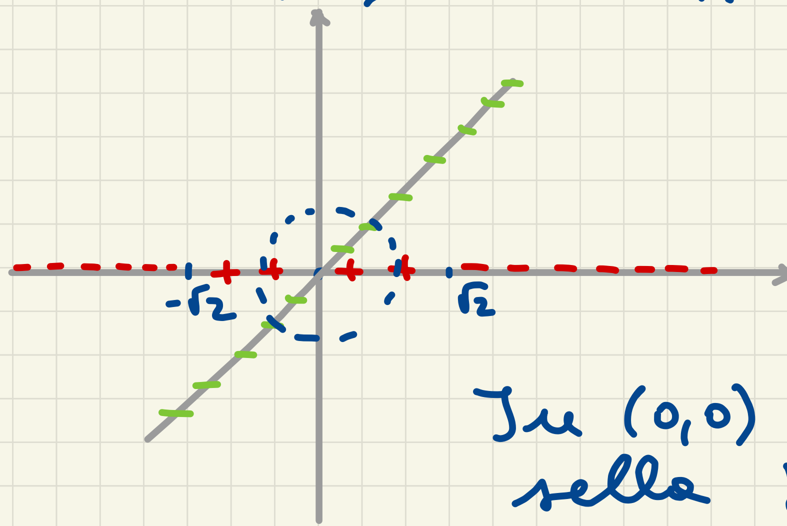
	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$+$		$+$	0	$+$		$+$
$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

• Restringo $g(x,y)$ alla retta $y=x$

$$g(x,x) = -2x^4$$

$$-2x^4 > 0 \to \text{IMP.}$$

	0	
$-$	0	$-$



In $(0,0)$ c'è una sella perché g cambia segno.

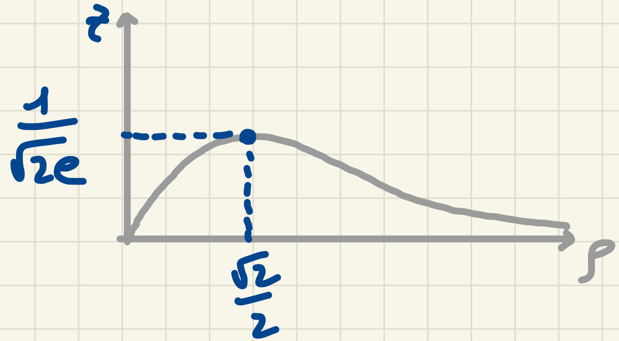
ESERCIZIO 8. Determinare massimi e minimi locali e globali della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\, e^{-x^2-y^2}$

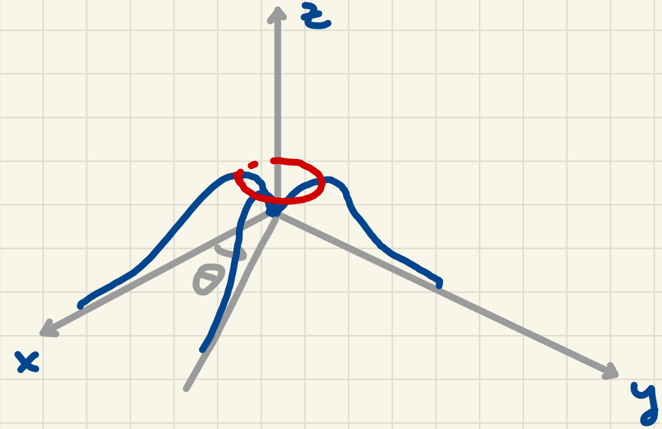
SOL.

$D_f = \mathbb{R}^2$ $\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\qquad g(\rho,\theta) = \sqrt{\rho^2}\, e^{-\rho^2} = \rho e^{-\rho^2}$

Studio la funzione (di una variabile)

$g(\rho) = \rho e^{-\rho^2}$ (esercizio a casa!) $\qquad \rho \geq 0$





La funzione $f(x,y)$ ammette massimi assoluti sulla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il massimo è $\frac{1}{\sqrt{2e}}$. Il minimo è in $(0,0)$ e vale 0.

$$\max_{\mathbb{R}^2} f = \frac{1}{\sqrt{2e}} \qquad \min_{\mathbb{R}^2} f = 0$$

ASSOLUTI !

ESERCIZIO 9 (ESAME).

Si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \log|y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

1) Stabilire per quali punti g è continua e in quali punti è differenziabile.

2) Trovare i punti critici di g ed eventuali estremi locali.

SOL.

CONTINUITÀ

1) $$g(x,y) = x\,h(y) \quad \text{con } h(y) = \begin{cases} y \log|y|, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to 0} h(y) = \lim_{y \to 0} y \log|y| = 0 \implies h \text{ è cont.}$$

$g(x,y)$ è continua perché prodotto di funzioni continue.

DIFFERENZIABILITÀ

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \ln|y| & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

- Se $y \neq 0 \Longrightarrow g(x,y)$ è derivabile con continuità $\Rightarrow$ è differenziabile.
- Se $y = 0$:
  - $k(x) = g(x,0) = 0 \quad \forall x \Longrightarrow k'(x) = 0$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(g_x(x,0) = 0 \right)$
  - DERIVATA RISPETTO A y: con la definizione.

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(x,0+k)-g(x,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{x k \ln|k| - 0}{k} = \lim_{k\to 0} x \ln|k| =$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ (non c'è la derivata)

Se $x \neq 0$ g non è differenziabile

Resta da controllare $x=0$ (con la def.)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - \cancel{g(0,0)} - \cancel{g_x(0,0)h} - \cancel{g_y(0,0)k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk \ln|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$ $= 0 \to$ è diff.

$$0 < \left| \frac{hk\ln|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 \right| = \left| \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{<1} \cdot k\ln|k| \right| \le \underbrace{\big|k\ln|k|\big|}_{\xrightarrow{k\to 0}\ 0}$$