Spazi di Hilbert

- Definizioni, proprietà di base, esempi
- Teoremi di proiezione
  - → su convessi chiusi
  - → su sottospazi
  - → decomposizione
- Teoremi di rappresentazione
  - → Riesz
  - → Lax-Milgram

Def. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Un PRODOTTO SCALARE su H è un'applicazione $(\, , \,): H \times H \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H$ con $(x,x) = 0 \iff x = 0$ POSITIVITÀ

(ii) $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in H$ SIMMETRIA

(iii) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$ BILINEARITÀ

Oss.
$$(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 (x, y_1) + \beta_2 (x, y_2)$$
$$\overset{(ii)}{=} (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x) \underset{(i)}{=} \beta_1 (y_1, x) + \beta_2 (y_2, x) \overset{(i)}{=}$$

Def. $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ NORMA INDOTTA DA $(\, , \,)$.

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n \qquad \underbrace{(x,y)}_{x \cdot y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2$
- $H = L^2(\Omega) \qquad (f,g) := \int_\Omega fg \qquad \sqrt{(f,f)} = \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \qquad (f,g) := \int_\Omega fg + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}}_{\nabla f \cdot \nabla g}$

$$\sqrt{(f,f)} = \left(\int_\Omega f^2 + |\nabla f|^2\right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H, allora:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in H$$

Inoltre vale $=$ $\Leftrightarrow$ $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dim. $\forall t \in \mathbb{R}$

$$0 \underset{(i)}{\leq} (x - ty, x - ty) \underset{\substack{(iii)\\(ii)}}{=} \overbrace{(x,x)}^{\|x\|^2} - 2t(x,y) + t^2 \overbrace{(y,y)}^{\|y\|^2}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x,y) + t^2 \|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow \cancel{4}(x,y)^2 - \cancel{4}\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Se vale $=$, $\Delta = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda y, x - \lambda y) = 0$

$$\Downarrow (i)$$

$$x - \lambda y = 0$$

Viceversa, se $x = \lambda y$.

$$\begin{cases} |(x,y)| = |(\lambda y, y)| = |\lambda| \, \|y\|^2 \\ \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \, \|y\|^2 \end{cases}$$

∎

Proposizione: Se $(,) : H \times H \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ è una norma.

Dim:

- $\|x\| \geq 0$ con $=$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ vera per la (i)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} \underset{(iii)}{=} \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} \underset{(iii)}{\overset{(ii)}{=}} \sqrt{\|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2}$

$$\underset{CS}{\leq} \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2}$$

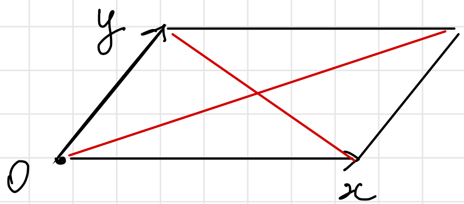
$$= \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare$$

Legge del parallelogramma

Sia H uno sp. vettoriale con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da esso. Allora:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

In $\mathbb{R}^2$:



Dim.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y)$$
$$= \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$
$$+ \|x\|^2 - \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \blacksquare$$

Oss. Può servire a verificare se una norma proviene da un prodotto scalare: le norme

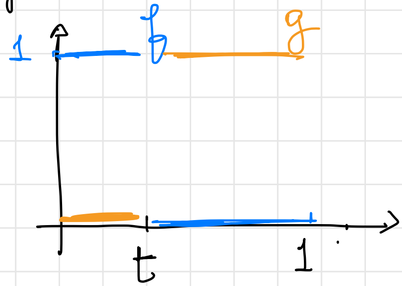
$\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p \quad p \neq 2, \qquad L^p(\Omega) \; p\neq 2, \qquad W^{1,p}(\Omega) \; p \neq 2$

non provengono da un prodotto scalare

Esempio $\Omega = (0,1)$: In $L^p(0,1)$ con $p \neq 2$ la norma non proviene da un prodotto scalare:

Fisso $t \in (0,1)$, considero le funzioni:

$$f = \chi_{(0,t)}, \quad g = \chi_{(t,1)}$$



- $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^t 1\right)^{1/p} = t^{1/p}$
- $\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_t^1 1\right)^{1/p} = (1-t)^{1/p}$
- $\|f+g\|_p = \left(\int_0^1 1\right)^{1/p} = 1$
- $\|f-g\|_p = \left(\int_0^1 |f-g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 1\right)^{1/p} = 1$

Id. parallelogramma:

$$2 = 2\, t^{2/p} + 2\,(1-t)^{2/p}$$

$$1 = \underbrace{t^{2/p} + (1-t)^{2/p}}_{=\ \varphi_p(t)}$$

$p=2$ OK!

$\forall t \in (0,1)$

$\varphi_p(t) \leftarrow$ non è una funzione costante di t.

Def. Uno SPAZIO DI HILBERT è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

Es. Sono di Hilbert:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$.
- $C^0([a,b])$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$

  $(f,g) = \int_a^b f g$ non Banach

  $\Rightarrow$ non Hilbert!

Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Sia H un Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso

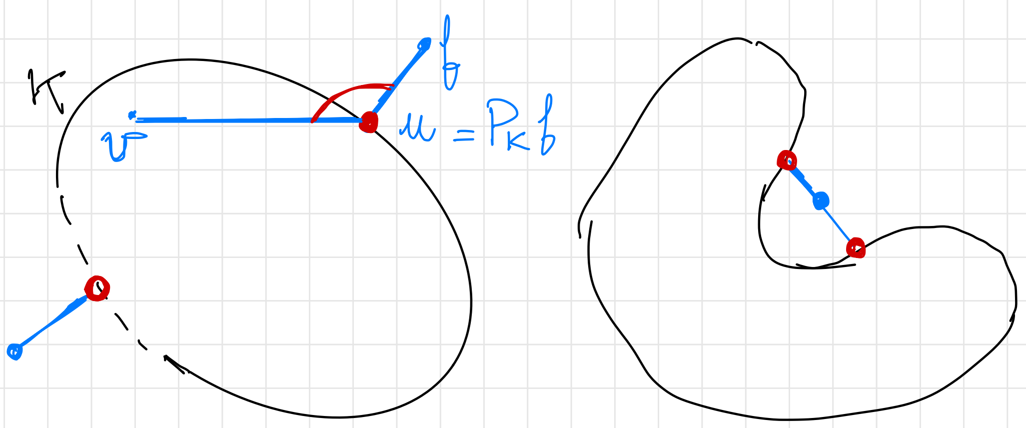
$$\left(\begin{array}{l} K \text{ convesso} := \forall x, y \in K, \ \forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K. \\ K \text{ chiuso} := \forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \to x \in H \Rightarrow x \in K. \end{array} \right)$$

Allora: $\forall f \in H$ esiste unico $u \in K$ tale che

$$\underset{d(f,u)}{\underset{\parallel}{\|f - u\|}} = \min_{v \in K} \underset{d(f,v)}{\underset{\parallel}{\|f - v\|}}$$

Tale elemento si dice PROIEZIONE DI f su K. $(u = P_K f)$

Inoltre: $\boxed{u = P_K f \iff (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K}$



Corollario (teorema di proiezione su un sottospazio chiuso)

Sia H Hilbert e M un sottospazio vettoriale chiuso.

(M sottospazio $\Rightarrow$ M è convesso! M non è necessariamente chiuso!)

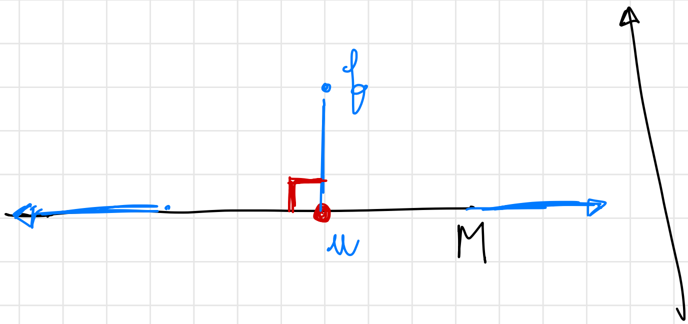
Allora:

$\forall f \in H$ $\exists$ unico $u = P_M f$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre

$$\boxed{u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M.}$$



$f - u \in M^{\perp}$

Def. Se $(\, , \,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y$ (x ORTOGONALE A y) $\overset{\text{def}}{\iff} (x,y)=0$

Es. $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\displaystyle\int_0^1 fg = 0$.

- $M^{\perp} := \{x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in M\}$

ORTOGONALE DI M.

Es. $M = \{$funzioni costanti in $L^2(0,1)\}$

$$M^{\perp} = \left\{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Oss. $x \perp y \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Teorema di Pitagora!).

Dim.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \cancel{2(x,y)} + \|y\|^2$$

$\boxtimes$