Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Quarto appello di Metodi Analitici (16-9-15) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Dimostrare che una funzione di variabile complessa $f(z)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ se e solo se è olomorfa su $\mathbb{C}$ la funzione $\overline{f(\overline{z})}$.

Soluzione. Sia $f(z) = u(x,y)$ e $g(z) := \overline{f(\overline{z})} = U(x,y) + iV(x,y)$. Dalla definizione di $g(z)$, si ha che le funzioni (u,v) e (U,V) sono legate dalle uguaglianze:

$$U(x,y) = u(x,-y) \qquad \text{e} \qquad V(x,y) = -v(x,-y)\,.$$

In particolare segue immediatamente che (U,V) sono differenziabili se e solo se lo sono (u,v). Inoltre le relazioni di Cauchy-Riemann per g (scritte nel punto $z = x+iy$), ovvero

$$U_x(x,y) = V_y(x,y) \qquad \text{e} \qquad U_y(x,y) = -V_x(x,y)$$

scritte in termini di u e v diventano

$$u_x(x,-y) = v_y(x,-y) \qquad \text{e} \qquad -u_y(x,-y) = v_x(x,-y)\,,$$

che sono esattamente le relazioni di Cauchy-Riemann per f (scritte nel punto $\overline{z} = x - iy$).
Pertanto g soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann su tutto $\mathbb{C}$ se e solo se f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann su tutto $\mathbb{C}$. Segue che g è olomorfa sul piano complesso se e solo se lo è f.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{n}{1 + n\sqrt{x}}, \qquad x \in [0,1].$$

(i) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la successione appartiene a $L^p([0,1])$.

(ii) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la successione è di Cauchy in $L^p([0,1])$

Soluzione.

(i) La successione appartiene a $L^p[(0,1)]$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. Infatti essendo $[0,1]$ di misura finita basta far vedere che la successione appartiene a $L^\infty[(0,1)]$, il che è vero trattandosi di funzioni continue su un insieme compatto.

(ii) Poiché $L^p([0,1])$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, +\infty]$, la successione è di Cauchy per i valori di p tali che essa converge. D'altra parte, se la successione f_n converge, il suo limite in $L^p[(0,1)]$ deve coincidere con il limite puntuale quasi ovunque, che è la funzione $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$. Distinguiamo quindi due casi:

- $p \geq 2$: si ha $f \notin L^p([0,1])$. In tal caso f_n non puó convergere in L^p e pertanto non puó essere di Cauchy.

- $p \in [1,2)$: si ha $f \in L^p([0,1])$. In tal caso f_n puó convergere in L^p (a f) e pertanto puó essere di Cauchy. Per verificare se effettivamente f_n converge in $L^p([0,1])$, applichiamo il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Infatti, come già osservato, si ha $f_n \to f$ puntualmente quasi ovunque. Osservando che $|f_n| \leq f$ (con $f \in L^p([0,1])$), deduciamo immediatamente che $f_n \to f$ in $L^p([0,1])$ e pertanto f_n è di Cauchy.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Enunciare una formula di inversione per la trasformata di Fourier.

(ii) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1\,. \end{cases}$$

(iii) Calcolare

$$I := \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \right) \cos\frac{x}{2}\, dx\,.$$

(suggerimento: usare il punto (i)).

Soluzione.
(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Si ha

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)[\cos(\xi x) - i\sin(\xi x)]\, dx = 2\int_0^1 u(x)\cos(\xi x)\, dx\,,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la funzione u è pari e nulla per $|x| \geq 1$.
Attraverso calcoli elementari si ottiene quindi:

$$\hat{u}(\xi) = 2\int_0^1 u(x)\cos(\xi x)\, dx = 4\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^3}\,.$$

(iii) Poiché le funzioni u e $\hat{u}$ sono in L^2, usando la formula di inversione otteniamo

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi\,,$$

ovvero, sfruttando il fatto che $\hat{u}$ è pari,

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}(\xi)\cos\xi x\, d\xi \; = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\xi - 2\xi\cos\xi}{\xi^3}\cos(\xi x)\, d\xi\,.$$

Ponendo $x = \frac{1}{2}$, si ottiene quindi

$$\frac{3}{4} = u\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\xi - 2\xi\cos\xi}{\xi^3}\cos\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\, d\xi\,,$$

da cui

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\xi - 2\xi\cos\xi}{\xi^3}\cos\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\, d\xi = \frac{3\pi}{16}\,.$$