

Serie di Fourier - Esercizi svolti

Esercizio 1.

È data la funzione f con $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } x = -\pi \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases} \quad (1)$$

(onda quadra).

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di f .
2. Discutere il tipo di convergenza.
3. Calcolare la somma della serie numerica a segni alterni $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
4. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione g con $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{per } 0 < x < \pi \end{cases}.$$

5. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione h con $\text{dom}(h) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ 1 & \text{per } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{per } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Esercizio 2.

- A) È data la funzione f con $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che $f(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi)$.

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di f .
2. Discutere il tipo di convergenza.
3. Calcolare lo scarto in media quadratica tra f e i primi due termini del suo sviluppo di Fourier.

4. Calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
5. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{per } -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

B) Si consideri quindi la funzione φ definita su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 4, tale che $\varphi(x) = |x|$ per $x \in [-2, 2]$.

1. Calcolarne i coefficienti di Fourier.
2. Usando l'identità di Parseval, calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Esercizio 3.

È data la funzione f , con $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che $f(x) = |\sin x|$ per $x \in [-\pi, \pi)$ (onda raddrizzata).

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di f .
2. Discutere il tipo di convergenza.
3. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione g , con $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , tale che

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & \text{per } 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Ricordiamo prima di tutto che se f è una funzione definita su \mathbb{R} , continua a tratti e periodica di periodo 2π , i suoi coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx . \end{aligned}$$

1. Il grafico di f è mostrato nella Figura 1.

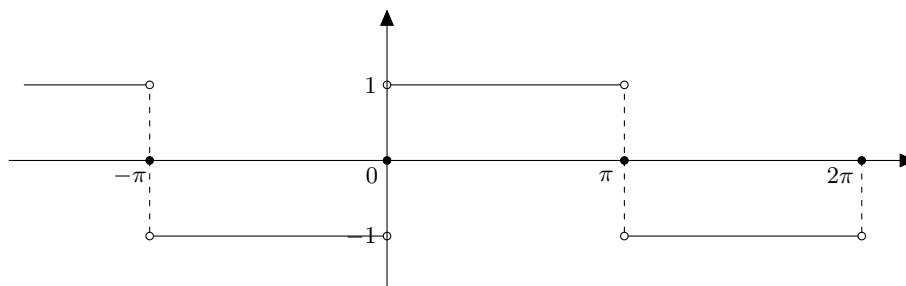


Fig. 1

Si tratta evidentemente di una funzione dispari: pertanto $a_k = 0$ per ogni $k = 0, 1, \dots$. Inoltre,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) .$$

In definitiva, vediamo che se k è pari, $b_k = 0$, mentre se k è dispari, $b_k = \frac{4}{k\pi}$.

La serie di Fourier di f si scrive:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] . \quad (2)$$

2. La funzione non è continua, quindi la serie di Fourier di f non converge uniformemente a f su tutto \mathbb{R} . Tuttavia le pseudoderivate laterali di f esistono finite in ogni punto. La teoria garantisce allora che la serie di Fourier di f converge:

a) a $f(x)$ in ogni punto x in cui f è continua;

- b) al valore regolarizzato (cioè alla media dei limiti laterali) in ogni punto x in cui f è discontinua.

In particolare, come si può verificare direttamente, la (2) converge a zero in tutti i punti della forma $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ (in tali punti infatti tutti i termini della serie si annullano). Siccome la definizione (1) assegna effettivamente il valore zero alla funzione f in tutti i punti della forma $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, possiamo concludere che la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su tutto \mathbb{R} .

3. Osserviamo che $f(\pi/2) = 1$. Inoltre, $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$ per ogni intero k . Dunque, per $x = \pi/2$, dallo sviluppo di Fourier di f si ricava:

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

da cui

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

4. Si verifica facilmente che $g(x) = (f(x) + 1)/2$, con l'eccezione dei punti della forma $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Quindi,

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right].$$

Si noti che $g(x)$ non è né pari né dispari. Nei punti di discontinuità la g assume il valore zero, mentre la sua serie di Fourier converge al valore regolarizzato $y = 1/2$.

5. Infine, si ha $h(x) = g(x + \frac{\pi}{2})$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Effettuando la sostituzione, e osservando che

$$\sin \left(\alpha + m \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} -\cos \alpha & \text{se } m = 1, 5, 9, \dots \\ \cos \alpha & \text{se } m = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

si ha:

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right].$$

Si noti che h è una funzione pari.

Esercizio 2.

A) Il grafico di f è mostrato in Figura 2.

1. Si tratta di una funzione pari. Pertanto $b_k = 0$ per ogni $k = 1, 2, \dots$. Per quanto riguarda il calcolo dei coefficienti a_k , si ha:

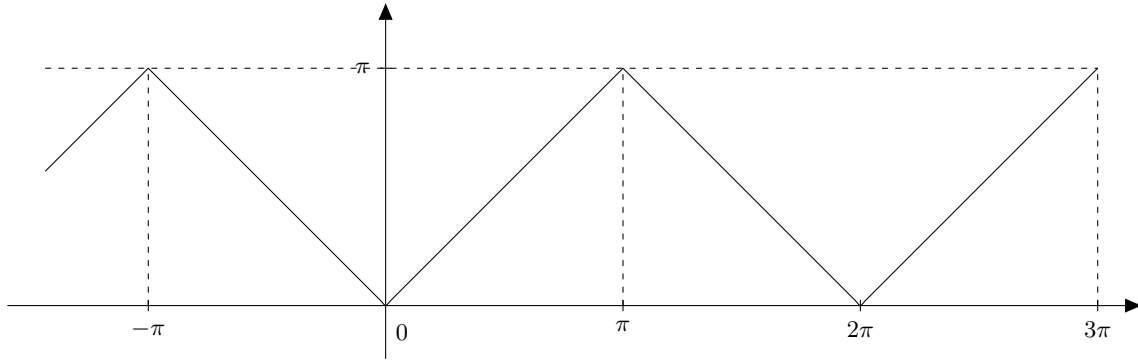


Fig. 2

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

e, per $k > 1$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx = \frac{4}{k^2\pi} [\cos(k\pi) - 1]$$

dove l'integrale è stato calcolato per parti. Dunque, se k è pari il coefficiente a_k si annulla, mentre se k è dispari si ha $a_k = -4/k^2\pi$.

La serie di Fourier di $f(x)$ si scrive:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right].$$

2. Poiché $f(x)$ è continua, e la sua derivata è continua a tratti, la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente (e quindi anche puntualmente) a $f(x)$ su tutto \mathbb{R} .
3. Si ricordi che la media quadratica di una funzione f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è data da

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \right]^{1/2}.$$

Lo scarto in media quadratica tra f e il suo polinomio di Fourier P_n di ordine n è dato da

$$\|f - P_n\|_2 = \left[\|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]^{1/2}.$$

Poiché $b_k = 0$ per ogni k , i primi due termini della serie di Fourier di f coincidono esattamente con $P_2(x)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \|f - P_2\|_2 &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(|x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos x \right)^2 dx \right]^{1/2} = \\ &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx - \frac{\pi^3}{2} - \frac{16}{\pi^2} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi^2}}. \end{aligned}$$

4. In particolare, per $x = 0$, si ha:

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right]$$

da cui si ottiene subito

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$$

5. Partendo dallo sviluppo già ottenuto per f , si può ottenere lo sviluppo di g in due modi diversi.

(i) Osservando che $g(x) = \pi - f(x)$, si ha subito:

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right].$$

(ii) Osservando che $g(x) = f(x - \pi)$ e ricordando che, se m è un numero dispari, $\cos(\alpha - m\pi) = -\cos \alpha$.

Il grafico della funzione g è disegnato nella Figura 3

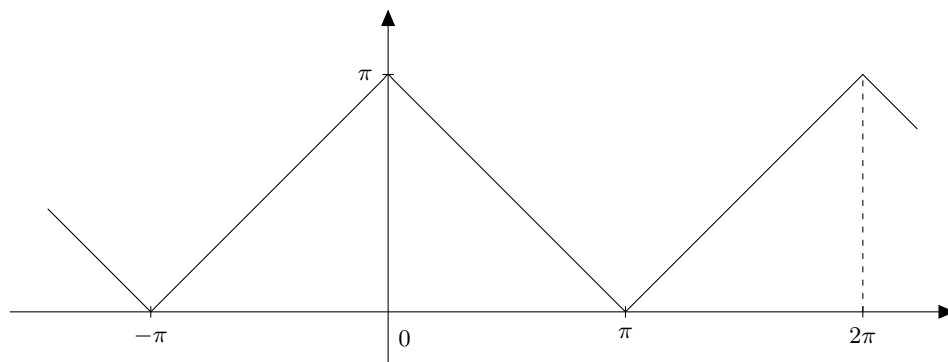


Fig. 3

B) Consideriamo adesso la funzione φ , il cui grafico è tracciato nella Figura 4.

Ricordiamo che per una funzione di periodo $T \neq 0$, le formule per calcolare i coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

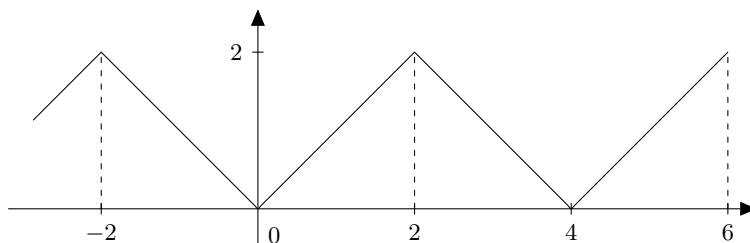


Fig. 4

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) dx .$$

1. Usando queste formule, si calcola subito:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 |x| dx = \frac{1}{2} \int_0^2 |x| dx = 1 .$$

Il calcolo di a_k per $k \geq 1$ richiede anche in questo caso un'integrazione per parti; si ha:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 |x| \cos \frac{k\pi}{2} x dx = \int_0^2 x \cos \left(\frac{k\pi}{2} x \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{-8}{k^2 \pi^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infine, essendo φ una funzione pari, si ha ancora $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots$. La serie di Fourier di φ si scrive:

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} x .$$

In questo caso, data la forma particolare della funzione, sarebbe stato possibile ricavare i coefficienti di Fourier di φ da quelli già calcolati per f nella prima parte dell'esercizio. Limitiamoci al caso $k \geq 1$. Effettuando la sostituzione $x = (2t)/\pi$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2}^2 |x| \cos \left(\frac{k\pi}{2} x \right) dx &= \int_0^2 x \cos \left(\frac{k\pi}{2} x \right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} t \cos kt dt = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos kt dt . \end{aligned}$$

I coefficienti di Fourier di φ si ottengono quindi moltiplicando per $2/\pi$ i corrispondenti coefficienti di Fourier di f .

2. Per una funzione di periodo $T > 0$, l'identità di Parseval si scrive:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi^2(x) dx = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) .$$