Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
I Appello invernale di Metodi Analitici (3-2-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Si consideri la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^3}\,.$$

(i) Scrivere la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ attorno a $z_0 = 0$.

(ii) Classificare la singolarità $z_0 = 0$.

(iii) Calcolare l'integrale

$$\int_{C_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

dove $C_1(0)$ è la circonferenza nel piano complesso centrata in $z = 0$ e di raggio 1, percorsa una volta in senso antiorario.

Soluzione.

(i) Dallo sviluppo di Taylor della funzione $\sin z$ attorno a $z_0 = 0$, otteniamo:

$$f(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)\right)^3} = \frac{1}{z^3 - \frac{1}{2}z^5 + O(z^7)} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}\,,$$

da cui, sfruttando il fatto che $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ (in questo caso $x = -\frac{1}{2}z^2 + O(z^4)$),

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z} + O(z)\,.$$

Deduciamo quindi che la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ attorno a $z_0 = 0$ è

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z}\,.$$

(ii) Grazie allo sviluppo trovato al punto (i), vediamo che $z_0 = 0$ è un polo di ordine 3 per $f(z)$.

(iii) Sempre grazie al punto (i), abbiamo che $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$. Di conseguenza, essendo $z_0 = 0$ l'unica singolarità di $f(z)$ che ricade all'interno di $C_1(0)$,

$$\int_{C_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 0) = \pi i\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Sia f_k una successione di funzioni in $L^p(\mathbb{R}^+)$, con $p \in [1, +\infty)$. Fornire le definizioni di convergenza di f_k in $L^p(\mathbb{R}^+)$ e di convergenza puntuale di f_k quasi ovunque su $\mathbb{R}^+$, e discutere che relazioni vi sono tra questi due tipi di convergenza.

(ii) Data una successione numerica g_k e una funzione $h \in L^p(\mathbb{R}^+)$ per ogni $p \in [1, \infty]$, sia f_k una successione di funzioni così costruita:

$$f_k(x) = g_k \cdot h(kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \, , \ \forall k \in \mathbb{N} \, .$$

Sotto le ipotesi

$$h \not\equiv 0 \, , \quad \lim_{k \to \infty} g_k = +\infty \, , \quad h(kx) = o\left(\frac{1}{g_k}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \, , \tag{1}$$

si discuta la convergenza di f_k in $L^p(\mathbb{R}^+)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.
(ii) Osserviamo anzitutto che $f_k(x)$ converge ovunque (tranne al più in $x = 0$) alla funzione identicamente nulla. Ciò è una banale conseguenza della terza ipotesi nella (1):

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k \cdot h(kx) = \lim_{k \to \infty} \frac{h(kx)}{\frac{1}{g_k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{o\left(\frac{1}{g_k}\right)}{\frac{1}{g_k}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \, .$$

Per valutare la convergenza di f_k a zero in $L^p(\mathbb{R}^+)$, calcoliamone le corrispondenti norme L^p:

$$\|f_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} = g_k^p \int_0^{+\infty} |h(kx)|^p \, \mathrm{d}x = \left(\frac{g_k}{k^{\frac{1}{p}}}\right)^p \int_0^{+\infty} |h(y)|^p \, \mathrm{d}y = \left(\frac{g_k}{k^{\frac{1}{p}}}\right)^p \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \quad \forall p \in [1, \infty) \, , \tag{2}$$

$$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} = g_k \, \|h(kx)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} = g_k \, \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \, . \tag{3}$$

Dato che per ipotesi $h \not\equiv 0$, dalla (3) segue che f_k non converge in $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Invece, dalla (2) deduciamo che f_k converge in $L^p(\mathbb{R}^+)$ per $p \in [1, \infty)$ se e solo se

$$g_k = o\left(k^{\frac{1}{p}}\right) .$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Si consideri la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f)$ come operatore lineare e continuo da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$.

(i) Dimostrare che la norma dell'operatore $\mathcal{F}$ è minore o uguale a 1.

(ii) Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la trasformata di Fourier della funzione

$$f_n(x) = n\, \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \cos x\,.$$

(iii) Dedurre dal punto (ii) che la norma dell'operatore $\mathcal{F}$ è *uguale* a 1 ed è realizzata da ogni f_n.

Soluzione.

(i) Il fatto che la norma operatoriale di $\mathcal{F}$ sia minore o uguale a 1 è un'immediata conseguenza dalla seguente disuguaglianza:

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-i\xi x} f(x) \right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R})\,,$$

da cui

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})\,, \tag{4}$$

ovvero

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f \in L^1(\mathbb{R}),\, f \not\equiv 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty}{\|f\|_1} \leq 1\,. \tag{5}$$

(ii) Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_n)(\xi) =& \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \left(e^{ix} + e^{-ix} \right) \mathrm{d}x = \frac{n}{2} \left(\mathcal{F}\left(\chi_{[0, \frac{1}{n}]} \right)(\xi - 1) + \mathcal{F}\left(\chi_{[0, \frac{1}{n}]} \right)(\xi + 1) \right) \\ =& i\frac{n}{2} \left(\frac{e^{-i\frac{(\xi-1)}{n}} - 1}{\xi - 1} + \frac{e^{-i\frac{(\xi+1)}{n}} - 1}{\xi + 1} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

(iii) Dalla (6) in particolare otteniamo:

$$\|\mathcal{F}(f_n)\|_\infty \geq |\mathcal{F}(f_n)(0)| = \frac{n}{2} \left| e^{-\frac{i}{n}} - e^{\frac{i}{n}} \right| = n \sin\left(\frac{1}{n} \right).$$

Allo stesso tempo,

$$\|f_n\|_1 = n \int_0^{\frac{1}{n}} \cos x\,\mathrm{d}x = n \sin\left(\frac{1}{n} \right).$$

Queste ultime due relazioni, unitamente alla (4), implicano che

$$\|\mathcal{F}(f_n)\|_\infty = \|f_n\|_1\,,$$

da cui, ricordando la (5), possiamo concludere che la norma operatoriale di $\mathcal{F}$ vale esattamente 1 ed è realizzata da ciascuna f_n.

Più in generale, è facile vedere come $\|\mathcal{F}\|$ sia realizzata da una qualsiasi funzione $f \not\equiv 0$ non negativa. Infatti per una tale f vale la disuguaglianza

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \geq |\mathcal{F}(f)(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\,,$$

che assieme alla (5) implica che necessariamente $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \|f\|_1$, ovvero f realizza la norma di $\mathcal{F}$.