Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Preappello di Analisi III, 15 gennaio 2020 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = ke^{-k|x|}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Stabilire se la successione converge in $L^1(\mathbb{R})$; in caso affermativo, determinarne il limite.

(b) Stabilire se la successione converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; in caso affermativo, determinarne il limite.

Soluzione.

(a) La successione non converge in $L^1(\mathbb{R})$. Infatti essa converge a zero puntualmente quasi ovunque (in ogni $x \neq 0$) alla funzione identicamente nulla, che quindi è l'unico possibile limite in $L^1(\mathbb{R})$. D'altra parte, si ha tramite cambio di variabile (e tenendo conto che f_k è pari)

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k| = 2\int_0^{+\infty} f_k = 2\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 2 \not\to 0\,.$$

(b) Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_k\varphi = k\int_{\mathbb{R}} e^{-k|x|}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\varphi\Big(\frac{y}{k}\Big)\,dy \to \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} = 2\varphi(0)$$

(dove il passaggio al limite segue dal teorema di convergenza dominata). Pertanto $f_k \to 2\delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]

Sia

$$u(x) := x^2e^{7x}H(-x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

dove H è la funzione di Heavyside.

(a) Calcolare la trasformata di Fourier di u.

(b) Stabilire, giustificando la risposta, se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) Si ha $u(x) = x^2v(x)$, con $v(x) := e^{7x}H(-x)$. Pertanto $\mathcal{F}(u) = i^2\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}(v)$. Quest'ultima trasformata si calcola in modo diretto:

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} v(x)e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{(7-i\xi)x}\,dx = \frac{1}{7-i\xi}\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}(u) = 2(7-i\xi)^{-3}\,.$$

(b) Si', poiché $u \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]

Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma (\frac{1}{z} + \frac{1}{\cos(z)} + \frac{\sin(z)}{z} + e^{(1/z^2)})\, dz$, dove γ è la circonferenza unitaria di centro $z = 0$, percorsa una sola volta in senso orario.

Soluzione.
Occorre considerare solo le singolarità interne a γ, infatti per quelle esterne l'indice di γ è nullo e non danno contributo nel calcolo dell'integrale.

- $\frac{1}{z}$ ha in $z = 0$ un polo semplice con residuo 1;
- $\frac{1}{\cos(z)}$ ha in $z = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ poli semplici ma esterni a γ;
- $\frac{\sin(z)}{z}$ ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile dunque il residuo è nullo;
- $e^{(1/z^2)}$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale ma, essendo funzione pari, avrà nel corrispondente svilupppo di Laurent solo potenze pare e dunque residuo nullo.

In conclusione $I = -2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = -2\pi i$.

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Enunciare il teorema di rappresentazione di Riesz.

(b) Caratterizzare il duale topologico di $L^2(0,1)$.

(c) Dato $p \in (1, +\infty)$, fornire un esempio di funzionale lineare continuo su $L^p(0,1)$, e quindi fornire una plausibile congettura per l'identificazione del duale topologico di $L^p(0,1)$.