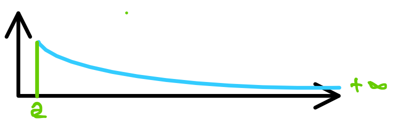
Integrali Generalizzati

CONVERGENZA DEGLI INTEGRALI GENERALIZZATI

IMPROPRIO SE
- f ILLIMITATA (ASINTOTI)
- D ILLIMITATO $[-\infty, K]$, $[-\infty, +\infty]$ ETC

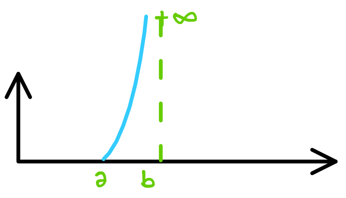
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

SI COMPORTA COME UN LIMITE



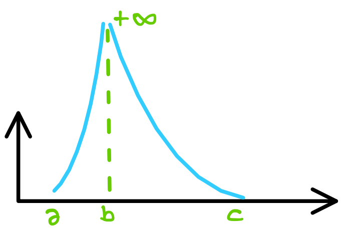
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

SI COMPORTA COME UN LIMITE



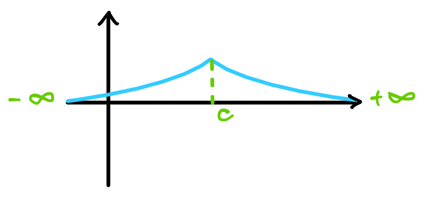
$$\int_a^c f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{k \to 0^+} \int_{b+k}^c f(x)\,dx$$

DEVO SPEZZARE L' INTEGRALE
SE ENTRAMBI CONVERGONO ALLORA ANCHE $\int_a^b$ CONVERGE



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^c f(x)\,dx + \lim_{S \to \infty} \int_c^S f(x)\,dx$$

DEVO SPEZZARE L' INTEGRALE
SE ENTRAMBI CONVERGONO ALLORA ANCHE $\int_{-\infty}^{+\infty}$ CONVERGE



SI COMPORTA COME UN LIMITE
- $\exists$ FINITO (CONVERGE)
- $\exists$ INFINITO (DIVERGE)
- $\nexists \to f$ NON INTEGRABILE

ESSENDO LIMITI POSSO USARE I SEGUENTI CRITERI PER STUDIARE LA CONVERGENZA DELL' INTEGRALE

CONFRONTO (f POSITIVE)

$f \le g \to$
- $\int_a^\infty f$ DIV $\to \int_a^\infty g$ DIV
- $\int_a^\infty g$ CONV $\to \int_a^\infty f$ CONV

CONFRONTO ASINTOTICO (f POSITIVE)

$f \sim g \to$ I LIMITI HANNO LO STESSO CARATTERE

MODULO

$\left|\int f\right| \le \int |f| \to$
- $\int |f|$ CONV $\to \left|\int f\right|$ CONV
- $\left|\int f\right|$ DIV $\to \int |f|$ DIV

NOTEVOLI

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
- $\alpha > 1$ CONV
- $\alpha \le 1$ DIV

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
- $\alpha \ge 1$ DIV
- $\alpha < 1$ CONV

$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\,dx$
- $\alpha > 1$ CONV
- $\alpha < 1$ DIV
- $\alpha = 1$ —
  - $\beta \ge 1$ CONV
  - $\beta < 1$ DIV

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV $\to \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

NECESSARIO MA NON SUFFICIENTE
NON POSSO NEMMENO DIRE CHE f È LIMITATA

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ CONV $\to \int_a^{+\infty} f(x)$ CONV

NON VALE IL CONTRARIO

VALORE PRINCIPALE

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$

$$VP \int_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right\}$$

UNICO LIMITE SENZA SPEZZARE GLI INTEGRALI

SE $\int_{-\infty}^{+\infty}$ CONV ALLORA $VP \int_{-\infty}^{+\infty}$ CONV E DA LO STESSO VALORE

SE SIA $\int_{-\infty}^{c}$ CHE $\int_c^{+\infty}$ DIV ALLORA $VP \int_{-\infty}^{+\infty}$ DIV

SE SOLO UNO DEI 2 DIV IN VP PUÒ SUCCEDERE DI TUTTO (PERICOLO)

ESEMPIO

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

$\frac{x+1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$ PER $x \to \pm\infty$

$\alpha = 2 > 1$ DIV

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_{-R}^{+R} \frac{x}{x^2+1} + \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \underbrace{\left| \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ DISPARI}} + 2 \left| \arctan x \right|_0^{+\infty} = \pi$$