**Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2020/2021**
**Corso di Laurea in Ingegneria Fisica**
**Quinto appello di Analisi 3, 8/9/2021 – Prof. I. FRAGALÀ**

**TEST 1. (8 punti)**
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere per una funzione di variabile complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

a. $f(z)$ olomorfa $\Rightarrow f(\overline{z})$ olomorfa

FALSO, ad esempio $f(z) = z$ è olomorfa, mentre $f(\overline{z}) = \overline{z}$ non lo è

b. $f(\overline{z})$ olomorfa $\Rightarrow f(z)$ olomorfa

FALSO, ad esempio prendendo $f(z) = \overline{z}$ si ha che $f(\overline{z}) = z$ è olomorfa, mentre $f(z)$ non lo è

c. $f(z)$ olomorfa $\Rightarrow \overline{f(\overline{z})}$ olomorfa

VERO: se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ si ha che $\overline{f(\overline{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$. Si verifica facilmente che, se $u$ e $v$ soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann lo stesso vale per $U(x, y) = u(x, -y)$ e $V(x, y) = -v(x, -y)$

d. $\overline{f(\overline{z})}$ olomorfa $\Rightarrow f(z)$ olomorfa

VERO: come sopra, se $U$ e $V$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann lo stesso vale per $u$ e $v$

**TEST 2. (8 punti)**
Stabilire quali affermazioni sono vere per la funzione

$$f(x) = -\frac{x}{(x^2 + 4)^2}$$

e per la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$.

e. $f$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$

VERO, poiché $f^2(x) \sim \frac{1}{x^6}$ as $x \to +\infty$

f. $f$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$

VERO, poiché $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ as $x \to +\infty$

g. $\widehat{f}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$

VERO, poiché $f$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

h. $\widehat{f}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$

VERO, poiché $f(x) = \frac{1}{2}g'(x)$, dove $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Quindi $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}(i\xi)\widehat{g}(\xi) = i\xi\frac{\pi}{4}e^{-2|\xi|}$

**ESERCIZIO (10 punti)**
Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $n \geq 1$, da

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x|^n}\right).$$

a. Determinare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ puntualmente quasi ovunque su $\mathbb{R}$.

b. Detto $\widetilde{f_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il prolungamento di $f_n$ continuo nell'origine, stabilire se la successione $\widetilde{f_n}$ converge uniformemente su $[-1, 1]$.

c. Stabilire per quali $n \geq 1$, si ha che $f_n$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

d. Stabilire se $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

**Soluzione.**
a. Il limite puntuale quasi ovunque (in ogni punto $x$ con $|x| \neq 1$) è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}.$$

b. La successione $\widetilde{f_n}$ è una successione di funzioni continue, e pertanto non puó convergere uniformemente a $f$ visto che $f$ non è continua.

c. In un intorno dell'origine, tutte le funzioni $f_n$ sono integrabili in quanto restano limitate. In un intorno di $\pm\infty$, si ha

$$f_n(x) \sim \frac{1}{|x|^n}$$

e pertanto si ha $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow n \geq 2$.

d. Per ogni $n \geq 2$ e per q.o. $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$|f_n(x)| \leq g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & |x| < 1 \\ f_2(x) & |x| > 1\,, \end{cases}$$

Poiché $g \in L^1(\mathbb{R})$, grazie al teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,,$$

ovvero $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

**TEORIA (6 punti)**

i. Spiegare perché l'analogo dell'identitá di Plancherel $\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ non puó valere se si sostituisce $L^2(\mathbb{R})$ con $L^1(\mathbb{R})$.

   Perché in generale, data $u \in L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ (basta prendere la funzione $u$ uguale alla funzione caratteristica di un intervallo $[a, b]$).

ii. Fornire un esempio di una successione di funzioni che risulti limitata in $L^\infty(\mathbb{R})$ ma non ammetta limite in $L^\infty(\mathbb{R})$.

   Si puó prendere ad esempio $u_n = \chi_{[n,n+1]}$. Per ogni $n$, si ha $\|u_n\|_\infty = 1$, ma la successione non converge in in $L^\infty(\mathbb{R})$ poiché il suo limite puntuale è nullo, ma chiaramente $\|u_n\|_\infty \not\to 0$.

   (Oppure si puó anche prendere la successione $f_n$ dell'esercizio sopra).