Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Primo appello di Metodi Analitici (18-2-13) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Calcolare il seguente integrale nella variabile reale x:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\, e^{ix}}{x^4 - 1}\, \mathrm{d}x\,.$$

Soluzione.

Il valore principale è necessario perché vicino ai punti ± 1 la funzione $f(x) = x^2 e^{ix}/(x^4 - 1)$ non è modulo integrabile. Osservato ciò, applicando il lemma di decadimento e il lemma del polo semplice otteniamo che l'integrale assegnato equivale a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z + i\pi \left(\mathrm{Res}(f, -1) + \mathrm{Res}(f, +1)\right)\,,$$

dove $f(z) = z^2 e^{iz}/(z^4 - 1)$ e γ_R è il bordo della regione racchiusa dall'asse x e dalle semicirconferenze $C_R^+(0)$, $C_{1/R}^+(-1)$ e $C_{1/R}^+(1)$, percorso in senso antiorario. Il calcolo dei residui di f in $z = -1$, $z = 1$ e $z = i$ (quest'ultima è l'unica singolarità di f racchiusa da γ_R) dà come risultato per l'integrale assegnato il valore

$$-\frac{\pi}{2}\left(\sin 1 - e^{-1}\right)\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia $C[0,1]$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali sull'intervallo $[0,1]$, munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Si consideri l'operatore $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definito da

$$Tf = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) \quad \forall f \in C[0,1]\,.$$

(i) Dimostrare che T è lineare e continuo.

(ii) Calcolare la norma di T.

(iii) (*facoltativo*) Dimostrare che non esiste alcuna funzione $g \in C[0,1]$ che soddisfi $\dfrac{|Tg|}{\|g\|_\infty} = \|T\|$.

Soluzione.

(i) La linearità di T è una conseguenza della linearità dell'integrale e delle definizioni di somma tra due funzioni e prodotto tra una funzione e uno scalare. Per provarne la continuità basta osservare che

$$|Tf| \le 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + |f(0)| \le 3\,\|f\|_\infty\,. \tag{1}$$

(ii) La (1) indica che $\|T\|$ è minore o uguale a 3: mostriamo che tale norma è in realtà proprio *uguale* a 3. A tale scopo, consideriamo la seguente successione:

$$f_n(x) = 1 - 2\,(1-x)^n\,.$$

Per costruzione $\|f_n\|_\infty = 1$, mentre con un calcolo diretto ricaviamo

$$Tf_n = 3 - \frac{4}{n+1}\,,$$

da cui

$$\|T\| = \sup_{f\in C[0,1]:\ \|f\|_\infty=1} |Tf| \ge \sup_n |Tf_n| = 3\,,$$

che assieme alla (1) implica $\|T\| = 3$.

(iii) Supponiamo per assurdo che esiste una funzione $g \in C[0,1]$ che soddisfi $\dfrac{|Tg|}{\|g\|_\infty} = \|T\|$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $\|g\| = 1$ (a meno di normalizzare g) e che $g(0) \le 0$ (a meno di cambiare g di segno). Siccome g è continua, esiste $0 < \delta < 1/2$ tale che

$$g(x) \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0,\delta]\,;$$

essendo $|g(x)| \le 1$ per ogni $x \in [0,1]$, abbiamo:

$$|Tg| = \left|2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - g(0)\right| \le \left|2\int_0^\delta g(x)\,\mathrm{d}x - g(0)\right| + 2\int_\delta^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x \le \delta + 1 + 2(1-\delta) = 3 - \delta < 3\,,$$

il che contraddice $|Tg| = 3$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel in uno spazio di Hilbert.

(ii) Fornire un esempio esplicito di uno spazio di Hilbert H, di un sistema ortonormale $\{u_n\} \subset H$ e di un elemento dello spazio $u \in H$ tali che:

(a) la cardinalità del sistema è finita e la disuguaglianza di Bessel vale come uguaglianza;

(b) la cardinalità del sistema è finita e la disuguaglianza di Bessel vale come disuguaglianza stretta;

(c) la cardinalità del sistema è infinita e la disuguaglianza di Bessel vale come uguaglianza;

(d) la cardinalità del sistema è infinita e la disuguaglianza di Bessel vale come disuguaglianza stretta.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) (a) $H = \mathbb{R}^N$; $u_n = e_n$, $n = 1, \dots, N$; $u = e_1 + \cdots + e_N$;

(b) $H = \mathbb{R}^N$; $u_n = e_n$, $n = 1, \dots, N-1$; $u = e_1 + \cdots + e_N$;

(c) $H = \ell^2$; $u_n = e_n$, $n \in \mathbb{N}$; $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e_n$;

(d) $H = \ell^2$; $u_n = e_n$, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$; $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e_n$.