Trasformata di Fourier

Def. Sia $u = u(x) \in L^1(\mathbb{R})$. La sua TRASFORMATA DI FOURIER è la funzione definita per $\xi \in \mathbb{R}$ da:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_x} u(x) e^{-i\xi x} \, dx \quad , \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Commenti.

- la dipendenza da ξ appare in $e^{-i\xi x}$ $\Longrightarrow$ $\hat{u}(\xi)$ è un integrale dip. dal parametro
- formalmente c'è analogia con i coeff di Fourier
$$\hat{u}_K = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) e^{-i\xi_K x} \, dx \qquad K \in \mathbb{Z}$$
- la def di $\hat{u}(\xi)$ è "ben posta" grazie all'ipotesi $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$|\hat{u}(\xi)| \underset{\uparrow}{\leq} \int_{\mathbb{R}_x} |u(x)| \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} \, dx = \int_{\mathbb{R}_x} |u(x)| \, dx < +\infty.$$

- $$e^{-i\xi x} = \cos(-\xi x) + i\sin(-\xi x) = \cos(\xi x) - i\sin(\xi x)$$

$\Rightarrow$ $\hat{u}(\xi)$ è a valori in $\mathbb{C}$ $\quad (\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$

$$\hat{u}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x)\cos(\xi x)\,dx}_{\mathrm{Re}\,\hat{u}} - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x)\sin(\xi x)\,dx}_{\mathrm{Im}\,\hat{u}}$$

- Generalizzazioni: si può partire da

$\to$ $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\to$ $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (u \in L^1(\mathbb{R}^n))$

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_x} u(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\to$ $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

NON SI TRASFORMANO FUNZIONI DEFINITE SU SOTTOINSIEMI PROPRI DI $\mathbb{R}/\mathbb{R}^n$.

- Varianti in letteratura:

$$e^{-i\xi x} \rightsquigarrow e^{i\xi x}, \quad e^{i2\pi\xi x}$$

- La TRASFORMATA $\mathcal{F}$ DI FOURIER

è l'operatore che manda u in $\hat{u}$

$$\mathcal{F}: \quad u \longrightarrow \hat{u}$$

$$u = u(x) \qquad \hat{u} = \hat{u}(\xi)$$

Oss.: $\mathcal{F}$ è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha u + \beta v)(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} \, dx + \beta \int_{\mathbb{R}} v(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

Trasformate notevoli

1) $u(x) = \chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i\,\frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

$$(a,b) = (-1,1) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi}$$

(In generale $\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R})$).

2) $u(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

(In qs. caso $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$)

3) $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$

(Oss: $u(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{\hat{u}}(x) = 2\pi e^{-|x|}$)

Teorema di Riemann-Lebesgue

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{u}$ ha le seguenti proprietà:

1) $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\left(\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lineare continuo con } \|\mathcal{F}\| \leq 1\right)$

2) $\hat{u}$ è continua

3) $\hat{u}$ è "infinitesima all'infinito"

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0.$$

Dim. 1) Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ vale:

$$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ passo all'ess-sup al variare di ξ

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$M = 1$

2) Facciamo vedere $\hat{u}(\xi)$ è continua in ξ fissato in $\mathbb{R}$,

ovvero $\xi_n \to \xi \Rightarrow \hat{u}(\xi_n) \to \hat{u}(\xi)$

$$\hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x}\, dx$$

$$? \downarrow$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

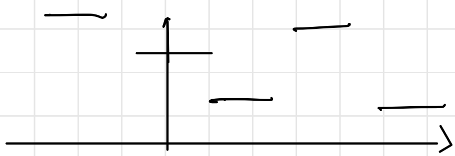
$$f_n(x) = u(x) e^{-i\xi_n x} \longrightarrow u(x) e^{-i\xi x} = f(x)$$

ok per conv. dominata, perché

$$|f_n(x)| = |u(x)|\,|\underbrace{e^{-i\xi_n x}}_{=1}| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

3) VERO se $u = \chi_{(a,b)}(x)$

VERO se u è "a scalino", $u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{I_i}$



$$\Downarrow$$

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{N} c_i \widehat{\chi_{I_i}}$$

VERO $\forall u \in L^1(\mathbb{R})$: $\exists\, \varphi_n$ "a scalino" $\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$

Sappiamo che $\mathcal{F}: L^1 \longrightarrow L^\infty$ op. continuo.

$$\varphi_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u \implies \hat{\varphi}_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \hat{u}$$

So che che $\hat{\varphi}_n$ sono "infinitesime all'infinito"

$\Rightarrow$ anche $\hat{u}$ ha la stessa proprietà. $\blacksquare$

Proprietà algebriche

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x-a) \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = e^{-i\xi a}\,\hat{u}(\xi)$

- $v(x) = e^{iax}\,u(x) \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - a)$

Es. $u(x)\cos(ax) = u(x)\left[\dfrac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right] \xrightarrow{\mathcal{F}}$

$= \dfrac{1}{2}\left[\hat{u}(\xi-a) + \hat{u}(\xi+a)\right]$

- $v(x) = u\left(\dfrac{x}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$

$\hat{v}(\xi) = |a|\,\hat{u}(a\xi)$

(In particolare $a = -1 \Rightarrow$

$\begin{cases} u \text{ pari} \Rightarrow \hat{u} \text{ pari (reale)} \\ u \text{ dispari} \Rightarrow \hat{u} \text{ dispari (puramente immaginaria)} \end{cases}$

Es. Calcolare $\mathcal{F}$ di: $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{1+(x+3)^2}$, $\dfrac{1}{4+x^2}$

Proprietà differenziali

Proposizione 1 Sia $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap A.C.(\mathbb{R})$
($\Rightarrow$ u derivabile q.o. su $\mathbb{R}$, con $u' \in L^1(\mathbb{R})$). Allora

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi\, \hat{u}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ip. della prop

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \underset{R.L.}{\Longrightarrow} \lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{u'}(\xi) = 0$$

ovvero $\displaystyle \lim_{\xi \to \pm\infty} \xi\, \hat{u}(\xi) = 0$ ovvero $\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \xi\, \hat{u}(\xi) = \lim_{\xi \to \pm\infty} \frac{\hat{u}(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

Iterando: $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$, $u' \in AC(\mathbb{R})$

$$\widehat{u''}(\xi) = (i\xi)^2\, \hat{u}(\xi) = -\xi^2\, \hat{u}(\xi)$$

e $\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$

<u>Morale</u>: maggior regolarità di u $\rightsquigarrow$ maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di $\hat{u}$

Dim

$$\widehat{u'}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\, e^{-i\xi x}\, dx =$$

$$= \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{L} \underbrace{u'(x)}_{f}\, \underbrace{e^{-i\xi x}}_{G}\, dx$$

$$= \lim_{L \to +\infty} \cancel{u(x)\, e^{-i\xi x} \Big|_{-L}^{L}} \;\underset{-i\xi}{-}\; \int_{-L}^{L} u(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= i\xi \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x}\, dx = i\xi\, \hat{u}(\xi).$$

$$u(L)\, e^{i\xi L} \longrightarrow 0 \quad \text{per } L \to +\infty.$$

(infatti per $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$, $\underset{L \to +\infty}{u(L) \longrightarrow 0}$

$$u(L) = u(0) + \int_0^L u'(t)\, dt$$

$$= u(0) + \int_0^{+\infty} \underbrace{u'(t) \cdot \chi_{(0,L)}(t)}_{f_L(t)}\, dt \longrightarrow$$

$$u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t)\, dt \quad)$$

Proposizione 2 Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $xu \in L^1(\mathbb{R})$

Allora:

$$(\hat{u})'(\xi) = -i\,\widehat{xu}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare:

siccome la trasformata di xu è continua (per RL) $\Rightarrow (\hat{u})'$ continua, cioè $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R})$.

Iterando:

- $u \in L^1(\mathbb{R})$: $xu \in L^1(\mathbb{R})$, $x^2 u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in C^2(\mathbb{R})$
- $u \in L^1(\mathbb{R})$: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x \to \pm\infty}}{u \sim} \dfrac{M}{x^\alpha}$ con $\alpha > K \Rightarrow$

$$x^{K-1} u(x) \sim \frac{M}{x^{\alpha - K + 1}} \quad \alpha - K + 1 > 1 \quad \Rightarrow x^{K-1} u \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \hat{u} \in C^{K-1}(\mathbb{R}).$$

Morale: maggior rapidità di decrescenza a 0 per u

$\rightsquigarrow$ maggior regolarità di $\hat{u}$.

Dim. (cenno)

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

posso derivare sotto $\int$:

$$(\hat{u}(\xi))' = \int_{\mathbb{R}} (u(x) e^{-i\xi x})' \, dx$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}} x u(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

$$\widehat{x u(x)}(\xi).$$

$\blacksquare$