Analisi Matematica B+C [60038] - Analisi Matematica II [78624], esame del 18/07/2011

Nome e cognome .... **Matricola** ....

1. (a) Si scriva la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine il cui integrale generale è dato da

$$y(t) = c\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{3}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $c = 1/3$. Dunque la soluzione è

$$y(t) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{3t} - 1).$$

(b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = t^2 y.$$

Osserviamo che $y \equiv 0$ è soluzione costante dell'equazione. Per $y \neq 0$ integrando l'equazione troviamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int t^2 dt,$$

da cui si ricava l'integrale generale

$$y(t) = \pm \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{t^3/3} = k\mathrm{e}^{t^3/3} \qquad k \in \mathbf{R}.$$

(c) Si dica per quali valori $a \in \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 y, \\ y(0) = a \end{cases}$$

soddisfa alla condizione $y(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Poichè l'equazione è a variabili separabile e $y \equiv 0$ è soluzione costante dell'equazione, la soluzione del problema di Cauchy risulta essere positiva per ogni $a > 0$.

2. (a) Si calcolino, se esistono,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \arctan\frac{y}{x}$$

Il primo limite non esiste infatti restringendosi lungo le rette $y = x$ e $y = 2x$ si ottengonodue risultati differenti. Il secondo limite, poichè la funzione è ivi continua vale $\arctan 0 = 0$.

(b) Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 y - 8xy + 1.$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 4y(x^3 - 2) = 0 \\ f_y = x(x^3 - 4) = 0 \end{cases}$$

che sono i punti $(0,0), (2,0)$. Poichè $f_{xx} = 12x^2 y$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = f_{yx} = 4x^3 - 8$, calcolando il determinante della matrice Hessiana nei punti critici si ottiene i punti critici sono sella.

(c) Si determini il dominio D della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x} - 1}{3y}$$

e si tracci il grafico della curva di livello $f(x,y) = \frac{1}{3}$.

$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \neq 0\}$. Il grafico della curva di livello $f(x,y) = 1/3$ equivale al grafico noto della funzione $y = \sqrt{x} - 1$.

3. (a) Si calcoli l'area A della regione

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \, : \, |x-2| \leq y \leq \frac{1}{2}x\}.$$

$$A = \int_\Omega dxdy = \int_{4/3}^{2} dx \int_{2-x}^{x/2} dy + \int_{2}^{4} dx \int_{x-2}^{x/2}$$

$$= \int_{4/3}^{2} (\frac{1}{2}x - 2 + x)dx + \int_{2}^{4} (\frac{1}{2}x - x + 2)dx = ...$$

(b) Verificare che il campo vettoriale $F(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ è conservativo e trovarne un potenziale.

Poichè il campo è definito su tutto $\mathbf{R}^3$ ed è irrotazionale, il campo risulta essere conservativo. Si verifica che la funzione $U(x,y,z) = xyz$ è un suo potenziale.

(c) Calcolare direttamente oppure facendo uso del Teorema di Stokes il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (z-1)y\mathbf{i} + (z+1)x\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$$

attraverso la semisfera che ha centro nell'origine, raggio 1 e si trova nel semispazio $z \leq 0$ orientata in modo tale che la componente n_z della normale sia negativa.

Sia γ^- la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso orario nel piano $z = 0$. Applicando il Teorema di Stokes abbiamo

$$\iint_S \mathrm{rot}\, F \cdot n d\sigma = \oint_{\gamma^-} F \cdot dr = \oint_{\gamma^-} -ydx + xdy = -2\pi.$$

4. (a) Si determini l'intervallo di convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

(*) Si derivi la serie termine a termine e se ne calcoli la somma. (**) Si calcoli la somma della serie di partenza.

Poichè il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ si ha che il raggio di convergenza è 1. Dunque la serie converge in $(0, 2)$. Controllando gli estremi si ottiene in $x = 2$ la serie armonica a segno alternato, che è convergente, e in $x = 0$ la serie armonica, che è divergente. Quindi la serie di potenze converge puntualmente in $(0, 2]$ e uniformemente in $[\varepsilon, 2]$, $\varepsilon > 0$. (*) Derivando la serie termine a termine si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = \frac{1}{x}.$$

(**) Integrando la serie ottenuta si ottiene la serie di partenza la cui somma è data dall'integrale di $1/x$ e dunque ha somma $\log x$.

(b) Si studi la convergenza della serie di Fourier associata alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \cos x & -\pi \leq x < 0, \\ 1 + \cos x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

ed estesa per periodicità su tutto $\mathbf{R}$.

La funzione è periodica e regolare a tratti ma non è continua, dunque la sua serie di Fourier converge puntualmente alla funzione

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq k\pi \\ 1 & x = 2k\pi \\ -1 & x = 2(k+1)x \end{cases}$$

(c) Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier associata alla funzione del punto precedente [suggerimento: si calcolino preliminarmente i coefficienti di Fourier della funzione $g(x) = f(x) - \cos x$].

La funzione $g(x)$ risulta essere definita

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0, \\ 1 & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

il cui (noto) sviluppo di Fourier è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x,$$

da cui si ottiene che lo sviluppo di Fourier di f è dato da

$$\cos x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x,$$