Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2010/2011
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Modulo di Metodi Analitici (26-9-11) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. ANALISI COMPLESSA

Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} \ .$$

Soluzione. Posto $z = e^{i\theta}$, si ha $dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta$, e

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \ , \qquad \sin^2\theta = -\frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}) \ .$$

Pertanto, detto I l'integrale assegnato, si ha

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{dz}{[1 - \frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})]}\, dz = \int_{|z|=1} -\frac{4}{i} \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1}\, dz \ .$$

All'interno della circonferenza unitaria, la funzione $f(z) = -\frac{4}{i}\frac{z}{z^4-6z^2+1}$ ha due singolarità isolate, nei punti

$$z_\pm = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \ .$$

Si tratta di due poli semplici, con

$$\mathrm{Res}(f, z_\pm) = \frac{\sqrt{2}}{4i} \ .$$

Pertanto per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi i \frac{2\sqrt{2}}{4i} = \pi\sqrt{2} \ .$$

II. ANALISI FUNZIONALE

(i) Dare la definizione di spazio di Banach.
(ii) Stabilire per quali valori dei parametri reali α e β la seguente funzione f appartiene a $L^2(0,1/2) \cap L^\infty(0,1/2)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}|\log x|^{\alpha+\beta}} \ .$$

Soluzione. Poiché $(0,1/2)$ ha misura finita, si ha $L^\infty(0,1/2) \subset L^2(0,1/2)$; pertanto la domanda richiesta equivale a determinare per quali valori di α, β si ha $f \in L^\infty(0,1/2)$. Poiché nell'intervallo $(0,1/2)$ il denominatore di f si annulla solo per $x \to 0^+$ (ed essendo la presenza del logaritmo ininfluente ai fini della limitatezza), la condizione necessaria e sufficiente per avere $f \in L^\infty(0,1/2)$ è $\alpha - 1 \leq 0$, ovvero $\alpha \leq 1$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Sia $f(x)$ l'estensione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ della funzione $|\sin x|$ su $[-\pi, \pi]$. Calcolare la serie di Fourier di f relativamente al sistema ortonormale completo dei polinomi trigonometrici in $L^2_{(-\pi,\pi)}(\mathbb{R})$.

Soluzione. Poiché f è pari, $b_n = 0\ \forall n$. Si ha invece:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\big[\sin((n+1)x) + \sin((-n+1)x)\big]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\big]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\Big] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{1}{\pi}\big(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1}\big) = -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{se } n \text{ pari}\ . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pertanto,

$$
Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}\ .
$$