Equazioni differenziali 1

Definizioni e terminologia

Si dice *equazione differenziale (ordinaria) di ordine n* una relazione del tipo

$$F\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)\big) = 0\,,$$

dove F è una assegnata funzione, definita in un aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, mentre $y(t)$ è la funzione incognita che compare nell'equazione con le sue derivate fino all'ordine n incluso.

Si dice *soluzione o integrale* dell'equazione differenziale una funzione $\varphi(t)$, definita e derivabile n volte in un intervallo $I \subseteq R$, tale che

$$F\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)\big) = 0\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Con il termine *integrale generale* si intende una famiglia di funzioni, dipendente da uno o più parametri, che rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.

Si chiamano *equazioni lineari* (di ordine n) le equazioni della forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

Se $b(t) = 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*.

Infine, se un'equazione differenziale è scritta nella forma

$$y^n(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)\,, \qquad \text{con} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\,,$$

si dice che è in *forma normale*.
Un'equazione lineare si può scrivere in forma normale se $a_n(t) \neq 0$.

Osservazione sulle notazioni:
in diversi contesti le equazioni possono essere scritte con altre notazioni, sia per la funzione incognita che per la variabile indipendente:

$$x(t)\,, \qquad y(x)\,, \qquad u(x)\,, \quad ...$$

Esempi.

Data una funzione di due variabili $f(t, y)$, l'equazione

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)\,,$$

è del *primo* ordine in *forma normale*.

L'equazione della caduta libera dei gravi (nel vuoto)

$$y''(t) = -g$$

è *lineare* del *secondo* ordine (in forma normale).
L'*integrale generale* dell'equazione si scrive

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + c_1\, t + c_2\,,$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

L'equazione

$$y(t) = t\, y'(t) + y'(t)^2\,,$$

è del primo ordine *non* in forma normale.

Problema di Cauchy (o dei valori iniziali).

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} = f\big(t, y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)\,,$$

che in un punto dato t_0 soddisfa le n condizioni aggiuntive (condizioni iniziali)

$$y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = y_1\,, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}\,,$$

dove y_0, y_1,...,y_{n-1} sono costanti assegnate.

Per soluzione di un problema di Cauchy si intende una funzione *definita in un intervallo* I che contiene t_0 e che soddisfa l'equazione in tutto I e le condizioni iniziali in t_0.

Esempio.

Un problema di Cauchy per l'equazione $y'' = -g$ è: trovare la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = H$, $y'(0) = 0$ (caduta da un'altezza H, da fermo).

Soluzione: $\varphi(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H$.

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del primo ordine della forma

$$y' = a(t)b(y)\,,$$

dove $a(t)$ e $b(y)$ sono funzioni *continue* in intervalli di $\mathbb{R}$.

Una prima osservazione:
se un numero $\bar{y}$ risolve $b(\bar{y}) = 0$, allora la *funzione* costante $y(t) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione.
Infatti, poiché la derivata di una costante è zero, inserendo $y(t) = \bar{y}$ nell'equazione si ottiene $0 = 0$.

L'insieme delle altre soluzioni (non costanti) è dato *in forma implicita* dalla formula

$$\int \frac{1}{b(y)}dy = \int a(t)\,dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, se $y(t)$ ($t \in I$) è soluzione e $b(y(t)) \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Prendendo l'integrale indefinito (cioè le primitive):

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))}dt = \int a(t)\,dt + c\,.$$

Nel primo integrale facciamo il cambio di variabile $y = y(t)$, $dy = y'(t)dt$ e otteniamo la formula

$$\int \frac{1}{b(y)}dy = \int a(t)\,dt + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Suggerimento per ricordare la formula:
scrivere l'equazione con la notazione di Leibniz

$$\frac{dy}{dt} = a(t)b(y)\,,$$

e trattare la derivata come un quoziente:

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt\,.$$

Integrando (a sinistra in y, a destra in t) si ricava la formula.

Esempi.

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = 2t\,(y-1)^2\,.$$

Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali:

$$y(0) = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \qquad y(0) = 2\,.$$

Soluzione:

L'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 1$, che ovviamente soddisfa anche la condizione aggiuntiva $y(0) = 1$.

Le altre soluzioni sono definite (in forma implicita) dall'equazione

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = \int 2t\,dt + c\,.$$

Integrando si ottiene

$$-\frac{1}{y-1} = t^2 + c\,.$$

Infine, risolvendo rispetto a y:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + c}\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\varphi(t)$ che passa per l'origine $(0, 0)$ si ottiene risolvendo

$$0 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = 1\,.$$

Abbiamo allora

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 + 1}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $\psi(t)$ che passa per il punto $(0, 2)$ corrisponde al valore di c che risolve l'equazione

$$2 = 1 - \frac{1}{c}\,, \qquad \Rightarrow \qquad c = -1\,.$$

Quindi

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{t^2 - 1}\,, \qquad t \in (-1, 1)\,.$$

Tempo di svuotamento di un serbatoio.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -k\sqrt{y(t)}, \\ y(0) = H, \end{cases}$$

dove k, H, sono costanti positive. Calcolare in quale istante t la soluzione si annulla.

Soluzione:

Osserviamo subito che l'equazione ha la *soluzione costante* $y(t) = 0$, che però non soddisfa la condizione iniziale; le altre soluzioni sono date dalla formula

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\int k\, dt + c\,,$$

da cui la forma implicita

$$2\sqrt{y} = -kt + c\,.$$

La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 2\sqrt{H}$.

Risolvendo per y si ricava

$$y = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2}t\right)^2 .$$

Il tempo di svuotamento è quindi $\bar{t} = 2\sqrt{H}/k$.

Osservazione.

Nel primo esempio, si verifica facilmente che per ogni punto (t_0, y_0) del piano esiste *un'unica soluzione* dell'equazione (definita almeno in un intervallo che contiene t_0) passante per quel punto.

Nel secondo caso, l'unicità non vale per i punti $(t_0, 0)$ sull'asse t, dove le soluzioni non costanti 'incontrano' la soluzione $y = 0$.

Dunque, la soluzione di un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\, b(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

non è sempre univocamente determinata.
Si può dimostrare che *se* $b(y_0) \neq 0$, esiste un'unica soluzione definita in un intorno di t_0.

Equazioni lineari del primo ordine

La generica equazione lineare del primo ordine ha la forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,.$$

Se $a_1(t) \neq 0$, possiamo dividere per questo coefficiente e scrivere l'equazione in *forma normale*

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)\,.$$

Assumiamo $a(t)$ e $f(t)$ *continue* in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Si può ricavare una formula per l'integrale generale di queste equazioni:

Sia $A(t) = \int a(t)\,dt$ una qualsiasi primitiva di $a(t)$; moltiplicando l'equazione per $e^{A(t)}$, abbiamo

$$e^{A(t)}y'(t) + a(t)\,e^{A(t)}\,y(t) = e^{A(t)}f(t)\,.$$

A sinistra si riconosce la derivata di un prodotto:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{A(t)}y(t)\right] = e^{A(t)}f(t)\,.$$

Integrando si ottiene

$$e^{A(t)}y(t) = \int e^{A(t)} f(t)\,dt + c\,,$$

e infine

$$y(t) = c\,e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} f(t)\,dt\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$

dove $A(t) = \int a(t)\,dt$.

Osservazione. L'arbitrarietà nella scelta delle primitive nei due integrali indefiniti della formula equivale a una ridefinizione dell'*unica* costante arbitraria c.

Esempi.

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' - \frac{2}{t}\,y = t^2\,.$$

Abbiamo $a(t) = -2/t$, $f(t) = t^2$. Dunque $A(t) = -2\ln|t| = -\ln t^2$. Inserendo nella formula troviamo

$$y(t) = c\,t^2 + t^2 \int \frac{1}{t^2}\,t^2\,dt = c\,t^2 + t^3\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Circuito resistenza-induttanza.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)\,,$$

dove $I = I(t)$ intensità di corrente, $E(t)$ f.e.m., R resistenza, L induttanza.
Poniamo: $y(t) = I(t)$, $k = R/L$, $f(t) = E(t)/L$. L'equazione diventa

$$y'(t) + k\,y(t) = f(t)\,.$$

Integrale generale:

$$y(t) = c\,e^{-kt} + e^{-kt}\int e^{kt} f(t)\,dt$$

Esercizio

Calcolare l'integrale generale nei casi :

$$1)\ f(t) = \frac{1}{L}E_0\ \ (\,\text{costante}\,)\,; \qquad\qquad 2)\ f(t) = \frac{E_0}{L}\cos(\omega t)\,.$$

Problema di Cauchy per le equazioni lineari.

Data un'equazione lineare del primo ordine con coefficienti continui in un intervallo I, sia $t_0 \in I$ e sia $y_0 \in \mathbb{R}$.
Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione, definita in I, che verifica la condizione $y(t_0) = y_0$.

Dimostrazione.
Facciamo vedere che nella formula dell'integrale generale si può sempre scegliere il valore di c in modo da soddisfare il problema di Cauchy.
Infatti, se nella formula scegliamo come primitive le *funzioni integrali*

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,, \qquad \int e^{A(t)} f(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

queste ultime sono nulle in t_0; quindi, la soluzione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ è

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s)\, ds\,,$$

Discussione del problema di Cauchy.

Dalla risoluzione dei diversi problemi di Cauchy per le precedenti equazioni, evidenziamo le seguenti proprietà delle soluzioni ottenute :

- Per le equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, una soluzione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ esiste se t_0 e y_0 appartengono ad intervalli dove $a(t)$ e $b(y)$ sono continue. L' unicità non è garantita in queste sole ipotesi. In ogni caso, l'intervallo di definizione di una soluzione dipende dai dati iniziali e in generale non è determinato *a priori*.
- Per le equazioni lineari $y' + a(t)y = f(t)$, abbiamo esistenza e unicità della soluzione passante per (t_0, y_0) se t_0 appartiene all'intervallo I dove $a(t)$ e $f(t)$ sono continue, e *per ogni* $y_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre, la soluzione è sempre definita su tutto I.

Queste differenti proprietà si spiegano alla luce di importanti risultati della teoria delle equazioni differenziali, che prendono il nome di *teoremi di esistenza e unicità*, locale e globale, delle soluzioni del problema di Cauchy.

Grazie a questi teoremi si possono ricavare informazioni *qualitative* sulle soluzioni di un'equazione a prescindere dall'esistenza di metodi espliciti di risoluzione.

Teorema (Esistenza e unicità locale).

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in D e sia $(t_0, y_0) \in D$.
Esiste allora un intorno I di t_0 tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette una soluzione φ definita in I. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo comune di definizione. $\diamond$

A volte si usa la notazione $\varphi = \varphi(t; t_0, y_0)$ per evidenziare la dipendenza della soluzione dai dati iniziali.

Non dimostriamo il teorema, ma faremo numerose osservazioni sulle sue ipotesi e sulle proprietà delle soluzioni.

Sulle ipotesi del teorema:

i) La sola continuità della f garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema di Cauchy (Peano), ma non l'unicità.

Questo spiega, nel caso delle equazioni a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$, la mancanza di unicità delle soluzioni del problema di Cauchy in certi punti dove $b(y)$ è continua ma non derivabile.

ii) L'ipotesi di continuità della derivata parziale $\partial_y f$ si può indebolire.

Basta richiedere che f soddisfi la proprietà seguente:
per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$ esiste una costante L_K tale che

$$\big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq L_k|y_1 - y_2| \qquad \text{per ogni} \quad (t, y_1),\ (t, y_2)\ \in K\,.$$

In questo caso si dice che f soddisfa (localmente) la *condizione di Lipschitz* rispetto ad y, uniformemente rispetto a t.

Se $\partial_y f$ esiste continua, si dimostra che f soddisfa la condizione di Lipschitz; ovviamente il viceversa non vale in generale.

Regolarità delle soluzioni.

Una soluzione φ del problema di Cauchy è di classe $\mathcal{C}^1(I)$.
Infatti, φ è derivabile (e dunque continua) e soddisfa $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in I$.
Ma la funzione $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ è continua per il teorema di continuità delle funzioni composte. Dunque, anche $\varphi'(t)$ è continua in I.

Iterando l'argomento, si dimostra che $f \in \mathcal{C}^k(D) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.

Intervallo di esistenza delle soluzioni.

Dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale si ricava che la soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$ è definita almeno in un intervallo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, dove $\delta > 0$ dipende da f e dal punto (t_0, y_0); il grafico di $\varphi(t)$, $t \in I$, è contenuto in D.

Si può allora *prolungare* la soluzione a destra e a sinistra di questo intervallo considerando i problemi di Cauchy rispettivamente con i dati $(t_0 + \delta, \varphi(t_0 + \delta))$ e $(t_0 - \delta, \varphi(t_0 - \delta))$.
Infatti, sempre per il teorema di esistenza e unicità locale, ciascun problema ha un'*unica soluzione*, definite rispettivamente in un intorno I_1 di $t_0 + \delta$ e in un intorno I_2 di $t_0 - \delta$.
Per l'unicità, tali soluzioni coincidono con $\varphi(t; t_0, y_0)$ rispettivamente in $I \cap I_1$ e in $I \cap I_2$ e quindi realizzano l'estensione della soluzione ad un intervallo più ampio.

Iterando il procedimento nelle due direzioni, si arriva a definire un *intervallo massimale di esistenza* $(t_{\min}, t_{\max})$ della soluzione $\varphi(t; t_0, y_0)$, dove:

$$t_{\max} = \sup\left\{t \;\text{ t.c. }\; \varphi \text{ è definita in } [t_0, t]\right\};$$
$$t_{\min} = \inf\left\{t \;\text{ t.c. }\; \varphi \text{ è definita in } [t, t_0]\right\}.$$

Si dimostra che per $t \to t_{\max}^-$ e per $t \to t_{\min}^+$ il grafico di φ esce *definitivamente* da ogni insieme chiuso e limitato contenuto D.

Esempio.

Consideriamo l'equazione (logistica) $y' = y(1 - y)$, con la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dove $0 < \alpha < 1$.
Osserviamo che per questa equazione le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale valgono in tutto $\mathbb{R}^2$.
Possiamo allora affermare che la soluzione $\varphi_\alpha(t)$ è *limitata*; infatti, il suo grafico non può intersecare le due rette $y = 0$ e $y = 1$, che sono pure soluzioni (costanti), per cui sarà sempre $0 < \varphi_\alpha(t) < 1$.
Segue allora che $t_{\max} = +\infty$ e $t_{\min} = -\infty$, cioè φ_α *è definita su tutto* $\mathbb{R}$.
Inoltre φ_α è strettamente crescente ($\varphi_\alpha'(t) > 0$) e si dimostra che ha le due rette come asintoti orizzontali.

Verificare le previsioni qualitative risolvendo esplicitamente l'equazione.

Teorema (Esistenza e unicità globale).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}$ e supponiamo che f e $\partial_y f$ siano continue in $\bar{S}$.
Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \qquad \forall\ (t, y) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ con valori iniziali $(t_0, y_0) \in S$ è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazioni.

L'ipotesi sulla crescita di f nella striscia $\bar{S}$ è verificata in particolare se:
i) f è limitata in $\bar{S}$, oppure ii) $\partial_y f$ è limitata in $\bar{S}$.

Nel caso delle equazioni lineari $y' = -a(t)y + b(t)$, le ipotesi del teorema valgono se i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue in $[a, b]$.
Infatti, in tal caso abbiamo

$$| - a(t)y + b(t)| \leq |b(t)| + |a(t)|\,|y| \leq h + k\,|y|\,,$$

dove $h = \max_{[a,b]} |b(t)|$, $k = \max_{[a,b]} |a(t)|$.
Vengono così giustificati gli intervalli di esistenza delle soluzioni di queste equazioni.

Equazioni differenziali 2

Equazioni lineari del secondo ordine

Sono le equazioni della forma

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)\,,$$

dove $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) e $g(t)$ sono funzioni continue in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $g(t) = 0$, l'equazione si dice *omogenea*. In questo caso, si usa denotare con $z(t)$ la funzione incognita.

Se $a_2(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, l'equazione si può scrivere in forma normale,

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)\,.$$

Se a e b sono costanti l'equazione si dice a coefficienti costanti.

Per le equazioni del secondo ordine il problema di Cauchy consiste nell'assegnare ad un dato istante t_0 le condizioni iniziali

$$y(t_0) = y_0\,, \qquad y'(t_0) = y_1\,.$$

(Nel caso delle equazioni della dinamica, posizione e velocità iniziali).

Esempi.

L'equazione delle *oscillazioni forzate*

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = f(t)\,, \qquad \delta \geq 0\,, \quad \omega \geq 0\,,$$

modellizza le vibrazioni di un sistema meccanico o la corrente elettrica in un circuito RLC.

Le equazioni della forma

$$t^2 y'' + a\,t\,y' + b\,y = g(t)\,, \qquad a\,,\ b \quad \text{costanti}\,,$$

si scrivono in forma normale dividendo per t^2 nei due intervalli $t > 0$ e $t < 0$.
Se $g = 0$, l'equazione omogenea

$$t^2 z'' + a\,t\,z' + b\,z = 0\,,$$

prende il nome di *Equazione di Eulero*.

Le soluzioni dell'equazione omogenea (Hermite)

$$z'' - 2t\,z' + 2n\,z = 0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

definiscono le autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico.

Sulle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni lineari del secondo ordine abbiamo:

Teorema.

Siano $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, funzione continue in un intervallo I.
Per ogni $t_0 \in I$ e per ogni y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, il problema

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in $\mathcal{C}^2(I)$.

Osservazioni.

Si tratta di un risultato di carattere *globale* (analogo a quello per le equazioni lineari del primo ordine).

Il teorema seguirà da un risultato generale di esistenza e unicità (globale) per i *sistemi* di equazioni differenziali.

Struttura dell'integrale generale

Denotiamo con $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ l'*operatore differenziale* definito da

$$y(t) \mapsto Ly(t) := y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)\,.$$

La generica equazione del secondo ordine in forma normale si scrive allora $Ly(t) = f(t)$.

L'osservazione fondamentale è che L è un *operatore lineare* tra gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^2(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$. Da questa proprietà si ricava:

<u>Teorema</u>

i) L'insieme delle soluzioni dell'equazione *omogenea* $Lz(t) = 0$ è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$) ;

ii) Data una soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione *completa* ($L\bar{y}(t) = f(t)$) l'integrale generale si ottiene sommando a $\bar{y}(t)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Dimostrazione.
Se $z_1(t)$, $z_2(t)$ soddisfano $Lz_1(t) = Lz_2(t) = 0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$L\big[c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)\big] = c_1 Lz_1(t) + c_2 Lz_2(t) = 0\,.$$

Quindi, qualunque *combinazione lineare* di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora soluzione dell'equazione. Questo dimostra i).

Se ora $\bar{y}$ risolve $L\bar{y}(t) = f(t)$ e $z(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea,

$$L\big[\bar{y}(t) + z(t)\big] = L\bar{y}(t) + Lz(t) = f(t) + 0 = f(t)\,.$$

Dunque, aggiungendo a una soluzione dell'equazione completa una soluzione dell'equazione omogenea si ottiene ancora una soluzione dell'equazione completa.
Viceversa, se $y(t) \neq \bar{y}(t)$ è *un'altra soluzione dell'equazione completa*,

$$L\big[y(t) - \bar{y}(t)\big] = Ly(t) - L\bar{y}(t) = f(t) - f(t) = 0\,.$$

Si conclude che *tutte* le soluzioni dell'equazione completa si possono scrivere nella forma $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$, dove $z(t)$ risolve $Lz(t) = 0$. $\diamond$

Teorema.

Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.

Dimostrazione.

Mostreremo che si possono sempre trovare due soluzioni *linearmente indipendenti* dell'equazione $Lz = 0$ tali che ogni altra soluzione è *combinazione lineare* di queste due.

Fissato $t_0 \in I$, siano $z_1(t)$, $z_2(t)$, le soluzioni in I rispettivamente dei problemi di Cauchy

$$Lz_1(t) = 0\,, \quad z_1(t_0) = 1\,,\ z_1'(t_0) = 0\,;$$

$$Lz_2(t) = 0\,, \quad z_2(t_0) = 0\,,\ z_2'(t_0) = 1\,.$$

L'esistenza di tali soluzioni è garantita dal teorema di esistenza e unicità. Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, avremmo $z_2(t) = \lambda z_1(t)$ per ogni $t \in I$; ma $z_1(t_0) = 1$ e $z_2(t_0) = 0$, per cui deve essere $\lambda = 0$; ma allora si avrebbe $z_2(t) = 0$ per ogni $t \in I$, impossibile.

Sia ora $z(t) \in \mathcal{C}^2(I)$ una soluzione dell'equazione omogenea e poniamo $c_1 := z(t_0)$, $c_2 := z'(t_0)$.

Definiamo la funzione

$$\bar{z}(t) := c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Dalla definizione delle soluzioni z_1 e z_2, si vede facilmente che $\bar{z}$ risolve il problema di Cauchy

$$L\bar{z}(t) = 0\,, \qquad \bar{z}(t_0) = c_1\,,\ \bar{z}'(t_0) = c_2\,,$$

cioè *con i medesimi valori iniziali di* $z(t)$.

Ancora per il teorema di esistenza e unicità si conclude che $\bar{z}(t) = z(t)$, ovvero che ogni soluzione di $Lz = 0$ è combinazione lineare di z_1 e z_2. $\diamond$

Dai precedenti teoremi si deduce che per scrivere l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine $Ly = f$ occorre:

a) trovare due soluzioni linearmente indipendenti z_1, z_2 dell'equazione omogenea $Lz = 0$;
b) procurarsi una (qualsiasi) soluzione $\bar{y}$ dell'equazione completa.

L'integrale generale sarà allora $y(t) = \bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$, con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Esempio.

Si consideri l'equazione

$$y''(t) + \frac{1}{t}\, y'(t) - \frac{1}{t^2}\, y(t) = \frac{1}{t^2}\,.$$

L'equazione omogenea associata $z''(t) + \frac{1}{t}\, z'(t) - \frac{1}{t^2}\, z(t) = 0$ ha le due soluzioni indipendenti $z_1(t) = t\,,\, z_2(t) = 1/t,$ come si verifica facilmente.
Inoltre la funzione costante $\bar{y} = -1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1\, t + c_2\, \frac{1}{t} - 1.$$

Equazioni a coefficienti costanti

Nel caso delle equazioni *omogenee* a coefficienti costanti

$$z''(t) + a\,z'(t) + b\,z(t) = 0\,, \qquad a,\ b\ \in \mathbb{R}\,,$$

è sempre possibile trovare l'integrale generale.

Cerchiamo una soluzione nella forma $z(t) = e^{\lambda\,t}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendo nell'equazione si trova:

$$e^{\lambda\,t}\big(\lambda^2 + a\,\lambda + b\big) = 0\,.$$

Dunque l'esponenziale è una soluzione (definita in $\mathbb{R}$) se λ è una radice dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0\,.$$

Si distinguono tre casi:

1. $a^2 > 4b \Rightarrow$ due radici reali e distinte λ_1, λ_2; $\big[(-a \pm \sqrt{\Delta})/2\ \big]$
2. $a^2 = 4b \Rightarrow$ una radice reale doppia $\lambda = -a/2$;
3. $a^2 < 4b \Rightarrow$ due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$; $\big[(-a \pm i\sqrt{-\Delta})/2\ \big]$

Nel primo caso abbiamo $z_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $z_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, linearmente indipendenti, per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}\,.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono $z_1(t) = e^{\lambda t}$, $z_2(t) = t\, e^{\lambda t}$, e quindi

$$z(t) = c_1\, e^{\lambda t} + c_2\, t\, e^{\lambda t}$$

è l'integrale generale.

Nel terzo caso, le due soluzioni $e^{(\alpha+i\beta)t}$, $e^{(\alpha-i\beta)t}$, sono indipendenti, ma assumono valori complessi.
Ricordando le formule

$$e^{(\alpha\pm i\beta)t} = e^{\alpha t}\big(cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)\big)$$

e la *linearità dell'equazione*, possiamo definire le soluzioni *reali*:

$$z_1(t) = \tfrac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,$$
$$z_2(t) = \tfrac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,,$$

da cui l'integrale generale

$$z(t) = e^{\alpha t}\big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\big)\,.$$

Esempio

Scriviamo l'integrale generale dell'equazione delle oscillazioni smorzate (libere)

$$z''(t) + 2\delta z'(t) + \omega^2 z(t) = 0\,,$$

nei tre casi:

1. $\delta > \omega$,
$$z(t) = c_1\, e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2})\,t} + c_2\, e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})\,t}\,;$$
2. $\delta = \omega$,
$$z(t) = c_1\, e^{-\delta\,t} + c_2\,t\,e^{-\delta\,t}\,;$$
3. $\delta < \omega$,
$$z(t) = e^{-\delta\,t}\Big[c_1\,\cos\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t\big) + c_2\,\sin\big(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t\big)\Big]\,.$$

Verificare che nell'ultimo caso l'integrale generale si può scrivere

$$z(t) = A\,e^{-\delta\,t}\,\cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t + \phi)\,,$$

con A e ϕ costanti arbitrarie (oscillazioni smorzate di frequenza $\sqrt{\omega^2-\delta^2}/2\pi$).

Risoluzione dell'equazione completa

In accordo con la teoria svolta, per ottenere l'integrale generale dell'equazione completa

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)\,,$$

è ora sufficiente trovarne una soluzione particolare.

Se il termine $f(t)$ ha una forma speciale (per esempio un polinomio o un esponenziale) si può cercare una soluzione di forma simile (*metodo di somiglianza*).
Schematicamente (assumendo $b \neq 0$) si procede nel modo seguente:

Se $f(t) = p_r(t)$, polinomio di grado r, si cerca $\bar{y}(t) = q_r(t)$, polinomio dello stesso grado, con coefficienti da determinarsi.

Se $f(t) = f_0\, e^{\lambda t}$, si cerca $\bar{y}(t)$ nella forma

i) $A\, e^{\lambda t}$, se λ non è radice dell'equazione caratteristica;

ii) $A\, t\, e^{\lambda t}$, se λ è radice semplice dell'equazione caratteristica;

iii) $A\, t^2\, e^{\lambda t}$, se λ è radice doppia dell'equazione caratteristica,

con A coefficiente da determinarsi.

Esempi

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 2y = t^2 \, .$$

L'equazione omogenea associata $z'' + 2z' + 2z = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$; le radici sono $\lambda = -1 \pm i$.
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) \, .$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $\bar{y}(t) = At^2 + Bt + C$. Sostituendo $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, nell'equazione si trova

$$2A + 2(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2 \, .$$

Riordinando i termini:

$$(2A - 1)t^2 + (4A + 2B)t + 2(A + B + C) = 0 \, .$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$.
L'integrale generale è allora

$$y(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos t + c_2 \sin t\big) + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} \, .$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{\alpha t}.$$

L'equazione omogenea associata $z'' - 2z' + 2z = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, con la radice doppia $\lambda = 1$.
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t.$$

Se $\alpha \neq 1$, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $\bar{y}(t) = Ae^{\alpha t}$. Sostituendo nell'equazione si trova

$$A(\alpha^2 - 2\alpha + 1)\, e^{\alpha t} = e^{\alpha t}.$$

L'equazione è soddisfatta per ogni t se e solo se $A = 1/(\alpha - 1)^2$.
Se $\alpha = 1$ (radice doppia dell'equazione caratteristica) la soluzione va cercata nella forma $\bar{y}(t) = At^2 e^t$.

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$Ae^t\left[(t^2 + 4t + 2) - 2(t^2 + 2t) + t^2\right] = e^t$$

da cui, semplificando, $A = 1/2$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive allora:

Se $\alpha \neq 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{(\alpha - 1)^2}\, e^{\alpha\, t}\,.$$

Se $\alpha = 1$,

$$y(t) = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t + \frac{1}{2}\, t^2\, e^t\,. \quad \diamond$$

Nella ricerca di una soluzione dell'equazione completa, può essere utile il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, valido per le equazioni lineari:

Se $y_1(t)$, $y_2(t)$, risolvono rispettivamente le equazioni

$$y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1 = f_1(t), \qquad y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2 = f_2(t),$$

allora $\bar{y}(t) := k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ (k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$) soddisfa

$$\bar{y}'' + a(t)\bar{y}' + b(t)\bar{y} = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\,.$$

<u>Esercizio</u>

Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + y = t + e^{-t}$.

Equazioni di Eulero

Le equazioni omogenee

$$t^2 z'' + a\,t\,z' + b\,z = 0\,, \qquad a\,,\, b\ \in \mathbb{R}\,,$$

sono tra i pochi esempi di equazioni del secondo ordine a coefficienti *variabili* che si risolvono con metodi elementari.

Se $t > 0$, cerchiamo due soluzioni indipendenti nella forma $z(t) = t^\gamma$, con γ da determinarsi.
Calcolando $z'(t) = \gamma t^{\gamma-1}$, $z''(t) = \gamma(\gamma-1)t^{\gamma-2}$ e inserendo nell'equazione si ottiene

$$t^\gamma\big(\gamma(\gamma-1) + a\gamma + b\big) = 0\,, \qquad \forall\, t > 0\,,$$

da cui l'*equazione caratteristica*:

$$\gamma^2 + (a-1)\gamma + b = 0\,.$$

Ancora si distinguono i tre casi:

due radici reali e distinte γ_1, γ_2, una radice reale doppia γ, due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Nel primo caso abbiamo $z_1(t) = t^{\gamma_1}$, $z_2(t) = t^{\gamma_2}$, per cui l'integrale generale è

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma_1} + c_2\, t^{\gamma_2}\,.$$

Nel secondo caso, due soluzioni indipendenti sono $z_1(t) = t^{\gamma}$, $z_2(t) = t^{\gamma} \ln t$, e quindi

$$z(t) = c_1\, t^{\gamma} + c_2\, t^{\gamma} \ln t$$

è l'integrale generale.

Nel terzo caso, si può ancora passare dalla coppia di soluzioni complesse $t^{(\alpha \pm i\beta)}$, alle soluzioni reali

$$z_1(t) = t^{\alpha} \cos(\beta \ln t)\,,\; z_2(t) = t^{\alpha} \sin(\beta \ln t)\,,$$

da cui l'integrale generale

$$z(t) = t^{\alpha}\big(c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \sin(\beta \ln t)\big)\,.$$

Esercizio

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$t^2 z'' + 3t\, z' + z = 0\,,$$

nell'intervallo $t > 0$.

Metodo di variazione delle costanti

Per le equazioni lineari, esiste un metodo generale per trovare una particolare soluzione dell'equazione *completa* se si conoscono due soluzioni indipendenti dell'equazione *omogenea*: il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

Ci limitiamo a descriverlo su un esempio di interesse fisico: le oscillazioni forzate in assenza di attrito. L'equazione del moto si scrive

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t)\,,$$

dove assumiamo $f(t)$ continua in $\mathbb{R}$, ma di forma qualsiasi.

L'equazione omogenea $z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$ (oscillazioni libere) ha equazione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, da cui le radici $\lambda = \pm i\omega$.
Le due soluzioni reali indipendenti sono: $z_1(t) = \cos(\omega t)$, $z_2(t) = \sin(\omega t)$.

Cercheremo una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$\bar{y}(t) = c_1(t)\,\cos(\omega t) + c_2(t)\,\sin(\omega t)\,,$$

dove ora $c_1(t)$, $c_2(t)$ sono *funzioni* incognite, che vanno determinate in modo che $\bar{y}(t)$ risolva l'equazione.

Poiché le incognite sono due, potremo anche imporre una condizione aggiuntiva: richiediamo che nell'espressione della derivata prima

$$\bar{y}'(t) = c_1'(t)\cos(\omega t) + c_2'(t)\sin(\omega t) - \omega\, c_1(t)\sin(\omega t) + \omega\, c_2(t)\cos(\omega t)\,,$$

sia

$$c_1'(t)\cos(\omega t) + c_2'(t)\sin(\omega t) = 0\,.$$

La derivata seconda si scrive allora:

$$\bar{y}''(t) = -\omega c_1'(t)\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\cos(\omega t) - \omega^2\big(c_1(t)\cos(\omega t) + c_2(t)\sin(\omega t)\big)\,.$$

Osserviamo che l'ultimo termine tra parentesi è esattamente $\bar{y}(t)$.
Inserendo nell'equazione, troviamo allora la condizione:

$$-\omega c_1'(t)\sin(\omega t) + \omega c_2'(t)\cos(\omega t) = f(t)\,.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} \cos(\omega t)\, c_1'(t) + \sin(\omega t)\, c_2'(t) = 0 \\ -\omega\sin(\omega t)\, c_1'(t) + \omega\cos(\omega t)\, c_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione poiché per ogni t il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a $\omega > 0$. Con semplici calcoli si ottiene

$$c_1'(t) = -\frac{1}{\omega} f(t)\sin(\omega t)\,; \qquad c_2'(t) = \frac{1}{\omega} f(t)\cos(\omega t)\,.$$

Possiamo ancora richiedere che $c_1(t)$, $c_2(t)$ si annullino in un punto assegnato, per esempio l'origine. Avremo allora

$$c_1(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin(\omega\tau)\,d\tau\,; \qquad c_2(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau\,.$$

La soluzione $\bar{y}(t) = c_1(t)\cos(\omega t) + c_2(t)\sin(\omega t)$ si scrive allora

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\Big[-\sin(\omega\tau)\cos(\omega t) + \cos(\omega\tau)\sin(\omega t)\Big]\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau\,.$$

Esercizio
Calcolare $\bar{y}(t)$ nel caso $f(t) = f_0\cos(\omega t)$ (risonanza).

Equazioni differenziali 3

Sistemi di equazioni differenziali

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ e denotiamo con $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ una funzione incognita della variabile reale t a valori in $\mathbb{R}^n$. L'equazione (in $\mathbb{R}^n$)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)$$

si dice *sistema di equazioni differenziali del primo ordine* in forma normale.

Una funzione $\underline{\Phi} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è soluzione (curva integrale) del sistema se

$$\underline{\Phi}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \underline{\Phi}(t)\big)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Se $\mathbf{f}$ non dipende da t, i sistemi del tipo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}\big(\mathbf{y}\big)$$

si dicono *sistemi autonomi*.

Nei casi

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,,$$

con $A(t)$ matrice nxn e $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ assegnate, il sistema si dice *lineare*.

Il *problema di Cauchy per i sistemi* consiste nel determinare la soluzione che passa per un punto dato $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.

Esempio ($n = 2$)

Il generico sistema di due equazioni differenziali nelle due funzioni incognite $y_1(t)$, $y_2(t)$, si scrive:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \qquad (t, y_1, y_2) \in D \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

Il problema di Cauchy è: dati $(t_0, y_1^0, y_2^0) \in D$, determinare $y_1(t)$, $y_2(t)$, tali che $y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t) = y_2^0$.

Un'equazione differenziale di ordine n si può sempre ridurre ad un sistema equivalente di n equazioni del primo ordine. Per esempio, data l'equazione

$$y'' = f(t, y, y')\,,$$

poniamo $y_1 = y$, $y_2 = y'$.
Abbiamo allora il sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = f(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

In questo caso, il problema di Cauchy equivale ad assegnare in t_0 i valori di y e di y'.

Teorema (Esistenza e unicità locale per i sistemi)

Sia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto. Supponiamo che $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\partial_{y_j}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $j = 1, 2, ..., n$, siano continue in D e sia $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.
Esiste allora un intorno I di t_0 tale che il problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \end{cases}$$

ammette una soluzione $\underline{\Phi}$ definita in I. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con $\underline{\Phi}$ nell'intervallo comune di definizione. $\diamond$

Teorema (Esistenza e unicità globale per i sistemi).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\mathbf{f}$ verifichi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale in $\bar{S}$.
Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq h + k|\mathbf{y}| \qquad \forall\ (t, \mathbf{y}) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ con valori iniziali $(t_0, \mathbf{y}^0) \in S$ è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazioni.

i) Il teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni del problema di Cauchy per un'*equazione del secondo ordine*

$$y'' = f(t, y, y') \qquad y(t_0) = y_0\,, \;\; y'(t_0) = y_1\,,$$

segue dal teorema per i sistemi considerando il sistema equivalente di due equazioni. Analoghe considerazioni valgono per le equazioni di ordine n.

ii) Si dimostra che le ipotesi del teorema di esistenza globale sono verificate dai *sistemi lineari con coefficienti continui*.

Per esempio, il (generico) sistema lineare di due equazioni:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

con $a_{ij}(t)$, $b_i(t) \in \mathcal{C}^0([a,b])$ per ogni $i,j = 1,2$, ha soluzioni definite in tutto $[a,b]$.

Ricavare dalle due osservazioni il teorema di esistenza (globale) per le equazioni lineari del secondo ordine.

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Sono gli esempi più semplici di *sistemi autonomi*. Se $n = 2$, si utilizza di solito la notazione $\big(x(t), y(t)\big)$ per la funzione incognita.
Il generico sistema lineare omogeneo in due dimensioni si scrive allora

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

con a, b, c, d, numeri reali.

Le soluzioni di questi sistemi sono definite su tutto $\mathbb{R}$ (per il teorema di esistenza globale), e definiscono curve regolari con sostegno (traiettoria) nel piano (x, y) (piano delle fasi).

Esiste sempre sempre la soluzione costante $\big(x(t), y(t)\big) = (0, 0)$, che è l'unica soluzione con dati iniziali nulli. La sua traiettoria coincide con l'origine che prende il nome di *punto di equilibrio* del sistema.

(Oltre ai punti di equilibrio, le sole traiettorie possibili per le soluzioni di un sistema autonomo sono curve semplici o curve chiuse).

Anche in questo caso, dalla linearità e dal teorema di esistenza e unicità segue che *l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione* 2.

Per trovare l'integrale generale si può usare *metodo di eliminazione*:
Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = c\,x + d\,y, \end{cases}$$

si deriva la prima equazione

$$x'' = a\,x' + b\,y'\,,$$

e si sostituisce y' dato dalla seconda:

$$x'' = a\,x' + b(c\,x + d\,y) = a\,x' + bc\,x + bd\,y\,.$$

Eliminando y usando ancora la prima, si ottiene

$$x'' = a\,x' + bc\,x + d\,x' - ad\,x$$

ovvero

$$x'' - (a+d)\,x' + (ad - bc)\,x = 0\,.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad - bc) = 0\,,$$

si ottengono le soluzioni indipendenti e poi l'integrale generale per $x(t)$; infine, si determina la componente $y(t)$ dall'equazione $y = (x' - a\,x)/b$.

Esempi.
Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

Soluzione:

$$x'' = x' + 2y' = x' - 2x + 8y$$

Sostituendo $y = (x' - x)/2$,

$$x'' - 5x' + 6x = 0\,.$$

Le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Abbiamo quindi

$$x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}\,, \qquad c_1\,,\, c_2\ \in \mathbb{R}\,,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{1}{2} c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}. \quad \diamond$$

<u>Esercizio</u>

Dimostrare che l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

si scrive

$$x(t) = e^{-t}\big(c_1\ \cos t + c_2\ \sin t\big)\,,$$

$$y(t) = e^{-t}\big(-c_1\ \sin t + c_2\ \cos t\big)\,.$$

Disegnare le traiettorie nel piano delle fasi evidenziando il verso di percorrenza.

Osservazione

L'equazione caratteristica che si ricava dal metodo di eliminazione è l'equazione agli autovalori per la matrice A dei coefficienti del sistema:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0\,.$$

Infatti, se λ è un autovalore di A e $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ è un corrisponente autovettore, la funzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda\, t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

è una soluzione dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \lambda\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\,.$$

L'osservazione è alla base di un metodo generale per risolvere i sistemi (di ordine n qualsiasi) a coefficienti costanti.

Esempio

Torniamo al sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Come abbiamo visto, l'equazione agli autovalori è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, ed ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
Gli autovettori si trovano risolvendo

$$(A - 2\,I)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - 3\,I)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dunque, $h_1 = 2h_2$ e $k_1 = k_2$; nel primo caso gli autovettori sono diretti come $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, nel secondo caso come $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'integrale generale è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stabilità dell'origine

Si vede facilmente che se $\det A \neq 0$, l'origine $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio (soluzione costante) del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si dice che l'origine è un punto di equilibrio:

- *asintoticamente stabile* se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0,
- *stabile* se gli autovalori di A hanno parte reale $= 0$,
- *instabile* negli altri casi.

Sia $\Phi(t)$ una soluzione passante per un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ del piano.
Se l'origine è asintoticamente stabile, si ha *sempre* $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = (0,0)$;
se l'origine è stabile, ma non asintoticamente, il punto $\Phi(t)$ percorre una traiettoria (orbita) chiusa che circonda l'origine.

In generale, si fa riferimento a queste proprietà per definire il *concetto di stabilità* di un punto di equilibrio di un sistema autonomo qualsiasi.

Esempi

L'origine è instabile per il sistema di p. 8 ed è asintoticamente stabile per quello di p. 9.

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$$

ha autovalori $\pm 2i$, perciò l'origine è stabile. Le traiettorie sono ellissi che girano intorno all'origine.

Esercizio

Discutere la stabilità dell'origine per i sistemi

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - 2y \end{cases}$$