Analisi matematica 2		5 maggio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy\, e^{-x^2-y^2}\,.$$

a) Spiegare perché f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
b) Trovare tutti i punti critici di f e classificarli.
c) Discutere gli eventuali estremi globali.
d) Determinare i punti critici vincolati di f ristretta al vincolo $xy + 1 = 0$.

Discutere la differenziabilità della funzione $|f|$.

2.

a)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = y + \frac{1}{y}\,.$$

i) Scrivere l'integrale generale dell'equazione.

ii) Determinare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$, specificandone gli intervalli massimali di definizione.

iii) Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.

b)

i) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione *lineare del secondo ordine* in forma normale.

ii) Scrivere un sistema equivalente all'equazione lineare omogenea

$$z'' - 2z' + z = 0$$

e studiarne la stabilità dell'origine.

iii) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = 1 - \cos t\,.$$

3. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, si consideri la curva di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{t}\,\mathbf{j} + c\,t\,\mathbf{k}\,; \qquad t \in (0, +\infty)\,.$$

a) Verificare che la curva è semplice e regolare.

b) Calcolare la curvatura e trovare la *componente normale* dell'accelerazione $\mathbf{r}''(t)$.

c) Dire se la curva è piana (giustificando la risposta).

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ perchè le sue derivate parziali

$$\partial_x f(x,y) = y(1-2x^2)\, e^{-x^2-y^2}\,, \qquad \partial_y f(x,y) = x(1-2y^2)\, e^{-x^2-y^2}$$

esistono e sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ (condizione sufficiente per la differenziabilità).

b) Punti critici: il gradiente si annulla nei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

dunque nei 5 punti $(0,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$,$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Calcolando le derivate seconde

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2xy(2x^2-3)\, e^{-x^2-y^2}\,, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 2xy(2y^2-3)\, e^{-x^2-y^2}\,,$$

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = (2x^2-1)(2y^2-1)\, e^{-x^2-y^2}\,,$$

e la matrice hessiana nei punti trovati, si conclude che l'origine $(0,0)$ è un colle, mentre i punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono punti di *massimo* $\big($con $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2e}\big)$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono punti di *minimo* $\big($con $f(\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}\big)$. Data la simmetria della funzione, era sufficiente studiarne l'andamento nel primo quadrante.

c) Usando le coordinate polari, abbiamo

$$\big|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\big| = \rho^2\, |\cos\theta\sin\theta|\, e^{-\rho^2} \le \rho^2\, e^{-\rho^2}\,.$$

Poiché $\rho^2\, e^{-\rho^2} \to 0$ per $\rho \to +\infty$, si conclude che, i punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono *massimi globali*, mentre i punti $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono *minimi globali.*

d) Si può usare il metodo dei moltiplicatori, cercando i punti critici della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy\, e^{-x^2-y^2} - \lambda(xy+1)\,,$$

oppure esplicitare il vincolo come unione delle due curve $y = -1/x$, $x \in (0,+\infty)$ e $y = -1/x$, $x \in (-\infty, 0)$ e studiare i punti critici della funzione

$$g(x) \equiv f(x, -1/x) = -e^{-x^2-1/x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Si ottengono i punti critici vincolati $(-1,1)$ e $(1,-1)$ e si verifica facilmente che sono punti di minimo (di f ristretta al vincolo).

Differenziabilità di $|f|$: la funzione è differenziabile nell'aperto

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\big\}$$

perché le derivate parziali esistono continue in D (condizione sufficiente).
La funzione *non* è differenziabile nei punti $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ e $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ (cioè sugli assi *esclusa* l'origine) perché in quei punti non esistono tutte le derivate parziali (condizione necessaria). Infatti, si verifica che la restrizione $x \mapsto |f(x, y_0)| = |x||y_0|e^{-x^2-y_0^2}$ *non* è derivabile in $x = 0$, e analogamente la restrizione $y \mapsto |f(x_0, y)| = |x_0||y|e^{-x_0^2-y^2}$ *non* è derivabile in $y = 0$.
Nel punto $(0, 0)$ occorre applicare la definizione. Osserviamo che $|f| = 0$ su entrambi gli assi, inclusa l'origine. Allora esistono le derivate parziali in $(0, 0)$ e valgono

$$|f|_x(0, 0) = |f|_y(0, 0) = 0$$

La differenziabilità di $|f|$ in $(0, 0)$ equivale quindi a verificare che $|f(h, k)| = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ per $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$.
Calcoliamo allora

$$\frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|hk|e^{-h^2-k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Ponendo $h = \rho \cos \theta$, $k = \rho \sin \theta$ si ottiene

$$\frac{|hk|e^{-h^2-k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \rho |\cos \theta \sin \theta|\, e^{-\rho^2} \leq \rho,$$

per ogni (ρ, θ). Dunque il primo membro tende a zero per $\rho \to 0$ e $|f|$ è differenziabile nell'origine.

2a)

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. Non esistono soluzioni costanti, per cui l'integrale generale (in forma implicita) si trova applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \int dt + C,$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = t + C\,,$$

ovvero,

$$y^2+1 = e^{2(t+C)}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

ii) Esplicitando y dalla precedente equazione si ottengono *due funzioni* per ogni valore di C,

$$y = \pm\sqrt{e^{2(t+C)}-1},$$

ciascuna definita e di classe $\mathcal{C}^1$ per $t > -C$ (si osservi che le soluzioni differiscono per traslazioni lungo l'asse t, essendo l'equazione autonoma).
Imponendo le condizioni assegnate, troviamo per i due problemi di Cauchy le soluzioni:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2e^{2t}-1}; \qquad \varphi_2(t) = -\sqrt{2e^{2t}-1},$$

definite entrambe nell'intervallo massimale $(-\frac{1}{2}\ln 2, +\infty)$.

2b)

ii) Ponendo $z = x$, $z' = y$, abbiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = 1 \neq 0$, l'origine è l'unico punto di equilibrio. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda-2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$, dunque l'origine è instabile.

iii) L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 t\, e^t\,.$$

Usando il metodo di similitudine e il pricipio di sovrapposizione, cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{y}(t) = A + B\sin t + C\cos t$. Sostituendo nell'equazione completa, troviamo $A = 1$, $B = 1/2$, $C = 0$. L'integrale generale si scrive:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2\, te^t + 1 + \frac{1}{2}\sin t\,.$$

3.

a) La curva è semplice perché per ogni c il vettore $\mathbf{r}(t)$ ha (almeno) una componente che è una funzione *iniettiva* su $(0, +\infty)$.
La curva è regolare perché per ogni c :

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \qquad \forall\, t > 0\,.$$

b) Per calcolare la curvatura conviene usare la formula

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Calcoliamo dunque il *vettore accelerazione*:

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{2}{t^3}\,\mathbf{j}\,,$$

e

$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = \frac{2}{t^3}\big(- c\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\big)\,.$$

Abbiamo allora

$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = \frac{2}{t^3}\,\sqrt{c^2+1}; \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 1/t^4 + c^2} = \frac{\sqrt{(c^2+1)\,t^4 + 1}}{t^2}\,.$$

Dunque:

$$k(t) = \frac{2\,t^3\sqrt{c^2+1}}{[(c^2+1)\,t^4+1])^{3/2}}$$

La componente normale dell'accelerazione si ricava dalla formula

$$\mathbf{r}''(t) = a(t)\,\mathbf{T} + k(t)\,|\mathbf{r}'(t)|^2\,\mathbf{N}\,,$$

dove $\mathbf{T}$ è il versore tangente e $\mathbf{N}$ la normale principale. Abbiamo allora

$$k(t)\,|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{2\sqrt{c^2+1}}{t\sqrt{(c^2+1)\,t^4+1}} = \frac{2}{t\sqrt{t^4 + (c^2+1)^{-1}}}$$

c) La curva è piana perché eliminando t tra la prima e la terza equazione parametrica si ottiene $z = cx$, che dunque è l'equazione del piano in cui giace il sostegno della curva. Si può dedurre che la curva è piana anche osservando che

$$\frac{\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|} = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\big(- c\,\mathbf{i} + \mathbf{k}\big)$$

è costante.