Analisi matematica 2		3 luglio 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Disegnare nel piano xy il rettangolo D di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1/2,1/2)$, $(1/2,-1/2)$.

i) Spiegare perché la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y+1}$ è integrabile su D.

ii) Calcolare il *valore medio* di f su D. (Si consiglia un opportuno cambio di variabili.)

b) Ricavare la formula per il volume del solido che si ottiene intersecando la sfera

$$\{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

con il cilindro (illimitato) $\{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq a^2\}$, dove $0 < a < R$.

2. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la porzione del piano di equazione $z = 2x - 2y$ che si proietta sul semicerchio $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ del piano xy.

a) Calcolare l'area di Σ.

b) Enunciare il teorema del rotore e verificarne la validità calcolando

$$\int\!\!\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{e} \quad \oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove Σ è orientata in modo che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$, $\partial^+\Sigma$ è il bordo di Σ orientato positivamente e

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(z - \frac{y}{2}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{2} + z\right) \mathbf{j} - (x+y)\, \mathbf{k}\,.$$

Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo ? È solenoidale ? (Giustificare le risposte).

3.

a) Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3...$ funzioni della variabile reale x. Dire cosa si intende per *convergenza totale* in $[a,b]$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

b) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$$

Detta $f(x)$ la somma della serie, calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$ giustificando i passaggi.

c) Sia g la funzione $2\pi-$periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \le x \le 0, \\ x & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

i) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier associata a g.

ii) Calcolare i coefficienti di Fourier di g fino all'ordine $n = 3$ e scrivere la corrispondente *somma di Fourier* $S_3(x)$. Quale proprietà di minimo è soddisfatta da $S_3(x)$?

SOLUZIONI

1.

a)

$$D = \big\{(x,y)\,|\,0 \le x+y \le 1,\ -1 \le x-y \le 1\big\}$$

La funzione f è continua e limitata (il denominatore $x+y+1$ non si annulla su D) su un rettangolo; quindi è integrabile.

Per calcolare l'integrale di f su D, utilizziamo il cambio di coordinate :

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$$

Detta T la trasformazione definita dalle precedenti equazioni, abbiamo $|\det J_T| = 1/2$. Dunque:

$$\int\int_D \frac{x}{x+y+1}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{u+v}{2(u+1)}\,\frac{1}{2}\,dv\,du =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{u}{(u+1)}\,dv\,du + \frac{1}{4}\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{v}{(u+1)}\,dv\,du$$

L'ultimo integrale si annulla per simmetria, per cui rimane da calcolare

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{u}{(u+1)}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{(u+1)}\Big)\,du = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

Questo è anche il valore medio perché $|D| = |T(D)|/2 = 1$.

b) La regione occupata dal solido è

$$E = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \le a^2,\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

Dunque:

$$|E| = \int\int\int_E dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2\le a^2\}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy$$

$$= 2\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\pi\Big(-\frac{1}{3}\,(R^2-\rho^2)^{3/2}\Big)\Big|_0^a = \frac{4\pi}{3}\Big(R^3 - (R^2-a^2)^{3/2}\Big).$$

2.

a) L'elemento di area sul piano è

$$dS = \sqrt{1+4+4}\, dx\, dy = 3\, dx\, dy$$

L'area è allora

$$|\Sigma| = \int\int_D 3\, dx\, dy = 3\, |D| = \frac{3}{2}\pi\,.$$

b) *Flusso del rotore:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = -2\, \mathbf{i} + 2\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

La normale moltiplicata per l'elemento di superfice è

$$\mathbf{n}\, dS = \big(-2\, \mathbf{i} + 2\, \mathbf{j} + \mathbf{k} \big)\, dx\, dy$$

Dunque:

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D 9\, dx\, dy = \frac{9}{2}\pi\,.$$

Calcolo della circolazione: $\partial^+\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove

$$\gamma_1 \,:\, \mathbf{r}(\theta) = \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\theta\, \mathbf{j} + 2(\cos\theta - \sin\theta)\, \mathbf{k}, \qquad \theta \in [0, \pi]\,.$$

$$\gamma_2 \,:\, \mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{k}, \qquad t \in [-1, 1]\,.$$

Le due curve sono regolari con vettori tangenti

$$\mathbf{r}'(\theta) = -\sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j} - 2(\sin\theta + \cos\theta)\, \mathbf{k} \qquad \text{lungo } \gamma_1,$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2\, \mathbf{k} \qquad \text{lungo } \gamma_2.$$

Dunque

$$\oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \int_0^\pi \Big[(2\cos\theta - \frac{5}{2}\sin\theta)(-\sin\theta) + (\frac{5}{2}\cos\theta - 2\sin\theta)\cos\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta)^2 \Big]\, d\theta$$

$$+ \int_{-1}^1 (2t - 2t)\, dt$$

L'ultimo integrale è nullo; svolgendo i calcoli nel primo si ottiene

$$\int_0^\pi \Big[\frac{9}{2} \Big]\, d\theta = \frac{9}{2}\pi\,.$$

Essendo $\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo (non vale la condizione necessaria).
La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_x \big(z - \frac{y}{2} \big) + \partial_y \big(\frac{x}{2} + z \big) + \partial_z \big(-x - y \big) = 0$$

Poiché la divergenza è nulla in tutto $\mathbb{R}^3$, il campo è solenoidale.

3.

b) La serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^{n+1}} \Big/ \frac{n+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1}{3}\,.$$

Dunque $R = 3$ e la serie converge (assolutamente) per $|x| < 3$. Agli estremi $x = 3$ e $x = -3$, abbiamo

$$\left|\frac{n+1}{3^n}(\pm 3)^n\right| = n+1$$

La serie non converge in questi punti perchè il termine generale non tende a zero. L'intervallo di convergenza è allora $(-3, 3)$.

Calcolo dell'integrale: l'intervallo chiuso $[0, 1]$ è contenuto nell'intervallo di convergenza. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione per serie e calcolare

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-1/3} = 3/2\,.$$

c) La funzione g è regolare a tratti. Per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, la serie converge a $g(x)$ dove g è continua, cioè per $x \neq (2k+1)\pi$ e converge a $\pi/2$ per $x = (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Calcolo dei coefficienti di Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \qquad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad n = 1, 2, ...$$

$$S_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)\,.$$