Funzioni di più variabili 4

March 22, 2021

Ricerca di massimi e minimi liberi

Come esempio di applicazione dei metodi descritti, risolviamo il problema della scatola di superficie minima.

Trovare il minimo di

$$f(x,y) = xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y} \quad \text{in} \quad D = \{(x,y) \,|\, x > 0\,,\ y > 0\,\}\,.$$

La funzione è regolare in tutto l'aperto, per cui possiamo cercare i punti critici e applicare il test delle derivate seconde. Calcoliamo il gradiente di f in un punto generico:

$$\nabla f(x,y) = (y - V/x^2)\,\mathbf{i} + (x - V/y^2)\,\mathbf{j}\,;$$

Cerchiamo quindi le soluzioni (in D) del *sistema*

$$\begin{cases} y - V/x^2 = 0 \\ x - V/y^2 = 0 \end{cases}$$

Dopo semplici passaggi algebrici si ottiene l'unica soluzione

$$x = y = \sqrt[3]{V}$$

Per classificare il punto critico calcoliamo:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2V/x^3\,; \quad \partial_{xy} f(x,y) = 1\,; \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2V/y^3\,.$$

Quindi:

$$H_f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Poiché $\det H_f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 3 > 0$ e $\partial_{xx} f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 2 > 0$, si tratta di un *punto di minimo*.

Si può dimostrare che il punto trovato è di minimo globale. Il *valore* minimo della funzione è $f(V^{1/3}, V^{1/3}) = 3V^{2/3}$.

Dunque, la soluzione del problema è il cubo ($x = y = z$) di lato $V^{1/3}$ e di superficie totale $S = 6V^{2/3}$.

Esercizi

Trovare i punti critici ed eventuali estremi (locali e globali) in $\mathbb{R}^2$ delle funzioni

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1\,;$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2(x+1)^3\,.$$

Lo stesso per la funzione

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + yz - x - z \qquad \text{in}\,\mathbb{R}^3$$

e per la funzione

$$h(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{in}\,\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\,.$$

Massimi e minimi con vincoli

Consideriamo il problema:

trovare i massimi e i minimi della funzione $\mathrm{h}(x, y) = xy$ nell'insieme $B = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Poiché h è continua e B è chiuso e limitato, i punti di estremo esistono per il teorema di Weierstrass.

Dividiamo il problema in due parti:

1) ricerca degli estremi liberi nei punti interni $\mathring{B}$ (il disco aperto);
2) studio della restrizione di h alla frontiera ∂B (la circonferenza).

1) $\nabla \mathrm{h}(x, y) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (0, 0)$ è l'unico punto critico in $\mathring{B}$.

Calcolando le derivate seconde e la matrice Hessiana si trova:

$h_{xx}(x,y) = h_{yy}(x,y) = 0$, $h_{xy}(x,y) = 1$, $\Rightarrow$ $\det H_h(0,0) = -1 < 0$.

Dunque l'origine è un colle e non ci sono estremi locali nel disco aperto.

2) Parametrizzando ∂B con

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

abbiamo

$$\mathrm{h}(\cos t, \sin t) = \cos t \, \sin t = \frac{1}{2}\sin(2t) \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Il massimo è raggiunto per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$, cioè nei punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \mathrm{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il minimo per $t = 3\pi/4$ e $t = 7\pi/4$, cioè in

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \mathrm{e} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In generale, si cercano gli estremi di una funzione di due variabili su un sottoinsieme del piano *definito da un'equazione* (*vincolo di uguaglianza*)

$$\mathrm{f}(x, y) = 0$$

per qualche funzione f assegnata. Nel caso precedente, la frontiera è definita da $\mathrm{f}(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Esiste un metodo per studiare il problema di ottimizzazione vincolata anche se non si 'risolve' esplicitamente l'equazione del vincolo.

Definizione (funzione implicita)

Una funzione $g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice definita implicitamente dall'equazione $\mathrm{f}(x, y) = 0$ se

$$\mathrm{f}\big(x, g(x)\big) = 0\,, \quad \text{per ogni } x \in I\,.$$

Il risultato che segue fornisce condizioni *sufficienti* per esistenza e unicità (locali) di una funzione implicita

Teorema della funzione implicita (Dini).

Sia $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Supponiamo che esista $(x_0, y_0) \in D$ tale che

$$\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \partial_y \mathrm{f}(x_0, y_0) \neq 0 \,.$$

Allora esiste un intorno I di x_0 e un'unica funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che $y_0 = g(x_0)$ e

$$\mathrm{f}\big(x, g(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in I \,.$$

Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(I)$ e

$$g'(x) = -\frac{\partial_x \mathrm{f}(x, g(x))}{\partial_y \mathrm{f}(x, g(x))} \quad \forall\, x \in I \,.$$

Osservazioni:

i) La formula per g' si può ricavare derivando l'identità $\mathrm{f}(x, g(x)) = 0$ e applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte;

ii) dalla formula si ottiene l'equazione della retta tangente al grafico di g in (x_0, y_0):

$$y = y_0 - \frac{\partial_x \mathrm{f}(x_0, y_0)}{\partial_y \mathrm{f}(x_0, y_0)}(x - x_0)\,,$$

iii) se l'ultima ipotesi del teorema si cambia con $\partial_x \mathrm{f}(x_0, y_0) \neq 0$, la tesi diventa:

esiste un intorno J di y_0 e un'unica funzione $h : J \to \mathbb{R}$ tale che $x_0 = h(y_0)$ e

$$\mathrm{f}\big(h(y), y\big) = 0 \quad \forall\, y \in J\,.$$

Inoltre $h \in \mathcal{C}^1(J)$ e

$$h'(y) = -\frac{\partial_y \mathrm{f}(h(y), y)}{\partial_x \mathrm{f}(h(y), y)} \quad \forall\, y \in J\,.$$

Esempio

L'equazione

$$\mathrm{f}(x, y) := e^{xy} + x - y + 1 = 0$$

è verificata nel punto $(0, 2)$. Inoltre

$$\partial_y \mathrm{f}\,(0, 2) = (xe^{xy} - 1)\Big|_{(0,2)} = -1 \neq 0\,.$$

Esiste allora $g(x)$, definita (e regolare) in un intorno I di $x = 0$, tale che

$$g(0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{f}(x, g(x)) = 0\,, \;\; \forall x \in I\,.$$

Nell'origine abbiamo: $\quad g'(0) \;=\; -\frac{\partial_x \mathrm{f}\,(0,2)}{\partial_y \mathrm{f}\,(0,2)} \;=\; -\frac{3}{-1} = 3,$

per cui in I vale

$$g(x) = 2 + 3x + o(x)$$

Le ipotesi del teorema di Dini sono verificate anche nel punto $(-2, 0)$:

$$\mathrm{f}\,(-2, 0) = 0\,; \quad \partial_y \mathrm{f}\,(-2, 0) = -3 \neq 0\,.$$

In questo caso :

$$g(-2) = 0, \;\; g'(-2) \;=\; -\tfrac{\partial_x \mathrm{f}\,(-2,0)}{\partial_y \mathrm{f}\,(-2,0)} \;=\; -\tfrac{1}{-3} \;=\; 1/3$$

e quindi

$$g(x) = \frac{1}{3}(x+2) + o(x+2)$$

in un intorno di $x = -2\,.$

Se in (x_0, y_0) vale $\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla \mathrm{f}(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, il teorema della funzione implicita garantisce che il vincolo $\mathrm{f}(x, y) = 0$ è *localmente* il grafico di una funzione di una variabile. Chiameremo *regolari* questi punti.

I punti (x_0, y_0) tali che

$$\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \mathrm{f}(x_0, y_0) = \mathbf{0},$$

si dicono *punti singolari* del vincolo (o dell'insieme di livello $\mathrm{f} = 0$).

Esempi

L' origine è un punto singolare dei vincoli

$$x^2 + y^2 = 0\,, \qquad x^2 - y^2 = 0\,, \qquad x^2 - y^3 = 0\,,$$

poiché in tutti e tre i casi $\mathrm{f}(0, 0) = 0$ e $\nabla \mathrm{f}(0, 0) = \mathbf{0}$.

Dagli esempi si vede che nell'intorno di un punto singolare *non sono garantite* esistenza, unicità e regolarità di una curva che rappresenti il vincolo.

Osservazione. Se (x_0, y_0) è un *punto critico* di una funzione di $f(x, y)$, esso è anche *punto singolare dell'insieme di livello* $\{(x, y) \,|\, f(x, y) = c\}$, dove $c = f(x_0, y_0)$.

Funzione implicita in più variabili

Consideriamo il caso di funzioni definite implicitamente dall'equazione $\mathrm{f}(x, y, z) = 0$.

Teorema (Dini).

Sia $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto. Supponiamo che esista $(x_0, y_0, z_0) \in D$ tale che

$$\mathrm{f}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \partial_z \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0) \neq 0\,.$$

Allora esiste un'unica funzione $g(x, y)$ definita in un intorno U di (x_0, y_0) e tale che $z_0 = g(x_0, y_0)$ e

$$\mathrm{f}\big(x, y, g(x, y)\big) = 0 \qquad \forall\,(x, y) \in U\,.$$

Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(U)$ e

$$\partial_x g(x, y) = -\frac{\partial_x \mathrm{f}(x, y, g(x, y))}{\partial_z \mathrm{f}(x, y, g(x, y))}\,, \qquad \partial_y g(x, y) = -\frac{\partial_y \mathrm{f}(x, y, g(x, y))}{\partial_z \mathrm{f}(x, y, g(x, y))}\,,$$

$\forall\,(x, y) \in U$.

Osservazioni:

i) Dalle formule per le derivate $\partial_x g$, $\partial_y g$, si ricava l'equazione del *piano tangente* alla superficie $z = g(x, y)$ in (x_0, y_0, z_0):

$$z = z_0 - \frac{\partial_x \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{\partial_y \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)\,,$$

ii) se l'ultima ipotesi del teorema si cambia con $\partial_x \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (o con $\partial_y \mathrm{f}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$), si dimostra l'esistenza di una funzione $h(y, z)$ $\;(\,k(x, z)\,)$ definita e regolare in un intorno di (y_0, z_0) (di (x_0, z_0)) e che soddisfa

$$\mathrm{f}\big(h(y, z), y, z\big) = 0 \qquad \big(\,\mathrm{f}\big(x, k(x, z), z\big) = 0\,\big)$$

<u>Esercizio</u>.

Usando l'equazione del piano tangente alla funzione implicita dimostrare che il gradiente ∇f di una funzione di tre variabili (di classe $\mathcal{C}^1$) è *ortogonale* alla *superficie di livello* $\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$ in ogni punto regolare.

Vincoli di uguaglianza: moltiplicatori di Lagrange.

Torniamo ora al problema di determinare gli estremi di una funzione $f(x, y)$ sotto una condizione di vincolo del tipo $g(x, y) = c$.

<u>Teorema</u> (moltiplicatori di Lagrange)

Siano f, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e sia $(x_0.y_0)$ un punto di estremo vincolato per f con il vincolo $g(x, y) = c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Se (x_0, y_0) è un punto regolare del vincolo ($\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$) esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \, \nabla g(x_0, y_0) \,.$$

Dimostrazione

Poichè (x_0, y_0) è un punto regolare, per il teorema di Dini l'equazione $g(x, y) - c = 0$ definisce localmente un arco di curva regolare

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in I,$$

dove si può assumere I un intorno dell'origine e $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Per ipotesi, $t = 0$ è punto di estremo locale per la funzione composta $f(x(t), y(t))$, per cui

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = \partial_x f(x_0, y_0) x'(0) + \partial_y f(x_0, y_0) y'(0) \,.$$

Quindi, nel punto considerato, il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ è *ortogonale* al vettore tangente $x'(0)\,\mathbf{i} + y'(0)\,\mathbf{j}$ alla curva di livello $g(x, y) = c$.

Ma, come è noto, anche il vettore ∇g è ortogonale (in ogni punto regolare) alla curva di livello.

Si conclude che i vettori $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ *devono essere paralleli*, ovvero che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

per qualche $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Un punto regolare del vincolo in cui vale la condizione $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ si dice **punto critico vincolato**.

Per il teorema precedente, se un punto (regolare) è di estremo vincolato, allora è un punto critico vincolato.

Osservazioni.

Introducendo la funzione detta *Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda \big(g(x, y) - c\big)$$

possiamo dire che i punti critici vincolati si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \partial_x f(x, y) - \lambda\, \partial_x g(x, y) = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \partial_y f(x, y) - \lambda\, \partial_y g(x, y) = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) = c - g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Il sistema equivale alla ricerca dei punti critici (liberi) della Lagrangiana come funzione delle *tre* variabili (x, y, λ).

La ricerca degli estremi vincolati con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* consiste nei seguenti passi:

i) Si identificano eventuali punti singolari del vincolo e si valuta la funzione in tali punti.

ii) Si cercano i punti critici vincolati risolvendo il sistema per i punti critici della Lagrangiana.

iii) Si valuta la funzione nei punti critici trovati.

Esempio

Ritorniamo al problema di determinare gli estremi di

$$f(x, y) = xy$$

con il vincolo

$$x^2 + y^2 = 1\,,$$

che non presenta punti singolari.

In questo caso la *Lagrangiana* si scrive

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := xy - \lambda \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

I punti critici vincolati si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) = y - 2\lambda\, x = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) = x - 2\lambda\, y = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Eliminando λ nelle prime due equazioni si ricava $x = y$ o $x = -y$; sostituendo nella terza si trovano le stesse soluzioni di p. 6.

Osservare che le curve di livello

$$xy = 1/2 \qquad \text{e} \qquad xy = -1/2\,,$$

sono *tangenti al vincolo* $x^2 + y^2 = 1$ nei punti di estremo vincolato, in accordo con il teorema dei moltiplicatori.

Problemi.

Trovare il rettangolo di perimetro massimo inscritto nell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Trovare il minimo di

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$$

con il vincolo

$$x^3 - y^2 = 0\,.$$

Funzioni a valori vettoriali.

Una funzione di più variabili a valori vettoriali

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m , \qquad (m > 1) \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) .$$

è definita da m funzioni a valori reali $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ sul comune dominio D.

Limiti e continuità

Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per D, e sia $\mathbf{L} = (L_1, L_2, ..., L_m) \in \mathbb{R}^m$. Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \qquad \text{se} \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\right| = 0 .$$

Segue dalla definizione che $\mathbf{f}$ ha limite $\mathbf{L}$ per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ se e solo se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = L_i$, per ogni $i = 1, 2, ..., m$.

Si dice che $\mathbf{f}$ è **continua** in $\mathbf{x}_0 \in D$, se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) .$$

Differenziabilità

Si dice che $\mathbf{f}$ è differenziabile in un punto $\mathbf{x}_0 \in D$ se tutte le componenti f_i, $i = 1, 2, ..., m$ sono differenziabili in quel punto.

Avremo allora, per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D$:

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j + o(|\mathbf{h}|) , \qquad i = 1, 2, ..., m .$$

Conviene scrivere queste relazioni in forma vettoriale introducendo i *vettori colonna*

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$$

e la matrice *mxn*, detta **matrice Jacobiana**, che ha per elementi di posto *ij* le derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) & ... & \partial_{x_n} f_1(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) & ... & \partial_{x_n} f_2(\mathbf{x}) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \partial_{x_1} f_m(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Per la matrice Jacobiana si usa spesso la notazione $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

La relazione di differenziabilità in un punto si scrive ora in forma vettoriale:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h} + \mathbf{o}(|\mathbf{h}|)\,,$$

dove $\mathbf{o}(|\mathbf{h}|)$ è un *vettore* le cui m componenti sono infinitesime di ordine superiore a $|\mathbf{h}|$ per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Il *differenziale* di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ è la funzione lineare:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \qquad \mathbf{h} \mapsto \mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}\,.$$

Osservazioni.

Nel caso particolare di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (cioè per $m = 1$) la matrice Jacobiana in un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ diviene

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \left(\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x})..., \partial_{x_n} f(\mathbf{x})\right)$$

ed è quindi il gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ scritto come vettore riga.

Nel caso particolare di $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (cioè per $n = 1$) la matrice Jacobiana in un punto $t \in \mathbb{R}$ diviene

$$\mathbf{Df}(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ . \\ . \\ f_m'(t) \end{pmatrix}$$

ed è quindi il vettore tangente $\mathbf{f}'(t)$ scritto come vettore colonna.

Osservazione sulle notazioni

In casi di particolari applicazioni (superfici parametriche, trasformazioni di coordinate, campi vettoriali) si utilizzano notazioni diverse per rappresentare le funzioni a valori vettoriali.

Per esempio, una trasformazione di coordinate $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è usualmente rappresentata con le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = & x_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2 = & x_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ ... & ... \\ ... & .... \\ x_n = & x_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{cases}$$

Qui il ruolo delle variabili indipendenti è giocato dalle $(u_1, u_2, ..., u_n)$, mentre le $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sono le componenti del vettore $\mathbf{T}(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione si scrive anche

$$det\, J_{\mathbf{T}}(u_1, u_2, ..., u_n) \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(u_1, u_2, ..., u_n)}$$

Esempi

La matrice Jacobiana di una funzione *lineare* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) := M\mathbf{x}$, è (in ogni punto) la stessa matrice M :

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = M\,.$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana della *trasformazione in coordinate polari*:

$$\mathbf{T}\ :\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi)\,.$$

$$J_{\mathbf{T}}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\det J_{\mathbf{T}}(\rho,\theta) = \rho\,,$$

per cui la matrice Jacobiana della trasformazione diventa singolare nell'origine.

Condizione sufficiente di differenziabilità

Se tutte le componenti f_i di una funzione a valori vettoriali $\mathbf{f}$ hanno derivate continue in un punto $\mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

In altri termini, se tutti gli elementi della matrice Jacobiana sono funzioni continue in $\mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Anche il *teorema di derivazione delle funzioni composte* si può convenientemente enunciare con le matrici jacobiane:

Siano $\mathbf{f} =: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tali che:

$\mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{g}$ è differenziabile in $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m$.

Allora la funzione composta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e vale

$$\mathbf{D}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Dg}(\mathbf{y}_0)\, \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)\,.$$

Osservare che (in ogni punto) la matrice $J_\mathbf{g}$ è di tipo $k \,\mathrm{x}\, m$, mentre $J_\mathbf{f}$ è di tipo $m \,\mathrm{x}\, n$ per cui il prodotto (righe per colonne) è ben definito ed è una matrice $k \,\mathrm{x}\, n$.

Ponendo $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}\,(\mathbf{x})$, il risultato equivale alle relazioni

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}\,, \qquad \forall \;\; i = 1, 2, .., k\,,\;\; j = 1, 2, .., n\,.$$

Esempio

Data $g(x, y)$ differenziabile e la trasformazione in coordinate polari

$$x = \rho \cos\theta\,, \qquad y = \rho \sin\theta\,,$$

calcoliamo le derivate della funzione composta

$$\tilde{g}(\rho, \theta) := g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,.$$

Osserviamo che in questo caso : $\quad n = m = 2,\;\; k = 1,$

$$(x_1, x_2) \;\Rightarrow\; (\rho, \theta)\,; \qquad (y_1, y_2) \;\Rightarrow\; (x, y)\,,$$

la funzione $\mathbf{f}$ è la trasformazione di coordinate $\mathbf{T}$ di p. 26 e $g \circ \mathbf{T} = \tilde{g}$.

Abbiamo allora :

$$\partial_\rho \tilde{g}(\rho,\theta) = \partial_\rho g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \partial_x g(x,y)\cos\theta + \partial_y g(x,y)\sin\theta\,,$$

$$\partial_\theta \tilde{g}(\rho,\theta) = \partial_\theta g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \partial_x g(x,y)(-\rho\sin\theta) + \partial_y g(x,y)\,\rho\cos\theta\,.$$

Osserviamo che le due relazioni si scrivono in forma vettoriale:

$$\left(\partial_\rho \tilde{g},\, \partial_\theta \tilde{g}\right) = \left(\partial_x g,\, \partial_y g\right) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

ovvero

$$J_{\tilde{g}}(\rho,\theta) = J_g(x,y)\, J_{\mathbf{T}}(\rho,\theta)\,,$$

in accordo con il teorema a pag. 27.

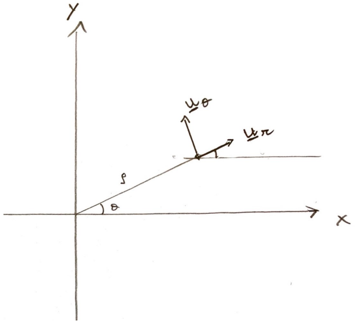
Osservazioni

Detto $\mathbf{u}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ il *versore della direzione radiale*, la prima relazione della pagina precedente si può scrivere

$$\partial_\rho \tilde{g}(\rho,\theta) = D_{\mathbf{u}_r} g(x,y)\,,$$

dove (ρ,θ) e (x,y) sono sempre i punti che si corrispondono nella trasformazione.

In modo analogo, la seconda relazione ci dice che $\dfrac{1}{\rho}\partial_\theta \tilde{g}$ è la derivata di g nella direzione del versore $\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$.



Superfici parametriche.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ con interno non vuoto ($\mathring{D} \neq \emptyset$). Si dice *superficie in forma parametrica* una funzione

$$\mathbf{r} : \ D \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad (u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}\,.$$

Se $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(\mathring{D})$, la superficie si dice di classe $\mathcal{C}^1$.

Per queste superfici sono definiti (per ogni $(u,v) \in \mathring{D}$) i vettori

$$\mathbf{r}_u(u,v) := \partial_u \mathbf{r}(u,v)\,, \qquad \mathbf{r}_v(u,v) := \partial_v \mathbf{r}(u,v)\,,$$

'tangenti alle linee coordinate' sulla superficie.

Una superficie di classe $\mathcal{C}^1$ si dice **regolare** se

$$\mathbf{r}_u(u,v) \wedge \mathbf{r}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$$

per ogni $(u,v) \in \mathring{D}$.

Si può anche dire che una superficie è regolare se la matrice Jacobiana

$$J_{\mathbf{r}}(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (massimo) per ogni $(u,v) \in \mathring{D}$.

In ogni punto $\mathbf{r}(u,v)$ $\big((u,v) \in \mathring{D}\big)$ di una superficie regolare è definito un *versore normale*

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \wedge \mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v) \wedge \mathbf{r}_v(u,v)|} \,,$$

perpendicolare al piano tangente che contiene i vettori $\mathbf{r}_u(u,v)$ e $\mathbf{r}_v(u,v)$.

Esempi

La funzione

$$\mathbf{r}(u,v) = R\cos u\,\mathbf{i} + R\sin u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}\,, \qquad u \in [0,2\pi)\,,\ v \in \mathbb{R}\,,$$

rappresenta la *superficie cilindrica* di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ nello spazio.

La superficie è regolare perché

$$\mathbf{r}_u(u,v) = -R\sin u\,\mathbf{i} + R\cos u\,\mathbf{j}\,, \quad \mathbf{r}_v(u,v) = \mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{r}_u(u,v) \wedge \mathbf{r}_v(u,v) = R\cos u\,\mathbf{i} + R\sin u\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0}\,.$$

Il *versore*

$$\mathbf{n}(u,v) = \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0}\,,$$

è in ogni punto perpendicolare alla superficie e ha verso 'uscente' dal cilindro.

La funzione

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = R\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + R\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + R\cos\phi\,\mathbf{k}\,, \quad \phi\in[0,\pi]\,,\ \theta\in[0,2\pi)\,,$$

parametrizza la *superficie sferica* S_R di equazione $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Abbiamo ora:

$$\mathbf{r}_\phi(\phi,\theta) = R\cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + R\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - R\sin\phi\,\mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{r}_\theta(\phi,\theta) = -R\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{i} + R\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{j}\,.$$

Verificare che $\mathbf{r}_\phi \wedge \mathbf{r}_\theta$ è perpendicolare alla superficie, punta verso l'esterno della sfera e ha lunghezza

$$|\mathbf{r}_\phi(\phi,\theta)\wedge\mathbf{r}_\theta(\phi,\theta)| = R^2\sin\phi\,.$$

Superfici cartesiane

Il grafico di una funzione $f(x, y)$ si può rappresentare in forma parametrica:

$$\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u, v)\,\mathbf{k}\,, \qquad (u, v) \in D\,.$$

Se $f \in \mathcal{C}^1(D)$, la superficie è regolare:

$$\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v) = \big(\mathbf{i} + f_x(u, v)\,\mathbf{k}\big) \wedge \big(\mathbf{j} + f_y(u, v)\,\mathbf{k}\big) = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,.$$

$$|\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)| = \sqrt{f_x(u, v)^2 + f_y(u, v)^2 + 1} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

Il versore normale (che punta verso l'alto) si scrive

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,\mathbf{k}\,.$$

Invertibilità delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$

Richiesta necessaria per le trasformazioni di coordinate, ma che in generale non è soddisfatta 'globalmente'.

Vale per le trasformazioni *lineari*

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

se e solo se A è una matrice $n \times n$ non singolare, cioè se

$$\det A \neq 0\,.$$

Nel caso generale abbiamo:

Teorema (Inversione locale)

Sia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Supponiamo che in $\mathbf{x}_0 \in D$ valga

$$\det \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \neq 0 \, .$$

Allora esistono un intorno U di $\mathbf{x}_0$ e un intorno V di $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tali che $\mathbf{f}$ è una corrispondenza *biunivoca* tra U e V.

Inoltre, detta $\mathbf{g} : V \to U$ la funzione inversa di $\mathbf{f}|_U$, risulta $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(V)$ e vale la formula

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{y}) = \mathbf{Df}(\mathbf{x})^{-1} \, ,$$

per ogni $\mathbf{y} \in V$ e $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \in U$.

Esempi

Per la trasformazione $\mathbf{T}$ in coordinate polari si ha $\det D_{\mathbf{T}}(\rho, \theta) = \rho$ (v. pag.26);

segue dal teorema che la trasformazione è invertibile nell'intorno di ogni punto con $\rho > 0$, cioè al di fuori dell'origine nel piano (x, y).

In effetti, dalle formule della trasformazione segue che $\mathbf{T}(0, \theta) = (0, 0)$ per ogni θ, per cui $\mathbf{T}$ non è localmente biunivoca intorno ai punti dell'asse $\rho = 0$.

Problema

Verificare che $\mathbf{T}$ *ristretta all'aperto*

$$A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)\,,$$

è biunivoca tra A ed il piano $\mathbb{R}^2$ privato della semiretta $\{(x, 0)\,,\ x \geq 0\}$ e che $\mathbf{T}^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (diffeomorfismo globale).

Anche per le *coordinate cilindriche* in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta\,, \\ z = t\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0,+\infty),\ \theta \in [0,2\pi),\ t \in \mathbb{R}\,,$$

risulta $\det J_{\mathbf{T}}(\rho,\theta,t) = \rho$ (fare la verifica); in questo caso, i punti singolari della trasformazione sono tutti quelli dell'asse z.

Infine, per le *coordinate sferiche* in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta\,, \\ z = \rho\cos\phi\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0,+\infty),\ \ \phi \in [0,\pi],\ \ \theta \in [0,2\pi),$$

risulta

$$\det J_{\mathbf{T}}(\rho,\theta,t) = \rho^2\sin\phi\,.$$

Anche in questo caso i punti dell'asse z sono singolari.

Attenzione: Anche se una trasformazione soddisfa in ogni punto le ipotesi del teorema di inversione locale, *non è garantito* che sia *globalmente* invertibile.

Per esempio

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

ha matrice Jacobiana

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det J_{\mathbf{f}}(x, y) = e^{2x} \neq 0$ in ogni punto (x, y); quindi $\mathbf{f}$ è localmente invertibile in un intorno di ogni punto del piano.

Tuttavia, $\mathbf{f}$ non è globalmente invertibile poiché

$$\mathbf{f}(x, y + 2n\pi) = \mathbf{f}(x, y)$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio. Studiare l'invertibilità locale della trasformazione $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$.