Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Analisi Matematica III, Appello d'esame del 22 giugno 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(5-z)}\,.$$

(a) Classificare la singolarità isolata $z_0 := 3$ per f, e calcolare $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

(b) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di f attorno a z_0.

Soluzione.

(a) Polo semplice, con residuo uguale a $\frac{1}{2}$.

(b) $\dfrac{1}{2(z-3)} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(z-3)^n}{2^n}$

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-|x|}\,. \end{cases}$$

(a) Scrivere la soluzione u come prodotto di convoluzione.

(b) Calcolare $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t_0)$, per ogni fissato $t_0 > 0$.

Soluzione.

(a) Si ha $u(x,t) = e^{-|x|} * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

(b) Poiché $\xi \mapsto \hat{u}(\xi, t_0) = \frac{2}{1+\xi^2} e^{-\xi^2 t_0}$ è pari, anche $x \mapsto \hat{u}(x, t_0)$ è pari, e quindi $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t_0) = 0$ per ogni $t_0 > 0$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Sia

$$f(x) = \frac{e^{-|x|} - 1}{x}\,, \qquad f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-|x|} - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}}{x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Stabilire se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e se $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Stabilire se $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ e se $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni fissato $\varepsilon > 0$.

(c) Mostrare che, per $\varepsilon \to 0^+$, si ha $f_\varepsilon \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$.

(d) Calcolare la trasformata di Fourier di $g_\varepsilon = x f_\varepsilon$, e ricavarne prima la trasformata di Fourier di f_ε e quindi quella di f.

Soluzione.

(a) Si ha $f \notin L^1(\mathbb{R})$ (poiché $\frac{e^{-|x|}}{|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ ma $\frac{1}{|x|} \notin L^1(\mathbb{R})$ a causa dell'andamento a $\pm\infty$), mentre $f \in L^2(\mathbb{R})$ (poiché in qs caso entrambe le funzioni $\frac{e^{-|x|}}{|x|}$ e $\frac{1}{|x|}$ sono quadrato integrabili all'infinito, mentre nell'origine la funzione resta limitata per cui non ci sono problemi di integrabilità).

(b) Sempre a causa dell'andamento a $\pm\infty$, si ha $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(c) Si ha

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-|x|} - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}}{|x|} - \frac{e^{-|x|} - 1}{|x|} \right|^2 dx \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{x} - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x^2} \right|^2 dx \\
&= 2\varepsilon \int_0^{+\infty} \left| \frac{y - \sin y}{y^2} \right|^2 dy \to 0 \qquad \text{per } \varepsilon \to 0^+\,.
\end{aligned}$$

(d) Ricordando le trasformate notevoli $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\xi^2}$ e $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \chi_{[-1,1]}(x)$, si ottiene

$$\widehat{g}_\varepsilon(\xi) = \mathcal{F}\Big(e^{-|x|} - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}\Big) = \frac{2}{1+\xi^2} - \frac{\pi}{\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\xi)\,.$$

Per calcolare $\widehat{f}_\varepsilon$, usiamo il fatto che $g_\varepsilon = x f_\varepsilon \Rightarrow \widehat{g}_\varepsilon = iD\widehat{f}_\varepsilon$. Inoltre poiché f_ε è dispari, lo stesso vale per $\widehat{f}_\varepsilon$. Questo implica che $\widehat{f}_\varepsilon(0) = 0$, e che ci basta calcolare $\widehat{f}_\varepsilon$ per $\xi > 0$. Applicando il teorema fondamentale del calcolo, e l'espressione sopra ricavata per $\widehat{g}_\varepsilon$, si ottiene, per $\xi > 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_\varepsilon(\xi) &= \widehat{f}_\varepsilon(0) + \int_0^\xi D\widehat{f}_\varepsilon(t)\,dt = -i\int_0^\xi \widehat{g}_\varepsilon(t)\,dt \\
&= -i\int_0^\xi \Big(\frac{2}{1+t^2} - \frac{\pi}{\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)\Big)\,dt \\
&= \begin{cases} -2i\arctan\xi + i\frac{\pi}{\varepsilon}\xi & \text{per } \xi \le \varepsilon \\ -2i\arctan\xi + i\pi & \text{per } \xi > \varepsilon\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Infine, per calcolare $\widehat{f}$, basta passare al limite per $\varepsilon \to 0^+$ nell'espressione ottenuta per $\widehat{f}_\varepsilon$, ottenendo cosí:

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \widehat{f}_\varepsilon(\xi) = -2i\arctan\xi + i\pi \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$$

TEORIA. (7 punti)

(a) Fornire la definizione dello spazio $H_0^1(\Omega)$, dove Ω è un sottoinsieme aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$.

(b) Enunciare e dimostrare l'identità del parallelogramma in uno spazio di Hilbert.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati.