Def. Sia T op. lineare: $(V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$

Si dice che T è LIMITATO se:

- $\exists\, M>0$ tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$
  ($\forall v \in V \setminus \{0\}$)

ovvero:

- $\exists\, M>0$ tale che $\dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V\setminus\{0\}$.
- $\exists\, M>0$ tale che $\sup\limits_{v \in V\setminus\{0\}} \dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$.

__Esempi__:

1) $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da

$T(v) = v_0 \cdot v$ op. lineare

$\big(T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = v_0 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$
$= \lambda_1 (v_0 \cdot v_1) + \lambda_2 (v_0 \cdot v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)\big)$

T è limitato: $\exists\, M>0$ tale che

$|T(v)| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2}$ ovvero

$|v_0 \cdot v| \overset{(*)}{\leq} M \|v\|_{\mathbb{R}^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Infatti posso prendere $M = \|v_0\|$ per Cauchy-Schwarz.

$\|T\|_{V'} = \|v_0\|_{\mathbb{R}^2}$ perché $(*)$ vale come $=$ prendendo $v = v_0$

2) $T: (\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$

$T(f) = f'$ op. lineare

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = $$
$$= \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

T è limitato.

$$\underset{\|f'\|_{\mathcal{C}^0}}{\underset{\|}{\|T(f)\|_{\mathcal{C}^0}}} \leq M \|f\|_{\mathcal{C}^1}$$

ovvero:

$$\|f'\|_\infty \leq \underbrace{M}_{1} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

prendendo $M = 1$

$\|T\|_{\mathcal{L}^1(C^1, C^0)} = 1$ perché $\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\frac{\|f_n'\|_\infty}{\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty} \longrightarrow 1, \quad \text{Es. } [a,b] = (0,1)$$

Possiamo prendere $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$. $f_n'(x) = \cos(nx)$

3) $T: (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f \, dx \quad \text{dove } f_0 \in L^2(0,1) \text{ fissato.}$$

è ben definito

T è lineare: $T(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 f_0(\alpha f + \beta g) =$

$$= \alpha \int_0^1 f_0 f + \beta \int_0^1 f_0 g = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

T è limitato: $\exists\, M>0$ tale che

$$|T(f)| \leq M \|f\|_2$$

$$\|f_0\|_{L^2}\|f_0\|_{L^2} \quad \left| \int_0^1 f_0 f \right| \leq M \|f\|_2$$

$$\int_0^1 f_0^2 \leftarrow \left| \int_0^1 f_0 f \right| \leq \int_0^1 |f_0 f| \overset{(*)}{\leq} \underbrace{\|f_0\|_2}_{M} \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(0,1).$$

Hölder

<u>Oss.</u> Se considero $T: (L^p(0,1), \|\cdot\|_p) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da $T(f) = \int_0^1 f_0 f \, dx$ questo è lineare continuo prendendo $f_0 \in L^{p'}(0,1)$.

$$\|T\|_{\underbrace{\mathcal{L}(L^2,\mathbb{R})}_{(L^2)'}} = \|f_0\|_{L^2}$$

perchè $(*)$ vale come uguaglianza prendendo $f = f_0$

Proposizione: Sia $T: (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ lineare. Allora:

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

dim.

($\Leftarrow$) Supp. T limitato. Basta mostrare che T è continuo in 0,

ovvero: se $v_n \to 0$, allora $T(v_n) \to T(0) = 0$

$$\| T(v_n)\|_W \leq M \|v_n\|_V \longrightarrow 0$$

($\Rightarrow$) Supp T NON limitato e mostriamo T NON continuo in 0

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \Rightarrow \exists \{v_n\} \subseteq V\setminus\{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \longrightarrow +\infty$$

ovvero, siccome T è lineare:

$$\left\| T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right) \right\|_W \longrightarrow +\infty$$

Quindi, se considero $u_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_V}$, ho che: $\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \to +\infty. \end{cases}$

Posso costruire una successione y_n tale che $\boxed{y_n \to 0}$ ma $\boxed{T(y_n) \not\to 0}$

Poniamo $y_n = \dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$

- $y_n \to 0$ $\quad \|y_n\|_V = \left\| \dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right\|_V = \dfrac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\|u_n\|_V}}}{\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\|T(u_n)\|_W}} \longrightarrow 0$

- $T(y_n) = T\left(\dfrac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}\right) = \dfrac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W} \not\longrightarrow 0$ $\leftarrow$ hanno norma 1 in W

$\blacksquare$

Def. Dati $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ sp. vett. normati

$$\mathcal{L}(V, W) := \{ \text{op. lineari limitati (continui) da } V \text{ in } W \}$$

è uno spazio vettoriale:

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \\ (\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v) \end{cases}$$

Possiamo introdurre su $\mathcal{L}(V, W)$ una NORMA ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

(ovvero la più piccola costante M tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$)

Oss. Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

In particolare:

Def. Quando $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V'$ SPAZIO DUALE DI V.

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

Esempi: vedi casi 1) e 3).

Distribuzioni

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

$C_0^\infty(\Omega) = \{$ funzioni C^∞ su Ω con supporto compatto in $\Omega \}$

è uno spazio vettoriale

Muniamo $C_0^\infty(\Omega)$ di una CONVERGENZA

Def. Sia $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che

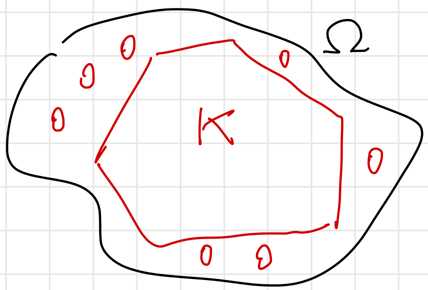
$$\varphi_h \longrightarrow 0 \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega) \quad \text{se}$$

(1) $\exists K$ compatto (indipendente da h) tale che

$$\operatorname{supp}(\varphi_h) \subseteq K \quad \forall h \gg 1$$

(2) $\varphi_h \longrightarrow 0$ unif. su K con tutte le derivate

$\forall \alpha$ multiindice $\quad D^\alpha \varphi_h \longrightarrow 0$ unif. su K.

(1) 

Notazione: $\alpha = (\underset{\in\mathbb{N}}{\alpha_1}, \underset{\in\mathbb{N}}{\alpha_2}, \underset{\in\mathbb{N}}{\alpha_3})$

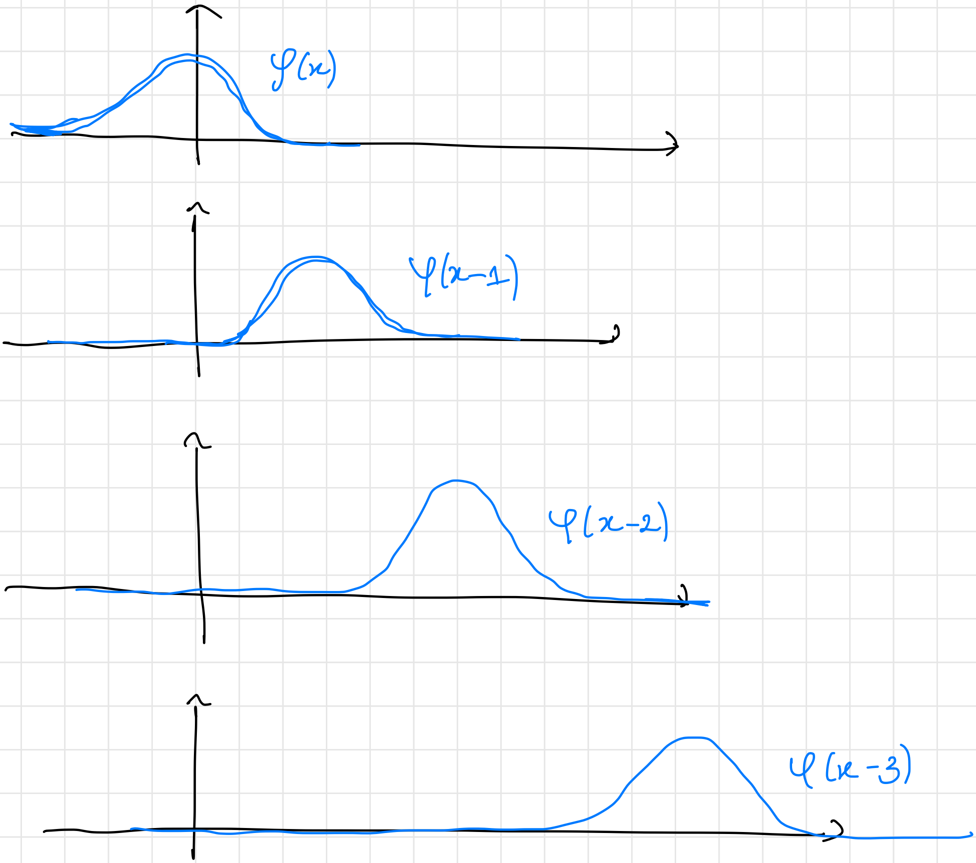
$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \, \partial^{\alpha_2} x_2 \, \partial^{\alpha_3} x_3}$$

$$D^{(2,1,4)} \varphi = \frac{\partial^7 \varphi}{\partial^2 x_1 \, \partial^1 x_2 \, \partial^4 x_3}$$

Def. $\varphi_h \to \varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$ se $\varphi_h - \varphi \longrightarrow 0$ in $C_0^\infty(\Omega)$

Esempio:

$$\varphi_h(x) := \varphi(x-h)$$



Def. Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza definita sopra si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$ e si chiama SPAZIO DELLE FUNZIONI TEST

Def. Lo spazio delle distribuzioni su Ω che si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio degli operatori $T: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su $\mathcal{D}(\Omega)$

ovvero una DISTRIBUZIONE è un operatore

$T: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- T lineare
- T continuo $\left(\varphi_n \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_n) \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R} \right)$.

Esempi

1) Sia $u \in L^1(\Omega)$. Ad u posso associare $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- è ben definito:

$$\left|\int_\Omega u\varphi\right| \leq \int_{\cancel{\Omega}} |u\varphi| \leq \int_K \max|\varphi| \cdot |u| \leq \max_K |\varphi| \int_K |u| < +\infty$$

$\text{supp}\,\varphi = K$

- è lineare:

$$T_u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_\Omega u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\int_\Omega u\varphi + \beta\int_\Omega u\psi$$
$$= \alpha\, T_u(\varphi) + \beta\, T_u(\psi).$$

- è continuo: $\{\varphi_h\} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} T_u(\varphi_h) \to 0$

Sia $\{\varphi_h\} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$|T_u(\varphi_h)| = \left|\int_\Omega u\varphi_h\right| \leq \underbrace{\max_K |\varphi_h|}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\int_K |u|}_{<+\infty} \longrightarrow 0$$