Integrali doppi

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D xy^2\, dx\, dy,$$

dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$. Quanto vale l'integrale della stessa funzione sul triangolo D' di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,-1)$?

2. Calcolare

$$\int\int_\Omega xy\, dx\, dy$$

dove Ω è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano delle y positive.

3. Utilizzando le proprietà dell'integrale e opportune considerazioni di simmetria, trovare il valore dell' integrale doppio:

$$\int\int_D [5 + x^7\cos(y^2) + \sin(x^8 y)]\, dx\, dy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \le 1\}$$

4. Verificare che la trasformazione T definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$$

mappa il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ del piano (u,v) nel triangolo (chiuso) D del piano (x,y) delimitato dall'asse delle x e dalle rette di equazioni $y = x$ e $x = 1$. Dimostrare che la trasformazione T è biunivoca tra i sottoinsiemi $Q_0 = (0,1] \times [0,1]$ e $D_0 = D\backslash\{(0,0)\}$.
Verificare che la funzione

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{x+y}{x}\right)$$

è integrabile su D_0 e calcolare $\int\int_{D_0} f(x,y) dxdy$.

SOLUZIONI

1. Descrivendo il triangolo D come un dominio semplice rispetto all'asse x

$$D = \{(x, y) : y \leq x \leq 2 - y,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

possiamo applicare la formula di riduzione

$$\int\int_D xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 y^2 \Big(\int_y^{2-y} x\, dx \Big) dy$$

$$= 2 \int_0^1 y^2(1-y) dy = \frac{1}{6}.$$

Il triangolo D' si ottiene da D per riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Poiché la funzione $f(x, y) = xy^2$ soddisfa $f(x, -y) = f(x, y)$, dalla definizione dell'integrale come limite di somme si ricava che l'integrale di f su D' ha lo stesso valore.

2. Utilizziamo coordinate polari *centrate nel punto* $(1, 0)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\int\int_D xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^\pi \rho^2(1 + \rho\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho + \int_0^1 \int_0^\pi \rho^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\rho$$

Calcolo del primo integrale:

$$\int_0^1 \int_0^\pi \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho = \big[\rho^3/3\big]_0^1 \big[-\cos\theta\big]_0^\pi = \frac{2}{3}$$

Il secondo integrale si annulla.

3. La regione D è un quadrato con i vertici nei punti $(0, 1)$, $(1, 0)$,$(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Decomponiamo l'integrale nella somma

$$\int\int_D 5\, dx\, dy + \int\int_D x^7 \cos(y^2)\, dx\, dy + \int\int_D \sin(x^8 y)\, dx\, dy$$

Poiché D è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi, il secondo e il terzo integrale sono nulli per ragioni di simmetria. Il primo integrale ha il valore

$$5 \int\int_D dx\, dy = 5|D| = 10$$

4. Al variare di (u, v) in Q si deduce dalle equazioni della trasformazione che

$$0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x$$

Queste disequazioni descrivono il triangolo D come regione semplice rispetto all'asse y. Osserviamo che tutti i punti del lato $\{(0, v),\ 0 \le v \le 1\}$ del quadrato Q vengono mappati nell'origine del piano (x, y). La trasformazione T è biunivoca tra l'insieme $Q_0 = (0, 1] \times [0, 1]$ del piano (u, v) e l'insieme $D_0 = D\backslash\{(0, 0)\}$ del piano (x, y). Infatti, ricavando u e v dalle equazioni che definiscono T otteniamo :

$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

da cui segue che T^{-1} è definita (e di classe $\mathcal{C}^1$) per $x \neq 0$.
La funzione

$$f(x, y) = \exp\Big(\frac{x + y}{x}\Big) = \exp\Big(1 + \frac{y}{x}\Big)$$

è definita e continua per $x \neq 0$ ed è *limitata* su D_0, in quanto

$$0 \le \frac{y}{x} \le 1, \qquad \forall\, (x, y) \in D_0$$

Dunque f è integrabile su D_0. Per calcolare l'integrale usiamo la formula

$$\int\!\!\int_{D_0} f(x, y)\, dx\, dy = \int\!\!\int_{Q_0} f(u, uv)|\det J_T(u, v)|\, du\, dv$$

dove

$$\det J_T(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 0 \end{vmatrix} = u$$

Osserviamo che $\det J_T > 0$ su Q_0 e che $\det J_T = 0$ sul lato sinistro del quadrato Q; poiché un segmento ha misura (bidimensionale) nulla, si può applicare la formula anche tra gli insiemi D e Q (prolungando f a zero fuori da D_0). Calcoliamo dunque :

$$\int\!\!\int_Q f(u, uv)|\det J_T(u, v)|\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^1 \exp\Big(\frac{u + uv}{u}\Big) u\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u\, e^{v+1}\, du\, dv = \big[u^2/2\big]_0^1 \big[e^{v+1}\big]_0^1 = \frac{1}{2} e(e - 1)$$