10743161 FILIPPO SERGENTI - INGEGNERIA FISICA 2020-21

ESERCIZIO 1

FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA $f(z) = 2 + |z|^2 - z^2 - 2\bar{z}$

- DETERMINA A INSIEME $z \in \mathbb{C}$ CON $f(z)$ IMMAGINARIO E RAPPRESENTALO

CON $z = x + iy$ $\quad f(z) = 2 + x^2 + y^2 - (x+yi)^2 - 2(x-yi)$

$$f(z) = 2 + \cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2} + y^2 - 2xyi - 2x + 2yi$$

$f(z)$ DEVE ESSERE IMMAGINARIO NON COMPLESSO QUINDI $\quad$ 7.5/8

$$\mathrm{Re}\,(2 + 2y^2 - 2xyi - 2x + 2yi) = 0$$

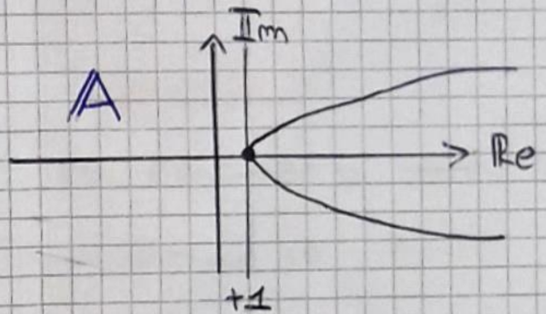
$$2 + 2y^2 - 2x = 0 \qquad y^2 - x + 1 = 0 \qquad y^2 = x - 1$$

$$y = \pm\sqrt{x-1} \quad \text{CON} \quad x - 1 \geq 0 \qquad x \geq 1 \quad \text{POICHE } y \in \mathbb{R}$$

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tc } z = x + iy \text{ CON } x \geq 1 \text{ E } y = \pm\sqrt{x-1} \}$$

- DETERMINA GEOMETRICAMENTE $B := \{ w \in \mathbb{C},\ w = (1+i)\frac{z}{\sqrt{2}} - i \text{ CON } z \in A \}$

DISEGNO NEL PIANO COMPLESSO L'INSIEME A

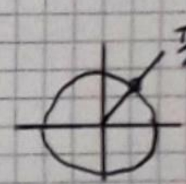


$y^2 - x + 1 = 0 \qquad \underline{x = y^2 + 1}$

PARABOLA ORIENTATA SU ASSE Re

$z \to \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} z \quad$ "RESCALING" CONTRAZIONE DI FATTORE $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} z \to (1+i)\frac{z}{\sqrt{2}} = \cancel{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\cancel{\sqrt{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} z$$

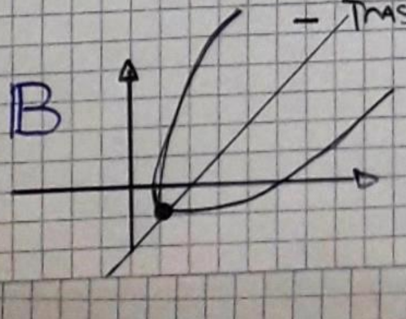


(CON $|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ E $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

- "RESCALING" DI FATTORE $\sqrt{2}$
- E ROTAZIONE IN SENSO ANTIORARIO DI 45° ($\frac{\pi}{4}$ RAD)

$$e^{i\frac{\pi}{4}} z \to e^{i\frac{\pi}{4}} z - i$$

- TRASLAZIONE DI UNITÀ UNO SU ASSE Im VERSO IL BASSO



OK

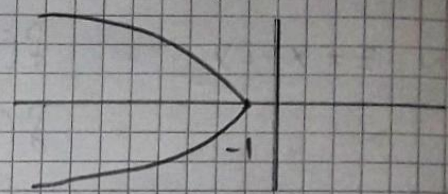
ESERCIZIO 1 PUNTO C

STABILIRE SE $\mathbb{C} = \{ w \in \mathbb{C},\ w = e^{-z} \text{ CON } z \in A \}$ È <u>LIMITATO</u>

<u>DEFINIZIONE DI LIMITATO</u> $M > 0$ $|w| \le M$

A PUNTO GENERICO $z = x, \pm(\sqrt{x-1})i$

$-A$



$w\ e^{-z}$

<u>CASO 1</u>

$e^{-x-(\sqrt{x-1})i}$

<u>CASO 2</u>

$e^{-x+(\sqrt{x-1})i}$

~~NUMERO PURAMENTE IMMAGINARIO~~

~~e ELEVATO ALLA QUALSIASI z RAPPRESENTA UNA ROTAZIONE~~ e^{xi}

~~e ELEVATO AD UN NUMERO ... RAPPRESENTA~~

$$|e^{-z}| = e^{-x}$$

$$e^{-\infty} < |e^{-z}| < e^{-1}$$

$\downarrow$

1

$e^{-\infty}$

<u>LIMITATO</u>

2

ESERCIZIO 2

PER QUALE VALORE DI $K \in \mathbb{R}$ W_1 W_2 W_3 SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

$W_1 \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $W_2 \begin{pmatrix} 1 \\ K-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $W_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-K \\ K-2 \\ K \end{pmatrix}$

$$DET \begin{vmatrix} K & 1 & 2 \\ 0 & K-1 & 1-K \\ 1 & 0 & K-2 \\ 4 & 1 & K \end{vmatrix} = 0$$ SE W_1, W_2, W_3 L. DIPENDENTE

E SOLO SE

$$DET \begin{vmatrix} K & 1 & 2 \\ 0 & K-1 & 1-K \\ 1 & 0 & K-2 \\ 4 & 1 & K \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{COLONNA}]{III + II} DET \begin{vmatrix} K & 1 & 3 \\ 0 & K-1 & 0 \\ 1 & 0 & K-2 \\ 4 & 1 & K+1 \end{vmatrix}$$

CALCOLO IL DETERMINANTE DEI MINORI 3X3

$$DET \begin{vmatrix} K & 1 & 3 \\ 0 & K-1 & 0 \\ 1 & 0 & K-2 \end{vmatrix} = +(K-1)(K^2-2K-3) = +(K-1)(K-3)(K+1)$$

~~SE $K \neq \pm 1$ E $K \neq +3$ ALLORA W_1, W_2, W_3 SONO LINEARMENTE~~ INDIPENDENTI

$$DET \begin{vmatrix} 0 & K-1 & 0 \\ 1 & 0 & K-2 \\ 4 & 1 & K+1 \end{vmatrix} = -(K-1)(K+1 -4K-8)$$

0/12

ESERCIZIO 2

PER MANCANZA DI TEMPO NON SONO RIUSCITO A COMPLETARLO

IN GENERALE SE W_1 W_2 W_3 SONO LIN. DIPENDENTI

$$DET \begin{vmatrix} W_1, & W_2, & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

Non sempre si può fare il det

OPPURE

$$\begin{pmatrix} K \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ K-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 2 \\ 1-K \\ K-2 \\ K \end{pmatrix} \gamma = 0$$

CON $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

ESERCIZIO 3

12/12

$$A_h = \begin{vmatrix} h & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & h & 4 \\ -4 & 4 & 0 & h \end{vmatrix} \qquad \vec{v}_k = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORE DI A_h

$\vec{v}_k$ AUTOVETTORE DI A_h SE E SOLO SE

$A_h \vec{v}_k = \lambda \vec{v}_k$ QUINDI

$$\begin{cases} h + 4k - 4 = \lambda \\ -4 + 7k - 4 = k\lambda \\ -4k + 4 = 0 \\ -4 + 4k + h = \lambda \end{cases} \longrightarrow k = +1 \quad \begin{cases} h = \lambda \\ -1 = kh \\ k = +1 \end{cases} \quad \begin{cases} h = -1 \\ \lambda = -1 \\ k = +1 \end{cases}$$

ok

V_k RISULTA AUTOVETTORE DI A_h PER $\begin{cases} k = +1 \\ h = -1 \end{cases}$

POSTO $h = -1$

$$A_{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

DIAGONALIZZABILE?

$$\det(A_{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)\left[(-1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) - 4(4\lambda - 12) - 4(-4\lambda + 12)\right] =$$

$$= +(\lambda+1)^2(\lambda-3)^2$$

ok

SPETTRO $\cancel{A_h}$ $A_{-1} = \{-1^2, +3^2\}$

VERIFICO DIMENSIONE AUTOSPAZIO PER

$\lambda = -1$ $\quad A_{-1} + I$

$$4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cancel{0} & -1 \\ -1 & 2 & \cancel{0} & -1 \\ 0 & -1 & \cancel{0} & 1 \\ -1 & 1 & \cancel{0} & 0 \end{vmatrix}$$

I II

$-I - II$

$Rk(A_{-1} + I) = 2$

$m_g = Ker(A_{-1} + I) = 4 - 2$

$m_a = m_g$ PER $\lambda = -1$

ok

$\lambda = +3$ $\quad A_{-1} - 3I$

$$4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ I \\ II \\ I \end{matrix}$$

$Rk(A_{-1} - 3I) = 2$

$m_g = Ker(A_{-1} - 3I) = 4 - 2$

$m_a = m_g$ PER $\lambda = +3$

ok

SICCOME LA M. GEOMETRICA (DIM AUTOSPAZIO) RELATIVO AD UN AUTOVALORE È UGUALE ALLA SUA M. ALGEBRICA

ok

A_h DIAGONALIZZABILE PER $h = -1$