Analisi matematica 2		22 febbraio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = x^2 + y^2(1+x)^3 \,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Spiegare perchè f è una funzione continua e differenziabile (quante volte ?) in tutto $\mathbb{R}^2$.

b) Trovare i punti critici di f e studiarne la natura. Verificare che la funzione *non* ha estremi globali e dimostrare che la sua *immagine* è tutto l'asse reale.

c) Applicando il teorema della funzione implicita, verificare che l'equazione

$$f(x,y) = 1$$

definisce implicitamente, in un intorno del punto $x = 0$, due funzioni $g_1(x)$, $g_2(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $g_1(0) = 1$ e $g_2(0) = -1$. Calcolare le derivate $g_1'(0)$ e $g_2'(0)$.
Facoltativo: trovare l'espressione *esplicita* di g_1 e g_2.

2.

a) Stabilire in quale aperto D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1 + y^2}{t}$$

L'aperto D è connesso ? (giustificare le risposte).

b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(1) = 0, \qquad \psi(-1) = 0$$

Specificare gli *intervalli massimali* di definizione delle soluzioni ϕ e ψ.

c) Enunciare il teorema di esistenza e unicità per le equazioni *lineari del secondo ordine* in forma normale.

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 1 + \sin t$$

3.

i) Sia γ la curva piana di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (1 - \sin t)\,\mathbf{j}\,; \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Verificare che è una curva chiusa, semplice e regolare. Scrivere l'equazione del sostegno e disegnarlo nel piano cartesiano, indicando il verso di percorrenza. Calcolare la circolazione lungo γ del campo piano

$$\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j}$$

ii) Ricalcolare la circolazione del campo $\mathbf{F}$ usando la formula di Gauss-Green.

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\, x^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\,(x-3)^n$$

Trovare la somma della serie $b)$.

ii) Verificare che la serie trigonometrica

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos(nx)$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$. Detta $f(x)$ la somma della serie, dimostrare che f è una funzione continua in $\mathbb{R}$, $2\pi-$periodica e pari. Calcolare $f(0)$ e $f(\pi)$.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è continua essendo un polinomio (di quinto grado) nelle variabili (x, y); tutte le derivate parziali della funzione sono continue per lo stesso motivo, per cui $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dalla condizione sufficiente di differenziabilità, si ricava allora che f è infinite volte differenziabile.

b) Derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x + 3y^2(1 + x)^2; \quad f_y(x, y) = 2y(1 + x)^3$$

I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(2x + 3y^2(1 + x)^2\right) \mathbf{i} + 2y(1 + x)^3 \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Risolvendo il sistema troviamo *l'unica soluzione*

$$(x, y) = (0, 0)$$

Calcolando le derivate seconde

$$f_{xx}(x, y) = 2 + 6y^2(1 + x); \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y(1 + x)^2; \quad f_{yy}(x, y) = 2(1 + x)^3$$

e valutando la matrice Hessiana in $(0, 0)$, si ottiene

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si conclude che il punto $(0, 0)$ è di *minimo locale* stretto. Il valore assunto dalla funzione è $f(0, 0) = 0$. La funzione non ha estremi globali poiché non ha limitazioni superiori né limitazioni inferiori. Considerando, per esempio, la restrizione di f alla retta $y = 1$ abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, 1) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + 4x^2 + 3x + 1) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 1) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 4x^2 + 3x + 1) = -\infty$$

Per le proprietà delle funzioni continue, f deve assumere tutti i valori nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ per cui la sua immagine è l'insieme $\mathbb{R}$.

c) Ponendo $x = 0$ nell'equazione $f(x, y) = 1$ si trova

$$y^2 = 1$$

che ha le due soluzioni $y = 1$ e $y = -1$. Definendo allora la funzione:

$$F(x, y) := f(x, y) - 1 = x^2 + y^2(1 + x)^3 - 1$$

vediamo che F soddisfa $F(0, 1) = 0$ e $F(0, -1) = 0$. Inoltre, F è di classe $\mathcal{C}^1$ in qualunque intorno dei i due punti origine. Per verificare le ipotesi del teorema della funzione implicita resta da valutare la derivata F_y in ciascuno dei due punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Abbiamo:

$$F_y(x, y) = f_y(x, y) = 2y(1 + x)^3$$

Dunque $F_y(0, 1) = 2$, $F_y(0, -1) = -2 \neq 0$ e le ipotesi del teorema sono soddisfatte in entrambi i casi. Esistono allora *due* funzioni g_1 e g_2, di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $x = 0$ e tali che $g_1(0) = 1$, $g_2(0) = -1$. Le loro derivate nel punto $x = 0$ sono date rispettivamente dalle formule

$$g_1'(0) = -\frac{f_x(0, 1)}{f_y(0, 1)}, \qquad g_2'(0) = -\frac{f_x(0, -1)}{f_y(0, -1)}$$

Sostituendo i valori delle derivate parziali si ottiene:

$$g_1'(0) = -3/2, \qquad g_2'(0) = 3/2$$

L'espressione esplicita di g_1 e g_2 si può ricavare risolvendo l'equazione

$$x^2 + y^2(1+x)^3 = 1$$

rispetto ad y:

$$y = \pm\left(\frac{1-x^2}{(1+x)^3}\right)^{1/2} = \pm\frac{\sqrt{1-x}}{|1+x|}$$

Abbiamo allora, nell'intervallo $(-1,1)$ contenente l'origine, le due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$:

$$g_1(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}; \qquad g_2(x) = -\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$$

Si può verificare che le derivate delle due funzioni nell'origine hanno i valori calcolati in precedenza con il teorema della funzione implicita.

2a. Il secondo membro dell'equazione è la funzione

$$f(t,y) = \frac{1+y^2}{t}$$

che ha derivate parziali

$$f_t(t,y) = -\frac{1+y^2}{t^2}, \qquad f_y(t,y) = \frac{2y}{t}$$

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte nell'aperto

$$\Omega = \{(t,y) \mid t \neq 0\}$$

(Nello stesso aperto f è di classe $\mathcal{C}^\infty$). L'aperto Ω *non* è connesso essendo l'unione dei due semipiani aperti e disgiunti $\{(t,y) \mid t > 0\}$ e $\{(t,y) \mid t < 0\}$.

2b. L'equazione è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti. Integrale generale:

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt + C$$

$$\arctan y = \ln|t| + C$$

Esplicitando y in funzione di t si ottiene

$$y = \tan(\ln|t| + C), \qquad -\pi/2 < \ln|t| + C < \pi/2$$

La curva integrale che passa per il punto $(1,0)$ è (nell'intervallo massimale di definizione)

$$\phi(t) = \tan(\ln t), \qquad t \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$$

La curva che passa per $(-1,0)$ è

$$\psi(t) = \tan(\ln(-t)), \qquad t \in (-e^{\pi/2}, -e^{-\pi/2})$$

2d. Equazione omogenea associata:

$$z'' + 4z = 0$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Data la forma del termine noto dell'equazione completa, si può cercare una soluzione particolare del tipo

$$\psi(t) = A + B \cos t + C \sin t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{1}{3}$$

Integrale generale:

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \sin t$$

3.

i) La curva è chiusa poiché

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{r}(2\pi)$$

La curva è semplice perchè l'equazione $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ equivale a $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ e $\sin(t_1) = \sin(t_2)$, da cui segue $t_1 = t_2$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Il vettore tangente

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \, \mathbf{i} - \cos t \, \mathbf{j}$$

è sempre diverso da zero in quanto

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 1, \qquad \forall\ t$$

Dalle equazioni parametriche

$$x = \cos t, \qquad y = 1 - \sin t$$

si ricava l'equazione del sostegno

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Si tratta di una circonferenza passante per l'origine, centrata in $(0, 1)$ e di raggio unitario, percorsa in senso *orario.*

Calcolo della circolazione:

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\sin t)(-\sin t)\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t(1-\sin t)(-\cos t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t + \sin^2 t)\,dt + \int_0^{2\pi} (-\cos^3 t + \sin t\cos^3 t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \pi$$

ii) *Calcolo con la formula di Gauss-Green:* detto D il dominio (il cerchio) racchiuso da γ, si osserva che con la parametrizzazione data la frontiera di D è percorsa in senso *negativo*. Poiché la formula di Gauss-Green vale se la frontiera è percorsa in senso positivo, avremo

$$-\oint_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int\int_D \big(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\big)\,dx\,dy = \int\int_D \big(2xy - 1\big)\,dx\,dy$$

Calcolo dell'integrale doppio: per le proprietà degli integrali e da considerazioni di simmetria,

$$\int\int_D \big(2xy-1\big)\,dx\,dy = 2\int\int_D xy\,dx\,dy - \int\int_D dx\,dy = -\int\int_D dx\,dy = -|D| = -\pi$$

Si riottiene dunque :

$$\oint_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \pi$$

4.

i) La serie (a) è centrata nell'origine; per il criterio del rapporto, il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{n} = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(-1,1)$. Comportamento agli estremi: per $x=1$ abbiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+1}$$

che diverge a $+\infty$ perchè il termine generale è asintotico a $1/n$. Per $x=-1$ abbiamo la serie a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

che converge per il criterio di Leibniz. L'intervallo di convergenza è dunque $[-1,1)$.

La serie (b) è centrata in $x = 3$. Raggio di convergenza :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(3^n\right)^{1/n} = 3$$

Dunque $R = 1/3$ e la serie converge nell'intervallo $(-8/3, 10/3)$. Agli estremi la serie non converge perchè il termine generale non tende a zero.
Si può calcolare la somma osservando che si tratta di una serie geometrica di ragione $3(x-3)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\,(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} [3\,(x-3)]^n = \frac{1}{1-3(x-3)} = \frac{1}{10-3x}, \qquad x \in (-8/3, 10/3)$$

ii) La serie data converge totalmente in $\mathbb{R}$; infatti:

$$\frac{1}{n!}|\cos(nx)| \leq \frac{1}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente. Per il criterio di Weierstrass, la serie converge *uniformemente in* $\mathbb{R}$; poiché tutti i termini della serie sono funzioni continue, si conclude che la somma $f(x)$ è pure una funzione continua. Inoltre, per ogni n vale

$$\cos\big(n(-x)\big) = \cos(nx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dunque anche la somma della serie soddisfa la $f(-x) = f(x)$. Inoltre, tutti i termini della serie sono $2\pi-$ periodici, dunque $f(x+2\pi) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Valori in 0 e π:

$$f(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e; \qquad f(\pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n = \frac{1}{e}$$

Infatti, le stesse due serie si ottengono dalla serie di Maclaurin di e^x valutata rispettivamente in $x = 0$ e $x = -1$.