Analisi matematica 2		1 febbraio 2012
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = |x-y|(x^2+y^2-1)$$

a) Studiare il segno di f e dire se gli insiemi $\{f>0\}$, $\{f=0\}$ e $\{f<0\}$ sono aperti, chiusi, limitati, connessi.

b) Trovare eventuali estremi locali e globali di f.

c) Giustificare l'integrabilità di $|f|$ sull'insieme $D = \{(x,y),\ x^2+y^2 \leq 1\}$; calcolare $\int\int_D |f|\,dxdy$ e darne un'interpretazione geometrica.

2. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\tanh y}{2\sqrt{t}}$$

a) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (motivare la risposta).

b) Utilizzare il teorema di esistenza globale per dimostrare che una soluzione del problema di Cauchy con dati $(t_0, y_0) \in D$ è prolungabile indefinitamente a destra di t_0. Cosa si può dire sul prolungamento a sinistra ?

c) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione. Tracciare i grafici qualitativi delle soluzioni dei problemi di Cauchy con dati $(1, \sinh^{-1} e)$ e $(1, -\sinh^{-1} e)$.
[$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ è la funzione inversa del seno iperbolico]

3. Studiare, al variare del parametro reale β, la stabilità dell'origine per il sistema lineare autonomo:

$$\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x + 2\beta\, y \end{cases}$$

Trovare in particolare:

i) Per quali valori di β tutte le soluzioni del sistema tendono a $\mathbf{0}$ per $t \to +\infty$.

ii) Per quali valori di β l'origine è, rispettivamente, un nodo, un centro, un fuoco.

Nel caso $\beta = 0$, disegnare nel piano delle fasi le traiettorie con il verso di percorrenza e scrivere l'integrale generale del sistema.

4. La superficie Σ è definita in *coordinate cilindriche* dall'equazione

$$\rho = 2 - z, \qquad 0 \le z \le 1$$

a) Trovare una parametrizzazione $\mathbf{r}$ tale che la coppia $(\Sigma, \mathbf{r})$ descriva una superficie orientata.

b) Sia $\mathbf{n}$ la normale alla superficie che soddisfa $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ in ogni punto. Calcolare il flusso attraverso Σ nella direzione $\mathbf{n}$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \mathrm{rot}\left(-\, xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{2}\,\mathbf{k}\right)$$

SOLUZIONI

1.

a) La funzione si annulla sulla retta $x = y$ e sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Dunque l'insieme di livello $f = 0$ è l'unione della retta e della circonferenza ed è chiuso, connesso, non limitato. L'insieme dove $f > 0$ è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 > 1,\ x \neq y\}$$

ed è aperto, non limitato e non connesso. L'insieme dove $f < 0$ è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1,\ x \neq y\}$$

ed è aperto, limitato e non connesso.

b) Dallo studio del segno di f segue che i punti con $x = y$ e $x^2 + y^2 < 1$ sono massimi locali, mentre i punti con $x = y$ e $x^2 + y^2 > 1$ sono minimi locali. Per trovare altri estremi locali, osserviamo che la funzione è differenziabile nell'aperto $x \neq y$ e cerchiamo i punti critici. Poiché la funzione soddisfa $f(x, y) = f(y, x)$, è sufficiente considerare i punti dell'aperto $x > y$. In questo insieme abbiamo $f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$ e

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1, \qquad f_y(x, y) = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \\ -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ricava $x^2 - y^2 = 0$ e dunque (essendo $x \neq y$) $x = -y$. L'unica soluzione che si trova nell'insieme $x > y$ è $x = 1/\sqrt{6}$, $y = -1/\sqrt{6}$. Il punto $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ appartiene al semicerchio $\{x^2 + y^2 < 1\} \cap \{x > y\}$, dove $f < 0$; poiché $f = 0$ sulla frontiera del semicerchio, il punto deve essere di minimo.
La stessa conclusione si ricava calcolando $f_{xx} = 6x - 2y$, $f_{xy} = -2x + 2y$, $f_{yy} = 2x - 6y$ e $H_f(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = 8$, $f_{xx}(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}/3$.
In definitiva, si trovano due punti $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ e $(-1/\sqrt{6}, +1/\sqrt{6})$ di minimo globale della f in $\mathbb{R}^2$. Il valore minimo è $f(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = f(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$. Non esistono massimi globali poiché la funzione non è superiormente limitata.

c) L'integrale esiste perchè la funzione $|f|$ è continua e l'insieme D è misurabile.

$$\int\int_D |f|\, dxdy = \text{(per simmetria)} = 2\int\int_{D\cap\{x>y\}} |f|\, dxdy$$

$$= 2\int\int_{D\cap\{x>y\}} (x - y)(1 - x^2 - y^2)\, dxdy = \text{(in coordinate polari)}$$

$$= 2\int_0^1 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(1 - \rho^2)(\cos\theta - \sin\theta) d\theta\, d\rho = \frac{8}{15}\sqrt{2}$$

L'integrale rappresenta il volume della regione (nel semi spazio $z \leq 0$) delimitata dal disco piano $\{x^2 + y^2 < 1\}$ e dalla superficie $z = f(x, y)$.

2.

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. La funzione al secondo membro

$$f(t,y) = \frac{\tanh y}{2\sqrt{t}}$$

e la sua derivata parziale

$$f_y(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{t}\cosh^2 y}$$

sono continue nel semipiano aperto $\{(t,y),\, t > 0\}$. Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate in D.

b) Per ogni $t_2 > t_1 > 0$, la funzione $f(t,y)$ soddisfa

$$|f(t,y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{t_1}}$$

nella regione $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}$. Per il teorema di esistenza globale, ogni soluzione del problema di Cauchy con dati $(t_0, y_0) \in (t_1, t_2) \times \mathbb{R}$ è definita in $[t_1, t_2]$. Per l'arbitrarietà di t_1 e t_2, si conclude che ogni soluzione è definita in $(0, +\infty)$.

c) La funzione costante $y = 0$ è soluzione dell'equazione. Le soluzioni non costanti soddisfano

$$\int \coth y\, dy = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt + c,$$

$$\log|\sinh y| = \sqrt{t} + c$$

da cui si ottiene (esponenziando e ridefinendo la costante)

$$\sinh y = c\, e^{\sqrt{t}}$$

Per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$, si ricava la soluzione esplicita $y = \sinh^{-1}(c\, e^{\sqrt{t}})$, definita per $t \geq 0$. La condizione $y(1) = \sinh^{-1} e$ equivale all'equazione $c\, e = e$, da cui si ricava $c = 1$; analogamente, la soluzione che soddisfa $y(1) = -\sinh^{-1} e$ corrisponde a $c = -1$.
La soluzione del primo problema è

$$\varphi(t) = \sinh^{-1}(e^{\sqrt{t}}) = \log\left(e^{\sqrt{t}} + \sqrt{e^{2\sqrt{t}} + 1}\right)$$

la soluzione del secondo è $-\varphi(t)$. La funzione φ è crescente, concava e asintotica a $\sqrt{t}$ per $t \to +\infty$.

3. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2\beta \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = 4 > 0$, l'origine è l'unico punto di equilibrio per ogni valore di β. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda - 2\beta) + 4 = \lambda^2 - 2\beta\lambda + 4 = 0$$

Dunque $\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 4}$, $\lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 4}$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile (cioè tutte le soluzioni tendono a zero per $t \to +\infty$) se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, quindi per $\beta < 0$. Per $\beta = 0$ si trovano gli autovalori immaginari $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, dunque l'origine è stabile, ma non asintoticamente. Per $\beta > 0$, entrambi gli autovalori hanno parte reale maggiore di zero e quindi l'origine è instabile.
L'origine è un nodo se gli autovalori sono reali e dello stesso segno, quindi per $|\beta| \geq 2$. Se $0 < |\beta| < 2$ gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale diversa da zero e l'origine è un fuoco; per $\beta = 0$ l'origine è un centro.
Nel caso $\beta = 0$, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$$

Le traiettorie sono le ellissi

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = C, \qquad C > 0$$

percorse in senso *antiorario*. L'integrale generale del sistema (in forma reale) si può scrivere

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t) \\ c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad (c_1,\, c_2 \in \mathbb{R})$$

4.

a) L'equazione descrive la superficie laterale di un tronco di cono con base maggiore sul piano xy. Scegliendo i parametri $u = \theta$ (l'angolo polare delle coordinate cilindriche) e $v = z$, l'insieme Σ è l'immagine della funzione

$$\mathbf{r}(u,v) = (2-v)\cos u\,\mathbf{i} + (2-v)\sin u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}, \qquad (u,v) \in T = [0,2\pi) \times [0,1]$$

Il vettore normale è

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = [\,-(2-v)\sin u\,\mathbf{i} + (2-v)\cos u\,\mathbf{j}\,] \wedge [\,-\cos u\,\mathbf{i} - \sin u\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,]$$

$$= (2-v)\cos u\,\mathbf{i} + (2-v)\sin u\,\mathbf{j} + (2-v)\,\mathbf{k}$$

Poiché $2 - v > 0$, la normale $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$ punta verso l'alto.
(Si può anche descrivere la superficie in forma cartesiana con l'equazione $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$, dove (x,y) varia nella corona circolare $1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2$)

b) Il calcolo si può svolgere in due modi: direttamente dalla definizione o utilizzando il teorema di Stokes. Nel primo caso si ricava

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}\Big(-xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{2}\,\mathbf{k}\Big) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Il flusso è allora:

$$\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int\!\!\int_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\,dudv$$

$$= \int_0^1 dv \int_0^{2\pi} du\,(2-v) = 3\pi$$

Per usare il teorema di Stokes, si osserva che il bordo orientato $\partial^+\Sigma$ della superficie è l'unione della circonferenza γ_1 di equazione $x^2+y^2=4$, $z=0$, percorsa una volta in senso *antiorario* e della circonferenza γ_2 di equazione $x^2+y^2=1$, $z=1$, percorsa una volta in senso *orario*. In questo caso:

$$\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\Big(-xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{2}\,\mathbf{k}\Big)\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = 3\pi$$