| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A | | Prova scritta del 24/11/2016 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** • (punti 5+2+2) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$(1+i)z = \sqrt{2}|z|.$$

- Detto $A$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione di cui al punto precedente, si determini l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = 1 - iz, z \in A\}$.
- Sia $C := \{u \in \mathbb{C} : u = e^z, z \in A\}$. Stabilire se $C$ è un insieme limitato, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|u| < k$ per ogni $u \in C$.

**Soluzione**. Scritto $z = x + iy$ l'uguaglianza richiesta diventa:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2} = (1+i)(x+iy) = x - y + i(x+y).$$

L'ultimo membro deve quindi essere reale, cioè va chiesto $y = -x$. L'equazione richiesta diventa allora $\sqrt{x^2} = x$, che è soddisfatta da ogni $x \geq 0$. Dunque l'insieme A delle soluzioni dell'equazione assegnata è dato dagli $z$ per cui $y = -x$ e $x \geq 0$, cioè è la semiretta $z = x - ix, x \geq 0$. La stessa conclusione poteva essere raggiunta scrivendo $z$ in forma esponenziale.

Riguardo al secondo punto, la moltiplicazione per $-i$ corrisponde a una rotazione in senso orario centrata nell'origine di ampiezza $\pi/2$, mentre aggiungere 1 significa traslare il luogo dei punti nella direzione positiva dell'asse reale. Dunque $B$ è la semiretta individuata dai punti $z = x + iy$ per cui $y = x - 1$ e $x \leq 1$.

Infine, per definizione di esponenziale complesso $|e^z| = e^x$. Ma tutti i punti della forma $z = x - ix$ con $x \geq 0$ appartengono ad $A$ e la funzione reale $e^x$, con $x > 0$, è illimitata, quindi C è illimitato.

**2.** (punti 4+5+3) Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, 3y - z, -3x - 2z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Determinare la dimensione del del nucleo di $f$ e, successivamente, una sua base.
- Detta $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $i = 1, 2, 3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(\boldsymbol{e}_1) = (2, 0, 1)$, $g(\boldsymbol{e}_3) = (1, -1, 2)$ e Ker $g$ = Ker $f$.
- Indicato con $\pi$ il piano contenente il punto $P = (5, -1, -3)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{w} = (1, -1, -1)^t$, si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^3$, l'immagine attraverso $g$ del vettore $(\alpha, 0, 2\alpha)^t$ appartiene al piano $\pi$.

**Soluzione**.

- È immediato verificare che il rango della matrice associata all'applicazione data è due. Dunque per il Teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo è uno. Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La cui soluzione è: $x = -2t$, $y = t$, $z = 3t$ per $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 3)$.
- Deve valere: $g(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, ovvero: $-2g(\boldsymbol{e}_1) + g(\boldsymbol{e}_2) + 3g(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0}$. Da cui: $g(\boldsymbol{e}_2) = 2g(\boldsymbol{e}_1) - 3g(\boldsymbol{e}_3)$.
  Pertanto $g(\boldsymbol{e}_2) = (1, 3, -4)$.
  La matrice associata alla funzione $g$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- L'equazione di un piano ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ è $x - y - z = d$. Imponendo che il punto $P$ appartiene al piano, si ha: $\pi : x - y - z = 9$.
  L'immagine del vettore $(\alpha, 0, 2\alpha)$ si calcola direttamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -2\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}$$

  Tale vettore appartiene al piano $\pi$ soltanto se $4\alpha + 2\alpha - 5\alpha = 9$. Dunque $\alpha = 9$.

**3.** (punti 4+7) Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h & h-1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è invertibile.
- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è diagonalizzabile.

**Soluzione**. Per il primo punto basta calcolare $\det A_h$ e stabilire quando esso non è zero. Calcoli elementari (si sviluppi lungo la prima colonna e poi, nella matrice 3x3 risultante, lungo la prima riga, mostrano che $\det A_h = h(1+h)$. Dunque la matrice è invertibile se e solo se $h \neq 0, h \neq -1$.

Per la seconda domanda calcoliamo dapprima gli autovalori. Calcoli elementari mostrano che il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ è dato da

$$P(\lambda) = (h-\lambda)(-1-\lambda)[\lambda^2 - \lambda h - (h+1)].$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda = h$, $\lambda = h+1$ e $\lambda = -1$. La molteplicità algebrica di $\lambda = -1$ è due se $h \neq -1, h \neq -2$, tre altrimenti.

L'unico autovalore non semplice è, in ogni caso, $\lambda = -1$. Scriviamo esplicitamente $A_h + \mathbb{1}$. Si ha:

$$A_h + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è chiaramente, per ogni $h$, pari a due o a tre: la seconda riga è zero, dunque il rango non è quattro, la terza riga non è zero, dunque il rango è maggiore o uguale a uno, ma almeno una delle altre due righe non nulle non è né zero né proporzionale alla terza.

Se $h = -1$, il rango di $A_A + \mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-1$ è due, ma la molteplicità algebrica è in tal caso tre, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

Se $h = 0$, il rango di $A_0 + \mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-1$ è due, la molteplicità algebrica è in tal caso due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Se $h \neq 0, h \neq -1$, il rango di $A_h + \mathbb{1}$ è tre (scegliere le prime tre colonne, e le tre righe non nulle) e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-1$ è uno, ma la molteplicità algebrica è due, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

La matrice è quindi diagonalizzabile se e solo se $h = 0$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Prova scritta del 24/11/2016** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.**
- (punti 5+2+2) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$(1+i)\overline{z} = \sqrt{2}|z|.$$

- Detto $A$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione di cui al punto precedente, si determini l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = 1 + iz, z \in A\}$.
- Sia $C := \{u \in \mathbb{C} : u = e^z, z \in A\}$. Stabilire se $C$ è un insieme limitato, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|u| < k$ per ogni $u \in C$.

**Soluzione**. Scritto $z = x + iy$ l'uguaglianza richiesta diventa:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2} = (1+i)(x-iy) = x + y + i(x-y).$$

L'ultimo membro deve quindi essere reale, cioè va chiesto $y = x$. L'equazione richiesta diventa allora $\sqrt{x^2} = x$, che è soddisfatta da ogni $x \geq 0$. Dunque l'insieme A delle soluzioni dell'equazione assegnata è dato dagli $z$ per cui $y = x$ e $x \geq 0$, cioè è la semiretta $z = x + ix, x \geq 0$. La stessa conclusione poteva essere raggiunta scrivendo $z$ in forma esponenziale.

Riguardo al secondo punto, la moltiplicazione per $i$ corrisponde a una rotazione in senso antiorario centrata nell'origine di ampiezza $\pi/2$, mentre aggiungere 1 significa traslare il luogo dei punti nella direzione positiva dell'asse reale. Dunque $B$ è la semiretta individuata dai punti $z = x + iy$ per cui $y = 1 - x$ e $x \leq 1$.

Infine, per definizione di esponenziale complesso $|e^z| = e^x$. Ma tutti i punti della forma $z = x + ix$ con $x \geq 0$ appartengono ad $A$ e la funzione reale $e^x$, con $x > 0$, è illimitata, quindi C è illimitato.

**2.** (punti 4+5+3) Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (3x + z, 4x + y, -x + 2y - 3z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Determinare la dimensione del del nucleo di $f$ e, successivamente, una sua base.
- Detta $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $i = 1, 2, 3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(\boldsymbol{e}_2) = (1, 0, 2)$, $g(\boldsymbol{e}_3) = (-1, 1, -2)$ e Ker $g$ = Ker $f$.
- Indicato con $\pi$ il piano contenente il punto $P = (10, 7, 2)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{w} = (1, 1, -1)^t$, si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^3$, l'immagine attraverso $g$ del vettore $(0, -\alpha, 2\alpha)^t$ appartiene al piano $\pi$.

**Soluzione**.

- È immediato verificare che il rango della matrice associata all'applicazione data è due. Dunque per il Teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo è uno. Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La cui soluzione è: $x = t$, $y = -4t$, $z = -3t$ per $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $\boldsymbol{v} = (1, -4, -3)$.

- Deve valere: $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, ovvero: $g(\boldsymbol{e}_1) - 4g(\boldsymbol{e}_2) - 3g(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{0}$. Da cui: $g(\boldsymbol{e}_1) = 4g(\boldsymbol{e}_2) + 3g(\boldsymbol{e}_3)$.
  Pertanto $g(\boldsymbol{e}_1) = (1, 3, 2)$.
  La matrice associata alla funzione $g$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- L'equazione di un piano ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ è $x + y - z = d$. Imponendo che il punto $P$ appartiene al piano, si ha: $\pi : x + y - z = 15$.
  L'immagine del vettore $(0, -\alpha, 2\alpha)$ si calcola direttamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 2\alpha \\ -6\alpha \end{pmatrix}$$

  Tale vettore appartiene al piano $\pi$ soltanto se $-3\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 15$. Dunque $\alpha = 3$.

**3.** (punti 4+7) Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & h & h-2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è invertibile.
- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è diagonalizzabile.

**Soluzione**. Per il primo punto basta calcolare $\det A_h$ e stabilire quando esso non è zero. Calcoli elementari (si sviluppi lungo la prima colonna e poi, nella matrice 3x3 risultante, lungo la prima riga, mostrano che $\det A_h = 4h(1+h)$. Dunque la matrice è invertibile se e solo se $h \neq 0, h \neq -1$.

Per la seconda domanda calcoliamo dapprima gli autovalori. Calcoli elementari mostrano che il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ è dato da
$$P(\lambda) = (h-\lambda)(-2-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(h-1) - 2(h+1)].$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda = h$, $\lambda = h+1$ e $\lambda = -2$. La molteplicità algebrica di $\lambda = -2$ è due se $h \neq -2, h \neq -3$, tre altrimenti.

L'unico autovalore non semplice è, in ogni caso, $\lambda = -2$. Scriviamo esplicitamente $A_h + 2\mathbb{1}$. Si ha:
$$A_h + 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} h+2 & 0 & h+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è chiaramente, per ogni $h$, pari a due o a tre: la seconda riga è zero, dunque il rango non è quattro, la terza riga non è zero, dunque il rango è maggiore o uguale a uno, ma almeno una delle altre due righe non nulle non è né zero né proporzionale alla terza.

Se $h = -2$, il rango di $A_A + 2\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-2$ è due, ma la molteplicità algebrica è in tal caso tre, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

Se $h = 0$, il rango di $A_0 + 2\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-2$ è due, la molteplicità algebrica è in tal caso due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Se $h \neq 0, h \neq -2$, il rango di $A_h + 2\mathbb{1}$ è tre (scegliere le prime tre colonne, e le tre righe non nulle) e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $-2$ è uno, ma la molteplicità algebrica è due, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

La matrice è quindi diagonalizzabile se e solo se $h = 0$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione C** | | **Prova scritta del 24/11/2016** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** • (punti 5+2+2) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$-(1+i)z = \sqrt{2}|z|.$$

• Detto $A$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione di cui al punto precedente, si determini l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = 3 - 2iz, z \in A\}$.

• Sia $C := \{u \in \mathbb{C} : u = e^{-z}, z \in A\}$. Stabilire se $C$ è un insieme limitato, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|u| < k$ per ogni $u \in C$.

**Soluzione**. Scritto $z = x + iy$ l'uguaglianza richiesta diventa:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2} = -(1+i)(x+iy) = y - x - i(x+y).$$

L'ultimo membro deve quindi essere reale, cioè va chiesto $x = -y$. L'equazione richiesta diventa allora $\sqrt{y^2} = y$, che è soddisfatta da ogni $y \geq 0$. Dunque l'insieme A delle soluzioni dell'equazione assegnata è dato dagli $z$ per cui $x = -y$ e $y \geq 0$, cioè è la semiretta $z = -y + iy, y \geq 0$. La stessa conclusione poteva essere raggiunta scrivendo $z$ in forma esponenziale.

Riguardo al secondo punto, la moltiplicazione per $-i$ corrisponde a una rotazione in senso orario centrata nell'origine di ampiezza $\pi/2$, ottenendo così la semiretta $z = x + ix$ con $x \geq 0$. Tale semiretta è lasciata invariata dalla moltiplicazione per 2, mentre aggiungere 3 significa traslare di tre unità il luogo dei punti nella direzione positiva dell'asse reale. Dunque $B$ è la semiretta individuata dai punti $z = x + iy$ per cui $y = x - 3$ e $x \geq 3$.

Infine, se $z = -y + iy$ come accade in $A$, per definizione di esponenziale complesso $|e^{-z}| = e^y$. Ma tutti i punti della forma $z = -y + iy$ con $y \geq 0$ appartengono ad $A$ e la funzione reale $e^y$, con $y > 0$, è illimitata, quindi C è illimitato.

**2.** (punti 4+5+3) Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (y + 2z, -x + 3z, -2x - 3y) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Determinare la dimensione del del nucleo di $f$ e, successivamente, una sua base.
- Detta $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $i = 1, 2, 3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(\boldsymbol{e}_1) = (1, -1, 2)$, $g(\boldsymbol{e}_2) = (2, 0, 1)$ e $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.
- Indicato con $\pi$ il piano contenente il punto $P = (1, -1, 1)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{w} = (1, -1, 2)^t$, si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^3$, l'immagine attraverso $g$ del vettore $(2\alpha, \alpha, 0)^t$ appartiene al piano $\pi$.

**Soluzione**.

- È immediato verificare che il rango della matrice associata all'applicazione data è due. Dunque per il Teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo è uno. Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La cui soluzione è: $x = 3t$, $y = -2t$, $z = t$ per $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $\boldsymbol{v} = (3, -2, 1)$.
- Deve valere: $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, ovvero: $3g(\boldsymbol{e}_1) - 2g(\boldsymbol{e}_2) + g(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{0}$. Da cui: $g(\boldsymbol{e}_3) = 2g(\boldsymbol{e}_2) - 3g(\boldsymbol{e}_1)$.
  Pertanto $g(\boldsymbol{e}_3) = (1, 3, -4)$.
  La matrice associata alla funzione $g$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- L'equazione di un piano ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ è $x - y + 2z = d$. Imponendo che il punto $P$ appartiene al piano, si ha: $\pi : x - y + 2z = 4$.
  L'immagine del vettore $(2\alpha, \alpha, 0)$ si calcola direttamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -2\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}$$

  Tale vettore appartiene al piano $\pi$ soltanto se $4\alpha + 2\alpha + 10\alpha = 4$. Dunque $\alpha = \frac{1}{4}$.

**3.** (punti 4+7) Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h & h+2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è invertibile.
- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è diagonalizzabile.

**Soluzione**. Per il primo punto basta calcolare $\det A_h$ e stabilire quando esso non è zero. Calcoli elementari (si sviluppi lungo la prima colonna e poi, nella matrice 3x3 risultante, lungo la prima riga, mostrano che $\det A_h = 4h(1+h)$. Dunque la matrice è invertibile se e solo se $h \neq 0, h \neq -1$.

Per la seconda domanda calcoliamo dapprima gli autovalori. Calcoli elementari mostrano che il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ è dato da
$$P(\lambda) = (h-\lambda)(2-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(3+h) + 2(h+1)].$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda = h$, $\lambda = h+1$ e $\lambda = 2$. La molteplicità algebrica di $\lambda = 2$ è due se $h \neq 2, h \neq 1$, tre altrimenti.

L'unico autovalore non semplice è, in ogni caso, $\lambda = 2$. Scriviamo esplicitamente $A_h - 2\mathbb{1}$. Si ha:
$$A_h - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} h-2 & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è chiaramente, per ogni $h$, pari a due o a tre: la seconda riga è zero, dunque il rango non è quattro, la terza riga non è zero, dunque il rango è maggiore o uguale a uno, ma almeno una delle altre due righe non nulle non è né zero né proporzionale alla terza.

Se $h = 2$, il rango di $A_2 - 2\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è due, ma la molteplicità algebrica è in tal caso tre, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

Se $h = 0$, il rango di $A_0 - 2\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è due, la molteplicità algebrica è in tal caso due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Se $h \neq 0, h \neq 2$, il rango di $A_h - 2\mathbb{1}$ è tre (scegliere le prime tre colonne, e le tre righe non nulle) e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è uno, ma la molteplicità algebrica è due, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

La matrice è quindi diagonalizzabile se e solo se $h = 0$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione D** | | **Prova scritta del 24/11/2016** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** • (punti 5+2+2) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$-(1+i)\overline{z} = \sqrt{2}|z|.$$

- Detto $A$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione di cui al punto precedente, si determini l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = -1 + 3iz, z \in A\}$.
- Sia $C := \{u \in \mathbb{C} : u = e^{-z}, z \in A\}$. Stabilire se $C$ è un insieme limitato, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|u| < k$ per ogni $u \in C$.

**Soluzione**. Scritto $z = x + iy$ l'uguaglianza richiesta diventa:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+y^2} = -(1+i)(x-iy) = -y-x+i(y-x).$$

L'ultimo membro deve quindi essere reale, cioè va chiesto $y = x$. L'equazione richiesta diventa allora $\sqrt{x^2} = -x$, che è soddisfatta da ogni $x \le 0$. Dunque l'insieme A delle soluzioni dell'equazione assegnata è dato dagli $z$ per cui $y = x$ e $x \le 0$, cioè è la semiretta $z = x + ix, x \le 0$. La stessa conclusione poteva essere raggiunta scrivendo $z$ in forma esponenziale.

Riguardo al secondo punto, la moltiplicazione per $i$ corrisponde a una rotazione in senso antiorario centrata nell'origine di ampiezza $\pi/2$, ottenendo così la semiretta $z = x - ix$ con $x \ge 0$. Tale semiretta è lasciata invariata dalla moltiplicazione per 3, mentre aggiungere -1 significa traslare di una unità il luogo dei punti nella direzione negativa dell'asse reale. Dunque $B$ è la semiretta individuata dai punti $z = x + iy$ per cui $y = -x - 1$ e $x \ge 1$.

Infine, se $z = x + ix$ come accade in $A$, per definizione di esponenziale complesso $|e^{-z}| = e^{-x}$. Ma tutti i punti della forma $z = x + ix$ con $x \le 0$ appartengono ad $A$ e la funzione reale $e^{-x}$, con $x < 0$, è illimitata, quindi C è illimitato.

**2.** (punti 4+5+3) Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (y + 3z, x + 4z, 2x - 3y - z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Determinare la dimensione del del nucleo di $f$ e, successivamente, una sua base.
- Detta $\{\boldsymbol{e}_i\}$ $i = 1, 2, 3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(\boldsymbol{e}_1) = (1, 0, 2)$, $g(\boldsymbol{e}_2) = (-1, 1, -2)$ e Ker $g$ = Ker $f$.
- Indicato con $\pi$ il piano contenente il punto $P = (3, -1, -5)$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{w} = (-1, 1, 1)^t$, si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^3$, l'immagine attraverso $g$ del vettore $(\alpha, -2\alpha, 0)^t$ appartiene al piano $\pi$.

**Soluzione**.

- È immediato verificare che il rango della matrice associata all'applicazione data è due. Dunque per il Teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo è uno. Per determinare il nucleo si risolve il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La cui soluzione è: $x = -4t$, $y = -3t$, $z = t$ per $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo può essere scelto il vettore $\boldsymbol{v} = (-4, -3, 1)$.
- Deve valere: $g(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, ovvero: $-4g(\boldsymbol{e}_1) - 3g(\boldsymbol{e}_2) + g(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0}$. Da cui: $g(\boldsymbol{e}_3) = 4g(\boldsymbol{e}_1) + 3g(\boldsymbol{e}_2)$.
  Pertanto $g(\boldsymbol{e}_3) = (1, 3, 2)$.
  La matrice associata alla funzione $g$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- L'equazione di un piano ortogonale al vettore $\boldsymbol{w}$ è $-x + y + z = d$. Imponendo che il punto $P$ appartiene al piano, si ha: $\pi : x - y - z = 9$.
  L'immagine del vettore $(\alpha, -2\alpha, 0)$ si calcola direttamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ -2\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}$$

  Tale vettore appartiene al piano $\pi$ soltanto se $3\alpha + 2\alpha - 6\alpha = 9$. Dunque $\alpha = -9$.

**3.** (punti 4+7) Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h-3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & h & h+3 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è invertibile.
- Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ è diagonalizzabile.

**Soluzione**. Per il primo punto basta calcolare $\det A_h$ e stabilire quando esso non è zero. Calcoli elementari (si sviluppi lungo la prima colonna e poi, nella matrice 3x3 risultante, lungo la prima riga, mostrano che $\det A_h = 9h(1+h)$. Dunque la matrice è invertibile se e solo se $h \neq 0, h \neq -1$.

Per la seconda domanda calcoliamo dapprima gli autovalori. Calcoli elementari mostrano che il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ è dato da
$$P(\lambda) = (h-\lambda)(3-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(4+h) + 3(h+1)].$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda = h$, $\lambda = h+1$ e $\lambda = 3$. La molteplicità algebrica di $\lambda = 3$ è due se $h \neq 3, h \neq 2$, tre altrimenti.

L'unico autovalore non semplice è, in ogni caso, $\lambda = 3$. Scriviamo esplicitamente $A_h - 3\mathbb{1}$. Si ha:
$$A_h - 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} h-3 & 0 & h-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è chiaramente, per ogni $h$, pari a due o a tre: la seconda riga è zero, dunque il rango non è quattro, la terza riga non è zero, dunque il rango è maggiore o uguale a uno, ma almeno una delle altre due righe non nulle non è né zero né proporzionale alla terza.

Se $h = 3$, il rango di $A_3 - 3\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è due, ma la molteplicità algebrica è in tal caso tre, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

Se $h = 0$, il rango di $A_0 - 3\mathbb{1}$ è due e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è due, la molteplicità algebrica è in tal caso due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Se $h \neq 0, h \neq 3$, il rango di $A_h - 3\mathbb{1}$ è tre (scegliere le prime tre colonne, e le tre righe non nulle) e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 è uno, ma la molteplicità algebrica è due, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

La matrice è quindi diagonalizzabile se e solo se $h = 0$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 30/1/2017** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\,[\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)] + 3x^4}{\sin(x^5) - x^6 + 2x^4}.$$

**Soluzione**. Notiamo dapprima che $\sin(x^5) - x^6 + 2x^4 = 2x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$. Dunque sarà sufficiente sviluppare anche il numeratore al quarto ordine. Si ha, sempre per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x) =& \cos\left(3x + x^3 + o(x^4)\right) - \cos\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) \\
=& 1 - \frac{1}{2}\left(3x + x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(3x + x^3 + o(x^4)\right)^4 \\
&- 1 + \frac{1}{2}\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{24}\left(3x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\
=& 1 - \frac{9}{2}x^2 - 3x^4 + \frac{81}{24}x^4 - 1 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{81}{24}x^4 + o(x^4) \\
=& -\frac{9}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi evidentemente, essendo $\cos x = 1 + o(1)$ per $x \to 0$

$$\cos x\,[\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)] + 3x^4 = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$$

Dunque vale:

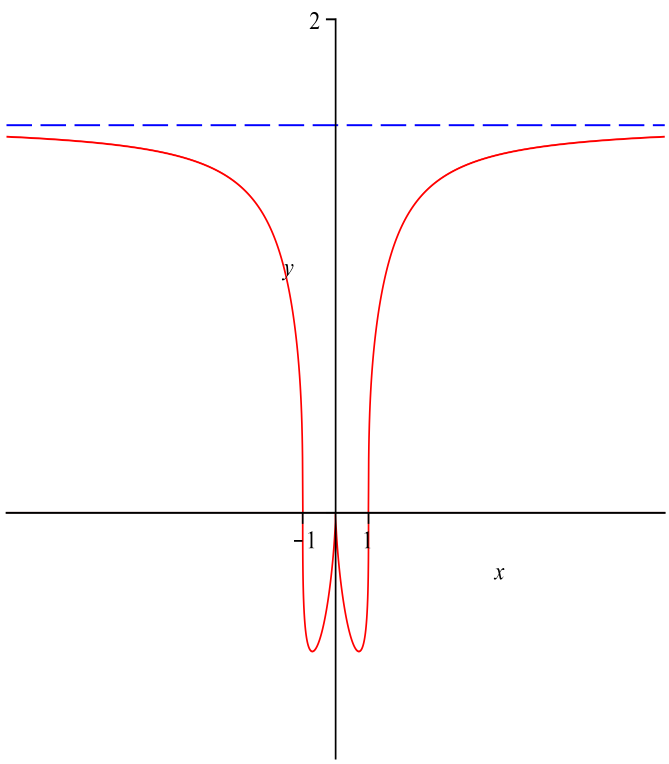
$$\frac{\cos x\,[\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)] + 3x^4}{\sin(x^5) - x^6 + 2x^4} = \frac{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{3}{4}$$

**2.** (punti 12) Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x^4 - x^2}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è pari, la studieremo dunque solo per $x \geq 0$ ed estenderemo poi i risultati a $x < 0$ per simmetria. Vale chiaramente
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- .$$
La funzione è positiva se $x^4 - x^2 > 0$ cioè, nel dominio considerato, se $x > 1$. È negativa se $x \in (0, 1)$. Vale $f(0) = f(1) = 0$. La funzione è derivabile se l'argomento della radice non è zero, cioè se $x \neq 0, x \neq 1$. Per tali $x$ calcoli elementari mostrano che si ha:
$$f'(x) = \frac{2x(2x^2 - 1)}{3(x^4 - x^2)^{\frac{2}{3}}\left[1 + (x^4 - x^2)^{\frac{2}{3}}\right]} \qquad x \neq 0, x \neq 1.$$
Si noti che il denominatore è sempre positivo per $x \neq 0, x \neq 1$. Vale:
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to1} f'(x) = +\infty,$$
il secondo di tali limiti essendo ovvio, mentre per il primo va notato che $f'(x) \sim -2x/(3x^{4/3}) = -2/(3x^{1/3})$. Dunque corrispondentemente a entrambi tali valori di $x$ la funzione, che non è ivi derivabile, ha tangente che tende a diventare verticale. Sebbene ciò non sia immediato senza il calcolo della derivata seconda (non richiesta) ci si può aspettare, dato lo studio del segno e dei limiti precedentemente svolti, che $x = 1$ sia punto di flesso a tangente verticale, mentre è chiaro che, in base a considerazioni di simmetria, $x = 0$ risulterà essere punto di cuspide.

Lo studio del segno di $f'$ è immediato: si ha infatti $f'(x) > 0$ per $x > 1/\sqrt{2}$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 1/\sqrt{2})$, dunque $x = 1/\sqrt{2}$ è punto di minimo locale, e ovviamente anche globale in base alle informazioni su $f$ già dimostrate. Di nuovo per considerazioni di simmetria si ha che $x = 0$ è punto di massimo locale (non esistono punti di massimo globale).

Estendendo il grafico a $x < 0$ per riflessione rispetto all'asse $y$, ne segue che il grafico della funzione è il seguente:



**3.** (punti 7+3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2\cosh(8x)}$$

- Calcolare la primitiva di $f$ che si annulla nell'origine;
- Stabilire per quali $a > 0$ esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Soluzione**. Usando la sostituzione $e^{8x} = t$, cosicché $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/8$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+2\cosh(8x)x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+e^{8x}+e^{-8x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{8x}}{e^{16x}+e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]+c \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\right]+c,
\end{aligned}$$

con $c$ costante reale. Si noti ora che

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

Dunque la primitiva cercata corrisponde a $c = -\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Circa la seconda domanda si noti quanto segue. Prima di tutto la funzione integranda $e^{at} f(t)$ è ovunque continua, dunque l'integrale scritto è ben definito per ogni $x$. Inoltre,

$$e^{at} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{(a-8)t}.$$

e tale ultima funzione è integrabile in senso generalizzato all'infinito se e solo se $a < 8$. Il teorema del confronto asintotico (le funzioni in gioco sono positive) mostra quindi che il limite indicato esiste finito se e solo se $a < 8$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Totale |
|---|---|---|---|
| | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Prova scritta del 30/1/2017** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x\left[\cos(3\tan x)-\cos(3\sin x)\right]+6x^4}{\sin(x^6)-x^5+3x^4}.$$

**Soluzione**. Notiamo dapprima che $\sin(x^5)-x^6+3x^4=3x^4+o(x^4)$ per $x\to 0$. Dunque sarà sufficiente sviluppare anche il numeratore al quarto ordine. Si ha, sempre per $x\to 0$:

$$\begin{aligned}
\cos(3\tan x)-\cos(3\sin x) =& \cos\left(3x+x^3+o(x^4)\right)-\cos\left(3x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)\\
=&1-\frac{1}{2}\left(3x+x^3+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{24}\left(3x+x^3+o(x^4)\right)^4\\
&-1+\frac{1}{2}\left(3x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)^2-\frac{1}{24}\left(3x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\
=&1-\frac{9}{2}x^2-3x^4+\frac{81}{24}x^4-1+\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x^4-\frac{81}{24}x^4+o(x^4)\\
&=-\frac{9}{2}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi evidentemente, essendo $e^x=1+o(1)$ per $x\to 0$

$$2e^x\left[\cos(3\tan x)-\cos(3\sin x)\right]+6x^4=-3x^4+o(x^4)$$

Dunque vale:

$$\frac{\cos x\left[\cos(3\tan x)-\cos(3\sin x)\right]+3x^4}{\sin(x^5)-x^6+3x^4}=\frac{-3x^4+o(x^4)}{3x^4+o(x^4)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$$

**2.** (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x^4 - 4x^2}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è pari, la studieremo dunque solo per $x \geq 0$ ed estenderemo poi i risultati a $x < 0$ per simmetria. Vale chiaramente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- .$$

La funzione è positiva se $x^4 - 4x^2 > 0$ cioè, nel dominio considerato, se $x > 2$. È negativa se $x \in (0, 2)$. Vale $f(0) = f(2) = 0$. La funzione è derivabile se l'argomento della radice non è zero, cioè se $x \neq 0, x \neq 2$. Per tali $x$ calcoli elementari mostrano che si ha:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 2)}{3(x^4 - 4x^2)^{\frac{2}{3}} \left[1 + (x^4 - 4x^2)^{\frac{2}{3}}\right]} \quad x \neq 0, x \neq 1.$$

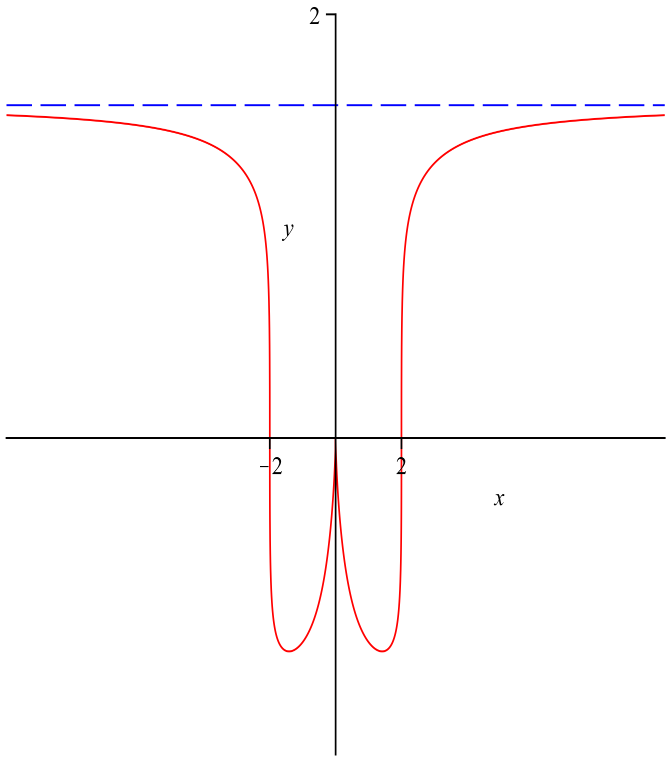
Si noti che il denominatore è sempre positivo per $x \neq 0, x \neq 1$. Vale:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2} f'(x) = +\infty,$$

il secondo di tali limiti essendo ovvio, mentre per il primo va notato che $f'(x) \sim -8x/(3 \cdot 4^{2/3} x^{4/3}) = -c/(x^{1/3})$ per un opportuno $c > 0$. Dunque corrispondentemente a entrambi tali valori di $x$ la funzione, che non è ivi derivabile, ha tangente che tende a diventare verticale. Sebbene ciò non sia immediato senza il calcolo della derivata seconda (non richiesta) ci si può aspettare, dato lo studio del segno e dei limiti precedentemente svolti, che $x = 1$ sia punto di flesso a tangente verticale, mentre è chiaro che, in base a considerazioni di simmetria, $x = 0$ risulterà essere punto di cuspide.

Lo studio del segno di $f'$ è immediato: si ha infatti $f'(x) > 0$ per $x > \sqrt{2}$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \sqrt{2})$, dunque $x = \sqrt{2}$ è punto di minimo locale, e ovviamente anche globale in base alle informazioni su $f$ già dimostrate. Di nuovo per considerazioni di simmetria si ha che $x = 0$ è punto di massimo locale (non esistono punti di massimo globale).

Estendendo il grafico a $x < 0$ per riflessione rispetto all'asse $y$, ne segue che il grafico della funzione è il seguente:



**3.** (punti 7+3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2\cosh(6x)}$$

- Calcolare la primitiva di $f$ che si annulla nell'origine;
- Stabilire per quali $a > 0$ esiste finito

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Soluzione**. Usando la sostituzione $e^{6x} = t$, cosicché $e^{6x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/6$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+2\cosh(6x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+e^{6x}+e^{-6x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{6x}}{e^{12x}+e^{6x}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]+c \\
&= \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{2x}+\frac{1}{2}\right)\right]+c,
\end{aligned}$$

con $c$ costante reale. Si noti ora che

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Dunque la primitiva cercata corrisponde a $c = -\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$.

Circa la seconda domanda si noti quanto segue. Prima di tutto la funzione integranda $e^{at} f(t)$ è ovunque continua, dunque l'integrale scritto è ben definito per ogni $x$. Inoltre,

$$e^{at} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{(a-6)t}.$$

e tale ultima funzione è integrabile in senso generalizzato all'infinito se e solo se $a < 6$. Il teorema del confronto mostra quindi che il limite indicato esiste finito se e solo se $a < 6$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 15/2/2017** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 4+3) Determinare per quale valore del parametro $h$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & h-1 & 1 \\ 1 & -h & 3 \\ 3 & 2h & -1 \end{pmatrix}$$

ammette come autovalore $\lambda = 4$. Per tale valore di $h$ si si stabilisca se la matrice sia diagonalizzabile.

**Soluzione**. Detta $A_h$ la matrice in questione e posto $\lambda_1 = 4$, deve valere: $\det(A_h - \lambda_1 \mathbb{I}) = 0$. Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & h-1 & 1 \\ 1 & -h-4 & 3 \\ 3 & 2h & -5 \end{pmatrix} = 21h - 42 = 0$$

Pertanto $h = 2$.

Per rispondere al secondo punto occorre determinare i restanti autovalori della matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A_2 - \lambda \mathbb{I}) = 0$.
Si ottiene: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 20\lambda = 0$, da cui si ricavano le soluzioni: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -5$. Tali autovalori risultano tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

Per determinare gli autovalori si poteva precedere anche nel seguente modo. Innanzitutto è evidente che la matrice ha rango due, infatti la terza colonna risulta uguale alla differenza delle prime due colonne, quindi $\det A = 0$ e $\lambda_2 = 0$ è autovalore della matrice $A$. Ricordando inoltre che la traccia della matrice è la somma degli autovalori, si ha: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr } A = -1$, da cui $\lambda_3 = -5$.

**2.** (punti 7) Stabilire se esistono valori del parametro $a > 0$ tali che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^a}\left[\cos\left(\frac{8}{\cos(\sin x)} - \frac{8}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}}\right) - 1\right]$$

esista finito e diverso da zero, e in caso affermativo calcolare tale limite per tali valori di $a$.

**Soluzione**. Si noti che, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos(\sin x)} - \frac{1}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}} = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^4 + o(x^4)} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} \\
&= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} - \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} \\
&= \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4) - \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)} \\
&= \frac{-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{1+o(1)} = -\frac{x^4}{24} + o(x^4)
\end{aligned}$$

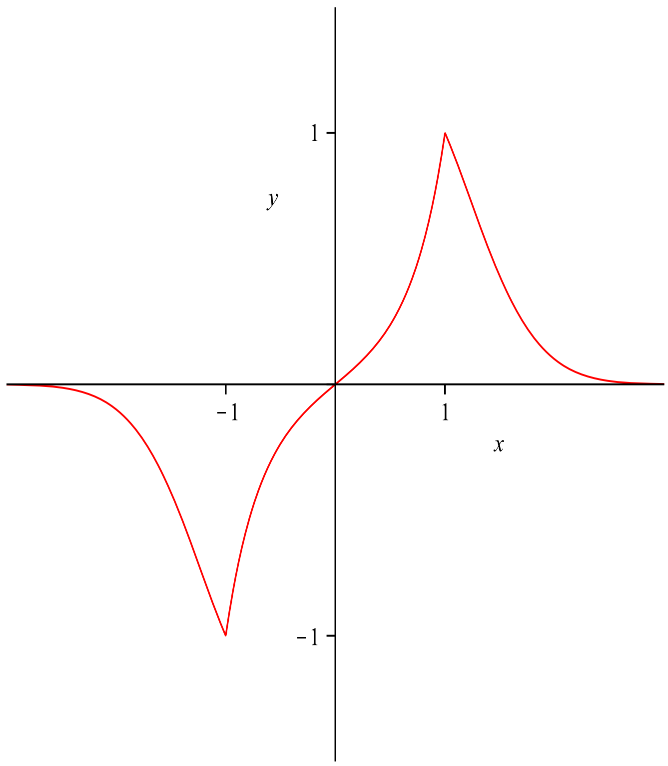
Quindi:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{8}{\cos(\sin x)} - \frac{8}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}}\right) - 1 = \cos\left(-\frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - 1 \\
&= -\frac{x^8}{18} + o(x^8).
\end{aligned}$$

Dunque il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 8$, e in tal caso il limite vale $-\frac{1}{18}$.

**3.** (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = xe^{-|x^2-1|}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è ovunque definita ed è dispari. La studieremo quindi solo per $x \geq 0$ e poi disegneremo la restante parte del grafico per simmetria rispetto all'origine. Vale $f(0) = 0$, $f(x) > 0\ \forall x > 0$. è inoltre chiaro che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. La funzione è derivabile per $x \neq 1$. Calcoliamo la derivata prima per $x \in [0, 1)$:
$$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2-1}, \quad \forall x \in [0, 1).$$
Dunque $f$ è crescente per $x \in [0, 1)$. Si noti che $f'(0) = 1/e$ e che $f'_-(1) = 3$. Per $x > 1$ si ha invece
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}, \quad \forall x > 1.$$
Quindi $f$ è decrescente per $x > 1$. Si osserva quindi che $x = 1$ è un punto angoloso e inoltre chiaramente è punto di massimo assoluto, con $f(1) = 1$ (ne segue che $x = -1$ è punto di minimo assoluto, con $f(-1) = -1$). Si noti che $f'_+(1) = -1$. Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x \neq 1$. Vale:
$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}, \quad \forall x \in [0, 1).$$
Quindi $f$ è convessa in $[0, 1]$. Inoltre
$$f''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{1-x^2}, \quad \forall x > 1.$$
Quindi $f$ è convessa in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, concava in $\left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. Il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è di flesso. È inoltre chiaro che $f$ cambia concavità in $x = 0$, che è dunque anch'esso punto di flesso. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



**4.** (punti 4+4) Posto $f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha}\log(\sqrt{x-1}+x)$ , discutere l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

al variare del parametro reale $\alpha$ .

Successivamente determinare una primitiva di $f(x)$ per $\alpha = 1/2$ .

**Soluzione**. L'argomento del logaritmo è una funzione crescente nella variabile $x$ e si annulla solo per $x = 1$ , valore che risulta essere l'unica singolarità dell funzione integranda.
L'integrale può essere scritto come somma di due integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{3} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

rispettivamente di prima e seconda specie.
Per $x \to 1^+$ , si ha $\log(\sqrt{x-1}+x) \sim \sqrt{x-1}$ , pertanto $f(x) \sim (x-1)^{1/2-\alpha}$ .
l'integrale improprio di prima specie converge solo se $\alpha - 1/2 < 1$ , ovvero se $\alpha < 3/2$ .
Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim x^{-\alpha}\log x$ .
l'integrale improprio di seconda specie converge solo se $\alpha > 1$ .
Dunque l'integrale esiste in senso generalizzato se e solo se $1 < \alpha < 3/2$ .

Per determinare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\log(\sqrt{x-1}+x)$ operiamo la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$ , da cui si ricava che $x = t^2+1$ e $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ .
Quindi:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\log(\sqrt{x-1}+x)\mathrm{d}x = 2\int \log(t^2+t+1)\mathrm{d}t$$

Integrando per parti:

$$F(x) = 2t\log(t^2+t+1) - 2\int \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

Con alcuni facili passaggi algebrici l'integranda al secondo membro si decompone in fratti semplici:

$$\begin{aligned}2\int \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t &= 4\int \mathrm{d}t - \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t - 3\int \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t = \\ &= 4t - \log(t^2+t+1) - 3\int \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] + c\end{aligned}$$

Tornando alla variabile $x$ si ha:

$$\begin{aligned}F(x) &= 2\sqrt{x-1}\log(\sqrt{x-1}+x) - 4\sqrt{x-1} + \log(\sqrt{x-1}+x) + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\right)\right] + c \\ &= (2\sqrt{x-1}+1)\log(\sqrt{x-1}+x) - 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\right)\right] + c\end{aligned}$$

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Prova scritta del 15/9/2016** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 4+3) Determinare per quale valore del parametro $h$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3h & 7 \\ 2 & h & 4 \\ 3 & h+2 & 1 \end{pmatrix}$$

ammette come autovalore $\lambda = -4$. Per tale valore di $h$ si si stabilisca se la matrice sia diagonalizzabile.

**Soluzione**. Detta $A_h$ la matrice in questione e posto $\lambda_1 = -4$, deve valere: $\det(A_h - \lambda_1 \mathbb{I}) = 0$. Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3h & 7 \\ 2 & h & 4 \\ 3 & h+2 & 1 \end{pmatrix} = 4h + 4 = 0$$

Pertanto $h = -1$.
Per rispondere al secondo punto occorre determinare i restanti autovalori della matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A_2 - \lambda \mathbb{I}) = 0$.
Si ottiene: $-\lambda^3 + \lambda^2 + 20\lambda = 0$, da cui si ricavano le soluzioni: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5$. Tali autovalori risultano tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

Per determinare gli autovalori si poteva precedere anche nel seguente modo. Innanzitutto è evidente che la matrice ha rango due, infatti la terza colonna risulta uguale alla differenza tra la prima e il doppio della seconda colonna, quindi $\det A = 0$ e $\lambda_2 = 0$ è autovalore della matrice $A$. Ricordando che la traccia della matrice è la somma degli autovalori, si ha: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Tr}\, A = 1$, da cui $\lambda_3 = 5$.
Gli autovalori risultano tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

**2.** (punti 7) Stabilire se esistono valori del parametro $a > 0$ tali che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^a}\left[1-\cos\left(\frac{6}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}}-\frac{6}{\cos(\sin x)}\right)\right]$$

esista finito e diverso da zero, e in caso affermativo calcolare tale limite per tali valori di $a$.

**Soluzione**. Procedendo come nella versione A si dimostra che, per $x \to 0$:

$$\frac{1}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}}-\frac{1}{\cos(\sin x)} = \frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

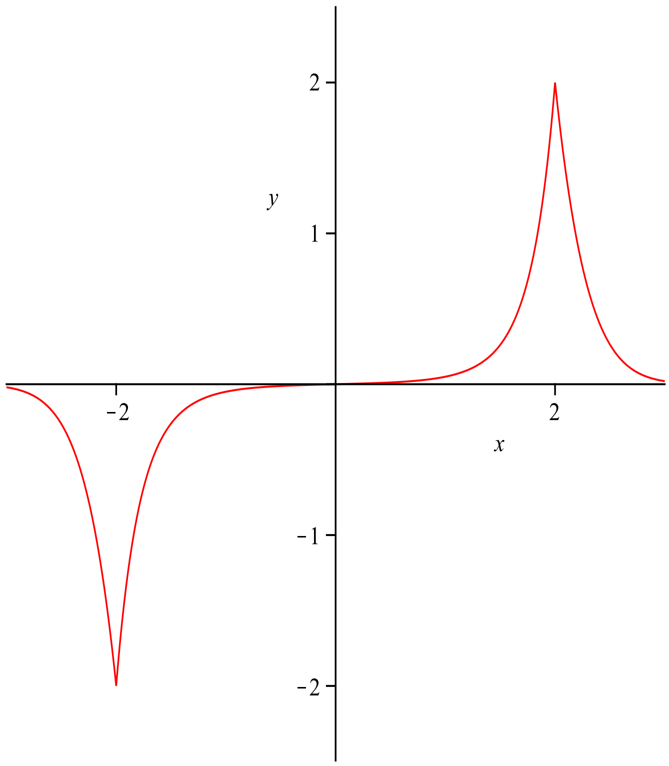
Quindi:

$$1-\cos\left(\frac{6}{1-\frac{(\sin x)^2}{2}}-\frac{6}{\cos(\sin x)}\right) = 1-\cos\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$$
$$= \frac{x^8}{32}+o(x^8).$$

Dunque il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 8$, e in tal caso il limite vale $\frac{1}{32}$.

**3.** (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = xe^{-|x^2-4|}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è ovunque definita ed è dispari. La studieremo quindi solo per $x \geq 0$ e poi disegneremo la restante parte del grafico per simmetria rispetto all'origine. Vale $f(0) = 0$, $f(x) > 0 \ \forall x > 0$. è inoltre chiaro che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. La funzione è derivabile per $x \neq 2$. Calcoliamo la derivata prima per $x \in [0, 2)$:
$$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2-4}, \quad \forall x \in [0, 2).$$
Dunque $f$ è crescente per $x \in [0, 2)$. Si noti che $f'(0) = 1/e^4$ e che $f'_-(2) = 9$. Per $x > 2$ si ha invece
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{4-x^2}, \quad \forall x > 2.$$
Quindi $f$ è decrescente per $x > 2$. Si osserva quindi che $x = 2$ è un punto angoloso e inoltre chiaramente è punto di massimo assoluto, con $f(2) = 2$ (ne segue che $x = -2$ è punto di minimo assoluto, con $f(-2) = -2$). Si noti che $f'_+(2) = -3$. Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x \neq 2$. Vale:
$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-4}, \quad \forall x \in [0, 2).$$
Quindi $f$ è convessa in $[0, 2]$. Inoltre
$$f''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{4-x^2}, \quad \forall x > 2.$$
Quindi $f$ è convessa in $[2, +\infty)$. È inoltre chiaro che $f$ cambia concavità in $x = 0$, che è dunque punto di flesso. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



**4.** (punti 4+4) Posto $f(x) = (x-2)^\alpha \log(\sqrt{x-2} + x - 1)$ , discutere l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

al variare del parametro reale $\alpha$ .

Successivamente determinare una primitiva di $f(x)$ per $\alpha = -1/2$ .

**Soluzione**. L'argomento del logaritmo è una funzione crescente nella variabile $x$ e si annulla solo per $x = 2$ , valore che risulta essere l'unica singolarità dell funzione integranda.
L'integrale può essere scritto come somma di due integrali impropri:

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{3} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

rispettivamente di prima e seconda specie.
Per $x \to 2^+$ , si ha $\log(\sqrt{x-2} + x - 1) \sim \sqrt{x-2}$ , pertanto $f(x) \sim (x-2)^{1/2+\alpha}$ .
l'integrale improprio di prima specie converge solo se $-\alpha - 1/2 < 1$ , ovvero se $\alpha > -3/2$ .
Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim x^\alpha \log x$ .
l'integrale improprio di seconda specie converge solo se $-\alpha > 1$ , ovvero se $\alpha < -1$ .
Dunque l'integrale esiste in senso generalizzato se e solo se $-3/2 < \alpha < -1$ .

Per determinare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \log(\sqrt{x-2} + x - 1)$ operiamo la sostituzione $t = \sqrt{x-2}$ , da cui si ricava che $x = t^2 + 2$ e $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ .
Quindi:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x-2}} \log(\sqrt{x-2} + x - 1)\mathrm{d}x = 2\int \log(t^2 + t + 1)\mathrm{d}t$$

Integrando per parti:

$$F(x) = 2t\log(t^2 + t + 1) - 2\int \frac{2t^2 + t}{t^2 + t + 1}\mathrm{d}t$$

Con alcuni facili passaggi algebrici l'integranda al secondo membro si decompone in fratti semplici:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t &= 4\int \mathrm{d}t - \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t - 3\int \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t = \\ &= 4t - \log(t^2+t+1) - 3\int \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] + c \end{aligned}$$

Tornando alla variabile $x$ si ha:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\sqrt{x-2}\log(\sqrt{x-2}+x-1) - 4\sqrt{x-2} + \log(\sqrt{x-2}+x-1) + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\right)\right] + c \\ &= (2\sqrt{x-2}+1)\log(\sqrt{x-2}+x-1) - 4\sqrt{x-2} + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\right)\right] + c \end{aligned}$$

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 28/6/2017** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 8) Sia$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che, rispetto alla base canonica, è associata alla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & -1 \\ n & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determinare il valore di $n$ per cui $f$ non sia suriettiva. Inoltre, per tale valore di $n$:

(a) trovare lo spazio ortogonale all'immagine di $f$.

(b) esibire una base per il nucleo di $f$;

(c) trovare i vettori $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$, dove $\boldsymbol{w} = (3, -1, 2)^t$.

**Soluzione**. Il determinante di $A$ si annulla se $2n^2 - 3n - 2 = 0$, dunque soltanto se $n = 2$ (ricordiamo che $n$ è richiesto essere un numero naturale).

(a) Il rango di $A$ vale 2 (sono presenti minori non nulli di ordine due all'interno della matrice), quindi l'immagine di $f$ è bidimensionale. Scegliamo come copia di vettori linearmente indipendenti appartenenti all'immagine i primi due vettori colonna della matrice $A$.
Un vettore ortogonale all'immagine risulta essere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) Per il teorema di nullità più rango il nucleo di $f$ è monodimensionale. Risolvendo il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene $x = -y = -z$. Il nucleo è formato da tutti i vettori proporzionali al vettore $(1, -1, -1)^t$.

(c) Poiché $f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$, allora, per la linearità di $f$: $f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$, quindi $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \ker f$.
Segue che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\mu}$, dove $\boldsymbol{\mu}$ è un generico vettore del nucleo. In altri termini:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 + t \\ -1 - t \\ 2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

**2.** (punti 4+3) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(z) = e^{\frac{z-1}{z}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- Determinare l'insieme degli $z$ tali che $|f(z)| \leq 1$ e rappresentare tale insieme nel piano complesso.
- Stabilire se esistono $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z)$ sia immaginario.

**Soluzione**. Ricordando che $|e^w| = e^{\mathrm{Re}\ w}$, occorre determinare la parte reale dell'esponente. Razionalizzando:

$$\frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Posto $z = x + iy$, si ha:

$$\mathrm{Re}\ \left(\frac{z-1}{z}\right) = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{Im}\ \left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Si ha: $|f(z)| \leq 1$ se e solo se $\mathrm{Re}\ \left(\frac{z-1}{z}\right) \leq 0$, quindi se $x^2 + y^2 - x \leq 0$, equazione di un cerchio di raggio $1/2$ e centro in $z = 1/2$, privato dell'origine.

Per rispondere alla seconda domanda, è sufficiente cercare soluzioni delle equazioni:

$$\mathrm{Im}\ \left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Scegliendo ad esempio $k = 0$, si trova:

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto i punti $z = x + iy$ tali che $x^2 + y^2 - \frac{2}{\pi}y = 0$ (si tratta di nuovo di una circonferenza) sono tali che $\mathrm{Re}\ f(z) = 0$. La risposta è dunque affermativa.

**3.** (punti 7) Calcolare al variare del parametro $a > 0$ il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^a}\left[\frac{2}{\cos x + e^{x^2}} - \cos(x^2) + \frac{1}{4}(\sin x)^2\right].$$

**Soluzione**. Il limite presenta una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Scriviamo il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$, arrestato al quarto ordine, dell'espressione contenuta dentro la parentesi quadra.
Valgono allora le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\cos x + e^{x^2} &= 2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^5)\\
\frac{2}{\cos x + e^{x^2}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{48}x^4 + o(x^5)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\\
\cos(x^2) &= 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\\
\frac{1}{4}(\sin x)^2 &= \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{2}{\cos x + e^{x^2}} - \cos(x^2) + \frac{1}{4}(\sin x)^2 = \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

Il limite esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 4$, ed in tal caso vale $\frac{5}{24}$.
Se $0 < a < 4$, il limite vale zero.
Se $a > 4$, il limite è $+\infty$.

**4.** (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, intervalli di concavitá e convessitá, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione.** La funzione è ben definita se $x \neq 0$ e se $-1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1$. Pertanto deve valere $x \leq -\frac{1}{2}$.
Intersezione con l'asse $x$: $f(x) = 0$ se $1 + \frac{1}{x} = 0$, ovvero se $x = -1$.
Segno:
$f(x) > 0$ se $1 + \frac{1}{x} > 0$. Dato il dominio di definizione di $f$, ciò accade se $x < -1$.
$f(x) < 0$ se $-1 < x \leq -1/2$.
Si ha inoltre: $f(-1/2) = \arcsin(-1) = -\pi/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}.$$

La funzione è derivabile per $x < -1/2$. Per tali $x$ vale (si ricordi che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ nel dominio di definizione):

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{-2x-1}}$$

definita per $x < -1/2$.
La funzione è sempre decrescente nel suo intervallo di definizione. Si ha:

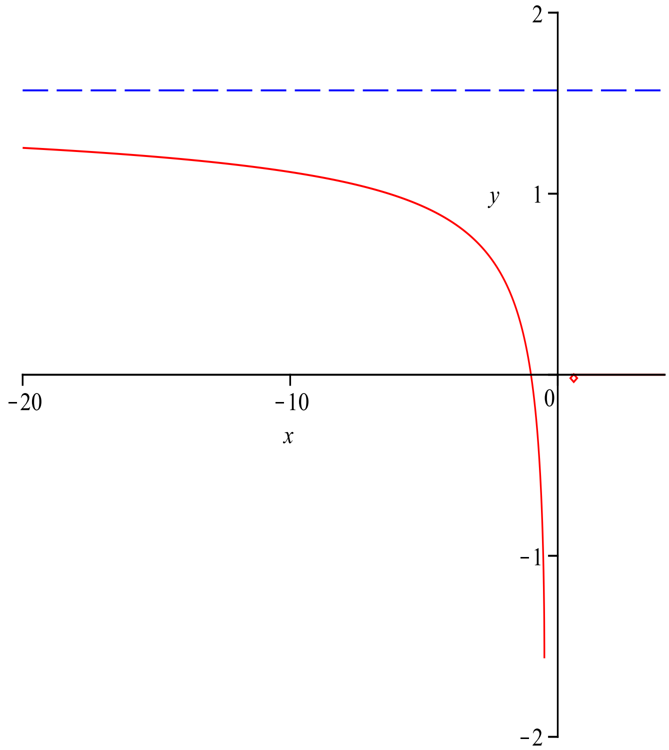
$$\lim_{x\to(-1/2)^-} f'(x) = -\infty.$$

Quindi la funzione presenta una tangente verticale in corrispondenza a $x = -1/2$.

Sempre per $x < -1/2$ la funzione ammette derivata seconda, che vale:

$$f''(x) = \frac{3x+1}{x^2\left(-2x-1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

La derivata seconda non si annulla mai ed è sempre negativa, pertanto la funzione rivolge la concavità verso il basso $\forall x \in \mathcal{D}$. In conclusione il grafico di $f$ è il seguente:



| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A | | Prova scritta del 12/9/2017 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 8) Stabilire per quali valori del parametro reale $h$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ h-3 & h-1 & 2 \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.
Determinare inoltre per quali valori del parametro $h$ la funzione lineare associata alla matrice $A - A^{-1}$ ammette nucleo non banale.

**Soluzione**.

È immediato verificare che gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = h$, $\lambda_3 = h+1$. Se $h \neq 1, h \neq 2$ la matrice e' diagonalizzabile perché gli autovalori sono tutti semplici. Se $h = 1$ è diagonalizzabile (la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è due), se $h = 2$ non è diagonalizzabile (la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 non è due).

Circa la seconda domanda, occorre prima di tutto che l'operatore abbia senso, dunque che $A$ sia invertibile, dunque che $A$ non abbia l'autovalore zero, dunque che $h \neq -1, h \neq 0$. Affinché $A - A^{-1}$ abbia nucleo non banale occorre che esista $\underline{x} \neq 0$ tale che $A\underline{x} = A^{-1}\underline{x}$ ovvero (moltiplicare per $A$ a sinistra) che $A^2\underline{x} = \underline{x}$. Dunque occorre che $A^2$ abbia autovalore $\lambda = 1$. In tal caso si verifica (moltiplicare a sinistra per $A^{-1}$) che, detto $\underline{x}$ un autovettore di $A^2$ relativo all'autovalore uno, vale $A\underline{x} = A^{-1}\underline{x}$.

È immediato verificare che se $\lambda$ è autovalore di $A$ allora $\lambda^2$ è autovalore di $A^2$. Se $h \neq 0, h \neq \pm 1, h \neq \pm 2$ (dunque sono tutti gli autovalori di $A^2$), e in tal caso nessuno tra i quadrati degli autovalori vale uno. Se $h = 1$ oppure $h = -2$ allora $A^2$ ha autovalore uno, dunque tali casi sono accettabili. Se $h = 2$ abbiamo i due autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 9$, il primo dei quali per la discussione precedente ha molteplicità geometrica due, dunque non vi sono altri autovalori e tale caso non è accettabile.

**2.** (punti 6) Stabilire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione nel campo complesso

$$z + |z| = 3i + a$$

ammette soluzioni $z \in \mathbb{C}$, e in caso affermativo calcolarle per tali valori di $a$.

**Soluzione**.

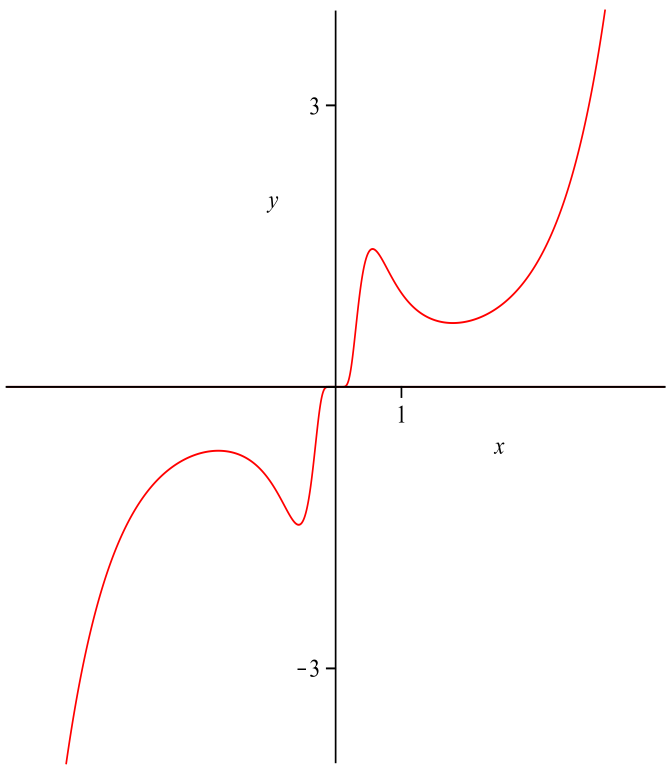
Poniamo $z = x + iy$. L'equazione diventa $x + iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 3i + a$ ovvero

$$x - a + \sqrt{x^2 + y^2} + i(y - 3) = 0.$$

Deve quindi essere $y = 3$ e inoltre $\sqrt{x^2 + 9} = a - x$. Tale equazione può avere soluzioni solo se $x \leq a$. Sotto tale condizione eleviamo al quadrato entrambi i membri e troviamo che, purché $a \neq 0$ (in tal caso non vi sono soluzioni) deve valere $x = (a^2 - 9)/2a$, soluzione accettabile se e solo se $x < a$. Ciò accade se e solo se $a > 0$. Dunque l'equazione è risolubile se e solo se $a > 0$ e in tal caso la soluzione è $z = (a^2 - 9)/2a + 3i$.

**3.** (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{e^{(\log|x|)^3}}{x}.$$
Determinarne in particolare: dominio di definizione, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata sul bordo del proprio dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

**Soluzione**. La funzione è definita per $x \neq 0$, ed è dispari. La studieremo quindi solo per $x > 0$, estendendola poi per simmetria. È chiaro che $f$ è positiva in $(0, +\infty)$. Inoltre, per esempio notando che vale $f(x) = e^{(\log x)^3 - \log x}$, si nota che
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Non vi sono asintoti obliqui (la crescita della funzione è più che lineare, infatti $f(x)/x = e^{(\log x)^3 - 2\log x} \to +\infty$ se $x \to +\infty$). Non vi sono intersezioni con gli assi coordinati, ma la funzione può essere estesa per continuità a $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$. La funzione è derivabile per $x > 0$, e vale, per tali $x$:
$$f'(x) = e^{(\log|x|)^3}\left[\frac{3(\log x)^2 - 1}{x^2}\right].$$
Vale $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, dunque la tangente alla curva tende a diventare orizzontale quando $x \to 0$. Inoltre: $f'(x) > 0$ se $x \in \left(0, e^{-1/\sqrt{3}}\right)$ e se $x > e^{-1/\sqrt{3}}$, negativa se $x \in \left(e^{-1/\sqrt{3}}, e^{1/\sqrt{3}}\right)$. Il punto $x_1 = e^{-1/\sqrt{3}}$ è di massimo relativo, il punto $x_2 = e^{1/\sqrt{3}}$ è di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti. In conclusione il grafico della funzione è il seguente:



**4.** (punti 8) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}.$$

Successivamente stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}\, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

**Soluzione**.

Poniamo $\sqrt{e^x - 1} = t$, così che $e^x = 1 + t^2$. Vale $\mathrm{dx} = \frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}\, \mathrm{d}x &= 2\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{t}{1+t^2} + \arctan t \\
&= -\frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} + \arctan \sqrt{e^x - 1}
\end{aligned}$$

dove si è scelta uguale a zero la costante additiva.

Circa la seconda domanda notiamo che $f(x) \sim e^{-x/2}$ se $x \to +\infty$, dunque $f$ tende a zero più rapidamente di qualsiasi potenza di $x$. Dunque l'integrale proposto converge.