Analisi matematica 2		10 luglio 2018
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di tre variabili :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}\,x^3 + yz - x - z$$

a) Scrivere le espressioni del *vettore gradiente* $\nabla f(x,y,z)$ e della *matrice hessiana* $H_f(x,y,z)$ nel generico punto (x,y,z).

b) Trovare i punti critici della funzione e classificarli.

c) Verificare che la superficie di livello

$$f(x,y,z) = 0$$

è regolare in un intorno del punto $(0,1,0)$ e scrivere l'equazione del suo piano tangente in quel punto.
(*Suggerimento:* applicare una versione appropriata del teorema della funzione implicita).

2.

a)

Scrivere un sistema autonomo equivalente all'equazione del secondo ordine

$$x'' = x - x^3 \,.$$

Trovare i punti di equilibrio del sistema e ricavare il sistema linearizzato intorno ai punti di equilibrio. Discutere la stabilità dell'origine per i sistemi lineari ottenuti.

b) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' = \sin t \,.$$

3. Calcolare, facendo uso del Teorema di Stokes, la circolazione del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^3\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$$

lungo la curva di intersezione tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $2x - 3y + z = 1$. La curva è orientata in modo che la sua proiezione sul piano xy sia percorsa in senso antiorario.

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle serie di potenze

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\, x^n; \qquad\qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, x^{2n}$$

Calcolare la somma della serie b) in ogni punto dell'intervallo di convergenza.

ii) Scrivere lo sviluppo di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = 1 + \sin x - \cos^2 x$$

Usare lo sviluppo trovato e l'identità di Parseval per calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$.

SOLUZIONI

1.

a) Vettore gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = (x^2 - 1)\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (y - 1)\,\mathbf{k}$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Annullando il gradiente, si trovano due punti critici : $P_1(1, 1, 0)$ e $P_2(-1, 1, 0)$. La matrice Hessiana calcolata nei due punti è

$$H_f(\pm 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con semplici calcoli si vede che $H_g(P_1)$ ha autovalori ± 1 e 2, mentre $H_g(P_2)$ ha autovalori ± 1 e -2. In entrambi i casi si ha un colle.

c) Il punto $(0, 1, 0)$ appartiene alla superficie di livello zero poiché $f(0, 1, 0) = 0$; inoltre si ha

$$\nabla f(0, 1, 0) = -\mathbf{i} \neq 0\,,$$

per cui, applicando il teorema del Dini, l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = g(y, z)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto $y = 1$, $z = 0$; dunque, il grafico di g rappresenta la superficie di livello $f = 0$ in un intorno di $(0, 1, 0)$. Il piano tangente si può scrivere nella forma

$$f_x(0, 1, 0)\, x + f_y(0, 1, 0)\,(y - 1) + f_z(0, 1, 0)\, z = 0\,.$$

Dal precedente calcolo delle derivate si trova subito

$$x = 0\,.$$

Si tratta del piano coordinato yz. Risolvendo l'equazione $f(0, y, z) = 0$, si vede che la superficie attraversa il piano lungo le due rette perpendicolari $(0, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$ e $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$.

2.

a) Definendo $y \equiv x'$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}$$

Si trovano 3 punti di equilibrio: $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$. Per scrivere i sistemi linearizzati si calcola la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nei punti di equilibrio:

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato in $(0,0)$ è

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in $(\pm 1, 0)$ è

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -2u \end{cases}$$

Nel primo caso, la matrice dei coefficienti ha gli autovalori ± 1, quindi l'origine è *instabile* per il sistema linearizzato (e anche per il sistema esatto); negli altri due casi, gli autovalori sono $\pm i\sqrt{2}$, per cui l'origine è *stabile* (non asintoticamente) per il sistema linearizzato. Si può dimostrare (per esempio studiando le curve di livello dell'energia) che i punti $(\pm 1, 0)$ sono equilibri stabili anche per il sistema esatto.

b) L'equazione omogenea associata

$$z'' + z' = 0\,,$$

ha equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. L'integrale generale dell'omogenea è

$$z(t) = c_1 + c_2\, e^{-t}\,,$$

con c_1, c_2, costanti arbitrarie. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$\psi(t) = A \sin t + B \cos t\,.$$

Inserendo nell'equazione si ottiene

$$-A \sin t - B \cos t + A \cos t - B \sin t = \sin t\,,$$

che è verificata per ogni t se

$$A = B, \qquad -A - B = 1\,;$$

dunque, $A = B = -1/2$. L'integrale generale è allora

$$y(t) = c_1 + c_2\, e^{-t} - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)\,.$$

3. La curva γ è un'ellisse che racchiude una superficie piana Σ ottenuta intersecando il piano e il cilindro. La proiezione di Σ sul piano xy è il disco circolare D di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$, il cui bordo $\partial^+ D$ è orientato positivamente per ipotesi. Quindi γ sarà orientata positivamente rispetto a Σ se si sceglie la normale $\mathbf{n}$ che punta verso l'alto. Per il teorema di Stokes

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Poiché Σ è contenuta nel piano $z = -2x + 3y + 1$, avremo

$$\mathbf{n}\, dS = (-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dxdy$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2)\, \mathbf{k}$$

Dunque

$$\int\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D 3(x^2 + y^2)\, dxdy = 2\pi \int_0^1 3\rho^3\, d\rho = \frac{3\pi}{2}$$

4.

i)

a) Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} \frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) = 1\,.$$

Dunque $R = 1$ e la serie converge per $|x| < 1$. Comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza : per $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz, per $x = 1$ la serie diverge per confronto con la serie armonica.

b) Si tratta di una serie contenente solo potenze pari (lacunare). Ponendo $x^2 = t$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, t^n\,,$$

che ha raggio di convergenza $R = 2$ (applicare il criterio della radice). Dunque la serie originale converge per $x^2 < 2$, cioè $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Agli estremi dell'intervallo la serie non converge perché il termine generale non tende a zero.

Somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - x^2/2} = \frac{2}{2 - x^2}\,, \qquad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\,.$$

ii) La funzione è periodica di periodo 2π. Applicando note identità trigonometriche, possiamo scrivere

$$f(x) = 1 + \sin x - \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sin x - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Dunque, i coefficienti di Fourier di f *diversi da zero* sono

$$a_0 = 1; \qquad b_1 = 1; \qquad a_2 = -\frac{1}{2}\,.$$

Dall'identità di Parseval si ricava:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi(1/2 + 1 + 1/4) = \frac{7}{4}\pi\,.$$