I.5 - INVERTIBILITÀ LOCALE

Proposizione: sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, derivabile in Ω aperto di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Se la derivata di f in z_0 è diversa da zero, allora f è localmente invertibile in un intorno U di z_0, nel senso che è invertibile la restrizione di f valutata in U. Detta φ l'inversa locale, essa è derivabile in $f(z_0)$ e la sua derivata è:

$$\varphi'\big|_{f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Esempi:

- $f(z) = e^z,\ f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0\ \ \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \to \quad f$ è localmente invertibile e:

  $$\varphi'\big|_{e^{z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} \quad \to \quad \varphi'(w_0) = \frac{1}{w_0}$$

- $f(z) = z^n,\ f'(z_0) = n{z_0}^{n-1} \neq 0\ \ \forall z_0 \neq 0 \quad \to \quad f$ è localmente invertibile per ogni $z_0 \neq 0$.

Richiamo di analisi B: ***teorema di inversione locale***

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, una funzione vettoriale $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ classe C^1. Se il Jacobiano di f nel punto (x_0, y_0) è diverso da zero, allora esistono un intorno V di (x_0, y_0) ed un intorno W di $f(x_0, y_0)$ tali che f è una corrispondenza biunivoca tra V e W. È quindi definita in W una funzione φ che è l'inversa di f e la cui Jacobiana è l'inversa della Jacobiana di f:

$$J[\varphi]\!\!\rfloor_{f(x,y)} = \left\{ J[f]\!\!\rfloor_{(x,y)} \right\}^{-1}$$

Dimostrazione:

Sia $f = u + iv$, con u e v di classe C^1 (tale richiesta, che può sembrare più restrittiva delle ipotesi della proposizione, è in realtà sempre verificata quando valgono quest'ultime) e $z_0 = x_0 + iy_0$. Consideriamo ora la funzione vettoriale equivalente (u, v) e valutiamone il Jacobiano in (x_0, y_0):

$$f'(z_0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \alpha + i\beta \quad \Rightarrow \quad J(u,v)\big|_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det J(u,v)\big|_{(x_0,y_0)} = \alpha^2 + \beta^2$$

Poiché tale determinante è sempre diverso da zero (essendo per ipotesi $\alpha + i\beta \neq 0$), possiamo applicare il teorema di inversione locale per le funzioni vettoriali. Abbiamo quindi l'esistenza di una funzione definita in un intorno di $f(z_0)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ che inverte localmente (u, v) ovvero, in altri termini, una funzione complessa $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ che inverte localmente f.

Sappiamo inoltre dallo stesso teorema che Φ è di classe C^1 e che il suo Jacobiano in (x_0, y_0) è:

$$J(\Phi)\big|_{f(z_0)} = \left[J(u,v)\big|_{f(z_0)}\right]^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Ne deriva quindi che l'inversa φ rispetta anch'essa le condizioni di Cauchy-Riemann e quindi è derivabile (essendo φ_1 e φ_2 differenziabili). In particolare la sua derivata è:

$$\varphi'\big|_{f(z_0)} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

<u>Richiamo di analisi B:</u> forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$

Sia $\underline{F}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$, con A e B di classe C^1, un campo vettoriale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. L'applicazione seguente è chiamata **forma differenziale** associata ad $\underline{F}$:

$$\omega := A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

Se il campo $\underline{F}$ è irrotazionale, la forma differenziale ad esso associata si dice <u>chiusa</u>. Nel piano una condizione necessaria e sufficiente perché ω sia chiusa è che:

$$A_y = B_x$$

Se il campo $\underline{F}$ è conservativo (ovvero esiste una funzione $U(x, y)$, detta potenziale, tale che $\underline{F}$ sia il gradiente di $U(x,y)$), la forma differenziale ad esso associata si dice <u>esatta</u>.

Si chiama **curva** (o cammino) nel piano l'insieme di:

- una parametrizzazione, ovvero una funzione $\underline{r}: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
- un sostegno γ, ovvero l'immagine di $\underline{r}$ in $\mathbb{R}^2$

Se la parametrizzazione è una funzione di classe C^1, la curva si dice regolare (se la condizione precedente è valida tranne che in un numero finito di punti la curva si dirà invece regolare a tratti).
Se succede che $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$, allora si parla di curva chiusa o circuito.
NB: curve con lo stesso sostegno possono essere parametrizzate in maniera differente

Due curve con parametrizzazioni $r: [a, b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\tilde{r}: [c, d] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dicono equivalenti se esiste una funzione φ crescente di classe C^1 tale che:

$$\tilde{r} = r \circ \varphi$$

Si consideri un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e due curve i cui sostegni siano entrambi contenuti in Ω. Si dice che esse sono Ω-omotope se possono essere deformate con continuità una nell'altra. Se ciò avviene si dice che le due curve appartengono alla stessa classe di omotopia.

Si definisce l'integrale di ω lungo una cammino γ che ammette parametrizzazione $\underline{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, dove $\underline{r}: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la seguente espressione (che non dipende dalla parametrizzazione scelta per γ):

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b [A(r_1(t), r_2(t))r_1'(t) + B(r_1(t), r_2(t))r_2'(t)]\,dt$$

Si possono dimostrare i seguenti risultati: siano γ un circuito e χ un cammino aperto del piano di estremi (x_0, y_0) e (x, y) i cui sostegni appartengano al dominio della forma differenziale ω

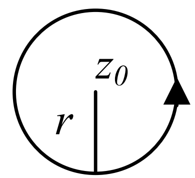
- ω *esatta* $\Leftrightarrow$ $\int_\gamma \omega = 0 \;\; \forall \gamma$ $\Leftrightarrow$ $\int_\chi \omega$ *dipende solo dagli estremi di* χ.

  In questo caso esiste una funzione potenziale $U(x, y)$ tale che: $U(x, y) = \int_\chi \omega$

- ω *chiusa* $\Rightarrow$ $\int_\gamma \omega$ *dipende solo dalla classe di omotopia di* γ.

- Alcuni cammini di uso frequente vengono indicati con una notazione particolare:

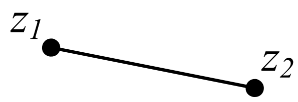
  ✓ $C_r(z_0)$: circonferenza centrata in z_0 di raggio r (percorsa una volta in senso antiorario)
  $r(t)= z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$



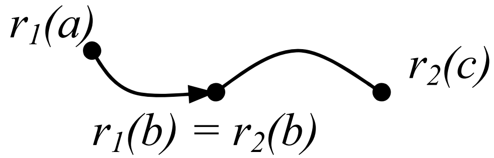
  ✓ $C_r^+(z_0)$: semicirconferenza superiore
  $r(t)= z_0 + re^{it},\ t \in [0, \pi]$

  ✓ $C_r^-(z_0)$: semicirconferenza inferiore
  $r(t)= z_0 + re^{it},\ t \in [\pi, 2\pi]$

  ✓ $[z_1, z_2]$: segmento orientato di estremi z_1 e z_2
  $r(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1]$



- ✓ Se γ_1 e γ_2 sono due cammini con un estremo in comune e parametrizzazioni r_1 ed r_2, tali che r_1: $[a, b] \rightarrow \Omega$ e r_2: $[b, c] \rightarrow \Omega'$ (e quindi $r_1(b) = r_2(b)$), indichiamo con $\gamma_1 + \gamma_2$ il cammino individuato dalla parametrizzazione r: $[a, b] \cup [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$, tale che le sue restrizioni su $[a, b]$ e su $[b, c]$ siano rispettivamente uguali a r_1 e r_2.



- ✓ $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$: spezzata poligonale che congiunge i punti $z_1, \ldots, z_n$

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \ldots + [z_{n-1}, z_n]$$

- ✓ Se γ ha parametrizzazione r: $[a, b] \rightarrow \Omega$, indichiamo con $-\gamma$ il cammino una cui parametrizzazione è data da φ: $[0, 1] \rightarrow \Omega$, con $\varphi = r[b + t(a - b)]$.

I.6 - PRIMITIVE

Sia data una funzione $f : \Omega$ *aperto di* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si vuole sapere se esiste una funzione $F: \Omega \to \mathbb{C}$, che chiameremo **primitiva** di f, tale che la sua derivata sia uguale ad f in ogni punto di Ω:

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega$$

Osservazione:

Se una primitiva F esiste, essa è definita a meno di una costante arbitraria. Infatti:

1. F è primitiva, $c \in \mathbb{C} \to (F + c)' = f$
2. F_1, F_2 primitive $\to (F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = c$

Sia dunque $f = u + iv$ una funzione nota e $F = U + iV$ la primitiva per ora incognita che si vuole determinare.

$$F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x = u + iv \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \; e \; \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

Il problema equivale a trovare i potenziali U e V (se esistono) delle seguenti due forme differenziali:

$$\omega_1 = u(x,y)dx - v(x,y)dy = U_x dx + U_y dy$$

$$\omega_2 = v(x,y)dx + u(x,y)dy = V_x dx + V_y dy$$

Dalla teoria sulle forme differenziali si può quindi dedurre che:

- f ammette primitive se e solo se ω_1 e ω_2 sono esatte.
- f è olomorfa se e solo se ω_1 e ω_2 sono chiuse.
- Se f ammette primitive, allora f è olomorfa.
- Se f olomorfa e Ω è semplicemente connesso, allora f ammette primitive.

Questi risultati sono riassunti brevemente nel seguente schema:

$$
\begin{tikzcd}
\textit{f ammette primitive} \arrow[r, Leftrightarrow] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ sono esatte} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift right=2] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ ammettono potenziale} \\
\textit{f è olomorfa} \arrow[r, Leftrightarrow] & \omega_1 \textit{ e } \omega_2 \textit{ sono chiuse} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[u, Rightarrow, shift right=2, "\textit{solo se } \Omega \textit{ è semplicemente connesso}"'] & u_x = v_y \ \textit{ e } \ u_y = -v_x
\end{tikzcd}
$$

Sia γ un cammino nel piano complesso e $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$, con $r: [a,b] \rightarrow \Omega$, una sua parametrizzazione. Si definisce l'integrale di $f(z)$ lungo γ come:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

Tale integrale può essere scritto in forma estesa nella seguente maniera:

$$\int_a^b f(r(t))r'(t)dt = \int_a^b \{[u(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - v(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)] + i[v(r_1(t),r_2(t))r_1'(t) - u(r_1(t),r_2(t))r_2'(t)]\}dt$$

Dalle relazioni precedenti si ricava che:

- $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (\omega_1 + i\omega_2)$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \omega_i = 0 \;\; i = 1,2$.
- $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ se e solo se *f* ammette primitive.
- ***Teorema di Morera:*** se $\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \;\; circuito \;\; in \;\; \Omega$ allora *f* è olomorfa.
- ***Teorema di Cauchy:*** se *f* è olomorfa allora $\int_\gamma f(z)dz$ dipende solo dalla classe di omotopia di γ.

Osservazioni:

- Dal teorema di Cauchy segue subito che dati due circuiti γ_1 e γ_2 tra loro omotopi e f olomorfa:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

  Tale integrale è poi nullo se i due circuiti sono omotopi anche a zero.

- Il fatto che $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia semplicemente connesso è sempre vero localmente. Più precisamente, se f è olomorfa su Ω, allora $\forall z_0 \in \Omega \;\; \exists U(z_0): \quad f|_U$ ammette primitive.

- $\oint_\gamma f(z)dz$ non dipende dalla parametrizzazione scelta per γ.

Esempio:

$f(z) = \frac{1}{z},\ con\ \ \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: *f* è olomorfa in Ω, ma non ammette primitive definite su tutto Ω.

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_x(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = v_y\,; \qquad u_y = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -v_x$$

Si ha che *u* e *v* sono differenziabili e rispettano le condizioni di Cauchy-Riemann: *f* è quindi olomorfa. Si provi ora a calcolare l'integrale di tale funzione lungo una circonferenza centrata nell'origine degli assi e raggio 1 (quindi su $\gamma = C_1(0)$):

$$r(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi]$$

$\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(r(t))r'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = 2\pi i \neq 0$, da cui si deduce che ω_1 e ω_2 non sono esatte e quindi *f* non ammette primitive.