Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2019/2020
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
ESAME DI ANALISI III A DISTANZA, 17/7/2020 – Prof. I. FRAGALÀ

TEST 1. (8 punti)

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere per la successione di funzioni f_n definite per $x \in (0, +\infty)$ da

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \frac{\sin(nx)}{x^{3/2}}, \qquad n \geq 1 .$$

(a) $f_1 \notin L^1(0, +\infty)$. FALSO ($f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}$; per $x \to 0$, $f_1 \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ integrabile; per $x \geq 1$, $|f_1(x)| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ integrabile)

(b) $f_1 \in L^\infty(1, +\infty)$. VERO ($f_1$ è continua sui compatti e nulla asintoticamente all'infinito)

(c) $f_n \to 0$ puntualmente quasi ovunque su $(0, +\infty)$. VERO ($|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{x^{3/2}} \to 0$)

(d) $f_n \to 0$ in $L^1(0, +\infty)$. VERO (per convergenza dominata, poiché $|f_n(x)| \leq g(x)$, con $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2}} & \text{if } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{3/2}} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$)

TEST 2. (8 punti) Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere per la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1 - z} .$$

(e) La parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di f di centro $z_0 = 1$ ha un numero finito di termini. VERO (trattandosi di polo semplice)

(f) La parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di f di centro $z_0 = 0$ ha un numero finito di termini. FALSO (trattandosi di singolarità essenziale)

(g) $\mathrm{Res}(f, 1) = -e$ VERO (dalla formula per il polo semplice)

(h) $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$ FALSO (moltiplicando gli sviluppi di $e^{1/z}$ e di $\frac{1}{1-z}$, si ottiene $\mathrm{Res}(f, 0) = e - 1$)

TEORIA. (5 punti)

(i) Fornire un esempio di una successione di funzioni $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ tale che f_n converge nel senso delle distribuzioni, ma non ammette limite in $L^1(\mathbb{R})$.

Ad esempio, la successione $f_n := n\chi_{[-1/2n, 1/2n]}$ non ammette limite in $L^1(\mathbb{R})$ (poiché $f_n \to 0$ q.o., mentre $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$), e converge a δ_0 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(l) Fornire un esempio di una funzione $u \in H^1(-1, 1)$ che non appartiene a $H^2(-1, 1)$.

Si puó prendere $f(x) = |x|$, che appartiene a $H^1(-1, 1)$, ma non appartiene ad $H^2(-1, 1)$, in quanto $f'' = \delta_0$ non appartiene a $L^2(-1, 1)$.

ESERCIZIO (10 punti)

(m) Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Scrivere la formulazione debole (o variazionale) del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } D \\ u = 0 & \text{on } \partial D\,. \end{cases}$$

(n) Dimostrare che esiste una e una sola soluzione di questo problema.

(o) Scrivere il problema di minimo risolto da u.

(p) Mostrare che $u(x) = \frac{1}{4}\big(1 - |x|^2\big)$.

Soluzione (m) La formulazione debole è la seguente: trovare una funzione $u \in H_0^1(D)$ tale che

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v = \int_D v \qquad \forall v \in H_0^1(D)\,.$$

(n) Esiste una e una sola soluzione grazie al teorema di Lax-Milgram, applicato allo spazio di Hilbert $H_0^1(D)$, munito della norma $\|\nabla u\|_{L^2}$; infatti il problema può essere scritto come

$$b(u, v) = \varphi(v) \qquad \forall v \in H_0^1(D)$$

dove:

- $b(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v$ è una forma bilineare che risulta continua e coerciva:
  $b(u, v) \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$ e $b(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2$.
- $\varphi(v) = \int_D v$ è una forma lineare che risulta continua: $|\varphi(v)| \leq \int_D |v| \leq |D|^{1/2} \|v\|_{L^2} \leq |D|^{1/2} C_P \|\nabla v\|_{L^2}$

(o) Il problema di minimo risolto da u è

$$\min\left\{ \int_D \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - v\right) \ : \ v \in H_0^1(D)\right\}$$

(p) La funzione $u(x) = \frac{1}{4}\big(1 - |x|^2\big)$ è di classe C^2 e chiaramente soddisfa la condizione al contorno $u = 0$ su ∂D. Quindi, per verificare che è una soluzione debole, basta verificare che è soluzione classica. Poiché $u(x) = \frac{1}{4}\big(1 - x_1^2 - x_2^2\big)$, si ha $u_{11} = u_{22} = -1/2$, e quindi $\Delta u = -1$.