Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi- A. A. 2005/2006
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Preappello - Analisi Matematica D (4 febbraio 2006) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

N.B. Tempo a disposizione: 2h. Non è consentito l'uso di testi o di appunti.

Esercizio 1. Sia a un numero reale con $|a| < 1$. Calcolare utilizzando il metodo dei residui il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\, d\theta \ .$$

SOLUZIONE. Posto I l'integrale da calcolare, si ha

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}\, d\theta \ .$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $ie^{i\theta}$, si ottiene

$$I = \frac{2}{i} \int_{C_1(0)} f(z)\, dz \ ,$$

dove $C_1(0)$ è il cerchio di raggio 1 attorno all'origine, percorso una volta in senso antiorario, e

$$f(z) := \frac{1}{az^2 + 2z + a} \ .$$

Il denominatore di f si annulla per $z = z_\pm := \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$. Si verifica immediatamente che $|z_-| > 1$, mentre $|z_+| < 1$. Inoltre z_+ è un polo semplice, con

$$\mathrm{Res}(f, z_+) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ .$$

Quindi:

$$I = 2\pi i \frac{2}{i}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \ .$$

Esercizio 2.
1) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ la seguente funzione $f(x)$ appartiene a $L^p(I)$, dove I è l'intervallo $(-1, 1)$:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

2) Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) := \arcsin\big(\frac{1}{n} - x\big) + \arcsin\big(\frac{1}{n} + x\big) \ , \qquad n \geq 2 \ , \qquad x \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big] \ .$$

Si determini il limite puntuale $u(x)$ della successione per $n \to +\infty$, e si stabilisca se $\{u_n\}$ converge a u in $L^\infty\big(\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]\big)$.

SOLUZIONE.
1) Poiché

$$|f(x)|^p = \frac{1}{|1-x|^{p/2}|1+x|^{p/2}} \ ,$$

si ha $f \in L^p(I)$ se e solo se $p/2 < 1$, ovvero $p < 2$.

2) Il limite puntuale è la funzione $u(x) = \arcsin(-x) + \arcsin(x) \equiv 0$. Poiché, per ogni n fissato, u_n è decrescente su $[-1/2, 0]$ e crescente su $[0, 1/2]$ (come si verifica immediatamente dal calcolo della derivata prima), si ha

$$\|u_n\|_\infty = u_n(-1/2) = u_n(1/2)$$

e pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} u_n(-1/2) = \lim_{n\to+\infty} u_n(1/2) = 0 \ .$$

Esercizio 3. A. Sia $\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 per $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e 0 altrimenti. Data l'equazione differenziale:

$$u'(x) + u(x) = \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \ ,$$

1) risolverla utilizzando la trasformata di Fourier;
2) stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ la soluzione trovata appartiene a $C^k(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE. 1) Cerchiamo soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$. Trasformando si ottiene

$$i\xi\hat{u} + \hat{u} = \mathcal{F}\Big(\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\Big) \ .$$

Quindi:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}\mathcal{F}\Big(\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\Big) = \mathcal{F}\Big(e^{-x}H(x)\Big)\mathcal{F}\Big(\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\Big) = \mathcal{F}\Big(e^{-x}H(x) * \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\Big) \ .$$

L' antitrasformazione dà quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= \int e^{-(x-y)}H(x-y)\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(y)\,dy = \int_{\{|y|<1/2\}\cap\{y<x\}} e^{-(x-y)}\,dy \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1/2 \\ 1 - e^{-(\frac{1}{2}+x)} & \text{se } x \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ e^{\frac{1}{2}-x} - e^{-(\frac{1}{2}+x)} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

(la quale appartiene allo spazio voluto).

2) Dall'osservazione dell'equazione, si vede subito che u' non può essere continua, in quanto somma della funzione $-u$ (che è continua) e di una funzione discontinua. Infatti, dall' espressione esplicita della soluzione ottenuta sopra, si vede che i limiti per $x \to -(1/2)^{\pm}$ di u' sono diversi (rispettivamente 2 e 0). Pertanto $u \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$.