Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Primo appello di Metodi Analitici (18-2-15) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Classificare le singolarità isolate isolate della funzione

$$f(z) := e^{1/z} + \frac{1}{\sin(iz)}$$

e calcolare il seguente integrale, dove $C_4^+(0)$ indica la circonferenza di centro 0 e raggio 4 percorsa 1 volta in senso antiorario:

$$\int_{C_4^+(0)} f(z)\,dz\,.$$

Soluzione. La funzione f ha una una singolarità essenziale posta nell'origine, e infiniti poli semplici nei punti $z \neq 0$ tali che $\sin(iz) = 0$, ovvero $z = k\pi i$, al variare di $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Di tali singolarità quelle che cadono all'interno di $C_4^+(0)$ sono $z = 0$ $z = i\pi$ e $z = -i\pi$.
Il calcolo dei rispettivi residui fornisce:

• Residuo in $z = 0$:

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(e^{1/z}, 0) + \mathrm{Res}(\frac{1}{\sin(iz)}, 0)\,.$$

Poiché $e^{1/z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n}$, si ha $\mathrm{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$, e poiché $\frac{1}{\sin(iz)}$ ha un polo semplice in 0 si ha $\mathrm{Res}(\frac{1}{\sin(iz)}, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(iz)} = \frac{1}{i}$.

• Residuo in $z = i\pi$:

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \mathrm{Res}(\frac{1}{\sin(iz)}, i\pi) = \lim_{z\to i\pi} \frac{z - i\pi}{\sin(iz)} = \lim_{z\to i\pi} \frac{1}{i\cos(iz)} = -\frac{1}{i} = i$$

• Residuo in $z = -i\pi$:

$$\mathrm{Res}(f, -i\pi) = \mathrm{Res}(\frac{1}{\sin(iz)}, -i\pi) = \lim_{z\to -i\pi} \frac{z + i\pi}{\sin(iz)} = \lim_{z\to -i\pi} \frac{1}{i\cos(iz)} = -\frac{1}{i} = i$$

Pertanto, per il teorema dei residui, si ha:

$$\int_{C_4^+(0)} f(z)\,dz = 2\pi i\big(1 + \frac{1}{i} + 2i\big) = 2\pi(i - 1)\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la successione definita da:

$$f_n(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1-x & \text{if } x \in [\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$

(i) Stabilire se f_n ammette limite in $L^1([0,1])$ e in caso affermativo determinarlo.

(ii) Stabilire se f_n ammette limite in $L^\infty([0,1])$ e in caso affermativo determinarlo.

(iii) Enunciare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale secondo Lebesgue.

Soluzione.

(i) Il limite puntuale della successione è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1-x & \text{se } x \in (0,1]\,. \end{cases}$$

In particolare, si ha che f_n converge a f quasi ovunque in $[0,1]$.
Poiché $|f_n| \leq 1 \in L^1([0,1])$, per il teorema di convergenza dominata si ha che $f_n \to f$ in $L^1([0,1])$.

(ii) Se f_n ammette limite in L^∞, esso deve necessariamente coincidere col limite puntuale f. D'altra parte, si ha $\|f_n - f\|_{L^\infty([0,1])} = 1$, e pertanto f_n *non* converge in $L^\infty([0,1])$.

(iii) Si veda uno dei testi consigliati.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Stabilire se la seguente equazione ammette soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$, e in caso affermativo determinarle:

$$2u'' + u * u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzione. Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione, ricordando che

$$\mathcal{F}(u^{(k)}) = (i\xi)^k \mathcal{F}(u), \qquad \mathcal{F}(u * u) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(u)$$

e

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \;\Rightarrow\; \mathcal{F}(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Otteniamo:

$$(\hat{u})^2 - 2\xi^2 \hat{u} - \pi e^{-\frac{\xi^2}{2}} + 2\xi^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} = 0$$

Risolvendo in $\hat{u}$, si ricava

$$\hat{u} = \hat{u}_\pm := \xi^2 \pm \left(\xi^2 - \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\right),$$

delle quali osserviamo che solo $\hat{u}_- = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.
Pertanto, l'unica soluzione in $L^2(\mathbb{R})$ dell'equazione assegnata è data da

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\right) = e^{-x^2}.$$