Analisi matematica 2		3 luglio 2012
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y} - 1}{3x}$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Verificare *se* D è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Descrivere le curve di livello di equazioni $f(x, y) = 0$ e $f(x, y) = 1/3$; spiegare perchè non esiste il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 1)$.

c) Determinare tutti i punti di D in cui la funzione f è differenziabile. Trovare la direzione di massima crescita della funzione nel punto $P(1, 1)$.

2. Data l'equazione lineare omogenea

$$y'' + 4y' + \alpha^2 y = 0$$

a) Scrivere il sistema omogeneo equivalente e discutere la natura dell'origine al variare di $\alpha > 0$. Nel caso $\alpha = 0$, trovare tutti i punti di equilibrio del sistema.

b) Determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-t} + \cos(2t) \qquad (*)$$

3. Sia $f(x,y) = |x|y$.

a) Calcolare

$$\int\int_T f(x,y)\,dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

b) Calcolare

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$

dove D è il *semicerchio* di centro nell'origine e raggio unitario, giacente nel semipiano delle y positive.

c) Calcolare

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad y \geq 0\right\}$$

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = -xz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathbf{k}$$

attraverso la semisfera Σ di equazione

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

nel verso delle z crescenti. Quanto vale il flusso attraverso Σ di rot$\mathbf{F}$?

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in
$$D = \{(x,y) : x \neq 0, y \geq 0\}$$
L'insieme D non è limitato, non è aperto (i punti con $y = 0$ non sono interni) non è chiuso (il complementare di D in $\mathbb{R}^2$ non è aperto) e non è connesso (qualunque curva continua che unisca due punti di D con ascisse di segno opposto deve attraversare l'asse y).

b) La curva di livello $f = 0$ è l'insieme
$$\{x > 0,\ y = 1\} \cup \{x < 0,\ y = 1\}$$
La curva $f = 1/3$ è formata dai punti di D che soddisfano la relazione $\sqrt{y} - 1 = x$; quindi è l'insieme
$$\{x \geq -1, \quad x \neq 0, \quad y = (x+1)^2\}$$
unione di due archi di parabola. Osserviamo che le due curve di livello si incontrano nel punto $(0,1)$; avvicinandoci al punto $(0,1)$ lungo la retta e lungo la parabola, si ricaverebbero allora due valori diversi per il limite. Ma il limite, se esiste, è unico, dunque la funzione non ha limite per $(x,y) \to (0,1)$.

c) La funzione f ha derivate parziali
$$f_x(x,y) = \frac{1-\sqrt{y}}{3x^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{6x\sqrt{y}},$$
nell'insieme aperto $\{(x,y) : x \neq 0, y > 0\}$ (insieme dei punti interni di D). Poiché le derivate sono funzioni continue in ogni punto dell'aperto, f è differenziabile in tutti i punti interni a D. Nei punti $x \neq 0$, $y = 0$ esiste la derivata parziale f_x, ma non esiste la derivata parziale rispetto ad y; la funzione non è differenziabile in tali punti.
Valutando le derivate nel punto $(1,1)$ abbiamo $f_x(1,1) = 0$, $f_y(1,1) = 1/6$. La direzione di massima crescita è quella del vettore $\nabla f(1,1)$, ovvero la direzione del versore $\mathbf{j}$, ortogonale alla curva di livello ($f = 0$) che passa per il punto $(1,1)$.

2. Ponendo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, il sistema equivalente si scrive

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\alpha^2 y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = \alpha^2$, l'origine è l'unico punto di equilibrio per ogni $\alpha > 0$. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda + 4) + \alpha^2 = \lambda^2 + 4\lambda + \alpha^2 = 0$$

Dunque $\lambda_1 = -2 + \sqrt{4 - \alpha^2}$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{4 - \alpha^2}$. Poiché per ogni $\alpha > 0$ tutti gli autovalori hanno parte reale *strettamente negativa*, l'origine è globalmente asintoticamente stabile.
Se $0 < \alpha \leq 2$ gli autovalori sono reali e negativi, quindi l'origine è un nodo stabile; se $\alpha > 2$, gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale negativa, per cui l'origine è un fuoco stabile.
Nel caso $\alpha = 0$, i punti di equilibrio del sistema sono tutti i punti dell'asse $y_2 = 0$ nel piano delle fasi.
Applicando il metodo di somiglianza ed il principio di sovrapposizione, l'integrale generale della $(*)$ si scrive

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + e^{-t} + \frac{1}{8}\sin(2t)$$

3. In tutti e tre i casi si hanno domini di integrazione simmetrici rispetto all'asse y; poiché la funzione è pari in x, si può semplificare il calcolo con considerazioni di simmetria.

a)

$$\int\int_T |x|y\,dx\,dy = 2\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} xy\,dy\Big)dx = \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{12}$$

b)

$$\int\int_D |x|y\,dx\,dy = 2\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\rho = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin(2\theta)\, d\theta\, d\rho$$

$$= \Big[\frac{1}{4}\rho^4\Big]_0^1 \Big[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

c) Usiamo la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases}$$

Determinante matrice jacobiana

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\rho\cos\theta \end{vmatrix} = 6\rho$$

Dunque:

$$\int\int_\Omega |x|y\,dx\,dy = 2\int_0^1 \int_0^{\pi/2} 36\rho^3 \cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\rho = 36\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin(2\theta)\, d\theta\, d\rho = 9$$

4. Conviene calcolare, con il teorema della divergenza, il flusso uscente dalla superficie *chiusa* che racchiude la semisfera (solida)

$$V = \left\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

e poi sottrarre al risultato il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la base B della semisfera (dove la normale è $-\mathbf{k}$).
Il flusso è allora:

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int\!\!\int\!\!\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}\, dxdydz - \int\!\!\int_B \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dxdy \\ &= \int\!\!\int\!\!\int_V (-z + 1 + z)\, dxdydz + \int\!\!\int_B \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\, dxdy\end{aligned}$$

Il primo integrale è il volume della semisfera di raggio 1 e dunque vale $\frac{2}{3}\pi$. Il secondo si calcola in coordinate polari:

$$\int\!\!\int_B \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo allora

$$\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{12}\pi$$

Il flusso di $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale zero; infatti, indicando ∂B^+ la frontiera di B percorsa in senso antiorario, abbiamo dal teorema di Stokes:

$$\int\!\!\int_\Sigma \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_{\partial B^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = 0$$

Si ottiene lo stesso risultato calcolando direttamente il flusso di $\mathrm{rot}\mathbf{F} = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$.