Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**Prima prova in itinere** **17 novembre 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Sia $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ -x+ky+kz \\ kx+z \end{bmatrix}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali $\mathbf{L}$ è biunivoca.

(1.2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare le dimensioni di $Ker(\mathbf{L})$ e $Im(\mathbf{L})$ ed esibirne una base.

(1.3) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $[1, -1, 1]^T \in Im(\mathbf{L})$.

(1.4) Nel caso $k = 2$, calcolare il volume del parallelepipedo costruito con i vettori immagine dei vettori della base canonica mediante $\mathbf{L}$.

2. Sia

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(2.1) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare gli autovalori di A_α e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

(2.2) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è diagonalizzabile?

(2.3) Provare che la matrice $C = A_0^T A_0$ è simmetrica e determinare i suoi autovalori.

(2.4) Provare che data una matrice B di tipo $m \times n$, la matrice $B^T B$ è una matrice simmetrica di tipo $n \times n$. Si può dire qualcosa sul segno degli autovalori di $B^T B$?

3. Si considerino nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$ il piano Π di equazione $x - 3y + 2z = 0$ e il punto $P = (1, 2, 3)$.

(3.1) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P, parallela al piano Π e incidente la retta r di equazioni $3x - 12 = 4 - 2y = 18 - 6z$.

(3.2) Provare che Π è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinarne una base ortonormale.

4. Si consideri l'equazione nel campo complesso

$$z^2 = -8\bar{z}.$$

(4.1) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione.

(4.2) Rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

(4.3) Determinare una trasformazione $\mathbf{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che mandi le radici terze dell'unità nelle soluzioni non nulle calcolate nel punto (4.1). $\mathbf{T}$ è lineare? Giustificare la risposta.

Soluzioni.

1.

(1.1) Associamo all'applicazione $\mathbf{L}$ la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & k \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dal teorema di nullità più rango, $\mathbf{L}$ è biunivoca sse $0 \neq det(A_k) = k - k^2$ sse $k \neq 0, 1$.

(1.2) Se $k \neq 0, 1$, $Ker(\mathbf{L}) = \{\mathbf{0}\}$ e $Im(\mathbf{L}) = \mathbb{R}^3$, quindi $dim\big(Ker(\mathbf{L})\big) = 0$ e $dim\big(Im(\mathbf{L})\big) = 3$. La base canonica di $\mathbb{R}^3$ è una base per $Im(\mathbf{L})$.
Se $k = 0$, riducendo la matrice A_0 a scala con il metodo di eliminazione di Gauss otteniamo

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $A_0 = dim\big(Im(\mathbf{L})\big) = 2$. Una base per $Im(\mathbf{L})$ è $\big\{[1, -1, 0]^T, [1, 0, 1]^T\big\}$. Dal teorema di nullità più rango, $dim\big(Ker(\mathbf{L})\big) = 3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema $A_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, otteniamo che $\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in Ker(\mathbf{L})$ sse

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{sse} \qquad [x, y, z]^T = [0, t, 0]^T, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Una base per $Ker(\mathbf{L})$ è $\big\{[0, 1, 0]^T\big\}$.
Se $k = 1$, riducendo la matrice A_1 a scala con il metodo di eliminazione di Gauss otteniamo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $A_1 = dim\big(Im(\mathbf{L})\big) = 2$. Una base per $Im(\mathbf{L})$ è $\big\{[1, -1, 1]^T, [0, 1, 0]^T\big\}$. Dal teorema di nullità più rango, $dim\big(Ker(\mathbf{L})\big) = 3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema $A_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$, otteniamo che $\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in Ker(\mathbf{L})$ sse

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{sse} \qquad [x, y, z]^T = [-t, -2t, t]^T, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Una base per $Ker(\mathbf{L})$ è $\big\{[-1, -2, 1]^T\big\}$.

(1.3) Se $k \neq 0, 1$, $[1, -1, 1]^T \in Im(\mathbf{L}) = \mathbb{R}^3$. Se $k = 1$, $[1, -1, 1]^T$ è la prima colonna della matrice A_1. $col(A_1) = Im(\mathbf{L}) \Rightarrow [1, -1, 1]^T \in Im(\mathbf{L})$. Nel caso $k = 0$, essendo

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad [1, -1, 1]^T \notin Im(\mathbf{L}).$$

(1.4) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora $L(\mathbf{e}_1) = [1, -1, 2]^T$, $L(\mathbf{e}_2) = [0, 2, 0]^T$, $L(\mathbf{e}_3) = [1, 2, 1]^T$. Quindi il volume V richiesto è $V = |det(A_2)| = 2$.

2.

(2.1) Gli autovalori di A_α sono le radici del polinomio caratteristico associato alla matrice

$$det\big(A_\alpha - \lambda I\big) = det\left(\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (\alpha - \lambda)(-\lambda(2 - \lambda) - 3) = (\alpha - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Otteniamo gli autovalori $\lambda = \alpha, 3, -1$.
Se $\alpha \neq 3, -1$, gli autovalori λ sono tutti distinti, le rispettive molteplicità algebriche m_λ e geometriche d_λ sono quindi: $m_\alpha = d_\alpha = 1$, $m_3 = d_3 = 1$, $m_{-1} = d_{-1} = 1$.
Se $\alpha = 3$, A_3 ha due autovalori, $\lambda = -1$, con $m_{-1} = d_{-1} = 1$ e $\lambda = 3$ con $m_3 = 2$. Essendo $d_3 = dim\big(Ker(A_3 - 3I)\big)$, dal teorema di nullità più rango, $d_3 = 3 - r(A_3 - 3I)$, dove $r(A_3 - 3I)$ è il rango della matrice $A_3 - 3I$.

$$A_3 - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad r(A_3 - 3I) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad d_3 = 2.$$

Se $\alpha = -1$, A_{-1} ha due autovalori, $\lambda = 3$ con $m_3 = d_3 = 1$ e $\lambda = -1$, con $m_{-1} = 2$. In analogia con quanto fatto nel caso $\alpha = 3$, $d_{-1} = dim\big(Ker(A_{-1} + I)\big) = 3 - r(A_{-1} + I)$.

$$A_{-1} + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad r(A_{-1} + I) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad d_{-1} = 1.$$

(2.2) A_α è diagonalizzabile sse per ogni autovalore λ, $m_\lambda = d_\lambda$. Per quanto visto nel punto precedente, questo avviene sse $\alpha \neq -1$.

(2.3)–(2.4) Data una matrice B di tipo $m \times n$, la trasposta B^T è di tipo $n \times m$, quindi $C = B^T B$ è di tipo $n \times n$.
Dimostrazione 1.

$$C^T = (B^T B)^T = B^T B = C \qquad \Rightarrow \qquad \text{C è simmetrica.}$$

Dimostrazione 2. Indichiamo con B_i le righe e con B^j le colonne di B. Sia $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$. Dalla definizione di prodotto righe per colonne, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$,

$$c_{ij} = (B^T)_i B^j = B^i \cdot B^j, \qquad \text{dove } \cdot \text{ indica il prodotto scalare in } \mathbb{R}^n.$$

Dalle proprietà del prodotto scalare,

$$c_{ij} = B^i \cdot B^j = B^j \cdot B^i = c_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \ldots n \qquad \Rightarrow \qquad \text{C è simmetrica.}$$

Associamo a C la forma quadratica

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B^T B\mathbf{x} = (B\mathbf{x})^T(B\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x}\|^2 \geq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbf{q}$ è semidefinita (o definita) positiva, quindi gli autovalori di C (tutti reali, essendo la matrice simmetrica) sono positivi o nulli.
Nel caso $B = A_0$, si ottiene che

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico associato a C è

$$det\big(C - \lambda I\big) = det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 14-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda)\big((14-\lambda)(2-\lambda) - 1\big) = -\lambda(\lambda^2 - 16\lambda + 27)$$

le cui radici, $\lambda = 0, 8 + \sqrt{37}, 8 - \sqrt{37}$, sono gli autovalori di C.

3.

(3.1) La retta richiesta giace sul piano Π' di equazione $x - 3y + 2z = 1$. Determiniamo il punto P' intersezione delle retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 + \frac{1}{3}t \\ y = 2 - \frac{1}{2}t \\ z = 3 - \frac{1}{6}t \end{cases}$$

con il piano Π':

$$4 + \frac{1}{3}t - 6 + \frac{3}{2}t + 6 - \frac{1}{3}t = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -2.$$

Otteniamo $P' = (\frac{10}{3}, 3, \frac{10}{3})$. La retta richiesta passa per i punti P e P', ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{7}{3}t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + \frac{1}{3}t \end{cases}$$

(3.2) Proviamo che Π è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Siano $\mathbf{v}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T, \mathbf{v}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T \in \Pi$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. I vettori $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]^T, \alpha\mathbf{v}_1 = [\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1]^T \in \Pi$, poiché

$$(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = (x_1 - 3y_1 + 2z_1) + (x_2 - 3y_2 + 2z_2) = 0$$

e

$$\alpha x_1 - 3\alpha y_1 + 2\alpha z_1 = \alpha(x_1 - 3y_1 + 2z_1) = 0.$$

$$[x, y, z]^T \in \Pi \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 3t - 2s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

Un base per Π è $\{\mathbf{u}_1 = [3, 1, 0]^T, \mathbf{u}_2 = [-2, 0, 1]^T\}$. Per ottenere una base ortonormale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Definiamo $\mathbf{y}_1 = \mathbf{u}_1$. Il vettore

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

è ortogonale a $\mathbf{y}_1$ e $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ è una base ortogonale per Π. Normalizzando i vettori $\mathbf{y}_i$, otteniamo una base ortonormale:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

4.

(4.1) Scriviamo z in forma trigonometrica: $z = \rho e^{i\theta}$. Dall'equazione otteniamo che

$$\rho^2 e^{i2\theta} = -8\rho e^{-i\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho = 0, 8 \\ e^{i3\theta} = -1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho = 0, 8 \\ \theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3 \end{cases}.$$

Troviamo quattro soluzioni $z_0 = 0, z_1 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 8e^{i\pi}, z_3 = 8e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

(4.3) Le radici terze dell'unità sono i numeri complessi $w_1 = 1, w_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Operando una dilatazione di modulo 8 ed una rotazione di $\pi/3$, i w_i vengono mandati negli z_i. Possiamo definire $\mathbf{T}$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: \ \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto 8e^{i\frac{\pi}{3}} z. \end{aligned}$$

L'applicazione $\mathbf{T}$ è lineare, infatti, per ogni $z, w, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{T}(z+w) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}(z+w) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}z + 8e^{i\frac{\pi}{3}}w = \mathbf{T}(z) + \mathbf{T}(w) \quad \text{e} \quad \mathbf{T}(\alpha z) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha z = \alpha 8e^{i\frac{\pi}{3}} z = \alpha \mathbf{T}(z).$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Teoria	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**Seconda prova in itinere** **29 gennaio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.**

1. Si consideri la seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

(1.1) Determinare il dominio di F.

(1.2) Calcolare F' e determinare dove F è monotòna crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti.

(1.3) Calcolare (se esiste) il

$$\lim_{x \to 0^+} xF(x).$$

(1.4) Trovare il punto di massimo assoluto di F.

2. Sia

$$a_n = n^{\alpha}\Big(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\Big),$$

con $\alpha \geq 0$.

(2.1) Al variare di α, calcolare (se esiste)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n.$$

(2.2) Al variare di α, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

(2.3) Per $\alpha = 2$, provare che la successione a_n è definitivamente decrescente.

(2.4) Per $\alpha = 2$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\sqrt{|x^2 - 1|}).$$

(3.1) Determinare il dominio di f, i limiti alla frontiera del dominio, le eventuali simmetrie e/o periodicità di f, gli eventuali asintoti.

(3.2) Calcolare f' (quando esiste) e determinare dove f è monotòna crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti, angolosi, cuspidali.

(3.3) Tracciare un grafico qualitativo di f.

4. Si consideri la funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{|x^2-1|})$ definita nell'esercizio 3.

(4.1) Calcolare

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\ dx.$$

(4.2) Stabilire per quali $\alpha > 0$ il seguente integrale converge

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\big[f(x)\big]^{\alpha}}\ dx.$$

Teoria. Enunciare e dimostrare il Teorema di Weierstrass.

Soluzioni.

1.

(1.1) La funzione $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$ è definita e continua in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, quindi $(0,+\infty) \subset domF$.

$$f(t) \sim \frac{1}{t}, \qquad \text{per } t \to 0.$$

Dal criterio di convergenza asintotica segue che

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad domF = (0,+\infty).$$

(1.2) Dal Teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x^2} \qquad \forall x \in (0,\infty).$$

$$\begin{cases} F'(x) > 0 & \text{per ogni } x \in \big(2n\pi, (2n+1)\pi\big) \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ F'(x) = 0 & \text{per ogni } x = (n+1)\pi \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ F'(x) < 0 & \text{per ogni } x \in \big(2n+1)\pi, (2n+2)\pi\big) \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dal teorema di monotonia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, F è strettamente crescente in $\big(2n\pi,(2n+1)\pi\big)$, F è strettamente decrescente in $(2n+1)\pi,(2n+2)\pi\big)$, i punti $x_n = (2n+1)\pi$ sono punti di massimo relativo e i punti $y_n = (2n+2)\pi$ sono punti di minimo relativo.

(1.3) Dal teorema di De L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} xF(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x^2\frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

(1.4) Il punto $x_1 = \pi$ è punto di massimo assoluto. Proviamo che $F(x) < F(\pi) = 0$ per ogni $x \neq \pi$. Sia $x \in (0, \pi)$. Essendo F strettamente crescente in $(0, \pi)$, segue che $F(x) < 0$.

Sia $x > \pi$ e sia $n \geq 1$ tale che $x \in ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$. Dal segno di F', si ottiene che $F(x) < F((2n-1)\pi$ e $F(x) \leq F((2n+1)\pi)$, quindi provando che $F((2n+1)\pi) < 0$, per ogni $n \geq 1$, otteniamo la tesi.

$$F((2n+1)\pi) = \int_{\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi} \frac{\sin(s+k\pi)}{(s+k\pi)^2}\, ds$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{(s+k\pi)^2}\, ds = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k I_k, \qquad \text{con } I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{(s+k\pi)^2}\, ds.$$

Per ogni $s \in (0, \pi)$ e ogni $k \geq 1$,

$$0 < \frac{\sin s}{(s+(k+1)\pi)^2} < \frac{\sin s}{(s+k\pi)^2} \quad \Rightarrow \quad 0 < I_{k+1} < I_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k I_k < 0, \quad \forall n \geq 1.$$

2.

(2.1) Utilizzando lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $\sin x$, otteniamo che

$$a_n \sim n^{\alpha} \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{6n^{3-\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

(2.2) Essendo $a_n > 0$ e $a_n \sim \frac{1}{6n^{3-\alpha}}$, il criterio di convergenza asintotica implica che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\alpha < 2$, diverge a $+\infty$ altrimenti.

(2.3) Per $\alpha = 2$, $a_n = n - n^2 \sin \frac{1}{n}$. Sia $f(x) = x - x^2 \sin \frac{1}{x}$, con $x > 0$. Proviamo che esiste un $x_0 > 0$ tale che, per ogni $x \geq x_0$,

$$f'(x) = 1 - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} < 0.$$

Dallo sviluppo di Mac Laurin delle funzioni $\sin y$ e $\cos y$, operando il cambiamento di variabile $y = \frac{1}{x}$, otteniamo che

$$f'(x) = 1 - 2x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \right) + 1 - \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{1}{6x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= -\frac{1}{6x^2} \left(1 + \frac{o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{6x^2}} \right) < -\frac{1}{6x^2} \frac{1}{2} < 0, \qquad \text{per ogni } x \text{ sufficientemente grande.}$$

(2.4) Essendo a_n positiva, definitivamente decrescente e infinitesima, il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno assicura la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

3.

(3.1) f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed ivi continua perchè composizione di funzioni continue. f è pari, essendo $f(-x) = \arctan(\sqrt{|(-x)^2 - 1|}) = \arctan(\sqrt{|x^2 - 1|}) = f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

La funzione f ha come asintoto orizzontale la retta $y = \frac{\pi}{2}$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

(3.2)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{per } |x| > 1 \\ \frac{1}{1+(\sqrt{1-x^2})^2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} & \text{per } |x| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

quindi f non è derivabile in $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. I punti x_1, x_2 sono cuspidi.
$f'(x) > 0$ in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Dal teorema di monotonia f è strettamente crescente in $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$. I punti $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ sono punti di minimo (assoluto, essendo $f(-1) = f(1) = 0$ e f positiva altrove). Il punto $x = 0$ è punto di massimo relativo (non assoluto poicé $f(0) = \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$).

(3.3) Per disegnare un grafico più accurato calcoliamo $f''(x)$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1-2x^2}{x^2(x^2-1)} & \text{per } |x| > 1 \\ -\frac{2-x^2+2x^2(1-x^2)}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}^{3/2}} & \text{per } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi $f''(x) < 0$, per ogni $x \neq \pm 1$, f è concava in $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

4.

(4.1) Essendo $x \geq 1$ in $[1, \sqrt{2}]$, determiniamo una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$. Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \arctan(\sqrt{x^2-1})\ dx = x\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \int x\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ dx = \\ &= x\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ dx = x\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \int_{x=\cosh t} \frac{1}{\sinh t} \sinh t\ dt \\ &= x\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \cosh^{-1} x = x\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

Quindi $\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\ dx = F(\sqrt{2}) - F(1) = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2} + 1)$.

(4.2) Essendo

$$\frac{1}{\left[f(x)\right]^\alpha} \sim \frac{1}{\left[\sqrt{2}\sqrt{x-1}\right]^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha/2}(x-1)^{\alpha/2}}, \qquad \text{per } x \to 1,$$

l'integrale richiesto converge per ogni $\alpha < 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Teoria	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**Primo appello** **11 febbraio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1.1) Calcolare gli autovalori di A, B, C e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

(1.2) Determinare se A, B, C sono diagonalizzabili.

(1.3) Quali tra le matrici A, B, C sono simili?

(1.4) Determinare la matrice di passaggio che realizza la similitudine.

2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\} \qquad E_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = 0,\ z \neq -2\right\} \cup \{z = -2\}.$$

(2.1) Rappresentare gli insiemi E_1 ed E_2 nel piano di Gauss.

(2.2) Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, si consideri la trasformazione $\mathbf{T}_\theta(z) = e^{i\theta} z$. Determinare per quale $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{T}_\theta(E_2) = E_1$.

3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = e^{-x}\big(\ln x + 1\big).$$

(3.1) Determinare il dominio di f, i limiti alla frontiera del dominio, le eventuali simmetrie e/o periodicità di f, gli eventuali asintoti.

(3.2) Calcolare f' e determinare dove f è monotona crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti.

(3.3) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(3.4) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

4. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{\ln\big(1+\sin t\big)}{t^2} \qquad \text{per } t \neq 0.$$

(4.1) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 f(t)\ dt.$$

(4.2) Determinare il dominio della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\ dt.$$

(4.3) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha F(x).$$

Teoria. Dare la definizione di serie convergente. Enunciare e dimostrare un criterio di convergenza per le serie.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**Recupero prima prova in itinere** **11 febbraio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1.1) Calcolare gli autovalori di A, B, C e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

(1.2) Determinare se A, B, C sono diagonalizzabili.

(1.3) Quali tra le matrici A, B, C sono simili?

(1.4) Determinare la matrice di passaggio che realizza la similitudine.

2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\} \qquad E_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = 0,\ z \neq -2\right\} \cup \{z = -2\}.$$

(2.1) Rappresentare gli insiemi E_1 ed E_2 nel piano di Gauss.

(2.2) Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, si consideri la trasformazione $\mathbf{T}_\theta(z) = e^{i\theta} z$. Determinare per quale $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{T}_\theta(E_2) = E_1$.

3. Si considerino nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= \alpha \\ x + 4y + 5z &= 6, \end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3.1) Calcolare tutti e soli i valori di α tali che i piani non hanno nessun punto in comune.

(3.2) Per tutti i valori di α diversi da quelli trovati nel punto precedente descrivere il luogo dei punti di intersezione dei piani.

4. Sia $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + ky \\ \\ 2x + kz \\ \\ kx + z \end{bmatrix}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

(4.1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali $\mathbf{L}$ è biunivoca.

(4.2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare le dimensioni di $Ker(\mathbf{L})$ e $Im(\mathbf{L})$.

(4.3) Calcolare le controimmagini del vettore nullo mediante $\mathbf{L}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Teoria	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**Recupero seconda prova in itinere** **11 febbraio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(1.1) Provare che $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(1.2) Calcolare $f'(x)$, per ogni $x \neq 0$.

(1.3) Esiste $f'(0)$? In caso affermativo, f' è continua in $x_0 = 0$?

(1.4) Determinare per quali $\alpha > 0$, $f'_\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dove
$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

2. Date le serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(-9)^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n!}$$

(2.1) provare che convergono;

(2.2) calcolare la loro somma.

3. Si consideri la seguente funzione
$$f(x) = e^{-x}\big(\ln x + 1\big).$$

(3.1) Determinare il dominio di f, i limiti alla frontiera del dominio, le eventuali simmetrie e/o periodicità di f, gli eventuali asintoti.

(3.2) Calcolare f' e determinare dove f è monotona crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti.

(3.4) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(3.5) Discutere la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

4. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{\ln\big(1+\sin t\big)}{t^2} \qquad \text{per } t \neq 0.$$

(4.1) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 f(t)\, dt.$$

(4.2) Determinare il dominio della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

(4.3) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha F(x).$$

Teoria. Dare la definizione di serie convergente. Enunciare e dimostrare un criterio di convergenza per le serie.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Teoria	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**30 giugno 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Sia $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita

$$\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+kz \\ kx-y+z \end{bmatrix}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $\mathbf{L}$ è biunivoca.

(1.2) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare le dimensioni di $Ker(\mathbf{L})$ e $Im(\mathbf{L})$ ed esibirne una base.

(1.3) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se esiste un vettore $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{L}([x, y, z]^T) = [x, y, z]^T$, specificando se tale vettore è unico.

2. Si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = [1, 0, \alpha]^T, \qquad \mathbf{v} = [0, -1, \alpha]^T, \qquad \mathbf{w} = [\alpha, 0, 1]^T$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2.1) Esistono dei valori di α tali che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti? Esistono dei valori di α tali che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono mutuamente ortogonali?

(2.2) Nei casi in cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono complanari , determinare l'equazione del piano che li contiene e determinare l'equazione parametrica della retta normale a tale piano e passante per il punto $(2, 0, 1)$.

3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \ln\left(e^x - 1 - x\right).$$

(3.1) Determinare esplicitamente il dominio di f, i limiti alla frontiera del dominio, il segno di f, le eventuali simmetrie e/o periodicità, gli eventuali asintoti.

(3.2) Calcolare f' e determinare dove f è monotona crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti.

(3.3) Tracciare un grafico qualitativo di f.

4. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \text{dove} \qquad f(t) = \arctan\left[(1+t)^{1/4}\right].$$

(4.1) Determinare il dominio di F (dom$F$) e determinare il più grande sottoisieme di dom$F$ nel quale F ammette derivate di ogni ordine.

(4.2) Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di F in $x = 0$.

(4.3) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ e per quali $\beta \in \mathbb{R}$ sono convergenti i seguenti integrali impropri

$$\int_{-1}^{0} \frac{|t|^\alpha}{f(t)}\,dt, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^\beta}{f(t)}\,dt.$$

Teoria. Enunciare il Teorema di Lagrange.

Utilizzando tale risultato dimostrare che, per ogni $x > 1$,

$$\ln x < x - 1.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Teoria	Totale

Analisi e geometria 1 **Docente: Elsa Marchini**		**2 settembre 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.**

1. Sia

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1.1) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile.

(1.2) Stabilire se esistono dei valori di k in corrispondenza dei quali $v = [0, 1, 1]^T$ è autovettore di A.

(1.3) Stabilire se esistono dei valori di k in corrispondenza dei quali A è simile alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.

(2.1) Risolvere l'equazione

$$z^3 = iz\overline{z}$$

e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

(2.2) Determinare una trasformazione $\mathbf{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che mandi le radici terze dell'unità nelle soluzioni non nulle calcolate nel punto (2.1). $\mathbf{T}$ è lineare? Giustificare la risposta.

3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x - 1 - \ln x}.$$

(3.1) Determinare esplicitamente il dominio di f, i limiti alla frontiera del dominio, il segno di f, le eventuali simmetrie e/o periodicità, gli eventuali asintoti.

(3.2) Calcolare f' e determinare dove f è monotona crescente o decrescente e gli eventuali punti estremanti.

(3.3) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(3.4) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ e per quali $\beta \in \mathbb{R}$ sono convergenti i seguenti integrali impropri

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha t} f(t)}{t^\beta}\, dt, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha t} f(t)}{t^\beta}\, dt.$$

4. Sia

$$a_n = n^\alpha \Big(e^{\sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \Big),$$

con $\alpha \geq 0$.

(2.1) Al variare di α, calcolare (se esiste)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n.$$

(2.2) Al variare di α, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Teoria. Si dia la definizione di indipendenza lineare per n vettori $v_1, \ldots, v_n$ in $\mathbb{R}^m$.

È possibile fornire un esempio di 4 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.