Trasformata di Fourier

IV.1 - Trasformata di Fourier in L^1

Si consideri una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama ***trasformata di Fourier*** di u una nuova funzione $\hat{u}(\xi)$ definita dal seguente integrale:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Si noti che tale definizione è ben data, in quanto l'integrale esiste per ogni $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \left| e^{-i\xi x} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < +\infty$$

da cui si vede anche che la funzione $\hat{u}(\xi) \in L^\infty$ essendo limitata e in particolare $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$.

Se si considera la trasformata di Fourier come operatore da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$, ovvero $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$, la precedente disuguaglianza mostra come esso sia lineare e continuo di norma minore o uguale a 1 (in realtà la norma è proprio uguale ad 1, come si può vedere dall'esempio di pag. 4).

Osservazioni:

- Si può in maniera analoga definire la trasformata di Fourier per funzioni $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-i\xi \bullet x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$
- La funzione $\hat{u}(\xi)$ ha in generale valori in $\mathbb{C}$, e quindi $\hat{u}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Infatti l'integrale che definisce la trasformata può essere riscritto nel modo seguente:
$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\left[\cos(\xi x) - i\sin(\xi x)\right] dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\cos(\xi x)\, dx - i\int_{\mathbb{R}} u(x)\sin(\xi x)\, dx$$
- Più in generale si può prendere anche la funzione u a valori complessi.

Teorema di Riemann-Lebesgue: Sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{u}$ è limitata, continua e infinitesima all'infinito.

<u>*Dimostrazione:*</u>
La limitatezza è già stata dimostrata sopra. Rimangono quindi da controllare le ultime due tesi.

- Per la continuità bisogna dimostrare che per qualsiasi successione $\{\xi_k\}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\xi_k \to \xi$, allora: $\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi_k x}dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx$

  Ma poiché la successione degli integrandi $u(x)e^{-i\xi_k x}$ converge q.o., basta applicare il teorema di Lebesgue utilizzando come dominante $|u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, essendo proprio $\left|u(x)e^{-i\xi_k x}\right| = |u(x)|$.

- L'annullamento all'infinito può essere dimostrato per una famiglia di funzioni densa in $L^1(\mathbb{R})$, come le funzioni a scalino, poiché, se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni a scalino che tende ad una funzione $u \in L^1$, allora anche $\hat{u}_n \to \hat{u}$ in L^∞. Infatti $\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{L^\infty} \le \|u_n - u\|_{L^1} \to 0$ per $n \to +\infty$. In particolare, se $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{u}_n = 0 \;\; \forall n, \quad \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n = \hat{u}$ in $L^\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \hat{u} = 0$

  Ma essendo le funzioni a scalino tutte combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di un intervallo, ed essendo la trasformata di Fourier lineare, basta fare la dimostrazione per $\chi_{(a,b)}$.

$$u(x)=\chi_{(a,b)}(x); \quad \hat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{(a,b)}(x)e^{-i\xi x}dx=\int_a^b e^{-i\xi x}=\int_a^b\left[\cos\left(\xi x\right)-i\sin\left(\xi x\right)\right]dx=$$

$$=\left[\frac{\sin\left(\xi x\right)}{\xi}+i\frac{\cos\left(\xi x\right)}{\xi}\right]_a^b=\frac{\sin\left(\xi b\right)-\sin\left(\xi a\right)}{\xi}+i\frac{\cos\left(\xi b\right)-\cos\left(\xi a\right)}{\xi}\xrightarrow{|\xi|\to\infty}0$$

Esempi:

- $u(x)=\chi_{(a,b)}(x); \quad \hat{u}(\xi)=\dfrac{\sin\left(\xi b\right)-\sin\left(\xi a\right)}{\xi}+i\dfrac{\cos\left(\xi b\right)-\cos\left(\xi a\right)}{\xi}$, come si è appena trovato.

  Si noti in particolare che $\hat{u}(\xi)\notin L^1(\mathbb{R})$, in quanto all'infinito si comporta come ξ^{-1}.

- $$u_1(x)=e^{-x}H(x);\quad \hat{u}_1(\xi)=\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x}e^{-i\xi x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x}dx=\left[-\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{(1+i\xi)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{1+i\xi}$$

$$u_2(x)=e^{x}H(-x);\quad \hat{u}_1(\xi)=\int_{\mathbb{R}^-} e^{x}e^{-i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}dx=\left[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{(1-i\xi)}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{1-i\xi}$$

Dalle quali, per la linearità dell'operatore di trasformata, si ottiene che:

$$\left(u_1+u_2\right)(x)=e^{-|x|}\in L^1(\mathbb{R});\quad \widehat{\left(u_1+u_2\right)}(\xi)=\frac{1}{1+i\xi}+\frac{1}{1-i\xi}=\frac{2}{1+\xi^2}$$

- $$u(x)=\frac{1}{1+x^2};\quad \hat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\,dx=\left\langle\begin{array}{l}\xi>0:\ -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},-i\right)=\pi e^{-\xi}\\[2ex] \xi<0:\ 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{-i\xi x}}{1+x^2},i\right)=\pi e^{\xi}\end{array}\right\rangle=\pi e^{-|\xi|}$$

  Nel calcolo dell'integrale si è utilizzato il lemma di Jordan e il teorema dei residui. È interessante notare a questo punto che:

  $$u(x)=e^{-|x|};\quad \hat{u}(\xi)=\frac{2}{1+\xi^2};\quad \hat{\hat{u}}(x)=\mathcal{F}\left[\hat{u}\right](x)=2\pi e^{-|x|}=2\pi u(x)$$

  In realtà ciò non vale solo in questo caso, ma è una proprietà più generale della trasformata di Fourier che verrà trattata più avanti.

IV.2 - Proprietà della Trasformata di Fourier

Ecco alcune proprietà della trasformata di Fourier che risultano utili soprattutto per calcolare trasformate a partire da quelle di alcune funzioni note.

Sia in particolare $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

1. $v(x) = u(x-y),\ \ y \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = e^{-i\xi \bullet y}\hat{u}(\xi)$
2. $v(x) = e^{ix \bullet y}u(x),\ \ y \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - y)$
3. $v(x) = \overline{u}(x) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \overline{\hat{u}}(-\xi)$
4. $v(x) = u(A^{-1}x),\ \ A \in \mathcal{M}(n \times n) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \left|\det A\right| \hat{u}(A^T\xi)$
   - Se $A = \lambda I$: $\quad v(x) = u(x/\lambda) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \left|\lambda^n\right| \hat{u}(\lambda\xi)$
   - Se $A = -I$: $\quad v(x) = u(-x) \ \Rightarrow\ \hat{v}(\xi) = \hat{u}(-\xi)$

   E da quest'ultima si ricava anche che:
   - Se u è pari [e reale], allora $\hat{u}$ è pari [e reale].
   - Se u è dispari [e reale], allora $\hat{u}$ è dispari [e puramente immaginaria].

L'importanza della trasformata di Fourier è in parte però dovuta alle due proprietà che seguono, che la rendono un utile strumento per la risoluzione di equazioni differenziali.

Proprietà 1: sia $u \in L^1 \cap AC$ (ovvero $\exists u'$ $q.o.$ con $u' \in L^1$), allora $\mathcal{F}\left[u'(x)\right](\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$. Si ha inoltre che se u è derivabile k volte e tali derivate stanno in L^1, allora $\hat{u}(\xi) = o\left(|\xi|^{-k}\right)$.

Dimostrazione:

La prima parte si dimostra con un'integrazione per parti, possibile grazie all'ipotesi di assoluta continuità, infatti:

$$\mathcal{F}\left[u'(x)\right](\xi)=\int_{\mathbb{R}}u'(x)e^{-i\xi x}dx=\lim_{L\to+\infty}\int_{-L}^{L}u'(x)e^{-i\xi x}dx=\lim_{L\to+\infty}\left[\left.\frac{u'(x)e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L}+i\xi\int_{-L}^{L}u(x)e^{-i\xi x}dx\right]=$$

$$=\cancel{\lim_{L\to+\infty}\left.\frac{u'(x)e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L}}+\lim_{L\to+\infty}i\xi\int_{-L}^{L}u(x)e^{-i\xi x}dx=i\xi\int_{\mathbb{R}}u(x)e^{-i\xi x}dx=i\xi\hat{u}(\xi)$$

Per dimostrare la seconda parte, basta notare che $\xi\hat{u}(\xi)$, a parte una costante moltiplicativa, è la trasformata di Fourier di una funzione integrabile e quindi è una funzione infinitesima all'infinito. Ma se $\xi\hat{u}(\xi)$ è infinitesima all'infinito, allora $\hat{u}(\xi)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $|\xi|^{-1}$.
Se poi la funzione $u(x)$ è derivabile k volte tali derivate sono integrabili, iterando lo stesso ragionamento si ottiene che è infinitesima all'infinito $\xi^k\hat{u}(\xi)$ e quindi $\hat{u}(\xi) = o\left(|\xi|^{-k}\right)$.

Proprietà 2: siano $u, xu \in L^1$, allora $\mathcal{F}\left[xu(x)\right](\xi) = i\dfrac{d}{d\xi}\left[\hat{u}(\xi)\right]$. Si ha inoltre che se $u(x) \sim Mx^{-\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > k \in \mathbb{N}$, allora $\hat{u} \in C^{k-1}$.

Dimostrazione:

La dimostrazione si basa su un corollario del teorema di Lebesgue utilizzato in $(*)$:

$$\frac{d}{d\xi}\hat{u}(\xi)=\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}}u(x)e^{-i\xi x}dx\overset{(*)}{=}\int_{\mathbb{R}}u(x)\frac{d}{d\xi}e^{-i\xi x}dx=-i\int_{\mathbb{R}}xu(x)e^{-i\xi x}dx=-i\mathcal{F}\left[xu(x)\right](\xi)$$

Le ipotesi per applicare tale corollario sono verificate in quanto:

- $x\mapsto u(x)e^{-i\xi x}$ è integrabile e quindi misurabile.
- $\partial_\xi\left[u(x)e^{-i\xi x}\right]$ esiste $\forall\xi\in\mathbb{R}$.
- $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u(x)e^{-i\xi x}\right]\right|=\left|-ixu(x)e^{-i\xi x}\right|=\left|xu(x)\right|\left|e^{-i\xi x}\right|=\left|xu(x)\right|\in L^1$.

Ora però $[\hat{u}(\xi)]'$ è una funzione continua, essendo la trasformata di Fourier di una funzione integrabile, e quindi $\hat{u}(\xi) \in C^1$. Se poi, con α e k come nelle ipotesi, $u(x) \sim Mx^{-\alpha}$, allora è integrabile anche $x^{k-1}u(x)$ e iterando il ragionamento appena fatto si vede che $\hat{u}(\xi) \in C^k$.

Teorema: sia $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, continua in x con $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, allora vale la seguente formula

$$u(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

Questo teorema afferma quindi che sotto determinate ipotesi è possibile ricavare una funzione a partire dalla sua trasformata e viene quindi chiamato formula di inversione.
Le ipotesi richieste dal teorema sono però troppo restrittive e ci si pone quindi a questo punto il problema di trovare uno spazio funzionale tale che la formula di inversione sia sempre utilizzabile senza ipotesi particolari. Detto X tale spazio, sicuramente deve valere che, se $u \in X$, allora anche la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}[u] \in X$.

IV.3 - LO SPAZIO $\mathcal{S}$

La ricerca di uno spazio con le caratteristiche sopra descritte porta a introdurre lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle **funzioni a decrescenza rapida**, ovvero delle funzioni che decrescono più velocemente dell'inverso di ogni polinomio:

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right):\ \forall \alpha, \beta \text{ multi-indici } x^\alpha D^\beta u(x) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

N.B: un esempio di multi-indici è: $\alpha = (1,2),\ \beta = (3,1):\quad x^\alpha D^\beta u = x_1 x_2^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}$

Osservazioni:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è contenuto propriamente in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ad esempio: $e^x \in C^\infty$, ma $e^x \notin \mathcal{S}$).

  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ contiene propriamente $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ad esempio $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, ma $e^{-x^2} \notin C_0^\infty$).

  Si ha quindi che: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è contenuto propriamente in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Esempio:

$u = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si noti che tale funzione risolve l'equazione differenziale: $u' + xu = 0$.
Calcoliamo dunque la trasformata di u a partire da tale osservazione, applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione:

$i\xi\hat{u}(\xi) + i[\hat{u}(\xi)]' = 0; \quad \hat{u}' + \xi\hat{u} = 0$ che è un'equazione uguale a quella di partenza (solo nella variabile ξ), e quindi è risolta allo stesso modo da $\hat{u}(\xi) = ce^{-\xi^2/2}$, che è quindi proprio la trasformata che si stava cercando, a patto di determinare la costante c.

$c = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx$ e tale integrale si calcola con il seguente artificio:

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}dy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2/2}\rho d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1d\theta = 2\pi \;\Rightarrow\; c = \sqrt{2\pi}$$

E quindi in definitiva: $\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Poiché vale che $\|\hat{u}\|_\infty = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = \|u\|_1$, questo esempio mostra che la norma della trasformata di Fourier come operatore da L^1 a L^∞ sia uguale a 1.

Teorema: la trasformata di Fourier è un operatore da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ e la formula di inversione vale per ogni funzione di tale spazio.

Dimostrazione:

Per la prima parte della dimostrazione usiamo le seguenti proprietà: $\forall u \in \mathcal{S}, \quad \forall \alpha$ multi-indice

- $\mathcal{F}\left[D^\alpha u\right] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}$
- $D^\alpha u = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}\left[x^\alpha u\right]$

Bisogna dimostrare che se $u \in \mathcal{S}$, allora $\hat{u} \in \mathcal{S}$, e quindi che $\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \in L^\infty$, che è sicuramente vero se $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione integrabile.

$$D^\beta u = (-i)^{|\beta|}\mathcal{F}\left[x^\beta u\right]; \quad \xi^\alpha D^\beta u = (-i)^{|\beta|}\xi^\alpha \mathcal{F}\left[x^\beta u\right] = \frac{(-i)^{|\beta|}}{(i)^{|\alpha|}}\mathcal{F}\left[D^\alpha\left(x^\beta u\right)\right]$$

A parte un coefficiente moltiplicativo quindi $\xi^\alpha D^\beta u$ è la trasformata di $D^\alpha\left(x^\beta u\right)$, che essendo u una funzione di $\mathcal{S}$, è anch'essa una funzione di $\mathcal{S}$, e quindi è in particolare integrabile.

La seconda parte della dimostrazione segue subito. Infatti se $u \in \mathcal{S}$, allora si ha anche sicuramente che $u \in L^1 \cap L^\infty \cap C^\infty$ e per la prima parte si ha anche che $\hat{u} \in \mathcal{S}$, e sono quindi verificate tutte le ipotesi per poter utilizzare la formula di inversione.

Proposizione: siano $v, u \in \mathcal{S}$, allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} v = \int_{\mathbb{R}^N} u \hat{v}$
2. $\int_{\mathbb{R}^N} u \overline{v} = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u} \overline{\hat{v}}$
3. $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2$: **identità di Plancherel**, scritta anche $\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}\|_{L^2}^2$
4. $\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\hat{v}$
5. $\mathcal{F}[uv] = (2\pi)^{-N} \hat{u} * \hat{v}$

IV.4 - TRASFORMATA DI FOURIER IN L^2

Lo spazio $\mathcal{S}$ appena definito, sebbene abbia le caratteristiche che si stavano cercando rispetto all'operazione di trasformazione, richiede alle funzioni che vi appartengono un comportamento molto restrittivo. Esso viene quindi utilizzato come passaggio intermedio per arrivare a definire la trasformata di Fourier in uno spazio più ampio, ovvero L^2.

Siano $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\{u_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ una successione di funzioni che converga a u in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Si consideri ora la successione delle trasformate di u_n. Si definisce trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\widehat{u} := \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n \text{ in norma } L^2$$

dove per la trasformata in L^2 abbiamo usato un simbolo diverso da quello della trasformata in L^1 perché per ora non è lecito presumere che portino allo stesso risultato.

1. La definizione è ben data:
   - Il limite esiste sempre finito. Infatti se u_n converge in L^2, allora è di Cauchy, e quindi per l'identità di Plancherel si ha che:

     $$\varepsilon > \left\| u_n - u_m \right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \left\| \mathcal{F}\left[u_n - u_m \right] \right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \left\| \hat{u}_n - \hat{u}_m \right\|_{L^2}^2$$

     e allora anche la successione delle trasformate è di Cauchy e quindi converge in norma L^2 poiché L^2 è uno spazio di Banach.

- Il limite non dipende dalla successione scelta per approssimare u. Infatti, considerate due successioni $\{u_n\},\{v_n\} \subseteq \mathcal{S}$ che tendono alla stessa funzione, si ha che:

  $$\lim_{n\to+\infty}\left[u_n - v_n\right] = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = u - u = 0 \text{ (in norma } L^2 \text{)}$$

  Per Plancherel, con lo stesso ragionamento di prima, si vede allora che $\hat{u}_n - \hat{v}_n \xrightarrow{L^2} 0$:

  $$\lim_{n\to+\infty}\left[\hat{u}_n - \hat{v}_n\right] = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \hat{v}_n \text{ (in norma } L^2 \text{)}$$

  E quindi le due successioni portano alla stessa trasformata.

2. Nel caso in cui $u \in L^1 \cap L^2$ allora le due definizioni di trasformata in L^1 e L^2 portano allo stesso risultato. È possibile quindi utilizzare un simbolo unico per entrambe e a seconda della funzione da trasformare si utilizzerà la definizione adatta ad essa. Infatti, si può dimostrare che esiste una successione in $\mathcal{S}$ che tenda ad u sia in norma L^1 che L^2 :

$$u_n \xrightarrow{L^1, L^2} u \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \hat{u}_n \to \hat{u} \ \text{ in } L^\infty \\ \hat{u}_n \to \widehat{u} \ \text{ in } L^2 \end{array} \right| \Rightarrow \hat{u} = \widehat{u} \ \ q.o. \text{ per le proprietà degli spazi } L^p$$

3. In generale, per funzioni u che si sa soltanto appartenere a L^2, può proprio non essere neanche definito l'integrale che definisce la trasformata di Fourier in L^1.

4. L'identità di Plancherel vale in generale per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Infatti, si consideri una successione di funzioni $\{u_n\} \subseteq \mathcal{S}$ che tendono a u in norma L^2:

$u_n \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \|u_n\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}_n\|_{L^2}^2$; $\quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^2$ e passando al limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 = (2\pi)^{-N} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^2; \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2; \quad \|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N} \|\hat{u}\|_{L^2}^2$$

dove si è utilizzato il fatto che $u_n \to u$ in $L^2 \;\Rightarrow\; \|u_n\|_{L^2} \to \|u\|_{L^2}$

5. Se $u \in L^2(\mathbb{R})$, allora $u_n = u\chi_{(-n,n)} \in L^1 \cap L^2$ e si può quindi dare una formula esplicita per il calcolo della trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{u}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} u(x) e^{-i\xi x} dx$$

dove ancora una volta il limite è intenso nel senso di L^2.

Teorema: la trasformata di Fourier è un operatore da L^2 in L^2 e la formula di inversione vale per ogni funzione di tale spazio.

<u>*Dimostrazione:*</u>

La prima parte si dimostra immediatamente con l'identità di Plancherel: infatti, se $u \in L^2$, allora $\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2 = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 < +\infty$ e quindi anche $\hat{u} \in L^2$.

Per la seconda parte, basta considerare una successione di funzioni $\{u_k\} \subseteq \mathcal{S}$ e quindi: $\forall k :\ u_k(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_k(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ e, passando al limite, applicando l'identità di Plancherel due volte: $u_k \to u$ in L^2 $\Rightarrow$ $\hat{u}_k \to \hat{u}$ in L^2 $\Rightarrow$ $\hat{\hat{u}}_k \to \hat{\hat{u}}$ in L^2, da cui si ha: $u(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.

Esempio:

$$u(x)=\frac{\sin x}{x}\in L^2(\mathbb{R})\setminus L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{u}(\xi)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{\sin x}{x}e^{-i\xi x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}e^{-i\xi x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{e^{ix(1-\xi)}-e^{-ix(1+\xi)}}{2ix}dx$$

Tale integrale si calcola con i metodi di analisi complessa e si ricava alla fine che $\hat{u}(\xi)=\pi\chi_{(-1,1)}(\xi)$.

Si noti che tramite l'identità di Plancherel si possono trasformare alcuni integrali in integrali che possono essere risolti più facilmente. In questo caso ad esempio:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\left\|\frac{\sin x}{x}\right\|_{L^2}^2=\frac{1}{2\pi}\left\|\mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right](\xi)\right\|_{L^2}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\pi\chi_{(-1,1)}(\xi)\right|^2 d\xi=\pi$$

IV.5 - APPLICAZIONI ALLE ODE

Per risolvere eq. differenziali ordinarie con la trasformata di Fourier si segue lo schema seguente:

1. Si impongono condizioni sulla funzione incognita che rendano leciti i passaggi successivi.
2. Si trasforma l’equazione differenziale ottenendo un’equazione algebrica.
3. Si ricava la trasformata della soluzione.
4. Si antitrasforma quello che si è ottenuto per trovare la funzione incognita.
5. Si verificano che le ipotesi fatte al punto 1 siano rispettate dalla soluzione trovata.

Esempi:

- $u'(x) - u(x) = e^{-x} H(x), \quad x \in \mathbb{R}$

  Si chiede che la funzione u sia integrabile e assolutamente continua: $u \in L^1 \cap AC$. Ciò garantisce in particolare la possibilità di trasformare l'equazione e antitrasformare il risultato ottenuto.

  $$\mathcal{F}\left[u'(x) - u(x)\right] = \mathcal{F}\left[e^{-x} H(x)\right]; \quad i\xi\hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}; \quad \hat{u}(1 - i\xi) = \frac{1}{1+i\xi}; \quad \hat{u} = \frac{1}{1+\xi^2} = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2} e^{-|x|}\right]$$

  La soluzione è quindi $u(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|}$, che si vede rispetta le condizioni poste all'inizio.

  Si noti che quella trovata non è in generale la sola soluzione dell'equazione di partenza, ma è l'unica soluzione che sta in $L^1 \cap AC$.

- $$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  La soluzione generale di questa equazione si trova immediatamente ed è $u(x) = \arctan x + c$. Si vede facilmente come essa non stia né in L^1 né L^2 per alcun valore di c. Infatti, se si suppone che la soluzione stia in uno di questi due spazi, trasformando si ottiene:

  $$\mathcal{F}\left[u'(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]; \quad i\xi\hat{u} = \pi e^{-|\xi|}; \quad \hat{u} = \frac{\pi e^{-|\xi|}}{i\xi} \left\langle \begin{array}{l} \notin L^\infty \Rightarrow u \notin L^1 \\ \notin L^2 \Rightarrow u \notin L^2 \end{array} \right. .$$

- $2u''(x) - e^{-|x|} * u(x) = -e^{-|x|}\,\mathrm{sign}\,x, \quad x \in \mathbb{R}$

  Si chiede che $u \in L^1$ $u, u' \in AC$. Trasformando l'equazione si ottiene:

  $$\mathcal{F}\left[2u''(x) - e^{-|x|} * u(x)\right] = \mathcal{F}\left[-e^{-|x|}\,\mathrm{sign}\,x\right]; \quad -2\xi^2\hat{u} - \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right]\mathcal{F}\left[u(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}e^{-|x|}\right];$$

  $$-2\xi^2\hat{u} - \frac{2}{1+\xi^2}\hat{u} = i\xi\frac{2}{1+\xi^2}; \quad \hat{u} = \frac{-i\xi}{\xi^4+\xi^2+1}$$

  Utilizzando la formula di inversione e i metodi di analisi complessa, si ottiene che:

  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}|x|}$, che si vede rispettare le condizioni richieste in precedenza.

IV.6 - L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

Quello che segue è un esempio di applicazione della trasformata di Fourier ad un'equazione alle derivate parziali, in particolare all'equazione delle onde:

$$u_{tt} = \Delta u \ \text{ con } \ u = u(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}^N, \ \ t \in \mathbb{R}$$

Il caso monodimensionale $N = 1$ è quello della corda vibrante e si considera il problema di Cauchy:

$$(*) \ \begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$, che si può scomporre nei due problemi separati:

$$(1) \ \begin{cases} v_{xx} = v_{tt} \\ v(x,0) = \varphi(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \ \begin{cases} w_{xx} = w_{tt} \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

poiché per la linearità dell'equazione, basta sommare le soluzione di (1) e (2) per ottenere la soluzione di $(*)$.

Si cominci dunque con il problema (1). Per risolvere l'equazione, si considera t come un parametro e si applica la trasformata di Fourier alla variabile spaziale.

$$\mathcal{F}\left[v_{xx}(x,t)\right](\xi) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)\right](\xi) = -\xi^2 \hat{v}(\xi,t)$$

$$\mathcal{F}\left[v_{tt}(x,t)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} v_{tt}(x,t) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) e^{-i\xi x} dx \overset{(i)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}} v(x,t) e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{v}(\xi,t)$$

dove nel passaggio (i) si richiede a $v(x,t)$ delle condizioni che verranno verificate a posteriori.

Si ottiene dunque la seguente equazione differenziale ordinaria, dove però ora la variabile è t, mentre ξ è considerato un parametro:
$\hat{v}_{tt}(\xi,t) = -\xi^2 v(\xi,t)$, la cui soluzione generale è $\hat{v}(\xi,t) = c_1(\xi)e^{i\xi t} + c_2(\xi)e^{-i\xi t}$.

Le costanti (dipendenti però da ξ) devono essere determinate in base alle condizioni iniziali, anche loro trasformate:

$$\begin{cases} \hat{v}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi) \\ \hat{v}_t(\xi,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) + c_2(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \\ \left[c_1(\xi) - c_2(\xi)\right] i\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1(\xi) = c_2(\xi) = \frac{1}{2}\hat{\varphi}(\xi)$$

La soluzione particolare è dunque: $\hat{v}(\xi,t)=\frac{1}{2}\hat{\varphi}(\xi)\left[e^{i\xi t}+e^{-i\xi t}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]$.

Il problema considerato ha quindi la seguente soluzione: $v(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]$.

La risoluzione del problema (2) ricalca quella appena fatta fino alla risoluzione dell'equazione differenziale ordinaria. In questo caso risulta più utile esprimere la soluzione generale di quest'ultima tramite seno e coseno: $\hat{w}(\xi,t) = c_1(\xi)\sin(\xi t) + c_2(\xi)\cos(\xi t)$

Imponendo le condizioni iniziali (come prima anch'esse trasformate) si ottiene:

$$\begin{cases} \hat{w}(\xi,0) = 0 \\ \hat{w}_t(\xi,0) = \hat{\psi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2(\xi) = 0 \\ c_1(\xi)\xi = \hat{\psi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) = \xi^{-1}\hat{\psi}(\xi) \\ c_2(\xi) = 0 \end{cases}$$

Da qui si ricava quindi che $\hat{w}(\xi,t) = \dfrac{\sin(\xi t)}{\xi}\hat{\psi}(\xi)$, che antitrasformando diventa:

$$w(x,t) = \psi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\right] = \psi(x) * \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}\left(x/t\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi(y)\chi_{(-1,1)}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy\,.$$

La soluzione del problema della corda vibrante $(*)$ da cui si era partiti è quindi:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)\,dy$$ **(formula di D'Alambert)**

Tutti i passaggi fatti, e in particolare l'uguaglianza (*i*), sono validi se $\varphi \in C^2$ e $\psi \in C^1$.