Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2018/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello d'esame di Analisi Matematica III, 18 luglio 2019 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
(a) Sviluppare $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$ in serie di Laurent di potenze di $(z+2)$.
(b) Dedurre il tipo di singolarità della funzione f nel punto $z = -2$ e il corrispondente residuo.

Soluzione. (a) Poiché $f^{(k)}(-2) = e^{-2}$, si ha

$$e^z = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-2}}{k!}(z+2)^k \,,$$

e quindi

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-2}}{k!}(z+2)^{k-1} = \sum_{h\geq -1} \frac{e^{-2}}{(h+1)!}(z+2)^h \,.$$

(b) Si tratta di un polo semplice, con

$$\mathrm{Res}(f,-2) = c_{-1} = e^{-2} \,.$$

ESERCIZIO 2. (8 punti) [fornire le risposte con una breve giustificazione]
Sia

$$f_n(x) = n\, x^n \,, \qquad x \in (0,1) \,.$$

(a) Stabilire per quali $p \in (1,\infty)$ la successione converge in $L^p(0,1)$.
(b) Stabilire se la successione converge in $L^\infty(0,1)$.

Soluzione. (a) La successione converge puntualmente a zero. Infatti, fissato $x \in (0,1)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\log n + n \log x} = 0 \,.$$

Per valutare la convergenza in $L^p(0,1)$, con $p \in [1,\infty)$, osserviamo che con un calcolo esplicito si ha

$$\|f_n\|_p^p = \frac{n^p}{np+1} \quad \forall p \in [1,\infty)$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 1 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty \quad \forall p \in (1,\infty) \,.$$

Perciò la successione non converge in alcuno spazio $L^p(0,1)$ per $p \in [1,+\infty)$ (in quanto il limite puntuale e il limite in L^p, se esistono, devono coincidere).
(b) La successione non converge in $L^\infty(0,1)$, in quanto $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = n$.

ESERCIZIO 3. (8 punti) [fornire le risposte con una giustificazione dettagliata]
Sia

$$g_\varepsilon(x) = (\sin x)e^{-\varepsilon|x|}\,, \qquad f_\varepsilon(x) = \frac{g_\varepsilon(x)}{x}\,.$$

(a) Calcolare $\widehat{g_\varepsilon}$.

(b) Stabilire se $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ e se $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$.

(c) Mostrare che $f_\varepsilon \to \frac{\sin x}{x}$ in $L^2(\mathbb{R})$ nel limite per $\varepsilon \to 0$.

(d) Calcolare $\widehat{f_\varepsilon}$.

Soluzione.
(a) Da $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\xi^2}$ segue $\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|}) = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$, da cui

$$\widehat{g_\varepsilon}(\xi) = -i\varepsilon\Big[\frac{1}{\varepsilon^2+(\xi+1)^2} - \frac{1}{\varepsilon^2+(\xi-1)^2}\Big]$$

(b) Si ha $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, in quanto f_ε è limitata in $x = 0$ e decade esponenzialmente per $x \to \pm\infty$.

(c) Posto $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, si ha

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - \frac{\sin x}{x}|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |(1-e^{-\varepsilon|x|})\frac{\sin x}{x}|^2\, dx\,.$$

Poiché la successione $\varphi_\varepsilon = (1-e^{-\varepsilon|x|})^2\frac{\sin^2 x}{x^2}$ converge puntualmente a 0 q.o., ed è dominata dalla funzione $\frac{\sin^2 x}{x^2} \in L^1(\mathbb{R})$, la tesi segue dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

(d) Poiché $g_\varepsilon(x) = xf_\varepsilon(x)$, si ha $\widehat{g}_\varepsilon = -iD\widehat{f}_\varepsilon$, da cui

$$D\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \varepsilon\Big[\frac{1}{\varepsilon^2+(\xi+1)^2} - \frac{1}{\varepsilon^2+(\xi-1)^2}\Big]\,.$$

Integrando si ottiene

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \arctan\left(\frac{\xi+1}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{\xi-1}{\varepsilon}\right) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Poiché $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f_\varepsilon}$ deve essere infinitesima per $|\xi| \to +\infty$, da cui segue che necessariamente $c = 0$.

TEORIA. (7 punti) [fornire le rispondere in modo coinciso e rigoroso]

(a) Si dica cosa si intende per soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^3$ e si scriva l'espressione esplicita di tale soluzione.

(b) Dimostrare la completezza del sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici in $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$.

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati.