Teorema di Rappresentazione

Maurizio Citterio

Marco Boella   Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Introduzione

Abbiamo mostrato che gli spazi vettoriali

- $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$,
- $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali di tipo $m \times n$,

sono isomorfi:

$$M\_ : \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightleftarrows \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}) : L\_ \ .$$

Vogliamo ora studiare la natura di questo isomorfismo ed estendere il risultato allo spazio vettoriale

- $\hom(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W , dove V e W sono spazio vettoriali di dimensione (rispettivamente) n e m .

Mostreremo che, *fissate una base per V ed una base per W* , si ha un isomorfismo:

$$\hom(V, W) \rightleftarrows \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}) \ .$$

Avremo quindi la possibilità di *rappresentare* una qualsiasi applicazione lineare tra spazi finito-dimensionali attraverso una matrice.

Ritroveremo il noto isomorfismo per $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ *fissando su questi spazi le rispettive basi canoniche*.

Coordinate

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e fissiamo le basi $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V e $\mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ di W.

Ogni vettore si scrive in modo unico come combinazioni lineari dei vettori della base, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{w} = y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m$.

Denotiamo con

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad \varphi_{\mathcal{B}'}(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

le coordinate di $\mathbf{v} \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e le coordinate di $\mathbf{w} \in W$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Le applicazioni lineari

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n , \quad \varphi_{\mathcal{B}'} : W \to \mathbb{R}^m ,$$

che associano ai vettori le loro coordinate rispetto le basi fissate, sono isomorfismi.

Matrice rappresentativa

Pensando ai vettori in termini di coordinate, facciamo corrispondere ad ogni applicazione lineare $F : V \to W$ un'applicazione lineare $RF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con la seguente proprietà:

> RF *trasforma le coordinate rispetto* $\mathcal{B}$ *del vettore* $\mathbf{v} \in V$ *nelle coordinate rispetto* $\mathcal{B}'$ *del vettore immagine* $F(\mathbf{v}) \in W$ *.*

L'applicazione lineare $RF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è definita come la composizione

$$RF = \varphi_{\mathcal{B}'} \circ F \circ (\varphi_{\mathcal{B}})^{-1} \ ,$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "RF"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Matrice rappresentativa

Indicando con $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ la matrice M_{RF} di RF, abbiamo

$$[F(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\ .$$

> *Moltiplicando la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ per la n-upla delle coordinate rispetto $\mathcal{B}$ del vettore $\mathbf{v} \in V$, si ottiene la m-upla delle coordinate rispetto $\mathcal{B}'$ del vettore immagine $F(\mathbf{v}) \in W$.*

Diremo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ è la *matrice che rappresenta l'applicazione lineare F rispetto alle base $\mathcal{B}$ del dominio e alla base $\mathcal{B}'$ del codominio.*

Come calcolare la matrice rappresentativa?

Ricordiamo che:

- la n -upla delle coordinate di un vettore $\mathbf{v}_i$ della base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è il vettore $\mathbf{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$;
- il prodotto di una matrice per il vettore $\mathbf{e}_i$ è la i -esima colonna della matrice.

Poiché $[F(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
[F(\mathbf{v_i})]_{\mathcal{B}'} &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\,[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} \\
&= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\,\mathbf{e}_i \\
&= i\text{-esima colonna di } M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F).
\end{aligned}
$$

Matrice rappresentativa

La matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ è quindi costruita per colonne nel modo seguente:

colonna 1 = coordinate di $F(\mathbf{v}_1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$
colonna 2 = coordinate di $F(\mathbf{v}_2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$

$$\vdots$$

colonna n = coordinate di $F(\mathbf{v}_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$

Matrice rappresentativa. Riepilogo

Data l'applicazione lineare $F : V \to W$, sono fissate le basi $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V e $\mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ di W.

Scriviamo ogni immagine $F(\mathbf{v}_1), \dots, F(\mathbf{v}_n)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$:

$$
\begin{array}{rcl}
F(\mathbf{v}_1) & = & a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\
F(\mathbf{v}_2) & = & a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\
\vdots & & \vdots \\
F(\mathbf{v}_n) & = & a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m
\end{array}
$$

La matrice rappresentativa di F da V (di dimensione n) a W (di dimensione m) è la seguente matrice (di tipo $m \times n$):

$$
M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Matrice rappresentativa. Le basi canoniche

Osservazione

Nel caso

$$V = \mathbb{R}^n \ , \quad W = \mathbb{R}^m \ ,$$

fissate:

- la base canonica $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{R}^n$,
- la base canonica $\mathcal{C}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ di $\mathbb{R}^m$,

la matrice rappresentativa di un'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ ,$$

coincide con la matrice di F :

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(F) = M_F \ .$$

Fissata l'applicazione lineare $F : V \to W$ tra due spazi finitamente generati, comunque siano scelte le basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di W, abbiamo i seguenti importanti fatti:

- il rango dell'applicazione lineare F coincide con il rango della matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$:
$$\operatorname{rk}\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\right) = \operatorname{rk} F \ .$$
- Le colonne di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ sono le coordinate dei vettori di W che generano $\operatorname{Im} F$.
- Le soluzioni del sistema omogeneo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sono le coordinate dei vettori del nucleo di F .

Associando all'applicazione lineare $F : V \to W$ l'applicazione lineare $RF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, abbiamo introdotto una funzione

$$R : \hom(V,W) \to \hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \ , \quad F \longmapsto RF \ ,$$

che risulta essere un isomorfismo di spazi vettoriali (esercizio).

Poiché la matrice rappresentativa è ottenuta come la composizione di due isomorfismi

$$\hom(V,W) \xrightarrow{R} \hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \xrightarrow{M_-} \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R}) \ ,$$

ricordando che la composizione di isomorfirmi è un isomorfismo, abbiamo il seguente risultato.

Teorema

Fissate una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V e una base $\mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ di W, la funzione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(-) : \hom(V, W) \to \mathbb{M}(m \times n) \ , \quad F \longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$$

che a ogni applicazione lineare F associa la matrice che la rappresenta rispetto alle basi fissate, è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dunque $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(-)$ è una corrispondenza biunivoca per la quale valgono

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F+G) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(G) \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\lambda F) = \lambda M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$$

per ogni F, G in $\hom(V, W)$ e per ogni numero λ.

Matrice rappresentativa e prodotto

Siano $F : V \to W$ e $G : W \to Z$ applicazioni lineari e sia $G \circ F$ la loro composizione. Fissiamo le basi $\mathcal{B}$ di V , $\mathcal{B}'$ di W e $\mathcal{B}''$ di Z .

Proposizione

La matrice che rappresenta l'applicazione composta $G \circ F$ è il prodotto delle matrici che rappresentano G e F :

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(G \circ F) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(G) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$$

(Cenni di dimostrazione alla lavagna)

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia $F : V \to V$ un endomorfismo su V, cioè un'applicazione da V allo stesso spazio V.

Corollario

L'endomorfismo F è invertibile se e solo se la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ è invertibile; inoltre

$$[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)]^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) \ .$$

In particolare, detta 1_V la funzione identica su V, risulta

$$[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)]^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) \ .$$

(Cenni di dimostrazione alla lavagna)

Sia V uno spazio vettoriale, e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V.

Per ogni vettore $\mathbf{v}$ in V si ha

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \,.$$

Per questo motivo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)$ è detta *matrice di cambio di base*.

Cambio di base. Esempio

Nello spazio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 2, si considerino le basi

$$\mathcal{B} = (\mathbf{p}_1 = x^2 + 2x + 3, \mathbf{p}_2 = 2x + 3, \mathbf{p}_3 = 3),$$
$$\mathcal{B}' = (\mathbf{q}_1 = x^2 + x + 1, \mathbf{q}_2 = x^2 + x, \mathbf{q}_3 = x^2).$$

Poiché

$$\begin{aligned} 1_V(\mathbf{p}_1) &= \mathbf{p}_1 = 3\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \\ 1_V(\mathbf{p}_2) &= \mathbf{p}_2 = 3\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_3 \\ 1_V(\mathbf{p}_3) &= \mathbf{p}_3 = 3\mathbf{q}_1 - 3\mathbf{q}_2 \end{aligned}$$

la matrice di cambio base è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Dato, per esempio, $\mathbf{v} = x^2 + 2x + 6$, risultano

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Infatti

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 1\mathbf{p}_3 = 6\mathbf{q}_1 - 4\mathbf{q}_2 - 1\mathbf{q}_3 .$$

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$, fissate:

- una base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ di $\mathbb{R}^n$,
- la base canonica $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{R}^n$,

la matrice di cambio di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, ha come colonne le n -uple $\mathbf{b}_j$:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^n}) = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n] \ .$$

Quindi:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^n})\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]\ [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \ .$$

Cambio di base. Esempio

Nello spazio $V = \mathbb{R}^3$ si considerino la base
$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1 = (1,1,1), \mathbf{b}_2 = (2,2,0), \mathbf{b}_3 = (3,0,0))$ e la base canonica
$\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$. Poiché

$$1_V(\mathbf{b}_1) = (1,1,1) = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$
$$1_V(\mathbf{b}_2) = (2,2,0) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$
$$1_V(\mathbf{b}_3) = (3,0,0) = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

la matrice di cambio base è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(1_V) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dato, per esempio, $\mathbf{v} = (1,2,6)$, risultano

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(1_V)[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Infatti

$$\mathbf{v} = 6\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \ .$$

Proposizione

Sia $F : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita V e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V. Risulta

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = [M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V)]^{-1}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V)$$

(Cenni di dimostrazione alla lavagna)

Semplifichiamo le notazioni ponendo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = A\,, \quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F) = A'\,, \quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = P\,.$$

Il legame fra A e A' è

$$A' = P^{-1}AP$$

Matrici simili

Si dice che una matrice A' è *simile*, o *coniugata*, a una matrice A quando esiste una matrice invertibile P per la quale valga l'uguaglianza $A' = P^{-1}AP$.

Proposizione

Due matrici rappresentano uno stesso endomorfismo rispetto a due basi diverse se e solo se sono simili.

Esercizio. Provare la similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.

Esercizio. Provare che matrici simili hanno lo stesso rango.

Esercizio. La traccia $\mathrm{tr}(A)$ di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n è la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \, .$$

1. Provare che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Provare che matrici simili hanno la stessa traccia.