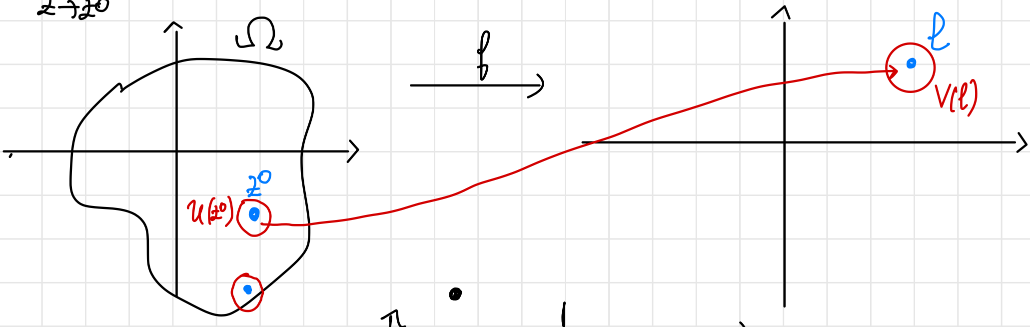
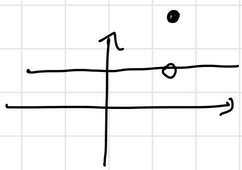
Limiti per funzioni di variabile complessa

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z^0 \in acc(\Omega)$, $\ell \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \ell \overset{def}{\iff} \forall V(\ell)\ \exists\, \mathcal{U}(z^0) \text{ tale che: }$$

$$\left(f(z) \xrightarrow[z \to z^0]{} \ell \right) \qquad \forall z \in \left(\mathcal{U}(z^0) \cap \Omega\right) \setminus \{z^0\},\ f(z) \in V(\ell).$$





$z^0 \in acc(\Omega) \iff$
$\forall\, \mathcal{U}(z^0),\ \mathcal{U}(z^0) \cap \left(\Omega \setminus \{z^0\}\right) \neq \emptyset$

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z^0 \in acc(\Omega) \cap \Omega$

f CONTINUA in $z^0 \overset{def}{\iff} \exists \lim_{z \to z^0} f(z) = f(z^0)$

Osservazioni

- $z = x + iy$, $z^0 = x^0 + iy^0$, $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, $f = u + iv$

$$\lim_{z \to z^0} f(z) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x^0, y^0)} u(x,y) = \ell_1 \\ \lim_{(x,y) \to (x^0, y^0)} v(x,y) = \ell_2 \end{cases}$$

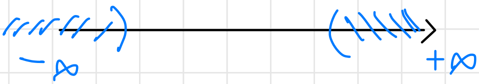
- con le stesse notazioni

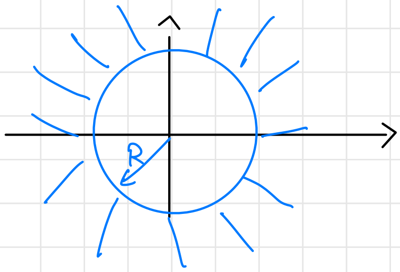
f continua in $z^0 \iff u$ e v continue in (x^0, y^0).

- Sono continue (sul loro dominio di def) tutte le funzioni elementari introdotte in precedenza.

- Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta ($\Rightarrow$ composizione di continue è continua, Es: $\dfrac{\sin(3z)+z^2}{e^{2z}+1}$)

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\qquad$ $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$





$z \to \infty \iff z \in \mathcal{U}(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \to +\infty$

$f(z) \to \infty \iff f(z) \in \mathcal{U}(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \to +\infty$

- Vale il teorema di unicità del limite.

Derivabilità per funzioni di variabile complessa

Def. $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z^0 \in \operatorname{acc}(\Omega) \cap \Omega$

f derivabile (in senso complesso) in z^0 $\iff$

- $\exists \lim\limits_{z \to z^0} \dfrac{f(z) - f(z^0)}{z - z^0}$ $(\in \mathbb{C})$, e tale limite si dice $f'(z^0)$
- $\exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z^0+h) - f(z^0)}{h}$ $(\in \mathbb{C})$ $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ "
- $f(z^0+h) = f(z^0) + \underbrace{\lambda}_{f'(z^0)} \cdot h + o(h) \qquad \dfrac{o(h)}{h} \longrightarrow 0$

$\Big(f(z^0+h) - f(z^0) - \lambda \cdot h = o(h) \iff$

$\dfrac{f(z^0+h) - f(z^0) - \lambda \cdot h}{h} \longrightarrow 0 \iff \dfrac{f(z^0+h) - f(z^0)}{h} - \lambda \to 0 \Big)$

Esempi

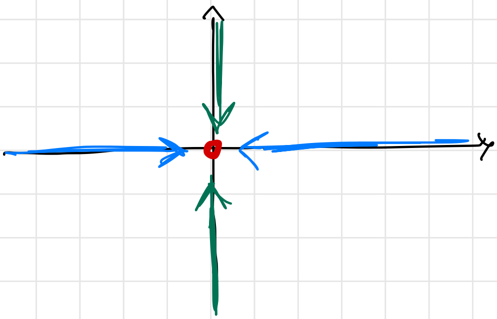
1) $f(z) = z^3$ $\quad$ derivabile in $z^0 \in \mathbb{C}$, $\quad f'(z^0) = 3 z_0^2$

$$\underbrace{(z^0+h)^3}_{f(z^0+h)} = \underbrace{z_0^3}_{f(z^0)} + \underbrace{3 z_0^2}_{\lambda} h \underbrace{+ 3 z_0 h^2 + h^3}_{o(h)} \Rightarrow f'(z^0) = 3 z_0^2$$

2) $f(z) = \operatorname{Im} z \qquad z = x + iy \Rightarrow f(z) = y$

NON è derivabile in $z_0 = 0$, poiché

$$\not\exists \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - \cancel{f(0)}}{z - \cancel{0}} \quad \text{ovvero} \quad \not\exists \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$$



- Lungo l'asse reale:

$$\lim_{z = x \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = 0$$

- Lungo l'asse immaginario:

$$\lim_{z = iy \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z} = \lim_{iy \to 0} \frac{\cancel{y}}{i\cancel{y}} = \frac{1}{i}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = y \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$ sono differenziabili

Recall $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentiabile in $(x^\circ, y^\circ) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists\ du(x^\circ, y^\circ) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{u(x^\circ+h_1, y^\circ+h_2) - u(x^\circ, y^\circ) - du(x^\circ, y^\circ)[(h_1, h_2)]}{|h|} = 0$$

- u differenziabile in $(x^\circ, y^\circ) \Rightarrow \forall \nu,\ \exists\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^\circ, y^\circ)$

In particolare $\begin{cases} \exists\ \frac{\partial u}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) & (u_x(x^\circ, y^\circ)) \\ \exists\ \frac{\partial u}{\partial y}(x^\circ, y^\circ) & (u_y(x^\circ, y^\circ)) \end{cases}$

e $du(x^\circ, y^\circ)[(h_1, h_2)] = \nabla u(x^\circ, y^\circ) \cdot (h_1, h_2) =$

$= u_x(x^\circ, y^\circ)\, h_1 + u_y(x^\circ, y^\circ) \cdot h_2$.

Teorema (caratterizzazione della derivabilità).

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z^0 \in \Omega \cap acc(\Omega)$

$z^0 = x^0 + i y^0$, $\quad f = u + iv$.

f derivabile in z^0 $\iff$ $\left[\begin{array}{l} u \text{ e } v \text{ differenziabili in } (x^0, y^0) \\ \qquad\qquad E \\ \begin{cases} u_x(x^0,y^0) = v_y(x^0,y^0) \\ u_y(x^0,y^0) = -v_x(x^0,y^0) \end{cases} \end{array}\right.$

condizioni di Cauchy - Riemann.

Inoltre, in tal caso

$$f'(z^0) = u_x(x^0,y^0) - i\, u_y(x^0,y^0)$$
$$= v_y(x^0,y^0) + i\, v_x(x^0,y^0).$$

Oss.

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Def. f si dice OLOMORFA su Ω se è derivabile in z^0 per ogni $z^0 \in \Omega$.

Esempi

1) $f(z) = \operatorname{Im} z \qquad u(x,y) = y \quad , \quad v(x,y) = 0$

$z^0 = 0$

$u_x \overset{?}{=} v_y$ ✓ $\qquad u_x = 0 \quad , \quad v_y = 0$

$u_y = -v_x$ ✗ $\qquad u_y = 1 \quad , \quad v_y = 0$

2) $f(z) = e^z \qquad f'(z^0) = e^{z_0} \quad \forall z^0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \qquad u_x = v_y \ ✓$$

$$\begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \end{cases} \qquad u_y = -v_x \ ✓$$

$$f'(z^0) = e^{x_0} \cos y_0 + i e^{x_0} \sin y_0 = e^{x_0} (\cos y_0 + i \sin y_0) = e^{z_0}$$

3) Si verifica che sono derivabili su tutto $\mathbb{C}$

$P(z)$, e^{z}, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$

e valgono le stesse formule valide in $\mathbb{R}$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Per ip. $\exists\ f'(z^0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$

(0) $f(z^0+h) = f(z^0) + f'(z^0)h + g$ con $g = o(h)$

$u(x^0+h_1, y^0+h_2) + i v(x^0+h_1, y^0+h_2) =$

$u(x^0,y^0) + i v(x^0,y^0) + (\alpha+i\beta)(h_1+ih_2) + g_1 + i g_2$

(1) $u(x^0+h_1, y^0+h_2) = u(x^0,y^0) + \underbrace{(\alpha h_1 - \beta h_2)}_{=(\alpha,-\beta)\cdot(h_1,h_2)} + \underbrace{g_1}_{=o(h_1,h_2)}$

(2) $v(x^0+h_1, y^0+h_2) = v(x^0,y^0) + \underbrace{(\beta h_1 + \alpha h_2)}_{=(\beta,\alpha)\cdot(h_1,h_2)} + \underbrace{g_2}_{=o(h_1,h_2)}$

$\Rightarrow u, v$ differenziabili in (x^0,y^0), con

$$\begin{cases} \nabla u(x^0,y^0) = (\alpha, -\beta) \\ \nabla v(x^0,y^0) = (\beta, \alpha). \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Procedere al contrario! ∎