Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \Rightarrow F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

è derivabile in (a,b) e

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b) \qquad (F \in \mathcal{C}^1([a,b]))$$

Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue

Sia $f \in L^1([a,b]) \Rightarrow F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

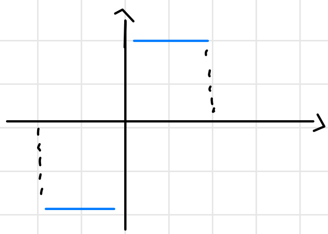
è derivabile q.o. in (a,b) e

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in (a,b) \qquad (F \in AC([a,b]))$$

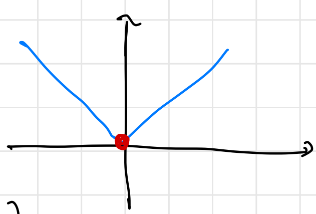
Esempio:

$[a,b] = [-1,1]$

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sign}(t)\,dt = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ \dfrac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign}(x) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \text{q.o. } x \in (-1,1) \\ \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}. \end{array}$$

Def. Diciamo che $F \in A.C.([a,b])$

(spazio delle funzioni ASSOLUTAMENTE CONTINUE su $[a,b]$)

se $\exists\, f \in L^1([a,b])$ tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$\left(\Rightarrow \; F'(x) = f(x) \quad \text{q.o. su } [a,b] \right).$

Oss. 1 $A.C([a,b])$ è uno spazio vettoriale

$$\begin{cases} F, G \in AC([a,b]) \Rightarrow F+G \in AC([a,b]) \\ F \in AC([a,b]) \Rightarrow \lambda F \in AC([a,b]). \end{cases}$$

Oss. 2 $F \in A.C([a,b]) \Rightarrow$

$$F(b) - F(a) = \left[\int_a^b f(t)\,dt + \cancel{c}\right] - \left[\cancel{\int_a^a f} + \cancel{c}\right]$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

Oss 3 $F \in AC([a,b])$, $F' = 0$ q.o. su $[a,b]$

$\Rightarrow \quad F(x) = c \qquad \forall x \in [a,b]$

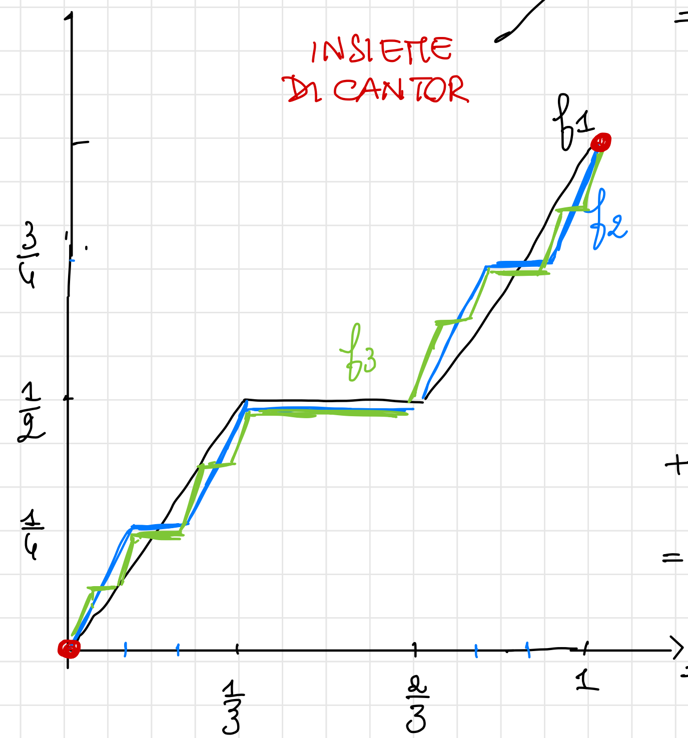
$\uparrow$

Falso se togliamo l'ipotesi $F \in AC([a,b])$:

esistono funzioni (non in $AC([a,b])$) che sono derivabili q.o. con derivata prima nulla q.o. ma non costanti.

Esempio: una funzione derivabile f continua con $f' = 0$ q.o. in $(0,1)$ ma f NON costante

SCALA DI CANTOR:



$\to C = \{x : f$ non derivabile in $x\}$
$= (0,1) \setminus A$ soddisfa $|C| = 0$

$f' = 0$ in

$A = \text{"}\bigcup$ pianerottoli"
$\uparrow$ aperto

$$|A| = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + \dots$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right)$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \cancel{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{\cancel{1-\frac{2}{3}}} = 1$$

La successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^0([0,1])$ risulta di Cauchy in $\|\cdot\|_\infty$

Poichè $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ è un Banach

$\exists\ f = \lim_n f_n \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

$f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, con $f' = 0$ q.o. in $(0,1)$

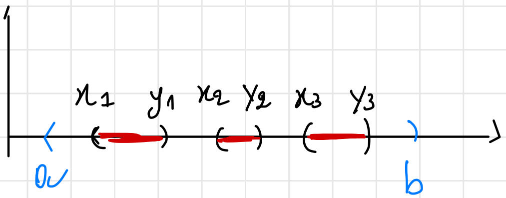
<u>Proposizione</u> (caratterizzazione di $AC([a,b])$)

$F \in AC([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$\forall$ famiglia $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,N}$ di intervalli

2 a 2 disgiunti $\subseteq (a,b)$ con

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i| < \delta, \quad \text{si ha} \quad \sum_{i=1}^{N} |F(x_i) - F(y_i)| < \varepsilon .$$



<u>Oss.</u> $N=1$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$\forall$ intervallo $(x,y) \subseteq (a,b)$ con

$$|x-y| < \delta, \quad \text{si ha} \quad |F(x) - F(y)| < \varepsilon$$

(continuità uniforme)

$\Rightarrow A.C.([a,b]) \subseteq \{$ funzioni unif. continue su $[a,b]\}$

Conseguenze della Proposizione:

- $F, G \in A.C.([a,b]) \Rightarrow F \cdot G \in A.C.([a,b])$

- $F, G \in A.C([a,b]) \Rightarrow$ poiché $F.G \in AC([a,b])$

$$F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) = \int_a^b (F.G)'(t)\,dt =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F' = f \\ G' = g}}{=} \int_a^b (f\,G + F\,g)\,dt$$ ovvero:

$$\boxed{\int_a^b f\,G = -\int_a^b F\,g + F.G\Big|_a^b}$$

$\Rightarrow$ vale in $A.C.([a,b])$ la formula di integrazione per parti.

(ovvero la formula sopra vale purché $f, g \in L^1([a,b])$ e F, G loro primitive).

Prossimi argomenti di analisi funzionale:

- Operatori lineari
- Distribuzioni
- Spazi di Sobolev
- Spazi di Hilbert

Operatori lineari

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali (normati)

Def. Un OPERATORE LINEARE DA V in W è una funzione $T: V \longrightarrow W$ tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^n$ $\quad T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$T(v) = A \cdot v$, con $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$

matrici $n \times n$ a coeff. reali.

$$A \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2$$

2) $V = C^0([a,b])$, fisso $x^0 \in (a,b)$, $W = \mathbb{R}$

$T: V \longrightarrow W$ definita da $T(f) = f(x^0)$.

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x^0) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

3) $V = C^1([a,b])$, $W = C^0([a,b])$

$T: V \longrightarrow W$ definita da $T(f) = f'$

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

Oss. T op. lineare $\Rightarrow$ $T(0)=0$

(Infatti $T(\lambda v)=\lambda T(v)$ $\forall v\in V$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$;
quindi prendendo $\lambda=0$ si ha $T(0)=0$).

Def. $T: V\to W$ op. lineare si dice CONTINUO
se, $\forall v\in V$, T è continuo in v ovvero:

(*) $v_n \longrightarrow v$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $T(v_n)\longrightarrow T(v)$

$(\lim_n \|v_n - v\|_V = 0)$ $\qquad$ $(\lim_n \|T(v_n)-T(v)\|_W = 0)$

Oss. Sia $T: V\to W$ op. lineare. Allora
T è continuo su V $\Longleftrightarrow$ T è continuo in $v=0$.

Dim.
$(\Rightarrow)$ immediato (se (*) vale $\forall v\in V$, in particolare (*) vale con $v=0$)

$(\Leftarrow)$. Verifichiamo che se (*) vale con $v=0$, vale per v qualsiasi.
Sia v qualsiasi, e sia $v_n \longrightarrow v$.

Considero $v_n - v \longrightarrow 0$. Quindi, per ip. $\underbrace{T(v_n-v)}_{=T(v_n)-T(v)} \longrightarrow \underbrace{T(0)}_{=0}$

ovvero $T(v_n)-T(v)\longrightarrow 0$, cioè
$T(v_n)\longrightarrow T(v)$. $\blacksquare$

Def. Sia T op. lineare: $(V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$

Si dice che T è LIMITATO se:

- $\exists M > 0$ tale che $\|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$

  $(\forall v \in V \setminus \{0\})$

ovvero:

- $\exists M > 0$ tale che $\dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$.

- $\exists M > 0$ tale che $\sup\limits_{v \in V \setminus \{0\}} \dfrac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$.

<u>Esempi</u>:

1) $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da

$T(v) = v_0 \cdot v$ op. lineare

$\big(T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = v_0 \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$

$= \lambda_1 (v_0 \cdot v_1) + \lambda_2 (v_0 \cdot v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)\big)$

T è limitato: $\exists M > 0$ tale che

$|T(v)| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2}$ ovvero

$|v_0 \cdot v| \leq M \|v\|_{\mathbb{R}^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Infatti posso prendere $M = \|v_0\|$ per Cauchy-Schwarz.

2) $T: \left(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}\right)$

$T(f) = f'$ op. lineare

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = $$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

T è limitato.

$$\underset{\|f'\|_{\mathcal{C}^0}}{\underset{\parallel}{\|T(f)\|_{\mathcal{C}^0}}} \leq M \|f\|_{\mathcal{C}^1}$$

ovvero:

$$\|f'\|_\infty \leq \underbrace{M}_{1} \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right).$$

prendendo $M = 1$