Il determinante

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

L’idea guida

In queste note indicheremo con V uno spazio vettoriale di dimensione finita $\dim V = n$ e con F un endomorfismo di V, cioè un’applicazione lineare da V a V

$$F : V \to V \; .$$

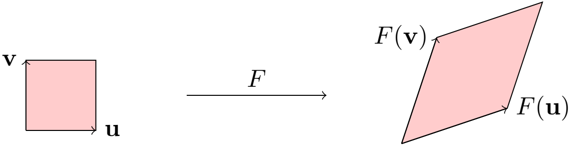
L’idea che ci porterà alla definizione è:

> *“il determinante è indice di come l’endomorfismo modifichi lo spazio vettoriale”.*

Area con segno

Ma F cosa modifica? E come?
Nel caso in cui V abbia dimensione 2, l'"area con segno" ci aiuta a comprendere il concetto di determinate.
Consideriamo cioè due vettori (geometrici) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e i parallelogrammi di lati $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $F(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{v})$.
Studiamo in che relazione sono le aree di questi parallelogrammi:

$$\mathrm{Area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \overset{F}{\rightsquigarrow} \mathrm{Area}(F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v}))$$

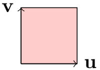


Area con segno

Iniziamo con la descrizione delle proprietà fondantamentali dell'"area con segno".

Alternanza: volendo distinguere le due aree dello stesso parallelogramma, in cui i lati siamo però ordinati in modo diverso:

$\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v})$



$\mathrm{Area}(\mathbf{v},\mathbf{u})$

imponiamo

$$\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\mathrm{Area}(\mathbf{v},\mathbf{u})\,.$$

Bilinearità: $\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ è lineare in entrambe le componenti (una alla volta), cioè, per ogni $\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$, $a,a',b,b' \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathrm{Area}(a\mathbf{u}+a'\mathbf{u}',\mathbf{v}) = a\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a'\mathrm{Area}(\mathbf{u}',\mathbf{v})$$
$$\mathrm{Area}(\mathbf{u},b\mathbf{v}+b'\mathbf{v}') = b\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b'\mathrm{Area}(\mathbf{u},\mathbf{v}')$$

Indicando con V^n lo spazio vettoriale prodotto cartesiano di V con se stesso n volte, diamo la seguente definizione:

Definizione

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n, una *forma multilineare alternante* su V è una funzione

$$\Omega : V^n \to \mathbb{R}$$

che ad ogni $n-$ upla ordinata di vettori di V associa un numero reale, in modo che risulti:

- alternante, cioè scambiando la posizione di due vettori, la forma cambia segno;
- multilineare, cioè lineare in ogni componente.

Proposizione

Per una forma Ω *multilineare su* V *sono equivalenti le seguenti proprietà:*

1. $\Omega(\dots,\mathbf{v},\dots,\mathbf{u},\dots) = -\Omega(\dots,\mathbf{u},\dots,\mathbf{v},\dots)$ *, cioè scambiando la posizione di due vettori, la forma cambia (solo) segno;*
2. $\Omega(\dots,\mathbf{v},\dots,\mathbf{v},\dots) = 0$ *, cioè la forma si annulla quando due vettori sono uguali.*

Dimostrazione per $\dim V = 2$.

$1. \Rightarrow 2.$ Scambiando la posizione di due vettori uguali si ha $\Omega(\mathbf{v},\mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{v},\mathbf{v})$, quindi $\Omega(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$.

$2. \Rightarrow 1.$ Per la bilinearità si ha $\Omega(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{u}) = \Omega(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \Omega(\mathbf{v},\mathbf{u}) + \Omega(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \Omega(\mathbf{u},\mathbf{u})$.
Per 2. risulta $0 = \Omega(\mathbf{v},\mathbf{u}) + \Omega(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

$\square$

Quante sono le forme multilineari alternanti?

Teorema

Scelta una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *di* V *, una forma multilineare alternante* Ω *su* V *è interamente determinata da un solo scalare:*

$$\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = k \ .$$

In particolare, la forma multilineare alternante Ω *su* V *è nulla se e solo se* $\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$.

Dimostrazione per $\dim V = 2$ **.**

Per ogni $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$, ogni $\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2$ e ogni forma bilineare Ω si ha

$$\begin{aligned}
\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \Omega(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2, y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2) \\
&= x_1y_2\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + x_2y_1\Omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \\
&= x_1y_2\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - x_2y_1\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \qquad \square
\end{aligned}$$

Quante sono le forme multilineari alternanti?

Teorema

Date Ω e Ω' due forme multilineari alternanti su V non nulle, esiste un solo numero reale h tale che

$$\Omega' = h \cdot \Omega \, .$$

Dimostrazione per $\dim V = 2$.

Con le precedenti notazioni, siano $\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = k$, $\Omega'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = k'$. Il numero $h = k'/k$ è l'unico reale tale che $k' = hk$, quindi

$$\begin{aligned}
\Omega'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)\Omega'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\
&= (x_1 y_2 - x_2 y_1)k' \\
&= (x_1 y_2 - x_2 y_1)hk \\
&= h \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1)\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\
&= h \cdot \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Determinante di un endomorfismo

Siano $F : V \to V$ un endomorfismo e $\Omega : V^n \to \mathbb{R}$ una forma multilineare alternante su V .

Ponendo $\Omega'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = \Omega(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n))$, si ha una seconda forma multilineare alternante Ω' (esercizio).

Esiste quindi un unico reale h tale che

$$\Omega(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n)) = h \cdot \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \ .$$

Definizione

Il determinante dell'endomorfismo F è l'unico numero reale $\det F$ tale che, per ogni forma Ω multilineare alternante e per ogni $n-$ upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di V risulti

$$\Omega(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n)) = \det F \cdot \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \ .$$

Osservazione

Osserviamo che, in base alla definizione, si ha $\det 1_V = 1$.

Ricordiamo che, data una matrice reale A di tipo $m \times n$, l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è definita da $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Definizione
Il determinante della matrice quadrata reale A di ordine n è definito come il determinate dell'endomorfismo L_A di $\mathbb{R}^n$:

$$\det A = \det L_A \ .$$

Data la matrice reale A quadrata di ordine n, l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trasforma i vettori della base canonica $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ nelle colonne $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n)$ di A

$$L_A(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \mathbf{C}_i \ .$$

Identifichiamo la matrice A quadrata di ordine n con la $n-$ upla ordinata delle sue colonne, $A = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n)$, e abbiamo, in particolare, che $I = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Riscrivendo l'uguaglianza che definisce il determinate, abbiamo

$$\begin{aligned} \Omega(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), \ldots, F(\mathbf{v}_n)) &= \det F \cdot \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \ , \\ \Omega(L_A(\mathbf{e}_1), L_A(\mathbf{e}_2), \ldots, L_A(\mathbf{e}_n)) &= \det L_A \cdot \Omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \ , \\ \Omega(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n) &= \det L_A \cdot \Omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \ , \\ \Omega(A) &= \det A \cdot \Omega(I) \ . \end{aligned}$$

Per ogni $\Omega : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ forma multilineare alternante su $\mathbb{R}^n$, risulta

$$\Omega(A) = \det A \cdot \Omega(I) \ .$$

Indicata Ω_* è l'unica forma su $\mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_*(I) = 1$, si ha allora

$$\Omega_*(A) = \det A \ .$$

Proposizione

Il determinante di matrici quadrate di ordine n è l'unica funzione

$$\det : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

con le proprietà:

- $\det$ *è multilineare sulle colonne;*
- $\det$ *è alternante sulle colonne;*
- $\det I = 1$ *.*

Colonne o righe?

Tutte le considerazioni che si possono fare sulle colonne di una matrice, relativamente al calcolo del determinante, possono essere fatte allo stesso modo sulle righe, infatti vale il seguente teorema (che non dimostreremo):

Teorema

La matrice quadrata A e la sua trasposta A^t hanno lo stesso determinante:

$$\det A = \det A^t \ .$$

Teorema (Teorema di Binet)

Siano F e G due endomorfismi dello spazio vettoriale V ,

$$\det(FG) = (\det F)(\det G) \ .$$

Corollario (Teorema di Binet per matrici)

Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \ .$$

Dimostrazione del Teorema di Binet per endomorfismi, nel caso $\dim V = 2$.

Per ogni forma Ω , si ha

$$\Omega(FG(\mathbf{u}), FG(\mathbf{v})) = \det(FG) \cdot \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ ,$$

ma anche
$$\begin{aligned} \Omega(FG(\mathbf{u}), FG(\mathbf{v})) &= \det(F) \cdot \Omega(G(\mathbf{u}), G(\mathbf{v})) \\ &= \det(F) \det(G) \cdot \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ . \end{aligned}$$

Dall'unicità del determinante, segue l'enunciato. □

Dimostrazione del Teorema di Binet per matrici.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det L_{AB} \\ &= \det(L_A L_B) \\ &= (\det L_A)(\det L_B) \\ &= (\det A)(\det B) \ . \end{aligned}$$

□

Se F è un endomorfismo, abbiamo il seguente fatto:

Teorema

F *invertibile* *se e solo se* $\det F \neq 0$ *.*

Inoltre, se F *invertibile si ha* $\det\left(F^{-1}\right) = (\det F)^{-1}$ *.*

Se A è una matrice quadrata, abbiamo il seguente fatto:

Corollario

A *ha inversa* *se e solo se* $\det A \neq 0$ *.*

Inoltre, se A *invertibile si ha* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$ *.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Mostriamo che se F è invertibile, allora $\det F \neq 0$.
Da $FF^{-1} = Id_V$, per il teorema di Binet, abbiamo

$$(\det F)\left(\det F^{-1}\right) = \det\left(FF^{-1}\right) = \det\left(Id_V\right) = 1 ,$$

dunque $\det F \neq 0$ e $\det F$ è il reciproco di $\det\left(F^{-1}\right)$.

$\Leftarrow$ Mostriamo che se F non è invertibile, allora $\det F = 0$.
Poiché F è un endomorfismo, se F non è invertibile, allora F non è iniettivo. Dunque esiste $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ tale che $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Completiamo a una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Se Ω è una forma multilineare alternante non nulla, si ha $\Omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \neq 0$. Per la linearità di Ω sul primo argomento, poiché $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, si ha $\Omega(F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_n)) = 0$.
Dall'uguaglianza che definisce il determinante

$$\underbrace{\Omega(F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_n))}_{=0} = (\det F) \cdot \underbrace{\Omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)}_{\neq 0}$$

si deduce che $\det F = 0$. $\square$

Riassunto di condizioni equivalenti a $\det F \neq 0$

Si consideri un endomorfismo $F : V \to V$, dove $\dim V = n$.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- F è un isomorfismo (ossia, è invertibile);
- F è iniettivo;
- F è suriettivo;
- $\dim \ker F = 0$;
- $\mathrm{rk}\, F = n$;
- $\det F \neq 0$;
- (F trasforma basi in basi). Se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$, è una (qualunque) base di V , allora $F(\mathcal{B}) = (F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_n))$ è una base di V .

Riassunto di condizioni equivalenti a $\det A \neq 0$

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo associato.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- A è invertibile;
- esiste una matrice quadrata B per la quale $AB = I$;
- esiste una matrice quadrata B per la quale $BA = I$;
- L_A è un isomorfismo;
- $\dim \ker A = 0$;
- $\operatorname{rk} A = n$;
- $\det A \neq 0$;
- le colonne di A sono linearmente indipendenti;
- le righe di A sono linearmente indipendenti.

Il calcolo

La definizione data di determinante ci consente di calcolare in modo semplice il determinante di matrici quadrate di ordine n piccolo.

$$\begin{aligned} n = 1 \quad &: \quad \det[a] = a \\ n = 2 \quad &: \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & d \end{bmatrix} = ad - bc \\ n = 3 \quad &: \quad ... \\ n = 4 \quad &: \quad ??? \end{aligned}$$

Il determinante di una matrice $n \times n$ si può calcolare in termini di determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$ mediante un procedimento ricorsivo detto *sviluppo di Laplace*.

Sia A una matrice di ordine n e sia A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene cancellando la riga di posto i e la colonna di posto j di A.
La matrice A_{ij} è detta un *minore* di ordine $n-1$ della matrice A; precisamente, A_{ij} è detta il *minore complementare* dell'elemento a_{ij} di A.
Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} , \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale il seguente teorema (che non dimostriamo)

Proposizione (Sviluppo di Laplace)

Sia A *una qualunque matrice quadrata di ordine* n *e sia* i *un qualunque indice (di riga) tra 1 e* n. *Allora*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(Sviluppo di Laplace secondo la riga i *-esima)*

Poiché $\det A = \det A^T$, vale anche lo *sviluppo di Laplace secondo la* j *-esima colonna*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Se chiamiamo *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} il numero $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$, concludiamo che *il determinante di una matrice è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o colonna) per i propri complementi algebrici.*

Calcoliamo ad esempio il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Sviluppando secondo la seconda colonna, troviamo

$$\begin{aligned} \det A &= -0\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 2\,(6-(-1)) - 4(15-1) \\ &= -42 \end{aligned}$$

Sviluppando secondo la prima riga, troviamo

$$\begin{aligned} \det A &= +3\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 3(4-20) - 0 + 1\,(4-(-2)) \\ &= -42 \end{aligned}$$

Il metodo più efficace per il calcolo del determinante di una matrice è il *metodo di riduzione per righe (colonne)*. Questo consiste nel trasformare la matrice in una matrice triangolare mediante operazioni elementari sulle righe (colonne). Il calcolo risulta poi immediato in quanto il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

Nell'applicare il metodo di riduzione, occorre tenere conto dell'effetto che le operazioni elementari hanno sul determinante. Poiché il determinante è una forma multilinare alternante, e una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante, abbiamo:

1. se si moltiplica una riga (colonna) per un numero $\lambda \neq 0$ il determinante viene moltiplicato per λ;
2. se si somma alla riga(colonna) i-esima un multiplo della riga(colonna) j-esima, con $i \neq j$, il determinante non cambia;
3. se si scambiano di posto due righe(colonne) il determinante cambia segno.

Esercizio. Provare che il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

Esercizio. Provare che il determinate, come ogni altra forma multilineare alternante, verifica le tre proprietà elencate nella pagina precedente.

Esercizio. Calcolare $$\det \begin{bmatrix} -ad & bd & cd \\ ae & -be & ce \\ af & bf & -cf \end{bmatrix}.$$

Esercizio. Calcolare $$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio. Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia k uno scalare; provare che

$$\det(kA) = k^n \det A \ .$$

Cosa si può dire di $\det(-A)$?

Esercizio. Siano A e B matrici invertibili. Provare che

- AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.
- A^t è invertibile e $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

Esercizio. Data la matrice A , si indica con A^* la matrice aggiunta di A , cioè la matrice trasposta dei complementi algebrici di A . Provare che, se A è invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \ .$$

Tenendo presente che il rango di una matrice quadrata è massimo se e solo se il determinate è non nullo, si dimostra che:

Proposizione

Il rango $\operatorname{rk} A$ *di una matrice* A *(quadrata o rettangolare) è il massimo ordine delle sottomatrici quadrate di* A *con determinate non nullo.*

Nel calcolo del rango attraverso i determinati è utile il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione):

Teorema (di Kronecker)

Se la matrice A *(quadrata o rettangolare) ha una sottomatrice* R *quadrata di ordine* r *con determinante non nullo e sono nulli i determinanti di tutte le sottomatrici quadrate di ordine* $r+1$ *ottenute orlando* R *con una riga e una colonna qualsiansi di* A*, allora il rango di* A *è* r*.*