Forme quadratiche

Maurizio Citterio

Marco Boella   Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Una *forma quadratica* è una funzione a valori reali che si esprime con un polinomio omogeneo di secondo grado o nullo.

Le forme quadratiche sono in corrispondenza biunivoca con le matrici reali simmetriche:

la *forma quadratica* in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ associata alla matrice simmetrica A di ordine n, è

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \qquad q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

dove $\mathbf{x}^t = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ è il prodotto delle matrici $\mathbf{x}^t$, A e $\mathbf{x}$.

In modo equivalente, si può anche scrivere:

$$q(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$$

dove $A\mathbf{x}$ è il prodotto delle matrici A e $\mathbf{x}$, mentre “ $\cdot$ ” indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Forme quadratiche in due variabili

La *forma quadratica* associata alla matrice simmetrica ($A^t = A$)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

è il polinomio omogeneo di secondo grado in x_1, x_2

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \quad , \qquad \text{dove } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t A\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{aligned}$$

Esercizio

Determinare le matrici delle seguenti forme quadratiche

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_4 + x_3^2 \\ q_3(x_1, x_2) &= \pi x_1^2 - 3x_1x_2 + 14x_2^2 \end{aligned}$$

Esercizio

Provare che, per ogni forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ risulta:

1. $q(\mathbf{0}) = 0$;
2. $q(t\mathbf{x}) = t^2 q(\mathbf{x})$, per ogni t reale.

Il *tipo* (o *segno*) di una forma quadratica è definito come segue:

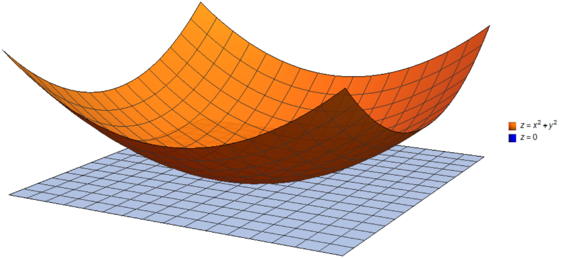
Definizione

Una forma quadratica $q(\mathbf{x}) = q(x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice:

Definita positiva, se $q(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Esempio:

$q(x, y) = x^2 + y^2.$

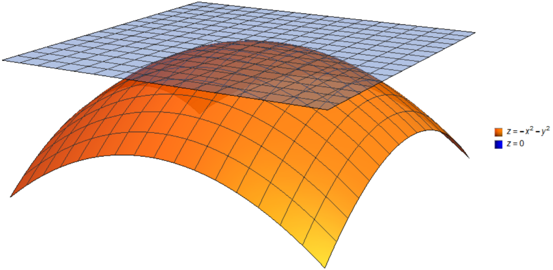


Classificazione delle forme quadratiche

Definita negativa, se $q(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Esempio:

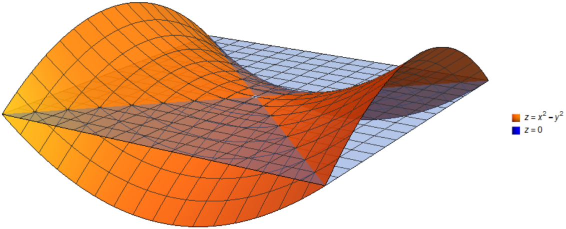
$q(x, y) = -x^2 - y^2$.



Indefinita, se assume sia valori positivi che valori negativi.

Esempio:

$q(x, y) = x^2 - y^2$.

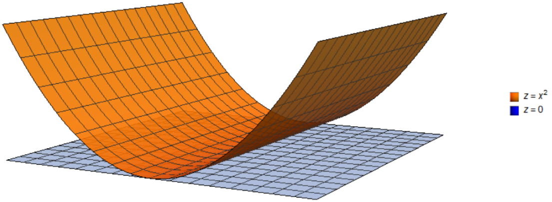


Classificazione delle forme quadratiche

Semidefinita positiva, se $q(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}$ ed esiste un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per il quale $q(\mathbf{x}) = 0$.

Esempio:

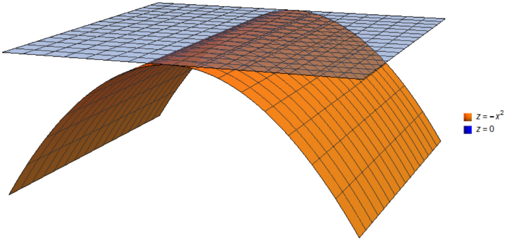
$$q(x, y) = x^2.$$



Semidefinita negativa, se $q(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x}$ ed esiste un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per il quale $q(\mathbf{x}) = 0$.

Esempio:

$$q(x, y) = -x^2.$$



Digressione facoltativa: analisi delle forme quadratiche

Lo sviluppo di Taylor di una funzione è unico, una volta fissato il centro. Da questo, o per calcolo diretto, abbiamo che per ogni forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ risulta:

$$q(\mathbf{0}) = 0 \; ; \quad \nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \; ; \quad Hq(\mathbf{0}) = 2A \; .$$

Dunque l'origine O è un punto stazionario e, dalla classificazione fatta per il segno di una forma quadratica q , abbiamo che:

1. se q è definita positiva, allora O è un punto di minimo assoluto forte;
2. se q è definita negativa, allora O è un punto di massimo assoluto forte;
3. se q è indefinita, allora O è un punto di sella.

Digressione facoltativa: analisi delle forme quadratiche

Proposizione

Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la forma quadratica* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ *. Risulta:*

- *il gradiente di* q *nel generico* $\mathbf{x}$ *è* $\nabla q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ *;*
- *la matrice hessiana di* q *nel generico* $\mathbf{x}$ *è* $Hq(\mathbf{x}) = 2A$ *.*

Corollario

Se $\det A \neq 0$ *, allora la forma quadratica* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ *ha l'origine* O *come unico punto stazionario e*

1. *se* q *è definita positiva, allora* $q(O) = 0$ *è il minimo assoluto;*
2. *se* q *è definita negativa, allora* $q(O) = 0$ *è il massimo assoluto;*
3. *se* q *è indefinita, allora* O *è un punto di sella.*

Esercizio 1. Dimostrare la proposizione e il corollario precedenti.

Esercizio 2. Provare che una forma quadratica in due variabili $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, che sia semidefinita ha una retta di punti stazionari e stabilire la natura di tali punti critici.

Se A è una matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, allora la forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ si scrive nella forma diagonale

$$q(x_1, ..., x_n) = \lambda_1 \, x_1^2 + \cdots + \lambda_n \, x_n^2$$

Per una forma quadratica diagonale è semplice individuare il tipo. [Come?]

Questa semplicità suggerisce un metodo operativo per determinare il segno di una forma quadratica:

> *cercare un sistema di riferimento di* $\mathbb{R}^n$ *tale che la forma quadratica si diagonale rispetto le nuove coordinate.*

Cambio di coordinate in una forma quadratica

Data una forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^t$ è il vettore colonna delle coordinate cartesiane, consideriamo una matrice invertibile P e il cambio di coordinate

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \,, \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \,.$$

Il polinomio $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ diventa

$$(P\mathbf{y})^t A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\,t} \,(P^t AP)\, \mathbf{y} \,.$$

Quindi la matrice A che rappresenta la forma quadratica q, si trasforma in

$$B = P^t AP \,.$$

Definizione

Una matrice B si dice *congruente* a A se esiste una P invertibile per la quale $B = P^t AP$.

Poiché la matrice P è invertibile, la trasformazione lineare $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ è una corrispondenza biunivoca. Si dimostra la seguente importante osservazione:

Proposizione

Le forme quadratiche associate a matrici congruenti hanno lo stesso segno.

Esercizio
Mostrare che la relazione di congruenza è di equivalenza.

Esercizio
Mostrare che due matrici simmetriche simili sono anche congruenti.

Esercizio
Mostrare con un esempio che due matrici simmetriche congruenti non sono necessariamente simili.

Diagonalizzazione di forme quadratiche

Ogni forma quadratica è diagonalizzabile attraverso un cambio di variabili che è una isometria lineare:

Teorema

Sia q una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$. Esiste una matrice ortogonale P che diagonalizza q per congruenza.

Questo significa che, dette $(y_1, ..., y_n)$ le coordinate rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ delle colonne della matrice ortogonale P, si ha

$$q(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 (y_1)^2 + \cdots + \lambda_n (y_n)^2$$

Dimostrazione.

La matrice A di una forma quadratica è simmetrica. Per il teorema spettrale, esiste una matrice (di cambio di base) P ortogonale ($P^t = P^{-1}$) che diagonalizza A :

$$B = P^{-1}AP = P^tAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \, . \qquad \square$$

Quali invarianti per congruenza?

Diagonalizzando la matrice simmetrica A attraverso un'isometria lineare rappresentata dalla matrice ortogonale P, poiché $P^t = P^{-1}$, abbiamo che A e $B = P^{-1}AP = P^tAP$ sono non solo conguenti, ma anche simili.

Dunque, in questo caso, A e B hanno lo stesso determinante, la stessa traccia, lo stesso polinomio caratteristico, ...

In generale, quali sono gli invarianti per congruenza?

Due matrici congruenti, ma non simili, possono avere determinati diversi, tracce diverse, polinomi caratteristici diversi, ...

Il seguente teorema di Sylvester stabilisce una proprietà comune a matrice congruenti ed introduce al concetto di segnatura.

Teorema (Legge di inerzia di Sylvester)

Due matrici simmetriche dello stesso ordine sono congruenti se e solo se hanno lo stesso numero di autovalori positivi e lo stesso numero di autovalori negativi (e quindi anche lo stessi numero di autovalori nulli).

Corollario

Sia A *una matrice simmetrica di ordine* n *con* s *autovalori positivi e* t *autovalori negativi. Allora* A *è congruente alla matrice diagonale che ha* s *autovalori uguali a* 1 *e* t *autovalori uguali a* -1 *(e quindi* $n-s-t$ *autovalori nulli).*

La coppia (s, t) si dice *segnatura* della forma quadratica.

Esempi

$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$ ha segnatura $(1, 1)$;
$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ha segnatura $(2, 1)$;
$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_4 + x_3^2$ ha segnatura $(2, 1)$.

Esercizio

Mostrare che le forme quadratiche non nulle di $\mathbb{R}^2$ sono, a meno di congruenza, tutte e sole le seguenti:

$$z = x^2 + y^2 \,, \quad z = x^2 - y^2 \,, \quad z = -x^2 - y^2 \,, \quad z = x^2 \,, \quad z = -x^2 \,.$$

Quali sono, a meno di conguenza, le forme quadratiche di $\mathbb{R}^3$?

Esercizio

Provare che matrici congruenti hanno lo stesso rango.

Esercizio

Provare che la matrice A è definita positiva (cioè è la matrice di una forma quadratica definita positiva) se e solo se esiste una matrice P invertibile tale che $A = P^t P$.

La segnatura determina il segno della forma quadratica.

Data la forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ si ha

- q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi;
- q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di A sono negativi;
- q è indefinita se e solo se la matrice A ha (almeno) un autovalore positivo e (almeno) uno negativo;
- q è semidefinita positiva se e solo se la matrice A ha (almeno) un autovalore nullo, (almeno) un autovalore non nullo e tutti gli autovalori non nulli sono positivi;
- q è semidefinita negativa se e solo se la matrice A ha (almeno) un autovalore nullo, (almeno) un autovalore non nullo e tutti gli autovalori non nulli sono negativi.

Consideriamo la forma quadratica

$$q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \ .$$

La segnatura di q è data dai segni degli autovalori λ_1, λ_2 di A, radici del polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\,\lambda + \det A \ ,$$

dove $\operatorname{tr} A = a + c$ e $\det A = ac - b^2$.

Poiché $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$, si prova [Esercizio] che:

- se $\det A > 0$ e $\operatorname{tr} A > 0$, allora q è definita positiva;
- se $\det A > 0$ e $\operatorname{tr} A < 0$, allora q è definita negativa;
- se $\det A < 0$, allora q è indefinita;
- se $\det A = 0$, allora q è semidefinita.

Per determinare i segni degli autovettori della matrice A della forma quadratica, possiamo applicare la regola dei segni di Cartesio al polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$:

Proposizione (Regola dei segni di Cartesio)

Dato il polinomio $P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}$ *,*
consideriamo l'insieme ordinato dei coefficienti

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \ ,$$

e denotiamo con v *il numero di variazioni di segno degli elementi contigui dell'insieme (gli eventuali zeri non si contano).*
Se P *ha* n *radici reali, allora* v *è il numero di radici positive contate con la dovuta molteplicità.*

Ricordiamo che il polinomio caratteristico della matrice di una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ è un polinomio di grado n con n radici reali (Teorema Spettrale).

Complemento: minori principali e polinomio caratteristico

Data la matrice quadrata A, un minore principale di ordine k è una sottomatrice quadrata di A, di ordine k, con la diagonale principale sulla diagonale principale di A.

Per esempio, i minori principali della matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ sono:

- ordine 1: $[a_{11}]$, $[a_{22}]$;
- ordine 2: la stessa A.

I minori principali della matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ sono:

- ordine 1: $[a_{11}]$, $[a_{22}]$, $[a_{33}]$;
- ordine 2: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;
- ordine 3: la stessa A.

Complemento: minori principali e polinomio caratteristico

Si dimostra che il polinomio caratteristico ha la seguente forma:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-2} \lambda^2 - \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n \ ,$$

dove α_k è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine k.

Si osservi che:
α_1 è la traccia di A: $\quad \alpha_1 = \mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
α_n è il determinate di A: $\quad \alpha_n = \det A$.

In particolare, il polinomio caratteristico di una matrice di ordine 2 è:

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}\, A)\, \lambda + \det A \ .$$

Si osservi inoltre che i numeri α_k sono invarianti per similitudine perché matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Metodo dei minori principali nord-ovest

Data la matrice quadrata A, il minore principale nord-ovest A_k di ordine k è il minore principale di A ottenuto eliminando le ultime $n-k$ righe e le ultime $n-k$ colonne.

I minori principali nord-ovest della matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ sono:

- $A_1 = [a_{11}]$;
- $A_2 = A$.

I minori principali nord-ovest della matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ sono:

- $A_1 = [a_{11}]$;
- $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$;
- $A_3 = A$.

Nello studio del segno delle forme quadratiche di più variabili, possiamo utilizzare il seguente criterio:

Proposizione (Metodo dei minori principali nord-ovest)

Indicati con A_k *i minori principali nord-ovest della matrice* A *della forma quadratica* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ *, risulta che:*

- q *è definita positiva se e solo se* $\det A_k > 0$ *per ogni* k *;*
- q *è definita negativa se e solo se* $(-1)^k \det A_k > 0$ *per ogni* k *.*

Metodo dei minori principali nord-ovest in due variabili

Per forme quadratiche su $\mathbb{R}^2$

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,, \quad q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \,.$$

posto $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, abbiamo:

- $\det A > 0$ e $a > 0$ se e solo se q è definita positiva;
- $\det A > 0$ e $a < 0$ se e solo se q è definita negativa.

Inoltre, nel caso particolare di due sole variabili, si deduce che:

- $\det A < 0$ se e solo se q è indefinita;
- $\det A = 0$ se e solo se q è semidefinita o nulla.

Metodo dei minori principali nord-ovest in tre variabili

Per forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\,.$$

posto $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, abbiamo:

- $\det A > 0$, $\det B > 0$ e $a > 0$ se e solo se q è definita positiva;
- $\det A < 0$, $\det B > 0$ e $a < 0$ se e solo se q è definita negativa.

Inoltre si deduce che:

- se $\det A \neq 0$, in ogni caso diverso dai due sopra descritti, allora q è indefinita;
- se $\det A = 0$, allora q è indefinita o semidefinita o nulla.

Per gli studi futuri, sarà utile il seguente teorema:

Teorema (Proprietà estremali degli autovalori)
Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la forma quadratica* $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ *.*
Indicati con λ_{min} *e* λ_{max} *rispettivamente il minimo e il massimo autovalore della matrice* A *, per ogni punto* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *risulta*

$$\lambda_{min}\|\mathbf{x}\|^2 \leq q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{max}\|\mathbf{x}\|^2 \ .$$

Dimostrazione.
Indichiamo con P una matrice ortogonale che abbia come colonne una base ortonormale di autovettori di A e diagonalizziamo la forma quadratica con la trasformazione $\mathbf{y} = P^t\mathbf{x}$:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^t A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t(P^t AP)\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \ .$$

Osserviamo che $\quad \lambda_{\text{min}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_{\text{max}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \ .$

La traformazione $\mathbf{y} = P^t\mathbf{x}$ è un'isometria e quindi $\|\mathbf{y}\| = \|P^t\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$. Da questo e da $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|\mathbf{y}\|^2$, abbiamo

$$\lambda_{\text{min}}\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_{\text{min}}\|\mathbf{y}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_{\text{max}}\|\mathbf{y}\|^2 = \lambda_{\text{max}}\|\mathbf{x}\|^2 \ .$$

Ma $\quad q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \ , \quad$ quindi $\qquad \lambda_{\text{min}}\|\mathbf{x}\|^2 \leq q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\text{max}}\|\mathbf{x}\|^2. \qquad \square$

La sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme chiuso e limitato

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \ .$$

Per il teorema di Weierstrass, una funzione continua su un insieme chiuso e limitato ha un massimo ed un minimo assoluti.

Mostriamo che

Proposizione

Sulla sfera unitaria, il massimo della forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ è il massimo autovalore della matrice A e il minimo di q è il minimo autovalore di A .

Consideriamo la seguente interessante osservazione:

Lemma

Data la forma quadratica $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ *, sia* $\mathbf{v}_*$ *un autovettore unitario relativo all'autovalore* λ_* *di* A *. Risulta* $q(\mathbf{v}_*) = \lambda_*$*.*

Dimostrazione del lemma.

$$q(\mathbf{v}_*) = \mathbf{v}_*^t(A\mathbf{v}_*) = \mathbf{v}_*^t(\lambda_*\mathbf{v}_*) = \lambda_*(\mathbf{v}_*^t\mathbf{v}_*) = \lambda_*\|\mathbf{v}_*\|^2 = \lambda_* \,. \qquad \square$$

Dimostrazione della proposizione.

Siano λ_{min} e λ_{max} il minimo e il massimo autovalore della matrice A e siano $\mathbf{v}_{\text{min}}$ e $\mathbf{v}_{\text{max}}$ due rispettivi autovettori unitari.
Poiché S^{n-1} è l'insieme dei punti $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x}\| = 1$, dalle proprietà estremali degli autovalori, per ogni $\mathbf{x} \in S^{n-1}$, risulta

$$\lambda_{\text{min}} \leq q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\text{max}}.$$

Per il lemma, abbiamo $q(\mathbf{v}_{\text{min}}) = \lambda_{\text{min}}$ e $q(\mathbf{v}_{\text{max}}) = \lambda_{\text{max}}$.
Quindi λ_{min} è il minimo e λ_{max} è il massimo di q su S^{n-1} . $\square$