ANALISI COMPLESSA

I.1 - FUNZIONI ELEMENTARI

Si chiama **funzione di variabile complessa** una relazione che associa ad ogni elemento di un dominio Ω, sottoinsieme di $\mathbb{C}$, un numero complesso:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f : z \mapsto f(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Ad ogni funzione di questo tipo è possibile associare due funzioni reali di due variabili reali. Infatti, se si identifica il piano complesso con $\mathbb{R}^2$ mediante la relazione $(x, y) = x + iy$:

$$f : z = x + iy \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} u : (x,y) \mapsto u(x,y) \\ v : (x,y) \mapsto v(x,y) \end{matrix} \quad con\ (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Esempi:

- $f(z) = z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = x, \ v(x,y) = y$
- $f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad con\ a_i \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}, \quad dove\ Q(z) \neq 0$
- $f(z) = |z| \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \ v(x,y) = 0$
- $f(z) = \mathrm{Re}(z) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = x, \ v(x,y) = 0$
- $f(z) = \mathrm{Im}(z) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = y, \ v(x,y) = 0$

Si definiscono anche in questo caso le più importanti funzioni elementari, che risulteranno essere estensioni nel campo complesso di quelle di variabile reale.

1. ***Funzione esponenziale***: $e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

   Le principali proprietà di questa funzione sono:

   - $e^z\big|_{\Re} = e^x$
   - $\left|e^z\right| = \left|e^x(\cos x + i \sin y)\right| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$
   - $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
   - $e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)] = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$

     La funzione esponenziale in campo complesso è quindi periodica di periodo T=2πi. Ciò implica quindi che essa non è biunivoca e per questa ragione non esiste globalmente la sua funzione inversa.

2. ***Funzioni iperboliche***: $\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \quad \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$

3. ***Funzioni circolari***: $\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

Le principali proprietà della funzione coseno sono:

- $\cos z|_{\mathbb{R}} = \cos x = \cos(\mathrm{Re}(z))$
- $\cos(z+2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \dfrac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

  Anche in campo complesso la funzione coseno è periodica di periodo T=2π.

- $\cos z = \cos(x+iy) = \dfrac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x)e^{-y} + \frac{1}{2}(\cos x - i\sin x)e^{y} =$

  $= \frac{1}{2}\cos x(e^{-y} + e^{y}) + \frac{1}{2}i\sin x(e^{-y} - e^{y}) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

Alla funzione coseno in campo complesso possiamo quindi associare le seguenti due funzioni di variabile reale:

$$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(x,y)=\cos x\cosh y \\ v(x,y)=-\sin x\sinh y \end{cases}$$

- $\cosh(iz)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z \quad \Rightarrow \quad \cos(iy)=\cosh(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$

  Le funzioni circolari sull'asse immaginario corrispondono quindi alle funzioni iperboliche (al più con un cambiamento di segno) sull'asse reale. Le funzioni circolari non sono quindi in generale limitate (lo sono solo le loro restrizioni all'asse reale).

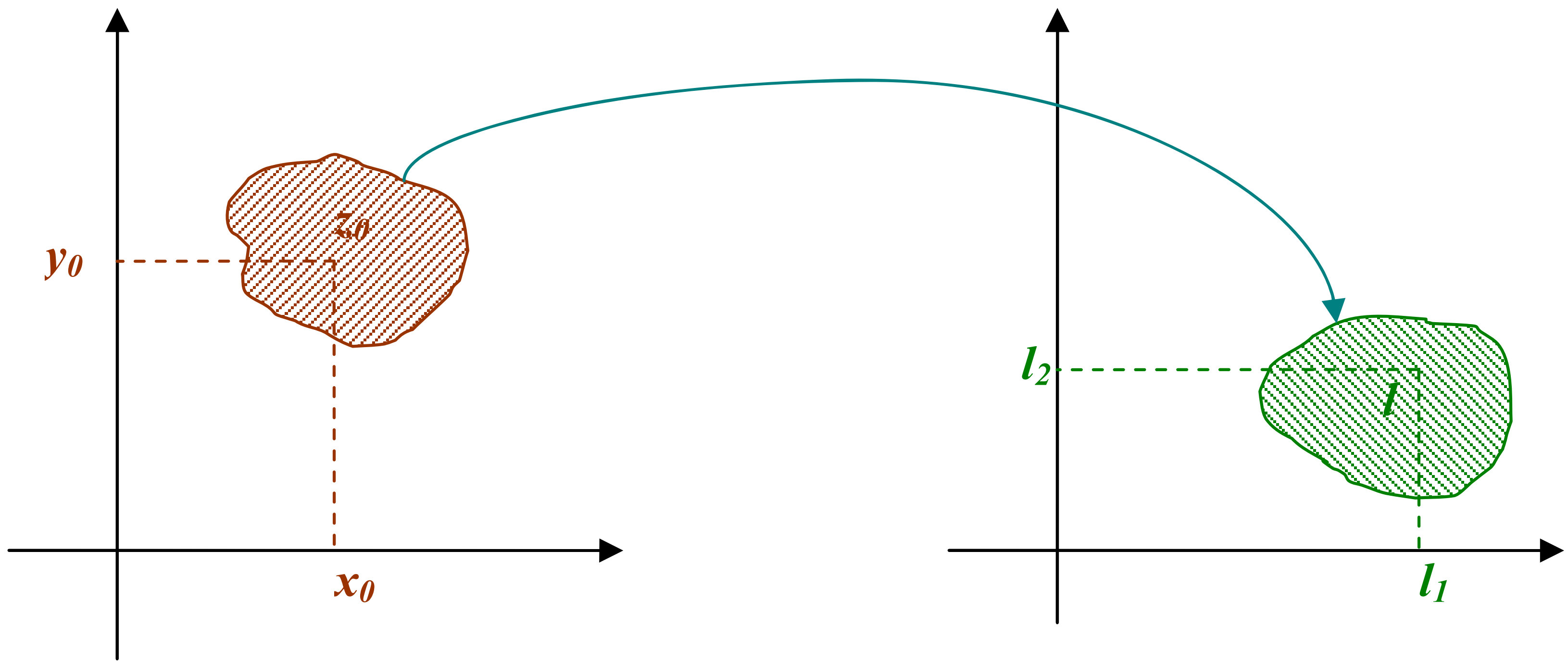
- $\cos z=\cos(x+iy)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x\cosh y=0 \\ \sin x\sinh y=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \cos x=0$

NB: Per le altre tre funzioni valgono proprietà del tutto simili che si ricavano allo stesso modo.

I.2 - LIMITI

Si consideri una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω aperto, e sia z_0 un punto di accumulazione per Ω.
Si dice che $l \in \mathbb{C}$ è limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall V(l)\ \exists U(z_0):\ z \in U(z_0) \setminus \{z_0\} \Rightarrow f(z) \in V(l)$$



Tale definizione può essere espressa anche in termini delle funzioni u e v. Siano dunque a tale proposito $z_0 = x_0 + iy_0$, $f = u + iv$, $l = l_1 + il_2$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = l_1, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = l_2$$

Si può ora estendere il concetto di continuità alle funzioni di variabile complessa: una funzione $f(z)$ si dice **continua** in un punto z_0 se esiste il limite per $z \to z_0$ di $f(z)$ e tale limite è uguale a $f(z_0)$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

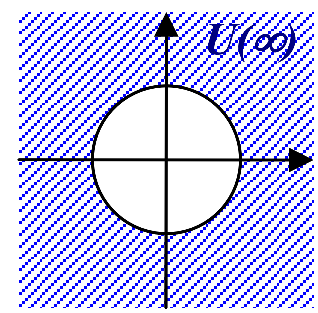
In particolare si dimostra che una funzione $f = u + iv$ è continua in $z_0 = x_0 + iy_0$ se sono continue in (x_0, y_0) le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Si dirà poi che $f(z)$ è continua in un insieme Ω se è continua in ogni punto z_0 di Ω.

Osservazioni:

- Sono continue nel loro dominio tutte le funzioni elementari
- Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta

- Si indica con $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'ampliamento del campo complesso con il "punto all'infinito", che è definito mediante un suo intorno, cioè il complementare di una palla di raggio R centrata in **0**:

$$U(\infty) = \{|z| \le R\}^C = \{|z| > R\}$$



È quindi possibile dare un senso alle seguenti espressioni:

$$z \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z| \to +\infty$$

$$f(z) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| \to +\infty$$

I.3 - DERIVABILITÀ

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω aperto di $\mathbb{C}$. Si dice che f è **derivabile** in z_0 se esiste finito per $z \to z_0$ il limite del rapporto incrementale di f:

$$\exists finito \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

$$\exists finito \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(h), \quad dove \;\; \lambda = f'(z_0)$$

Le tre condizioni precedenti sono equivalenti. L'ultima, in particolare, è propriamente la definizione di differenziabilità per f.

Esempi:

- $f(z) = z^3,\ z_0: \quad (z_0 + h)^3 = z_0^3 + 3z_0^2 h + 3z_0 h^2 + h^3 = z_0^3 + 3z_0^2 h + o(h) \quad \Rightarrow \quad \lambda = f'(z_0) = 3z_0^2$
  Tale funzione è quindi derivabile in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

- $f(z) = \mathrm{Im}(z),\ z_0 = 0: \quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{Im}(h)}{h} = \begin{cases} 0 & \textit{lungo l'asse reale } (h = x) \\ 1 & \textit{lungo l'asse immaginario } (h = iy) \end{cases}$
  La funzione $\mathrm{Im}(z)$ non è quindi derivabile in 0.

Osservazioni:

- Vale l'algebra della derivazione e il teorema della derivata di una funzione composta.
- Sono derivabili tutte le funzioni elementari, i polinomi di grado n e le funzioni razionali fratte (considerate nel loro dominio).

***<u>Richiamo di analisi B:</u>* differenziabilità per le funzioni di** $\mathbb{R}^2$

Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice differenziabile in *(x₀, y₀)* se e solo se esiste un'applicazione *df(x₀, y₀)*: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

$$\lim_{(h_1,h_2)\rightarrow 0} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) - df(x_0, y_0) \bullet (h_1, h_2)}{|(h_1, h_2)|} = 0$$

Ciò implica in particolare che:

- $\exists \dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) \bullet \nu, \quad \forall \, \nu$ *direzione*
- $df(x_0, y_0) \bullet (h_1, h_2) = f_x(x_0, y_0) h_1 + f_y(x_0, y_0) h_2$

I.4 - Condizioni di Cauchy-Riemann

Teorema: sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω aperto di $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, con $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$, allora f è derivabile in z_0 se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1. u e v sono differenziabili in (x_0, y_0).
2. u e v soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

In tal caso la derivata di f si può calcolare a partire da u e v con la seguente formula:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Una funzione f viene detta **olomorfa** su Ω se è derivabile in z_0 $\forall z_0 \in \Omega$.

Dimostrazione:

1. Sia f derivabile: $\exists f'(z_0)=\alpha+i\beta, \quad f=u+iv, \quad h=h_1+ih_2$. Dobbiamo dimostrare che u e v sono differenziabili e che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.
   Prima di iniziare la dimostrazione scomponiamo il termine $o(h)$, in generale complesso, nel modo seguente: $o(h) = g_1 + ig_2$

$$\frac{o(h)}{h}\to 0; \quad \frac{|g_1+ig_2|}{|h|}\to 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{|g_1|}{|h|}\to 0 \;\; e \;\; \frac{|g_2|}{|h|}\to 0, \quad per \;\; h\to 0$$

$$f(z_0+h)=f(z_0)+f'(z_0)h+o(h)=f(z_0)+(\alpha+i\beta)(h_1+ih_2)+g_1+ig_2 \text{ (per la derivabilità di } f\text{)}$$

$$u(x_0+h_1,y_0+h_2)+iv(x_0+h_1,y_0+h_2)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+(\alpha h_1-\beta h_2)+i(\alpha h_2+\beta h_1)+g_1+ig_2$$

Consideriamo ora separatamente i termini con le *i* e quelli senza:

- $u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + g_1$

  $$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - (\alpha, -\beta) \cdot (h_1, h_2)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1}{|h|} = 0$$

  Abbiamo quindi che *u* è differenziabile e che il suo gradiente è $(u_x, u_y) = (\alpha, -\beta)$

- $v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + (\alpha h_1 + \beta h_2) + g_2$

  $$\lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) - (\beta, \alpha) \cdot (h_1, h_2)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{g_2}{|h|} = 0$$

  Abbiamo quindi che *v* è differenziabile e che il suo gradiente è $(v_x, v_y) = (\beta, \alpha)$

  Sia *u* che *v* sono quindi differenziabili ed inoltre abbiamo che $\alpha = u_x = v_y$, $\beta = -u_y = v_x$, che sono proprio le condizioni di Cauchy-Riemann.

2. Siano u e v differenziabili, con $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Dobbiamo dimostrare che f è derivabile.

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) = (u_x, u_y) \bullet (h_1, h_2) + o(|h|)$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) = (v_x, v_y) \bullet (h_1, h_2) + o(|h|)$$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) =$$

$$= (u_x, u_y) \cdot (h_1, h_2) + i(v_x, v_y) \cdot (h_1, h_2) + o(|h|) + io(|h|) = u_x h_1 + u_y h_2 - iu_y h_1 + iu_x h_2 + o(|h|) + io(|h|)$$

$$= (u_x - iu_y)(h_1 + ih_2) + o(h) = \lambda h + o(h), \quad con \;\; \lambda = u_x - iu_y$$

Abbiamo quindi che f è derivabile e che la sua derivata è $f'(z_0) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

Esempi:

- Im z non è derivabile in z = 0:

$$\begin{cases} u(x,y) = y \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \quad \left\langle \begin{array}{l} \textit{sono differenziabili} \\ u_x = v_y = 0;\ u_y = 1 \neq -v_x = 0 \end{array} \right.$$

- e^z è derivabile nel suo dominio

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases} \quad \left\langle \begin{array}{l} \textit{sono differenziabili} \\ u_x = e^x \cos y = v_y;\ u_y = -e^x \sin y = -v_x \end{array} \right.$$

Inoltre, la derivata di e^z è sempre e^z. Infatti:

$$\frac{d}{dz}\left[e^z\right] = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$