Motivazione: calcolo di integrali in campo complesso (e anche in campo reale)

- f olomorfa su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\oint_\gamma f(z)dz = 0$

γ circuito omotopo a 1 punto

- f olomorfa su Ω tranne che in un n° finito di punti

$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = ???$

Es. $\displaystyle\int_{C_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

$\frac{1}{z}$ olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Def. Se z^0 è una singolarità isolata per f, si dice RESIDUO DI f IN z^0 il coeff. c_{-1} dello sviluppo di Laurent di f di centro z^0 $\left(\operatorname{Res}(f, z^0)\right)$.

Oss. Nell'esempio sopra

$$\underset{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right)}{\underset{\parallel}{c_{-1}}} = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{1}{z}\,dz$$

Più in generale esiste collegamento tra residui e integrali?

Come calcolare $\mathrm{Res}(f, z^0)$ (z^0 sing. isolata)

- z^0 sing. eliminabile $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}(f, z^0) = 0$

(parte singolare dello sviluppo $\equiv 0$)

- z^0 sing. essenziale $\Rightarrow$ non c'è modo diretto

(bisogna farsi lo sviluppo di Laurent)

- z^0 polo di ordine ν $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z^0) = \lim_{z \to z^0} \frac{1}{(\nu-1)!} D^{(\nu-1)} \left[(z-z_0)^{\nu} f(z) \right]}$$

In particolare, se z^0 è un polo semplice ($\nu = 1$)

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z^0) = \lim_{z \to z^0} \left[(z-z^0) f(z) \right].}$$

Dim. (nel caso del polo semplice)

z^0 polo semplice $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^n$, con $c_{-1} \neq 0$

$$(z-z_0) f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1 (z-z_0)^2 + o(z-z_0)^2.$$

$$\lim_{z \to z^0} \left[(z-z^0) f(z) \right] = c_{-1}. \qquad \blacksquare$$

Esempi

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $\quad z^0 = 0$ $\quad$ sing. eliminabile $\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$

2) $f(z) = e^{1/z}$ $\quad z^0 = 0$ $\quad$ sing. essenziale

$$\forall w \in \mathbb{C}, \quad e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \Rightarrow$$

$\rightarrow \operatorname{Res}\left(e^{1/z}, 0\right) = 1$

$f(z) = e^{1/z^2}$, $\quad z^0 = 0$ $\quad$ sing essenziale

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{2n}} \cdot \frac{1}{n!}$$

$\rightarrow \operatorname{Res}\left(e^{1/z^2}, 0\right) = 0.$

3) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z^0 = 0$ $\quad$ polo di ordine 1

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 1.$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ $\quad z^0 = 0$ $\quad$ polo di ordine 2

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 0.$

4) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ $\qquad z=0$ polo di ordine 2

$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \Rightarrow \text{l'ordine è } 2$$

$$\overset{\parallel}{\lim_{z\to 0}} z^2 \cdot \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$\mathrm{Res}(f,0) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to 0} D\left[z^2 \cdot \frac{\sin z}{z^3} \right] = \lim_{z\to 0} D\left[\frac{\sin z}{z} \right]$$

formula con $\nu = 2$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \underset{[H]}{\overset{}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{\cos z} - \cancel{z}\sin z - \cancel{\cos z}}{2\cancel{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\lim_{z\to 0} \sin z}_{\overset{\parallel}{0}}\Big) = 0.$$

5) $f(z) = z \cot z = z \frac{\cos z}{\sin z}$

$\sin z = 0 \iff z_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

<u>Caso $k=0$</u> $(z_0 = 0) \Rightarrow f(z) = \frac{z}{\sin z} \cdot \cos z$

$\frac{z}{\sin z} \to 1$, $\cos z \to 1$ per $z \to 0$

$\Rightarrow$ Sing. eliminabile.

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,0) = 0.$

Caso $k \neq 0$ $\quad z_k = k\pi$, con $k \neq 0$. poli semplici

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \cdot \frac{\overset{k\pi}{\overset{\uparrow}{z}}\ \overset{(-1)^k}{\overset{\uparrow}{\cos z}}}{\sin z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$= (k\pi)(-1)^k \cdot \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)}{\sin z}$$

$$\underset{z - k\pi = w}{=} (k\pi)\cancel{(-1)^k} \cdot \lim_{w \to 0} \frac{w}{\sin(w + k\pi)} = k\pi \neq 0.$$

$$\sin(w+k\pi) = \sin w \underbrace{\cos(k\pi)}_{\cancel{(-1)^k}} + \cancel{\overset{0}{\sin(k\pi)}\cos w}$$

$$\mathrm{Res}(f, k\pi) = \lim_{z \to z^0} (z - k\pi) \cdot f(z) = k\pi.$$

Conclusione:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{Res}(f, k\pi) = k\pi.$$

Oss. $\boxed{\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right) \overset{(*)}{=} \frac{g(z^0)}{h'(z^0)}}$

con g olomorfa, h con uno zero di ordine 1 in z^0
$(\Rightarrow h'(z^0) \neq 0)$.

Es. $f(z) = \frac{z \cos z}{\sin z}$ $\qquad g(z) = z\cos z$
$h(z) = \sin z$ $\qquad h(z_k) = 0$
$h'(z_k) \neq 0$.

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{z_k \cancel{\cos z_k}}{\cancel{\cos z_k}} = k\pi.$$

Dim. di $(*)$ $\nearrow g(z^0) \neq 0$
$\searrow g(z^0) = 0$

Caso $g(z^0) \neq 0$ $\Rightarrow$ z^0 polo semplice.

$$(z - z^0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z^0)(z-z^0) + o(z-z^0)}{h'(z^0)(z-z^0) + o(z-z^0)} \longrightarrow \frac{g(z^0)}{h'(z^0)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{g(z^0)}{h'(z^0)}$$

formula per il residuo
caso polo semplice

Caso $g(z^0) = 0$ $\qquad$ Tesi: $\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z^0\right) = 0$

Dico che z^0 sing. eliminabile:

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z^0)(z-z^0) + o(z-z^0)}{h'(z^0)(z-z^0) + o(z-z^0)} \longrightarrow \frac{g'(z^0)}{h'(z^0)} \in \mathbb{C}.$$

Def. e calcolo dell'indice di avvolgimento

Def. (intuitiva) Sia γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$, e sia $z^0 \notin \gamma$.

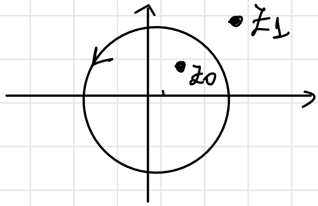
Si dice INDICE DI AVVOLGIMENTO DI γ RISPETTO A z^0

è il numero di volte che γ "gira" attorno a z^0,

contate col segno + nel caso del verso antiorario.

Es.

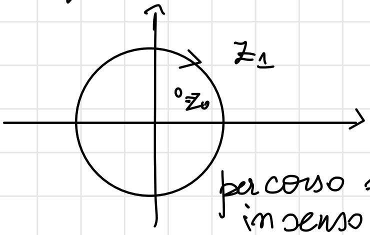
- $\gamma = C_1(0)$ $\quad r(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z^0) = 1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z^1) = 0.$

- $\gamma = -C_1(0)$

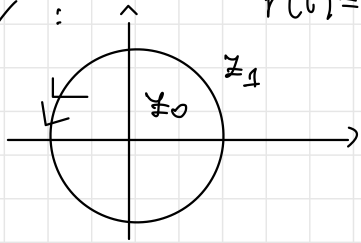


percorso 1 volta in senso orario

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = -1$

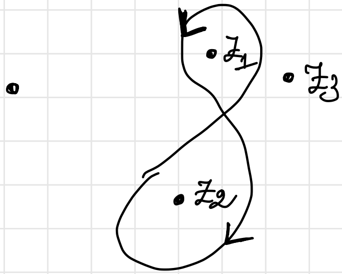
$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 0$

- γ : $\quad r(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 4\pi]$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 2$

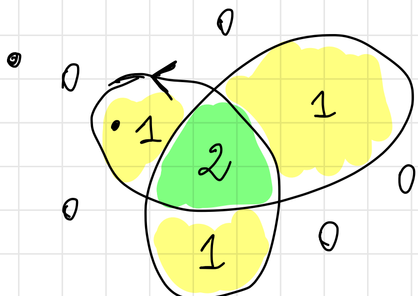
$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 0$



$\mathrm{Ind}(\gamma, z_1) = 1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_2) = -1$

$\mathrm{Ind}(\gamma, z_3) = 0.$

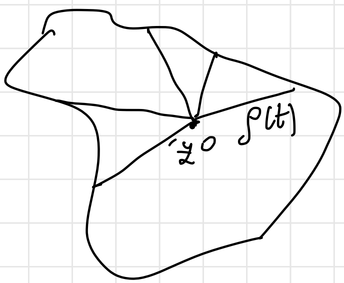


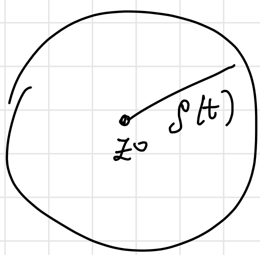
(γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$, $z^0 \notin \gamma$).

Def. (formale) Sia $r(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ parametrizzazione di γ.

Sia $\rho(t) := |r(t) - z^0|$. Allora $\exists\, \theta : [a,b] \to \mathbb{C}$

tale che $r(t) = z^0 + \rho(t) e^{i\theta(t)}$





$$\mathrm{Ind}(\gamma, z^0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \quad \left(\underset{(*)}{\in} \mathbb{Z} \right).$$

$(*)\quad r(a) \overset{\text{CIRCUITO}}{=} r(b) \Rightarrow \rho(a) = |r(a) - z^0| = |r(b) - z^0| = \rho(b)$

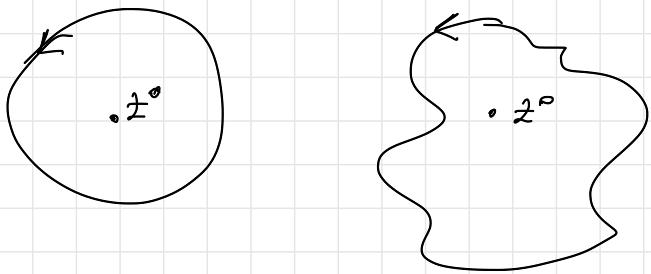
$$\begin{cases} r(a) = z^0 + \rho(a) e^{i\theta(b)} \\ \| \\ r(b) = z^0 + \rho(b) e^{i\theta(b)} \end{cases} \Rightarrow e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$

$$\Rightarrow i\theta(a) - i\theta(b) = 2K\pi i \Rightarrow \theta(a) - \theta(b) = 2K\pi.$$

Oss.

(1) L'indice non cambia passando a una parametrizzazione equivalente (dello stesso circuito)

(2) L'indice non cambia sostituendo γ con un circuito omotopo a γ in $\mathbb{C} \setminus \{z^0\}$.



Modo analitico per calcolarsi l'indice

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma, z^0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz.}$$

<u>Dim.</u> $\quad r(t) = z^0 + \rho(t)\, e^{i\theta(t)} \quad , \quad t \in [a,b].$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz = \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)\, i\,\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\cancel{z^0} + \rho(t)e^{i\theta(t)} - \cancel{z^0}}\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\rho'(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}{\rho(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}\, dt + i \int_a^b \frac{\cancel{\rho(t)}\,\theta'(t)\, \cancel{e^{i\theta(t)}}}{\cancel{\rho(t)}\, \cancel{e^{i\theta(t)}}}\, dt$$

$$= \log \rho(t) \Big|_a^b + i\, [\, \theta(b) - \theta(a) \,].$$

$$\log \rho(t)\Big|_a^b = \log \rho(b) - \log \rho(a) = 0 \quad \leftarrow \rho(a) = \rho(b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z^0}\, dz = \frac{\cancel{i}\,[\theta(b) - \theta(a)]}{2\pi \cancel{i}} = \underbrace{\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}}_{\mathrm{Ind}(\gamma, z^0)}$$

$\blacksquare$

Teorema dei residui

Sia Ω aperto $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma \subseteq \Omega$ circuito omotopo a un punto (in Ω).

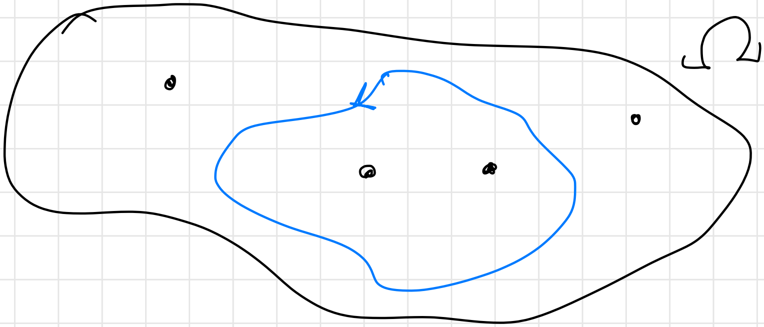
Sia $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa, dove S ("insieme singolare") soddisfa

- $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$
- $acc(S) \cap \Omega = \emptyset$

Allora:

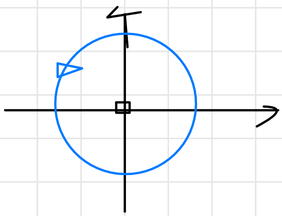
$Ind(\gamma, z^0) \neq 0$ per al più un n° finito di punti e vale

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \underbrace{Res(f, z^0)}_{\in\, \mathbb{C}} \cdot \underbrace{Ind(\gamma, z^0)}_{\in\, \mathbb{Z}}}$$



Esempi:

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\qquad \gamma = C_1(0)$



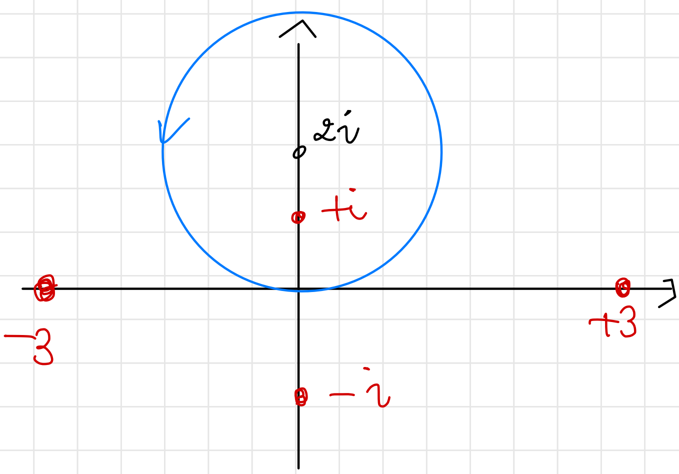
$$\int_\gamma f = 2\pi i \cdot \underset{\text{Res}(f,0)}{1} \cdot \underset{\text{Ind}(\gamma,0)}{1}$$

$$= 2\pi i$$

- $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-9)}$ $\qquad \gamma = C_2(2i)$.

NOTAZIONE

$C_r(z^0)$
cerchio centro z^0
e raggio r
percorso 1 volta
in senso antiorario



$$\int_{C_2(2i)} f(z)\,dz = 2\pi i \; \underset{\text{polo semplice}}{\text{Res}(f, i)} \cdot \underbrace{\text{Ind}\left(C_2(2i), i\right)}_{=1} = \ldots\ldots$$

$\square$