Analisi matematica 2		11 settembre 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x, y) = x^2 \ln |y|$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Dire *se* D è aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Descrivere gli insiemi di livello $\{f = 0\}$ e $\{f = -1\}$.

c) Esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? (giustificare la risposta).

d) Determinare tutti i punti critici di f ed eventuali estremi locali.

2. Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -y_1 + y_2 + e^{-t} \\ \dot{y_2} = -y_2 \end{cases}$$

a) Spiegare perchè tutte le soluzioni risultano definite su $\mathbb{R}$ e sono di classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
b) Determinare l'integrale generale del sistema e descrivere il comportamento asintotico delle curve integrali.
c) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.

a) Trovare per quali valori del parametro reale α la forma differenziale

$$\omega_\alpha = \frac{1}{3}\left(y^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) dx + \alpha(1+\alpha x)y^2\, dy$$

è esatta nel suo dominio di definizione (giustificare la risposta).

b) Determinare, per i valori di α trovati, un potenziale.

c) Calcolare $\oint_\gamma \omega_\alpha$ dove γ è l'ellisse di equazione

$$4x^2 + y^2 = 1$$

percorsa una volta in senso positivo.

4. Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 4x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

nella regione di spazio E, contenuta nel primo ottante, delimitata dai tre piani coordinati e dalla superficie cartesiana di equazione

$$z = 1 - 4x^2 - y^2$$

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in

$$D = \{(x, y) : y \neq 0\}$$

L'insieme D è aperto, non limitato e non connesso.

b) L'insieme di livello zero è composto dall'asse delle ordinate privato dell'origine e dalle due rette orizzontali $y = 1$, $y = -1$:

$$\{f = 0\} = \big\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\big\} \cup \big\{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(x, -1) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

L'insieme $\{f = -1\}$ è formato dai punti di D che soddisfano l'equazione

$$x^2 \ln |y| = -1$$

Esplicitando rispetto ad y troviamo le curve di equazioni

$$y = \pm e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0$$

Per $x \to 0$ le curve tendono verso l'origine con tangente orizzontale.

c) Se si tende zero lungo l'asse y la funzione ha il valore costante uguale a zero, se si tende a zero lungo una delle curve $y = \pm e^{-1/x^2}$ la funzione ha il valore costante -1. Dunque, la funzione non ha limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

d) La funzione f è differenziabile in D ed ha derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x \ln |y|, \qquad f_y(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

I punti critici sono tutti i punti di D con $x = 0$, ovvero i punti dell'asse y privato dell'origine; la funzione vale zero nei punti critici. Studiando il segno di f (la matrice Hessiana ha determinante nullo in tutti i punti critici) abbiamo subito $f > 0$ per $x \neq 0$ e $|y| > 1$, mentre $f < 0$ per $x \neq 0$ e $0 < |y| < 1$. Si conclude che i punti $(0, y)$, con $0 < |y| < 1$ sono *massimi locali*, i punti $(0, y)$, con $|y| > 1$ sono *minimi locali* e i due punti $(0, 1)$, $(0, -1)$ sono colli.

2.

a) Si tratta di un sistema lineare non omogeneo. Il sistema omogeneo associato è a coefficienti costanti. Poiché il termine noto dell'equazione è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$ per il teorema di esistenza e unicità globale e sono di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ per il teorema di regolarità.

b) La seconda equazione non contiene la funzione incognita $y_1(t)$; la soluzione è allora

$$y_2(t) = C_2 e^{-t},$$

con C_2 costante arbitraria. Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$y_1'(t) = -y_1(t) + (C_2 + 1)e^{-t},$$

ovvero una equazione lineare del primo ordine che ha per soluzione

$$y_1(t) = C_1 e^{-t} + (C_2 + 1)te^{-t}.$$

L'integrale generale (in forma vettoriale) si scrive allora

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $t \to +\infty$ abbiamo

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per ogni C_1, C_2.

c) Dalla condizione iniziale

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ricaviamo subito $C_1 = C_2 = 1$.

3. La forma ω_α è definita e di classe $\mathcal{C}^1$ nell'aperto $A = \{(x, y) : x \neq -1\}$. Abbiamo $A = A_1 \cup A_2$, dove $A_1 = \{(x, y) : x > -1\}$ e $A_2 = \{(x, y) : x < -1\}$ sono le due componenti connesse di A e sono entrambi aperti stellati; in ciascuno di essi, la condizione necessaria e sufficiente affinché ω_α sia esatta è

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{3}\left(y^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha(1 + \alpha x)y^2 \qquad \forall (x, y) \in A$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$y^2 = \alpha^2 y^2$$

e quindi si ottiene $\alpha = \pm 1$.
Nel caso $\alpha = 1$ un potenziale è

$$U_+(x, y) = \frac{1}{3}(x + 1)y^3 + \sqrt[3]{x + 1}$$

Nel caso $\alpha = -1$

$$U_-(x, y) = \frac{1}{3}(x - 1)y^3 + \sqrt[3]{x + 1}$$

Calcolo dell'integrale: La curva γ è contenuta in A_1; per semplificare il calcolo si può osservare che, essendo ω_1 esatta, vale

$$\oint_\gamma \omega_\alpha = \oint_\gamma (\omega_\alpha - \omega_1) = (\alpha - 1)\oint_\gamma y^2 dy + (\alpha^2 - 1)\oint_\gamma xy^2 dy$$

Il primo integrale vale zero perchè anche la forma differenziale $y^2 dy$ è esatta. Per calcolare il secondo integrale lungo l'ellisse si pone

$$x = \frac{1}{2}\cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Dunque:

$$\oint_\gamma xy^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t \cos t)^2 \, dt = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt = \frac{\pi}{8}$$

Si ottiene allora

$$\oint_\gamma \omega_\alpha = (\alpha^2 - 1)\,\frac{\pi}{8}$$

Si poteva anche ricondurre il problema al calcolo di un integrale doppio utilizzando la *formula di Gauss-Green*:

$$\oint_\gamma \omega_\alpha = \int\int_D (\alpha^2 y^2 - y^2) dx dy = (\alpha^2 - 1)\int\int_D y^2 dx dy$$

dove D è l'ellisse racchiusa da γ.

4. Divergenza del campo $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \partial_x y - 4\partial_y x + \partial_z z = 1$$

L'integrale su E della divergenza ha l'espressione

$$\int\int\int_E dx\,dy\,dz = |E|$$

Calcolo del flusso uscente da E: la superficie ∂E è regolare a pezzi:

$$\partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2 \cup \partial E_3 \cup \Sigma$$

dove Σ è la porzione di superficie di equazione $z = 1 - 4x^2 - y^2$ contenuta nel primo ottante e ∂E_i, $i = 1, 2, 3$, sono le superfici piane definite da

$$\partial E_1 = \{(0, y, z) : 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1 - y^2\}$$

$$\partial E_2 = \{(x, 0, z) : 0 \le x \le 1/2, \quad 0 \le z \le 1 - 4x^2\}$$

$$\partial E_3 = \{(x, y, 0) : x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 4x^2 + y^2 \le 1\}$$

Abbiamo allora:

$$\int\int_{\partial E_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} y\,dz = -\int_0^1 y(1-y^2)dy = -\frac{1}{4}$$

$$\int\int_{\partial E_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\int_0^{1/2} dy \int_0^{1-4x^2} (-4x)\,dz = 4\int_0^{1/2} x(1-4x^2)dx = \frac{1}{4}$$

$$\int\int_{\partial E_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

Sulla superficie Σ abbiamo:

$$\mathbf{n}\,dS = \Big(8x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big)dxdy$$

Dunque

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_{\partial E_3} \big(8xy - 8xy + (1-4x^2-y^2)\big)dxdy = \int\int_{\partial E_3} (1-4x^2-y^2)\,dxdy$$

Il flusso totale uscente vale

$$\int\int_{\partial E} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_{\partial E_3} (1-4x^2-y^2)\,dxdy$$

L'integrale corrisponde al volume di E calcolato applicando il metodo di *integrazione per fili* :

$$|E| = \int\int\int_E dxdydz = \int\int_{\partial E_3}\int_0^{1-4x^2-y^2} dz = \int\int_{\partial E_3} (1-4x^2-y^2)\,dxdy$$

Calcolo del valore dell'integrale (non richiesto): si può utilizzare la trasformazione

$$x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta; \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \frac{\rho}{2}$$

$$\int\int_{\partial E_3} (1-4x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^1\int_0^{\pi/2} (1-\rho^2)\frac{\rho}{2}\,d\theta\,d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{16}$$