Marco Contedini

LEZIONE 5

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

16 ottobre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Sistemi lineari

1. Risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = -1 \\ 2x + 4y = -k \\ 4x + 8y = -4 \end{cases}$$

2. Risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} kx + 3z = -2 \\ 2x + ky + (k+1)z = 0 \\ x + y - z = k + 1 \end{cases}$$

3. Risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} kx - ky + t = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ y + kz + t = 0 \end{cases}$$

4. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ 2y - kz = k \\ -2x + (k-1)y - 2z = -4 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$

   (a) provare che esiste un unico valore del parametro reale k affinchè l'insieme-soluzione sia monodimensionale; verificare che la soluzione è la retta: $3 - x = 2y = z + 1$;

   (b) detta r la retta definita nel quesito precedente e π il piano di equazione $x + y - z = 1$, determinare una retta q appartenente al piano π tale che q e r siano incidenti e perpendicolari.

2 Funzioni lineari

5. Sia f la "proiezione" $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

   - Trovare dimensioni e basi di $Im(f)$ e $Ker(f)$.
   - Per quali vettori $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ esiste $f^{-1}(w)$?

6. Data la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}$$

   - scrivere la matrice associata ad f relativamente alla base canonica e l'azione di f su un generico vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$.
   - Trovare $Ker(f)$.
   - Verificare che $\boldsymbol{v} = (1, 1, 3, 7)^T \in Im(f)$ e determinare $f^{-1}(\boldsymbol{v})$.
   - Determinare una base di vettori *ortogonali* per $Im(f)$.

7. Dati i vettori: $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 1)^T$, determinare la matrice associata alla funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}(f)$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(\boldsymbol{v}_3) = 2\boldsymbol{v}_3$.

8. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \xrightarrow{f_k} \begin{pmatrix}x + kz\\2x + ky + (1 - k)z\\3x + ky + z\\-kx - z\end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare le componenti della matrice A_k associata all'applicazione lineare f_k.

   (b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k, fornendo una base per il nucleo in almeno un caso in cui esso non sia banale.

   (c) Sia $k = 2$. Determinare le eventuali controimmagini di $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, 0)^T$.

9. Data l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f_\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}x' = x + \alpha y + (\alpha + 1)z\\y' = \alpha x + y + (\alpha + 1)z\\z' = x + \alpha y\end{cases},$$

   (a) determinare, al variare del parametro α, la dimensione del nucleo e dell'immagine di f_α.

   (b) Determinare, al variare del parametro α, la dimensione dello spazio delle controimmagini del piano $x' - y' = 0$ attraverso l'applicazione lineare f_α.

3 Esercizi proposti

1. Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases}x + ky = 0\\ky - 2z = 2k\\kx + y + 3z = -6.\end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k esso ha esattamente una soluzione, per quali non ne ha alcuna, per quali ne ha infinite. Determinare infine l'equazione cartesiana dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia monodimensionale.

2. Stabilire l'esistenza e la dimensione dell'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - ax_4 = b - 1 \\ ax_1 + 2x_3 = b + 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = b - 1 \end{cases}$$

al variare dei parametri reali a e b.

3. Risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = k - 1 \\ kx + y + 2z = 2 \\ -x + (4 - k)y + (k + 2)z = 1 \end{cases}$$

4. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} y + z = -k \\ (1 - k)x + (1 + k)y + 2kz = 0 \\ (1 - k^2)x + 3ky + 3kz = -3 \end{cases}$$

   (a) stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione dell'insieme delle soluzioni;

   (b) determinare l'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia una retta.

5. Sia $\boldsymbol{w}$ un versore nello spazio $\mathbb{R}^3$. Dopo aver verificato che $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ (proiettore sulla direzione $\boldsymbol{w}$), determinare la matrice $A_{\boldsymbol{w}}$ associata a $f_{\boldsymbol{w}}$.

6. Data la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

   - Determinare le dimensioni dei sottospazi $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   - Trovare una base per $Ker(f)$ e $Im(f)$.

7. Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, nelle basi canoniche, dalla matrice A_k così definita, al variare del parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & k & -k \\ k + 3 & 1 & k \\ -2k + 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) determinare i valori del parametro reale k affinchè L_k non sia biunivoca;

   (b) per tali valori di k esibire le basi del nucleo e dell'immagine di L_k.

4 Soluzioni

1. La matrice completa del sistema è:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 2 & 4 & -k \\ 4 & 8 & -4 \end{array}\right).$$

Si ha: $\det A|b = -4(k-2)^2$. Quindi $rk(A|b) = 3$ se $k \neq 2$, mentre la matrice dei coefficenti A ha rango al più 2. Pertanto, se $k \neq 2$ il sistema è impossibile. Sia $k = 2$. La matrice completa diventa:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{array}\right).$$

Tutte le colonne risultano proporzionali, pertanto $rk(A) = rk(A|b) = 1$ ed il sistema ammette ∞^{2-1} soluzioni. Per risolvere il sistema consideriamo solo la prima equazione, le altre sono ridondanti.

$$x + 2y = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \end{cases},$$

avendo scelto l'incognita y come parametro libero.

Interpretazione grafica: la seconda e la terza equazione rappresentano rette parallele nel piano se $k \neq 2$ e coincidenti se $k = 2$. La prima equazione è una retta incidente le altre se $k \neq 2$. Se invece $k = 2$ anche la prima retta è coincidente con le altre due.

2. Il sistema ha tre incognite. La matrice completa del sistema è la seguente:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 3 & -2 \\ 2 & k & k+1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & k+1 \end{array}\right).$$

Calcolo il determinante della matrice dei coefficienti:
$\det A = -2k^2 - 4k + 6 = -2(k-1)(k+3)$.
Caso $k \neq 1$ e $k \neq -3$.
La matrice A ha rango 3 come la matrice completa, pertanto esiste almeno una soluzione. La soluzione è unica per il teorema di Cramer: un sistema quadrato $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione se $\det A \neq 0$. La soluzione si calcola con

la regola di Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & k & k+1 \\ k+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{-3k^2+k+2}{-2(k-1)(k+3)} = \frac{3k+2}{2(k+3)}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} k & -2 & 3 \\ 2 & 0 & k+1 \\ 1 & k+1 & -1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{-k^3-2k^2+3k}{-2(k-1)(k+3)} = \frac{k}{2}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{k^3+k^2+2k-4}{-2(k-1)(k+3)} = -\frac{k^2+2k+4}{2(k+3)}$$

Caso $k = 1$.
La matrice completa diventa:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Sappiamo che $rk(A) = 2$ perchè $\det A = 0$ ed è evidente un minore di ordine due con determinante diverso da zero.
É altrettanto facile vedere che $rk(A|b) = 2$: la quarta colonna risulta uguale alla differenza tra la prima e la terza colonna.
Altrimenti, considerato il minore $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo, si orla dapprima con la terza riga e la terza colonna: si ottiene la matrice A per cui $\det A = 0$; poi con la quarta riga e la terza colonna e si calcola il determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Allora $rk(A|b) = 2$ per il teorema di Kronecker.
Si hanno ∞^{3-2} soluzioni. La terza equazione può essere considerata ridondante. Scelgo z come parametro libero.

$$\begin{cases} x + 3z = -2 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -2-3t \\ y = 4+4t \\ z = t \end{cases}.$$

Caso $k = -3$.
La matrice completa diventa: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$.
Poichè:

$$\det\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = -28$$

$rk(A) = 2$ e $rk(A|b) = 3$. Pertanto il sistema è impossibile.

3. Il sistema è omogeneo. Cercare le soluzioni di un sistema omogeneo equivale a cercare il nucleo della funzione lineare associata alla matrice A. L'insieme di soluzioni è quindi un sottospazio e contiene sempre almeno la soluzione banale $\boldsymbol{x} = 0$. La dimensione dello spazio-soluzione, per il teorema nullità più rango, è data dal numero delle variabili (in questo caso quattro) meno $rk(A)$.

   Determino il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$.

   $Rk(A) \geq 2$ perchè esiste un minore di ordine due, formato dalle prime due righe e ultime due colonne con determinante diverso da zero. Orliamo dapprima questo minore con la prima colonna e con la terza riga:

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

   Orliamo lo stesso minore con la seconda colonna e la terza riga:

$$\det \begin{pmatrix} -k & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} = -k + 1.$$

   Quindi se $k = 1$ si ha che $rk(A) = 2$, altrimenti $rk(A) = 3$. Sia $k = 1$: Abbiamo ∞^{4-2} soluzioni. La terza equazione è ridondante. Scelgo come incognite indipendenti $x = \alpha$ e $y = \beta$. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha + 2\beta \\ t = -\alpha + \beta \end{cases}.$$

   Sia $k \neq 1$, quindi $rk(A) = 3$: si hanno ∞^{4-3} soluzioni. Per risolvere il sistema conviene trattare opportunamente la matrice A per far comparire il maggior numero di zeri possibile su di una stessa riga:

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III riga=III-I}]{} \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -k & 1+k & k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III riga= III+k$\cdot$II}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   da cui segue $y = 0$. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} kx + t = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \\ t = -k\alpha \end{cases}$$

   avendo scelto $x = \alpha$ parametro libero.

4. (a) Se $rk(A) = 3$ la matrice può avere un'unica soluzione se $rk(A|b) = 3$ e non averne affatto se $rk(A|b) = 4$.
Sia M un minore di ordine 3 della matrice A, ad esempio quello formato dalle prime tre righe. Si ha: $\det M = k^2(k-1)$. Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ allora $rk(A) = 3$ e non ci possono essere soluzioni molteplici.
Se $k = 0$ allora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si osserva che:
$rk(A) = 2$ (due colonne sono uguali)
$rk(A|b) = 3$ (il minore di ordine tre formato dalle prime tre righe e ultime tre colonne ha determinante diverso da zero).
Pertanto il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 1$, allora:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si osserva che:
$rk(A) = 2$ (la quarta riga è uguale alla seconda meno la prima e la terza riga è il doppio della quarta)
$rk(A|b) = 2$ (per lo stesso motivo: la quarta riga è uguale alla seconda meno la prima e la terza riga è il doppio della quarta).
Pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Risolvendo il sistema, scegliendo y come parametro libero e ricordando che le ultime due righe sono ridondanti, si ottiene la soluzione:

$$r = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Se q è una retta appartenente al piano π e perpendicolare alla retta r, allora il vettore direzione di q ($\boldsymbol{v}_q$) deve essere ortogonale al vettore direzione di r ($\boldsymbol{v}_r$) ed al vettore normale a π ($\boldsymbol{v}_\pi$). Vale a dire che $\boldsymbol{v}_q$ deve essere un qualsiasi vettore proporzionale a $\boldsymbol{v}_\pi \wedge \boldsymbol{v}_r = (-3, 0, -3)^T$.
Scelto $\boldsymbol{v}_q = (1, 0, 1)^T$, la retta q deve intersecare la retta r in un punto P. P deve inoltre appartenere al piano π, quindi: $P = r \cap \pi$. Nel punto P il parametro t della retta r deve soddisfare la condizione: $(3 - 2t) + t - (-1 + 2t) = 1$, cioè: $t = 1$. Pertanto: $P = (1, 1, 1)$.
L'equazione parametrica della retta q risulta:

$$q = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

5. La matrice A associata alla proiezione f è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come base di $Im(f)$ si possono prendere i vettori i e j (ovvero le prime due colonne della matrice A).
Per il teroema "nullità più rango", la dimensione del nucleo di f è 1.
Il sistema omogeneo $A\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ ha come soluzione lo spazio monodimensionale dei vettori:

$$Ker(f) = \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Vettori del tipo $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ con $w_3 \neq 0$ non hanno associata alcuna controimmagine, perchè $f(\boldsymbol{X})$ ha la componente z nulla $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$ (oppure anche perchè $\boldsymbol{w}$ è linearmente indipendente dai vettori della base di $Im(f)$). Vettori del tipo: $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, 0)^T$ hanno associata una varietà monodimensionale di soluzioni del tipo:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

L'interpretazione geometrica è la seguente:
Le controimmagini di $\mathbf{0}$, $Ker(f)$, appartengono ad una retta ortogonale al piano xy (l'asse z); essa è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
Le controimmagini $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ (con $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$) sono rette parallele a $Ker(f)$ e non sono sottospazi ma traslazioni sul piano xy di $Ker(f)$.

6.
   - Scriviamo dapprima la matrice associata alla trasformazione f.
     Detti $\boldsymbol{e}_i$ $i = 1, .., 4$ i quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ si ha: $A = [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3), f(\boldsymbol{e}_4)]$. Esplicitamente:

     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

     L'azione su un generico vettore $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ è:

     $$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

   - Il nucleo di f è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori $\boldsymbol{v}$ tali che $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Inoltre $rk(A) = 3$, infatti $\det A = 0$ (verificare) ed esiste un minore di ordine tre con determinante non nullo (ad esempio quello formato dalle prime tre righe e ultime tre colonne, chiamo M questo minore).

Sappiamo che la dimensione dell'immagine di f è uguale al rango della matrice A, pertanto, per il teorema "nullità più rango", la dimensione del nucleo di f è 1.
Per trovare il generatore del nucleo di f occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è ridondante in quanto l'ultima riga è sicuramente dipendente dalle prime tre, infatti abbiamo trovato il minore M con determinante diverso da zero che ci garantisce che le prime tre righe sono indipendenti.
Scelgo x_3 come parametro libero e risolvo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato che $Ker(f)$ è lo spazio monodimensionale generato dal vettore $(1, 1, -1, 0)^T$.

- Sappiamo che le colonne della matrice A sono un insieme di generatori dell'immagine di f. Il vettore $\boldsymbol{v}$ apparterrà allo spazio $Im(f)$ se risulta essere una combinazione lineare delle colonne di A. Quindi il rango della matrice completa di $A|\boldsymbol{v}$ deve valere ancora 3 (numero delle colonne indipendenti di A). Poichè $\det(A_r|\boldsymbol{v}) = 0$ si ha: $\boldsymbol{v} \in Im(f)$. (A_r è la matrice che si ottiene eliminando la terza riga della matrice A).
Si poteva anche osservare direttamente la dipendenza lineare di $\boldsymbol{v}$ dalle colonne indipendenti di A. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per determinare le controimmagini (∞^1) di $\boldsymbol{v}$ occorre risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Osservando che l'ultima riga è ridondante, riducendo la matrice completa del sistema a scala (basta sottrarre alla terza riga il doppio della prima):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

scelto $x_3 = \alpha$ come parametro libero della soluzione, si ha:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ e $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 3)^T$ formano una base di $Im(f)$ non ortogonale. Come si può verificare direttamente calcolando i relativi prodotti scalari.
  Per costruire una base ortogonale si può applicare il metodo di Gram-Schmidt, oppure agire nel seguente modo. Scelgo uno qualsiasi dei tre vettori: esso sarà il primo vettore della nostra base ortogonale, sia ad esempio $\boldsymbol{w}_1 := \boldsymbol{v}_2$.
  Un secondo vettore lo scelgo c. l. di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$: $\boldsymbol{w}_2 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ con il vincolo che $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = 0$.

$$\boldsymbol{w}_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 3a + b \end{pmatrix}$$

  Poichè: $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = 3a + 2b = 0$ posso scegliere $a = 2$ e $b = -3$, pertanto: $\boldsymbol{w}_2 = (2, -3, 4, 3)^T$.
  Purtroppo siamo in quattro dimensioni e per trovare $\boldsymbol{w}_3$ non posso fare il prodotto vettoriale tra $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ semplicemente perchè non è definito!
  Scelgo $\boldsymbol{w}_3$ c. l. di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ con i vincoli: $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_3 = 0$ e $\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{w}_3 = 0$.

$$\boldsymbol{w}_3 = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ a' \\ 2b' + c' \\ a' + 3b' + 3c' \end{pmatrix}$$

  con i vincoli:

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_3 = 0 \\ \boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{w}_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 19b' + 13c' = 0 \\ 2a' + 3b' + 3c' = 0 \end{cases}$$

  La naturale scelta $c' = -19$ e $b' = 13$ implica $a' = 9$.
  La base ortogonale trovata è $\boldsymbol{w}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{w}_2 = (2, -3, 4, 3)^T$ e $\boldsymbol{w}_3 = (13, 9, 7, -9)^T$.

7. Ricordiamo che la matrice A_k associata alla funzione f_k è formata da tre vettori-colonna: $f(\boldsymbol{i})$, $f(\boldsymbol{j})$, $f(\boldsymbol{k})$.
   Per determinarli sappiamo che:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= f(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= f(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0} \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= f(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Utilizzando la linearità di f le precedenti equazioni vettoriali possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{i}) + 2f(\boldsymbol{k}) &= \mathbf{0} \\ f(\boldsymbol{j}) - f(\boldsymbol{k}) &= \mathbf{0} \\ f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{k}) &= 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Sottraendo dalla prima equazione la terza otteniamo:

$$f(\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$$

Dalla seconda:

$$f(\boldsymbol{j}) = f(\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$$

Ancora dalla prima:

$$f(\boldsymbol{i}) = -2f(\boldsymbol{k}) = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$$

Quindi:

$$A = [f(\boldsymbol{i}), f(\boldsymbol{j}), f(\boldsymbol{k})] = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Esponiamo di seguito un altro metodo valido più in generale.
Nota l'azione di f su tre vettori *indipendenti* $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{w}_1 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{w}_2, \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= \boldsymbol{w}_3 \end{aligned}$$

vale la relazione matriciale:

$$A \begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{2,x} & v_{3,x} \\ v_{1,y} & v_{2,y} & v_{3,y} \\ v_{1,z} & v_{2,z} & v_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,x} & w_{2,x} & w_{3,x} \\ w_{1,y} & w_{2,y} & w_{3,y} \\ w_{1,z} & w_{2,z} & w_{3,z} \end{pmatrix}$$

per cui è possibile determinare A nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} w_{1,x} & w_{2,x} & w_{3,x} \\ w_{1,y} & w_{2,y} & w_{3,y} \\ w_{1,z} & w_{2,z} & w_{3,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{2,x} & v_{3,x} \\ v_{1,y} & v_{2,y} & v_{3,y} \\ v_{1,z} & v_{2,z} & v_{3,z} \end{pmatrix}^{-1}$$

Ricordiamo che l'inversa dell'ultima matrice del secondo membro esiste in virtù dell'indipendenza dei vettori $\boldsymbol{v}_i$ $i = 1, 2, 3$.
Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. (a) La matrice A_k associata all'aplicazione lineare è:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Poichè la dimensione dell'immagine di f_k coincide con il rango di A_k, occorre determinare il rango di A_k.
Sappiamo che $1 \leq \text{Rk}(A_k) \leq 3$ (matrice non identicamente nulla).
Partiamo, per esempio, dal minore $M = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & k \end{pmatrix}$ che ha determinante non nullo se $k \neq 0$. Orlando M si ottengono due minori di ordine tre, i cui determinanti sono:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k; \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix} = k-k^3 = k(1+k)(1-k)$$

Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$, si ha: $\text{Rk}(A_k) = \text{Dim}(\text{Im}(f_k)) = 3$, inoltre per il teorema "nullità più rango": $\text{Ker}(f_k) = \mathbf{0}$.
Negli altri casi le matrici A_0, A_1 e A_{-1} presentano minori di ordine due con determinante non nullo, pertanto: Se $k = -1 \vee k = 0 \vee k = 1$: $\text{Rk}(A_k) = \text{Dim}(\text{Im}((f_k)) = 2$ e $\text{Dim}(\text{Ker}(f_k)) = 1$. Sia ora, per esempio $k = 0$.
Per trovare la base del nucleo di f_0 si deve risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui: $x = z = 0$ e y qualsiasi. Come base di $\text{Ker}(f_0)$ si può scegliere il vettore $(0, 1, 0)^T$.
Negli altri casi, posto $(x, y, z)^T$ il generico vettore di $\text{Ker}(f_k)$, si ha:

$$k = -1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$k = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Occorre verificare se esitono soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è A_2 di cui sappiamo che il rango vale 3.
La matrice completa del sistema è:

$$A_2|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Si ha: $\det(A_2|b) = 6$, pertanto $4 = \mathrm{Rk}(A_2|b) > \mathrm{Rk}(A_2) = 3$. Il sistema non ha soluzioni.

9. Sia A_α la matrice associata all'applicazione lineare f_α nella base canonica. Risulta:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è: $\det A_\alpha = (\alpha+1)^2(\alpha-1)$.

Determiniamo ora il rango di A_α (indicato con $\mathrm{Rk}(A_\alpha)$) e, conseguentemente, dal Teorema di nullità più rango si ricavano le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_α.

A tal fine, si noti che il determinante è non nullo se e solo se $\alpha \neq \pm 1$, ne segue dunque che $\mathrm{Rk}(A_\alpha) = 3$ se $\alpha \neq \pm 1$. Se $\alpha = 1$, il minore della matrice 2x2 individuata dalla seconda e terza riga e dalla seconda e terza colonna è diverso da zero, dunque $\mathrm{Rk}(A_\alpha) = 2$ se $\alpha = 1$. Se $\alpha = -1$ le tre righe di A_{-1} sono proporzionali e non nulle, dunque $\mathrm{Rk}(A_\alpha) = 1$ se $\alpha = -1$. Quindi:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \neq \pm 1 & \Longrightarrow & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Im}\ (f)) = 3, & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Ker}\ (f)) = 0 \\ \alpha = +1 & \Longrightarrow & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Im}\ (f)) = 2, & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Ker}\ (f)) = 1 \\ \alpha = -1 & \Longrightarrow & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Im}\ (f)) = 1, & \mathrm{Dim}\ (\mathrm{Ker}\ (f)) = 2 \end{array}$$

(b) La condizione $x' - y' = 0$ equivale a $x(1-\alpha) = y(1-\alpha)$. Se $\alpha = 1$ ciò è sempre vero, quindi la dimensione richiesta è tre, se invece $\alpha \neq 1$ l'insieme delle controimmagini è il piano $x = y$, che ha dunque dimensione due.

5 Soluzione degli esercizi proposti

1. Poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & k & -2 \\ k & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ -6 \end{pmatrix} \qquad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 & 2k \\ k & 1 & 3 & -6 \end{array}\right).$$

Innanzitutto occorre determinare il rango delle matrici A e $A|b$. È evidente che $2 \leq \mathrm{Rk}(A) \leq 3$: infatti il minore 2x2 individuato dalla prima e dalla seconda riga e dalla prima e dalla terza colonna è diverso da zero indipendentemente dal valore di k. Si calcola quindi il determinante di A:

$$\det A = -2k^2 + 3k + 2$$

che si annulla soltanto per $k = 2$ e $k = -1/2$. Pertanto, $\mathrm{Rk}(A) = 3$ se $k \neq 2$ e $k \neq -1/2$ e $\mathrm{Rk}(A) = 2$ se $k = 2$ e $k = -1/2$. Dunque si ha anche $\mathrm{Rk}(A|b) = 3$ se $k \neq 2$ $k \neq -1/2$ in quanto B è ottenuta orlando A e dunque il rango non può diminuire (ne aumentare, avendo B tre righe).
Se $k = -1/2$ osserviamo che il determinante della matrice formata dalle ultime tre colonne di $A|b$ è diverso da zero, quindi $\mathrm{Rk}(A|b) = 3$.
Infine, se $k = 2$, notiamo che la quarta colonna della matrice $A|b$ è proporzionale alla terza colonna. In conclusione $\mathrm{Rk}(A|b) = 2$ solo se $k = 2$.
Dal Teorema di Rouchè-Capelli sappiamo che se $k = -1/2$ il sistema è impossibile, se $k \neq 2, k \neq -1/2$ il sistema ha una sola soluzione, se $k = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni (lo spazio delle soluzioni ha dimensione uno, esso è dunque una retta). Viene quindi chiesto di risolvere esplicitamente il sistema nel caso $k = 2$. Dalla prima equazione si ottiene $y = -x/2$ e dalla seconda $y = z + 2$. Dunque si ottengono le seguenti equazioni cartesiane per la retta cercata:

$$y = -\frac{x}{2} = 2 + z.$$

2. Il sistema è non omogeneo, ha tre equazioni e quattro incognite.
La matrice completa del sistema è la seguente:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & b-1 \\ a & 0 & 2 & 0 & b+2 \\ 1 & a & 1 & a & b-1 \end{array}\right)$$

Per determinare il rango della matrice dei coefficienti osserviamo che il minore di ordine tre formato dalle prime tre colonne ha determinante uguale a $-a^2$, di conseguenza, se $a \neq 0$ si ha: $\mathrm{Rk}(A) = 3$. Se $a = 0$, la seconda e la quarta colonna sono nulle, pertanto: $\mathrm{Rk}(A) = 2$.
Sia $a \neq 0$. Allora: $\mathrm{Rk}(A|b) = \mathrm{Rk}(A) = 3$, pertanto il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
Sia $a = 0$. Il minore di $A|b$ formato dalle tre colonne non nulle ha determinante uguale a $-b - 2$. Pertanto se $b = -2$, allora: $\mathrm{Rk}(A) = \mathrm{Rk}(A|b) = 2$, quindi il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Se $b \neq -2$, allora $\mathrm{Rk}(A|b) = 3$, pertanto il sistema è impossibile.

3. $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & k-1 \\ k & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4-k & k+2 & 1 \end{array}\right).$

$\det A = 3(3 - k)(k - 2)$.

Se $k \neq 2$ e $k \neq 3$ il sistema ha una sola soluzione:

$$x = -1 \quad y = \frac{k+2}{3(k-2)} \quad z = -\frac{(k+2)(k-4)}{3(k-2)}$$

Se $k = 3$, $rk(A) = 2$ e $rk(A|b) = 2$: il sistema ha ∞^{3-2} soluzioni. Scelto z come parametro:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t \\ y = \frac{5}{4} - \frac{17}{4}t \\ z = t \end{cases}$$

Se $k = 2$, $rk(A) = 2$ e $rk(A|b) = 3$: il sistema non ha soluzioni.

4. Indichiamo con A_k la matrice dei coefficienti del sistema e con $A_k|b$ la sua matrice completa. Si ha:

$$0 = \det A_k = k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

se $k = 1$ e $k = -1$. In questi casi abbiamo che:

$$A_1|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right), \qquad A_{-1}|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Si osservi che:
Il rango di A_1 vale 1 (tre righe proporzionali) e il rango di $A_1|b$ vale 2 perché, ad esempio, il minore individuato dalle prime due righe e ultime due colonne ha determinante diverso da zero.
Il rango di A_{-1} vale 2 (prima e terza riga proporzionali tra loro, e presenza di un minore di ordine due non nullo) e il rango di $A_{-1}|b$ vale ancora due (il vettore dei termini noti è uguale alla seconda colonna della matrice dei coefficienti).
Il rango di A_k vale 3 ed è uguale al rango di $A_k|b$ per $k \neq \pm 1$.

Dal Teorema di Rouché-Capelli si ha dunque:

$k = 1$	:	$\mathrm{Rk}(A_1|b) = 2$	$\mathrm{Rk}(A_1) = 1$	il sistema è impossibile
$k = -1$	:	$\mathrm{Rk}(A_{-1}|b) = 2$	$\mathrm{Rk}(A_{-1}) = 2$	il sistema ammette ∞^1 soluzioni
$k \neq \pm 1$	:	$\mathrm{Rk}(A_k|b) = 3$	$\mathrm{Rk}(A_k) = 3$	esiste un'unica soluzione

(b) Sia dunque $k = -1$. La terza equazione è ridondante (è equivalente alla prima). Scelto, ad esempio, $y = t$, come parametro libero del sistema, si ricava:

$$z = 1 - t, \quad x = z = 1 - t$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni del sistema, per $k = -1$ è la retta di equazione:

$$r := \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5. $f_{\boldsymbol{w}}$ è lineare perchè è lineare il prodotto scalare tra due vettori. Infatti:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{w}}(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{w} \cdot (\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2))\, \boldsymbol{w} = \\ &= (\alpha \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_2)\, \boldsymbol{w} = \\ &= \alpha(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{w} + \beta(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{w} = \\ &= \alpha f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}_1) + \beta f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

Per trovare $A_{\boldsymbol{w}}$, dobbiamo determinare l'azione di $f_{\boldsymbol{w}}$ sui vettori della base canonica:

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_x w_x \\ w_x w_y \\ w_x w_z \end{pmatrix}$$

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{w} = w_y \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_y w_x \\ w_y w_y \\ w_y w_z \end{pmatrix}$$

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{w} = w_z \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_z w_x \\ w_z w_y \\ w_z w_z \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$A_{\boldsymbol{w}} = [f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i}), f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j}), f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k})] = \begin{pmatrix} w_x w_x & w_y w_x & w_z w_x \\ w_x w_y & w_y w_y & w_z w_y \\ w_x w_z & w_y w_z & w_z w_z \end{pmatrix}$$

Si osservi che:

- $A_{\boldsymbol{w}}$ è simmetrica ($A_{\boldsymbol{w}} = A_{\boldsymbol{w}}^t$).
- Sia $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ quindi: $\ker f_{\boldsymbol{w}} = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}\}$.
- $\det A_{\boldsymbol{w}} = 0$, $tr(A_{\boldsymbol{w}}) = ||\boldsymbol{w}||^2$.
- $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$.

6. É necessario determinare il rango della matrice A associata alla funzione f.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considero il minore di ordine 2 formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne: sia esso M.
Si ha: $\det M \neq 0$. Quindi $rk(A) = 2$ o 3. I minori orlati di M sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

É facile verificare che entrambi questi minori (di ordine 3) hanno determinante nullo. Quindi: $rk(A) = 2$, la dimensione dell'immagine di f è 2 e la dimensione del nucleo è 2 (dal teorema nullità più rango).

Per determinare il rango di A si poteva anche notare che la terza riga risulta essere la somma delle prime due, dunque A contiene solo due righe linearmente indipendenti, pertanto $rk(A) = 2$.
Per determinare il nucleo di f risoviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

La terza equazione è ridondante. Scelgo x_3 e x_4 parametri liberi.

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 + x_4 \\ 2x_1 = -x_2 + 2x_3 = 3x_3 - x_4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s \\ x_2 = -t + s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

Una base di $Ker(f)$ è formata dai vettori $\boldsymbol{v}_1 = (3, -2, 2, 0)^T$ e $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 2, 0, 2)^T$.
Una base di $Im(f)$ è una qualsiasi scelta di due colonne linearmente indipendenti della matrice A, ad esempio: $\boldsymbol{w}_1 = (0, 2, 2)^T$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 1, 2)^T$.

7. (a) L'applicazione lineare L_k è biunivoca solo se la matrice A_k ha determinante diverso da zero.
È opportuno sommare la prima riga con la seconda per averedue elementi nulli sulla terza colonna
poichè $\det A_k = -k^2(k + 1)$, si ha che L_k è biunivoca solo se $k \neq 0$ e $k \neq -1$.

(b) Sia $k = 0$, Allora:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto: $rk(A_0) = 1$, infatti una colonna è formata dal vettore identicamente nulllo, mentre la prima e la seconda colonna sono uguali.
Quindi, per il teorema nullità più rango, lo spazio immagine ha dimensione 1, mentre il nucleo ha dimensione 2.
Una base dello spazio immagine può essere un qualsiasi vettore proporzionale al vettore $(0, 1, 1)^T$.
La base del nucleo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato, che in questo caso si riduce all'equazione $3x + y = 0$, con z qualsiasi. Lo spazio nucleo di L_k è allora formato dai vettori $(\alpha, -3\alpha, \beta)^T$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed una base può essere rappresentata dai vettori $(1, -3, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$.

Sia $k = -1$, Allora:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso esistono minori di ordine due con determinante diverso da zero, $\det A_{-1} = 0$, quindi: $rk(A_{-1}) = 2$ e, di conseguenza, lo spazio

immagine ha dimensione 2, mentre il nucleo ha dimensione 1.
Una base dello spazio immagine può essere rappresentata dai vettori colonna indipendenti di A_{-1}, ad esempio: $(-1,1,1)^T$ e$(1,-1,0)^T$.
Il nucleo di A_{-1} è lo spazio monodimensionale $(\alpha,-5\alpha,-3\alpha)^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e per base si può scegliere il singolo vettore $(1,-5,-3)^T$.