Analisi matematica 2		19 giugno 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1.

a) Calcolare

$$\int\int_D (x+y)\,dx\,dy$$

dove D è il cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 1.

b) La densità di una sfera solida di raggio $R = 1$ è data dall'espressione

$$\delta(r) = \frac{1}{r+1}$$

dove r è la distanza dal centro della sfera. Determinare la massa della sfera e la sua densità *media*.

c) Calcolare l'area racchiusa dalla linea γ di equazione

$$\gamma:\ \mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi$$

2.

i) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

uscente dalla frontiera della regione

$$\Omega = \left\{0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 - y^2\,.\right\}$$

ii) Verificare il risultato applicando il teorema della divergenza, dopo avere controllato che le ipotesi del teorema sono valide nel caso in esame.

iii) Dimostrare che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e trovarne un potenziale.

3.

i) Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3...$ funzioni della variabile reale x. Dire cosa si intende per *convergenza totale* in $[a,b]$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ii) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}(x-1)^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n}\, x^{2n}$$

Detta $f(x)$ la somma della serie $b)$, calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$ giustificando i passaggi.

iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$ e tale che

$$f(x) = |x| \qquad \text{per} \quad x \in [-\pi, \pi).$$

- Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-\pi, 3\pi]$.
- Discutere la convergenza della serie di Fourier associata a f. Calcolare i coefficienti a_0 e a_1 e verificare che $b_n = 0$, $n = 1, 2, ...$ (serie di soli coseni).

SOLUZIONI

1.

a) Per simmetria abbiamo

$$\int\int_D (x+y)\,dx\,dy = \int\int_D x\,dx\,dy$$

Utilizziamo coordinate polari *centrate nel punto* $(2,0)$:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\int\int_D x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2+\rho\cos\theta)\rho\,d\rho\,d\theta =$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\,d\rho\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta$$
$$= 2\pi + 0 = 2\pi\,.$$

b) Ponendo il centro della sfera nell'origine e usando le coordinate sferiche

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\phi$$

la massa M è data dall'integrale

$$M = \int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \delta(r) r^2 \sin\phi\,d\theta\,d\phi\,dr$$
$$= 4\pi\int_0^1 \frac{r^2}{r+1}\,dr = 4\pi\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}\,dt = 4\pi\int_1^2 (t-2+1/t)\,dt$$
$$= 4\pi\Big[\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln t\Big]_1^2 = 4\pi(\ln 2 - 1/2)\,.$$

Dividendo per il volume della sfera, si ricava la densità media $3(\ln 2 - 1/2)$.

c) Detta A la regione racchiusa dalla curva, dalla formula di Green abbiamo:

$$|A| = \oint_{\partial^+ A} x\;dy \tag{1}$$

La frontiera di A coincide con il sostegno della curva γ. Osserviamo che la linea γ inizia e termina nell'origine, è contenuta nel semipiano delle y positive ed è percorsa in senso *negativo* rispetto a A; dalle equazioni parametriche

$$x = -\frac{1}{2}\sin(2t), \qquad y = \sin t$$

abbiamo:

$$dx = -\cos(2t)\,dt, \qquad dy = \cos t\,dt$$

Pertanto, dalla formula (1) si ottiene (tenendo conto del cambio di orientazione)

$$|A| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)\cos t\,dt = \int_0^{\pi}\sin t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{3}\big[-\cos^3 t\big]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\,.$$

Al posto della (1) si poteva usare la formula $|A| = \oint_{\partial^+ A} -y\;dx$ o la semisomma delle due.

2.

i) Calcolo del flusso del campo uscente da $\partial\Omega$. La superficie è regolare a pezzi, composta da tre superfici piane

$$\Sigma_1 := \{(x,y,0)\,,\quad 0\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1\}$$
$$\Sigma_2 := \{(0,y,z)\,,\quad -1\le y\le 1\quad 0\le z\le 1-y^2\}$$
$$\Sigma_3 := \{(1,y,z)\,,\quad -1\le y\le 1\quad 0\le z\le 1-y^2\}$$

e dalla superficie cartesiana Σ di equazione

$$z = 1-y^2, \qquad 0\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1\,.$$

La normale *esterna* moltiplicata per l'elemento di superficie è:

$$\mathbf{n}_e\, dS = -\mathbf{k}\, dx\, dy \qquad \text{su } \Sigma_1,$$

$$\mathbf{n}_e\, dS = -\mathbf{i}\, dy\, dz \qquad \text{su } \Sigma_2,$$

$$\mathbf{n}_e\, dS = \mathbf{i}\, dy\, dz \qquad \text{su } \Sigma_3,$$

$$\mathbf{n}_e\, dS = \big(2y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\big)\, dx\, dy \qquad \text{su } \Sigma\,.$$

Dunque:

$$\int\!\!\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{\Sigma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_{\Sigma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_{\Sigma_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_e\, dS$$

$$= 0+0+\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2} dz\, dy + \int_{-1}^{1}\int_0^{1}\big(2y^2+2(1-y^2)\big)dx\, dy =$$
$$= \int_{-1}^{1}(1-y^2)\, dy + 2\int_{-1}^{1} dy = \frac{4}{3}+4 = \frac{16}{3}\,.$$

ii) Il dominio Ω è ammissibile per il teorema della divergenza perchè è *semplice rispetto ai tre assi* (come si può verificare per via geometrica) e la sua frontiera è una superficie chiusa, regolare a pezzi e orientabile. Inoltre, $\mathbf{F}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \partial_x(x^2)+\partial_y(y)+\partial_z(z) = 2x+1+2 = 2x+3\,.$$

Abbiamo allora

$$\int\!\!\int\!\!\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = \int\!\!\int\!\!\int_\Omega (2x+3)\, dxdydz =$$

(integrando per fili)

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-y^2} (2x+3)\, dz\, dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} (2x+3)(1-y^2)\, dxdy$$

$$= \Big(\int_{0}^{1} (2x+3)\, dx \Big) \Big(\int_{-1}^{1} (1-y^2)\, dy \Big) = 4\, \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\, .$$

iii) Poiché $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ nell'aperto *semplicemente connesso* $\mathbb{R}^3$ e

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0} \qquad \forall\ (x,y,z)\ \in \mathbb{R}^3\ ,$$

il campo è conservativo. Poiché la prima componente del campo dipende solo da x, la seconda solo da y e la terza solo da z, un potenziale sarà la somma delle primitive (qualsiasi) di ciascuna delle tre componenti. Ad esempio, il potenziale che si annulla nell'origine è

$$U(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + z^2\, .$$

3.

ii) Applicando il criterio della radice o del rapporto, si trova che la serie $a)$ ha raggio di convergenza $R = 1/2$. Il centro della serie è $x_0 = 1$, per cui la serie converge assolutamente nell'intervallo $(1/2, 3/2)$. Agli estremi $x = 1/2$ e $x = 3/2$ abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\,,$$

entrambe assolutamente convergenti. Dunque l'intervallo di convergenza è $[1/2, 3/2]$.
La serie $b)$ è lacunare, ma con la sostituzione $x^2 = t$ diviene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{2^n}\, t^n\,,$$

il cui raggio di convergenza risulta essere $R = 2$. Dunque la serie converge per $|t| < 2$, cioè per $x^2 < 2$, ovvero nell'intervallo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ della x. La serie non converge agli estremi dell'intervallo perché il termine generale non tende a zero.

Calcolo dell'integrale: l'intervallo chiuso $[0, 1]$ è contenuto nell'intervallo di convergenza. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione per serie e calcolare

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{2^n} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{2^n}\,\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

iii) La funzione f è *regolare a tratti* e *continua* ; per il teorema della convergenza semplice, la serie di Fourier associata converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Coefficienti di Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi\,.$$

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx &= \frac{2}{\pi}\Big(\big[x\sin x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\big[\cos x\big]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}\,. \end{aligned}$$

Infine,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, ...,$$

poiché, essendo f una funzione pari, tutti i b_n sono integrali di funzioni *dispari* su un intervallo *simmetrico*.
La serie di Fourier associata è dunque una serie di soli coseni.