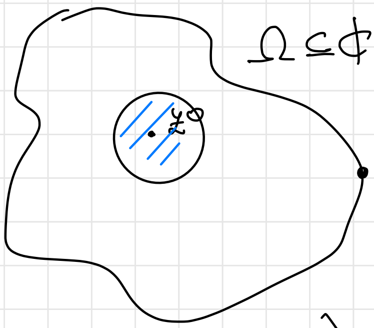
Funzioni analitiche in campo complesso

Def. $f:\Omega$ aperto* $\subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice ANALITICA su Ω se $\forall z^0 \in \Omega$, $\exists\ \mathcal{U}(z^0)$ tale che:

$$f(z)=\sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^k \qquad \forall z\in \mathcal{U}(z^0)$$



(* Ω aperto $:= \forall z^0 \in \Omega\ \exists\ \mathcal{U}(z^0) \subseteq \Omega$)

Serie di potenze in $\mathbb{C}$

variabile $\in \mathbb{C}$

$$\sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^k$$

coeff. $\in \mathbb{C}$ $\qquad$ $z_0 \in \mathbb{C}$

:= successione

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^{N} c_k (z-z_0)^k.$$

Vari tipi di convergenza:

- la serie conv. puntualmente in $z \in \mathbb{C}$ se $\exists \lim_{N \to +\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$.
- la serie conv. uniformemente in Ω a $S(z)$ se

$$\lim_{N \to +\infty} \sup_{z \in \Omega} |S_N(z) - S(z)| = 0.$$

- la serie conv. assolutamente in $z \in \mathbb{C}$ se converge

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| \, |z - z_0|^k$$

$$D := \{ z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge puntualmente in } z \}$$

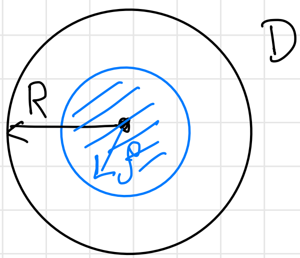
dominio di convergenza della serie

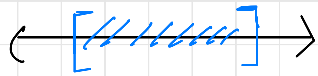
Proprietà

(1) $\operatorname{int}(D) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$ R:= raggio di convergenza

→ la serie converge assolutamente in int (D)

→ la serie converge uniformemente su $\{ |z - z_0| \leq \rho, \ \forall \rho < R \}$





(2) $R = \dfrac{1}{L}$ $\qquad L = \lim_{k\to+\infty}(\sup) \sqrt[k]{|c_k|}$

con la convenzione $\dfrac{1}{0} = +\infty, \quad \dfrac{1}{+\infty} = 0$

(3) La serie delle derivate n-esime

$$\sum_{k\geq 0} D^n\left(c_k(z-z_0)^k\right)$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

(4) Calcolo dei coeff. c_n:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$f'(z) = \sum_{k\geq 1} k c_k (z-z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z-z_0) + \ldots\ldots$$

$$f''(z) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, c_k (z-z_0)^{k-2}$$

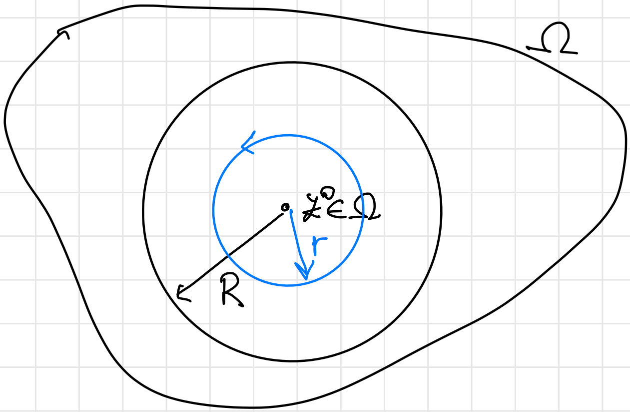
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\ldots\cdot(k-n+1)\, c_k(z-z_0)^{k-n}$$

$\Rightarrow f(z_0) = c_0, \quad f'(z_0) = c_1, \quad f''(z^0) = 2c_2 \quad \ldots$

$f^{(n)}(z^0) = n!\, c_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_k = \dfrac{f^{(k)}(z^0)}{k!}}$

Un altro modo di calcolare i coeff c_k

Sia f analitica in Ω, sia $z^0 \in \Omega$, $R :=$ raggio di conv.

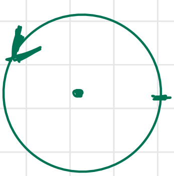


$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \qquad \forall z \text{ tale che } |z - z_0| < R.$$

Fissiamo $r \in (0, R)$, e fissiamo $k \geq 0$, calcoliamo

$$I_k := \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz.$$

$C_r(z^0) :=$ cerchio di centro $\overset{x_0 + i y_0}{\overset{\parallel}{z^0}}$ e raggio r
percorso 1 volta in senso antiorario
parametrizzato da:



$$r(t) = z^0 + r e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$= (x^0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t).$$

$$I_K = \int_{C_r(z^0)} \frac{\sum_{n \geq 0} c_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{K+1}} \, dz$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. per serie} \\ \text{(cv. uniforme)}}}{=} \sum_{n \geq 0} c_n \int_{C_r(z^0)} (z-z_0)^{n-K-1} \, dz, =$$

$$\left[\underline{\text{Es.}} \quad \int_{C_r(z^0)} (z-z_0)^m \, dz \underset{\substack{\uparrow \\ \forall m \in \mathbb{Z}}}{=} \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases} \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n-K-\cancel{1} = -\cancel{1} \\ \Leftrightarrow n = K.}}{=} c_K \cdot 2\pi i \Rightarrow c_K = \frac{I_K}{2\pi i} =$$

$$\boxed{c_K = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}} \, dz.}$$

$$\Downarrow$$

Formula di Cauchy per la derivata K-esima:

$$\left[f^{(K)}(z^0) = \frac{K!}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}} \, dz. \right]$$

In particolare, con $k=0$

$$\boxed{f(z^0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z^0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi}$$

(dove r è un qualsiasi raggio $\in (0, R)$).

Oss. $z \longmapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ è olomorfa su $D \setminus \{z^0\}$.

$\Rightarrow \int_{C_r(z^0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$ è indipendente

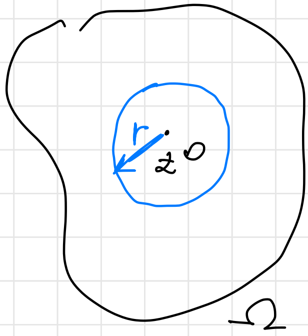
dalla scelta di $r \in (0, R)$. (Teo di Cauchy)

Per $k=0$, vale in realtà una proprietà più forte:

Formula di Cauchy. f olomorfa su $\Omega \supseteq \overline{B_r(z^0)}$

$\Rightarrow$ $\forall z \in B_r(z^0)$ vale:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z^0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$



$B_r(z^0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z^0| < r\}$.

Oss. $z \longmapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ $\left(z \longmapsto \dfrac{1}{1-z} \right)$

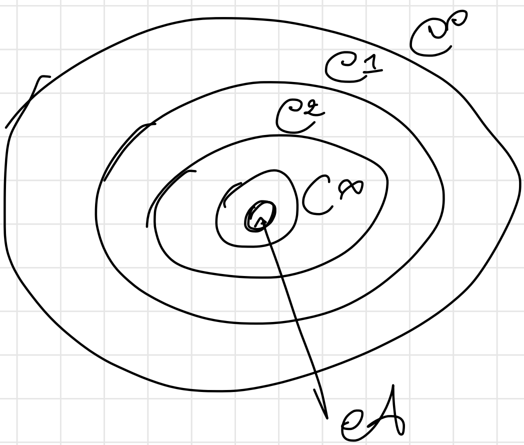
è una funzione analitica $\qquad \overset{\shortparallel}{\sum_n} z^n$

Teorema (di analiticità delle funzioni olomorfe)

f olomorfa in $\Omega \Rightarrow f$ analitica in Ω

Oss.

- $\not\Leftarrow$ l'implicazione inversa è OVVIA!
- Differenza rispetto al caso reale: in $\mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{A}(\mathbb{R}).$$

Esempi

- $$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- $$\cos z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\sinh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $$\cosh z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\limsup_n a_n = \max \left\{ \lim_n a_{k(n)} \ : \ a_{k(n)} \text{ estratta da } a_n \right\}$$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$(-1)^n$$