Equazioni differenziali - problemi svolti

1) Si consideri l'equazione
$$y' = \cos^2 y$$
Stabilire, in base alla teoria, che la soluzione di qualsiasi problema di Cauchy per questa equazione è unica, definita su tutto $\mathbb{R}$ e di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Trovare le soluzioni che soddisfano rispettivamente le condizioni
$$y(0) = 0, \qquad y(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad y(0) = \pi$$

2) In Fisica, una *linea di campo* (o linea di forza) di un campo vettoriale, è una curva ideale che in ogni punto è tangente al vettore del campo stesso. Nel caso del campo di velocità di un fluido, si parla di *linee di corrente*. Le linee di forza di un campo $\mathbf{F}$ non dipendono dall'intensità di $\mathbf{F}$, ma solo dalla sua direzione. Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è l'equazione parametrica di una linea di campo, vale la relazione
$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\,\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)$$
dove $\lambda(t)$ dipende dalla parametrizzazione. Nel caso di un *campo piano*
$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j}$$
avremo $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, dove $x(t)$, $y(t)$, soddisfano il sistema
$$\begin{cases} x' = \lambda\, F_1(x, y) \\ y' = \lambda\, F_2(x, y) \end{cases}$$
Dimostrare che nell'intorno di ogni punto in cui $F_1 \neq 0$ è possibile rappresentare una linea di campo nella forma $y = y(x)$, dove la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione
$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}$$
Determinare le linee di forza del campo
$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j}$$
e le linee di corrente del campo di velocità
$$\mathbf{v}(x, y) = \omega\,\mathbf{k} \wedge \big(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\big), \qquad \omega > 0$$

3) *Problema del paracadute.* Un corpo di massa m cade verticalmente sotto l'azione della forza peso e di una forza di attrito proporzionale al *quadrato* della velocità. Denotando con $y(t)$ l'altezza del corpo all'istante t (asse y orientato verso l'alto) abbiamo dalle equazioni di Newton:
$$my''(t) = -\big(mg - hy'(t)^2\big)$$
dove g è l'accelerazione di gravità e h è una costante positiva. Assumendo il corpo inizialmente fermo ad un'altezza $y_0 > 0$, si ha il *problema di Cauchy :*
$$y''(t) = -g + \frac{h}{m}y'(t)^2, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = 0$$
Determinare la legge oraria che descrive la caduta del corpo.

Soluzioni.

1) Il secondo membro dell'equazione è una funzione limitata e di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il piano (t, y). Valgono allora le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in grande su ogni intervallo dell'asse reale; le soluzioni hanno derivate di tutti gli ordini continue e quindi sono di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. L'equazione è a variabili separabili e ammette le *soluzioni costanti*

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

per ogni intero k. Le soluzioni non costanti sono date dalla relazione

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}\, dy = t + C$$

Integrando si trova l'equazione

$$\tan y = t + C$$

che definisce in forma implicita le soluzioni. Per la periodicità della tangente, si può risolvere l'equazione rispetto a y in ogni intervallo $-\pi/2 + k\pi < y < \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Le soluzioni che soddisfano le tre condizioni sono rispettivamente

$$\varphi_0(t) = \arctan t, \qquad \varphi_1(t) = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_2(t) = \arctan t + \pi$$

2) Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ le equazioni parametriche di una linea di forza e sia $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ un punto in cui $F_1(x_0, y_0) \neq 0$; abbiamo allora

$$x'(t_0) = \lambda F_1(x_0, y_0) \neq 0$$

Dunque, la funzione $t \mapsto x(t)$ è invertibile in un intorno del punto x_0 e la funzione inversa $t = t(x)$ ha derivata $t'(x) = 1/x'(t)$. La funzione composta $x \mapsto y(t(x))$ (che con abuso di notazione denotiamo ancora con y) soddisfa allora l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}$$

Nel caso del campo $\mathbf{F}$ abbiamo l'equazione lineare omogenea

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

L'integrale generale

$$y = Ce^{-2x}$$

definisce al variare di C la famiglia delle linee di campo.

Il campo di velocità ha l'espressione

$$\mathbf{v} = -\omega\, y\, \mathbf{i} + \omega\, x\, \mathbf{j}$$

Si ricava allora l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Integrando l'equazione (a variabili separabili) si trova che le linee di corrente sono le circonferenze

$$x^2 + y^2 = C, \qquad C > 0$$

3) Abbiamo un'equazione del secondo ordine in cui non compare esplicitamente la funzione incognita y. Ponendo $y' = v$ ci riduciamo all'equazione del primo ordine

$$v'(t) = -g + \frac{h}{m} v(t)^2$$

Introducendo il parametro $\nu_0 = \sqrt{mg/h}$ (che ha le dimensioni di una velocità) scriviamo l'equazione nella forma

$$v'(t) = \frac{g}{\nu_0^2}\big(v(t)^2 - \nu_0^2\big)$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili che ammette le *soluzioni costanti*

$$v = \nu_0, \qquad v = -\nu_0$$

Le altre soluzioni si ricavano dalla formula

$$\int \frac{dv}{(v^2 - \nu_0^2)} = \frac{g}{\nu_0^2}\, t + C_1$$

L'integrale al primo membro si può calcolare utilizzando la decomposizione

$$\frac{1}{(v^2 - \nu_0^2)} = \frac{1}{2\nu_0}\Big(\frac{1}{v - \nu_0} - \frac{1}{v + \nu_0}\Big)$$

Si ottiene allora la soluzione in forma implicita

$$\frac{1}{2\nu_0} \ln\left|\frac{v - \nu_0}{v + \nu_0}\right| = \frac{g}{\nu_0^2}\, t + C_1$$

ovvero

$$\frac{v - \nu_0}{v + \nu_0} = C \exp\Big(\frac{2g}{\nu_0} t\Big)$$

con C costante *arbitraria*. Tenendo conto della condizione iniziale $v(0) = y'(0) = 0$, dobbiamo porre $C = -1$. Risolvendo rispetto a v otteniamo allora

$$v(t) = \nu_0 \, \frac{1 - \exp\left(\frac{2g}{\nu_0} t\right)}{1 + \exp\left(\frac{2g}{\nu_0} t\right)} = -\nu_0 \tanh\left(\frac{g}{\nu_0} t\right)$$

Infine, integrando e imponendo la condizione $y(0) = y_0$, ricaviamo

$$y(t) = -\frac{\nu_0^2}{g} \ln\left[\cosh\left(\frac{g}{\nu_0} t\right)\right] + y_0$$

Osserviamo che per $t \to +\infty$ la velocità $v(t)$ tende al valore $-\nu_0$, che rappresenta quindi la *velocità limite* di caduta; il grafico della soluzione nel piano (t, y) ha come asintoto obliquo la retta $y = -\nu_0 t + y_0$. Per valori di t sufficientemente grandi il corpo tende a cadere di moto rettilineo uniforme con velocità proporzionale alla radice quadrata della massa. Utilizzando lo sviluppo

$$\cosh\left(\frac{g}{\nu_0} t\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\nu_0} t\right)^2 + o(t^2)$$

e lo sviluppo del logaritmo, verificare che per piccoli valori di t si ottiene

$$y(t) \approx -\frac{1}{2}\, g t^2 + y_0$$

ovvero la legge della caduta libera in assenza di attrito.