Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2014/2015
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Preappello di Metodi Analitici (2-2-15) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Calcolare il valore del seguente integrale (inteso come valor principale):

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 e^{ix}}{x^4 - 1}\, dx\,.$$

Mostrare in particolare che vale la disuguaglianza

$$\frac{2}{\pi} I > -\sin(1)\,.$$

Soluzione. La funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^2 e^{iz}}{z^4 - 1}$$

ha 4 poli semplici, posti in $z = \pm 1$ e $z = \pm i$: in particolare, due di essi sono sull'asse reale, uno nel semipiano $\{\mathrm{Im} z > 0\}$, e uno nel semipiano $\{\mathrm{Im} z < 0\}$.
Inoltre, f soddisfa la condizione di decadimento prevista per applicare il Lemma di Jordan.
Si ha quindi, per il teorema dei residui,

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) + \pi i \mathrm{Res}(f, 1) + \pi i \mathrm{Res}(f, -1)\,.$$

Il calcolo dei residui utilizzando la formula per i poli semplici fornisce

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \tfrac{z^2 e^{iz}}{(z+i)(z^2-1)} = \tfrac{e^{-1}}{4i} \\
\mathrm{Res}(f, 1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \tfrac{z^2 e^{iz}}{(z+1)(z^2+1)} = \tfrac{e^{i}}{4} \\
\mathrm{Res}(f, -1) &= \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} \tfrac{z^2 e^{iz}}{(z-1)(z^2+1)} = -\tfrac{e^{-i}}{4}
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-1} - \frac{\pi}{2} i \frac{e^{i} - e^{-i}}{2i} = \frac{\pi}{2}\Big(e^{-1} - \sin(1)\Big)\,,$$

da cui si ha in particolare

$$\frac{2}{\pi} I = e^{-1} - \sin(1) > -\sin(1)\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

Sia $T : \ell^2 \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T(\{x_n\}) := \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n} \,.$$

(i) Mostrare che T è lineare.

(ii) Mostrare che T è continuo.

(iii) Calcolare la norma di T.

Soluzione.

(i) È immediato verificare che

$$T(\{x_n\} + \{y_n\}) = T(\{x_n\}) + T(\{y_n\}) \,, \qquad T(\lambda\{x_n\}) = \lambda T(\{x_n\}) \,.$$

(ii) Posto $\overline{x}_n := \frac{1}{n} \in \ell^2$, e indicando con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare in ℓ^2, si ha, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|T(\{x_n\})| = |\langle\{x_n\}, \{\overline{x}_n\}\rangle| \leq \|\{x_n\}\|_{\ell^2}\|\{\overline{x}_n\}\|_{\ell^2} \,. \tag{1}$$

da cui T è continuo con $\|T\| \leq \|\{\overline{x}_n\}\|_{\ell^2}$.

(iii) Osserviamo che, prendendo $\{x_n\} = \{\overline{x}_n\}$ in (1), la disuguaglianza diventa un'uguaglianza. Pertanto si ha

$$\|T\| = \|\{\overline{x}_n\}\|_{\ell^2} = \Big(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \,.$$

L'ultima uguaglianza si può ottenere osservando che la funzione f ottenuta prolungando per periodicità la funzione x^2 sull'intervallo $(-\pi, \pi)$ è somma della sua serie di Fourier e pertanto calcolandone i coefficienti si deduce l'identità

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \,,$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \,.$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Enunciare l'identità di Parseval.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge la serie $\sum_k (a_k^2 + b_k^2)$, dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica definita su $[0, 2\pi)$ da

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{1+t}-1)^\alpha} & \text{if } t \neq 0 \\ 1 & \text{if } t = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati.

(ii) I valori di α richiesti sono quelli per i quali la funzione f appartiene a $L^2(0, 2\pi)$. Poiché per $t \to 0^+$ si ha

$$f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}\,,$$

deve essere $2\alpha < 1$, ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$.