Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dei Sistemi – A.A. 2012/2013
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
Secondo appello di Metodi Analitici (9-7-13) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3} + e^{z^2}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right),$$

se ne classifichino le singolarità (compresa quella all'infinito) e se ne calcolino i corrispondenti residui.
[Si ricorda che studiare la singolarità all'infinito di $f(z)$ significa, per definizione, studiare la singolarità $z = 0$ della funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$.]

Soluzione. La funzione f ha una sola singolarità in $z = 0$. Tale singolarità è essenziale perché f è il prodotto di una singolarità essenziale ($\cos(z^{-1})$) e un polo di ordine finito in $z = 0$ ($z^{-1} + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3} + e^{z^2}$). Come ricordato, studiare la singolarità all'infinito di f equivale a studiare la singolarità $z = 0$ della funzione

$$g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\left(z + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z^3} + e^{\frac{1}{z^2}}\right)\cos(z).$$

Ragionando come sopra, deduciamo che $z = 0$ è una singolarità essenziale anche per g (e quindi che anche $z = \infty$ è una singolarità essenziale per f).
Calcoliamo ora i residui. Cominciamo dal residuo in $z = 0$. Anzitutto, osserviamo che

$$\mathrm{Res}(f(z), 0) = \mathrm{Res}\left(\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right), 0\right);$$

infatti il termine $e^{z^2}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ è pari e quindi non dà contributo al residuo. Dato che

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k},$$

svolgendone il prodotto con la serie finita $\frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3}$ e calcolando il coefficiente che compare davanti al termine di ordine -1, otteniamo:

$$\mathrm{Res}(f(z), 0) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} = \frac{55}{72}.$$

Per quanto riguarda il residuo all'infinito si ragiona analogamente. Abbiamo:

$$\mathrm{Res}(f(z), \infty) = \mathrm{Res}(g(z), 0) = -\mathrm{Res}\left(\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{3z^5}\right)\cos(z), 0\right),$$

da cui

$$\mathrm{Res}(f(z), \infty) = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{72} = -\frac{55}{72}.$$

Si osservi che quest'ultimo risultato si poteva dedurre semplicemente ricordando che la somma di tutti i residui, compreso quello all'infinito, è nulla.

II. ANALISI FUNZIONALE.

Fissato il parametro $R > 0$, sia T_R l'operatore lineare che associa a una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $T_R f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$(T_R f)(x) = \frac{1}{R}\, f\left(\frac{x}{R}\right).$$

(i) Dimostrare che, per ogni $p \in [1, \infty]$, la norma di T_R come operatore da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$ è realizzata da una *qualsiasi* funzione $f \neq 0$ e vale esattamente $R^{\frac{1}{p}-1}$ (dove nel caso $p = \infty$ si intende $1/p = 0$).

(ii) Sia f una fissata funzione che appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = (T_n f)(x).$$

Utilizzando il punto (i), discutere la convergenza di $\{f_n\}$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

Soluzione.

(i) Dati $p \in [1, \infty)$, $f \neq 0$ appartenente a $L^p(\mathbb{R})$ e $R > 0$, abbiamo:

$$\|T_R f\|_p^p = \frac{1}{R^p} \int_{\mathbb{R}} |f|^p \left(\frac{x}{R}\right) \mathrm{d}x = R^{1-p} \int_{\mathbb{R}} |f|^p\,(y)\, \mathrm{d}y = R^{1-p}\, \|f\|_p^p\,,$$

da cui

$$\|T_R f\|_p = R^{\frac{1}{p}-1}\, \|f\|_p\,. \tag{1}$$

Per gestire il caso $p = \infty$ basta osservare che

$$\|f(x)\|_\infty = \left\| f\left(\frac{x}{R}\right)\right\|_\infty.$$

(ii) Fissato $p \in (1, \infty]$, usando la (1) ricaviamo:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \|T_n f\|_p = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\, \|f\|_p = 0\,.$$

Perciò $\{f_n\}$ converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in (1, \infty]$. Nel caso $p = 1$ abbiamo che

$$\|f_n\|_1 = \|f\|_1\,; \tag{2}$$

tuttavia,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\|f\|_\infty \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\,,$$

ovvero $\{f_n\}$ converge puntualmente a zero quasi ovunque. Quindi l'unico limite possibile in $L^1(\mathbb{R})$ per $\{f_n\}$ è zero, il che però contraddice la (2) (a meno che non si abbia $\|f\|_1 = 0$). Di conseguenza, $\{f_n\}$ *non* converge in $L^1(\mathbb{R})$ (salvo il caso banale in cui $f = 0$ quasi ovunque).

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

(i) Data $u \in L^1(\mathbb{R})$ e fissato il parametro $a > 0$, dimostrare l'uguaglianza

$$\mathcal{F}\left(u(a^{-1}x)\right)(\xi) = a\hat{u}(a\xi)\,.$$

(ii) Sfruttando il punto (i), calcolare la trasformata di Fourier della funzione 2^{-x^2}.

Soluzione.

(i) Per definizione di trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}\left(u(a^{-1}x)\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(a^{-1}x)\, e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Utilizzando il cambio di variabile $y = a^{-1}x$, otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}} u(a^{-1}x)\, e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = a \int_{\mathbb{R}} u(y)\, e^{-ia\xi y}\, \mathrm{d}y = a\hat{u}(a\xi)\,,$$

da cui la tesi.

(ii) È sufficiente osservare che

$$2^{-x^2} = e^{-(\log 2)x^2} = e^{-(\sqrt{\log 2}\, x)^2}\,.$$

Sfruttando quindi il punto (i) con la scelta $a^{-1} = \sqrt{\log 2}$ e il fatto che

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,,$$

ricaviamo

$$\mathcal{F}\left(2^{-x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\log 2}}\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{\sqrt{\log 2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\log 2}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\log 2}}\,.$$