Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E aperto in $\mathbb{R}^n$)

$$\underbrace{C_0^\infty(E)}_{\parallel} \text{ è un sottospazio DENSO in } L^p(E).$$

$$\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty \text{ e aventi supporto compatto in } E \}$$

Ovvero:

- $\forall f \in L^p(E)$ $\exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E)$ tale che

$$\| \varphi_n - f \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

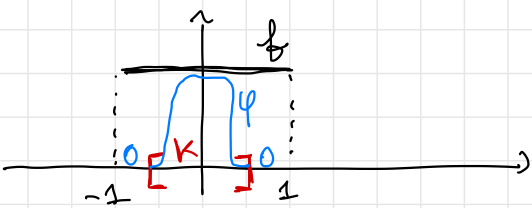
- $\forall f \in L^p(E)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in C_0^\infty(E)$ tale che

$$\| \varphi - f \|_{L^p} < \varepsilon$$

__Oss.__ Falso nel caso $p = +\infty$.

__Es.__ Basta prendere $f \in L^\infty(E)$, $f \equiv 1$, $E = (-1, 1)$

$$\nexists \varphi \in C_0^\infty(E) : \quad \| f - \varphi \|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$$



$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in (-1,1)} | f(x) - \varphi(x) | \geq 1$$

$$\parallel$$

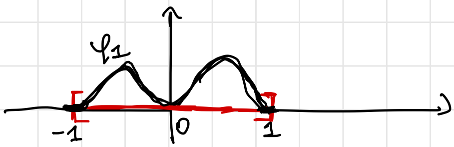
$$\| f - \varphi \|_{L^\infty(E)}$$

Def. Data $\varphi \in C^n(E)$ il **SUPPORTO** di φ è

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}} = \text{il più piccolo chiuso contenente } \{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}$$

(in particolare è un chiuso)

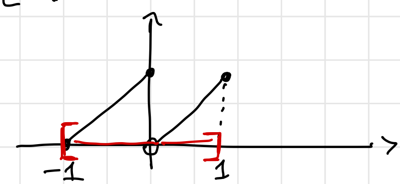
Esempi $E = \mathbb{R}$



$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} = (-1,0) \cup (0,1)$

$\mathrm{supp}(\varphi) = [-1, 1]$

$E = \mathbb{R}$



$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} = (-1, 1]$

$\mathrm{supp}(\varphi) = [-1, 1]$

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è **COMPATTO** se è limitato e chiuso.

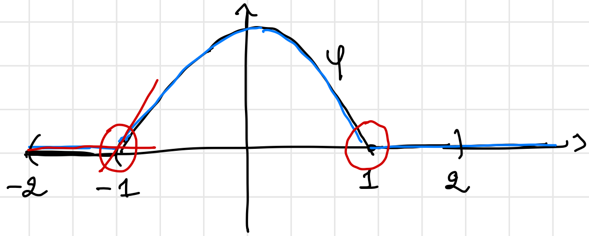
Def. $C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \to \mathbb{R}$ derivabili infinite volte tali che $\mathrm{supp}(\varphi)$ è un sottoinsieme compatto di $E\}$.

$\uparrow$ aperto di $\mathbb{R}^n$

Es. $\varphi_1 \notin C_0^\infty(-1,1)$. perché $\mathrm{supp}\,\varphi = [-1,1]$ $E = (-1,1)$
quindi $\mathrm{supp}\,\varphi$ è compatto ma non è un sottoinsieme di E.

$\varphi_1 \in C_0^\infty(-2,2)$ perché $\mathrm{supp}\,\varphi = [-1,1]$ $E = (-2,2)$.
è un sottoinsieme compatto di E.

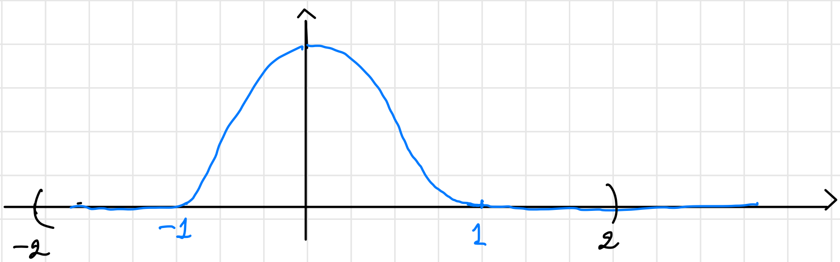
Es.



$\varphi \notin C_0^\infty(-2,2)$ $\qquad$ supp $\varphi = [-1,1]$ compatto $\subseteq (-2,2)$

Es.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [-1,1] \\ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & x \in (-1,1) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$



- φ è derivabile infinite volte in x^0, $\forall x^0 \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} = \overline{(-1,1)} = [-1,1]$

Quindi $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Oss. $\varphi \in C_0^\infty(-2,2)$

$\varphi \notin C_0^\infty(-1,1)$ $\qquad$ $[-1,1] \not\subseteq (-1,1)$.

Prodotto di convoluzione

Oss. $f, g \in L^1(E) \not\Rightarrow f \cdot g \in L^1(E)$

Es. $E = (0,1)$ $\quad f = g = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(E)$ ma $f \cdot g = \frac{1}{x} \notin L^1(0,1)$

Nel caso $E = \mathbb{R}$, si può definire un prodotto interno a $L^1(\mathbb{R})$:

Proposizione 1: Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto

$$\underbrace{f * g}_{\text{PRODOTTO DI CONVOLUZIONE TRA } f \text{ e } g}(x) := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

x: parametro

y: variabile di integrazione

(i) $f * g(x)$ esiste finito per q.o. $x \in \mathbb{R}$;
(ovvero per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}$)

(ii). $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

(iii) $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \; (<+\infty)$.

Dim. Consideriamo $H(x,y) := f(x-y)\, g(y)$.

A priori non sappiamo se $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$.

$\Rightarrow$ non possiamo applicare direttamente Fubini.

Quindi consideriamo $|H(x,y)| \geq 0$

e applichiamo Tonelli a $|H|$.

Verifichiamo che $|H|$ soddisfa ip. Tonelli:

- Integro prima in dx:

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x,y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx = |g(y)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\,dx}_{x-y=z}$$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)|\,dz = |g(y)| \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty$$

- Integro in dy.

$$\int_{\mathbb{R}_y} \left[\int_{\mathbb{R}_x} |H(x,y)|\,dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\, \|f\|_{L^1}\, dy$$

$$= \|f\|_{L^1} \cdot \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\,dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty .$$

Tonelli $\Rightarrow$ $|H| \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) \Rightarrow H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$

A qs. punto posso applicare Fubini a $H(x,y) = f(x-y)g(y)$

Fubini $\Rightarrow$ per q.o. x, $y \longmapsto H(x,y) = f(x-y)\,g(y)$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}_y)$ $\Rightarrow$ vale (i)

ossia il prodotto $f * g$ è <u>ben definito</u>

Dimostriamo (iii):

$\downarrow$

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} = \int_{\mathbb{R}_x} |f*g(x)|\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx \leq$$

$\uparrow$ maggiorazione del modulo

$$\leq \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)||g(y)|\, dy\, dx \leq$$

$\uparrow$ Fubini

$$\leq \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)|\, dx}_{= \|f\|_{L^1}}\, dy =$$

$$= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)|\, dy = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

$\blacksquare$

Oss.:

- vale la def (Prop. 1) anche su $\mathbb{R}^n$
- $f * g = g * f$ (tramite cambio variabile)
- le funzioni devono essere definite su tutto lo spazio.

- Estensione: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$

(i) $f * g(x)$ esiste per q.o. x

(ii) $f * g \in L^p(\mathbb{R})$

(iii) $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

$$H(x,y) = |f(x-y)|^p |g(y)|^p$$

Proposizione 2 Siano $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \left(\subseteq L^1(\mathbb{R})\right)$, e $g \in L^1(\mathbb{R})$

Allora:

(i) $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $(f*g)^{(k)} = f^{(k)} * g \quad \forall k$

Idea dim.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$(f*g)'(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f'(x-y)\, g(y)\, dy$$

Oss. •) Vale con k al posto di ∞.

•) In generale nelle ip. della Prop. 2.

$f * g$ non è a supporto compatto

Idea della dim. del teo di approssimazione di funzioni L^p con regolari

Prendiamo $p=1$, $n=1$.

Data $f\in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo costruire $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \longrightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Prendiamo

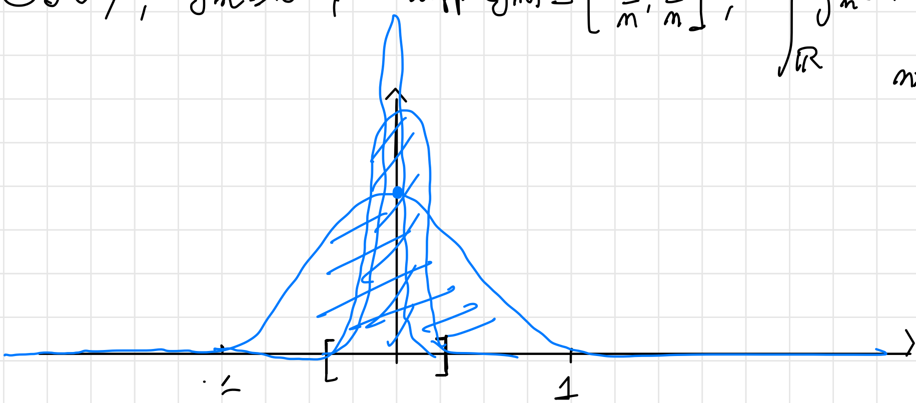
$$\varphi_n := f * \rho_n$$

SUCCESSIONE DI MOLLIFICATORI

$\rho_n(x) = n\,\rho(nx)$ dove ρ è NUCLEO DI CONVOLUZIONE.

- $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho\geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho)\subseteq[-1,1]$, $\int_{\mathbb{R}}\rho(x)\,dx=1$.
- $\rho_n\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n\geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho_n)\subseteq\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$, $\int_{\mathbb{R}}\rho_n(x)\,dx=1$

$nx=y$

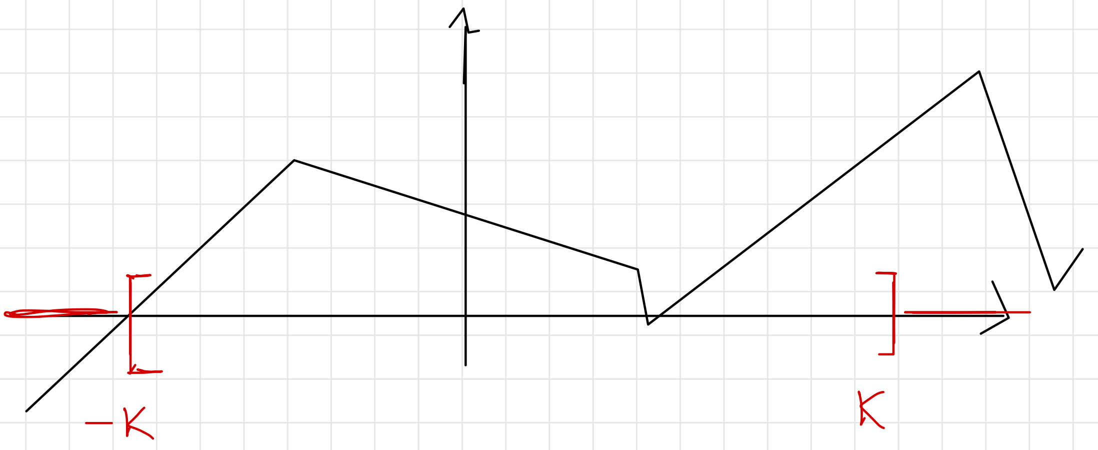


Si può dim. che $\varphi_n \longrightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

successione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$.

Oss. Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "troncare" f, cioè considerare

$$f_K = f \cdot \chi_{[-K,K]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-K,K] \\ 0 & \text{se } x \notin [-K,K]. \end{cases}$$



Approssimo f_K per convoluzione:

$$f_K * \rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty}$$

$$f_K$$

$$\varphi_n = f_{K(n)} * \rho_n \xrightarrow{L^1} f$$