Equazioni differenziali 3

Sistemi di equazioni differenziali

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ e denotiamo con $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ una funzione incognita della variabile reale t a valori in $\mathbb{R}^n$. L'equazione (in $\mathbb{R}^n$)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)$$

si dice *sistema di equazioni differenziali del primo ordine* in forma normale.

Una funzione $\underline{\Phi} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è soluzione (curva integrale) del sistema se

$$\underline{\Phi}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \underline{\Phi}(t)\big)\,, \qquad \forall\ t \in I\,.$$

Se $\mathbf{f}$ non dipende da t, i sistemi del tipo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}\big(\mathbf{y}\big)$$

si dicono *sistemi autonomi*.

Nei casi

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,,$$

con $A(t)$ matrice nxn e $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ assegnate, il sistema si dice *lineare*.

Il *problema di Cauchy per i sistemi* consiste nel determinare la soluzione che passa per un punto dato $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.

Esempio ($n = 2$)

Il generico sistema di due equazioni differenziali nelle due funzioni incognite $y_1(t)$, $y_2(t)$, si scrive:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \qquad (t, y_1, y_2) \in D \subseteq \mathbb{R}^3 \,.$$

Il problema di Cauchy è: dati $(t_0, y_1^0, y_2^0) \in D$, determinare $y_1(t)$, $y_2(t)$, tali che $y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t) = y_2^0$.

Un'equazione differenziale di ordine n si può sempre ridurre ad un sistema equivalente di n equazioni del primo ordine. Per esempio, data l'equazione

$$y'' = f(t, y, y')\,,$$

poniamo $y_1 = y$, $y_2 = y'$.
Abbiamo allora il sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = f(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

In questo caso, il problema di Cauchy equivale ad assegnare in t_0 i valori di y e di y'.

Teorema (Esistenza e unicità locale per i sistemi)

Sia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto. Supponiamo che $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\partial_{y_j}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $j = 1, 2, ..., n$, siano continue in D e sia $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D$.
Esiste allora un intorno I di t_0 tale che il problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \end{cases}$$

ammette una soluzione $\underline{\Phi}$ definita in I. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con $\underline{\Phi}$ nell'intervallo comune di definizione. $\diamond$

Teorema (Esistenza e unicità globale per i sistemi).

Sia $S := (a, b) \times \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\mathbf{f}$ verifichi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale in $\bar{S}$.
Esistano inoltre due numeri positivi h, k tali che

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \le h + k|\mathbf{y}| \qquad \forall\ (t, \mathbf{y}) \in \bar{S}\,.$$

Allora ogni soluzione dell'equazione $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ con valori iniziali $(t_0, \mathbf{y}^0) \in S$ è definita su tutto $[a, b]$.

Osservazioni.

i) Il teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni del problema di Cauchy per un'*equazione del secondo ordine*

$$y'' = f(t, y, y') \qquad y(t_0) = y_0\,, \;\; y'(t_0) = y_1\,,$$

segue dal teorema per i sistemi considerando il sistema equivalente di due equazioni. Analoghe considerazioni valgono per le equazioni di ordine n.

ii) Si dimostra che le ipotesi del teorema di esistenza globale sono verificate dai *sistemi lineari con coefficienti continui*.

Per esempio, il (generico) sistema lineare di due equazioni:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

con $a_{ij}(t)$, $b_i(t) \in \mathcal{C}^0([a, b])$ per ogni $i, j = 1, 2$, ha soluzioni definite in tutto $[a, b]$.

Ricavare dalle due osservazioni il teorema di esistenza (globale) per le equazioni lineari del secondo ordine.

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Sono gli esempi più semplici di *sistemi autonomi*. Se $n = 2$, si utilizza di solito la notazione $\big(x(t), y(t)\big)$ per la funzione incognita.
Il generico sistema lineare omogeneo in due dimensioni si scrive allora

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

con a, b, c, d, numeri reali.

Le soluzioni di questi sistemi sono definite su tutto $\mathbb{R}$ (per il teorema di esistenza globale), e definiscono curve regolari con sostegno (traiettoria) nel piano (x, y) (piano delle fasi).
Esiste sempre sempre la soluzione costante $\big(x(t), y(t)\big) = (0, 0)$, che è l'unica soluzione con dati iniziali nulli. La sua traiettoria coincide con l'origine che prende il nome di *punto di equilibrio* del sistema.

(Oltre ai punti di equilibrio, le sole traiettorie possibili per le soluzioni di un sistema autonomo sono curve semplici o curve chiuse).

Anche in questo caso, dalla linearità e dal teorema di esistenza e unicità segue che *l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione* 2.

Per trovare l'integrale generale si può usare *metodo di eliminazione*:
Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = c\,x + d\,y, \end{cases}$$

si deriva la prima equazione

$$x'' = a\,x' + b\,y'\,,$$

e si sostituisce y' dato dalla seconda:

$$x'' = a\,x' + b(c\,x + d\,y) = a\,x' + bc\,x + bd\,y\,.$$

Eliminando y usando ancora la prima, si ottiene

$$x'' = a\,x' + bc\,x + d\,x' - ad\,x$$

ovvero

$$x'' - (a+d)\,x' + (ad - bc)\,x = 0\,.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad - bc) = 0\,,$$

si ottengono le soluzioni indipendenti e poi l'integrale generale per $x(t)$; infine, si determina la componente $y(t)$ dall'equazione $y = (x' - a\,x)/b$.

Esempi.
Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

Soluzione:

$$x'' = x' + 2y' = x' - 2x + 8y$$

Sostituendo $y = (x' - x)/2$,

$$x'' - 5x' + 6x = 0\,.$$

Le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Abbiamo quindi

$$x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}\,, \qquad c_1\,,\, c_2 \ \in \mathbb{R}\,,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{1}{2} c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{3t}. \quad \diamond$$

<u>Esercizio</u>

Dimostrare che l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

si scrive

$$x(t) = e^{-t}\big(c_1\, \cos t + c_2\, \sin t\big)\,,$$

$$y(t) = e^{-t}\big(-c_1\, \sin t + c_2\, \cos t\big)\,.$$

Disegnare le traiettorie nel piano delle fasi evidenziando il verso di percorrenza.

Osservazione

L'equazione caratteristica che si ricava dal metodo di eliminazione è l'equazione agli autovalori per la matrice A dei coefficienti del sistema:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0\,.$$

Infatti, se λ è un autovalore di A e $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ è un corrisponente autovettore, la funzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda\, t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

è una soluzione dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \lambda\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A\, e^{\lambda\, t}\mathbf{h} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\,.$$

L'osservazione è alla base di un metodo generale per risolvere i sistemi (di ordine n qualsiasi) a coefficienti costanti.

Esempio

Torniamo al sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Come abbiamo visto, l'equazione agli autovalori è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, ed ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
Gli autovettori si trovano risolvendo

$$(A - 2\,I)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - 3\,I)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dunque, $h_1 = 2h_2$ e $k_1 = k_2$; nel primo caso gli autovettori sono diretti come $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, nel secondo caso come $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'integrale generale è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stabilità dell'origine

Si vede facilmente che se $\det A \neq 0$, l'origine $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio (soluzione costante) del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si dice che l'origine è un punto di equilibrio:

- *asintoticamente stabile* se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0,
- *stabile* se gli autovalori di A hanno parte reale $= 0$,
- *instabile* negli altri casi.

Sia $\Phi(t)$ una soluzione passante per un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ del piano.
Se l'origine è asintoticamente stabile, si ha *sempre* $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = (0,0)$;
se l'origine è stabile, ma non asintoticamente, il punto $\Phi(t)$ percorre una traiettoria (orbita) chiusa che circonda l'origine.

In generale, si fa riferimento a queste proprietà per definire il *concetto di stabilità* di un punto di equilibrio di un sistema autonomo qualsiasi.

Esempi

L'origine è instabile per il sistema di p. 8 ed è asintoticamente stabile per quello di p. 9.

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$$

ha autovalori $\pm 2i$, perciò l'origine è stabile. Le traiettorie sono ellissi che girano intorno all'origine.

Esercizio

Discutere la stabilità dell'origine per i sistemi

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - 2y \end{cases}$$