Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 04/11/2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 8)

(a) Risolvere, nel campo complesso, la disuguaglianza $|\mathrm{Re}\, w| \geq |w|$;

(b) Risolvere, nel campo complesso, la disuguaglianza $|\mathrm{Re}\,[(z+1)(z-3)]| \geq |(z+1)(z-3)|$;

(c) Sia $A \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni trovate al punto (b). Stabilire se l'insieme $B := \{e^{iz}, z \in A\}$ è limitato, cioè se $\exists K > 0$ t.c. $|z| \leq k \ \forall z \in B$.

(d) In generale, dato $A \subset \mathbb{C}$ *generico*, caratterizzare gli insiemi A tali che l'insieme $B := \{e^{iz}, z \in A\}$ sia limitato.

Soluzione.

(a) Sia $w = a+ib$ deve allora valere $|x| \geq \sqrt{a^2+b^2}$, cioè $a^2 \geq a^2+b^2$, cioè $b = 0$. Dunque la disuguaglianza richiesta vale solo se w è reale.

(b) Sia $z = x+iy$. Allora $\mathrm{Im}\,[(z+1)(z-3)] = \mathrm{Im}\,[(x+1+iy)(x-3+iy)] = y(x-3)+(x+1)y = 2y(x-1) = 0$ se e solo se $y = 0$ oppure $x = 1$. Dunque la disuguaglianza richiesta è soddisfatta se z è reale oppure $z = 1+iy$, $y \in \mathbb{R}$.

(c) Se $z = x+iy$ allora $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$, quindi $|e^{iz}| = e^{-y}$. Ne segue che B non è limitato dato che A contiene la retta $z = 1+iy$, $y \in \mathbb{R}$.

(d) Dall'uguaglianza $|e^{iz}| = e^{-y}$ sopra notata segue che condizione necessaria e sufficiente affinché B sia limitato è che l'insieme reale $C := \{t = \mathrm{Im}\, z, z \in A\}$ sia limitato dal basso.

2. (punti 12) Sia α un parametro reale e sia

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} -\alpha^2-1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -2 & \alpha \\ 1 & \alpha & -\alpha^2-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base per il nucleo di A_α .

(b) Stabilire per quale valore del parametro α la retta di equazione $3x = 2y = 6z$ è contenuta nel sottospazio $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$.

(c) Sia $\boldsymbol{w}_\alpha := (1, \alpha, 1)$. Verificare che A_α è la matrice associata alla mappa lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_\alpha) \times \boldsymbol{w}_\alpha$, $v \in \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

(a) La matrice A_α presenta minori di ordine due non nulli, ad esempio quello formato dalle prime due colonne dalle ultime due righe. Inoltre: $\det A_\alpha = 0$. Pertanto il rango di A_α vale due $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, dunque il nucleo è monodimensionale. Per determinare una base del nucleo si risolve il sistema omogeneo $A_\alpha \boldsymbol{v} = 0$. Omettendo la prima riga (ridondante) e scambiando la seconda riga con la terza, si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha^2-1 \\ \alpha & -2 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II riga=(} \alpha \text{ I-II)/ } (\alpha^2+2)]{} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha^2-1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Da cui $y = \alpha z$ e $x = z$. Scegliendo $z = t$ come parametro libero, si ha:

$$\mathrm{Ker}\,(A_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, è possibile scegliere il vettore $\boldsymbol{w}_\alpha$ come base di $\ker\,(A_\alpha)$.

(b) Per base di $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$ possiamo scegliere una qualunque coppia di vettori colonna della matrice. La retta $3x = 2y = 6z$ passa per l'origine, e ha vettore direzione $(2, 3, 1)^t$. Essendo tale retta un sottospazio, essa è contenuta nell'immagine di A_α se:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ -2 & \alpha & 3 \\ \alpha & -\alpha^2-1 & 1 \end{pmatrix} = 3(\alpha^2+2)(\alpha+1) = 0,$$

dunque solo se $\alpha = -1$.

In alternativa, si poteva determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$ che risulta essere $x + \alpha y + z = 0$, quindi imporre che un punto qualsiasi della retta diverso dall'origine (ad esempio il punto $(2, 3, 1)$) appartenga a tale piano.

(c) Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_\alpha = \begin{pmatrix} y - \alpha z \\ -x + z \\ \alpha x - y \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$\begin{pmatrix} y - \alpha z \\ -x + z \\ \alpha x - y \end{pmatrix} \times \boldsymbol{w}_\alpha = \begin{pmatrix} -(\alpha^2+1)x + \alpha y + z \\ \alpha x - 2y + \alpha z \\ x + \alpha y - (\alpha^2+1)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2-1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -2 & \alpha \\ 1 & \alpha & -\alpha^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. (punti 12) Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 1 & h \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ h-2 & 0 & 4 & h \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

(a) Verificare che $\lambda = 3$ è autovalore di A per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(b) Stabilire per quale valore di h la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$ è due.

(c) Per tale valore di h stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) Si consideri la matrice $A_h - 3\mathbb{I}$. Essa ha due righe identiche, di conseguenza per ogni valore di h il sistema omogeneo associato ammette soluzioni non banali, che sono per costruzione gli autovettori relativi a $\lambda = 3$.

(b) La moltiplicità geometrica dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$ è due solo se

$$\operatorname{rk}(A_h - 3\mathbb{I}) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ h-2 & 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Si noti che l'ultima matrice scritta ha il minore di ordine due formato dalle colonne centrali, dalla prima e dalla seconda riga, non nulla. I determinanti degli orlati di ordine tre sono:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ h-2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1-h, \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1-h.$$

Entrambi si annullano solo per $h = 1$. Quindi per tale valore di h l'autospazio è bidimensionale.

(c) Sia $h = 1$. L'equazione agli autovalori diventa:

$$\det(A_1 - \lambda\mathbb{I}) = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2,$$

da cui: $\operatorname{Sp}(A_h) = \{2^2, 3^2\}$.
Si è già detto che l'autospazio relativo a $\lambda = 3$ è bidimensionale.
Sia $\lambda = 2$. Occorre determinare il rango dell'operatore $\det(A_1 - 2\mathbb{I})$. Si ha:

$$\operatorname{rk}(A_1 - 2\mathbb{I}) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Infatti la terza colonna risulta essere la somma delle prime due.
Entrambi gli autovalori della matrice A_1 hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, quindi la matrice è diagonalizzabile.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 04/11/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 8)

(a) Risolvere, nel campo complesso, la disuguaglianza $|\mathrm{Re}\, w| \geq |w|$;

(b) Risolvere, nel campo complesso, la disuguaglianza $|\mathrm{Re}\,[(z+3)(z-1)]| \geq |(z+3)(z-1)|$;

(c) Sia $A \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni trovate al punto (b). Stabilire se l'insieme $B := \{e^{-iz}, z \in A\}$ è limitato, cioè se $\exists K > 0$ t.c. $|z| \leq k\ \forall z \in B$.

(d) In generale, dato $A \subset \mathbb{C}$ *generico*, caratterizzare gli insiemi A tali che l'insieme $B := \{e^{-iz}, z \in A\}$ sia limitato.

Soluzione.

(a) Sia $w = a+ib$ deve allora valere $|x| \geq \sqrt{a^2+b^2}$, cioè $a^2 \geq a^2+b^2$, cioè $b = 0$. Dunque la disuguaglianza richiesta vale solo se w è reale.

(b) Sia $z = x+iy$. Allora $\mathrm{Im}\,[(z+3)(z-1)] = \mathrm{Im}\,[(x+1+iy)(x-3+iy)] = y(x-1)+(x+3)y = 2y(x+1) = 0$ se e solo se $y = 0$ oppure $x = -1$. Dunque la disuguaglianza richiesta è soddisfatta se z è reale oppure $z = -1+iy$, $y \in \mathbb{R}$.

(c) Se $z = x+iy$ allora $e^{-iz} = e^y e^{-ix}$, quindi $|e^{-iz}| = e^y$. Ne segue che B non è limitato dato che A contiene la retta $z = -1+iy$, $y \in \mathbb{R}$.

(d) Dall'uguaglianza $|e^{-iz}| = e^y$ sopra notata segue che condizione necessaria e sufficiente affinché B sia limitato è che l'insieme reale $C := \{t = \mathrm{Im}\, z, z \in A\}$ sia limitato dall'alto.

2. (punti 12) Sia α un parametro reale e sia

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha^2+1 & -1 \\ \alpha & -1 & \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base per il nucleo di A_α .

(b) Stabilire per quale valore del parametro α la retta di equazione $2x = 3y = 6z$ è contenuta nel sottospazio $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$.

(c) Sia $\boldsymbol{w}_\alpha := (-\alpha, 1, 1)$. Verificare che A_α è la matrice associata alla mappa lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_\alpha \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_\alpha)$, $v \in \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

(a) La matrice A_α presenta minori di ordine due non nulli, ad esempio quello formato dalle prime due colonne, dalla prima e dall'ultima riga. Inoltre: $\det A_\alpha = 0$. Pertanto il rango di A_α vale due $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, dunque il nucleo è monodimensionale. Per determinare una base del nucleo si risolve il sistema omogeneo $A_\alpha \boldsymbol{v} = 0$. Omettendo la terza riga (ridondante), si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha^2+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II riga}=(2\text{II} -\alpha\ \text{I})/\ (\alpha^2+2)]{} \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da cui $y = z$ e $x = -\alpha z$. Scegliendo $z = t$ come parametro libero, si ha:

$$\mathrm{Ker}\,(A_\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, è possibile scegliere il vettore $\boldsymbol{w}_\alpha$ come base di $\ker(A_\alpha)$.

(b) Per base di $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$ possiamo scegliere una qualunque coppia di vettori colonna della matrice.
La retta $2x = 3y = 6z$ passa per l'origine, e ha vettore direzione $(3, 2, 1)^t$. Essendo tale retta un sottospazio, essa è contenuta nell'immagine di A_α se:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ \alpha & \alpha^2+1 & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3(\alpha^2+2)(\alpha-1) = 0,$$

dunque solo se $\alpha = 1$.
In alternativa, si poteva determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathrm{Im}\,(A_\alpha)$ che risulta essere $-\alpha x + y + z = 0$, quindi imporre che un punto qualsiasi della retta diverso dall'origine (ad esempio il punto $(3, 2, 1)$) appartenga a tale piano.

(c) Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}_\alpha = \begin{pmatrix} y - z \\ -x - \alpha z \\ x + \alpha y \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$\boldsymbol{w}_\alpha \times \begin{pmatrix} y - z \\ -x - \alpha z \\ x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \alpha y + \alpha z \\ \alpha x + (\alpha^2+1)y - z \\ \alpha x - y + (\alpha^2+1)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha^2+1 & -1 \\ \alpha & -1 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. (punti 12) Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ h-1 & 4 & 0 & h-3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ h-1 & 1 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Verificare che $\lambda = 3$ è autovalore di A per ogni $h \in \mathbb{R}$.
- Stabilire per quale valore di h la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$ è due.
- Per tale valore di h stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) Si consideri la matrice $A_h - 3\mathbb{I}$. Essa ha due righe identiche, di conseguenza per ogni valore di h il sistema omogeneo associato ammette soluzioni non banali ovvero gli autovettori relativi a $\lambda = 3$.

(b) La moltiplicità geometrica dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 3$ è due solo se

$$\mathrm{rk}\,(A_h - 3\mathbb{I}) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ h-1 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Si noti che l'ultima matrice scritta ha il minore di ordine due formato dalle colonne centrali, dalla seconda e dalla terza riga, non nulla. I determinanti degli orlati di ordine tre sono:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2-h, \qquad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h-3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2-h.$$

Entrambi si annullano solo per $h = 2$. Quindi per tale valore di h l'autospazio è bidimensionale.

(c) Sia $h = 2$. L'equazione agli autovalori diventa:

$$\det(A_2 - \lambda\mathbb{I}) = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2,$$

da cui: $\mathrm{Sp}\,(A_h) = \{2^2, 3^2\}$.

Si è già detto che l'autospazio relativo a $\lambda = 3$ è bidimensionale.

Sia $\lambda = 2$. Occorre determinare il rango dell'operatore $\det(A_2 - 2\mathbb{I})$. Si ha:

$$\mathrm{rk}\,(A_2 - 2\mathbb{I}) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Infatti la terza riga risulta essere l'opposto della prima ela quarta è la somma tra la prima e la seconda. Entrambi gli autovalori della matrice A_2 hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, quindi la matrice è diagonalizzabile.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 20/1/2020**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Sia

$$f_\alpha(x) = \sqrt{x^4 - \alpha x^3} + (x^3 - x^2)\left[\frac{\alpha}{x^2} - \sin\left(\frac{x+2}{x^2}\right)\right].$$

Stabilire se esistono valori del parametro reale α tali che $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)$ esista finito, e in caso affermativo calcolare tale limite. Successivamente stabilire se, al variare del parametro reale α, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{A} \frac{1}{x f_\alpha(x)}\, \mathrm{d}x$$

esiste finito (dove A è negativo e sufficientemente grande in valore assoluto).

Soluzione. Si ha, per $x \to -\infty$, notando che $\frac{x+2}{x^2} \to 0$ in tale limite e, inoltre, che sempre in tale limite vale $\frac{x+2}{x^2} \sim \frac{1}{x}$:

$$\sqrt{x^4 - \alpha x^3} = x^2\sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} = x^2\left[1 - \frac{\alpha}{2x} - \frac{\alpha^2}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x^2 - \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{8} + o(1);$$

$$\begin{aligned}(x^3 - x^2)\left[\frac{\alpha}{x^2} - \sin\left(\frac{x+2}{x^2}\right)\right] &= (x^3 - x^2)\left[\frac{\alpha}{x^2} - \frac{x+2}{x^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{x+2}{x^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\ &= (x^3 - x^2)\left[-\frac{1}{x} + \frac{\alpha-2}{x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\ &= -x^2 + (\alpha-2)x + \frac{1}{6} + x + 2 - \alpha + o(1)\\ &= -x^2 + (\alpha-1)x - \alpha + \frac{13}{6} + o(1).\end{aligned}$$

Dunque ne segue che:

$$\begin{aligned}f_\alpha(x) &= x^2 - \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{8} - x^2 + (\alpha-1)x - \alpha + \frac{13}{6} + o(1)\\ &= \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)x - \frac{\alpha^2}{8} - \alpha + \frac{13}{6} + o(1).\end{aligned}$$

Dunque il limite di f_α è finito se e solo se $\alpha = 2$. In tal caso i calcoli precedenti mostrano che il limite cercato è $-\frac{\alpha^2}{8} - \alpha + \frac{13}{6}$, che per $\alpha = 2$ vale -1/3.

I calcoli precedenti mostrano inoltre che, sempre per $x \to +\infty$:

$$\frac{1}{x f_\alpha(x)} \sim \begin{cases} -\frac{3}{x} & \text{se } \alpha = 2 \\ \frac{2}{(\alpha-2)x^2} & \text{se } \alpha \neq 2. \end{cases}$$

Ciò mostra in primo luogo che la funzione ha segno costante all'infinito, dunque il criterio del confronto asintotico è applicabile. Ne segue inoltre che l'integrale cercato esiste se e solo se $\alpha \neq 2$.

2. (punti 12) Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - 3x.$$

Soluzione. La funzione è definita per gli x per i quali l'argomento della radice è non negativo, dunque se $x \le -1$ e se $x \ge 0$. Vale $f(-1) = 3, f(0) = 0$. La funzione è chiaramente strettamente positiva per $x \le -1$, mentre per $x \ge 0$ f è positiva se e solo se $\sqrt{x^2+x} > 3x$, disequazione che è verificata per quegli $x \ge 0$ tali che $8x^2 - x < 0$, cioè per $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$. La funzione si annulla in $x = 1/8$, è negativa per $x > \frac{1}{8}$.

Per quanto riguarda i limiti di f per $x \to \pm\infty$, notiamo che vale, appunto per $x \to \pm\infty$:
$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - 3x = |x|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 3x = |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 3x.$$

Quindi:
$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{2} - 3x + o(1) = -2x + \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty \\ f(x) &= -x - \frac{1}{2} - 3x + o(1) = -4x - \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \to -\infty. \end{aligned}$$

Dunque non solo vale $f(x) \to \mp\infty$ se $x \pm \infty$, ma abbiamo anche mostrato che la retta $y = -2x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e che la retta $y = -4x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

La funzione è derivabile per $x < -1$, $x > 0$. La derivata prima vale, per tali valori di x,
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 3.$$

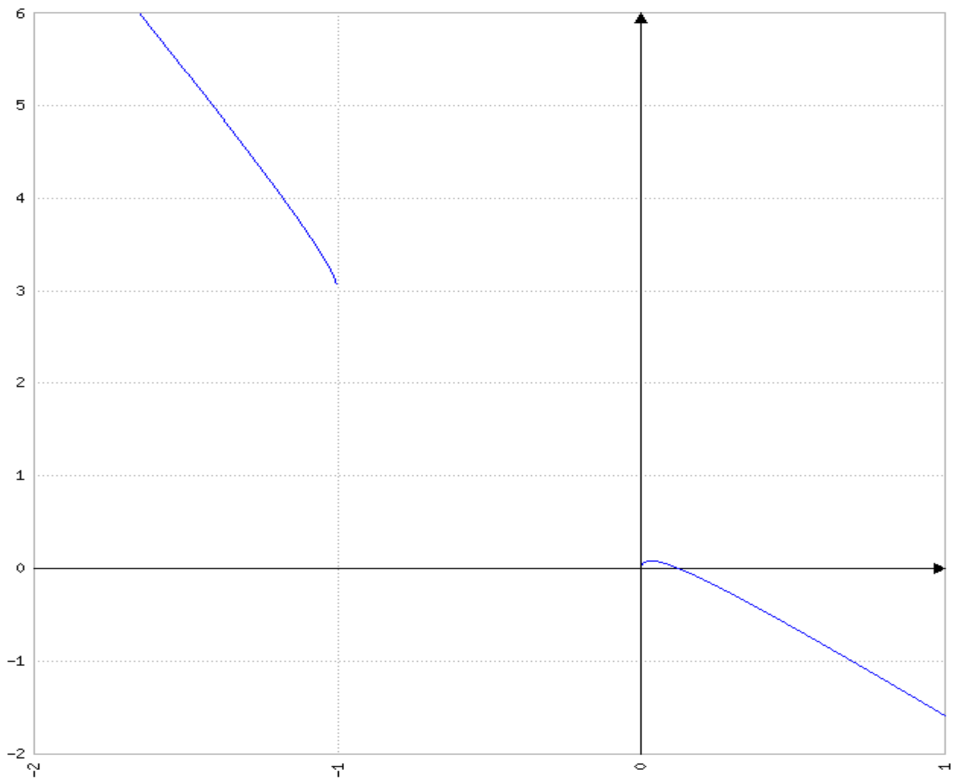
Si noti in primo luogo che
$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

La tangente al grafico di f tende dunque a diventare verticale in tali limiti. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $6\sqrt{x^2+x} < 1 + 2x$. Tale disequazione è evidentemente sempre falsa per $x < -1$, mentre per $x > 0$ equivale alla disequazione $32x^2 + 32x - 1 < 0$. Gli zeri del polinomio di secondo grado appena scritto sono dati da
$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{(16)^2 + 32}}{32} = \frac{-16 \pm \sqrt{288}}{32} = \frac{-16 \pm 12\sqrt{2}}{32} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\sqrt{2}.$$

Solo la radice $x_1 := -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}$ è maggiore di zero (come segue dal fatto che $-16 + \sqrt{(16)^2 + 32} > 0$). Si ha dunque $f'(x) < 0$ per $x < -1$ e per $x > x_1$, dunque f è decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f'(x) > 0$ per $x \in (0, x_1)$, dunque f è crescente in tale intervallo. Il punto $x = x_1$ è quindi punto di massimo relativo. Si vede facilmente che, come deve peraltro essere per coerenza coi limiti della funzione, $1/8 > x_1$ (infatti tale disequazione corrisponde, data l'espressione di x_1 e con calcoli elementari, alla disequazione $3\sqrt{2} < 5$, evidentemente vera). Si noti inoltre che i punti $x = 0$, $x = -1$, in cui f non è derivabile, sono punti di minimo relativo per f. Dati i limiti di f per $x \to \pm\infty$ è immediato notare che non vi sono estremi assoluti di f.

Calcoliamo infine, sempre per $x > 1$ e per $x < 0$, la derivata seconda di f. Calcoli elementari mostrano che, per tali x, vale:
$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dunque la derivata seconda è ovunque negativa ove definita. Ne segue che f è concava separatamente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$ (ovviamente anche, separatamente, in $(-\infty, -1]$ e in $[0, +\infty)$). In conclusione il grafico di f è il seguente:


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1

3. (punti 10) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})}.$$

Successivamente dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x (2-\sin^3 t) f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Soluzione. Poniamo $x^{1/6} = t$, cosicché $x^{1/3} = t^2$, $x^{1/2} = t^3$ e $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$. Vale allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &= 6\int \frac{t^5}{t^2(1+t^3)}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= 6t - 6\int \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Basta dunque calcolare l'ultimo integrale scritto. Il polinomio t^3+1 ha chiaramente la radice $t=-1$, e la regola di Ruffini mostra allora che $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$. Osserviamo che il polinomio di secondo grado t^2-t+1 non ha radici reali. Scomponendo in fratti semplici si ottiene allora:

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{3(t+1)} + \frac{2-t}{3(t^2-t+1)}.$$

Occorre quindi calcolare

$$\begin{aligned}\int \frac{2-t}{3(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{3(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int \frac{1}{3(t^2-t+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + c,\end{aligned}$$

dove $c\in\mathbb{R}$ è arbitraria (si noti che $t^2-t+1>0$ per ogni t, dunque non è necessario il modulo nel logaritmo). Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t &= \int \left[\frac{1}{3(t+1)} + \frac{2-t}{3(t^2-t+1)}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\log|t+1| - \frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + c\end{aligned}$$

e, ritornando alla variabile originaria:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &= 6t - 6\int \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t \\ &= 6t - 2\log|t+1| + \log(t^2-t+1) - 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + c \\ &= 6x^{1/6} - 2\log(x^{1/6}+1) + \log(x^{1/3}-x^{1/6}+1) - 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2x^{1/6}-1}{\sqrt{3}}\right] + c,\end{aligned}$$

dove si è notato che $x^{1/6}+1>0$ per ogni $x\ge 0$.

Si noti infine che $(2-\sin^3 t)f(t) \ge \frac{1}{\sqrt[3]{t}(1+\sqrt{t})} \sim \frac{1}{t^{5/6}}$ per $t\to+\infty$. Per il teorema del confronto, applicabile dato che la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione, segue che $(2-\sin^3 t)f(t)$ non è integrabile in senso improprio all'infinito, quindi il limite cercato vale $+\infty$ (essendo la funzione integranda positiva nell'intervallo di integrazione).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 17/2/2020
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 8) Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari associate alle matrici A e B, rispettivamente.

(a) determinare una base di $\ker(g \circ f)$.

(b) Sia $\mathcal{H}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori ortogonali al vettore $(0, 0, 0, 1)^t$. Determinare una base del sottospazio $\mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$.

(c) Trovare le controimmagini del vettore $(1, 1, 0)^t$ attraverso $g \circ f$.

Soluzione.

(a) Sappiamo che $g \circ f$ è associata alla matrice BA. Il rango della matrice B vale due, dunque il suo nucleo è dato dal solo vettore nullo, pertanto il nucleo di BA coincide con il nucleo della matrice A. Esso si determina risolvendo il sistema omogeneo $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ e si ottiene:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ -3\alpha - 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Come base del nucleo può essere scelta la coppia di vettori:

$$\mathcal{B}_{\ker(g \circ f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Il sottospazio $\mathcal{H}$ è formato da vettori $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ tali che $\boldsymbol{v} \cdot (0, 0, 0, 1)^t = 0$, ovvero tali che $x_4 = 0$. Imponendo questo vincolo ai vettori del nucleo, si ottiene $\beta = 0$. Dunque $\mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$ è il sottospazio monodimensionale generato dal vettore $(2, 1, -3, 0)^t$.

(c) Occorre risolvere il sistema:

$$(BA)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Senza dover calcolare la matrice BA, è possibile dapprima calcolare la controimmagine di $(1, 1, 0)^t$ attraverso B:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui: $x = 1$ e $y = 2$.
Successivamente, si calcola la controimmagine del vettore $(1,2)^t$ attraverso A:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e si ottiene ($\ker f$ è stato calcolato in precedenza):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\eta}, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \ker f.$$

Infatti basta calcolare *una* soluzione del sistema non omogeneo (qui si è posto ad esempio $x_2 = x_4 = 0$), e notare che la *generica* soluzione del sistema ha la struttura sopra scritta.

2. (punti 6) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin^3 x} - 1 - \tan^3 x}{x\left(e^{2x^2} - e^{2x\sin x}\right)}.$$

Soluzione. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5);\\
e^{\sin^3(x)} &= e^{x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)} = 1 + x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5);\\
\tan^3 x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 = x^3 + x^5 + o(x^5);\\
e^{2x^2} &= 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^5);\\
e^{2x\sin x} &= e^{2x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} = e^{2x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)} = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{4x^4}{2} + o(x^5)\\
&= 1 + 2x^2 + \frac{5}{3}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

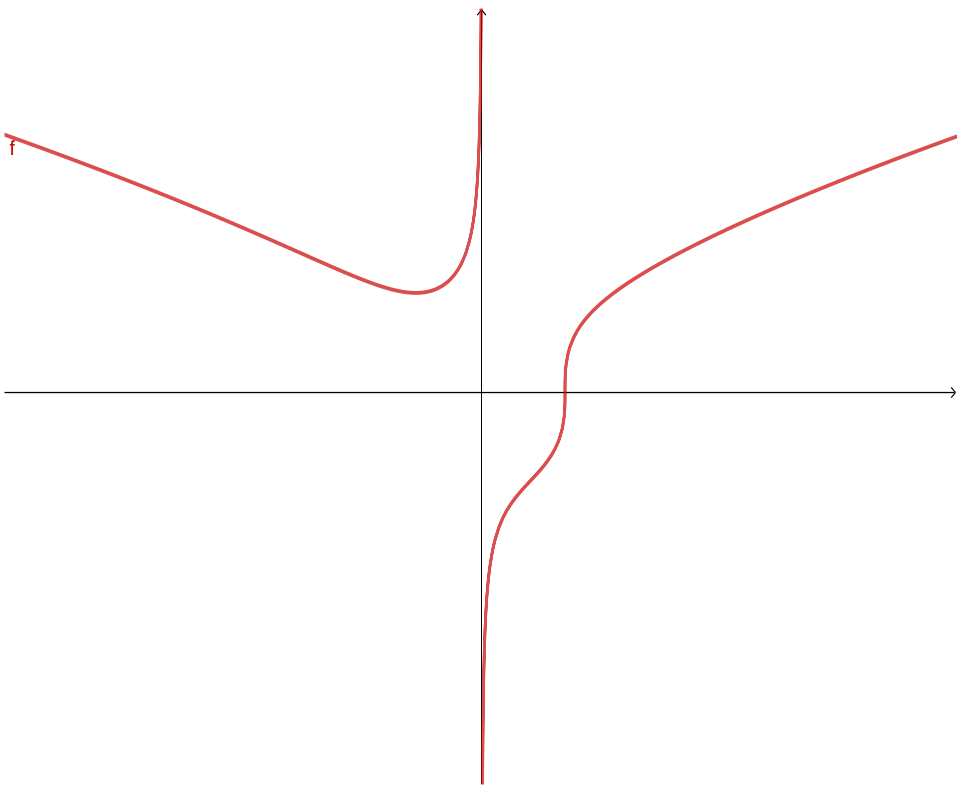
$$\begin{aligned}
\frac{e^{\sin^3 x} - 1 - \tan^3 x}{x\left(e^{2x^2} - e^{2x\sin x}\right)} &= \frac{1 + x^3 - \frac{x^5}{2} - 1 - x^3 - x^5 + o(x^5)}{x\left[1 + 2x^2 + 2x^4 - 1 - 2x^2 - \frac{5}{3}x^4 + o(x^5)\right]}\\
&= \frac{-\frac{3}{2}x^5 + o(x^5)}{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}\\
&\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x}}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$. Essa è positiva per $x > 1$ e per $x < 0$, negativa per $x \in (0,1)$, si annulla in $x = 1$. Vale
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$
Non vi sono asintoti obliqui, in quanto la crescita di f è sottolineare all'infinito ($f(x) \sim x^{2/3}$ per $x \to \pm\infty$). La retta $x = 0$ è asintoto verticale bilatero per f. La funzione è derivabile per $x \neq 0, x \neq 1$ e per tali valori di x si ha:
$$f'(x) = \frac{2x^3+1}{3x^{\frac{4}{3}}(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}.$$
Vale
$$\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty.$$
Inoltre f' si annulla se e solo se $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e ha il segno di $2x^3+1$, dunque è positiva se $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$ e se $x > 0$, perciò crescente separatamente in ciascuno di tali insiemi, negativa se $x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, dunque decrescente in tale insieme. Il punto $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è punto di minimo relativo per f. I limiti di f alla frontiera del proprio dominio mostrano che non vi sono estremi assoluti.

La derivata seconda vale, sempre per $x \neq 0, x \neq 1$:
$$f''(x) = -\frac{2(x^6+10x^3-2)}{9x^{\frac{7}{3}}(x^3-1)^{\frac{5}{3}}}.$$
Il polinomio $p(x) := x^6 + 10x^3 - 2$ si annulla se e solo se $x^3 = -5 \pm \sqrt{27} = -5 \pm 3\sqrt{3}$, cioè se e solo se $x = (-5 \pm 3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$. Si ha evidentemente $x_1 := (-5-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} < 0$, $x_2 := (-5+3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \in (0,1)$. Inoltre $p(x) > 0$ se $x > x_2$ e se $x < x_1$, mentre $p(x) < 0$ se $x \in (x_1, x_2)$. Notando inoltre che il denominatore nell'espressione di f'' è positivo se $x > 1$ e se $x < 0$, e che esso è negativo se $x \in (0,1)$, ne segue che $f''(x) > 0$ se $x \in (x_1, 0)$ e se $x \in (x_2, 1)$, dunque f è convessa separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f''(x) < 0$ se $x < x_1$, se $x \in (0, x_2)$ e se $x > 1$, dunque f è concava separatamente in ciascuno di tali intervalli. Si vede immediatamente dall'espressione di x_1 che $x_1 < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, dunque x_1 si trova a sinistra del punto di minimo relativo. I punti $x = x_{1,2}$ sono di flesso. Inolte il punto $x = 1$ è anch'esso di flesso, ma a tangente verticale.

Il grafico di f è il seguente:



4. (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)^{1/3}}.$$

(a) Calcolare una primitiva di f;

(b) Stabilire, *senza far uso della primitiva calcolata*, quali tra le regioni di piano delimitate dal grafico di f, dagli assi cartesiani, e dalle rette $x = \pm 1$, hanno area finita;

(c) (**facoltativo**) Calcolare, facendo uso della primitiva calcolata, le suddette aree.

Soluzione. Si pone $(x^2-1)^{1/3} = t$, cosicché $x^2 - 1 = t^3$, $x^2 = t^3 + 1$ e $x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x}{x^2(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{(t^3+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(\frac{t+1}{t^2-t+1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2-t+1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + 2\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\log(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\log|t+1| \\
&= \frac{1}{4}\log((x^2-1)^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}} + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left((x^2-1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\log|(x^2-1)^{\frac{1}{3}} + 1|
\end{aligned}$$

dove si è notato che $t^2 - t + 1 > 0$ per ogni t e si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva.

Riguardo al secondo punto, si noti in primo luogo che la funzione è dispari, dunque possiamo considerare solo le regioni di piano per cui $x > 0$ e poi procedere per simmetria. Se $x > 0$, la funzione f presenta possibili problemi di integrabilità se $x \to 0^+$, se $x \to 1$ e se $x \to +\infty$. Si ha:

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}, \quad f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{2}(x-1)^{\frac{1}{3}}}, \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

Per i noti criteri di integrabilità, se ne deduce che f è integrabile in un intorno di $x = 1$ e di $+\infty$, mentre non lo è in un intorno di 0. Dunque l'unica regione di area finita individuata dalle curve indicate è, se si assume $x > 0$, quella delimitata dall'asse x, dalla retta $x = 1$ e dal grafico di f. Per simmetria l'unica altra regione tra quelle indicate che abbia area finita è quella delimitata dall'asse x, dalla retta $x = -1$ e dal grafico di f. Le due regioni hanno la stessa area.

Ciascuna delle due regioni sopra individuate ha area data da (f è positiva per $x > 1$):

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{4}\log(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\log|t+1|\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{4}\log\left(\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

dove si è notato che $\arctan s \to \frac{\pi}{2}$ per $s \to +\infty$ e che $\log\left(\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\right) \to 0$ per $t \to +\infty$ (per quest'ultimo risultato raccogliere t^2 sia a numeratore che a denominatore dell'argomento del logaritmo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 17/2/2020**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 8) Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari associate alle matrici A e B, rispettivamente.

(a) determinare una base di $\ker(g \circ f)$.

(b) Sia $\mathcal{H}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori ortogonali al vettore $(1,0,0,0)^t$. Determinare una base del sottospazio $\mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$.

(c) Trovare le controimmagini del vettore $(2,1,0)^t$ attraverso $g \circ f$.

Soluzione.

(a) Sappiamo che $g \circ f$ è associata alla matrice BA. Il rango della matrice B vale due, dunque il suo nucleo è dato dal solo vettore nullo, pertanto il nucleo di BA coincide con il nucleo della matrice A. Esso si determina risolvendo il sistema omogeneo $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ e si ottiene:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha - 2\beta \\ -2\alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Come base del nucleo può essere scelta la coppia di vettori:

$$\mathcal{B}_{\ker(g\circ f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Il sottospazio $\mathcal{H}$ è formato da vettori $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ tali che $\boldsymbol{v} \cdot (1,0,0,0)^t = 0$, ovvero tali che $x_1 = 0$. Imponendo questo vincolo ai vettori del nucleo, si ottiene $\alpha = 0$. Dunque $\mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$ è il sottospazio monodimensionale generato dal vettore $(0,-2,1,1)^t$.

(c) Occorre risolvere il sistema:

$$(g \circ f)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Senza dover calcolare esplicitamente BA, è possibile dapprima calcolare la controimmagine di $(2,1,0)^t$ attraverso B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui: $x = 2$ e $y = 1$.
Successivamente, si calcola la controimmagine del vettore $(2,1)^t$ attraverso A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e si ottiene ($\ker f$ è stato calcolato in precedenza):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\eta}, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \ker f.$$

Infatti basta calcolare *una* soluzione del sistema non omogeneo (qui si è posto ad esempio $x_1 = x_4 = 0$), e notare che la *generica* soluzione del sistema ha la struttura sopra scritta.

2. (punti 6) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2\sin^3 x} - 1 - 2\tan^3 x}{x\left(e^{x^2} - e^{x\sin x}\right)}.$$

Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5);\\
e^{2\sin^3 x} &= e^{2x^3 - x^5 + o(x^5)} = 1 + 2x^3 - x^5 + o(x^5);\\
\tan^3 x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 = x^3 + x^5 + o(x^5);\\
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5);\\
e^{x\sin x} &= e^{x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} = e^{x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2\sin^3 x} - 1 - 2\tan^3 x}{x\left(e^{x^2} - e^{x\sin x}\right)} &= \frac{1 + 2x^3 - x^5 - 1 - 2x^3 - 2x^5 + o(x^5)}{x\left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right]}\\
&= \frac{-3x^5 + o(x^5)}{\frac{x^5}{6} + o(x^5)}\\
&\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -18.
\end{aligned}$$

3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 3x.$$

Soluzione. La funzione è definita per gli x per i quali l'argomento della radice è non negativo, dunque se $x \geq 1$ e se $x \leq 0$. Vale $f(1) = 3, f(0) = 0$. La funzione è chiaramente strettamente positiva per $x \geq 1$, mentre per $x \leq 0$ f è positiva se e solo se $\sqrt{x^2 - x} > -3x$, disequazione che è verificata per quegli $x \leq 0$ tali che $8x^2 + x < 0$, cioè per $x \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$. La funzione si annulla in $x = -1/8$, è negativa per $x < -\frac{1}{8}$.

Per quanto riguarda i limiti di f per $x \to \pm\infty$, notiamo che vale, appunto per $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 3x = |x| \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 3x = |x| \left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 3x.$$

Quindi:
$$f(x) = x - \frac{1}{2} + 3x + o(1) = 4x - \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty$$
$$f(x) = -x + \frac{1}{2} + 3x + o(1) = 2x + \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \to -\infty.$$

Dunque non solo vale $f(x) \to \pm\infty$ se $x \pm \infty$, ma abbiamo anche mostrato che la retta $y = 4x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e che la retta $y = 2x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

La funzione è derivabile per $x > 1$, $x < 0$. La derivata prima vale, per tali valori di x,
$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} + 3.$$

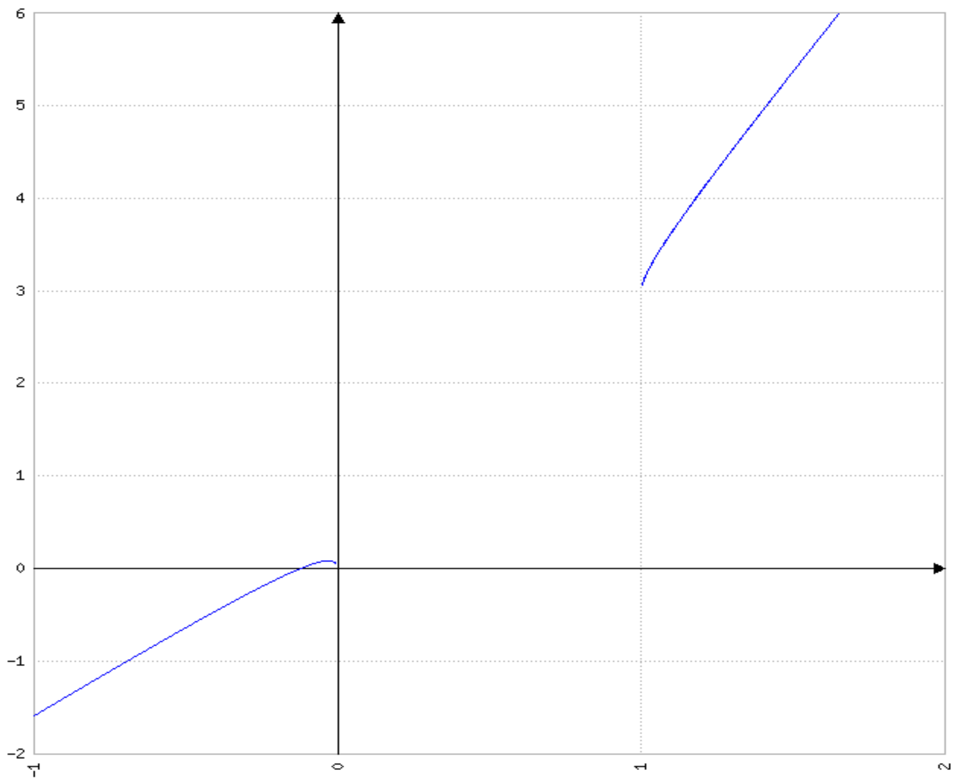
Si noti in primo luogo che
$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty.$$

La tangente al grafico di f tende dunque a diventare verticale in tali limiti. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $6\sqrt{x^2 - x} > 1 - 2x$. Tale disequazione è evidentemente sempre verificata per $x > 1$, mentre per $x < 0$ equivale alla disequazione $32x^2 - 32x - 1 < 0$. Gli zeri del polinomio di secondo grado appena scritto sono dati da
$$x = \frac{16 \pm \sqrt{(16)^2 + 32}}{32} = \frac{16 \pm \sqrt{288}}{32} = \frac{16 \pm 12\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\sqrt{2}.$$

Solo la radice $x_1 := \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\sqrt{2}$ è minore di zero (come segue dal fatto che $16 - \sqrt{(16)^2 + 32} < 0$). Si ha dunque $f'(x) > 0$ per $x < x_1$ e per $x > 1$, dunque f è crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1, 0)$, dunque f è decrescente in tale intervallo. Il punto $x = x_1$ è quindi punto di massimo relativo. Si vede facilmente che, come deve peraltro essere per coerenza coi limiti della funzione, $-1/8 < x_1$ (infatti tale disequazione corrisponde, data l'espressione di x_1 e con calcoli elementari, alla disequazione $3\sqrt{2} < 5$, evidentemente vera). Si noti inoltre che i punti $x = 0$, $x = 1$, in cui f non è derivabile, sono punti di minimo relativo per f. Dati i limiti di f per $x \to \pm\infty$ è immediato notare che non vi sono estremi assoluti di f.

Calcoliamo infine, sempre per $x > 1$ e per $x < 0$, la derivata seconda di f. Calcoli elementari mostrano che, per tali x, vale:
$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2 - x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dunque la derivata seconda è ovunque negativa ove definita. Ne segue che f è concava separatamente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$ (ovviamente anche, separatamente, in $(-\infty, 0]$ e in $[1, +\infty)$). In conclusione il grafico di f è il seguente:



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2

4. (punti 8) Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x(x^2-8)^{1/3}}.$$

(a) Calcolare una primitiva di f;

(b) Stabilire, *senza far uso della primitiva calcolata*, quali tra le regioni di piano delimitate dal grafico di f, dagli assi cartesiani, e dalle rette $x = \pm 2\sqrt{2}$, hanno area finita;

(c) (**facoltativo**) Calcolare, facendo uso della primitiva calcolata, le suddette aree.

Soluzione. Si pone $(x^2-8)^{1/3} = t$, cosicché $x^2 - 8 = t^3$, $x^2 = t^3 + 8$ e $x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x(x^2-8)^{1/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x}{x^2(x^2-8)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{(t^3+8)t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{t}{t^3+8}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(\frac{t+2}{t^2-2t+4} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-2}{t^2-2t+4} + \frac{3}{t^2-2t+4} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-2}{t^2-2t+4} + \frac{3}{(t-1)^2+3} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-2}{t^2-2t+4} + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(t-1)\right]^2+1} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\log(t^2-2t+4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(t-1)\right] - \frac{1}{4}\log|t+2| \\
&= \frac{1}{8}\log((x^2-8)^{\frac{2}{3}} - 2(x^2-8)^{\frac{1}{3}} + 4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left((x^2-8)^{\frac{1}{3}} - 1\right)\right] - \frac{1}{4}\log|(x^2-8)^{\frac{1}{3}}+2|
\end{aligned}$$

dove si è notato che $t^2 - 2t + 4 > 0$ per ogni t e si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva.

Riguardo al secondo punto, si noti in primo luogo che la funzione è dispari, dunque possiamo considerare solo le regioni di piano per cui $x > 0$ e poi procedere per simmetria. Se $x > 0$, la funzione f presenta possibili problemi di integrabilità se $x \to 0^+$, se $x \to 2\sqrt{2}$ e se $x \to +\infty$. Si ha:

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2x}, \quad f(x) \underset{x\to 2\sqrt{2}}{\sim} \frac{1}{2^{7/3}(x-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}}, \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

Per i noti criteri di integrabilità, se ne deduce che f è integrabile in un intorno di $x = 2\sqrt{2}$ e di $+\infty$, mentre non lo è in un intorno di 0. Dunque l'unica regione di area finita individuata dalle curve indicate è, se si assume $x > 0$, quella delimitata dall'asse x, dalla retta $x = 1$ e dal grafico di f. Per simmetria l'unica altra regione tra quelle indicate che abbia area finita è quella delimitata dall'asse x, dalla retta $x = -2\sqrt{2}$ e dal grafico di f. Le due regioni hanno la stessa area.

Ciascuna delle due regioni sopra individuate ha area data da (f è positiva per $x > 1$):

$$\begin{aligned}
&\int_{2\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2-8)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+8}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{8}\log(t^2-2t+4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(t-1)\right] - \frac{1}{4}\log|t+2|\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(t-1)\right] + \frac{1}{8}\log\left(\frac{t^2-2t+4}{(t+2)^2}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

dove si è notato che $\arctan s \to \frac{\pi}{2}$ per $s \to +\infty$ e che $\log\left(\frac{t^2-2t+4}{(t+2)^2}\right) \to 0$ per $t \to +\infty$ (per quest'ultimo risultato raccogliere t^2 sia a numeratore che a denominatore dell'argomento del logaritmo).

Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 26 giugno 2020 - Esercizio 1

(10 punti) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $L_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ a & 4 & 0 & -2 \\ -1 & -a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stabilire le dimensioni dell'immagine di L_a al variare del parametro a.

- Determinare una base per il nucleo di L_a nel caso in cui esso sia bidimensionale.

Soluzione.

- Il rango della matrice vale al più tre. Il minore di ordine due formato dagli elementi appartenenti alla prima e seconda riga e prima e quarta colonna risulta essere $a-2$. Quindi se $a \neq 2$ il rango vale almeno 2. Se $a = 2$ il rango vale uno perchè tutte le righe sono proporzionali (e non nulle). Orlando il minore suddetto si ottengono le seguenti matrici di ordine tre:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 4 & -2 \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -2 \\ -1 & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}$$

  I cui determinanti valgono rispettivamente zero e $-(a+2)(a-2)^2$.
  Quindi se $a = -2$ il rango vale due, se $a \neq \pm 2$ il rango è tre.
  Dunque:
  Se $a = 2$, $\dim(\operatorname{Im} L_a) = 1$.
  Se $a = -2$, $\dim(\operatorname{Im} L_a) = 2$.
  Se $a \neq \pm 2$, $\dim(\operatorname{Im} L_a) = 3$.

- Sia $a = -2$. Occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  dove si è omessa la terza riga perchè ridondante. Si ricava immediatamente:

$$\operatorname{Ker} L_a = \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

  Una base del nucleo è data quindi ad esempio dai vettori $(2,1,0,0)^\top, (0,0,1,0)^\top$.

Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 26 giugno 2020 - Esercizio 2

(8 punti) Si consideri la seguente funzione complessa di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1}{i\bar{z}^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- Calcolare $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, in termini delle coordinate cartesiane di z.
- Determinare l'insieme $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) \in \mathbb{R}\}$.
- Determinare, al variare del parametro $R > 0$,

$$C_R := \inf\{f(z), z \in A, |z| \geq R\}.$$

Soluzione. Calcoliamo, posto $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\bar{z}^2} &= \frac{1}{i(x-iy)^2} = -\frac{i}{x^2-y^2-2ixy} = -\frac{i(x^2-y^2+2ixy)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \frac{2xy-i(x^2-y^2)}{x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2} \\ &= \frac{2xy-i(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \operatorname{Im} f(z) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

In particolare, $f(z)$ è reale se e solo se $|y| = |x|$ (con $x \neq 0$, si ricordi che deve essere $z \neq 0$ perché f sia definita). Quindi A è dato dall'unione delle due rette $z = x \pm ix$, private dell'origine. Infine, se $z \in A$ si ha

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Si ricordi però che se $z \in A$ vale $z = x \pm ix$ con $x \neq 0$, quindi

$$f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \pm\frac{2x^2}{4x^4} = \pm\frac{1}{2x^2}. \tag{1}$$

Chiedere $|z| \geq R$ significa, ricordando che $z = x \pm ix$, che $2x^2 \geq R^2$, ovvero che $|x| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$. Si osservi che ci viene chiesto di trovare $\inf\{f(z), z \in A, |z| \geq R\}$, dunque basta considerare il segno meno nella formula (1). È infine chiaro che il minimo della funzione $g(x) = -\frac{1}{2x^2}$ definita sul dominio $|x| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$ si ottiene per $x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$, e vale $-\frac{1}{R^2}$.

Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 26 giugno 2020 - Esercizio 3

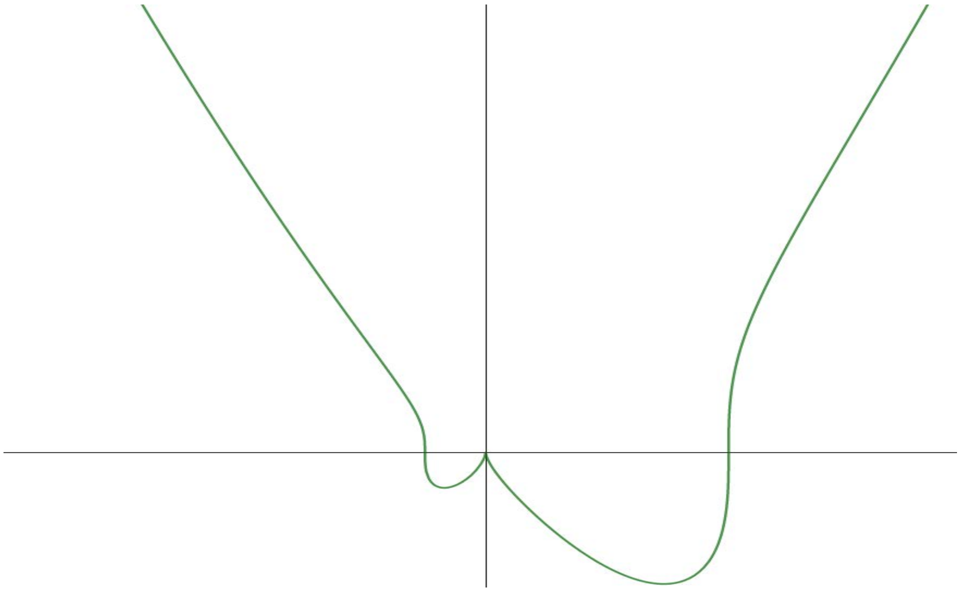
(14 punti) Studiare la funzione
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 3x - 4)^{\frac{1}{3}}.$$
Non è richiesto lo studio dettagliato della derivata seconda, ma solo le proprietà qualitative relative alla concavità e convessità del grafico di f deducibili elementarmente dalle altre informazioni già disponibili.

Soluzione. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Non vi sono simmetrie evidenti. Chiaramente
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$
Non vi sono asintoti obliqui in quanto la crescita di f all'infinito è superlineare, $f(x) \sim x^{4/3}$ per $x \to \pm\infty$. La funzione si annulla se $x = 0$ e se $x^2 - 3x - 4 = 0$, cioè se $x = 4$ e se $x = -1$. La funzione ha il segno di $x^2 - 3x - 4$ (salvo che in $x = 0$ in cui si annulla), dunque è strettamente positiva se $x > 4$ e se $x < -1$, strettamente negativa se $x \in (-1, 4)$, $x \neq 0$.

La funzione non è derivabile in $x = 0$ e nei punti in cui $x^2 - 3x - 4 = 0$, cioè in $x = 4$ e se $x = -1$. Se $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 4$, si ha:
$$f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}(x^2 - 3x - 4)^{1/3} + x^{\frac{2}{3}}\frac{2x - 3}{3(x^2 - 3x - 4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(x^2 - 3x - 4) + x(2x - 3)}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x - 4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x^2 - 9x - 8}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x - 4)^{\frac{2}{3}}}.$$
Si ha:
$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = -\mp\infty, \quad \lim_{x\to 4} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty.$$
Dunque il punto $x = 0$ è di cuspide. Inoltre le tangenti al grafico di tendono a diventare verticali per $x \to -1$ e per $x \to 4$. Lo studio degli zeri e del segno della derivata è immediato e dà quanto segue. $f'(x)$ si annulla se e solo se $x = \frac{9\pm\sqrt{209}}{8}$. Si noti che (il numero $\sqrt{209}$ è compreso tra 14 e 15) $\frac{9+\sqrt{209}}{8} \in (0, 4)$ e che $\frac{9-\sqrt{209}}{8} \in (-1, 0)$. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \left(\frac{9-\sqrt{209}}{8}, 0\right)$ oppure $x \in \left(\frac{9+\sqrt{209}}{8}, 4\right) \cup (4, +\infty)$, dunque f è strettamente crescente separatamente in tali due insiemi (si osservi che f è continua in $x = 4$). $f'(x)$ è invece negativa se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{9-\sqrt{209}}{8}\right)$ e in $\left(0, \frac{9+\sqrt{209}}{8}\right)$, dunque f è strettamente decrescente separatamente in tali due insiemi (si osservi che f è continua in $x = -1$). Ne segue che i punti $x = \frac{9\pm\sqrt{209}}{8}$ sono di minimo relativo. Non svolgiamo la verifica di quale sia, tra questi, il punto di minimo assoluto, ma esso si rivela essere il punto $\frac{9+\sqrt{209}}{8}$. Il punto $x = 0$ che, ricordiamo, era di cuspide, risulta un punto di massimo relativo (pur non essendo un punto di derivabilità), mentre ovviamente non vi sono massimi assoluti (la funzione è illimitata dall'alto).

Da quanto studiato ci si può aspettare che i punti $x = -1$ e $x = 4$ siano punti di flesso a tangente verticale (si ricordino i limiti delle derivate). Ciò andrebbe dimostrato rigorosamente studiando i limiti di f'' per $x \to -1$ e $x \to 4$, ma ciò non è richiesto. Ci si può inoltre aspettare che esistano almeno altri due flessi di f, uno per $x > 4$ e uno per $x < -1$. Infatti la funzione ha crescita superlineare all'infinito e la convessità risulterà rivolta verso l'alto in tale limite (ciò è intuitivo ma andrebbe giustificato con un calcolo esplicito, tuttavia non richiesto), mentre da quanto detto prima ci si aspetta che sia rivolta verso il basso per $x \to -1^-$ e per $x \to 4^+$.

Il grafico di f è il seguente:



Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 20 luglio 2020 - Esercizio 1

(10 punti) Data la matrice

$$M_h = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 1 \\ 1-h & 2 & 3-2h \\ h-1 & 0 & 2h-1 \end{pmatrix}$$

- Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di M_h.
- Studiare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di M_h.

Soluzione.

- L'equazione caratteristica è:

  $$(2-\lambda)\left[(1+h-\lambda)(2h-1-\lambda) - h + 1\right] = 0,$$

  da cui

  $$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3h\lambda + 2h^2) = (2-\lambda)(\lambda - h)(\lambda - 2h) = 0$$

  Pertanto la matrice M_h ha autovalori 2, h e $2h$.

- Gli autovalori sono semplici ad eccezione dei casi: $h = 2$, $h = 1$, $h = 0$.

  Sia $h = 2$. In tal caso, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

  $$M_2 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  e tale matrice ha rango uno, pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ vale 3-1=2 e coincide con la molteplicità algebrica, dunque la matrice è diagonalizzabile.

  Sia $h = 1$. Anche in questo caso l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

  $$M_1 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Anche tale matrice ha rango uno, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ vale di nuovo due e coincide con la molteplicità algebrica, dunque la matrice è diagonalizzabile.

  Sia $h = 0$. In questo caso è l'autovalore $\lambda = 0$ ad avere molteplicità pari a due. Si ha:

  $$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Il rango di quest'ultima matrice è chiaramente due, pertanto la molteplicità gemetrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è pari a uno e di conseguenza la matrice non è diagonalizzabile.

Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 20 luglio 2020 - Esercizio 2

(8 punti) Si consideri, in un intorno di $x = 0$, la funzione $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

- Determinare lo sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$, di ordine sei.
- Determinare per quali polinomi P vale, per un opportuno $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^6} = \ell.$$

  Specificare il valore di ℓ in termini dei coefficienti del polinomio P.

Soluzione. Vale $(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \log(\cos x)}$. Si ha, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5); \\
\sin x \log(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{12} + o(x^6) \\
&= -\frac{x^3}{2} + o(x^6); \\
e^{\sin x \log(\cos x)} &= e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^6)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^6) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^6)\right)^2 + o(x^6) \\
&= 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque $Q(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8}$. Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x) - P(x) + o(x^6)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x) - P(x)}{x^6}.$$

Quindi il limite cercato è finito se e solo se $P(x) = Q(x) + cx^6 + o(x^6)$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$, cioè deve essere, per opportuni $N \geq 7$ e $\alpha, c_7, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$

$$P(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + \alpha x^6 + \sum_{k=7}^{N} c_n x^n. \tag{$*$}$$

In tal caso vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x) - P(x) + o(x^6)}{x^6} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{8} - \alpha\right) x^6 + o(x^6)}{x^6} = \frac{1}{8} - \alpha.$$

Dunque i polinomi cercati sono quelli della forma $(*)$, purché $\alpha \neq \frac{1}{8}$, e in tal caso $\ell = \frac{1}{8} - \alpha$.

Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova del 20 luglio 2020 - Esercizio 3

(14 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = e^x|e^{-x} - x^2|.$$

Si può dare per nota la seguente informazione: esiste un solo punto x_0 tale che $e^{-x} = x^2$, e vale $x_0 \in (0, 1)$.

Soluzione. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Non vi sono simmetrie evidenti. Chiaramente la funzione è ovunque non negativa, e si annulla solo per $x = x_0$. La quantità $g(x) := e^{-x} - x^2$ si annulla, come detto nel testo, solo per un opportuno $x_0 \in (0, 1)$, ed è allora chiaro che $g(x) > 0$ per $x < x_0$ e $g(x) < 0$ per $x > x_0$. Quindi si ha:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2e^x & \text{per } x \le x_0 \\ x^2e^x - 1 & \text{per } x > x_0. \end{cases}$$

Si noti che $f(0) = 1$. Si ha poi che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-,$$

si osservi infatti riguardo all'ultima affermazione che l'espressione esplicita di $f(x)$ mostra che f è sempre strettamente minore di uno se $x \le x_0$, $x \ne 0$.

La funzione è derivabile per $x \ne x_0$. Per tali x si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x(x^2 + 2x) & \text{per } x < x_0 \\ e^x(x^2 + 2x) & \text{per } x > x_0. \end{cases}$$

Ne segue che se $x > x_0$ la derivata prima è sempre strettamente positiva, dunque f cresce strettamente in $[x_0, +\infty)$, mentre se $x < x_0$ si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = -2$ e vale $f'(x) > 0$ se $x \in (-2, 0)$ quindi f è strettamente crescente in tale intervallo, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -2) \cup (0, x_0)$ quindi f è strettamente decrescente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = -2$ è un punto di minimo relativo, il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Si ha infine che, posto $c := e^{x_0}(x_0^2 + 2x_0) > 0$ (si ricordi che $x_0 > 0$), vale

$$\lim_{x\to x_0^\pm} = \pm c.$$

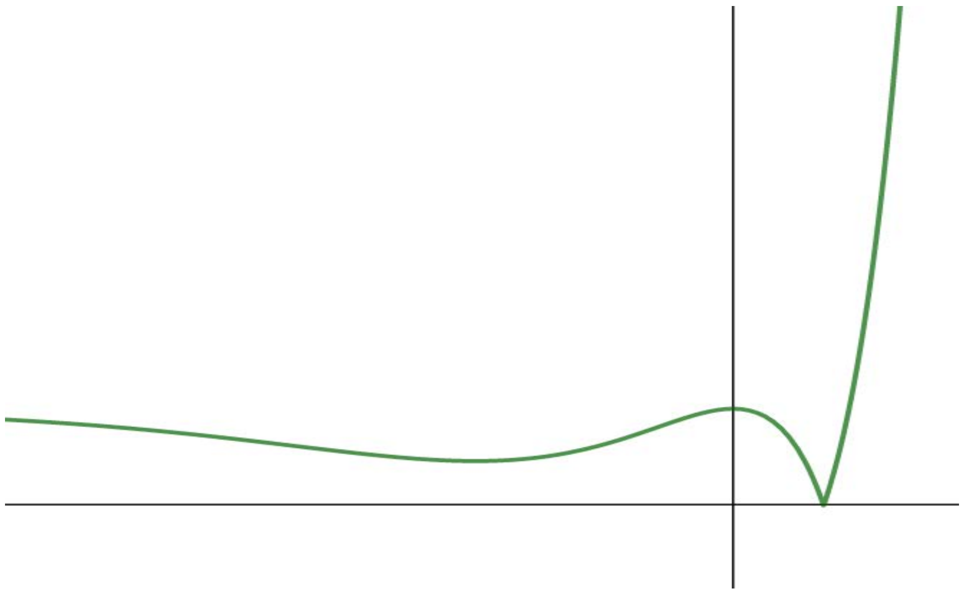
Quindi il punto $x = x_0$ è un punto angoloso. Si noti anche che, per costruzione, tale punto è anche di minimo assoluto per f (è l'unico punto in cui f, che altrimenti è sempre positiva, si annulla).

Calcoliamo infine, sempre per $x \ne x_0$, la derivata seconda, che vale:

$$f''(x) = \begin{cases} -e^x(x^2 + 4x + 2) & \text{per } x < x_0 \\ e^x(x^2 + 4x + 2) & \text{per } x > x_0. \end{cases}$$

Gli zeri del polinomio $x^2 + 4x + 2$ sono i punti $-2 \pm \sqrt{2}$, entrambi negativi. Si ha quindi che $f''(x)$ è strettamente positiva per $x > x_0$, dunque f è strettamente convessa in tale intervallo, mentre $f''(-2 \pm \sqrt{2}) = 0$ e $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$, così che f è strettamente convessa in tale intervallo, mentre $f''(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, x_0)$, così che f è strettamente concava in ciascuno di tali intervalli. I punti $x_{1,2} := -2 \pm \sqrt{2}$ sono di flesso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova settembre 2020

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui il nucleo non sia banale:

- Determinare una base del nucleo di L_α.
- sia $\mathcal{H}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $(x_1, x_2, x_3)^t$ tali che $x_1 + 2x_2 = 0$. Si determini una base di $L_\alpha(\mathcal{H})$.
- sia $\mathcal{K}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)^t$ tali che $x'_1 + 2x'_2 = 0$. Si determini una base di $L_\alpha^{-1}(\mathcal{K})$.

Soluzione.

Il minore formato dagli elementi appartenenti alle prime due righe e alle prime due colonne è non nullo. Orlando con le restanti righe, si ottiene:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha - 2.$$

Pertanto il nucleo è non banale soltanto se $\alpha = 2$.

- Sia dunque $\alpha = 2$. Il rango della matrice è due e le prime due righe sono indipendenti, dunque per risolvere il sistema omogeneo associato basta considerare le prime due equazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Quindi: $x_1 = 0$ e $x_2 = -x_3$. Una base del nucleo (monodimensionale) è formata dal solo vettore: $(0, 1, -1)^t$.
- Si può scegliere come base del sottospazio $\mathcal{H}$ la coppia di vettori $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 0)^t$ e $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 1)^t$. Si ha: $L_2(\boldsymbol{v}_1) = (-1, 1, -3, 0)^t$ e $L_2(\boldsymbol{v}_2) = (1, 1, 1, 2)^t$.
  I vettori $\boldsymbol{w}_1 = (-1, 1, -3, 0)^t$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 1, 1, 2)^t$ sono linearmente indipendenti e pertanto formano una base di $L_2(\mathcal{H})$.
- L'azione di L_2 in termini delle coordinate dei vettori è la seguente:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 + x_3 \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

  Da cui, ponendo: $x'_1 = -2x'_2$ segue: $x_1 + x_2 + x_3 = -2x_2 - 2x_3$, ovvero: $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$. Tale relazione risulta essere l'equazione di un piano passante ad esempio per i punti: $(-3, 0, 1)$ e $(-3, 1, 0)$ e ovviamente per l'origine (la controimmagine di un sottospazio tramite un'applicazione lineare è un sottospazio). Di conseguenza i vettori $(-3, 0, 1)$ e $(-3, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $L_2^{-1}(\mathcal{K})$.

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{e^{\frac{1}{x+3}} + e + ex}{|x+2|^a}$$

al variare del parametro reale a.

Soluzione. Posto: $x = h - 2$, cioè $h = x + 2$ (dunque $h \to 0$ se $x \to -2$), si ha:

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{\frac{1}{x+3}} + e + ex}{|x-2|^a} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{|h|^a}.$$

Inoltre, per $h \to 0$, vale:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+h}} &= e^{1-h+h^2+o(h^2)} \\
&= e \cdot e^{-h+h^2+o(h^2)} \\
&= e\left[1 + \left(-h + h^2 + o(h^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-h + h^2 + o(h^2)\right)^2 + o(h^2)\right] \\
&= e\left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)\right] = e - eh + \frac{3}{2}eh^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{|h|^a} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}eh^2 + o(h^2)}{|h|^a} = \frac{3}{2}e|h|^{2-a} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a < 2 \\ \frac{3}{2}e & \text{se } a = 2 \\ +\infty & \text{se } a > 2 \end{cases}.$$

3. Studiare la funzione
$$f(x) = (|x-1|-1)e^{\frac{1}{x}}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$. Non vi sono simmetrie. Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$
Poiché si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm 1$, è possibile che siano presenti asintoti obliqui. Per verificarlo si osservi che, usando lo sviluppo di McLaurin dell'esponenziale si ha:
$$f(x) = (x-2)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - 1 + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty;$$
$$f(x) = (-x)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -x - 1 + o(1) \quad \text{per } x \to -\infty.$$
Quindi le rette $y = x - 1$ e $y = -x - 1$ sono asintoti obliqui per la funzione rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

La funzione è positiva per $x > 2$ e $x < 0$, negativa per $x \in (0, 2)$, e si annulla per $x = 2$ (si ricordi che essa non è definita in $x = 0$). Per calcolare la derivata prima è opportuno considerare la funzione separatamente per $x > 1$ e per $x < 1$ (con $x \neq 0$). Si ha
$$f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad \forall x > 1.$$
Il polinomio a numeratore è sempre positivo, e ciò mostra che f è crescente in $[0, +\infty)$. Si noti che $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2e$. Si ha invece
$$f'(x) = \frac{1-x}{x} e^{\frac{1}{x}}, \quad \forall x < 1.$$
Dunque f è crescente per $x \in (0, 1]$ e decrescente per $x < 0$. Si noti inoltre che $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, e dunque $x = 1$ è punto angoloso per f: in particolare f non è ivi derivabile. Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, dunque la funzione si avvicina al proprio limite da sinistra in tale punto con tangente che tende a diventare orizzontale. Non vi sono punti di estremo relativo né tantomeno assoluto.

Calcoliamo ora la derivata seconda, per $x \neq -1, x \neq 0$. Si ha
$$f''(x) = -\frac{3x+2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}, \quad \forall x > 1.$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}, \quad \forall x < 1, x \neq -0.$$
Ciò mostra subito che $f''(x)$ è positiva per $x < 0$, mentre $f''(x)$ è negativa per $x \in (0, 1)$ e per $x > 1$. Dunque f è convessa in $(-\infty, 0)$, concava in $(-1, 0]$ e in $[0, +\infty)$ (attenzione: essa *non* è concava nell'intero intervallo $(0, +\infty)$). In conclusione il grafico della funzione è il seguente: