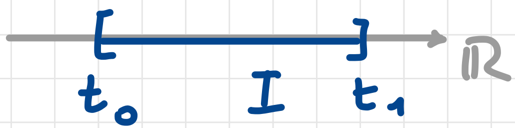
CURVE

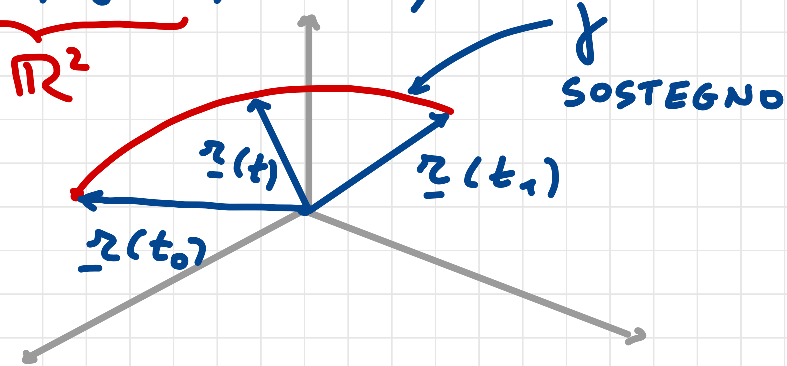
4-3-2021

$$\underline{r}: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$$

NEL PIANO

$$\underline{r}(t) = \Big(\underbrace{x(t), y(t)}_{\mathbb{R}^2}, z(t)\Big)$$





NOTA.

A volte si scrive anche $\gamma = \gamma(t)$ in luogo di $\underline{r} = \underline{r}(t)$.

- $\underline{r}(t)$ si dice REGOLARE se $\underline{r}(t) \in C^1(I)$

e $\underline{r}'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in I \quad (|\underline{r}'(t)| \neq 0 \quad \forall t)$.

ESERCIZIO 1.

Stabilire se la curva

$$\underline{r}(t) = (t; 2t; t^2) \qquad t \in [0; 4]$$

è chiusa, semplice, regolare.

SOL.

- $\underline{r}(0) = (0; 0; 0) \neq \underline{r}(4) = (4; 8; 16)$

$\Rightarrow \underline{r}(t)$ non è chiusa.

- $\underline{r}(t)$ è semplice perché almeno una delle sue componenti è iniettiva.
- $\underline{r}'(t) = (1; 2; 2t) \qquad |\underline{r}'(t)| = \sqrt{5 + 4t^2} \neq 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow$ curva è regolare.

ESERCIZIO 2. Sia γ la curva di eq. parametriche

$$\underline{r}: \begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

1) Stabilire se è chiusa

2) Determinare il vettore tangente e il suo modulo. γ è regolare?

SOL.

1) $\underline{r}(-\pi) = (-1; -\pi) \neq \underline{r}(\pi) = (-1; \pi)$

γ non è chiusa.

2) VETTORE TANGENTE $\underline{r}'(t)$

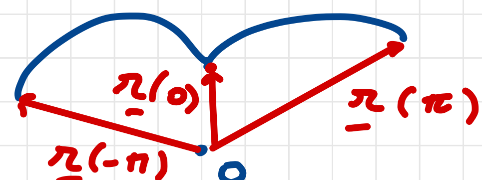
$$\underline{r}': \begin{cases} x'(t) = -\cancel{\operatorname{sen} t} + \cancel{\operatorname{sen} t} + t\cos t \\ y'(t) = \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} + t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\underline{r}'(t) = (t\cos t \, ; \, t \operatorname{sen} t) = t\cos t \cdot \underline{i} + t \operatorname{sen} t \cdot \underline{j}$$

$$|\underline{r}'(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{t^2} = |t|$$

$$\left. |\underline{r}'(t)| = 0 \iff t = 0 \right\} \Longrightarrow \gamma \text{ non è regolare in } t = 0.$$

NOTA: γ è l'unione di due tratti regolari.



OSS. Se una curva è regolare allora ammette il versore tangente $\forall t \in I$.

ESERCIZIO 3. Scrivere l'eq. della retta tangente alla curva γ di equazione:

$$\underline{r}(t) = 2\sin t \cdot \underline{i} - 3\cos t \cdot \underline{j} + 4t \cdot \underline{k} =$$
$$= (2\sin t\,;\ -3\cos t\,;\ 4t)$$

nel suo punto P ottenuto per $t = 0$.

SOL.

$P(0\,; -3\,; 0)$ $\quad (t = 0 \text{ in } \underline{r}(t))$

$$\underline{r}'(t) = (2\cos t\,;\ 3\sin t\,;\ 4)$$
$$\underline{r}'(0) = (2\,;\ 0\,;\ 4)$$

retta tangente: $\quad s: \begin{cases} x = 0 + 2u \\ y = -3 + 0u \\ z = 0 + 4u \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2u \\ y = -3 \\ z = 4u \end{cases}$

ESERCIZIO 4.

Calcolare la lunghezza della curva γ di equazioni parametriche

$$\underline{r}(t) = (t^2; t^3) \qquad t \in [-1; 1].$$

SOL.

$$\underline{r} : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{t_0}^{t_1} |\underline{r}'(t)|\, dt$$

$$\underline{r}'(t) = (2t; 3t^2) \qquad |\underline{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4+9t^2}$$

γ non è regolare in $t = 0$.

$$\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} |t| \sqrt{4+9t^2}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} -t \sqrt{4+9t^2}\, dt + \int_{0}^{1} t \sqrt{4+9t^2}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{18}\int_{-1}^{0} 18t\,(4+9t^2)^{1/2} dt + \frac{1}{18}\int_{0}^{1} 18t\,(4+9t^2)^{1/2} dt$$

$$= -\frac{1}{\cancel{18}_{9}}\left[(4+9t^2)^{3/2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\cancel{18}_{9}}\left[(4+9t^2)^{3/2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{27}\left\{-4^{3/2} + 13^{3/2} + 13^{3/2} - 4^{3/2}\right\} = \underline{\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right)}$$

NOTA. CURVE IN FORMA POLARE

$\rho = f(\theta)\ ,\quad \theta \in I \quad \Longleftrightarrow$

$$\underline{r}(\theta) = \left(f(\theta)\cos\theta ; f(\theta)\sin\theta \right)$$

$$|\underline{r}'(\theta)| = \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}$$

$$\underline{r}'(\theta) : \begin{cases} x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

$$|\underline{r}'(\theta)| = \sqrt{\begin{array}{l} f'^2(\theta)\cos^2\theta \cancel{- 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta} + f^2(\theta)\sin^2\theta \\ f'^2(\theta)\sin^2\theta \cancel{+ 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta} + f^2(\theta)\cos^2\theta \end{array}}$$

$$= \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}$$

ESERCIZIO 5. Calcolare la lunghezza della curva $\rho = \underbrace{e^{-\theta}}_{f(\theta)}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

SOL.

$$\underline{r}(\theta) = \left(e^{-\theta}\cos\theta ; e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$|\underline{r}'(\theta)| = \sqrt{(-e^{-\theta})^2 + (e^{-\theta})^2} = \sqrt{2e^{-2\theta}} = e^{-\theta}\sqrt{2}.$$

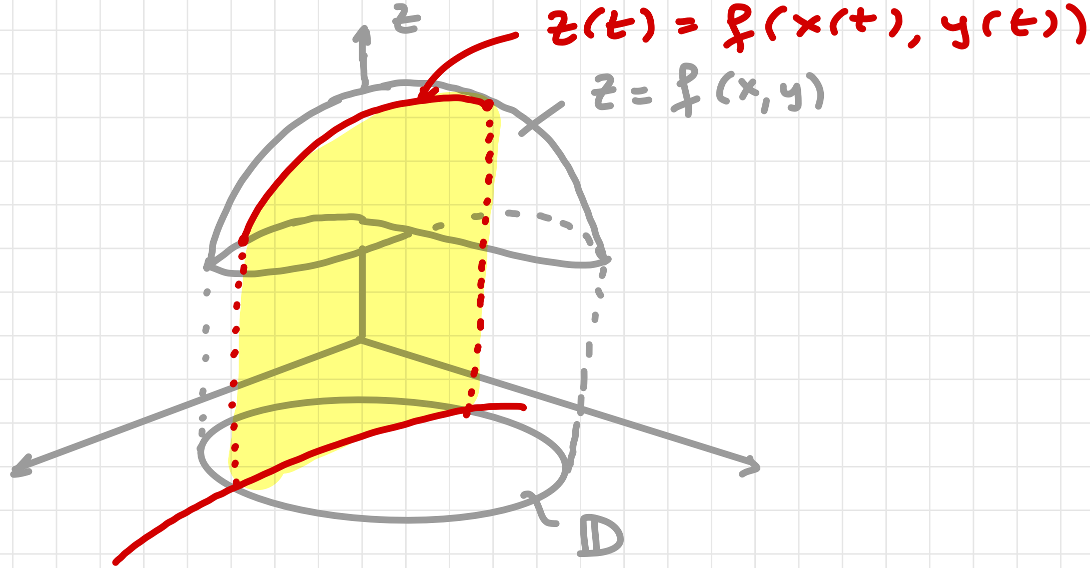
$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\underline{r}'(\theta)|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}\left[-e^{-\theta}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\left(-e^{-2\pi} + 1\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right).$$

INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE

Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$
$z = f(x,y)$

e sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$ una curva in $\mathbb{R}^2$.



$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(x(t), y(t))}_{f(\underline{r}(t))} |\underline{r}'(t)|\, dt}$$

ESERCIZIO 6.

Calcolare $\int_\gamma f\, ds$ essendo:

1) $f(x,y) = x \qquad \underline{r}(t) = (t; t^2) \qquad t \in [0; a]$

$\underline{r}'(t) = (1; 2t) \longrightarrow |\underline{r}'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$f(\underline{r}(t)) = f(t; t^2) = t$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^a t \cdot \sqrt{1+4t^2} \, dt = \frac{1}{8} \int_0^a 8t \, (1+4t^2)^{1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}_{\,4}} \left[(1+4t^2)^{3/2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \right]_0^a = \frac{1}{12} \left((1+4a^2)^{3/2} - 1 \right).$$

2) $f(x,y) = \sqrt{1-y^2} \qquad \underline{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \qquad t \in [0; \pi]$

$|\underline{r}'(t)| = 1$

$f(\underline{r}(t)) = f(\operatorname{sen} t; \cos t) = \sqrt{1-\cos^2 t} = \cancel{|}\operatorname{sen} t\cancel{|}$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^\pi \operatorname{sen} t \cdot 1 \, dt = \left[-\cos t \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

3) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2}$ $\qquad \underline{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$|\underline{r}'(t)| = 1.$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} = \operatorname{arctg} f$$

$$f(\underline{r}(t)) = \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t} \cdot 1 \, dt = \left[\operatorname{arctg} \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

ESERCIZIO A CASA:

Calcolare $\int_\gamma (x+y^3) \, ds$ essendo γ il segmento di estremi $O(0;0)$ e $A(1;1)$.

$\left[\text{R. } \frac{3}{4}\sqrt{2}\right]$

APPLICAZIONI FISICHE DEGLI INTEGRALI CURVILINEI

1) BARICENTRO

- $\underline{r}(t) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- $\lambda(x,y,z)$ densità lineare

Allora il baricentro della curva è:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,\lambda(x,y,z)\,ds}{\boxed{\int_\gamma \lambda(x,y,z)\,ds}}$$

MASSA

$$y_G = \frac{\int_\gamma y\,\lambda(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma \lambda(x,y,z)\,ds}$$

Se λ è COSTANTE

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,\cancel{\lambda}\,ds}{\int_\gamma \cancel{\lambda}\,ds} = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma x\,ds$$

$$y_G = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma y\,ds$$

$$z_G = \frac{\int_\gamma z\,\lambda(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma \lambda(x,y,z)\,ds}$$

$$z_G = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma z\,ds$$

ESERCIZIO 7. Calcolare il baricentro della curva $\rho = e^{\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$ supponendo che la densità sia costante.

SOL.

$$\underline{r}(\theta) = \left(e^{\theta}\cos\theta,\ e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$|r'(\theta)| = \sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}} = e^{\theta}\sqrt{2}$$

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^\pi e^\theta \sqrt{2}\, d\theta = \sqrt{2}\,[e^\theta]_0^\pi = \sqrt{2}\,(e^\pi - 1).$$

$$\int_\gamma x\, ds = \int_0^\pi e^\theta \cos\theta\, e^\theta \sqrt{2}\, d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi e^{2\theta} \cos\theta\, d\theta = (*)$$

Calcolo a parte $\int e^{2\theta} \cos\theta\, d\theta$ (PER PARTI)

$$\int e^{2\theta} \cos\theta\, d\theta = \frac{e^{2\theta}}{2} \cos\theta + \int \frac{e^{2\theta}}{2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{e^{2\theta}}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{2\theta}}{2} \operatorname{sen}\theta - \int \frac{e^{2\theta}}{2} \cos\theta\, d\theta \right\} =$$

$$= \frac{e^{2\theta}}{2} \cos\theta + \frac{e^{2\theta}}{4} \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4} \int e^{2\theta} \cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}e^{2\theta}\cos\theta + \frac{1}{4}e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4}\int e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$\int e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\, e^{2\theta}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + c =$$

$$= \frac{2}{5}e^{2\theta}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + c.$$

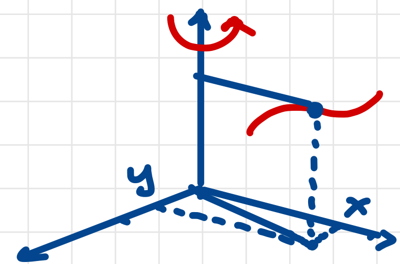
$$(*) = \sqrt{2}\left[\frac{2}{5}e^{2\theta}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{2}\left(e^{2\pi}(-1) - 1\right) = -\frac{2}{5}\sqrt{2}\left(e^{2\pi}+1\right)$$

$$x_G = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x \, ds = - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}(e^{\pi}-1)} \cdot \frac{2}{5}\cancel{\sqrt{2}}(e^{2\pi}+1) =$$

$$= -\frac{2}{5} \frac{e^{2\pi}+1}{e^{\pi}-1} .$$

A CASA: $y_G = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi+1}}{e^{\pi}-1}$



2) MOMENTO DI INERZIA

$\underline{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva

$R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\lambda(x,y,z)$ densità lineare

$R(x,y,z)$ distanza dall'asse di rotazione.

$$I = \int_\gamma R^2(x,y,z)\, \lambda(x,y,z)\, ds =$$

$$= \int_a^b R^2(\underline{r}(t))\,\lambda(\underline{r}(t))\,|\underline{r}'(t)|\,dt$$

ESERCIZIO 8. Sia data la curva

$$\underline{r}(t) = (t-1;\ t;\ 1) \qquad t \in [0,1]$$

Calcolare il suo momento di inerzia intorno all'asse y, sapendo che la densità lineare è $\lambda(x,y,z) = |y|$

SOL.

$\underline{r}(t) = (t-1;\ t;\ 1)$

$\underline{r}'(t) = (1;\ 1;\ 0)$ $\qquad |\underline{r}'(t)| = \sqrt{2}$

$\lambda(x,y,z) = |y| \implies \lambda(\underline{r}(t)) = |t|$

$$R(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2} \Rightarrow R(\underline{r}(t))=\sqrt{(t-1)^2+1}$$

$$I=\int_0^1 \cancel{|}t\cancel{|}\,(t^2-2t+2)\cdot\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^1(t^3-2t^2+2t)\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}+t^2\right]_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{7}{12}\sqrt{2}.$$

TERNA INTRINSECA

$$\vec{T}(t)=\frac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|}$$ (VERSORE TANGENTE)

$$\vec{N}(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$ (VERSORE NORMALE)

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$$ (VERSORE BINORMALE)

Il piano che contiene $\vec{T}$ e $\vec{N}$ è ortogonale a $\vec{B}$ contiene localmente la curva ed è detto

PIANO OSCULATORE

Se $\vec{B}$ è costante $\Rightarrow$ la curva è piana

Per calcolare $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ è più comodo usare le seguenti relazioni:

$$\vec{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|} \qquad \vec{B}(t) = \frac{\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$$

Si ricorda che

$$k(t) = \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3} \qquad \rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

CURVATURA RAGGIO DI CURV

ESERCIZIO 9. Sia data la curva di sostegno γ di equazioni:

$$\underline{r}(t) = (3t + t^3;\ 2t^2 + t^4;\ t)$$

Determinare il raggio di curvatura in $P(4; 3; 1)$ e scrivere l'eq. del piano osculatore in P.

SOL.

P è ottenuto per $t = 1$

$$\underline{r}'(t) = (3 + 3t^2;\ 4t + 4t^3;\ 1) \qquad \underline{r}'(1) = (6; 8; 1)$$

$$\underline{r}''(t) = (6t;\ 4 + 12t^2;\ 0) \qquad \underline{r}''(1) = (6; 16; 0)$$

$$\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 8 & 1 \\ 6 & 16 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(-16) - \underline{j}(-6) + \underline{k}(48)$$

$$= (-16;\ 6;\ 48)$$

$$K(1) = \frac{|\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1)|}{|\underline{r}'(1)|^3} = \sqrt{\frac{2596}{101^3}}$$

$$\rho(1) = \frac{1}{K(1)} = \sqrt{\frac{101^3}{2596}}.$$

EQ. PIANO OSCULATORE

Il piano osc. per P è $\perp$ a $\underline{r}'(1) \times \underline{r}''(1) =$

$= (-16, 6, 48)$

P $(4;3;1)$

$$\pi_{osc}: -16(x-4) + 6(y-3) + 48(z-1) = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{8x - 3y - 24z = -1}$$