Analisi matematica 2		6 febbraio 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

a) Determinare l'insieme di definizione D e dire se è un insieme aperto, limitato, connesso. Descrivere l'insieme ∂D (frontiera di D).

b) Verificare che f è differenziabile in D. Trovare i punti critici ed eventuali estremi locali della funzione.

c) Verificare che l'equazione

$$f(x,y) + 1 = 0$$

definisce implicitamente, in un intorno del punto $x = -1$, due funzioni $g_1(x)$, $g_2(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $g_1(-1) = 1$ e $g_2(-1) = -1$. Calcolare le derivate $g_1'(-1)$ e $g_2'(-1)$.

2.

1a) Stabilire in quale regione del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4t}{\sqrt{y}}$$

(giustificare la risposta).

1b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(1) = 1, \qquad \psi(-1) = 1$$

Specificare gli *intervalli massimali* di definizione delle soluzioni ϕ e ψ e tracciarne i grafici (qualitativi).

2) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = \cosh t$$

3.

i) Sia γ la curva piana di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}\,; \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Verificare che è una curva chiusa, semplice e regolare. Scrivere l'equazione del sostegno e disegnarlo nel piano cartesiano. Calcolare

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy^2\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^2\,\mathbf{j}$$

ii) Enunciare il teorema di Gauss-Green nel piano.

iii) Ricalcolare la circolazione del campo $\mathbf{F}$ usando la formula di Gauss-Green.

4.

1) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}}\, x^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(-2)^n}(x-2)^n$$

2a) Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3...$ funzioni della variabile reale x. Dire cosa si intende per *convergenza totale* in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

2b) Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x)$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$. Detta $f(x)$ la somma della serie, dimostrare che f è una funzione continua in $\mathbb{R}$, periodica e pari. Specificare il periodo.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è definita nell'insieme

$$D = \{(x, y) \mid xy \neq 0\}$$

che è il piano cartesiano privato degli assi. Dunque D è *aperto, non limitato e non connesso.* La frontiera di D è l'unione dei due assi:

$$\partial D = \{(x, 0),\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y),\, y \in \mathbb{R}\}$$

b) Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 y}; \quad f_y(x, y) = 1 - \frac{1}{xy^2}$$

sono funzioni continue in D. Dunque, f è di classe $\mathcal{C}^1(D)$ ed è differenziabile in ogni punto di D per la condizione sufficiente di differenziabilità.
I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(1 - \frac{1}{x^2 y}\right) \mathbf{i} + \left(1 - \frac{1}{xy^2}\right) \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Risolvendo il sistema troviamo l'unica soluzione

$$(x, y) = (1, 1)$$

Calcolando le derivate seconde

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3 y}; \quad f_{xy}(x, y) = g_{yx}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}; \quad f_{yy}(x, y) = \frac{2}{xy^3}$$

e valutando la matrice Hessiana in $(1, 1)$, si ottiene

$$\det \mathbf{H}_f(1, 1) = 3 > 0$$

Poiché $f_{xx}(1, 1) = 2 > 0$, si conclude che il punto $(1, 1)$ è di *minimo locale* stretto. Il valore assunto dalla funzione è $f(1, 1) = 3$.

c) Ponendo $x = -1$ nell'equazione $f(x, y) + 1 = 0$ si trova

$$y - \frac{1}{y} = 0$$

che ha le due soluzioni $y = 1$ e $y = -1$. Dunque la funzione

$$F(x, y) \equiv x + y + \frac{1}{xy} + 1$$

soddisfa $F(-1,1)=0$ e $F(-1,-1)=0$. Inoltre, F è di classe $\mathcal{C}^1$ nei due aperti (rispettivamente il secondo e terzo quadrante) che contengono i due punti. Per verificare le ipotesi del teorema della funzione implicita resta da valutare la derivata F_y in ciascuno dei due punti origine $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Abbiamo

$$F_y(x,y)=f_y(x,y)=1-\frac{1}{xy^2}$$

Dunque $F_y(-1,1)=F_y(-1,-1)=2\neq 0$. Le ipotesi sono soddisfatte in entrambi i casi. Dunque esistono due funzioni g_1 e g_2, definite in un intorno di $x=-1$ e tali che $g_1(-1)=1$, $g_2(-1)=-1$. Le due funzioni sono di classe $\mathcal{C}^1$ e le loro derivate nel punto $x=-1$ sono date rispettivamente dalle formule

$$g_1'(-1)=-\frac{f_x(-1,1)}{f_y(-1,1)},\qquad g_2'(-1)=-\frac{f_x(-1,-1)}{f_y(-1,-1)}$$

Dal calcolo esplicito si ottiene:

$$g_1'(-1)=0,\qquad\qquad g_2'(-1)=-1$$

2a. Il secondo membro dell'equazione è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ nell'aperto

$$\Omega=\big\{(t,y)\,|\,y>0\big\}$$

Dunque il teorema di esistenza e unicità locale vale in Ω. L'equazione è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti. Integrale generale:

$$\int\sqrt{y}\,dy=\int 4t\,dt+C$$

$$\frac{2}{3}\,y^{3/2}=2t^2+C$$

(rinominando la costante arbitraria)

$$y^{3/2}=3t^2+C$$

Esplicitando y in funzione di t si ottiene

$$y=(3t^2+C)^{2/3}\qquad\qquad \big(3t^2+C>0\big)$$

La curva integrale che passa per il punto $(1,1)$ è (nell'intervallo massimale di definizione)

$$\phi(t)=(3t^2-2)^{2/3},\qquad\qquad t\in(\sqrt{2/3},+\infty)$$

La curva che passa per $(-1,1)$ è

$$\psi(t)=(3t^2-2)^{2/3},\qquad\qquad t\in(-\infty,-\sqrt{2/3})$$

2b. Equazione omogenea associata:

$$z'' - z = 0$$

Integrale generale omogenea:

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:
Poiché $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, dal principio di sovrapposizione e osservando che ± 1 sono radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea, si cerca una soluzione nella forma

$$\psi(t) = t(Ae^t + Be^{-t})$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = -\frac{1}{4}$$

Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{t}{2} \sinh t$$

3.

i) La curva è chiusa poiché

$$\mathbf{r}(0) = 2\,\mathbf{i} = \mathbf{r}(2\pi)$$

La curva è semplice perchè l'equazione $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ equivale a $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ e $\sin(t_1) = \sin(t_2)$, da cui segue $t_1 = t_2$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Il vettore tangente

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

è sempre diverso da zero in quanto

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 1, \qquad \forall\ t$$

Dalle equazioni parametriche

$$x = 1 + \cos t, \qquad y = \sin t$$

si ricava l'equazione del sostegno

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Si tratta di una circonferenza passante per l'origine, centrata in $(1, 0)$ e di raggio unitario.

Calcolo della circolazione:

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos t)\sin^2 t(-\sin t)\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos t)^2 \cos t\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^3 t(1+\cos t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2 \cos t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\cos t + 2\cos^2 t + \cos^3 t\big)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi
\end{aligned}$$

iii) *Calcolo con la formula di Gauss-Green:* detto D il dominio (il cerchio) racchiuso da γ, si osserva che con la parametrizzazione data la frontiera di D è percorsa in senso positivo. Abbiamo allora

$$\oint_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy = \int\int_D \big(\partial_x F_2 - \partial_y F_1\big)\, dx\, dy = \int\int_D (x - xy)\, dx\, dy$$

Per ragioni di simmetria abbiamo

$$\int\int_D (x - xy)\, dx\, dy = \int\int_D x\, dx\, dy$$

L'ultimo integrale si può calcolare con le coordinate polari *centrate* in $(1,0)$:

$$x = 1 + \rho\, \cos\theta, \qquad y = \rho\, \sin\theta, \qquad 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\int\int_D x\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \rho\cos\theta)\, \rho\, d\theta\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = 2\pi\, \frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

4.

1) La serie (a) è centrata nell'origine; per il criterio della radice, il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(-1, 1)$. Gli estremi sono esclusi perchè, essendo $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$, in tali punti il termine generale della serie non tende a zero.

La serie (b) è centrata nell'origine. Raggio di convergenza :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(3^{-\sqrt{n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 3^{-1/\sqrt{n}} = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(-1, 1)$. Agli estremi $x = 1$ e $x = -1$ abbiamo rispettivamente le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

che convergono (per il criterio del confronto). L'intervallo di convergenza è dunque $[-1, 1]$.

La serie (c) è centrata in $x_0 = 2$; applicando il criterio del rapporto, il raggio di convergenza è dato dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Dunque $R = 2$ e la serie converge nell'intervallo $(0, 4)$. Gli estremi sono esclusi perchè per $x = 0$ e $x = 4$ il termine generale della serie è illimitato.

2) La serie data converge totalmente in $\mathbb{R}$; infatti:

$$\frac{1}{n^2} |\cos(2\pi nx)| \le \frac{1}{n^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente. Per il criterio di Weierstrass, la serie converge *uniformemente in* $\mathbb{R}$; poiché tutti i termini della serie sono funzioni continue, si conclude che la somma è pure una funzione continua. Inoltre, per ogni n vale

$$\cos\big(2\pi n(-x)\big) = \cos(2\pi nx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dunque anche la somma della serie soddisfa la stessa condizione. Infine, il periodo T è uguale al periodo del primo termine $\cos(2\pi x)$, per cui $T = 1$.