Come riconoscere i vari tipi di singolarità dallo sv. Laurent?

- z^0 sing. eliminabile $\Longleftrightarrow$ parte singolare dello sviluppo $= 0$.
- z^0 polo ?
- z^0 sing. essenziale ?

Idea:

z^0 polo per f $\Longleftrightarrow$ z^0 zero per $\frac{1}{f}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lim_{z\to z^0} f(z) = \infty \qquad\qquad \lim_{z\to z^0} \frac{1}{f} = 0$$

$$\left(\lim_{z\to z^0} |f(z)| = +\infty\right) \qquad\qquad \left(\lim_{z\to z^0} \frac{1}{|f(z)|} = 0\right)$$

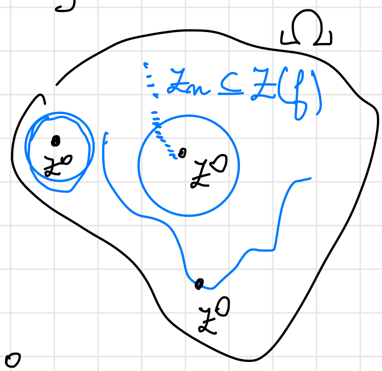
$$\frac{1}{|f(z)|} = \left|\frac{1}{f(z)}\right|$$

Principio di identità

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, e supponiamo Ω connesso $^{(*)}$

Sia $Z(f) = \{ z \in \Omega : f(z) = 0 \}$.

Sono equivalenti:



(1) $z^0 \in acc(Z(f))^{(**)}$

$\Updownarrow$

(2) $f^{(n)}(z^0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Updownarrow$

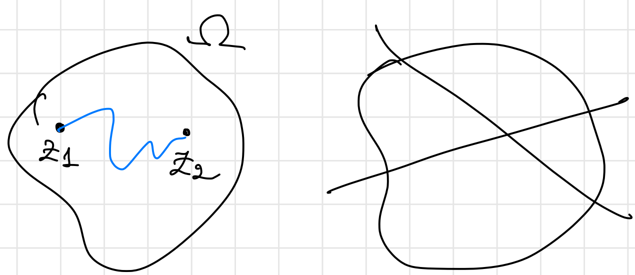
(3) $Z(f)$ contiene un intorno di z^0.

$\Updownarrow$

(4) $Z(f) \equiv \Omega \qquad (f \equiv 0 \text{ in } \Omega)$

Conclusione: $Z(f) =$
- è fatto da PUNTI ISOLATI (non ha PUNTI DI ACCUMULAZIONE)
- coincide con tutto Ω.

$(*)$



$(**)$ $\forall\, U(z^0) \quad \exists \quad z \in Z(f) \cap (U(z^0) \setminus \{z^0\})$.

$\exists \ z_n \subseteq Z(f) \setminus \{z^0\} : \quad \lim_n z_n = z_0$.

Ordine di zeri

Sia f olomorfa su Ω connesso, $f \not\equiv 0$ su Ω.

Sia $z^0 \in Z(f)$ $\quad (f(z^0)=0)$.

Per il principio di identità, z^0 è uno ZERO ISOLATO.

Inoltre (2) falsa $\Rightarrow$ $\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z^0) \neq 0\} \neq \phi$.

$\nu := \min \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z^0) \neq 0\}$ $\quad$ ORDINE DELLO ZERO z_0

Esempio.
- f ha uno zero di ordine 2 in z^0 $\iff$ $f(z^0) = f'(z^0)$ MA $f''(z^0) \neq 0$.
- f ha uno zero di ordine 4 in z^0 $\iff$ $f(z^0) = f'(z^0) = f''(z^0) = f'''(z^0)$ MA $f^{(IV)}(z^0) \neq 0$

Oss: ν è anche caratterizzato da:

- $$f(z) = \sum_{n \geq \nu} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{c_\nu}_{\neq 0} (z - z_0)^\nu + o(z - z^0)^\nu$$

- $$\exists \lim_{z \to z^0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

BUON ORDINAMENTO : $\quad \forall A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \phi \Rightarrow \exists \min A$

(equivale al PRINCIPIO DI INDUZIONE).

Ordine di poli

z^0 polo per $f \iff z^0$ zero per $\frac{1}{f}$

Def. Sia z^0 polo per f. Chiamiamo ORDINE DEL POLO z^0 l'ordine di z^0 come z^0 per $\frac{1}{f}$.

Esempio. $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ha un polo in $z^0 = 0$.

$\left(\lim_{z \to 0} \left| \frac{1}{z^2} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{1}{|z|^2} = +\infty \right)$.

Poichè $\frac{1}{f(z)} = z^2$ ha in $z^0 = 0$ uno zero di ORDINE 2, diremo che $\frac{1}{z^2}$ ha in $z^0 = 0$ un polo di ORDINE 2.

Def. In particolare si dice POLO SEMPLICE un polo di ordine 1

Esempio $f(z) = \frac{1}{z}$ ha un polo semplice in $z^0 = 0$

(poichè z ha nell'origine uno zero di ordine 1).

Oss. L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

- z^0 polo di ordine ν per f $\iff$

  z^0 zero di ordine ν per $\frac{1}{f}$ $\iff$

$$\exists \lim_{z \to z^0} \frac{1}{(z-z^0)^\nu} \cdot \frac{1}{f(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \iff$$

$$\exists \lim_{z \to z^0} (z-z^0)^\nu f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (*)$$

- z^0 polo di ordine ν per f $\iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \text{con } c_{-\nu} \neq 0.$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow.$$

$$(z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n+\nu}.$$ Quindi vale

$(*)$ $\iff$ tutti i coeff. c_n con $n+\nu<0$ si annullano e il coeff. $c_{-\nu} \neq 0$.

Risposta alle domande:

Come è fatto lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo ??

La parte singolare ha un numero finito di termini

Es. Polo di ord 3 in 0 :

$$\underbrace{c_{-3}\, z^{-3} + c_{-2}\, z^{-2} + c_{-1}\, z^{-1}} + c_0 + c_1 z + \dots$$

$$\underbrace{c_{-\nu}\, z^{-\nu} + c_{-\nu+1}\, z^{-\nu+1} + \dots\dots} + c_0 .$$

Riassumendo, posso classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, ovvero guardando la parte singolare:

- p. singolare nulla $\iff$ ELIMINABILE
- p. singolare con un num. FINITO di termini $\iff$ POLO
- p. singolare con un num. INFINITO di termini $\iff$ ESSENZIALE.

Osservazioni su zeri e poli.

① Se f e g hanno $\begin{cases} \text{entrambe uno zero in } z_0 \\ \text{entrambe un polo in } z_0 . \end{cases}$

Allora $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f'}{g'}$. (DE L'HOPITAL IN $\mathbb{C}$)

(Caso dello zero:

$$f(z) = \underset{\neq 0}{c_\nu} (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$
$$g(z) = \underset{\neq 0}{c_\eta} (z - z_0)^\eta + o(z - z_0)^\eta \quad)$$

② $\begin{cases} z_0 \text{ zero di ordine } \nu \text{ per } f \iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{(z - z_0) f'(z)}{f(z)} = \nu \\[2ex] z_0 \text{ polo di ordine } \nu \text{ per } f \iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{(z - z_0) f'(z)}{f(z)} = -\nu \end{cases}$

(MODO PER CALCOLARE L'ORDINE).

$$f(z) = \underset{\neq 0}{c_\nu} (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$
$$f'(z) = \nu c_\nu (z - z_0)^{\nu - 1} + o(z - z_0)^{\nu - 1}$$
$$\Rightarrow \frac{(z - z_0) f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu}{c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu}$$
$$\xrightarrow[z \to z_0]{} \nu$$

(3) z^0 zero di ordine ν per f, con $\nu \geq 1$ $\Rightarrow$
z^0 zero di ordine $\nu - 1$ per f'.

z^0 polo di ordine ν per f, con $\nu \geq 1$ $\Rightarrow$
z^0 polo di ordine $\nu + 1$ per f'

<u>Es.</u>

$$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = 2z$$

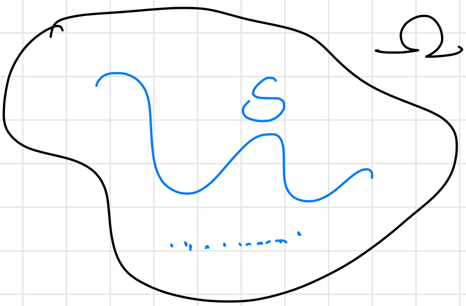
$$f(z) = \frac{1}{z^2} \longrightarrow f'(z) = -2z^{-3}$$

Teorema di unicità del prolungamento analitico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, e sia $S \subseteq \Omega$ tale che

$$[\mathrm{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset]$$

Data $f: S \to \mathbb{C}$, esiste al più una $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa (analitica) tale che $\tilde{f}|_S = f$.



Dim. Supponiamo $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ siano prolungamenti di f. TESI: $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$

Considero $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$. TESI: $g \equiv 0$.

olomorfa.

PRINCIPIO DI IDENTITA'

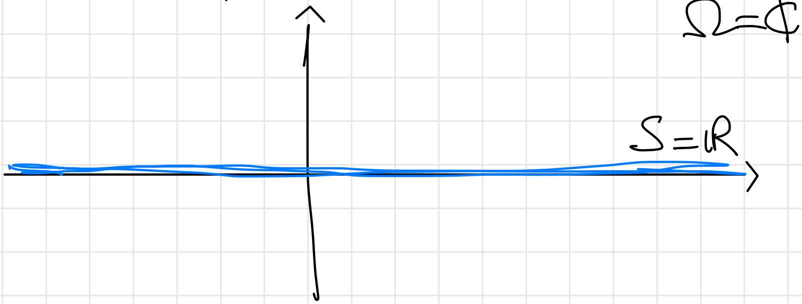
$Z(g) \supseteq S$ $\quad g|_S = \tilde{f}_1|_S - \tilde{f}_2|_S = f - f = 0$

$\Rightarrow Z(g)$ ha punti di acc in Ω. $\Rightarrow Z(f) \equiv \Omega$ ■

Esempio

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Omega = \mathbb{C} \quad , \quad S = \mathbb{R}.$



$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\tilde{f}_1(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$

$\tilde{f}_2(z) = 0.$

$\Longrightarrow$ unicità prol. analitico

$\sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$

- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$