# Spazi euclidei

Maurizio Citterio

Marco Boella     Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, II semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Nello spazio ordinario definiamo il prodotto scalare di vettori geometrici $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come il numero reale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha \ ,$$

dove $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$ sono i moduli di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, mentre $\alpha$ è l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Sappiamo cosa significhi “misurare lunghezze e angoli”?

Sfruttando le proprietà del prodotto scalare, fissato un sistema di riferimento cartesiano con i “versori” a due a due “ortogonali” $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, possiamo ridefinire il prodotto scalare (lo stesso sopra introdotto!) come

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_u\mathbf{i} + y_u\mathbf{j} + z_u\mathbf{k}) \cdot (x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \ ,$$

e quindi

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad , \qquad \cos \alpha := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \ .$$

Vogliamo qui generalizzate la definizione di prodotto scalare in modo da estendere il concetto di ortogonalità e poter calcolare proiezioni, misurare lunghezze e angoli anche in altri contesti.

## Prodotti interni e spazi euclidei

### Definizione

Un **prodotto interno**, o **prodotto scalare** (definito positivo), su uno spazio vettoriale reale $V$ è una funzione

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}\ , \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

bilineare, simmetrica e definita positiva. Uno spazio vettoriale su cui sia definito un prodotto interno si dice **euclideo**.

Ricordiamo che

- la bilinearità è la linearità in entrambi gli argomenti, cioè il prodotto interno è distributivo e omogeneo: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, per ogni $k \in \mathbb{R}$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad , \qquad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\ ;$$
$$\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\ ;$$

- la simmetria è la commutatività del prodotto interno: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\ ;$$

- la positività si esprime affermando che per ogni $\mathbf{u} \in V$ risulta

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}\ .$$

# Spazi euclidei: esempi

1. Il *prodotto interno standard* rende $\mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo: per $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, si pone

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ .$$

2. Con una matrice $A$ quadrata di ordine $n$ possiamo definire su $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ .$$

Osserviamo che questo prodotto è

- ▷ bilineare per le proprietà del prodotto di matrici,
- ▷ simmetrico se e solo se $A$ è una matrice simmetrica,
- ▷ positivo se e solo se la "forma quadratica" $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ è "definita positiva", cioè $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Per esempio, un prodotto scalare (non standard) su $\mathbb{R}^2$ è dato da:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2 \ .$$

# Spazi euclidei: esempi

3. Lo spazio vettoriale $\mathcal{C}^0([a,b])$ delle funzioni reali di variabile reale continue su un intervallo $[a,b]$ è uno spazio euclideo quando si pone, per $f$ e $g$ in $\mathcal{C}^0([a,b])$ ,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

4. Come nel precedente esempio, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a $n$ a coefficienti reali nell'indeterminata $x$ è uno spazio euclideo quando si pone, per i polinomi $p$ e $q$ ,

$$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(t)q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

   Possiamo considerare $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ come “sottospazio euclideo” di $\mathcal{C}^0([a,b])$ .

5. Lo spazio $\mathbb{M}(m\times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali di tipo $m\times n$ è euclideo quando si pone, per le matrici $A$ e $B$ ,

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)\ .$$

### Definizione

Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori di uno spazio euclideo $V$.

- $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si dicono **ortogonali**, o perpendicolari, quando il loro prodotto scalare è nullo: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.
- La **norma**, o lunghezza, o modulo, del vettore $\mathbf{a}$ è il numero reale
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\,.$$
- Un vettore $\mathbf{a}$ si dice **unitario**, o versore, quando $\|\mathbf{a}\| = 1$.

### Esercizio

In uno spazio euclideo $V$. Provare che il vettore $\mathbf{v}$ è ortogonale ad ogni vettore di $V$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

### Esercizio

In uno spazio euclideo $V$. Provare che, se i vettori non nulli $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ sono a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

# Il teorema di Pitagora

In ogni spazio euclideo valgono i seguenti teoremi:

## Teorema (di Carnot)

*Per tutti i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *di uno spazio euclideo* $V$ *, si ha*

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \ .$$

## Teorema (di Pitagora)

*Se in uno spazio euclideo i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono ortogonali, allora*

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \ .$$

## Dimostrazioni.

Dalla definizione di norma, per le proprietà del prodotto interno, abbiamo il Teorema di Carnot:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \ .$$

Se inoltre $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ , si ha il Teorema di Pitagora. $\square$

## Esercizio

In uno spazio euclideo. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono a due a due ortogonali, allora

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_k\|^2 .$$

## Esercizio

Provare il Teorema del coseno: siano $a$ , $b$ , $c$ le misure dei lati di un triangolo e sia $\alpha$ l'angolo opposto al lato di misura $a$ ; si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

# Disuguaglianza di Schwarz

## Teorema (Disuguaglianza di Schwarz)

*Per tutti i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *di uno spazio euclideo* $V$ *, si ha*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \ .$$

## Dimostrazione.

Dati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, consideriamo il vettore $\mathbf{v} - t\mathbf{w}$, dove $t$ è un numero reale.Poiché il prodotto interno è positivo, si ha $\langle \mathbf{v} - t\mathbf{w}, \mathbf{v} - t\mathbf{w} \rangle \geq 0$, quindi

$$\langle \mathbf{v} - t\mathbf{w}, \mathbf{v} - t\mathbf{w} \rangle = t^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, allora la disuguaglianza di Schwarz è banalmente verificata; se invece $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora quanto abbiamo detto sopra impone che l'equazione $t^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ abbia discriminante non positivo, cioè

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \, \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0 \ .$$

Per la definizione di norma, da $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \, \|\mathbf{w}\|^2$ abbiamo la disuguaglianza di Schwarz. $\square$

### Esercizio

In uno spazio euclideo. Mostrare che $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$ se e solo se i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

### Esercizio

Riscrivere la disuguaglianza di Schwarz con i prodotti interni definiti negli esempi di spazi euclidei illustrati precedentemente.

# Angolo tra due vettori

Dalla disuguaglianza di Schwarz

$$-\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$$

segue che, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono entrambi non nulli,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \leq 1 \, .$$

Esiste quindi un *unico* angolo $\alpha$, tale che

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad , \qquad \cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \, .$$

Tale angolo si chiama l'**angolo** tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

## Teorema (Disuguaglianza triangolare)

*Se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono due vettori di uno spazio euclideo, allora risulta*

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \;.$$

## Dimostrazione.

Dalla disuguaglianza di Schwarz abbiamo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$, quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \leq \\ \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 \,. \end{aligned}$$

Da questo deduciamo la disuguaglianza triangolare. □

## Esercizio

Riscrivere la disuguaglianza triangolare con i prodotti interni definiti negli esempi di spazi euclidei illustrati precedentemente.

# Norma e distanza

## Esercizio

Un spazio vettoriale $V$ si dice *normato* quando è definita una funzione “norma” $\|.\| : V \times V \to \mathbb{R}$ che, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, verifichi le seguenti proprietà:

- ▷ positività: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, con $\|\mathbf{v}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- ▷ omogeneità: $\|t\mathbf{v}\| = |t|\|\mathbf{v}\|$;
- ▷ disuguaglianza triangolare: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Provare che ogni spazio euclideo è normato ponendo $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.

## Esercizio

Un insieme $X$ è detto *spazio metrico* quando è definita una funzione “distanza” $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che, per ogni $x, y \in X$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, verifichi le seguenti proprietà:

- ▷ positività: $d(x, y) \geq 0$, con $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- ▷ simmetria: $d(x, y) = d(y, x)$;
- ▷ disuguaglianza triangolare: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Provare che ogni spazio euclideo è metrico ponendo $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

# Base ortogonale, base ortonormale.

## Definizione

- Una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $V$ si dice **ortogonale** quando i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ a due a due ortogonali:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

- Una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $V$ si dice **ortonormale** quando i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono unitari e a due a due ortogonali:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Mostreremo più avanti (metodo di Gram-Schmidt) che ogni spazio euclideo ammette una base ortonormale.

## Esercizio

Provare che, se i vettori non nulli $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ sono a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

## Proiezione ortogonale e distanza minima

### Teorema (della proiezione ortogonale)

*Sia $V$ uno spazio vettoriale euclideo e $W$ un suo sottospazio.*

1. *Ogni vettore $\mathbf{a} \in V$ si scrive in modo unico come*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\|} + \mathbf{a}_{\perp} \ ,$$

   *dove $\mathbf{a}_{\|}$ è un vettore di $W$ (la proiezione ortogonale di $\mathbf{a}$ su $W$) e $\mathbf{a}_{\perp}$ è un vettore ortogonale a (ogni vettore di) $W$.*

2. *Data una base ortogonale $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ di $W$, risultano*

$$\mathbf{a}_{\|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_m \rangle}{\|\mathbf{b}_m\|^2} \mathbf{b}_m \ , \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\|} \ .$$

   *Se $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ è una base ortonormale di $W$, allora*

$$\mathbf{a}_{\|} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m \ , \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\|} \ .$$

3. *La proiezione ortogonale $\mathbf{a}_{\|}$ di $\mathbf{a}$ su $W$ è il vettore di $W$ a distanza minima da $\mathbf{a}$, cioè*

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\|}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{w}\| \quad \textit{per ogni} \quad \mathbf{w} \in W, \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{a}_{\|} \ .$$

# Proiezione ortogonale e distanza minima

## Dimostrazione.

Fissiamo una base ortogonale $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)$ di $W$. Il vettore proiezione ortogonale $\mathbf{a}_\parallel$ è un vettore di $W$, quindi si scrive in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{a}_\parallel = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{b}_m \ .$$

Il vettore $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel$ è ortogonale a ogni vettore di $W$ se e solo se $\langle \mathbf{a}_\perp, \mathbf{b}_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, cioè

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_\perp, \mathbf{b}_i \rangle &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel, \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{a} - (\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{b}_m)\,, \mathbf{b}_i \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i \rangle - \alpha_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i \rangle - \alpha_2 \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_i \rangle + \cdots - \alpha_m \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_i \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i \rangle - \alpha_i \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i \rangle - \alpha_i \|\mathbf{b}_i\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Dall'ultima uguaglianza si ha $\alpha_i = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Se $\mathbf{w} \in W$, anche $\mathbf{a}_\parallel - \mathbf{w} \in W$ è ortogonale al vettore $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel$. Per il teorema di Pitagora, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{a}_\parallel$, si ha

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{w}\|^2 = \|\,(\mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel) + (\mathbf{a}_\parallel - \mathbf{w})\,\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel\|^2 + \|\mathbf{a}_\parallel - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel\|^2 \ .$$

$\square$

# Complemento ortogonale

## Definizione

Sia $W$ un sottospazio di uno spazio euclideo $V$. L'insieme $W^\perp$ dei vettori di $V$ che sono ortogonali a tutti i vettori di $W$

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ per ogni } \mathbf{w} \in W\}$$

si dice **complemento ortogonale** di $W$.

## Esercizio

Provare che

1. $W^\perp$ è un sottospazio di $V$;
2. $W^\perp \cap W = \{\mathbf{0}\}$;
3. $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

Si osservi che la prima parte del Teorema delle proiezioni ortogonali può essere riformulato nel seguente modo:

$$V = W \oplus W^\perp .$$

### Proposizione

*In ogni matrice il rango delle righe coincide con il rango delle colonne.*

### Dimostrazione.

Consideriamo una matrice $A$ di tipo $m \times n$ e l'applicazione lineare associata $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. È noto che l'immagine $\operatorname{Im} L_A$ è lo spazio $C$ generato dalle colonne della matrice $A$, mentre il nucleo $\ker L_A$ è lo spazio $S$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; per il Teorema di Nullità + Rango risulta $\dim S = n - \dim C$.

Per definizione di prodotto "riga per colonna", un vettore $\mathbf{x}$ è soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se e solo se il prodotto scalare tra ogni riga di $A$ e $\mathbf{x}$ è nullo; dunque $S$ è il complemento ortogonale dello spazio $R$ generato dalle righe della matrice $A$.

Poiché $\mathbb{R}^n = R \oplus R^\perp$ (e quindi $\dim \mathbb{R}^n = \dim R + \dim R^\perp$), risulta

$$\dim R = n - \dim R^\perp = n - \dim S = n - (n - \dim C) = \dim C.$$

□

# Coordinate su basi ortogonali e ortonormali

Osserviamo che, nel caso in cui il sottospazio $W$ di $V$ coincida con $V$, la seconda parte del Teorema delle proiezioni ortogonali descrive le coordinate di un vettore $\mathbf{a}$ di $V$ rispetto a basi ortogonali o ortonormali:

1. Se $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ è una base ortogonale di $V$, allora

$$\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_n \rangle}{\|\mathbf{b}_n\|^2} \mathbf{b}_n \ ,$$

   cioè le coordinate $[\mathbf{a}]_{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{a}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ sono

$$[\mathbf{a}]_{\mathcal{B}} = \left( \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_n \rangle}{\|\mathbf{b}_n\|^2} \right) \ .$$

2. Se $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortonormale di $V$, allora

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n \ ,$$

   cioè le coordinate $[\mathbf{a}]_{\mathcal{U}}$ di $\mathbf{a}$ rispetto la base $\mathcal{U}$ sono

$$[\mathbf{a}]_{\mathcal{U}} = (\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_n \rangle) \ .$$

# Importanza delle basi ortonormali

## Teorema

*Sia $V$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ con prodotto interno $\langle -,-\rangle_V$ e si consideri il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$.*
*Fissata una base ortonormale $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di $V$, l'isomorfismo $\varphi_{\mathcal{U}}$ che assegna ad ogni vettore $\mathbf{v}$ la $n-$ upla delle coordinate rispetto la base $\mathcal{U}$*

$$\varphi_{\mathcal{U}} : V \to \mathbb{R}^n , \quad \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}}$$

*preserva il prodotto scalare, cioè*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_V = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \cdot \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) .$$

## Dimostrazione.

Posto $[\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} = (x_1, ..., x_n)$ e $[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}} = (y_1, ..., y_n)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_V &= \langle x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n\rangle_V \\ &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \\ &= (x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) \\ &= [\mathbf{v}]_{\mathcal{U}} \cdot [\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}\end{aligned}$$

□

Definizione

Le coordinate rispetto a una base ortonormale si chiamano **coordinate cartesiane**.

Il teorema appena dimostrato suggerisce lo slogan:

*"In coordinate cartesiane i conti si fanno come in $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard".*

Infatti

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_V = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

e, in particolare,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \ .$$

Teorema (Gram-Schmidt)

*Data una qualunque base* $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ *di uno spazio vettoriale euclideo* $V$ *, si può costruire un'altra base* $(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ *di* $V$ *con le proprietà seguenti:*

1. $(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ *è una base ortogonale;*
2. *per ogni* $k = 1, ..., n$ *, si ha* $L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) = L(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)$ *.*

*Si ottiene poi una base ortonormale dividendo ogni vettore della base ortogonale* $(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ *così costruita per la sua norma.*

Si osservi che il Teorema di Gram-Schmidt garantisce (tra l'altro) che ogni spazio euclideo ammette una base ortonomale.

Supponiamo che $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ sia una base qualunque di $V$. Per costruire una base ortogonale di $V$, si pone:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 \rangle}\mathbf{v}'_1, \\
\mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}'_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_2 \rangle}\mathbf{v}'_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}'_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 \rangle}\mathbf{v}'_1, \\
&\vdots \\
\mathbf{v}'_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle}{\langle \mathbf{v}'_{n-1}, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle}\mathbf{v}'_{n-1} - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 \rangle}\mathbf{v}'_1.
\end{aligned}
$$

Allora la base $(\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ è ortogonale. Se poi si vuole una base ortonormale, basta dividere ogni vettore $\mathbf{v}'_i$ per la sua norma.