Ricerca di soluzioni particolari: metodo di somiglianza

Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del II ordine: $ay'' + by' + cy = f(x)$, indichiamo con $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ il polinomio caratteristico, e con $\bar{y}$ una soluzione particolare. Allora, se:

1. $f(x) = P_n(x)$ (polinomio di grado n)

$$\bar{y} = \begin{cases} Q_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ xQ_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è radice semplice di } P(\lambda) \\ x^2 Q_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è radice doppia di } P(\lambda), \end{cases}$$

dove $Q_n(x)$ è un opportuno polinomio di grado n.

2. $f(x) = Ae^{\alpha x}$

$$\bar{y} = \begin{cases} ke^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ kxe^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è radice semplice di } P(\lambda) \\ kx^2 e^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è radice doppia di } P(\lambda), \end{cases}$$

dove k è una costante opportuna.

3. $f(x) = A\cos\beta x$ o $A\sin\beta x$ o $A\cos\beta x + B\sin\beta x$

$$\bar{y} = \begin{cases} k\cos\beta x + h\sin\beta x & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ x(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è radice di } P(\lambda), \end{cases}$$

dove k e h sono costanti opportune.

4. $f(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x$ o $Ae^{\alpha x}\sin\beta x$

$$\bar{y} = \begin{cases} e^{\alpha x}(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ xe^{\alpha x}(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ è radice di } P(\lambda), \end{cases}$$

dove k e h sono costanti opportune.

5. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

$$\bar{y} = \begin{cases} Q_n(x)e^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ xQ_n(x)e^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è radice semplice di} P(\lambda) \\ x^2 Q_n(x)e^{\alpha x} & \text{se } \lambda = \alpha \text{ è radice doppia di} P(\lambda), \end{cases}$$

dove $Q_n(x)$ è un opportuno polinomio di grado n.

6. $f(x) = P_n(x)\cos\beta x$ o $P_n(x)\sin\beta x$

$$\bar{y} = \begin{cases} Q_n(x)(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ xQ_n(x)(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è radice semplice di} P(\lambda), \end{cases}$$

dove $Q_n(x)$ è un opportuno polinomio di grado n.

7. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ o $P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$\bar{y} = \begin{cases} Q_n(x)e^{\alpha x}(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ non è radice di} P(\lambda) \\ xQ_n(x)e^{\alpha x}(k\cos\beta x + h\sin\beta x) & \text{se } \lambda = \alpha + i\beta \text{ è radice semplice di} P(\lambda), \end{cases}$$

dove $Q_n(x)$ è un opportuno polinomio di grado n.