Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello di Analisi III, 16 febbraio 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

Per gli studenti di METODI: svolgere ES. 1, ES 2 a), b), TEORIA a), b)

ESERCIZIO 1. (12 punti)
Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z}{\cosh(iz)} .$$

a) Determinare le sue singolarità isolate, e classificarle.

b) Per ciascuna di esse, calcolare il corrispondente residuo.

c) Calcolare $\int_\gamma f(z)dz$, dove γ è la spezzata poligonale ottenuta congiungendo, nell'ordine, i seguenti punti:

$$0, \quad 1+i, \quad 2, \quad 1-i, \quad 0, \quad -1+i, \quad -2, \quad -1-i, \quad 0.$$

d) Al variare di $n \in \mathbb{N}$, calcolare $\int_{\gamma_n} f(z)dz$, dove γ_n è la spezzata poligonale ottenuta congiungendo, nell'ordine, i seguenti punti:

$$0, \quad n(1+i), \quad 2n, \quad n(1-i), \quad 0, \quad n(-1+i), \quad -2n, \quad (-1-i)n, \quad 0.$$

Soluzione.
a) Si ha $f(z) = \frac{z}{\cos(z)}$. Pertanto le singolarità di f sono gli zeri della funzione coseno in campo complesso, e sono tutti poli semplici: $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

b) Si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{z_k}{-\sin z_k} = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = (-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

c) Poiché $3\pi/2 > 2$, l'indice della curva assegnata rispetto a tutti i punti z_k è nullo, tranne che per $k = 0$ ($z_0 = \pi/2$) e per $k = -1$ ($z_{-1} = -\pi/2$). Si ha inoltre

$$\mathrm{Ind}(\gamma, \pi/2) = -1, \qquad \mathrm{Ind}(\gamma, -\pi/2) = 1.$$

Pertanto per il Teorema dei Residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[-1 \cdot \mathrm{Res}(f, \pi/2) + 1 \cdot \mathrm{Res}(f, -\pi/2)] = 2\pi i[-1 \cdot (-\pi/2) + 1 \cdot (-\pi/2)] = 0.$$

d) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'indice della curva assegnata rispetto a tutti i punti z_k è nullo, tranne che per un numero finito (pari) di punti, dei quali metà si trovano sul semiasse reale positivo, e i loro simmetrici sul semiasse reale negativo. Poiché l'indice di γ_n rispetto ai punti sul semiasse positivo è -1, mentre rispetto ai punti sul semiasse negativo è 1, e al contempo la funzione $z_k \mapsto \mathrm{Res}(f, z_k)$ è pari, si ha che per ogni $n \in N$, l'integrale di f su γ_n è nullo.

ESERCIZIO 2. (12 punti)

a) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)$, 2π-periodica, dispari, tale che, per $x \in [0, \pi]$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

b) Stabilire se vi è convergenza in $L^2(-\pi, \pi)$, e calcolare la norma in l^2 della successione dei coefficienti di Fourier determinati al punto precedente.

c) Determinare la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x) & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & t \ge 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Soluzione.

a) Si ha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, con

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\ dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\ dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{4}{\pi(2k+1)^2} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}; \end{aligned}$$

dunque

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \sin((2k+1)x)\,.$$

b) Poiché $f \in L^2(-\pi, \pi)$, vi è convergenza in $L^2(-\pi, \pi)$. Inoltre per l'identità di Bessel, la norma in l^2 dei coefficienti di Fourier è uguale a$(1/\sqrt{2\pi})$ per la norma di f in $L^2(-\pi, \pi)$, la quale è data da:

$$\left\{2\int_0^{\pi/2} x^2\, dx + 2\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)^2\right\}^{1/2} = \left(2\frac{\pi^3}{24} + 2\frac{\pi^3}{24}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^3}{6}\right)^{1/2}$$

c) Grazie al punto precedente, possiamo riscrivere il problema come

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & t \ge 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Date le condizioni al contorno, cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(nx);$$

procedendo formalmente, ovvero derivando per serie e inserendo u nell'equazione otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Tenuto anche conto della condizione iniziale $u(x, 0) = 0$, perveniamo quindi alle equazioni differenziali

$$\begin{cases} c_n'(t) + n^2 c_n(t) = b_n \\ c_n(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_n(t) = \frac{b_n}{n^2}(1 - e^{-n^2 t}).$$

Ricordando l'espressione dei coefficienti b_n trovata al punto precedente, abbiamo che

$$c_n(t) = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{4}{\pi(2k+1)^4} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases};$$

e dunque la soluzione formale è

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^4} (1 - e^{-(2k+1)^2 t}) \sin((2k+1)x).$$

Osserviamo che sia la serie corrispondente a u, sia quelle corrispondenti a u_t e a u_{xx} convergono uniformemente, pertanto l'espressione trovata costituisce effettivamente la soluzione del problema.

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

a) Enunciare il teorema di Fubini.

b) Enunciare il teorema di Riemann-Lebesgue.

c) Mostrare che vale l'uguaglianza $x\delta' = -\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (dove δ indica la delta di Dirac in $x = 0$). Determinare poi delle condizioni sufficienti su una assegnata funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, affinché valga l'uguaglianza $g(x)\delta' = -\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soluzione

a), b) Si veda uno dei testi consigliati

c) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle x\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle = -\langle \delta, x\varphi' + \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi\rangle \,.$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle g(x)\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', g(x)\varphi\rangle = -\langle \delta, (g(x)\varphi)'\rangle = -\langle \delta, g(x)\varphi' + \varphi g'(x)\rangle = -g(0)\varphi'(0) - g'(0)\varphi(0) \,.$$

Affinché l'espressione sopra sia uguale a $-\langle \delta, \varphi\rangle = -\varphi(0)$, è sufficiente che la funzione g soddisfi le condizioni $g(0) = 0$ e $g'(0) = 1$.