Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi - A. A. 2009/2010
Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
I Appello - Modulo di Metodi Analitici (11-2-10) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: __________________

I. ANALISI COMPLESSA

1. Enunciare il principio di identità per funzioni olomorfe.
2. Mostrare che lo stesso principio non è valido per funzioni di variabile reale, costruendo un esempio di una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che l'insieme degli zeri di f contenga punti di accumulazione, ma non contenga nessun intervallo.

1. Si veda un testo o gli appunti del corso.
2. Si può prendere ad esempio:

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

II. ANALISI FUNZIONALE

Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Determinare

$$\min_{p\in[1,2]} \|f\|_{L^p(I)} \ ,$$

1. nel caso in cui $f(x) = x$;
2. nel caso in cui f è una generica funzione in $L^2(I)$.

Per la disuguaglianza di Holder si ha, per ogni $p \geq 1$,

$$\|f\|_{L^1(I)} \leq |I|^{(p-1)/p}\|f\|_{L^p(I)} \ .$$

Poiché $|I| = 1$, ciò implica che il minimo richiesto è assunto in $p = 1$, ed è uguale quindi a $\|f\|_{L^1(I)}$.

Nel caso particolare della funzione $f(x) = x$, si può giungere alla stessa conclusione anche facendo il conto esplicito per cui $\|f\|_{L^p(I)} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} =: \Phi(p)$, e minimizzando la funzione $\Phi(p)$ per $p \in [1,2]$. In particolare il valore del minimo è uguale a $\Phi(1) = 1/2$.

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER

Sia

$$f(x) := \cos^2(x)\,\chi_{[-1,1]}(x)\ ,\quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Studiarne a priori la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi)$ e poi calcolarla esplicitamente.
2. Dire se la seguente equazione ammette soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$u(x) + iu'(x) * e^{-|x|} = f(x)\ ,\quad x \in \mathbb{R}$$

e in caso affermativo determinarle.

1. Studio a priori:

(i) f reale e pari $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ reale e pari;

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f}$ continua e nulla all'infinito;

(iii) $x^n f \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 1 \Longrightarrow \hat{f}^{(n)}$ continua e nulla all'infinito per ogni $n \geq 1$ e dunque $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$;

(iv) $f, xf \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow f, \hat{f}' \in L^2(\mathbb{R})$ ed in particolare $f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$.

Calcolo di $\hat{f}$:

$$f(x) = \frac{(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2)}{4}\,\chi_{[-1,+1]}(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{4}\left[\mathcal{F}\left(\chi_{[-1,+1]}(x)\right)(\xi-2) + \mathcal{F}\left(\chi_{[-1,+1]}(x)\right)(\xi+2) + 2\mathcal{F}\left(\chi_{[-1,+1]}(x)\right)(\xi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\xi-2)}{\xi-2} + \frac{\sin(\xi+2)}{\xi+2} + 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right].\end{aligned}$$

Si noti che le discontinuità in $\xi = \pm 2$ e $\xi = 0$ sono eliminabili!

2. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione data, applicando la $\mathcal{F}$ trasformata ad ambo i membri si deduce che

$$\hat{u}(\xi) + i\mathcal{F}\left(u'(x)\right)(\xi)\,\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi)\left[1 - \frac{2\xi}{1+\xi^2}\right] = \hat{f}(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \hat{u}(\xi) = \frac{1+\xi^2}{(1-\xi)^2}\,\hat{f}(\xi).$$

Poiché la funzione ottenuta non appartiene ad $L^\infty(\mathbb{R})$, se ne conclude che l'equazione data non ammette soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$.