LIMITI E CONTINUITÀ

26-3-2020

ESERCIZIO 1. Calcolare i seguenti limiti o stabilire che non esistono.

1) $$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}}_{= f(x,y)}$$

Restringo $f(x,y)$ alla retta $y=mx$

$$g(x) = f(x,mx) = \frac{x^3-2xmx+m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{x^{\cancel{3}\,1}-2m\cancel{x^2}+m^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$$

$$= \frac{x-2m+m^2}{1+m^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{m^2-2m}{m^2+1}$$ è diverso $\forall m \Longrightarrow$

f non ammette limite

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log(x^2+y^2)$$

$$g(x) = f(x, mx) = m x^2 \log(x^2 + m^2x^2) =$$
$$= m x^2 \log\left[x^2(1+m^2)\right].$$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \longrightarrow$ non concludo che il limite dato sia nullo. Uso le coordinate polari:

$$|xy \log(x^2+y^2)| = |\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \log \rho^2| =$$
$$= |2\rho^2 \log\rho \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta| \leq |2\rho^2\log\rho| \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

Il limite dato esiste ed è nullo.

NOTA. Per dimostrare che $f(x,y) \longrightarrow L$ per $(x,y) \to (0,0)$ è sufficiente riuscire a dimostrare che

$$|f(\rho,\theta) - L| < g(\rho)$$ non c'è dipendenza da θ!!

con $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0^+$.

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \overbrace{\operatorname{sen} xy}^{\sim xy}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta \, \rho \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}}\right| \leq \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

oss. $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^2y|}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}|y|}{\cancel{x^2}} = |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$$

$$\left|\frac{y^4}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\,\mathrm{sen}^4\theta}{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta+\rho^{\cancel{4}\,2}\,\mathrm{sen}^4\theta}\right| \quad \text{... non mi aiuta}$$

- Restringo f all'asse x $(y=0)$

$$g(x) = f(x,0) = 0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$\neq$

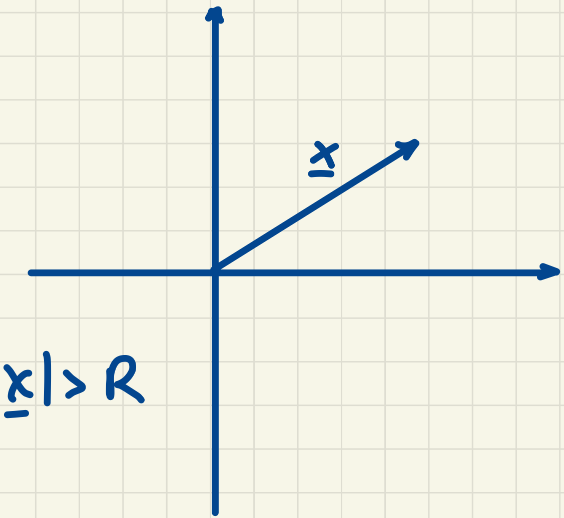
- Restringo f all'asse y $(x=0)$

$$h(y) = f(0,y) = \frac{y^4}{y^4} = 1 \longrightarrow \lim_{y\to 0} h(y) = 1$$

$\Rightarrow$ f non ha limite perché lungo due restrizioni i limiti sono $\neq$.

LIMITI IN $\mathbb{R}^n$ CON $|\underline{x}| \to \infty$

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita in tutto $\mathbb{R}^n$ o almeno per $|\underline{x}|$ abbastanza grande.



- $\displaystyle\lim_{|\underline{x}|\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow \text{ def.}$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists R>0$ t.c. $\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^n$ se $|\underline{x}|>R$

$$\Rightarrow |f(\underline{x})-L| < \varepsilon.$$

- $\displaystyle\lim_{|\underline{x}|\to\infty} f(\underline{x}) = +\infty$ $(-)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$\forall k>0\ \exists R>0$ t.c. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $|x|>R \Rightarrow$ $f(x)>k$

$f(x)<-k$

ESERCIZIO 2. Calcolare $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to\infty} xy\,e^{-(x^2+y^2)}$

SOL.

$$\left| xy\,e^{-(x^2+y^2)} \right| = \left| \rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, e^{-\rho^2} \right| \leq \rho^2 e^{-\rho^2} \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0.$$

ESERCIZIO 2bis. Calcolare $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to\infty} xy\,e^{x^2+y^2}$

SOL.

$$0 \leq \left| xy\,e^{x^2+y^2} \right| = \left| \rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, e^{\rho^2} \right| \leq \rho^2 e^{\rho^2} \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} +\infty$$

Le coordinate polari non mi aiutano:

• $y = x$

$$g_1(x) = f(x,x) = x^2 e^{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\neq$$

• $y = 0$

$$g_2(x) = f(x,0) = 0 \longrightarrow 0$$

Il limite non esiste.

ESERCIZIO 3. Calcolare i seguenti limiti:

1) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \operatorname{sen} \pi x}{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \lim_{(\underset{t}{x-2},\, \underset{s}{y-1})\to(0,0)} f(x,y) =$$

$$= \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2 \operatorname{sen}[\pi(t+2)]}{t^2+s^2} = \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2 \overbrace{\operatorname{sen} \pi t}^{\sim \pi t}}{t^2+s^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \theta \in [0, 2\pi)}} \frac{\cancel{\rho^2} \operatorname{sen}^2\theta \, \pi \rho \cos\theta}{\cancel{\rho^2}} = \lim_{\rho \to 0^+} \pi\rho \underbrace{\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}_{\text{LIMITATA}} = 0$$

2) A CASA: $\lim_{(x,y) \to (1,0)} f_a(x,y)$ esempio:

$$f_a(x,y) = \frac{(x^2 - 2x + 1)y}{\left[(x-1)^2 + y^2\right]^a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

[RISP. 0 se $a < \frac{3}{2}$]

CONTINUITÀ

ESERCIZIO 4. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $(0,0)$.

1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$$

$$\left| \frac{xy^2}{x^4+y^2} \right| \leq \frac{|xy^2|}{y^2} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

f è continua in $(0;0)$.

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

- $y = x^2$ $\quad g_1(x) = f(x, x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

$$\neq$$

- $y = -x^2$ $\quad g_2(x) = f(x, -x^2) = \dfrac{-x^4}{2x^4} = -\dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$

Il limite non esiste ed f non è continua in $(0,0)$.

ESERCIZIO 5. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1) Stabilire se $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$
2) Stabilire se $f(x,y)$ è continua in
$$\mathbb{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |y| \leq x \leq 1 \}$$

SOL.

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

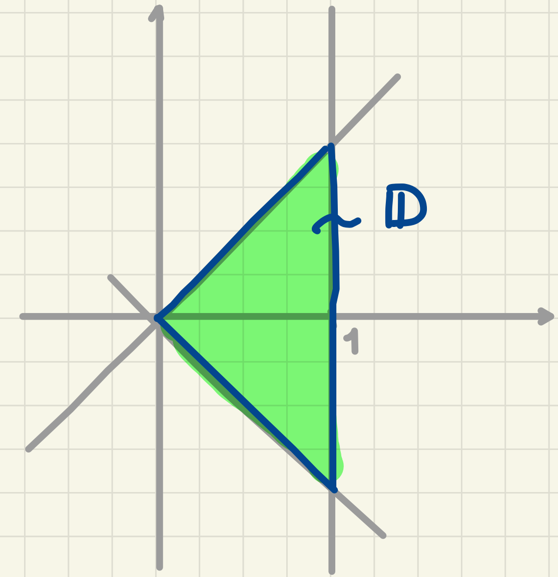
- $y=0 \to g(x) = f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $x=y^2 \to h(y) = f(y^2,y) = \dfrac{y^2}{y^2} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1$

$\neq$

f non ha limite in $(0,0)$
f non è continua.

2) $\mathbb{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; |y| \leq x \leq 1 \}$

$$\mathbb{D} = \begin{cases} x \geq |y| \\ x \leq 1 \end{cases}$$



$$0 \leq f(x,y) = \frac{y^2}{x} \leq \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\Longrightarrow f$ è continua in $\mathbb{D}$

ESERCIZIO A CASA. Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

DERIVATE PARZIALI

ESERCIZIO 6. Calcolare le derivate parziali della funzione assegnata nel punto a fianco indicato.

1) $f(x,y) = x \operatorname{sen} 2y$ in $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \operatorname{sen} 2y\right) = \operatorname{sen} 2y$

  $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \operatorname{sen} 2y\right) = 2x \cos 2y$

  $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\nabla f\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = (1; 0)$

$\underline{1 \text{ bis}}$ $f(x,y) = x \sin 2y$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = ?$

$g(x) = f\left(x; \frac{\pi}{4}\right) = x \cdot 1 = x$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = g'(0) = 1$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = ?$

$h(y) = f(0; y) = 0 \sin y = 0$ $\qquad h'(y) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0; \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

ESERCIZIO 7. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ essendo

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = (xy)^{1/3}.$$

SOL.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy)^{1/3} = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\,y = \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{0}{0} \quad ?? \qquad \text{INDET !!}$$

- **CON LE RESTRIZIONI**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ? \qquad g(x) = f(x,0) = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x$$

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g'(0) = 0$$

• CON LA DEFINIZIONE:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0.$$

ESERCIZIO 8. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

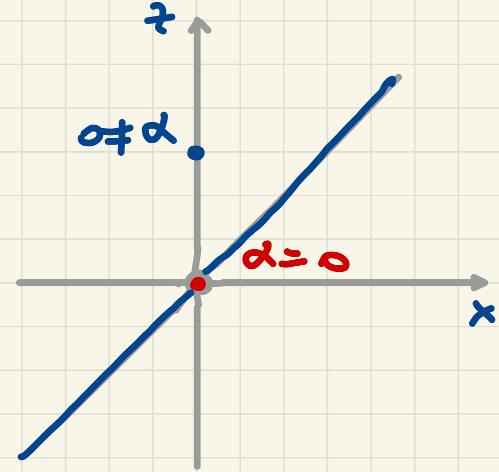
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è derivabile in $(0,0)$.

SOL.

$f_x(0,0) = ?$

$$g(x) = f(x,0) = \begin{cases} \cancel{\dfrac{x^3}{x^2}} = x & \text{se } \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } \quad x = 0 \end{cases}$$

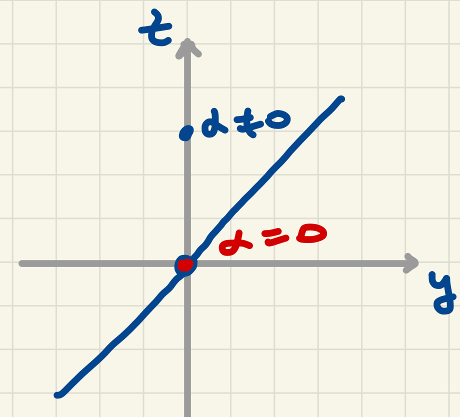


- Se $\alpha \neq 0$ $g(x)$ non è derivabile perché non è continua
- Se $\alpha = 0 \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \quad \forall x$

$$g'(0) = 1 \Rightarrow f_x(0,0) = 1 \quad \text{se} \quad \alpha = 0 .$$

Analogamente si ha:

$$h(y) = f(0;y) = \begin{cases} y & \text{se } \quad y \neq 0 \\ \alpha & \text{se } \quad y = 0 \end{cases}$$



$$h'(y) = 1 \quad \text{se} \quad \alpha = 0$$

$f_y(0,0) = 1$ se $\alpha = 0$

Per $\alpha = 0$ f è derivabile e $\nabla f(0,0) = (1,1)$

ESERCIZIO 9. Verificare che la funzione

$$f(x,y) = |x| \ln(1+y)$$

è differenziabile nell'origine.

SOL.

f è differenziabile in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$f_x(0,0) = g'(0)$: $g(x) = f(x,0) = |x| \ln 1 = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

$$f_y(0,0) = h'(0): \quad h(y) = f(0,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h'(0) = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - \cancel{f(0,0)} - \cancel{f_x(0,0)h} - \cancel{f_y(0,0)k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \ln(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{\cancel{\rho}\cos\theta \ln(1+\rho \operatorname{sen}\theta)}{\cancel{\rho}} \right| \leq |\rho \operatorname{sen}\theta \cos\theta| \leq \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Longrightarrow$ f é differenziabile.

ESERCIZIO 10. Per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ il piano tangente al grafico di

$$z = f(x,y) = \sin(\alpha x + y^2)$$

nel punto $(\underset{x_0}{0} ; \underset{y_0}{\sqrt{\pi}} ; 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$. Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

SOL.

f è differenziabile in ogni suo punto perché è almeno C^1.

EQ. PIANO TANGENTE

$$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$z = f(x,y) = \operatorname{sen}(\alpha x + y^2)$

$f_x(x,y) = \alpha \cos(\alpha x + y^2) \longrightarrow f_x(0;\sqrt{\pi}) = \alpha \cos \pi = -\alpha$

$f_y(x,y) = 2y \cos(\alpha x + y^2) \longrightarrow f_y(0;\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$

$f(0;\sqrt{\pi}) = \operatorname{sen} \pi = 0$

$$P_{tg} : \ z = -\alpha(x-0) - 2\sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi})$$

$$z = -\alpha x - 2\sqrt{\pi}\, y + 2\pi$$

$$P_{tg} : \ \alpha x + 2\sqrt{\pi}\, y + z = 2\pi$$

$\alpha = ?$ $\quad P \parallel r : \begin{cases} x = y \\ y = 2z \end{cases}$ $\qquad r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ $\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{d_r}$

$\underline{d_r} \perp \underline{n}$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\pi} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{d_r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n} \perp \underline{d_r} \iff \underline{n} \cdot \underline{d_r} = 0 \iff 2\alpha + 4\sqrt{\pi} + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1-4\sqrt{\pi}}{2}$$

$\alpha = ?$ $\quad P \perp r \implies \underline{d_r} \parallel \underline{n}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\pi} \\ 1 \end{bmatrix}$$ dovrebbero essere proporzionali, cosa impossibile.

$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R} : P \perp r.$