Proiezioni, isometrie, auto-aggiunti.
Il Teorema Spettrale

Maurizio Citterio

Marco Boella Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Matrici di proiezioni ortogonali

Sia W un sottospazio di uno spazio euclideo V.
La funzione $\mathrm{pr}_W : V \to V$ che associa ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ la proiezione ortogonale $\mathbf{v}_W$ di $\mathbf{v}$ su W è un endomorfismo lineare (esercizio).
Fissata una base ortogonale $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ di W, sappiamo che

$$\mathrm{pr}_W(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_m \rangle}{\|\mathbf{b}_m\|^2} \mathbf{b}_m \ .$$

È quindi semplice determinare la matrice della proiezione pr_W.

Il calcolo della matrice si semplica ulteriormente nel caso in cui W sia un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, considerato euclideo con il prodotto scalare standard

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \ .$$

Matrici di proiezioni ortogonali

Teorema (Matrice di una proiezione ortogonale)

Siano W *un sottospazio dello spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$ *con il prodotto scalare standard e* $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ *una base ortonormale di* W *. Sia* A *la matrice di tipo* $n \times m$ *che ha per colonne i vettori della base ortonormale* $\mathcal{U}$

$$A = [\mathbf{u}_1 | \cdots | \mathbf{u}_m] \ .$$

La matrice che rappresenta la proiezione ortogonale pr_W *di* $\mathbb{R}^n$ *sul sottospazio* W *è*

$$P = AA^t = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^t + \cdots + \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^t \ .$$

Dimostrazione.

Poiché $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} = \mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \left(\mathbf{u}^t \mathbf{v} \right) = \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^t \right) \mathbf{v}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_W(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_m = \left(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^t \right) \mathbf{v} + \cdots + \left(\mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^t \right) \mathbf{v} \\
&= \left(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^t + \cdots + \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^t \right) \mathbf{v} = \left([\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^t \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} = AA^t \mathbf{v} \ . \ \square
\end{aligned}$$

Come stabilire se una data matrice P rappresenta una proiezione ortogonale?

Teorema (Caratterizzazione delle matrici di proiezioni ortogonali)

Una matrice quadrata reale P di ordine n è la matrice della proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di $\mathbb{R}^n$ sul sottospazio W

se e solo se

sono verificate le due condizioni seguenti:

- P *è idempotente, cioè* $P^2 = P$ *;*
- P *è simmetrica, cioè* $P^t = P$ *.*

Se le due condizioni sono verificate, allora W è lo spazio generato dalle colonne di P, mentre il complemento ortogonale $W^\perp$ è il nucleo di pr_W.

Sia V uno spazio euclideo.

Definizione (Isometria lineare)

Un endomorfismo lineare $f : V \to V$ si dice **isometria lineare**, o **trasformazione ortogonale**, quando f è lineare e preserva il prodotto interno, cioè: per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ .$$

Esercizio. Provare che le isometrie preservano norme, distanze e angoli.

Esercizio. Esistono isometrie che non sono lineari (per esempio le traslazioni nel piano reale). Provare che un'isometria f è lineare se e solo se $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definizione (Matrici ortogonali)

Una matrice reale quadrata A si dice **ortogonale** quando

$$A^t\, A = I \; .$$

Esercizio. Provare che:

- la matrice identità è ortogonale;
- il prodotto di matrici ortogonali è ortogonale;
- ogni matrice ortogonale è invertibile, l'inversa è la trasposta e anche questa è ortogonale.

Esercizio. Provare che il determinante di una matrice ortogonale A è $\det A = \pm 1$. Fornire esempi di matrici con determinante uguale a ± 1 che non siano ortogonali.

Teorema

Fissata una base $\mathcal{B}$ ortonormale di V, un endomorfismo $f : V \to V$ è un'isometria lineare se e solo se la matrice A che rappresenta f rispetto $\mathcal{B}$ è ortogonale.

Dimostrazione

Osserviamo che il prodotto scalare standard $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ di due vettori colonna in $\mathbb{R}^n$ è il prodotto (di matrici) della matrice riga $\mathbf{x}^t$ per la matrice colonna $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} .$$

continuazione

Fissata la base ortonormale $\mathcal{B}$ e detta A la matrice di f rispetto $\mathcal{B}$, scriviamo $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$, $[f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A\mathbf{x}$, $[f(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = A\mathbf{y}$. Quindi

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \ ,$$

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^t (A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^t A^t)(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t (A^t A)\mathbf{y} \ .$$

$\Leftarrow$ Se A è ortogonale, cioè $A^t A = I$, allora f è un'isometria; infatti

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \mathbf{x}^t (A^t A)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t I \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ .$$

$\Rightarrow$ Se f è un'isometria, allora A è ortogonale; infatti

$$\mathbf{x}^t (A^t A)\mathbf{y} = \langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \ , \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \ ,$$

in particolare, al variare di $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ tra i vettori della base $\mathcal{B}$, si ha

$$\mathbf{e}_i^t (A^t A)\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \ , \quad \text{per ogni} \quad i, j = 1, \ldots, n \ ,$$

dunque $A^t A = I$. $\square$

Matrici ortogonali
Osservazioni

- Indicate con $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ le colonne di una matrice A, abbiamo che gli elementi della matrice prodotto A^tA sono i prodotti scalari standard $\mathbf{c}_i^t\mathbf{c}_j = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j$. Risulta dunque

$$A^tA = I \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

  cioè A è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
- Se A è ortogonale, dalla definizione $A^tA = I$, deduciamo che la matrice ortogonale A è invertibile e la sua inversa è $A^{-1} = A^t$.
- Se A è ortogonale, A^t è ortogonale; infatti $I = A^tA = A^{-1}A = AA^{-1} = AA^t = \left(A^t\right)^t A^t$.
- Poiché le colonne di A^t sono le righe di A , una matrice è ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
- Se λ è un autovalore reale della matrice ortogonale A , allora $|\lambda| = 1$; infatti, ricordando che una matrice ortogonale rappresenta una isometria, detto $\mathbf{v}$ un autovettore relativo a λ , abbiamo

$$\|\mathbf{v}\| = \|A\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|.$$

Per una matrice reale A quadrata di ordine n, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. A è ortogonale;
2. A è invertibile e $A^{-1} = A^t$;
3. $A^t A = I = AA^t$;
4. A^t è ortogonale;
5. le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;
6. le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;
7. L_A è una isometria lineare di $\mathbb{R}^n$.

Isometrie lineari del piano reale e matrici ortogonali 2×2

Teorema (Matrici ortogonali 2×2)

Le matrici ortogonali 2×2 sono di uno dei seguenti due tipi:

$$R = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \tag{1}$$

oppure

$$S = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{vmatrix} \tag{2}$$

per un opportuno $\vartheta \in \mathbb{R}$.

- R : rotazione di un angolo ϑ
- S : simmetria rispetto alla retta generata dal vettore $w = (\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2))$.

Teorema (di Eulero)

Sia Q *una matrice ortogonale reale di ordine* 3 *con determinante uguale a* 1 *.* Q *rappresenta una rotazione attorno a un asse.*
Più precisamente, Q *ha* $\lambda = 1$ *come autovalore e, se* $Q \neq I$ *, l'asse di rotazione è l'autospazio relativo all'autovalore* 1 *; l'angolo* α *di rotazione si può ricavare dalla formula*

$$\mathrm{tr}(Q) = 1 + 2\cos\alpha$$

Definizione

Sia V spazio vettoriale euclideo. Un endomorfismo $F : V \to V$ si dice **auto-aggiunto** o **simmetrico** se, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

$$\langle F\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, F\mathbf{w} \rangle \ .$$

Si dimostra facilmente il seguente:

Teorema

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale per uno spazio euclideo V reale. Un endomorfismo $F : V \to V$ è auto-aggiunto se e solo se la sua matrice rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica, cioè $A = A^t$.

Dimostrazione.

Fissata la base ortonormale $\mathcal{B}$ e detta $A = (a_{ij})$ la matrice di f rispetto $\mathcal{B}$, scriviamo $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$, $[f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A\mathbf{x}$, $[f(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = A\mathbf{y}$. Quindi

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \,,$$
$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{y} \,,$$
$$\langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} \,.$$

$\Leftarrow$ Se A è simmetrica, cioè $A^t = A$, allora f è auto-aggiunto; infatti

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle$$

$\Rightarrow$ Se f è auto-aggiunto, allora A è simmetrica; infatti

$$\mathbf{x}^t A^t \mathbf{y} = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle = \mathbf{x}^t A \mathbf{y} \,, \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \,,$$

in particolare, al variare di $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ tra i vettori della base $\mathcal{B}$, si ha

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^t A^t \mathbf{e}_j = a_{ji} \,, \quad \text{per ogni} \quad i, j = 1, \ldots, n \,,$$

dunque $A = A^t$. $\square$

Teorema (Spettrale)

Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita.

Un endomorfismo $F : V \to V$ è autoaggiunto se e solo se ortogonalmente diagonalizzabile.

In altri termini, F è autoaggiunto se e solo se esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di F.

Teorema (Spettrale)

Una matrice (quadrata) reale è simmetrica se e solo se ortogonalmente diagonalizzabile.

In altri termini, una matrice A reale è simmetrica se e solo se

- tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono reali e regolari;
- gli autospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ sono a due a due ortogonali.

Il Teorema Spettrale per matrici reali

Ogni matrice A simmetrica e reale di ordine n è dunque diagonalizzabile e inoltre, scelta una base ortonormale $\mathcal{B}_i$ per ogni autospazio V_{λ_i}, l'unione

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Incolonnando gli autovettori della base $\mathcal{B}$ otteniamo una matrice di passaggio P che realizza la similitudine di A con la matrice diagonale degli autovalori:

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) .$$

Poiché la base $\mathcal{B}$ è ortonormale, la matrice P è ortogonale; quindi $P^{-1} = P^t$ e dunque

$$P^tAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) ,$$

cioè A è ortogonalmente diagonalizzabile.

Come corollario al Teorema Spettrale, abbiamo il seguente

Teorema (Scomposizione spettrale)

Sia A *una matrice simmetrica reale di ordine* n *e siano* $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ *i suoi autovalori distinti. Sia* V_j *l'autospazio relativo all'autovalore* λ_j *e sia* P_j *la matrice della proiezione ortogonale sull'autospazio* V_j *. Risulta:*

- $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m$ *;*
- $I = P_1 + P_2 + \cdots + P_m$ *;*
- *le matrici* P_j *sono simmetriche* $(P = P^t)$ *,*
  idempotenti $(P^2 = P)$
  e tali che $P_i P_j = O$ *per* $i \neq j$ *.*

Lemma 1

Gli autovalori di un operatore auto-aggiunto sono reali.

Lemma 2

Autovettori di un operatore auto-aggiunto (o di una matrice simmetrica), relativi ad autovalori distinti, sono ortogonali.

Lemma 3

Sia $\mathbf{v}$ un autovettore di un operatore auto-aggiunto F. Allora F trasforma il complemento ortogonale $V_0 = \mathbf{v}^\perp$ in sé.
Dunque è definito la restrizione $F|V_0$

$$F|V_0 \, : V_0 \to V_0$$

In breve: il sottospazio $V_0 = \mathbf{v}^\perp$ è F -invariante.

Facoltativo: dimostrazione del Teorema Spettrale

Lemma 1: gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali.

- Per il teorema fondamentale dell'algebra, esiste un numero complesso $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ per il quale $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$. Ora proviamo che λ è reale (cioè, $\beta = 0$).
- Idea: pensiamo alla matrice A come a un endomorfismo

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^n$$

- Il numero λ è autovalore di A . Dunque, esiste un autovettore $Z = X + \mathrm{i}Y$ in $\mathbb{C}^n$ ($X, Y \in \mathbb{R}^n$),

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{i}y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + \mathrm{i}y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Si ha $AZ = \lambda Z$, ossia $A(X + \mathrm{i}Y) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(X + \mathrm{i}Y)$

Facoltativo: dimostrazione del Teorema Spettrale

- Separando le parti reali e immaginarie,

$$AX = \alpha X - \beta Y, \qquad AY = \alpha Y + \beta X \tag{3}$$

- Ricordare: la condizione di simmetria $A = A^t$ equivale a:

$$AX \cdot Y = X \cdot AY \tag{4}$$

- Allora, da (3) e (4) segue

$$(\alpha X - \beta Y) \cdot Y = X \cdot (\alpha Y + \beta X)$$

  ossia

$$\alpha(X \cdot Y) - \beta(Y \cdot Y) = \alpha(X \cdot Y) + \beta(X \cdot X)$$

  ovvero

$$\beta\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right) = 0$$

- Poiché $X + \mathrm{i}Y = Z \neq 0$ (e quindi $\|X\|^2 + \|Y\|^2 \neq 0$), deve essere $\beta = 0$. Conclusione: $\lambda = \alpha$ è un numero reale. $\square$

Facoltativo: dimostrazione del Teorema Spettrale

Lemma 2: autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica, sono ortogonali.

Siano X_1, X_2 autovettori della matrice simmetrica A,

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \qquad AX_2 = \lambda_2 X_2,$$

con autovalori distinti: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Poiché A è simmetrica,

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2)$$

Quindi

$$(\lambda_1 X_1) \cdot X_2 = X_1 \cdot (\lambda_2 X_2)$$

ossia

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1 \cdot X_2) = 0$$

Poiché $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, si deve avere $X_1 \cdot X_2 = 0.$

Facoltativo: dimostrazione del Teorema Spettrale

Lemma 3: se $\mathbf{v}$ è autovettore di F auto-aggiunto, il complemento ortogonale $\mathbf{v}^\perp$ è F -invariante.

Sia $\mathbf{v} \in V$ un autovettore dell'operatore autoaggiunto F ,

$$F\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

e sia $\mathbf{w} \in \mathbf{v}^\perp$, cioè

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

Dobbiamo dimostrare che $F\mathbf{w}$ appartiene a $\mathbf{v}^\perp$, cioè che

$$\langle F\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Risulta:

$$\langle F\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, F\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Dunque, posto $V_0 = \mathbf{v}^\perp$, la restrizione $F|V_0$ trasforma V_0 in sé:

$$F|V_0 \, : V_0 \to V_0$$

Teorema Spettrale

Un endomorfismo su uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita è auto-aggiunto se e solo se è ortogonalmente diagonalizzabile.

Dimostrazione (Per induzione sulla dimensione n di V)

- Base dell'induzione: caso $n = 1$. Banale. Un qualunque vettore non nullo è autovettore. Per ottenere una base ortonormale, basta normalizzarlo.
- Supponiamo l'enunciato vero in dimensione $n - 1$. Sia $F : V \to V$ auto-aggiunto, $\dim V = n$. Abbiamo dimostrato che F possiede un autovettore $\mathbf{v}$ (che possiamo pensare unitario).

Dimostrazione (Continuazione)

Il complemento ortogonale $V_0 = \mathbf{v}^{\perp}$ ha dimensione $n-1$ ed è F -invariante (Lemma 3). Consideriamo allora la restrizione $F|V_0$ di F a V_0 :

$$F|V_0 \,:\, V_0 \to V_0$$

Per l'ipotesi induttiva, l'operatore autoaggiunto $F|V_0$ possiede una base ortonormale $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ di autovettori.
Allora $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}$ è una base ortonormale di V formata da autovettori di F . □