II.7 - SPAZI L^p

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto misurabile e si consideri lo spazio vettoriale V delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ misurabili ed integrabili. Si prenda ora la seguente definizione:

$$\|f\| := \int_A |f|$$

Essa non è ancora una norma su V, poiché non rispetta la prima proprietà della norma:
$\int_A |f| = 0 \quad \Rightarrow \quad |f| = 0 \;\; q.o. \;\; su \;\; A$, e non $|f| = 0 \;\; \forall x \in A$, come richiesto dalla definizione.

È quindi necessario modificare lo spazio V in modo che tale definizione porti effettivamente ad una norma. Si introduce quindi il concetto di equivalenza tra due funzioni: si dice che due funzioni di V sono **equivalenti** se sono uguali q.o. su A:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \;\; q.o. \;\; x \in A$$

Si introduce quindi $L^1(A)$ come lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Lebesgue e si può dimostrare che tale spazio è completo con la norma (adesso ben definita) considerata precedentemente.

Si noti che in questo nuovo spazio non è più rigorosamente definito il valore di una funzione in un punto, essendo questo un insieme di misura nulla.

Data una funzione $f \in L^1(A)$, si dice che essa è **continua** su A se nella classe di equivalenza di *f* esiste una funzione continua (nell'accezione usuale del termine):

$$f \in L^1(A) \ \ continua \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in C^0(A): \ f \sim g$$

e tale funzione viene chiamata rappresentante continuo di *f*, che, se esiste, è unico.

Dimostrazione:

g_1, g_2 rappresentanti continui, $g_1(x_0) > g_2(x_0)$. Per il teorema di permanenza del segno:

$(g_1 - g_2)(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ e quindi g_1 e g_2 non sono nella stessa classe di equivalenza.

Esempi:

- La funzione di Dirichlet $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases} 1 & se \;\; x\in\mathbb{Q} \\ 0 & se \;\; x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$, con $A=\mathbb{R}$, ha come rappresentante continuo la funzione identicamente nulla $g(x)\equiv 0$.
- La funzione $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, con $A=(-1,1)$, ha come rappresentante continuo la funzione definita nel modo seguente: $g(x)=\begin{cases} f(x) & se \;\; x\neq 0 \\ 1 & se \;\; x=0 \end{cases}$

In generale si definisce lo spazio $L^p(A)$ come lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che $|f|^p$ è integrabile secondo Lebesgue, con la norma:

$$\|f\|_p := \left\{ \int_A |f|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

che è ben definita per ogni $p \geq 1$.

Teorema: gli spazi $L^p(A)$ sono di Banach per ogni $p \geq 1$ con le norme integrali *p*.

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$ misurabile, con $f \in L^p(A)$ definitivamente. Allora si definiscono:

$$\|f\|_\infty := \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p\,, \quad L^\infty := \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty < +\infty \right\}$$

e si può dimostrare che $L^\infty(A)$ è lo spazio delle funzioni **essenzialmente limitate** in A, ovvero che sono limitate a meno di un insieme di misura nulla, e la norma $\|f\|_\infty$ coincide con l'estremo superiore essenziale della funzione:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)| = \inf \left\{ M : |f(x)| \le M \ \ q.o. \ x \in A \right\}$$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} n & se \quad x = n \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$ è essenzialmente limitata e $\|f\|_\infty = 0$

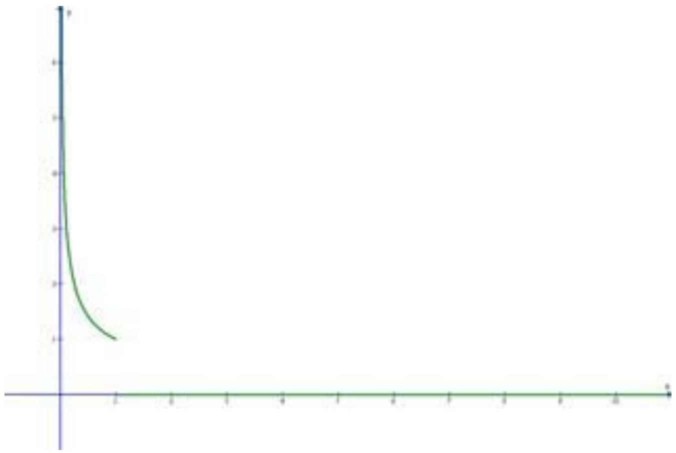
II.8 - RISULTATI DI CONFRONTO

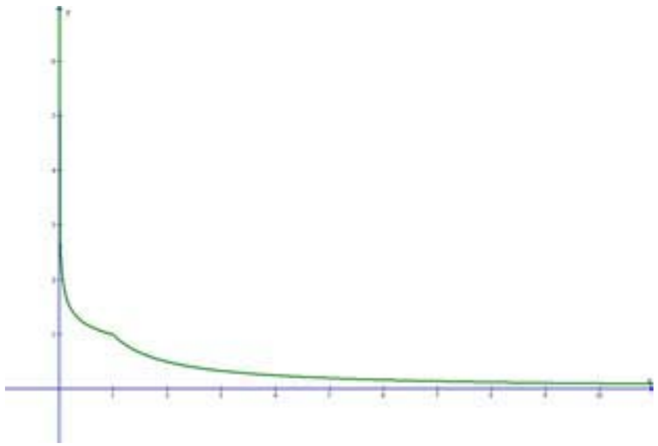
Si considerino gli spazi $L^p(A)$ al variare di *p*. Senza alcuna ipotesi sull'insieme *A* non ci sono in generale relazioni di inclusione per tali spazi.

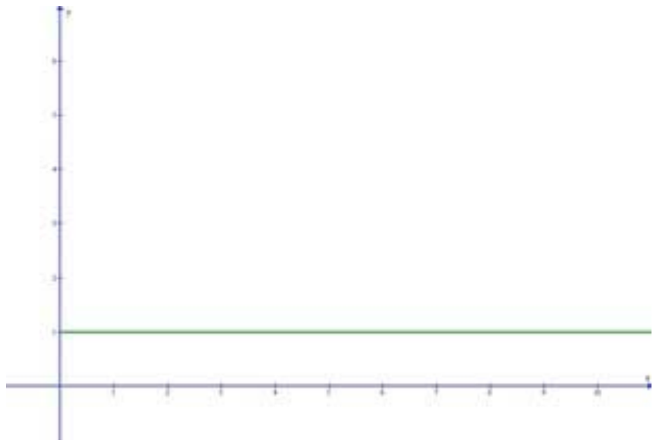
Esempio:

Le seguenti funzioni appartengono rispettivamente agli spazi $L^1(A)$, $L^2(A)$ e $L^\infty(A)$, ma non agli altri due, con $A=(0,+\infty)$:

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1/2} & se\ \ x<1 \\ 0 & se\ \ x\geq 1 \end{cases} \in L^1(A) \qquad g(x)=\begin{cases} x^{-1/4} & se\ \ x<1 \\ x^{-1} & se\ \ x\geq 1 \end{cases} \in L^2(A) \qquad h(x)=1\in L^\infty(A)$$







Disuguaglianza di Hölder: sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$. Date due funzioni $f \in L^p(A)$ e $g \in L^{p'}(A)$, allora il prodotto $f \cdot g \in L^1(A)$ e vale la seguente disuguaglianza:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove p′ è l'esponente coniugato di p (con $p \geq 1$), definito come $p' := \dfrac{p}{p-1}$ oppure $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

In particolare: $(2)' = 2, \quad p \geq 2 \Leftrightarrow p' \leq 2, \quad (1)' = +\infty, \quad (+\infty)' = 1$.

Proprietà di immersione: sia A un insieme di misura finita. Se $q \geq s$, allora $L^q(A) \subseteq L^s(A)$.

Dimostrazione:

Sia u una funzione in $L^q(A)$. Se si considerano ora:

- $f = |u|^s$: essa appartiene a $L^{q/s}(A)$, infatti $\int |f|^{\frac{q}{s}} = \int \left(|u|^s\right)^{\frac{q}{s}} = \int |u|^q$
- $g = \chi_A$: essa appartiene a $L^{(q/s)'}(A)$ poiché A ha misura finita

per la disuguaglianza di Hölder si ha: $\int_A |u|^s = \int_A \chi_A |u|^s \leq \left(\int_A |u|^{s\frac{q}{s}} \right)^{\frac{s}{q}} \left(\int_A \chi_A \right)^{\frac{1}{(q/s)'}} = \left(\|u\|_q\right)^s |A|^{\frac{q-s}{s}}$

Elevando tutto alla (*1*/s) si ha infine che $\|u\|_s \leq |A|^{\frac{q-s}{sq}} \|u\|_q$, e quindi che $u \in L^s(A)$.

In particolare si può vedere che $L^q(A)$ si immerge in $L^s(A)$ con "immersione continua", ovvero si può dimostrare che l'operatore identità $i : L^q(A) \to L^s(A), \quad i : f \mapsto f$ è lineare e quindi continuo.

Un caso particolare della precedente proprietà è quando $q = +\infty$. Se A è misurabile con misura finita, allora $L^{\infty}(A) \subseteq L^{p}(A)$, per ogni $p \geq 1$. Si dimostra infatti che:

$$\|f\|_p \leq |A|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}$$

Proprietà di interpolazione: sia $f \in L^{q}(A) \cap L^{p}(A)$, allora $f \in L^{r}(A)$ per ogni $r \in [p, q]$, ed in particolare si dimostra con la disuguaglianza di Hölder che:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1): \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$$

II.9 - RISULTATI DI CONVERGENZA

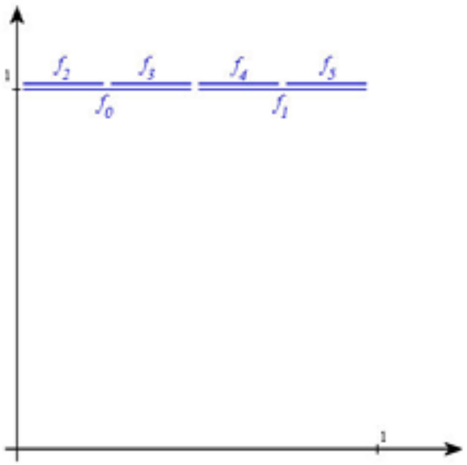
Si dice che una successione di funzioni $\{f_n\}$, definite su un dominio comune A, tende ad una funzione limite f in $L^p(A)$ se:

$$f_n \xrightarrow{L^p(A)} f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left\| f_n - f \right\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\int_A \left| f_n - f \right|^p \right) = 0$$

Si consideri prima di tutto il caso $p \in [1,+\infty)$. Senza ipotesi aggiuntive, in generale non ci sono relazioni tra convergenza q.o. su A e convergenza in $L^p(A)$.

Esempi:

- $A = \mathbb{R}, \quad f_n = \chi_{(n,n+1)} : \begin{cases} f_n \to 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ f_n \not\to 0 \;\; in \;\; L^p(\mathbb{R}) : \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p = \int_n^{n+1} 1^p = 1 \not\to 0 \end{cases}$
- Si consideri la successione delle funzioni caratteristiche degli intervalli rispettivamente:



$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right], \left[0, \frac{1}{8}\right]$... e così via.

SI ha che:

- $\int_0^1 |f_n| \to 0 \quad per \;\; n \to +\infty$
- $f_n \not\to 0 \;\; q.o. \;\; in \;\; [0,1]$: si possono trovare infatti sottosuccessioni che in ogni punto convergono ad 1.

Valgono invece i seguenti risultati:

- La convergenza q.o. in A implica la convergenza in $L^p(A)$ se esiste una funzione $\varphi \in L^p(A)$ tale che $|f_n| \leq \varphi$ q.o. in A.
- Se una successione $\{f_n\}$ tende ad una funzione f in $L^p(A)$, allora esiste una sua sottosuccessione che tende ad f q.o. in A.

Conseguenze:

- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ q.o. in A, allora $f = g$ q.o. in A.
- Se $f_n \to f$ in $L^p(A)$ e $f_n \to g$ in $L^q(A)$, allora $f = g$ q.o. in A.

Il caso $p = +\infty$ è invece strettamente legato con la convergenza uniforme. Infatti, se una successione di funzioni $\{f_n\}$ tende ad una funzione f in $L^\infty(A)$, allora esiste un insieme $E \subseteq A$ di misura nulla tale per cui $f_n \to f$ uniformemente in $A \setminus E$. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A\setminus E} |f_n(x) - f(x)|, \ \ con \ \ |E| = 0$$

II.9 - Approssimazione con funzioni regolari

Teorema: per ogni $p \in [1, +\infty)$, $C_0^\infty(A)$ è denso in $L^p(A)$, ovvero:

$$\forall f \in L^p(A) \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \varphi \in C_0^\infty(A) : \quad \left\| f - \varphi \right\|_p < \varepsilon$$

$$\forall f \in L^p(A) \;\; \exists \left\{ f_n \right\} \subseteq C_0^\infty : \quad f_n \xrightarrow{L^p(A)} f$$

dove $C_0^\infty(A)$ è lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(A)$ a supporto compatto, cioè:

$$C_0^\infty(A) := \left\{ f \in C^\infty(A) : \quad f = 0 \;\; su \;\; A \setminus K, \;\; con \;\; K \; compatto \subseteq A \right\}$$

Osservazioni:

- Il teorema precedente afferma in pratica che è possibile approssimare le funzioni $L^p(A)$ con successioni di funzioni regolari.
- In realtà sono dense in $L^p(A)$ anche classi di funzioni "più semplici" (come polinomi, funzioni a scalino, …).
- Tale teorema risulta invece falso nel caso $p = +\infty$.