Analisi matematica 2		22 luglio 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x, y) = (x + y)(y^2 - 1)$$

a) Descrivere *l'insieme di livello* $\{f = 0\}$. Dire se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso.

b) Trovare i punti critici della funzione e studiarne la natura.

c) Trovare massimi e minimi *assoluti* di f nel quadrato $Q = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

2.

a) Stabilire in quali regioni del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = \frac{1-t}{y}$$

Integrare l'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(0) = 1, \qquad \psi(0) = -1$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = t - \sin t$$

3.

a) Calcolare direttamente ed usando il teorema della divergenza il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie del cilindro:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1; \quad -1 \leq z \leq 1\}$$

b) Calcolare il volume compreso tra i paraboloidi

$$z = x^2 + y^2 \qquad \text{e} \qquad z = \frac{1}{3}\left(4 - x^2 - y^2\right)$$

4.

a) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n$$

b) Verificare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$$

converge *totalmente* in $[0, +\infty)$. [*Suggerimento: studiare la funzione* xe^{-x} *su* $[0, +\infty)$]

SOLUZIONI

1.

a) L'insieme di livello zero è l'unione delle 3 rette di equazione $y = 1$, $y = -1$ e $x + y = 0$. Si tratta di un insieme chiuso, non limitato e connesso (due punti qualsiasi dell'insieme sono collegati da un segmento o da una spezzata contenuta nell'insieme).

b) Derivate parziali:

$$f_x(x, y) = y^2 - 1; \quad f_y(x, y) = 2xy + 3y^2 - 1$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Si trovano 2 soluzioni:

$$x = -1,\ y = 1; \qquad x = 1,\ y = -1$$

Derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = 0; \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2y; \quad f_{yy}(x, y) = 2x + 6y$$

Il determinante della matrice Hessiana vale $\det H_f(x, y) = -4y^2$ ed è minore di zero nei due punti critici, che sono dunque *punti di sella*.

c) Gli estremi di f nel quadrato devono trovarsi sulla frontiera; sui lati contenuti nelle rette $y = \pm 1$ vale $f = 0$. Sui lati verticali abbiamo

$$f(1, y) = (y + 1)(y^2 - 1), \qquad f(-1, y) = (y - 1)(y^2 - 1), \qquad -1 \le y \le 1$$

Nell'intervallo $-1 \le y \le 1$ abbiamo $f(1, y) \le 0$; vale inoltre $f(-1, y) = -f(1, -y)$, per cui $f(-1, y) \ge 0$ nello stesso intervallo.
Studiando la funzione $y \mapsto (y + 1)(y^2 - 1)$ nell'intervallo considerato, si trova per $y = 1/3$ il valore *minimo* $f(1, 1/3) = -32/27$. Per le precedenti osservazioni, tale valore è anche il valore minimo di f *nel quadrato*; analogamente, si trova che il valore massimo di f nel quadrato è $f(-1, -1/3) = 32/27$.

2.

a) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = \frac{1-t}{y}$ al secondo membro è definita e continua nei due sottoinsiemi aperti del piano

$$D_1 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\} \text{ e } D_2 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < 0\}$$

La derivata parziale $f_y(t,y) = -\frac{1-t}{y^2}$ è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $y_0 \neq 0$.
Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int y\, dy = \int (1-t)\, dt + C,$$

da cui si ricava la soluzione in forma implicita $y^2/2 = t - t^2/2 + C$; ridefinendo la costante arbitraria otteniamo

$$y^2 + t^2 - 2t = C\,,$$

che rappresenta una famiglia di circonferenze concentriche nel piano (t,y) con centro $(1,0)$. Risolvendo rispetto a y e imponendo le condizioni si trovano le soluzioni

$$\Phi(t) = \sqrt{-t^2+2t+1}; \qquad \psi(t) = -\sqrt{-t^2+2t+1}$$

entrambe definite nell'intervallo massimale $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

b) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $z'' - z = 0$, è

$$z(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t}$$

Applicando il metodo di somiglianza, si trova la soluzione particolare

$$\Psi(t) = -t + \frac{1}{2}\sin t$$

L'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t} - t + \frac{1}{2}\sin t$$

3.

a) La superfice del cilindro è l'unione di 3 superfici regolari: la *superfice laterale*

$$S \equiv \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=1, \quad -1 \leq z \leq 1\}$$

e le due basi

$$D_1 \equiv \{(x,y,-1)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}, \qquad D_2 \equiv \{(x,y,1)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}$$

Usando la parametrizzazione

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v, \qquad 0 \leq u < 2\pi, \quad -1 \leq v \leq 1,$$

la normale esterna *sulla superfice laterale* S è

$$\mathbf{n}_e = \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j}$$

Osserviamo che, su S,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

per cui abbiamo subito

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_S dS = |S| = 4\pi$$

Sulle due basi abbiamo

$$\mathbf{n}_e = -\mathbf{k} \quad \text{su } D_1, \qquad \mathbf{n}_e = \mathbf{k} \quad \text{su } D_2$$

Dunque:

$$\int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} (-1)\, dxdy = -\pi;$$

$$\int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = \pi;$$

In definitiva:

$$\int\!\!\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = \int\!\!\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS + \int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e\, dS = -\pi + \pi + 4\pi = 4\pi$$

La divergenza del campo vettoriale è

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \partial_x(x) + \partial_y(y) + \partial_z(z^2) = 2 + 2z$$

Abbiamo allora

$$\int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \int\int\int_E (2 + 2z)\, dxdydz =$$

$$= 2 \int\int\int_E dxdydz + 2 \int\int\int_E z\, dxdydz$$

Il secondo integrale è nullo per ragioni di simmetria; il primo integrale è uguale a $|E| = 2\pi$. Dunque:

$$\int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = 2|E| = 4\pi$$

b) Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, le due superfici $z = \rho^2$, e $z = (4 - \rho^2)/3$, si intersecano per ρ soluzione di

$$\rho^2 = (4 - \rho^2)/3$$

ovvero per $\rho = 1$ (ricordare che $\rho \geq 0$). Il volume cercato è compreso tra le porzioni dei due paraboloidi che si proiettano sul cerchio unitario $D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ del piano di base. Integrando per fili si trova:

$$V = \int\int_D \Big(\int_{x^2+y^2}^{(4-x^2-y^2)/3} dz \Big)\, dxdy = \frac{4}{3} \int\int_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho\, d\rho d\theta = \frac{8}{3}\pi \Big[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \Big]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

4.

a) Applicando il criterio del rapporto (o della radice) si deduce che la serie ha raggio di convergenza 1, per cui converge (assolutamente) per $0 < x < 2$. Per $x = 0$ e $x = 2$ abbiamo rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

che non convergono perchè il termine generale non tende a zero.

b) Osserviamo che $x^n e^{-nx} = (x\,e^{-x})^n$ e che la funzione $x \mapsto x\,e^{-x}$ è positiva in $[0, +\infty)$ e assume valore massimo $1/e$ in $x = 1$. Abbiamo allora

$$|x^n e^{-nx}| \leq (1/e)^n, \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)$$

Poiché $1/e < 1$, la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty}(1/e)^n$ è convergente. Dunque la serie di funzioni converge totalmente in $[0, +\infty)$; la somma della serie è la funzione $x\,e^{-x}/(1 - x\,e^{-x})$.