Campi vettoriali

1. Sia $\vec{F}(x,y) = ye^x\vec{i} + (e^x - \cos y)\vec{j}$ un campo vettoriale. Determinare un potenziale per $\vec{F}$, se esiste.

2. Sia $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j}$ un campo vettoriale. Determinare un potenziale per $\vec{F}$, se esiste.

3. Sia $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + y\vec{j}$ un campo vettoriale. Calcolare l'integrale di $\vec{F}$ lungo una circonferenza con centro sull'asse y; $\vec{F}$ ammette potenziale?

4. Sia γ l'arco di ellisse di equazione parametrica $x = 2\cos\theta,\ y = 3\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$, e sia $\vec{F}(x,y) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ un campo vettoriale. a) Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo γ. b) Calcolare un potenziale per $\vec{F}$, se esiste. c) Utilizzare il potenziale per calcolare nuovamente il lavoro.

5. Sia $\vec{F}(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$. a) Verificare che $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. b) Calcolare un potenziale per $\vec{F}$, se esiste. c) Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo l'arco di curva γ di equazione parametrica $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \leq t \leq \pi$.

6. Sia $\vec{F}(x,y) = \left(y^2 - \dfrac{1}{x}\right)\vec{i} + \left(2xy + \dfrac{1}{y}\right)\vec{j}$. Verificare che $\vec{F}$ è conservativo in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, e determinare un potenziale.

7. Sia $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \left(y^2 + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)\vec{j}$. a) Determinare la più ampia regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui $\vec{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$. b) Si verifichi che in tale regione $\vec{F}$ è irrotazionale.

8. Sia $\vec{F}(x,y) = xy^2 f(x)\vec{i} - y\log|f(x)|\vec{j}$. Determinare $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ in modo che $\vec{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$, e determinare il potenziale che si annulla in $(0,1)$. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r}$, dove γ è una curva congiungente i punti $(0,1)$ e $(1,2)$.

9. Sia $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$. a) Determinare un potenziale per $\vec{F}$, se esiste. b) Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r}$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario. c) Si calcoli $\int_\gamma \vec{F}\, d\mathbf{r}$, dove γ è l'arco di parabola $y = 1 + x^2$, $0 \le x \le 2$. d) Si calcoli $\int_\gamma \vec{F}\, d\mathbf{r}$, dove γ è un arco di una qualunque circonferenza centrata nell'origine.

10. Sia $\vec{F}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$. a) Verificare che $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. b) Si calcoli $\int_\gamma \vec{F}\, d\mathbf{r}$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario. $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? c) Determinare un potenziale per $\vec{F}$ in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

11. Sia $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z^3\vec{k}$. Verificare che $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$, e determinare un potenziale.

12. Sia $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$. Determinare $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ in modo che $\vec{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^3$, e determinare un potenziale.

13. Sia $\vec{F}(x,y,z) = \left(\alpha xz + \dfrac{yz}{x}\right)\vec{i} + \left(z\log x - \dfrac{1}{2}\alpha^2 y \log z\right)\vec{j} + \left(x^\alpha + y\log x - \dfrac{y^2}{z}\right)\vec{k}$. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che $\vec{F}$ sia conservativo in $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z > 0\}$. Determinare il potenziale che si annulla in $(1,1,1)$.

14. Sia $\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$. Si calcoli il lavoro del campo lungo la curva γ composta dalla spezzata rettilinea che unisce $(0,0,0)$ a $(3,0,0)$, $(3,0,0)$ a $(2,3,1)$ e $(2,3,1)$ a $(2,3,0)$.

15. Nel piano cartesiano sia C la curva composta dall'arco di parabola $y = x^2$ che va da $(0,0)$ a $(2,4)$ e dai segmenti che uniscono $(2,4)$ a $(0,4)$ e $(0,4)$ a $(0,0)$. Usando il teorema di Gauss-Green, si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$ lungo la curva C percorsa in senso antiorario.

16. Usando la formula di Gauss-Green si calcoli l'area dell'ellisse E di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

17. Sia B un corpo rigido in rotazione attorno all'asse z con velocità angolare ω costante. Sia $\vec{V}$ il campo che assegna ad ogni punto P di B la sua velocità: $\vec{V} = \vec{w} \wedge \vec{r}$, dove $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Si scriva il campo $\vec{V}$ in coordinate cartesiane e si calcoli rot$\vec{V}$.

18. Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q posizionata nell'origine: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ a) Calcolare modulo e versore di $\vec{E}$; b) determinare il dominio D di $\vec{E}$ e dire se è connesso, semplicemente connesso; c) dire se $\vec{E}$ è irrotazionale; d) determinare, se esiste, un potenziale U di $\vec{E}$ in D; e) calcolare la circuitazione di $\vec{E}$ lungo la circonferenza unitaria di centro $(0,1,0)$, contenuta nel piano $y=1$.

19. Il campo magnetico generato in un punto P dello spazio da un filo infinito coincidente con l'asse z percorso da una corrente I è: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} I \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$, dove $\vec{k}$ è il versore dell'asse z, $\vec{r}$ è il vettore $\overrightarrow{HP}$, H è la proiezione di P sull'asse z (legge di Biot-Savart). a) Scrivere il campo in componenti cartesiane; b) calcolare modulo e versore di $\vec{B}$; c) determinare il dominio D di $\vec{B}$ e dire se è connesso, semplicemente connesso; d) dire se $\vec{B}$ è irrotazionale; e) stabilire se $\vec{B}$ è conservativo in D. Suggerimento: calcolare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo una curva chiusa concatenata all'asse z (teorema di Ampere).

20. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla retta $y = x$ e dalla curva γ di equazione $x = t^2 + t,\ y = t^4 + t$, con $t \in [0, 1]$.

21. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla curva γ di equazione $x = te^t,\ y = te^{-t}$, con $t \in [0, 1]$, e il segmento Γ che congiunge gli estremi di γ.

22. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla curva γ di equazione $x = t\cos t,\ y = t\sin t$, con $t \in [0, \pi]$, e l'asse x.

23. Dato il campo $\vec{F}(x,y,z) = -z\underline{i} + x\underline{j} + y\underline{k}$, si calcoli il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva γ, intersezione del piano $z = y$ con il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$.

Soluzioni.

1. $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, infatti $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = e^x$; $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$. $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x 0\,dt + \int_0^y (e^x - \cos t)\,dt = ye^x - \sin y$.

2. $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, infatti $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x$; $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$. $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x 0\,dt + \int_0^y \frac{1}{2}x^2\,dt = \frac{1}{2}x^2 y$.

3. L'equazione paramentrica di γ è: $x = r\cos\theta,\ y = y_0 + r\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$; $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [-r^2\cos\theta(y_0 + r\sin\theta)\sin\theta + (y_0 + r\sin\theta)r\cos\theta]\,d\theta = 0$. $\vec{F}$ non ammette potenziale poiché non è irrotazionale.

4. a) $L = \int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = \displaystyle\int_0^\pi [(12\cos^2\theta + 9\sin^2\theta)(-2\sin\theta) + 12\cos\theta\sin\theta(3\cos\theta)]\,d\theta = -16$. b) $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x 3t^2\,dt + \int_0^y 2xt\,dt = x^3 + xy^2$. c) $L = U(-2,0) - U(2,0) = -16$.

5. $\vec{F}$ è irrotazionale infatti: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^3}(y^2 - 3x^2)$. b) $U_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow U(x,y) = \displaystyle\int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy + g(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$. Imponendo che U_x sia uguale alla prima componente del campo si trova che $g(x) = c$, quindi $U(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. c) $L = U(-R,0) - U(R,0) = -\dfrac{2}{R}$.

6. $\vec{F}$ è conservativo in E, infatti E è semplicemente connesso e : $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$. $U_x = y^2 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow U(x,y) = \displaystyle\int (y^2 - \frac{1}{x})\,dx + g(y) = y^2 x - \log x + g(y)$. Imponendo che U_y sia uguale alla seconda componente del campo si trova che $g(y) = \log y$, quindi $U(x,y) = xy^2 - \log x + \log y$. Il potenziale si può anche trovare con gli integrali di linea: $U(x,y) = \displaystyle\int_1^x (1 - \frac{1}{t})\,dt + \int_1^y (2xt + \frac{1}{t})\,dt = x - 1 - \log x + x(y^2-1) + \log y = xy^2 + \log y - \log x + c$.

7. $\vec{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0) \cup x = 2\}$. b) $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

8. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \Rightarrow 2xyf(x) = -y\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Integrando l'equazione differenziale si trova $f(x) = \dfrac{1}{x^2+c}$, con $c > 0$ perché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Sia ad esempio

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int_1^y -t\log\frac{1}{x^2+1}\,dt = \frac{1}{2}y^2\log(x^2+1)$.
$\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,ds = U(1,2) - U(0,1) = 2\log 2.$

9. $U(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, esiste in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. b) $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = 0$ perché γ è una linea chiusa. c) $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = U(2,5) - U(0,1) = \frac{1}{2}\log 29$. d) $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\log R^2 - \frac{1}{2}\log R^2 = 0$.

10. a) $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, infatti $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. b) $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t)\right] dt = 2\pi$. Poiché l'integrale lungo una curva chiusa è non nullo, $\vec{F}$ non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. c) E è semplicemente connesso, dunque $\vec{F}$ ammette potenziale in E. $U(x,y) = \displaystyle\int_1^y F_2(0,t)\,dt + \int_0^x F_1(t,y)\,dt = -\arctan\frac{x}{y}$.

11. $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$, infatti $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso e $\mathrm{rot}\vec{F} = \mathbf{0}$. $U(x,y,z) = \displaystyle\int_0^x t^2\,dt + \int_0^y t\,dt + \int_0^z t^3\,dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^4$.

12. Si ha che $\mathrm{rot}\vec{F} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{j} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k} = \mathbf{0}$, quindi $f(x,y,z) = g(x)$. $U(x,y,z) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt + \int_0^z y\,dt = \int_0^x g(t)\,dt + yz$.

13. Affinché $\mathrm{rot}\vec{F} = \mathbf{0}$, deve essere $\alpha = 2$. $U(x,y,z) = \displaystyle\int_1^x (2t + \frac{1}{t})\,dt + \int_1^y \log x\,dt + \int_1^z \left(x^2 + y\log x - \frac{y^2}{t}\right) dt = x^2z + yz\log x - y^2\log z - 1$.

14. Il campo non è conservativo. Sia γ_1 il segmento congiungente $(0,0,0)$ con $(3,0,0)$; le equazioni parametriche di γ_1 sono: $x = 3t, y = 0, z = 0, 0 \le t \le 1$. Sia γ_2 il segmento congiungente $(3,0,0)$ con $(2,3,1)$; le equazioni parametriche di γ_2 sono: $x = 3 - t, y = 3t, z = t, 0 \le t \le 1$. Sia γ_3 il segmento congiungente $(2,3,1)$ con $(2,3,0)$; le equazioni parametriche di γ_3

sono: $x = 2, y = 3, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$. $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\, d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\, d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\, d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^1 \left[-3t^2 + 9t(3-t) - 12\right] dt = -\frac{5}{2}$.

15. Sia D la regione intena alla curva; $\displaystyle\int_C \vec{F}\, d\mathbf{r} = \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dx\, dy = \iint_D (-2x - 2y)\, dx\, dy = -2 \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 (x+y)\, dy \right) dx = -\frac{168}{5}$.

16. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, e sia $C = \partial E^+$; allora le equazioni parametriche di C sono: $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $|E| = \displaystyle\iint_E dx\, dy = \iint_E (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dx\, dy = \int_C \vec{F}\, ds = \int_0^{2\pi} \left[a\cos\theta \vec{j} \cdot (-a\sin\theta\vec{i} + b\cos\theta\vec{j})\right] dt = \pi ab$.

17. $\vec{V} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, rot$\vec{V} = 2\vec{w}$. (Il rotore di un campo di velocità è legato alle rotazioni: le particelle che occupano la posizione $P = (x, y, z)$ ruotano attorno all'asse parallelo alla direzione del rotore con velocità proporzionale al modulo del rotore).

18. a) $|\vec{E}| = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, vers$\vec{E} = \dfrac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; b) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, è connesso e semplicemente connesso; c) rot$\vec{E} = \mathbf{0}$; d) $U(x, y, z) = -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; e) la circuitazione è nulla poiché il campo è conservativo in D.

19. a) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} I \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$; b) $|\vec{B}| = \dfrac{\mu_0}{2\pi} I \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, vers$\vec{B} = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$; c) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$, è connesso, non semplicemente connesso; d) rot$\vec{B} = \mathbf{0}$; e) $\vec{B}$ non ammette potenziale in D: cosideriamo la circonferenza unitaria γ di centro $(0,0,0)$ contenuta nel piano x, y; le equazioni parametriche di γ sono: $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si ha che $\displaystyle\int_\gamma \vec{B}\, d\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta, 0)(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I \neq 0$, dunque $\vec{B}$ non è conservativo in D.

20. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $(2,2)$, e si trova sotto la bisettrice dato che $t^2+t \le t^4+t$ se $0 \le t \le 2$. Il bordo di A è quindi composto da γ e dal segmento di equazione parametrica $x=t, y=t$ con $0 \le t \le 1$. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-Green si ha che: $|A| = \iint_A dx\, dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2+t)(4t^3+1)\, dt - \int_0^2 t\, dt = \frac{3}{10}$.

21. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$, e si trova sopra il segmento dato che $te^{-t} \ge \frac{1}{e^2} te^t$ se $0 \le t \le 1$. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-Green si ha che: $|A| = \iint_A dx\, dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F}\, d\mathbf{r} = -\int_0^1 te^t(e^{-t} - te^{-t})\, dt + \int_0^1 et\frac{1}{e}\, dt = \frac{1}{3}$.

22. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $(-\pi, 0)$, e si trova sopra l'asse x. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-Green si ha che: $|A| = \iint_A dx\, dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^\pi t\cos t(\sin t + t\cos t)\, dt + \int_{-\pi}^0 t \cdot 0\, dt = \int_0^\pi t^2 \cos^2 t dt + \int_0^\pi t\cos t \sin t dt = \frac{1}{2}t^2 \left[\sin t \cos t + t\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\frac{1}{2}(\sin t \cos t + t) dt + \int_0^\pi t \cos t \sin t dt = \frac{\pi^3}{6}$.

23. Se $(x,y,z) \in \gamma$, (x,y) soddisfa l'equazione: $x^2+y^2-y=0$, che rappresenta una circonferenza di centro $(0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$. Una parametrizzazione di γ è: $x(t) = \frac{1}{2}\cos t$, $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t$, $z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t$, con $0 \le t \le 2\pi$. Il lavoro vale: $\int_0^{2\pi} \left[-(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t)(-\frac{1}{2}\sin t) + \frac{1}{2}\cos t \frac{1}{2}\cos t + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t)\frac{1}{2}\cos t\right] dt = \frac{1}{2}\pi$.