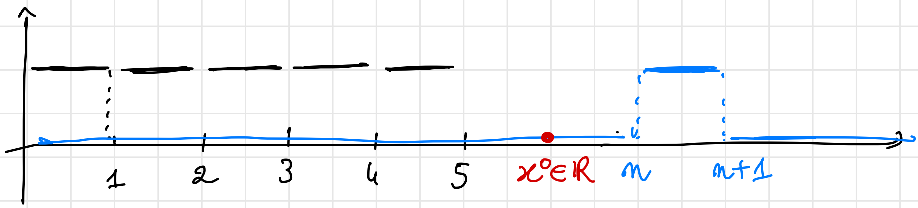
Q: $f_n \longrightarrow 0$ q.o. su E $\overset{?}{\not\Longrightarrow}$ / $\underset{?}{\not\Longleftarrow}$ $f_n \longrightarrow 0$ in $L^1(E)$

Controesempio 1 $\not\Longrightarrow$

$\exists \ f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \longrightarrow 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\longrightarrow 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$

$$f_n = \chi_{(n,n+1)} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

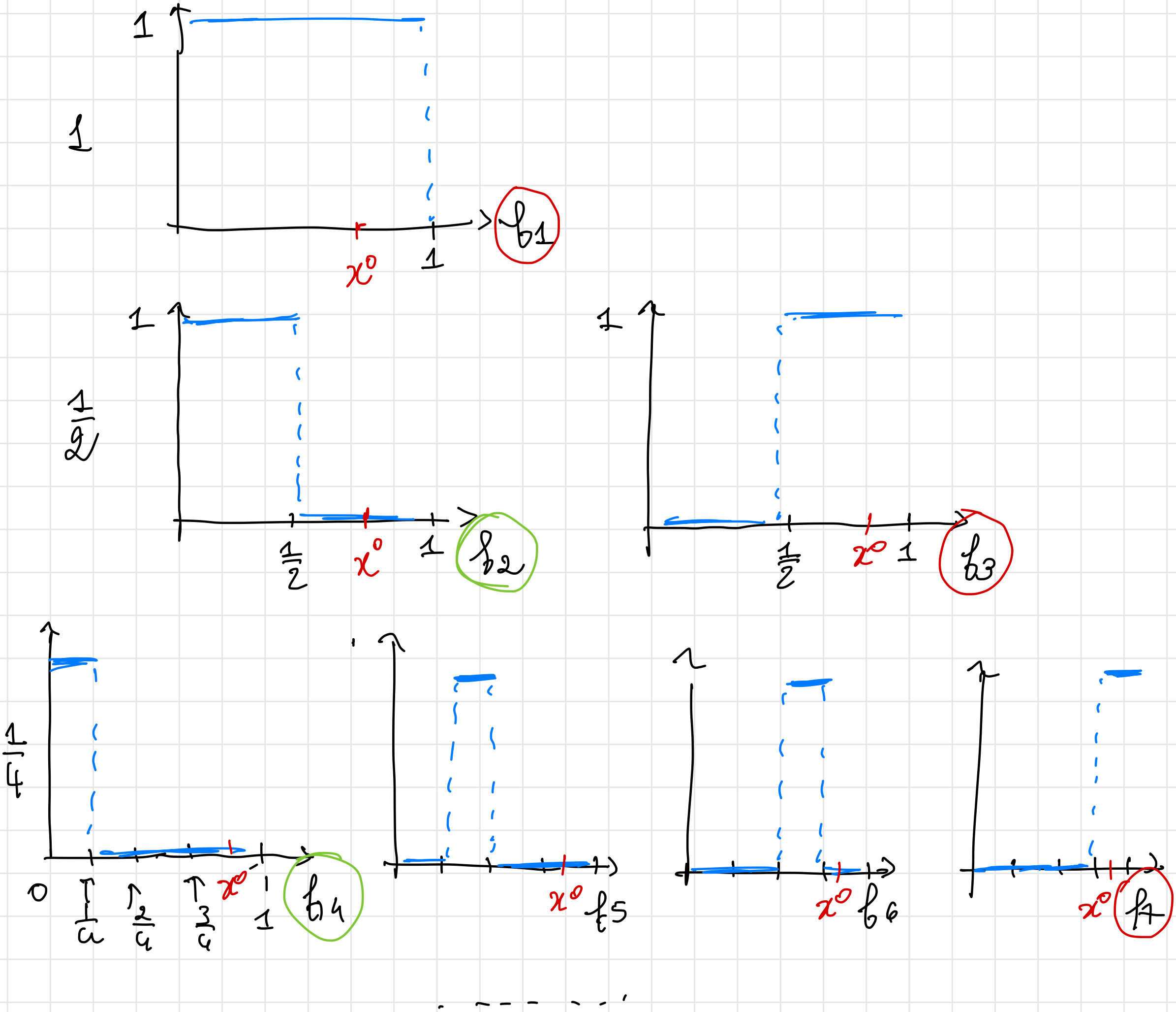


- Fissato $x^0 \in \mathbb{R}$, $f_n(x^0) = 0$ definitivamente (per $n \gg 1$)
- $\int_{\mathbb{R}} |f_n| \, dx = \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Controesempio 2

$\exists \ f_n \subseteq L^1(0,1)$: $f_n \longrightarrow 0$ in $L^1(0,1)$

$f_n \not\longrightarrow 0$ q.o. su $[0,1]$



- $f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$: $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f_n| \to 0$
- $f_n(x^0) \not\to 0 \quad \forall x^0 \in (0,1)$.

Fissato $x^0 \in (0,1)$, $\exists\ K(n)$: $f_{K(n)}(x^0) \equiv 1$.

Proposizione: Se $f_n \to 0$ in $L^1(E)$, allora $\exists\, f_{k(n)} \to 0$ q.o. in E.

Oss.

- Si può mettere f al posto di 0.
- Nell'esempio, è vero!
- **Conseguenza**:

  Se una successione f_n ammette limite in $L^1(E)$ allora questo limite deve coincidere col limite puntuale q.o. Infatti

  $f_n \to f$ in $L^1(E)$

  Allora $\exists\, f_{k(n)} \to f$ q.o. in E.

  (per la proposizione).

  limite puntuale (q.o.)

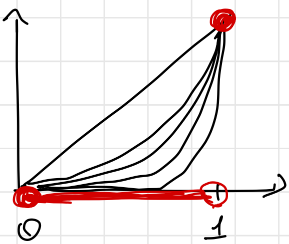
  Quindi se $f_n \to g$ q.o. in E.

  ($\Rightarrow f_{k(n)} \to g$ q.o. in E)

  Per l'unicità del limite puntuale q.o., $f = g$ q.o. in E)

<u>Recall:</u> per passare al limite sotto integrale nella teoria di Riemann, serve la cv. uniforme. È un'ip. molto forte: in molti casi, il teorema non si può applicare, anche se $\lim \int = \int \lim$.

<u>Es.</u> $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1]$.



$$x^n \to f(x) \cdot \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 = \int_0^1 \lim f_n = \lim \int_0^1 f_n = \lim \underbrace{\int_0^1 x^n}_{= \frac{1}{n+1}}$$

ma non è vero che

$f_n \to f$ uniformemente

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n - f| \not\to 0$$

Teorema di conv. dominata (di Lebesgue)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ e sia $f_n \to f$ q.o. su E.

Supponiamo che $\exists\, g \in L^1(E)$ indip. da n tale che

(*) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (definitivamente)

Allora $f_n \longrightarrow f$ in $L^1(E)$

Oss.

- La (*) è un'ip. molto più debole della cv. uniforme.
- In particolare per $f_n(x) = x^n$ su $(0,1)$, la (*) è immediatamente verificata, prendendo $g \equiv 1$
- Invece, nel controesempio 1, $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}$: se $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. su $\mathbb{R}$, $g \notin L^1(\mathbb{R})$ ($g \geq 1$ su una semiretta dx)
- È un teorema di passaggio al limite sotto $\int$

$$\underset{(q.o.)}{|f_n - f| \to 0 \text{ su } E} \overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \int_E |f_n - f| \to 0$$

$\Rightarrow$ il lim degli integrali $=$ l'integrale del lim

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$. Supponiamo che:

(**) $\quad f_n \geq 0$ q.o. su E, $\quad f_{n+1} \geq f_n$ q.o. su E

Allora:

$$\int_E \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{\exists \text{ q.o.}} \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n$$

$\uparrow$ eguaglianza in $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Oss.

- Il teo si applica anche se $f_n \leq 0$ $\searrow$

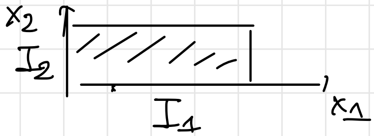
  Infatti considero $g_n = -f_n \geq 0 \nearrow$

  B.L. a $g_n \Rightarrow$ $\underbrace{\int_E \lim g_n}_{\int_E \lim(-f_n)} = \lim \int_E g_n$

  $$\int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$$

- Può valere anche come $+\infty = +\infty$.

Integrali multipli



Teorema Fubini

Sia f $\mathcal{L}$-integrabile su $\begin{matrix}\mathbb{R}^{m+n} & & \mathbb{R}^{m} & & \mathbb{R}^{n}\\ \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$}\\ I & = & I_1 & \times & I_2\end{matrix}$

Allora:

1) per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ $\mathcal{L}$-int. su I_2

2) $x_1 \longmapsto \displaystyle\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$ $\mathcal{L}$-int. su I_1

3) $$\int_{I} f(x_1,x_2)\, \underbrace{dx_1 dx_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{misura di} \\ \text{Lebesgue} \\ \text{su } \mathbb{R}^2}} = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\, dx_2\right) dx_1$$

$I = I_1 \times I_2$

Oss. Si può scambiare il ruolo delle variabili:

Quindi:

$$\int_I f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right) dx_1$$

$$= \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right) dx$$

Teorema Tonelli

Sia $f \geq 0$ misurabile su $I = I_1 \times I_2$.

Supponiamo che:

1) per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ $\mathcal{L}$-int. su I_2

2) $x_1 \longmapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$ $\mathcal{L}$-int. su I_1

Allora:

f $\mathcal{L}$-integrabile su $I_1 \times I_2$.

(e quindi, per Fubini, $\displaystyle\int_I f = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1 = \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2$)

Oss.

Se ho una f che cambia segno,

posso provare a applicare Tonelli a $|f|$:

se $|f|$ soddisfa 1) e 2), Tonelli $\Rightarrow$

$|f|$ $\mathcal{L}$-integrabile $\Rightarrow$ f $\mathcal{L}$-integrabile

$\Rightarrow$ posso applicare Fubini.

Spazi di Lebesgue (o spazi L^p)

Def.

$$\begin{cases} L^1(E) = \{ f : \overset{\overset{\text{misurabile} \subseteq \mathbb{R}^n}{\uparrow}}{E} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ |f| \ \mathcal{L}\text{-integrabile} \} \\ \uparrow \\ \text{sp. vettoriale normato (di Banach)} \\ \|f\|_1 := \int_E |f(x)|\, dx \end{cases}$$

$p \in [1, +\infty)$ $\qquad$ $p \in \mathbb{R}$

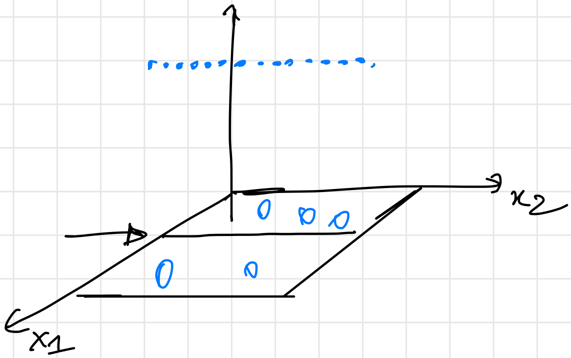
Def.

$$\begin{cases} L^p(E) = \{ f : E \to \mathbb{R} \ : \ |f|^p \ \mathcal{L}\text{-integrabile} \} \\ \uparrow \\ \text{sp. vettoriale normato (di Banach)} \\ \|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \end{cases}$$

(identificando f e g se $f = g$ q.o. in E)

<u>Teorema</u> $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante: $p = 2$.
- Caso "limite": $p = +\infty$.



$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0$$