Serie di Fourier in $L^2(I)$ $\quad I=\left(-\frac{I}{2},\frac{I}{2}\right)$

prodotto scalare $(f,g)=\int_I f(x)g(x)\,dx$

Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici

$$p_0=\frac{1}{\sqrt{T}},\quad p_k=\frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{I}{2}}},\quad q_k=\frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{I}{2}}}\quad (k\geq 1)$$

dove $\xi_k=\left(\frac{2\pi}{T}\right)k$ $\quad$ (se $T=2\pi$, $\xi_k=k$)

formano un sistema ortonormale.

$$\Downarrow$$

Data $f\in L^2(I)$ la sua serie di Fourier rispetto a q.s. sistema è la serie:

$$\underbrace{(f,p_0)}_{\downarrow \atop \int_I f p_0}p_0+\sum_{k\geq 1}\underbrace{(f,p_k)}_{\downarrow \atop \int_I f p_k}p_k+\underbrace{(f,q_k)}_{\downarrow \atop \int_I f q_k}q_k \qquad (*)$$

Modi equivalenti di scrivere (*):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x) \qquad (**)$$

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_I f(x) \cos(\xi_k x)\, dx & k \geq 0 \\ b_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_I f(x) \sin(\xi_k x)\, dx & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \underbrace{e^{i\xi_k x}}_{\cos(\xi_k x) + i \sin(\xi_k x)} \qquad (***)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\xi_k x}\, dx \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \hat{f}_k = \dfrac{a_k - i b_k}{2} & k \in \mathbb{N} \\ \hat{f}_{-k} = \dfrac{a_k + i b_k}{2} \end{cases}$$

Teorema: Il sistema $(p_0, p_k, q_k)_{k \geq 1}$ è ortonormale completo in $L^2(I)$.

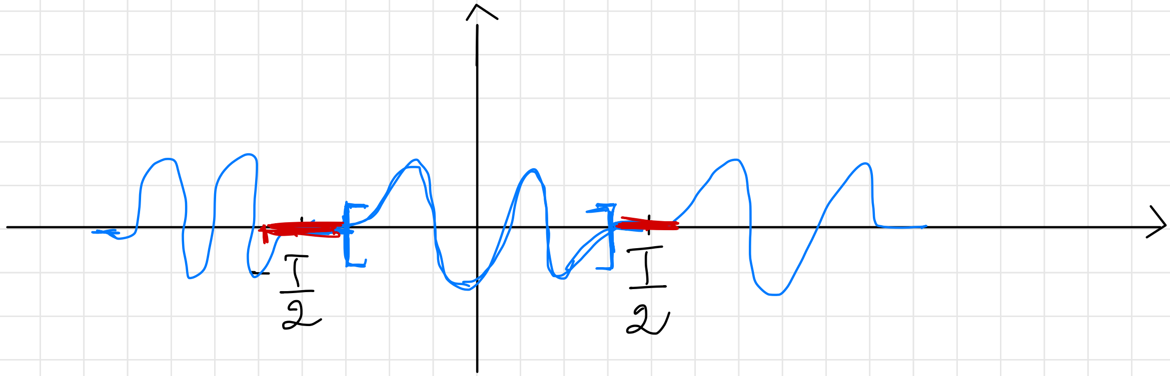
Dim. Usiamo la 3) e mostriamo che

$$\overline{\langle p_0, p_k, q_k \rangle} = L^2(I).$$

$\subseteq$ sempre vero. $(\overline{M} \subseteq H)$

$\supseteq$ $\forall f \in L^2(I)$, f può essere approssimata con elementi di $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$.

Passo 1 Mostriamo che quanto sopra è vero se $f = \varphi \in C_0^\infty(I)$. Infatti, posso estendere φ a $\tilde{\varphi} \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.



Sappiamo (Analisi B) che la serie di F. di $\tilde{\varphi}$ converge a $\tilde{\varphi}$ unif. su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

$\Rightarrow$ in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

$\Rightarrow$ la successione delle somme parziali della serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ fornisce una successione in $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$ che converge a $\tilde{\varphi} = \varphi$ in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

<u>Passo 2</u> Data $f \in L^2(I)$, posso approssimarla con una successione $\varphi_k \subset C_0^\infty(I)$.

$$\varphi_k \xrightarrow{L^2(I)} f$$

Concludo prendendo una successione d'approssimazione.

oppure:

$$\| f - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma parziale} \\ \text{della serie di F} \\ \text{di } \varphi}}{S} \| \leq \underbrace{\| f - \varphi \|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\| \varphi - S \|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Osservazioni / commenti

- Data $f \in L^2(I)$, per il teorema sopra:

$$f = (f,p_0)p_0 + \sum_{k\geq 1} (f,p_k)p_k + (f,q_k)q_k.$$

- Data $f \in L^2(I)$, vale l'id. di Bessel:

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = (f,p_0)^2 + \sum_{k\geq 1} (f,p_k)^2 + (f,q_k)^2$$

(id Bessel: $f \in L^2(I) \Leftrightarrow$ i suoi coeff di Fourier $\in \ell^2$)

- Possiamo "sostituire" $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ con

$$L^2_T(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) \quad : \quad T\text{-periodiche} \}.$$

è uno spazio di Hilbert, con $(f,g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f\, g$

- I coeff di F. hanno senso anche per $f \in L^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$:

$$|a_k| = \frac{2}{T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\xi_k x)\,dx\right| \leq \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| < +\infty$$

lo stesso per i b_k.

• Se $f \in A.C.\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]\right)$ e $f\left(-\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)$

posso estenderla a una funzione continua periodica su $\mathbb{R}$

(l'estensione f appartiene a $L^2_T(\mathbb{R})$).

Ha senso calcolare i coeff di Fourier sia di f che di f'

$$\begin{cases} a_k, b_k & \text{siano i coeff di Fourier di } f \\ a'_k, b'_k & \text{" \quad " \quad " \quad " } f' \end{cases}$$

$$a'_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\cos(\xi_k x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=} \frac{2}{T}\cancel{f(x)\cos(\xi_k x)}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T}\xi_k\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\xi_k x)\,dx = \xi_k b_k$$

$$\begin{cases} a'_k = \xi_k b_k \\ b'_k = -\xi_k a_k \end{cases}$$

relazioni tra i coeff di Fourier di f e di f'

$$\left\{ \widehat{f'}_k = i\xi_k \widehat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \right.$$

Applicazioni delle serie di Fourier a eq. differenziali

→ ODE

→ PDE → posposto.

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari tramite serie di Fourier

Consideriamo un'ODE su $\mathbb{R}$ della forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_j u^{(j)} = f \qquad x \in \mathbb{R}$$

ODE in u

a_j ↑ coeff.eti

f ↑ $f \in L^2_T(\mathbb{R})$

Problema: esistono soluzioni T-periodiche (in $L^2_T(\mathbb{R})$)?

La ns eq. differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j (i\xi_k)^{(j)}} \hat{u}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

↑ $P(i\xi_k)$

sistema di (infinite) eq. algebriche in $\hat{u}_k$

Indicando con P il polinomio caratteristico dell'ODE di partenza $\left(P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right)$, l'ODE risulta equivalente al sistema:

$$P(i\xi_k)\,\hat{u}_k = \hat{f}_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ciascuna eq. è un'eq. lineare di 1° grado in $\hat{u}_k$!

$$\left(ax = b \;\begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow \text{unica solut. } x = \dfrac{b}{a} \\ a = 0 \begin{cases} b = 0 \quad \text{infinite soluz.} \\ b \neq 0 \quad \text{nessuna solut.} \end{cases} \end{cases} \right)$$

- Caso 1 $\quad P(i\xi_k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad \hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} \qquad \text{unica sol.} \qquad (\text{in } L^2_T).$$

- Caso 2 $\quad P(i\xi_k) = 0 \quad$ per $\quad k = k_1^*, \dots, k_p^*$

$\nearrow$ $\hat{f}_k = 0$ per $k = k_1^*, \dots, k_p^*$ $\Rightarrow$ infinite soluz.

ovvero
$$\hat{u}_k = \begin{cases} \dfrac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} & k \neq k_1^*, \dots, k_p^* \\ \text{arbitrari} & k = k_1^*, \dots, k_p^* \end{cases}$$

$\searrow$ $\hat{f}_k \neq 0$ per qualche $k \in \{k_1^*, \dots, k_p^*\}$ $\Rightarrow$ no soluz.

Oss/commento: Ci sono altri sistemi ortonormali completi in $L^2(I)$,

$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3 \quad \dots\dots$

$\rightsquigarrow$ polinomi di Legendre.

Es. in $L^2(-1,1)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right), \quad \dots\dots$

Dato $f \in L^2(I)$, per minimizzare la distanza in $L^2(I)$ da un polinomio di grado ≤ 3, dovrò considerare la somma della serie di f. di f. fatta rispetto ai polinomi di Legendre.