TEOREMA DI STOKES E CALCOLO DELLA CIRCUITAZIONE

28-5-2020

ESERCIZIO 1. Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = x^2 + y^2,\ x^2+y^2 \leq 4\}$$

orientata con un vettore normale avente $\underline{k}$ positiva.

1) Dato il campo $\underline{F}(x,y,z) = (y-2z,\ y,\ 2x + e^{z^2})$ calcolare rot $\underline{F}$ e stabilire se è conservativo.

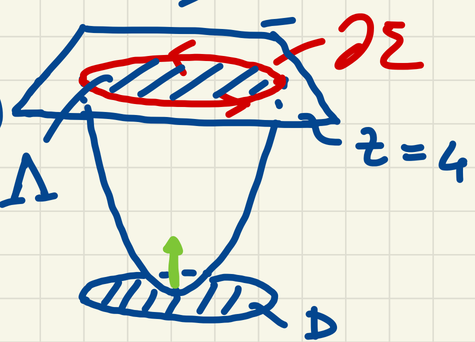
2) Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo il bordo di Σ $(\partial\Sigma)$ con orientazione indotta da Σ.

SOL.

1) $$\operatorname{rot} \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y-2z & y & 2x+e^{z^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(0) - \underline{j}\,(4) + \underline{k}\,(-1) = (0; -4; -1) \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo.

2) 

$z = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 \leq 4$

• Calcolo più rapido: flusso del rotore attraverso la superficie $z = 4$, $x^2+y^2 \leq 4$.

$$\oint_{\partial\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{dr} = \iint_{\Lambda} \text{rot}\, \underline{F} \cdot n\, d\sigma = \iint_{D} (0; -4; -1) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy$$

$$= -\iint_{D} dx\, dy = -\text{Area}(D) = -4\pi.$$

- È possibile calcolare la circuitazione usando la superficie Σ:

$$\oint_{\partial\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{dr} = \iint_{\Sigma} \text{rot}\, \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \iint_{D} (0; -4; -1) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{D} (8y - 1)\, dx\, dy = \underbrace{\cancel{\iint_{D} 8y\, dx\, dy}}_{= 0 \text{ per simmetria}} - \iint_{D} dx\, dy$$

$$= -\text{Area}(D) = -4\pi.$$

- Oppure un po' masochisticamente:

$$\partial\Sigma^+ : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 4 \end{cases} \qquad (\partial\Sigma^+)' : \begin{cases} x' = -2\,\text{sen}\,t \\ y' = 2\cos t \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(y - 2z,\ y,\ 2x + e^{z^2}\right)$$

$$\oint_{\partial\Sigma^+} \underline{F} \cdot d\underline{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\,\text{sen}\,t - 8,\ 2\,\text{sen}\,t,\ 4\cos t + e^{16}\right) \cdot \left(-2\,\text{sen}\,t,\ 2\cos t,\ 0\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\,\text{sen}^2 t + \cancel{16\,\text{sen}\,t} + 4\,\text{sen}\,t\cos t \right) dt =$$

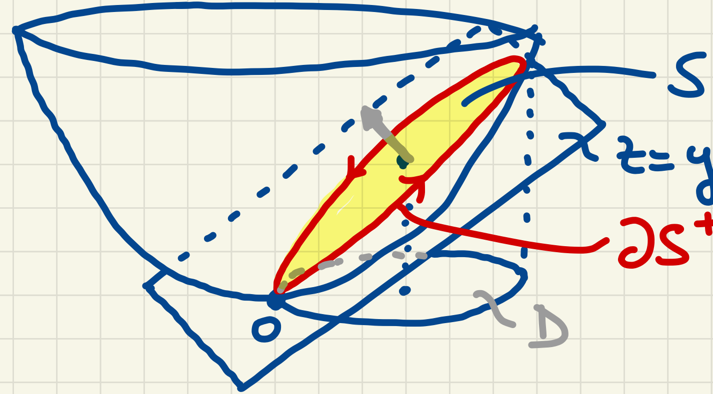
$$= -\cancel{4}^{\,2} \left[\frac{t - \text{sen}\,t\cos t}{\cancel{2}} \right]_0^{2\pi} + \cancel{4 \left[\frac{\text{sen}^2 t}{2} \right]_0^{2\pi}}$$

$$= -2\,(2\pi) = -4\pi.$$

ESERCIZIO 2. Utilizzare il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione del campo $\underline{F}(x,y,z) = (-z,\ 4x,\ y)$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = x^2+y^2$ e il piano $z = y$ specificando l'orientamento scelto.

SOL

$z = y \qquad \underline{n} = (0; -1; +1)$



$$\partial D: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= y \\ x^2 + y^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 - y \le 0 \}$$

cerchio di centro $(0; \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$.

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -z & 4x & y \end{bmatrix} = \underline{i}(1) - \underline{j}(1) + \underline{k}(4) =$$

$$= (1; -1; 4)$$

$$\int_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_S \text{rot}\, \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \iint_D (1,-1,4) \cdot \left(0; -\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}; \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) \cancel{\sqrt{2}}\, dx\,dy$$

$$= \iint_D 5\, dx\,dy = 5\, A(D) = 5 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}\pi.$$

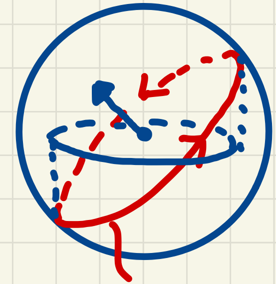
ESERCIZIO 3. Sia $\underline{F}(x,y,z) = (z-2y;\ z-2x;\ x+3y+y^2)$.

Calcolare la circuitazione di $\underline{F}$ lungo la curva γ ottenuta intersecando la sfera $x^2+y^2+z^2=1$ con il piano $y=2z$ sia direttamente che con il teorema di Stokes.

SOL.

DIRETTAMENTE

$$\oint_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$ devo parametrizzare $\partial^+ S$:



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=2z \end{cases}$$

$$x^2+5z^2=1$$

$$x^2+\frac{z^2}{(1/\sqrt{5})^2}=1$$ ellisse nel piano $x-z$.

$a=1 \quad b=1/\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x=1\cdot \cos t \\ z=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t \end{cases} \Rightarrow \partial^+ S: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t \\ z=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t \end{cases} \quad t\in[0;2\pi]$$

$y=2z$

$$(\partial^+ S)' : \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \\ z' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = \left(z - 2y \,;\; z - 2x \,;\; x + 3y + y^2 \right)$$

$$\int_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t - \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t \,;\; \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t - 2 \cos t \,;\; \cos t + \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t + \frac{4}{5} \operatorname{sen}^2 t \right)$$

$$\cdot \left(- \operatorname{sen} t \,;\; \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \,;\; \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(+ \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}^2 t + \frac{2}{5} \operatorname{sen} t \cos t - \frac{4}{\sqrt{5}} \cos^2 t + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos^2 t + \frac{6}{5} \operatorname{sen} t \cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{5\sqrt{5}} \operatorname{sen}^2 t \cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \sin^2 t - \frac{3}{\sqrt{5}} \cos^2 t + \frac{8}{5} \cancel{\sin t \cos t} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \cancel{\sin^2 t \cos t} \right) dt$$

$$\cancel{\sin t \cos t} \overset{\text{}}{=} 0 \qquad \cancel{\sin^2 t \cos t} = 0$$

$$= \int_0^{2\pi} - \frac{3}{\sqrt{5}} \cos 2t \, dt = 0$$

Con Stokes: $\underline{F}(x, y, z) = (z - 2y, z - 2x, x + 3y + y^2)$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-2y & z-2x & x+3y+y^2 \end{bmatrix} = \underline{i}(2+2y) - \underline{j}(0) + \underline{k}(0)$$

$$= (2+2y, 0, 0)$$

$z = \frac{y}{2}$ $\qquad \underline{n} = \left(0; -\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\int_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint \text{rot}\, \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \iint_D (2+2y, 0, 0) \cdot \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right) dx\,dy$$

$$= 0.$$

SERIE DI FUNZIONI

ESERCIZIO 4. Stabilire se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos e^{nx}}{n^2}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$.

SOL.

NOTA. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ succ. di funz.

allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente a $f(x)$

se: 1) $|f_n(x)| \leq a_n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Nel nostro esercizio:

1) $\left| \frac{\cos e^{nx}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow$ la serie di funzioni data converge totalmente.

NOTA: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$ (serie armonica generalizzata)

ESERCIZIO 5 Studiare la convergenza totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$$

e determinarne la somma.

SOL. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x e^{-x})^n$

- $|(x e^{-x})^n| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \text{ CONV.} \\ +\infty & q \geq 1 \text{ DIV.} \\ \text{IRREG.} & q \leq -1 \end{cases}$$

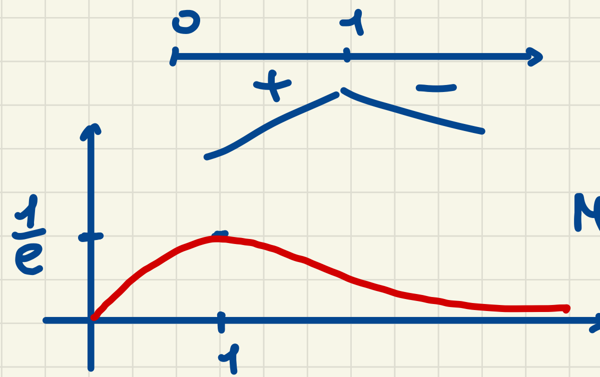
$f(x) = x e^{-x} \quad x \in [0, +\infty)$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

$f'(x) > 0 \iff 1-x > 0 \to x < 1$



$\text{Max}\left(1; \frac{1}{e}\right)$

SOMMA DELLA SERIE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x e^{-x})^n = \frac{1}{1 - x e^{-x}} - 1 = \frac{1 - 1 + x e^{-x}}{1 - x e^{-x}} = \frac{x e^{-x}}{1 - x e^{-x}}$$

ESERCIZIO 6. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ converge totalmente.

SOL. $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| < \frac{1}{2}$ infatti

$$2|x| < 1+x^2$$
$$x^2-2|x|+1>0$$
$$(|x|-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \quad \text{(vero)}$$

- $\left|\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge

$\Rightarrow$ la serie data converge totalmente.

SERIE DI POTENZE

ESERCIZIO 7. Determinare l'insieme di convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} (x-0)^n$$

SOL.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/2^{\sqrt{n+1}}}{1/2^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{\underbrace{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}_{\to 0}} = 2^0 = 1 = \ell$$

$$R = \frac{1}{\ell} = 1$$

La serie converge per $|x-0|<1$

$-1<x<1$.

- $x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n}$

LEIBNITZ:
- $\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}} \geq 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- $\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ è decrescente

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibnitz.

• $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Osservo che $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/2^{\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = 0$$

La serie converge perché converge $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

La serie di potenze data converge in $[-1; 1]$.

ESERCIZIO 8. Determinare il raggio di convergenza della serie lacunare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

SOL.

Una serie si dice LACUNARE se ha infiniti termini nulli (nel nostro esercizio mancano tutti i termini dispari)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{x^2=t}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right) t^n$$

$(t-0)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$R = 3 \qquad |t| < 3 \qquad x^2 < 3 \rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

$x = \pm\sqrt{3}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza

(C.N. di convergenza $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$)

ESERCIZIO 9. Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n .$$

Detta $f(x)$ la somma della serie calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOL. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{3^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3}$$

$R = 3 \qquad x \in (-3; 3)$

$x = 3$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\cancel{3^n}} \cdot \cancel{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ diverge

$x = -3$: idem.

La serie converge in $(-3; 3)$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{n+1}{3^n} x^n\,dx\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n+1}}{3^n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

ESERCIZIO 10. Sviluppare in serie di potenze la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ intorno a $x = 0$.

SOL. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \underset{t=-x^2}{\uparrow}{=} \frac{1}{1+x^2} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

SVILUPPO DI MC. LAURIN di $f(x) = \operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ESERCIZIO 11. Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-1)^n$$

Detta f la somma della serie calcolare $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$.

SOL.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+2n} = 1$$

$$R = 1 \qquad |x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$ non conv.

(no C.N. di conv.)

$x=2$: idem.

La serie di potenze converge in $(0;2)$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(x-1)^n = 0 + \frac{1}{2}(x-1)^1 + \frac{2}{3}(x-1)^2 + \dots$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \dots$$

$f(1)=0 \qquad f'(1)=\frac{1}{2} \qquad f''(1)=\frac{4}{3}$