DERIVATE DIREZIONALI

25-3-2021

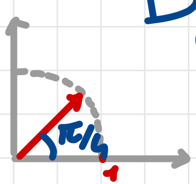
ESERCIZIO 1. Siano $\beta > 1$, $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e si consideri la funzione

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1}\, y}{x^2+y^2} & \text{se } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{se } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Al variare di $\beta > 1$ determinare, se esiste, $D_{\underline{v}} f(0;0)$ calcolandola.

SOL.

$$D_{\underline{v}} f(0;0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\cancel{0} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \cancel{0} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(0;0)}{t} =$$



$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left|t/\sqrt{2}\right|^{\beta-1} \cdot \cancel{t}/\sqrt{2}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta-\cancel{1}} \cdot |t|^{\beta-1} \cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta} \cdot |t|^{\beta-3} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > 3 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 & \text{se } \beta = 3 \\ \underbrace{\infty}_{\text{NON ESISTE}} & \text{se } 1 < \beta < 3 \end{cases}$$

$\exists\, D_{\underline{v}} f(0,0)$ se e solo se $\beta \geq 3$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x;y) = y^4 e^{3x}$ determinare per quali versori $\underline{v}$ la

$D_{\hat{v}} f(0;-1)$ è 1) MASSIMA , è 2) NULLA rispettivamente.

SOL.

$f(x;y) = y^4 e^{3x}$ è differenziabile ($f \in C^\infty$)

$\Longrightarrow$ VALE LA FORMULA DEL GRADIENTE

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x;y) = 3y^4 e^{3x} \longrightarrow f(0;-1) = 3 \\ f_y(x;y) = 4y^3 e^{3x} \longrightarrow f(0;-1) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \nabla f(0;-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow |\nabla f(0;-1)| = \sqrt{9+16} = 5$$

1) Poiché la direzione di massima crescita è quella del gradiente: $\hat{v} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$

2) FORMULA DEL GRADIENTE :

$$D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v}$$

$$0 = D_{\underline{v}} f(0;-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 3a - 4b$$

$$\uparrow$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$3a - 4b = 0$ vero per es. $a = 4$, $b = 3$ $\quad \underline{V} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$|\underline{V}| = 5 \implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

La derivata direzionale si annulla lungo la direzione del vettore $\underline{v} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

1) Verificare che NON è differenziabile in $(0;1)$.

2) Calcolare tutte le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0;1)$.

SOL.

1) $f_x(0;1) = g'(0) = 0$

$g(x) = f(x;1) = 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x$

$f_y(0;1) = h'(1) = 0$

$h(y) = f(0;y) = 1 \Rightarrow h'(y) = 0 \quad \forall y$

$$\lim_{(h;k)\to(0;0)} \frac{f(\cancel{0}+h;1+k) - \boxed{f(0;1)} - \cancel{0} - \cancel{0}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h;k)\to(0;0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k} \cancel{+1} - \cancel{1}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0;0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

RESTRIZIONE $h=0 \rightarrow$ limite nullo.

RESTRIZIONE $h=k$

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^3}}{\sqrt{2k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\sqrt{2}\,|k|} \neq 0$$

Il limite non esiste e f non è differenziabile.

2) Per calcolare $D_v f(0;1)$ non posso usare la formula del gradiente ma uso la definizione:

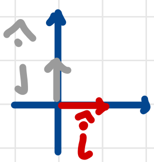
$$D_{\underline{v}} f(0;1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta;\, 1+t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(0,1)}{t} =$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cancel{t^2}\cos^2\theta\, \cancel{t}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cancel{1} - \cancel{1}}}{\cancel{t}} = \sqrt[3]{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

OSS

$\theta = 0$:



$$D_{\hat{i}} f(0;1) = f_x(0;1) = 0$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad D_{\hat{j}} f(0;1) = f_y(0;1) = 0$

ESERCIZIO 4. Sia $T(x;y) = e^{-x+2y}$ una funz. temperatura.

1) Determinare le curve di livello passanti

per $(0;0)$ (ISOTERME)

2) Verificare che tale curva è ortogonale a $\nabla T(0;0)$.

3) Calcolare la velocità di massima crescita.

SOL.

1) $T(x;y) = c \rightarrow e^{-x+2y} = c \rightarrow \underline{-x+2y = \ln c}$

passaggio per $(0;0) \Rightarrow \ln c = 0 \Rightarrow c = 1$

EQ. CURVA DI LIVELLO : $-x+2y=0$

$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1/2\, t \end{cases}$ $\quad \underline{d}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $\quad r: y = \frac{1}{2} x$

2) $\nabla T(0;0) = ?$

$$T(x;y) = e^{-x+2y} \qquad T_x(x;y) = -e^{-x+2y}$$

$$T_y(x;y) = 2e^{-x+2y}$$

$$\nabla T(0;0) = \begin{bmatrix} T_x(0;0) \\ T_y(0;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \underline{d_r}$$

infatti: $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0$

3) La direzione di massima crescita è quella del gradiente

$$\hat{v} = \frac{\nabla T(0;0)}{|\nabla T(0;0)|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

La velocità di massima crescita è la derivata direzionale lungo la dir. del gradiente:

$$D_{\hat{v}} T(0;0) = \nabla T(0;0) \cdot \hat{v} = \nabla T(0,0) \cdot \frac{\nabla T(0,0)}{|\nabla T(0,0)|}$$

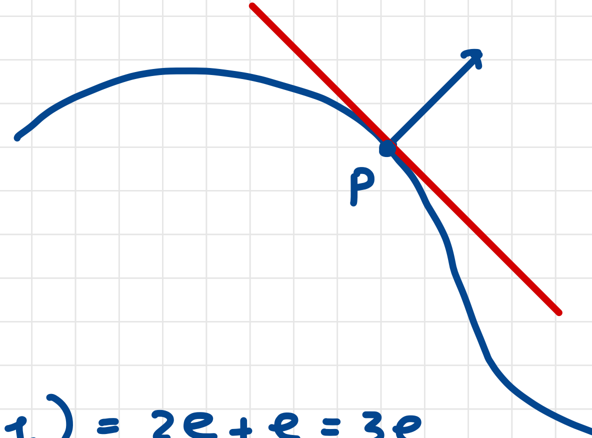
$$= \frac{|\nabla T(0;0)|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\nabla T(0;0)|}} = |\nabla T(0,0)| = \sqrt{5}$$

ESERCIZIO 5.

Data la funzione $f(x;y) = x^2 y + x e^y$, scrivere l'eq. della retta tangente alla curva di livello passante per $(e;1)$.

SOL.

$$\boxed{\pi_{tg}: \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 0}$$



$$f(x;y) = x^2 y + x e^y$$

$$f_x(x;y) = 2xy + e^y \longrightarrow f_x(e;1) = 2e + e = 3e$$

$$f_y(x;y) = x^2 + x e^y \longrightarrow f_y(e;1) = e^2 + e^2 = 2e^2$$

$$\nabla f(e;1) = \begin{bmatrix} 3e \\ 2e^2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{tg}: \begin{bmatrix} 3e \\ 2e^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - e \\ y - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$3\cancel{e}(x - e) + 2e^{\cancel{2}}(y - 1) = 0 \longrightarrow \boxed{3x + 2ey = 5e}$$

ESERCIZIO 6. Sia data la funzione

$$f(x;y;z) = (x^2-1)(y^2-1) - 2z^2$$

Scrivere l'eq. del piano tangente alla superficie di livello $f(x;y;z) = 0$ nel punto $(\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}})$

SOL.

$$\pi_{tg}: \quad \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$f_x(x;y;z) = 2x(y^2-1) \longrightarrow f_x(\sqrt{2};\sqrt{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

$$f_y(x;y;z) = 2y(x^2-1) \longrightarrow f_y(\sqrt{2};\sqrt{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

$$f_z(x;y;z) = -4z \longrightarrow f_z(\sqrt{2};\sqrt{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$$

$$\nabla f(\sqrt{2};\sqrt{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{tg}: \cancel{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-\sqrt{2} \\ y-\sqrt{2} \\ z-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$$

$$x-\sqrt{2}+y-\sqrt{2}-z+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$x+y-z-2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\boxed{x+y-z-\frac{3}{2}\sqrt{2}=0}$$

ESTREMI LIBERI
(OTTIMIZZAZIONE SU APERTI)

ESERCIZIO 7. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e stabilirne la natura.

1) $f(x;y) = xy - y^2 + 3$

2) $f(x,y) = (x+y+1)(x-y+1)$

SOL.

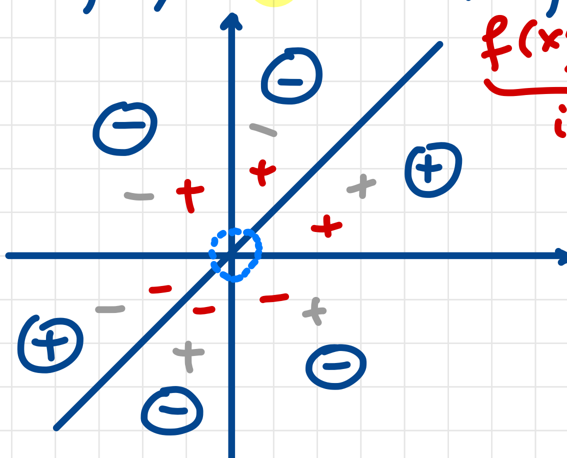
1) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2$ $\qquad \nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} y \\ x-2y \end{bmatrix}$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x-2y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$(0;0)$ è l'unico punto critico.

$f(0;0) = 3$ $\qquad f(x;y) > 3$ $\qquad xy - y^2 + \cancel{3} > \cancel{3}$

$\underbrace{f(x;y)-3}_{\text{incremento}} > 0$ $\qquad y(x-y) > 0$ $\quad \begin{cases} y>0 \\ y<x \end{cases}$



L'incremento intorno a $(0;0)$ cambia segno

$\Rightarrow$ $(0;0)$ è un punto di SELLA o COLLE

Si poteva anche procedere nel modo seguente:

(MATRICE HESSIANA $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

$$f(x;y) = xy - y^2 + 3$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} y \\ x-2y \end{bmatrix}$$

$f_{xx} = 0 \qquad f_{xy} = 1$

$f_{yx} = 1 \qquad f_{yy} = -2$

$$H_f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0;0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det H_f(0,0) = -1 \underline{< 0}$$

$\Rightarrow (0,0)$ è una SELLA.

2) $f(x;y) = (x+y+1)(x-y+1) \qquad D = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x;y) = x-y+1+x+y+1 = 2x+2$$

$$f_y(x;y) = x-y+1-x-y-1 = -2y$$

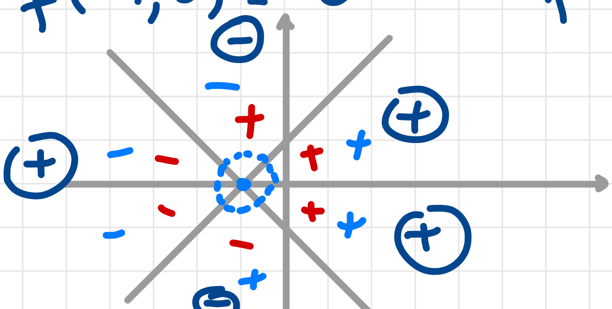
$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 2x+2 \\ -2y \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2=0 \rightarrow x=-1 \\ -2y=0 \rightarrow y=0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è $(-1;0)$.

$f(-1,0) = 0 \qquad f(x,y) > 0 \qquad \underbrace{(x+y+1)}_{1°F}\underbrace{(x-y+1)}_{2°F} > 0$

$y > -x-1 \qquad y < x+1$



$(-1;0)$ è una SELLA.

ESERCIZIO 8. Studiare i punti critici della funzione $f(x;y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4 + 15$

SOL.

$D = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x;y) = 4(x-y) - 4x^3$$
$$f_y(x;y) = -4(x-y) - 4y^3$$

$$\nabla f(x;y) = 4\begin{bmatrix} x-y-x^3 \\ -x+y-y^3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \oplus \begin{cases} x-y-x^3=0 \\ -x+y-y^3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-y-x^3=0 \\ +x^3+y^3=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x-y-x^3=0 \\ (x+y)\cancel{(x^2-xy+y^2)}=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x-x^3=0 \rightarrow x(2-x^2)=0 \\ y=-x \end{cases}$$

$x=0 \qquad x=\pm\sqrt{2}$

$P_1(0;0) \qquad P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2}) \qquad P_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$

$$\nabla f(x;y) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x-y-x^3 \\ -x+y-y^3 \end{bmatrix}$$

$$f_{xx}(x;y) = 4(1-3x^2) \qquad f_{xy}(x;y) = -4$$

$$f_{yx}(x;y) = -4 \qquad f_{yy}(x;y) = 4(1-3y^2)$$

$$H_f(x;y) = \begin{bmatrix} 4(1-3x^2) & -4 \\ -4 & 4(1-3y^2) \end{bmatrix}$$

- $$H_f(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \boxed{-20} & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$$ <0

$\det H_f(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = \underline{384} > 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2};-\sqrt{2})$ è un massimo rel.

- $H_f(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \boxed{-20}^{<0} & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$

$\det H_f(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = \underline{384 > 0}$

$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ è un minimo relativo

- $H_f(0;0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$\det H_f(0,0) = \underline{0}$

CASO DUBBIO.

Uso l'incremento:

$f(0;0) = 15$ $\quad f(x;y) > 15$

$$2(x-y)^2 - x^4 - y^4 + \cancel{15} > \cancel{15}$$

$$\underbrace{2(x-y)^2 - x^4 - y^4}_{g(x;y)} > 0$$

- Restrizione all'asse x $\quad (y=0)$

$$g(x;0) = 2x^2 - x^4 = x^2(2-x^2)$$

$$x^2(2-x^2) > 0 \qquad x^2>0 \quad \forall x \neq 0$$

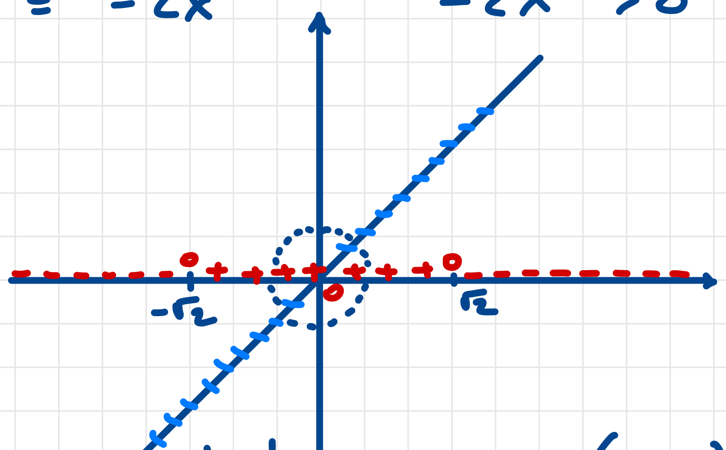
$$2-x^2>0 \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
+		+	0	+		+
−	0	+		+	0	−
−	0	+	0	+	0	−

• Restrizione alla retta $y=x$:

$$g(x;x) = -2x^4 \qquad -2x^4>0 \rightarrow \text{IMP.}$$

	0	
−	0	−



cambio di segno intorno a $(0;0)$. $\Rightarrow$ SELLA.

ESERCIZIO 9. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y,z) = (x^2-1)(y^2-1) - 2z^2$

SOL.

$f_x(x;y;z) = 2x(y^2-1)$

$f_y(x;y;z) = 2y(x^2-1)$

$f_z(x;y;z) = -4z$

$$\nabla f(x;y;0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x(y^2-1) = 0 & \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \\ 2y(x^2-1) = 0 & \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \\ -4z = 0 & \longrightarrow z=0 \end{cases}$$

$P_1(0;0;0)$

$P_2(1;1;0)$

$P_3(-1;1;0)$

$P_4(1;-1;0)$

$P_5(-1;-1;0)$

N.B. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ almeno C^2 e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ p.to critico. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori della matrice Hessiana si ha che:

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \Rightarrow P_0$ MINIMO
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0 \Rightarrow P_0$ MASSIMO
- se hanno segno alterno $\Rightarrow P_0$ SELLA o COLLE

$$f_x(x;y;z) = 2x(y^2-1)$$

$$f_y(x;y;z) = 2y(x^2-1)$$

$$f_z(x;y;z) = -4z$$

$$f_{xx} = 2(y^2-1) \qquad f_{xy} = 4xy \qquad f_{xz} = 0$$

$$f_{yx} = 4xy \qquad f_{yy} = 2(x^2-1) \qquad f_{yz} = 0$$

$$f_{zx} = 0 \qquad f_{zy} = 0 \qquad f_{zz} = -4$$

$$H_f(x;y;z) = \begin{bmatrix} 2(y^2-1) & 4xy & 0 \\ 4xy & 2(x^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0;0;0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow 3 \text{ autovalori} < 0$$

$(0;0;0)$ MAX rel.

$$H_f(1;1;0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (-4-\lambda)(\lambda^2-16) =$$

$$= -(\lambda+4)^2(\lambda-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = -4 \\ \lambda_3 = 4 \end{array}\right\} \quad \text{SEGNI ALTERNI}$$

SELLA

Analogamente per gli altri e si ottengono altrettanti punti di sella.

ESERCIZIO 10.

Si consideri la funzione

$$g(x;y) = \begin{cases} xy \log|y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

1) Stabilire per quali punti g è continua e in quali punti è differenziabile.
2) Trovare i punti critici di g ed eventuali estremi locali.

SOL.

1) CONTINUITÀ: $g(x;y) = x\, h(y)$ con

$$h(y) = \begin{cases} y \log|y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to 0} h(y) = \lim_{y \to 0} y \log|y| = 0 \implies h \text{ è cont.}$$

$\implies g(x;y)$ è continua perché prodotto di funzioni continue.

DIFFERENZIABILITÀ:

$$g(x;y) = \begin{cases} xy\log|y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Se $y \neq 0 \Rightarrow g(x;y)$ è $C^1 \Rightarrow$ è differenziabile

Se $y = 0$:

- DERIVATA RISPETTO A X:

$$k(x) = g(x;0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow k'(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\left(g_x(x;0) = 0 \right)$$

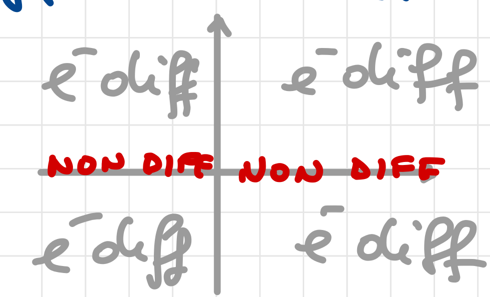
- DERIVATA RISPETTO A Y: uso la def.

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(x;0+k) - g(x;0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{xk\log|k| - 0}{k} = \lim_{k \to 0} x \log|k| =$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ (non c'è la deriv.)

Se $x \neq 0 \Rightarrow g$ non è differenziabile.



Reste da controllare in $x = 0$ (con la def)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - \cancel{g(0,0)} - \cancel{g_x(0,0)h} - \cancel{g_y(0,0)k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\log|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \to \text{è diff.}$$

$$0 < \left| \frac{hk\log|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 \right| = \left| \overbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}^{<1} k\log|k| \right|$$

$$\leq \left| k\log|k| \right| \xrightarrow[k\to 0]{} 0$$