Politecnico di Milano - II Facoltà di Ingegneria - A. A. 2006/2007
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
III appello - Analisi Matematica D (12-9-07) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

I. QUESITI (fornire la risposta precisa senza scrivere il procedimento seguito)

1. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^6+1}\, dx \ .$$

Si tratta di un integrale di "tipo 2" (se seguiamo la convenzione adottata nel corso), che si calcola quindi applicando in modo standard il teorema dei residui. Il risultato è

$$\frac{2\pi}{3} \ .$$

2. Riconoscere se la seguente funzione è una trasformata di Laplace. In caso affermativo, antitrasformarla.

$$U(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \ .$$

Si tratta di una $\mathcal{L}$-trasformata, in quanto U è una funzione olomorfa su $Re(s) > -1$ che soddisfa la condizione sufficiente di decadimento $|U|(s) < M(1+|s|)^{-2}$. Antitrasformando con la formula di Heaviside si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}[U](t) = e^{-t} - e^{-2t} \ .$$

3. Risolvere mediante trasformata di Laplace il seguente problema di Cauchy, dove $H(\cdot)$ indica la funzione di Heaviside:

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = H(x-2) & \text{per } x > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Posto $f(x) := H(x-2)$, $U := \mathcal{L}[u]$, e $F := \mathcal{L}[f]$, trasformando l'equazione si ottiene

$$U(s) = \frac{F(s)}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin x](s) \cdot \mathcal{L}[f](s) \ .$$

Antitrasformando, si ha quindi

$$u(x) = f(x) * \sin(x) = \int_0^x \sin(x-t) H(t-2)\, dt = \big[1 - \cos(x-2)\big] H(x-2) \ .$$

II. ESERCIZIO (svolgere motivando nel modo più esauriente possibile in tutti i passaggi)

Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definite da:

$$f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x) * \chi_{(0,n+1)}(x) \ .$$

(i) Determinare l'espressione esplicita di $f_n(x)$.
(ii) Stabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(iii) Stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ si ha $f_n \in C^k(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(iv) Stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ la successione f_n è convergente in $C^k(\mathbb{R})$.
(v) Stabilire se si ha $f_n \in AC(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(vi) Calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[f_n]$.

(i) Si ha

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,n)}(y)\chi_{(0,n+1)}(x-y)\,dy = \int_0^n \chi_{(0,n+1)}(x-y)\,dy = \int_{x-n}^{x} \chi_{(0,n+1)}(z)\,dz \\ &= \big|(x-n, x) \cap (0, n+1)\big| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2n+1 \\ x & \text{se } x \in [0, n] \\ n & \text{se } x \in [n, n+1] \\ 2n+1-x & \text{se } x \in [n+1, 2n+1] \ . \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Per ogni $p \in [1, +\infty]$ (poiché si tratta di funzioni continue a supporto compatto).

(iii) Solo per $k = 0$ (infatti le f_n non sono di classe C^1).

(iv) Per nessun k. Infatti la successione f_n non converge in $C^0(\mathbb{R})$ (ovvero non converge uniformemente), poiché il limite puntuale è la funzione $f(x) = xH(x)$, ma

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| > |f_n(2n+1) - f(2n+1)| = 2n+1 \to +\infty \ .$$

(v) Si', perché la derivata quasi ovunque di f_n è uguale a 1 su $[0, n]$, a -1 su $[n+1, 2n+1]$, ed è 0 altrove. Quindi è una funzione in $L^1(\mathbb{R})$.

(vi) Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_n(x)](\xi) &= \mathcal{F}[\chi_{(0,n)}(x)](\xi) \cdot \mathcal{F}[\chi_{(0,n+1)}(x)](\xi) \\ &= \Big[\frac{\sin(n\xi)}{\xi} + i\frac{\cos(n\xi) - 1}{\xi}\Big] \cdot \Big[\frac{\sin((n+1)\xi)}{\xi} + i\frac{\cos((n+1)\xi) - 1}{\xi}\Big] \ . \end{aligned}$$