IV.5 - Applicazioni alle ODE

Per risolvere eq. differenziali ordinarie con la trasformata di Fourier si segue lo schema seguente:

1. Si impongono condizioni sulla funzione incognita che rendano leciti i passaggi successivi.
2. Si trasforma l'equazione differenziale ottenendo un'equazione algebrica.
3. Si ricava la trasformata della soluzione.
4. Si antitrasforma quello che si è ottenuto per trovare la funzione incognita.
5. Si verificano che le ipotesi fatte al punto 1 siano rispettate dalla soluzione trovata.

Esempi:

- $u'(x)-u(x)=e^{-x}H(x), \quad x\in\mathbb{R}$

  Si chiede che la funzione u sia integrabile e assolutamente continua: $u\in L^1\cap AC$. Ciò garantisce in particolare la possibilità di trasformare l'equazione e antitrasformare il risultato ottenuto.

  $$\mathcal{F}\left[u'(x)-u(x)\right]=\mathcal{F}\left[e^{-x}H(x)\right]; \quad i\xi\hat{u}-\hat{u}=\frac{1}{1+i\xi}; \quad \hat{u}(1-i\xi)=\frac{1}{1+i\xi}; \quad \hat{u}=\frac{1}{1+\xi^2}=\mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}e^{-|x|}\right]$$

  La soluzione è quindi $u(x)=-\frac{1}{2}e^{-|x|}$, che si vede rispetta le condizioni poste all'inizio.

  Si noti che quella trovata non è in generale la sola soluzione dell'equazione di partenza, ma è l'unica soluzione che sta in $L^1\cap AC$.

- $$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  La soluzione generale di questa equazione si trova immediatamente ed è $u(x) = \arctan x + c$. Si vede facilmente come essa non stia né in L^1 né L^2 per alcun valore di c. Infatti, se si suppone che la soluzione stia in uno di questi due spazi, trasformando si ottiene:

  $$\mathcal{F}\left[u'(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]; \quad i\xi\hat{u} = \pi e^{-|\xi|}; \quad \hat{u} = \frac{\pi e^{-|\xi|}}{i\xi} \left\langle \begin{array}{l} \notin L^\infty \;\Rightarrow\; u \notin L^1 \\ \notin L^2 \;\Rightarrow\; u \notin L^2 \end{array} \right. .$$

- $2u''(x) - e^{-|x|} * u(x) = -e^{-|x|} \operatorname{sign} x, \quad x \in \mathbb{R}$

  Si chiede che $u \in L^1 \;\; u, u' \in AC$. Trasformando l'equazione si ottiene:

  $\mathcal{F}\left[2u''(x) - e^{-|x|} * u(x)\right] = \mathcal{F}\left[-e^{-|x|} \operatorname{sign} x\right]; \quad -2\xi^2 \hat{u} - \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right] \mathcal{F}\left[u(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} e^{-|x|}\right];$

  $-2\xi^2 \hat{u} - \frac{2}{1+\xi^2} \hat{u} = i\xi \frac{2}{1+\xi^2}; \quad \hat{u} = \frac{-i\xi}{\xi^4 + \xi^2 + 1}$

  Utilizzando la formula di inversione e i metodi di analisi complessa, si ottiene che:

  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}|x|}$, che si vede rispettare le condizioni richieste in precedenza.

IV.6 - L'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

Quello che segue è un esempio di applicazione della trasformata di Fourier ad un'equazione alle derivate parziali, in particolare all'equazione delle onde:

$$u_{tt} = \Delta u \text{ con } u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}$$

Il caso monodimensionale *N = 1* è quello della corda vibrante e si considera il problema di Cauchy:

$$(*)\ \begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$, che si può scomporre nei due problemi separati:

$$(1)\ \begin{cases} v_{xx} = v_{tt} \\ v(x,0) = \varphi(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2)\ \begin{cases} w_{xx} = w_{tt} \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

poiché per la linearità dell'equazione, basta sommare le soluzione di (1) e (2) per ottenere la soluzione di $(*)$.

Si cominci dunque con il problema (1). Per risolvere l'equazione, si considera t come un parametro e si applica la trasformata di Fourier alla variabile spaziale.

$$\mathcal{F}\left[v_{xx}(x,t)\right](\xi) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)\right](\xi) = -\xi^2 \hat{v}(\xi,t)$$

$$\mathcal{F}\left[v_{tt}(x,t)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} v_{tt}(x,t)e^{-i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t)e^{-i\xi x}dx \overset{(i)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\mathbb{R}} v(x,t)e^{-i\xi x}dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(\xi,t)$$

dove nel passaggio (i) si richiede a $v(x,t)$ delle condizioni che verranno verificate a posteriori.

Si ottiene dunque la seguente equazione differenziale ordinaria, dove però ora la variabile è t, mentre ξ è considerato un parametro:
$\hat{v}_{tt}(\xi,t) = -\xi^2 v(\xi,t)$, la cui soluzione generale è $\hat{v}(\xi,t) = c_1(\xi)e^{i\xi t} + c_2(\xi)e^{-i\xi t}$.

Le costanti (dipendenti però da ξ) devono essere determinate in base alle condizioni iniziali, anche loro trasformate:

$$\begin{cases} \hat{v}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi) \\ \hat{v}_t(\xi,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) + c_2(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \\ \left[c_1(\xi) - c_2(\xi)\right] i\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1(\xi) = c_2(\xi) = \frac{1}{2}\hat{\varphi}(\xi)$$

La soluzione particolare è dunque: $\hat{v}(\xi,t)=\frac{1}{2}\hat{\varphi}(\xi)\left[e^{i\xi t}+e^{-i\xi t}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]$.

Il problema considerato ha quindi la seguente soluzione: $v(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]$.

La risoluzione del problema (2) ricalca quella appena fatta fino alla risoluzione dell'equazione differenziale ordinaria. In questo caso risulta più utile esprimere la soluzione generale di quest'ultima tramite seno e coseno: $\hat{w}(\xi,t) = c_1(\xi)\sin(\xi t) + c_2(\xi)\cos(\xi t)$

Imponendo le condizioni iniziali (come prima anch'esse trasformate) si ottiene:

$$\begin{cases} \hat{w}(\xi,0) = 0 \\ \hat{w}_t(\xi,0) = \hat{\psi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2(\xi) = 0 \\ c_1(\xi)\xi = \hat{\psi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) = \xi^{-1}\hat{\psi}(\xi) \\ c_2(\xi) = 0 \end{cases}$$

Da qui si ricava quindi che $\hat{w}(\xi,t) = \dfrac{\sin(\xi t)}{\xi}\hat{\psi}(\xi)$, che antitrasformando diventa:

$$w(x,t) = \psi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\right] = \psi(x) * \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}\left(x/t\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi(y)\chi_{(-1,1)}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy\,.$$

La soluzione del problema della corda vibrante $(*)$ da cui si era partiti è quindi:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)dy$$ **(formula di D'Alambert)**

Tutti i passaggi fatti, e in particolare l'uguaglianza (*i*), sono validi se $\varphi\in C^2$ e $\psi\in C^1$.