Analisi Matematica B+C [60038] - Analisi Matematica II [78624], esame del 04/07/2011

Nome e cognome .... **Matricola** ....

1. (a) Dati i campi vettoriali

$$F(x, y) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\,\mathbf{j}, \qquad H(x, y) = 2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{j},$$

dire quale dei due è conservativo motivando la risposta.

I campi sono entrambi definiti su tutto il piano e sono di classe $C^1(\mathbf{R^2})$. Abbiamo $\partial_y F_1(x, y) = \partial_x F_2(x, y) = 2x$, per cui F è conservativo. Nel caso di H, le due derivate differiscono per il segno, per cui H non è conservativo.

(b) Calcolare il lavoro di ciascuno dei due campi definiti al punto precedente lungo la curva γ di equazione

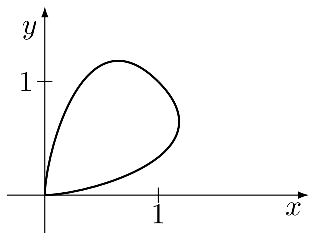
$$\gamma(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}\,, \quad t \in [0, 1].$$

Il calcolo del lavoro del campo F si può fare osservando che un potenziale è dato dalla funzione $U(x, y) = x^2y - y^3/3$, per cui $L = U(x(1), y(1)) - U(x(0), y(0)) = 2/3$. Nel caso di H, occorre calcolare l'integrale

$$L = \int_0^1 (2t^3\mathbf{i} + (t^2 - t^4)\mathbf{j}) \cdot (2t\mathbf{i} + \mathbf{j})dt = \int_0^1 (3t^4 + t^2)dt = 14/15.$$

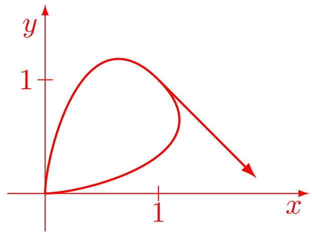
(c) Calcolare l'area racchiusa dalla linea γ di equazione

$$\gamma : \ \gamma(t) = t^2(2 - t)\mathbf{i} + t(2 - t)^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$$



Usiamo la formula di Green: $A = \frac{1}{2}\int_\gamma y\ dx - x\ dy$, poiché

$$x = 2t^2 - t^3, \qquad y = 4t - 4t^2 + t^3,$$



abbiamo che

$$dx = (4t - 3t^2)dt, \qquad dy = (4 - 8t + 3t^2)dt,$$

osserviamo inoltre che la linea γ è percorsa in senso *orario*, infatti $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; pertanto

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma y\ dx - x\ dy = \frac{1}{2}\int_2^0 \Big[[t(2 - t)^2](4t - 3t^2) - [t^2(2 - t)](4 - 8t + 3t^2)\Big]dt$$

$$= \ldots = \int_0^2 t^2(2 - t)^2\ dt = \frac{16}{15}.$$

2. (a) Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x,y) = 3|x|y$$

sul triangolo T di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

$$\iint_T 3|x|ydxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} 3xydy = 3\int_0^1 x(1-x)^2dx = \frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Calcolare il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta, \end{cases}$$

e calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = \frac{xy}{18}$ nella regione A delimitata dalle semirette $x \geq 0$, $y \geq 0$ e dall'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Calcolando le derivate parziali si ottiene che il determinante della matrice Jacobiana è 6ρ. Utilizzando questo cambio di varibile si ha

$$\frac{1}{18}\iint_A xydxdy = 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}.$$

(c) Calcolare direttamente ed usando il teorema della divergenza il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - (z-1)^2\mathbf{k}$$

uscente dalla superficie del cilindro:

$$\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

IL flusso attraverso le due basi del cilindro è nullo poichè quello entrante si bilancia con quello uscente. Infatti il prodotto scalare tra la normale e il campo è uguale e di segno opposto sulle due basi. Il flusso sulla superficie laterale Σ è dato

$$\iint_\Sigma F\cdot ndS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 zdz = 4\pi.$$

Utilizzando il teorema della divergenza otteniamo

$$\iint_\Sigma F\cdot ndS = \iiint_V \mathrm{div}F dxdydz = \iiint_V 2dxdydz = 4\pi,$$

dove V è il cilindro.

3. (a) Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

Si discuta inoltre il tipo di convergenza. (*) Si integri la serie termine a termine e si calcoli la somma della serie ottenuta. (**) Si deduca infine la somma della serie di partenza.

Utilizzando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Dunque il raggio di converga è 2. Controlliamo la serie agli estremi. Sia $x = 2$ che in $x = -2$ la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo. Quindo la serie converge puntualmente nell'intervallo $(-2, 2)$ ed uniformemente negli intervalli della forma $[-2+\varepsilon, 2+\varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$. (*) Integrando la serie termine a termine, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x\frac{1}{1-x/2} = \frac{2x}{2-x}.$$

(**) Derivando la somma della serie del punto (*), otteniamo che la somma della serie di partenza è uguale a $\frac{4}{(2-x)^2}$.

(b) Si discuta la convergenza della serie di Fourier associata alla funzione f così definita: $f(x) = 1 - x^2$ per $x \in [-1, 1]$ ed estesa per periodictà su tutto $\mathbf{R}$.

Poichè f è periodica, di periodo 2, regolare a tratti e continua, la serie di Fourier ad essa associata converge uniformemente ad $f(x)$.

(c) Si scriva la serie di Fourier associata alla funzione definita al punto precedente.
Poichè f è pari, $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Calcoliamo i coefficienti a_n.

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x^2)dx = 2(1-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3},$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x^2)\cos(2nx)dx = \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)x|_0^1 = \frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n.$$

Dunque

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).$$