Analisi matematica 2		Facsimile prima prova
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 2 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di tre variabili :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + z^3$$

a) Scrivere le espressioni del *vettore gradiente* $\nabla f(x, y, z)$ e della *matrice hessiana* $H_f(x, y, z)$ nel generico punto (x, y, z).

b) Trovare i punti critici della funzione e classificarli.

c) Determinare gli *estremi globali* di f nel cilindro

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

d) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 + z^3 = 0$$

nel punto $(1, 1, -1)$.

2. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j}\,; \qquad t \in [\pi, 3\pi]$$

a) Verificare che la curva è piana, semplice e regolare; calcolare il vettore tangente nel punto $\mathbf{r}(2\pi)$.

b) Fare un disegno (qualitativo) del sostegno della curva, indicando il verso di percorrenza;

c) Calcolare la lunghezza della curva.

3.

3a)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{t}{y-1}.$$

i) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (giustificare la risposta).
ii) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e risolvere i problemi di Cauchy $y(0) = 0$ e $y(0) = 2$.

3b)

Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Studiare le traiettorie nello spazio delle fasi.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione f è continua con tutte le derivate. Gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + z(3z - 2)\,\mathbf{k}$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z - 2 \end{pmatrix}$$

b) Annullando il gradiente, si trovano due punti critici: l'origine $(0, 0, 0)$ e il punto $(0, 0, 2/3)$. Sostituendo questi valori nella matrice hessiana si vede che $H_f(0, 0, 0)$ ha due autovalori positivi e uno negativo, mentre $H_f(0, 0, 2/3)$ ha tutti gli autovalori positivi. Per il test degli autovalori, *l'origine è un punto di sella*, mentre $(0, 0, 2/3)$ è un *minimo locale*.

c) L'insieme D è chiuso e limitato, per cui gli estremi esistono per il teorema di Weierstrass. All'interno del cilindro abbiamo il punto di minimo $(0, 0, 2/3)$, che dunque è un candidato minimo globale; il *valore* della funzione in tale punto è $f(0, 0, 2/3) = -4/27$. Non essendoci altri punti critici all'interno, gli altri punti di estremo della f si troveranno sulla frontiera del cilindro; sulle due *basi* abbiamo

$$f(x, y, 0) = f(x, y, 1) = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

Sulla *superficie laterale* abbiamo invece (parametrizzando con l'angolo polare θ e con z)

$$f(\cos\theta, \sin\theta, z) = 1 - z^2 + z^3, \qquad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Si verifica facilmente che i valori estremi di f *sulla superficie del cilindro* sono

$$f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = 0$$

e

$$f(\cos\theta, \sin\theta, 0) = f(\cos\theta, \sin\theta, 1) = 1$$

In conclusione, il minimo assoluto è nel punto $(0, 0, 2/3)$, con $f(0, 0, 2/3) = -4/27$, mentre il massimo assoluto vale 1 ed è assunto sulle due circonferenze $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

d) Abbiamo $f(1, 1, -1) = 0$ e

$$\nabla f(1, 1, -1) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

per cui l'equazione $f = 0$ definisce una superficie regolare in un intorno del punto (per il teorema del Dini). Poiché il piano tangente alla superficie è ortogonale al gradiente nel punto $(1, 1, -1)$, l'equazione si scrive nella forma

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 5(z + 1) = 0$$

$$2x + 2y + 5z + 1 = 0$$

2.

a) La curva è piana perchè il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ giace nel piano xy per ogni t. Per verificare che la curva è semplice, osserviamo che la condizione

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2), \qquad t_1, t_2 \in [\pi, 3\pi]$$

implica

$$|\mathbf{r}(t_1)| = |\mathbf{r}(t_2)|$$

che a sua volta (essendo t_1 e t_2 positivi) equivale a

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_2}$$

ovvero $t_1 = t_2$. Dunque, abbiamo dimostrato che $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, $\forall\, t_1, t_2 \in [\pi, 3\pi]$.
Vettore tangente

$$\mathbf{r}'(t) = -\frac{t\sin t + \cos t}{t^2}\mathbf{i} + \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\mathbf{j}\,; \qquad t \in [\pi, 3\pi]$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \frac{1}{t^2}\sqrt{t^2+1} > 0$$

per ogni t. Dunque la curva è regolare.

$$\mathbf{r}'(2\pi) = -\frac{1}{4\pi^2}\mathbf{i} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{j}$$

b) Il sostegno della curva è un arco di spirale che si avvolge in senso antiorario intorno all'origine, dal punto iniziale

$$\mathbf{r}(\pi) = (-1/\pi, 0)$$

al punto finale

$$\mathbf{r}(3\pi) = (-1/(3\pi), 0)$$

c) Calcolo della lunghezza:

$$L = \int_\pi^{3\pi} \frac{1}{t^2}\sqrt{t^2+1}dt = \Big[-\frac{1}{t}\sqrt{t^2+1}\Big]_\pi^{3\pi} + \int_\pi^{3\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

L'ultimo integrale si calcola con la sostituzione $t = \sinh s$, $dt = (\cosh s)\,ds$:

$$\int_\pi^{3\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_{\sinh^{-1}\pi}^{\sinh^{-1}(3\pi)} ds$$

Dunque

$$L = \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\pi} - \frac{\sqrt{9\pi^2+1}}{3\pi} + \sinh^{-1}(3\pi) - \sinh^{-1}\pi$$

3a)

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = \frac{t}{y-1}$ al secondo membro è definita e continua nei due sottoinsiemi aperti del piano $D_1 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, y > 1\}$ e $D_2 = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, y < 1\}$. La derivata parziale $f_y(t,y) = -\frac{t}{(y-1)^2}$ è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $y_0 \neq 1$.

ii) Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int (y-1)dy = \int tdt + C,$$

da cui si ricava (ridefinendo la costante arbitraria) $y^2 - 2y = t^2 + C$ (soluzione in forma implicita). Aggiungendo 1 ad entrambi i membri e ridefinendo ancora la costante arbitraria otteniamo

$$(y-1)^2 - t^2 = C$$

che rappresenta una famiglia di iperboli nel piano (t,y) aventi come asintoti le rette $y = 1 \pm t$. Osserviamo che esplicitando y dalla precedente equazione si ottengono per ogni C *due soluzioni* $y = 1 \pm \sqrt{t^2 + C}$, rispettivamente nei semipiani D_1 e D_2; per $C \leq 0$ le soluzioni sono definite e di classe $\mathcal{C}^1$ nel sottoinsieme $t^2 > -C$. Imponendo le condizioni assegnate, troviamo per il primo problema di Cauchy la soluzione:

$$\varphi_1(t) = 1 - \sqrt{t^2+1}$$

e per il secondo la soluzione:

$$\varphi_2(t) = 1 + \sqrt{t^2+1}$$

3b) La prima equazione non contiene la funzione incognita y; l'integrale generale è allora

$$x(t) = C_1 e^{-t}.$$

Sostituendo nella seconda equazione, otteniamo

$$\dot{y} = y - C_1 e^{-t},$$

che è un'equazione *non* omogenea del primo ordine per la y. Applicando la formula risolutiva, si ottiene

$$y(t) = \frac{C_1}{2} e^{-t} + C_2 e^t$$

L'integrale generale del sistema si scrive dunque

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

I due vettori in questa espressione sono autovettori della matrice dei coefficienti del sistema, corrispondenti rispettivamente agli autovalori -1 e 1. Le traiettorie del sistema si possono ricavare eliminando t nelle due equazioni che esprimono l'integrale generale, oppure risolvendo l'equazione differenziale delle traiettorie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + 1, \qquad x \neq 0,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine. Integrando, si ricava la famiglia di curve

$$y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

a cui occorre aggiungere la retta $x = 0$, che si ottiene dall'integrale generale del *sistema* nel caso $C_1 = 0$, ma che non si può rappresentare come grafico di una funzoone di x; osserviamo che tale retta contiene *tre orbite distinte del sistema*: l'origine $(0, 0)$ (soluzione di equilibrio) e due traiettorie percorse nel verso *uscente* dall'origine.

L'altra retta della famiglia, di equazione $y = \frac{1}{2}x$ (corrispondente al caso $C = 0$) contiene, oltre all'origine, due traiettorie percorse nel verso *entrante* (varietà stabile). Poichè il sistema ha un autovalore positivo, l'origine è instabile.