Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Appello di Analisi III, 11 settembre 2017 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (12 punti)

a) Studiare la convergenza in $L^1(\mathbb{R}_+)$ e in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2\sqrt{x}e^{-nx}\,, \qquad x \in [0, +\infty)\,.$$

b) Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni

$$g_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione.

a) Premettiamo che il limite puntuale della successione f_n è la funzione identicamente nulla, dunque se un limite esiste in $L^1(\mathbb{R}_+)$ o in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, tale limite deve coincidere con tale limite puntuale.

Per quanto riguarda la convergenza in $L^1(\mathbb{R}_+)$ osserviamo che, effettuando il cambio di variabile $nx = y$, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} n^2\sqrt{x}e^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} n^2\sqrt{\frac{y}{n}}e^{-y}\,\frac{dy}{n} = \sqrt{n}\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-y}\,dy\,.$$

Poiché $\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-y}\,dy$ è un fissato numero reale, si vede quindi che $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to +\infty$ per $n \to +\infty$, e quindi la successione f_n *non* converge in $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Per quanto riguarda la convergenza in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ osserviamo che

$$f_n'(x) = -\frac{n^2e^{-nx}(2nx-1)}{2\sqrt{x}}\,,$$

da cui si ricava che

$$\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = |f_n(\frac{1}{2n})| = \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2e}} \to +\infty \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi la successione f_n *non* converge in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

b) Presa una qualsiasi funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\,.$$

Con il cambio di variabile $t = nx$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\varphi(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\frac{1}{n}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\varphi(\frac{t}{n})}{t}\,dt\,.$$

Calcoliamo adesso il limite per $n \to +\infty$. Poiché $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, in particolare $|\varphi|$ è limitata e quindi la successione $\frac{\varphi(\frac{t}{n})}{t}$ è maggiorata in modulo da una costante sull'intervallo $[1/2, 1]$. Pertanto possiamo portare il limite sotto il segno di integrale, e otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi(\frac{t}{n})}{t}\,dt = [\log(1) - \log(1/2)]\varphi(0) = (\log 2)\,\varphi(0) = (\log 2)\,\langle\delta_0, \varphi\rangle\,.$$

Concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = (\log 2)\,\delta_0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,.$$

ESERCIZIO 2. (12 punti)
Si consideri il seguente problema al contorno con condizioni di tipo Neumann:

$$-\Big(\frac{u'}{x^2+1}\Big)' + u = e^x \quad \text{in } (0,1)\,, \qquad u'(0) = u'(1) = 0\,.$$

a) Scrivere la formulazione debole del problema.

b) Stabilire, giustificando la risposta, se il problema ammette un'unica soluzione.

c) Caratterizzare tutte le soluzioni come minimi di un opportuno funzionale integrale.

Soluzione.

a) Tenuto conto delle condizioni al contorno di tipo Neumann, la formulazione debole del problema è:

$$\int_0^1 \Big[\frac{1}{x^2+1}u'v' + uv\Big]\,dx = \int_0^1 e^x v\,dx \qquad \forall v \in H^1(0,1)\,.$$

b) Il problema ammette un'unica soluzione come conseguenza del Teorema di Lax-Milgram, applicato alla forma bilineare B e all'applicazione lineare F definite rispettivamente da

$$B(u,v) := \int_0^1 \Big[\frac{1}{x^2+1}u'v' + uv\Big]\,dx \qquad \forall (u,v) \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)\,,$$

$$F(v) := \int_0^1 e^x v\,dx \qquad \forall v \in H^1(0,1)\,.$$

Verifichiamo infatti che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte.

- La forma B è chiaramente bilineare.
- La forma B è continua: infatti, applicando la maggiorazione $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$ su $(0,1)$ e la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$|B(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}\|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}\,.$$

- La forma B è coerciva: infatti, applicando la maggiorazione $\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{1}{2}$ su $(0,1)$, si ha

$$|B(u,u)| = \int_0^1 \Big[\frac{1}{x^2+1}(u')^2 + u^2\Big]\,dx \geq \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}(u')^2 + u^2\Big]\,dx \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1(0,1)}\,.$$

- L'applicazione F è chiaramente lineare.
- L'applicazione F è continua, in quanto applicando ancora la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$|F(v)| \leq \|e^x\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{L^2(0,1)} \leq C\|v\|_{H^1(0,1)}\,.$$

c) Poiché la forma bilineare B è anche simmetrica, segue sempre dal Teorema di Lax-Milgram che l'unica soluzione debole del problema al contorno assegnato coincide con l'unica soluzione del problema di minimo

$$\min\Big\{\frac{1}{2}B(u,u) - F(u) \;:\; u \in H^1(0,1)\Big\}\,,$$

con B e F definite come sopra.

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

a) Enunciare e dimostrare il teorema di invertibilità locale per funzioni di variabile complessa.

b) Enunciare il teorema di rappresentazione di Riesz in uno spazio di Hilbert.

Soluzione

Si veda uno dei testi consigliati.