Funzioni di più variabili 1

Funzioni, grafici, insiemi di livello

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,; \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

<u>Esempi</u> ($n = 2, 3$).

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,, \quad f(x, y) = e^x \sin y \,.$$

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \frac{1}{x - y} \,; \quad D = \{(x, y) \,|\, x \neq y\} \,.$$

$$h : B \to \mathbb{R} \,, \quad h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,; \quad B = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \,.$$

$$U : \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R} \,; \quad U(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Diversi *domini di definizione* (insiemi di esistenza).

Grafico: Data $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *grafico* di f l'insieme

$$\left\{ \left(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\right) \,\middle|\, \mathbf{x} \in D \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,.$$

Se $n = 2$, il grafico si chiama "superficie cartesiana" di equazione $z = f(x, y)$.

Esempio. Il grafico di $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è la superficie della *semisfera* di equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ di raggio unitario e centro nell'origine $(0, 0, 0)$.

Insiemi di livello: Si definisce *insieme di livello c di f* l'insieme

$$\left\{ \mathbf{x} \in D \,\middle|\, f(\mathbf{x}) = c \right\} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Se $n = 2$, curve di livello; se $n = 3$, superfici di livello.

Esercizio. Disegnare, al variare di $c \in \mathbb{R}$, le curve di livello c delle funzioni

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad g(x, y) = x^2 - y^2\,.$$

Topologia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

Si dice intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un insieme

$$B_r(\mathbf{x}_0) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r \right\}$$

per qualche $r > 0$.

Sia E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e sia $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E$.

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice:

i) *interno* ad E se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E ;

ii) *esterno* ad E se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E^c ;

iii) *di frontiera* per E se non è interno né esterno .

Equivalente a iii): un punto $\mathbf{x}_0$ è di frontiera per E se *ogni* intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene sia punti di E che punti di E^c.

Un punto interno ad E appartiene ad E; un punto esterno ad E appartiene ad E^c.
Un punto di frontiera può appartenere ad E o a E^c.

- $\mathring{E} :=$ insieme dei punti interni ad E ;
- $\partial E :=$ insieme dei punti di frontiera per E ;
- $\bar{E} := E \cup \partial E$, chiusura di E .

Ovviamente: $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \bar{E}$.

Definizione Un punto $\mathbf{x}_0$ si dice **punto di accumulazione** per E se *ogni* intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene punti di E *diversi da* $\mathbf{x}_0$.

oppure...se in ogni intorno di $\mathbf{x}_0$ esistono *infiniti punti di* E.

Osservazioni.

Un punto di accumulazione può appartenere o non appartenere a E;

ogni punto interno di E è di accumulazione;

un punto di E che *non* è di accumulazione si dice *punto isolato*; un punto isolato è necessariamente di frontiera.

Esercizio.

Disegnare nel piano cartesiano l'insieme

$$E = \{(x, y) \,|\, 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}.$$

e identificare i punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati.

Definizioni.

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice:

- **aperto** se $E = \mathring{E}$;
- **chiuso** se E^c è aperto;
- **limitato** se $E \subseteq B_R(\mathbf{0})$ per qualche $R > 0$;
- **connesso** (per archi) se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ di E esiste una curva continua *contenuta in E* che ha per estremi i due punti.

Caratterizzazioni utili:

E è aperto $\Leftrightarrow$ E non contiene punti della sua frontiera;

E è chiuso $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E$, cioè se e solo se $E = \bar{E}$.

E è chiuso $\Leftrightarrow$ E contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

E è limitato $\Leftrightarrow$ esiste $R > 0$ tale che $\mathbf{x} \in E \Rightarrow |\mathbf{x}| \leq R$.

($\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti *e* chiusi.)

Esempi.

Consideriamo gli insiemi

$$B = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}\,, \qquad D = \{(x, y) \,|\, x \neq y\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Il cerchio B include la sua frontiera, per cui è chiuso e limitato; inoltre B, essendo un insieme *convesso*, è anche connesso.

L'insieme D è unione dei due semipiani aperti $x - y > 0$ e $x - y < 0$; poiché l'unione di due (o più) aperti è ancora un insieme aperto, D è aperto.

Ovviamente, D non è limitato.

Infine, D *non* è connesso perché qualunque curva continua che unisce punti dei due semipiani *deve attraversare* la retta $x = y$ (dimostrarlo formalmente usando il teorema degli zeri.)

Verificare che l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è aperto, non limitato e connesso.

Limiti e continuità

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_0$ punto di accumulazione per D.

Definizione. Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

se vale

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, r\ :\ \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r \ \Rightarrow\ |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon\,.$$

$$\big(\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, B_r(\mathbf{x}_0)\ :\ \mathbf{x} \in D \cap B_r(\mathbf{x}_0)\setminus\{\mathbf{x}_0\} \ \Rightarrow\ |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon\,.\big)$$

Si scrive in breve:

$$f(\mathbf{x}) \to L \quad \text{per} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

se

$$\forall\, M>0 \quad \exists\, r\,:\, \mathbf{x}\in D \text{ e } 0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<r \;\Rightarrow\; f(\mathbf{x})>M \quad (<-M)\,.$$

Dal punto di vista formale, sono definizioni simili a quelle dei limiti di funzioni di una variabile reale.

$\Rightarrow$ *Valgono i noti teoremi sui limiti*.

Maggiori difficoltà nelle *verifiche e nei calcoli*.

Definizione. Si dice che f è **continua** in $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\,.$$

Se f è continua in ogni punto di D si dice che è continua in D.

Verifiche di esistenza e non esistenza dei limiti (per $n = 2$).

$$\mathbf{x} = (x, y); \qquad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \equiv \rho\,.$$

Per verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L\,,$$

è spesso comodo utilizzare le coordinate polari centrate in (x_0, y_0):

$$x = x_0 + \rho\cos\theta\,, \qquad y = y_0 + \rho\sin\theta\,, \qquad \rho \geq 0\,,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

Il limite è verificato se (c.s.) esiste $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - L| \leq g(\rho) \to 0$$

per $\rho \to 0$.

Infatti:

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \;\Leftrightarrow\; \rho \to 0$$

e, per la precedente maggiorazione,

$$g(\rho) \to 0 \;\Rightarrow\; f(x, y) \to L\,.$$

Esempi.

Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0\,.$$

Ponendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| = \left|\frac{\rho^3 \cos^2\theta\, \sin\theta}{\rho^2}\right| = \rho|\cos^2\theta\, \sin\theta| \le \rho\,.$$

Poiché $\rho \to 0$, il limite è verificato.

Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} x\cos\left(\frac{1}{y-1}\right)+y \ = \ 1\,.$$

Qui conviene usare le disuguaglianze:

$$\left|x\cos\left(\frac{1}{y-1}\right)+y-1\right| \le \left|x\cos\left(\frac{1}{y-1}\right)\right| + \left|y-1\right| \le |x|+|y-1|\,,$$

e ricavare poi il risultato ponendo $x=\rho\cos\theta$, $y=1+\rho\sin\theta$.

Esempio di non esistenza del limite.

Sia

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

Allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Per verificarlo, avviciniamoci all'origine lungo le due rette $x = t$, $y = t$ e $x = t$, $y = -t$, dove $t \to 0$.

Le *restrizioni* della funzione f alle due rette valgono rispettivamente

$$f(t, t) = 1/2 \quad \text{e} \quad f(t, -t) = -1/2\,,$$

per cui hanno *limiti diversi* ($\pm 1/2$) per $t \to 0$. Ma il limite di f, se esiste, è *unico*. $\square$

<u>Esercizio</u>

Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^2} = 0\,,$$

mentre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

non esiste.

Dai teoremi sui limiti si deducono le usuali *proprietà delle funzioni continue* (continuità della somma, del prodotto...).

In particolare:

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $\mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{x}_0) > 0$, allora esiste un intorno $B_r(\mathbf{x}_0)$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ (permanenza del segno).

Esercizio

Dimostrare che se f è continua in $\mathbb{R}^n$, i sottoinsiemi

$$\{\mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) > 0\}\,, \qquad \{\mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) < 0\}\,, \qquad \{\mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \neq 0\}\,,$$

sono *aperti*.

Dimostrare che ogni insieme di livello di una funzione continua in $\mathbb{R}^n$ è un insieme *chiuso*.

Composizione di funzioni:

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $f(\mathbf{x}_0)$, la funzione $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0$;

Se $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è continua in t_0 e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{r}(t_0)$, la funzione $f \circ \mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in t_0.

Esempio

La funzione $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ è continua in $\mathbb{R}^n$ (verificarlo per esercizio).

Se g è continua in $\mathbb{R}_+$, la funzione *radiale* $g(|\mathbf{x}|)$ è continua in $\mathbb{R}^n$.

La funzione composta $f \circ \mathbf{r}\,(t) = f\big(\mathbf{r}(t)\big)$, si dice *restrizione di f alla curva* $\mathbf{r}$.

Funzioni continue: proprietà topologiche

<u>Teorema</u> (Weierstrass).

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ *chiuso e limitato* (compatto) e $f : E \to \mathbb{R}$ *continua*. Allora

$$\text{Esistono} \quad \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in E \quad t.c. \quad f(\mathbf{x}_m) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_M) \quad \forall\, \mathbf{x} \in E\,.$$

Cioè, f *assume massimo e minimo in* E.

<u>Osservazioni</u>

i) I punti $\mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_M$ si dicono *punti di minimo e di massimo* per f, mentre $f(\mathbf{x}_m)$ e $f(\mathbf{x}_M)$ sono i *valori* minimo e massimo (valori estremi) di f.

ii) Le ipotesi del teorema sono condizioni *sufficienti* per l'esistenza dei massimi e dei minimi

iii) Nessuna informazione dal teorema sulla molteplicità dei punti di minimo o di massimo.

Teorema (degli zeri).

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ *connesso*, e $f : E \to \mathbb{R}$ *continua*.
Supponiamo che esistano due punti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in E tali che $f(\mathbf{x}) > 0$ e $f(\mathbf{y}) < 0$.

Allora esiste un punto $\mathbf{z} \in E$ tale che $f(\mathbf{z}) = 0$.

Dimostrazione:

Poiché E è connesso, esiste una curva $\mathbf{r} : [a, b] \to E$ tale che $\mathbf{r}(a) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{r}(b) = \mathbf{y}$. La funzione composta

$$g(t) = f\big(\mathbf{r}(t)\big)$$

è continua in $[a, b]$ e tale che $g(a) > 0$, $g(b) < 0$.

Per il teorema degli zeri unidimensionale, esiste $\bar{t} \in (a, b)$ tale che $g(\bar{t}) = 0$.

Ma:

$$g(\bar{t}) = f\big(\mathbf{r}(\bar{t})\big)\,,$$

per cui f si annulla nel punto $\mathbf{z} = \mathbf{r}(\bar{t})$. $\square$

Osservazione. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, l'insieme (chiuso) $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$ divide lo spazio in *componenti connesse* dove f ha segno costante.