Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2013/2014
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica – Corso di Metodi Analitici e Statistici per l'Ingegneria Fisica
I Appello estivo di Metodi Analitici (30-6-14) – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

I. ANALISI COMPLESSA.

Sia $C_2(0)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 nel piano di Gauss, percorsa una volta in senso antiorario. Calcolare, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{z(1+z^n)}\, dz\,.$$

Soluzione. La funzione integranda ha $n+1$ singolarità z_i, poste nell'origine, e nelle n radici n-esime di -1. Tutte cadono all'interno di $C_2(0)$, ed hanno tutte indice 1 rispetto a tale circuito. Pertanto per il teorema dei residui possiamo dire che

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{z(1+z^n)}\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Res}(f, z_i)\,.$$

Sapendo che la somma di tutti i residui di f, compreso quello all'infinito, è nulla, possiamo anche scrivere

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{z(1+z^n)}\, dz = -2\pi i \mathrm{Res}(f, \infty)\,.$$

Resta da calcolare il valore di $\mathrm{Res}(f,\infty)$. Per definizione si ha:

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\Big(-\frac{f\big(\frac{1}{z}\big)}{z^2}, 0\Big)\,.$$

Inoltre:

$$\frac{f\big(\frac{1}{z}\big)}{z^2} = \frac{1}{z^2}\frac{z}{1+\frac{1}{z^n}} = \frac{z^{n-1}}{z^n+1}\,.$$

Segue che per ogni $n \geq 1$ la funzione $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}$ è regolare nell'origine, e pertanto $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$. Quindi l'integrale assegnato è nullo per ogni $n \geq 1$.
Diversamente, nel caso $n = 0$, l'integrale assegnato diventa

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{2z}\, dz\,,$$

e pertanto applicando direttamente il teorema dei residui si ha

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{2z}\, dz = 2\pi i \frac{1}{2}\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z}, 0\Big) = \pi i\,.$$

II. ANALISI FUNZIONALE.

(i) Dare la definizione di prodotto di convoluzione tra due funzioni f e g appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Siano f e g due funzioni appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$ entrambe con supporto compatto. Dire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali false.

(a) f e g continue $\Rightarrow$ $f * g$ continua;

(b) f o g continue $\Rightarrow$ $f * g$ continua;

(c) $f * g$ continua $\Rightarrow$ f e g continue;

(d) $f * g$ continua $\Rightarrow$ f o g continue.

(iii) Per le implicazioni false, dimostrare che lo sono fornendo un controesempio alle implicazioni stesse.

Soluzione.

(i) Si veda uno dei testi consigliati o le slides del corso.

(ii) Sono vere (a) e (b).

Sono false (c) e (d).

(iii) Si consideri la funzione $f(x) := \chi_{[0,1]}(x)$, ovvero la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1]$, che vale 1 se $x \in [0,1]$, e vale 0 altrimenti. Chiaramente f non è continua, ma il calcolo di $f * f$ permette di verificare che $f * f$ è continua, e quindi fornisce un controesempio alla validità delle implicazioni (c) e (d). Infatti si ha:

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x-y)\,dy = \big|[0,1] \cap [x-1,x]\big| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{se } x \in [1,2] \\ 0 & \text{se } x \geq 2\,. \end{cases}$$

III. SERIE/TRASFORMATA DI FOURIER.

Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}\big[1 - 4\sin(2x)\big] .$$

Suggerimento: si consiglia di calcolare innanzitutto la trasformata della funzione

$$\frac{1}{x^2+4} ,$$

e poi di usare la linearità della trasformata e le varie regole di trasformazione note.

Soluzione. Osservando che

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1} ,$$

e ricordando che si ha

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = \pi e^{-|\xi|} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}(u(ax)) = \frac{1}{a}\hat{u}\big(\frac{\xi}{a}\big) ,$$

deduciamo che

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{x^2+4}\Big) = \frac{1}{4}2\pi e^{-2|\xi|} = \frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|} .$$

Poi, ricordando che si ha

$$\mathcal{F}(xu(x)) = i(\hat{u})'(\xi) ,$$

e ponendo

$$g(x) := \frac{x}{x^2+4} ,$$

deduciamo che

$$\mathcal{F}(g) = i\frac{d}{d\xi}\Big(\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}\Big) = -\pi i \operatorname{sign}(\xi)e^{-2|\xi|} .$$

Venendo al calcolo di $\mathcal{F}(f)$, si ha

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) - \mathcal{F}\Big(4g\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\Big) = \mathcal{F}(g) + \mathcal{F}\Big(2g\big(ie^{2ix} - ie^{-2ix}\big)\Big) .$$

Poiché

$$\mathcal{F}(e^{2ix}g) = \hat{g}(\xi - 2) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}(e^{-2ix}g) = \hat{g}(\xi + 2) ,$$

concludiamo che

$$\mathcal{F}(f) = -\pi i \operatorname{sign}(\xi)e^{-2|\xi|} + 2\pi \operatorname{sign}(\xi-2)e^{-2|\xi-2|} - 2\pi \operatorname{sign}(\xi+2)e^{-2|\xi+2|} .$$