Spazi vettoriali

Maurizio Citterio

Marco Boella   Alan Cigoli

Politecnico di Milano
beep.metid.polimi.it

2019/2020, I semestre

AVVERTENZA:
quanto segue è soltanto l'elenco di definizioni, proposizioni, osservazioni, esempi ed esercizi che sono stati discussi in aula. Questo non sostituisce in alcun modo la lezione, le esercitazioni, gli appunti, le dispense, il testo.

Richiamo: la definizione di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale sul campo numerico $\mathbb{K}$ consiste di:

- un insieme V i cui elementi sono detti vettori;
- un'operazione interna $+ : V \times V \to V$,
  che ad una coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ associa la somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$;
- un'operazione "esterna" $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$
  che ad ogni numero k e ogni vettore $\mathbf{v}$ associa il prodotto $k\mathbf{v}$;

e dei seguenti assiomi:

proprietà della somma:

1. associatività;
2. commutatività;
3. esistenza del vettore nullo;
4. esistenza dell'opposto;

proprietà del prodotto:

5. per ogni $\mathbf{v} \in V$ risulta $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$;
6. per ogni $h, k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$ risulta $h \cdot (k \cdot \mathbf{v}) = (hk) \cdot \mathbf{v}$;

proprietà distributive:

7. per ogni $k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ risulta $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \cdot \mathbf{u} + k \cdot \mathbf{v}$;
8. per ogni $h, k \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$ risulta $(h + k) \cdot \mathbf{v} = h \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{v}$.

Esempi di spazi vettoriali

Con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, i seguenti insiemi sono spazi vettoriali:

- l'insieme dei vettori geometrici del piano (spazio);
- l'insieme $\mathbb{K}^n$ delle $n-$ uple ordinate di numeri di $\mathbb{K}$;
- l'insieme $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$;
- l'insieme $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ delle matrici di elementi di $\mathbb{K}$ con m righe ed n colonne;
- l'insieme $\mathbb{K}^X$ delle funzioni da un insieme X al campo $\mathbb{K}$;
- l'insieme V^X delle funzioni da un insieme X allo spazio vettoriale V .

Richiamo: sottospazio vettoriale

Definizione

Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è un **sottospazio** vettoriale di V quando U è spazio vettoriale con la stessa struttura di V (cioè con le stesse operazioni di somma e prodotto per uno scalare).

Proposizione

Il sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V risulta essere un sottospazio di V se e solo se U è "chiuso" rispetto le operazioni di somma e prodotto per uno scalare ,
cioè:

1. *per ogni $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ si ha $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$;*
2. *per ogni $\mathbf{u} \in U$ e ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha $k\mathbf{u} \in U$.*

Esercizio

Dimostrare la precedente proposizione.

Osservazione

Ogni sottospazio U di uno spazio vettoriale V contiene il vettore nullo, ma non tutti i sottoinsiemi di V che contengono il vettore nullo sono sottospazi.

Esempi di sottospazi vettoriali

- I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tutti e soli i seguenti:
  0. il sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$;
  1. le rette per l'origine;
  2. il sottospazio totale $\mathbb{R}^2$.
- I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono tutti e soli i seguenti:
  0. il sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$;
  1. le rette per l'origine;
  2. i piani per l'origine;
  3. il sottospazio totale $\mathbb{R}^3$.
- L'insieme $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ dei polinomi in x di grado minore o uguale a n (fissato) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.
- Sia A un intervallo reale. Sono sottospazi di $\mathbb{R}^A$ gli insiemi:
  - $\mathcal{C}^0(A)$ delle funzioni a valori reali continue su A ,
  - $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a valori reali derivabili su A ,
  - $\mathcal{C}^1(A)$ delle funzioni a valori reali con derivata continua su A .
- Fissati due spazi vettoriali V e W , l'insieme $\hom(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W è un sottospazio vettoriale di W^V .

Combinazioni lineari

Definizione

La **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ dello spazio V con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ è il vettore (di V)

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Esempi

- La terna ordinata $\mathbf{v} = (1,5,3)$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$, con i coefficienti $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -2$:

$$(1,5,3) = 1(1,1,1) + 4(0,1,1) - 2(0,0,1).$$

- La funzione seno iperbolico $\mathbf{v} = \mathrm{Sh}(x)$ è combinazione lineare delle funzioni $\mathbf{v}_1 = \mathrm{e}^x$ e $\mathbf{v}_2 = \mathrm{e}^{-x}$ con i coefficienti $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{Sh}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

Generatori di un sottospazio

Definizioni, osservazioni

Dati i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ dello spazio V, indicheremo con $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, o anche con $L\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

È semplice mostrare (esercizio) che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Diremo che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è il **sottospazio generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Dato U sottospazio di V, diremo che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un **insieme di generatori** (o anche **sistema di generatori**) per U quando ogni vettore di U si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, cioè

$$U = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Esercizio

Provare che i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ generano lo stesso sottospazio.

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \right\}.$$

Fissati $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori di V .

La combinazione lineare banale (cioè quella con tutti i coefficienti nulli) ha come somma il vettore zero

$$0\,\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_k = \mathbf{0}\ .$$

Esistono **altre** combinazioni lineari (cioè, diverse da quella banale) di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ che danno come risultato il vettore nullo?

Se esistono, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente dipendenti**.

Se non esistono, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono **linearmente indipendenti**.

Definizione (Vettori dipendenti)

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si dicono linearmente dipendenti se esistono k numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli per i quali

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Definizione (Vettori indipendenti)

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti quando

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

soltanto per $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Esercizio

Stabilire per ciascuno dei seguenti, se si tratta di insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente dipendenti o indipendenti.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

- I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di questi si scrive come combinazione lineare degli altri.
- Se uno dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ è nullo, allora questi sono linearmente dipendenti.
- Se i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente dipendenti.

  Se i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.
- Due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali.

Definizione (Base)

Si dice che un insieme ordinato di vettori $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di uno spazio vettoriale V è una *base* di V se:

1. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti;
2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V.

Esempio (Base canonica di $\mathbb{R}^n$)

I vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ (base canonica di $\mathbb{R}^2$).
Base canonica di $\mathbb{R}^n$?

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Base e Coordinate

Teorema

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *un insieme ordinato di vettori dello spazio* V *.*

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un base di V
se e solo se
ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

In altri termini, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un base di V se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un'unica n-upla ordinata di numeri reali $(x_1, \cdots, x_n)$ tale che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots\cdots + x_n\mathbf{v}_n \ .$$

L'insieme ordinato $(x_1, \ldots, x_n)$ si chiama n-upla delle **coordinate** di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e si usa la notazione

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Base e Coordinate

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V , ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Scriviamo $\mathbf{v}$ in due modi

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ , \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

e dimostriamo che le due scritture coincidono.

Sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, si conclude che i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli, cioè $x_1 = y_1 \ , \ \ldots \ , \ x_n = y_n$.

$\Leftarrow$ Poiché ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive (in un unico modo) come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, questi ultimi sono generatori di V . Anche il vettore nullo $\mathbf{0}$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, quindi

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \text{solo per} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \ .$$

Dunque i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono indipendenti e $\mathcal{B}$ è un base. $\square$

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ nello spazio vettoriale V, consideriamo l'applicazione lineare

$$\psi : \mathbb{R}^k \to V \ , \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \ .$$

Osserviamo che

- ψ è suriettiva *se e solo se* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un insieme di generatori per V.
- ψ è iniettiva *se e solo se* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono vettori linearmente indipendenti.
- ψ è biettiva *se e solo se* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è un base per V.

Nel caso ψ sia invertibile, qual è l'inversa di ψ?

Diremo che uno spazio vettoriale V ha **dimensione finita**,
oppure è **finito-dimensionale**,
oppure è **finitamente generato**,
quando esiste un insieme finito di generatori di V.

Teorema (di esistenza della base)

Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.

Dimostrazione.

Per ipotesi, V è finitamente generato, cioè esiste un insieme finito di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ di V tali che

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è una base.
Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti, allora uno di questi vettori, diciamo $\mathbf{v}_k$, può essere scritto come combinazione lineare dei restanti $k-1$ vettori, e abbiamo

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$$

Allora possiamo eliminare questo vettore $\mathbf{v}_k$ dalla lista dei generatori.
Ripetiamo il procedimento, fino ad arrivare a un insieme di vettori linearmente indipendenti.
Questi vettori indipendenti generano ancora V e dunque costituiscono una base di V. $\square$

Teorema (della dimensione di uno spazio vettoriale)
Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.

Definizione (Dimensione)
La dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato

$$\dim V$$

è il numero di elementi di una sua qualsiasi base.

Lemma (per il teorema della dimensione)

Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *un sistema di generatori dello spazio vettoriale* V *formato da* k *vettori e sia* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *un insieme di* n *vettori di* V *linearmente indipendenti. Si ha* $n \leq k$ *.*

Dimostrazione.

Supponiamo, per assurdo, che $n > k$.
$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ e possiamo scrivere $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$.
I vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, quindi almeno uno dei coefficienti a_i , diciamo a_1 , deve essere non nullo.
Ricavando $\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{a_1}\mathbf{w}_1 - \dfrac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2 + \cdots - \dfrac{a_k}{a_1}\mathbf{v}_k$, abbiamo dunque
$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ e possiamo scrivere $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$.
I vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, quindi almeno uno dei coefficienti $b_2, b_3, \ldots, b_k$, diciamo b_2 , deve essere non nullo.
Ricavando $\mathbf{v}_2 = -\dfrac{b_1}{b_2}\mathbf{w}_1 + \dfrac{1}{b_2}\mathbf{w}_2 - \dfrac{b_3}{b_2}\mathbf{v}_3 + \cdots - \dfrac{b_k}{b_2}\mathbf{v}_k$, abbiamo dunque
$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
Ripetendo il procedimento per k volte, si giunge a $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ e quindi risulta $\mathbf{w}_{k+1} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k$, contro l'ipotesi di indipendenza. $\square$

Dimostrazione del teorema della dimensione.
Siano $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ due basi dello spazio vettoriale V.
Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ generano V e i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti, per il precedente lemma risulta $k \geq n$.
Ma anche i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ generano V e i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, quindi $n \geq k$.
Dunque $n = k$. $\square$

Esempio

Una base di $\mathbb{R}^n$ è la base canonica:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1).$$

La dimensione di $\mathbb{R}^n$ è $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Esempio

Una base di $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ è la base canonica:

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La dimensione di $\mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ è dunque $\dim \mathbb{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4$.

Teorema (del completamento della base)

Ogni collezione di k vettori linearmante indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita può essere estesa fino a diventare una base di V. Cioè esistono h vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h$ tali che

$$(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)$$

sia una base di V.

Dimostrazione.

Se i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generano V, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ è una base di V.
Altrimenti esiste $\mathbf{w}_1 \in V$ tale che $\mathbf{w}_1 \notin \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.
Se i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1$ generano V, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1)$ è una base di V.
Altrimenti si itera il processo.
Poiché V ha dimensione finita, dopo un numero finito di passaggi il procedimento iterativo si arresta fornendo una base $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)$. □

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = n$ finita e sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un qualsiasi insieme di k vettori di V.
Provare che:

1. se $k > n$, allora i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti;
2. se $k = n$ e i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V.

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Dimostrare che $U = V$ se e solo se $\dim U = \dim V$.

Somma di sottospazi

Si osserva facilmente (esercizio) che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio vettoriale, mentre l'unione di sottospazi non lo è in generale.
Infatti, per quanto l'unione sia chiusa rispetto la moltiplicazione di un vettore per uno scalare, non è chiusa rispetto la somma di vettori. Se però aggiungiamo all'insieme unione tutte le possibili somme, otteniamo un sottospazio vettoriale (esercizio):

Definizione

La somma dei sottospazio U e W è definita da

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \ : \ \mathbf{u} \in U \, , \ \mathbf{w} \in W\}$$

Esercizio

Provare che:

- L'intersezione di sottospazi è sottospazio vettoriale.
- L'unione di sottospazi non è (in generale) sottospazio vettoriale.
- La somma di sottospazi è un sottospazio vettoriale.

Esercizio

Provare che le inserzioni

$$i_U : U \to U + W \ , \quad i_V(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{0}$$
$$i_W : W \to U + W \ , \quad i_W(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{w}$$

sono applicazioni lineari.

Esercizio

Provare che

> *la somma $U + W$ è il "più piccolo" tra i sottospazi di V che contengono l'insieme $U \cup W$*

cioè: per ogni sottospazio vettoriale A di V, se $U \cup W$ è un sottoinsieme di A, allora $U + W$ è un sottospazio di A.

Esercizio

Provare che se A e B sono insiemi di generatori rispettivamente per U e per W, allora $A \cup B$ è un insieme di generatori per $U + W$.

Esercizio

Mostrare con esempi che $\dim(U + W) \leq \dim U + \dim W$.

Enunciamo la Formula di Grassmann, posticipando la dimostrazione al prossimo capitolo.

Teorema

Siano U e W sottospazi di dimensione finita dello spazio vettoriale V. Risulta

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W) .$$

Nel caso in cui, per ogni $\mathbf{v}$ di $U+W$ esiste un'*unica* coppia di vettori $\mathbf{u}$ di U e $\mathbf{w}$ di W tali che $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, allora diciamo che la somma $U+W$ è *diretta* e scriviamo

$$U \oplus W \ .$$

Teorema

La somma $U+W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se $\mathbf{v} \in U \cap W$ fosse un vettore non nullo, allora la somma non sarebbe diretta perché $\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}$, cioè $\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}$ con $\mathbf{v} \in U, \mathbf{0} \in W$ e $\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{v}$ con $\mathbf{0} \in U, \mathbf{v} \in W$.

$\Leftarrow$ Scrivendo $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1+\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_2+\mathbf{w}_2$ con $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, si ricava che il vettore $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_1$ è nell'intersezione $U \cap W$; dunque, se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, risulta $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1$, cioè la somma è diretta. $\square$

Esercizio
Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V.
Provare che

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1\} \oplus \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_2\} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_k\}.$$

Esercizio
Sia U un sottospazio dello spazio vettoriale di dimensione finita V.
Provare che esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che

$$V = U \oplus W.$$

Prodotto di spazi vettoriali

Esercizio
Siano V e W due spazi vettoriali.
Provare che il prodotto cartesiano

$$V \times W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \; : \; \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$$

è uno spazio vettoriale.

Esercizio
Provare che le proiezioni

$$pr_V : V \times W \to V \;, \quad pr_V(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$$
$$pr_W : V \times W \to W \;, \quad pr_W(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$$

sono applicazioni lineari.

Esercizio
Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita.
Provare che
$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$