Esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

NORMA EUCLIDEA.

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ $\qquad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

- $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ $\qquad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\qquad p \in (1, +\infty)$

(La disug. triangolare per la norma p, ovvero disug. di Minkowski, richiede l'ipotesi $p \geq 1$).

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

2) $V = \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad , \quad d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx \quad , \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Def. Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. vettoriale normato. Allora $d(u,v) := \|u-v\|$ definisce una DISTANZA su V, ovvero $d : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1) $d(u,v) \geq 0$ con $=0 \iff u=v$ POSITIVITÀ
2) $d(u,v) = d(v,u)$ SIMMETRIA.
3) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ DISUG. TRIANGOLARE.

Def (V,d) si dice SPAZIO METRICO.

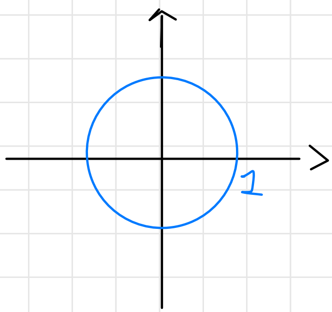
Oss. In uno spazio metrico, possiamo definire le SFERE: dato $r \geq 0$, $v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{ v \in V : d(v, v_0) \underset{(\leq)}{<} r \}$$

$$= \{ v \in V : \| v - v_0 \| \underset{(\leq)}{<} r \}$$

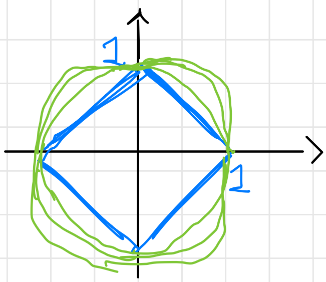
Esempi

1) $V = \mathbb{R}^2$ $\qquad B_1(0) = ?$



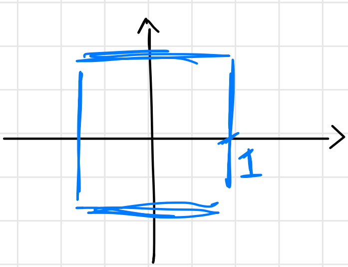
$\| \cdot \|_2 \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}_{\substack{\shortparallel \\ d_2(x,0) = \| x - \cancel{0} \|_2}} < 1 \}$$



$\| \cdot \|_1 \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1 \}$$



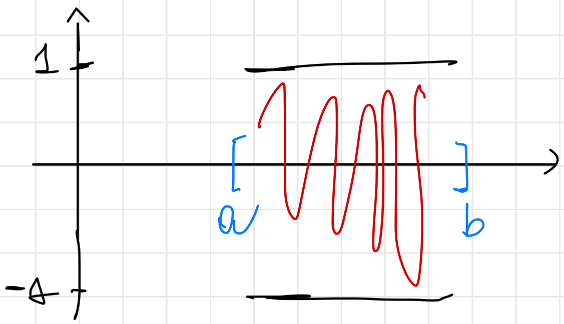
$\| \cdot \|_\infty \Rightarrow$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x_1|, |x_2| \} < 1 \}$$

2) $V = C^0([a,b])$

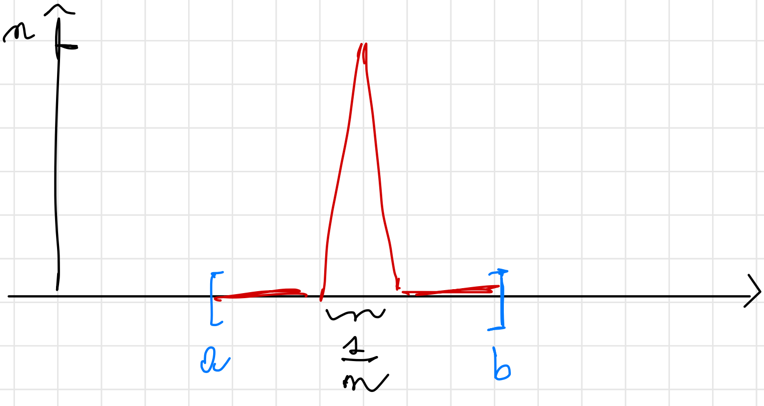
$$B_1(0) = \{ f \in V : \|f\|_\infty < 1 \} \quad \text{se scelgo } \|\cdot\|_\infty$$

$$= \{ f \in V : \max |f| < 1 \}.$$



$$B_1(0) = \{ f \in V : \|f\|_1 < 1 \} \quad \text{se scelgo } \|\cdot\|_1$$

$$= \{ f \in V : \int_a^b |f| < 1 \}$$



Def. Se $\{v_n\} \subseteq (V, \|\cdot\|)$, si dice che

$v_n \longrightarrow v$ in V (oppure $\lim_{n\to+\infty} v_n = v \in V$)

se:

$d(v_n, v) \longrightarrow 0$ o $\|v_n - v\| \longrightarrow 0$

$$\left(\forall \varepsilon>0 \quad \exists \nu\in\mathbb{N} : \quad d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu \right)$$

$$(v_n \in B_\varepsilon(v))$$

Alcuni fatti VERI in dim finita ma FALSI in dim infinita

1) Tutte le norme sono "EQUIVALENTI" fra loro

2) Tutte le successioni di Cauchy convergono

3) Tutti i sottospazi vettoriali sono CHIUSI.

1) Norme equivalenti

Def. Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), e consideriamo su V due norme $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$.

Las norme si dicono EQUIVALENTI se:

(1) $\exists\, C>0 : \quad \forall v \in V, \ \|v\| \leq C\, |||v|||$

(2) $\exists\, C'>0 : \quad \forall v \in V, \ |||v||| \leq C' \|v\|$

(le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse

$$\|v_n - v\| \leq C\, |||v_n - v||| \longrightarrow 0$$

$$|||v_n - v||| \leq C'\, \|v_n - v\| \longrightarrow 0 \quad)$$

Esempio $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ sono equivalenti

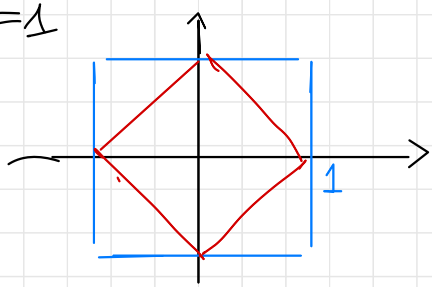
(1) $\exists\, C>0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \underbrace{\|x\|_\infty}_{=\max\{|x_1|,|x_2|\}} \leq \underbrace{C}_{=1} \underbrace{\|x\|_1}_{=|x_1|+|x_2|}$

(2) $\exists\, C'>0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \underbrace{\|x\|_1}_{=|x_1|+|x_2|} \leq \underbrace{C'}_{=2} \underbrace{\|x\|_\infty}_{=\max\{|x_1|,|x_2|\}}$

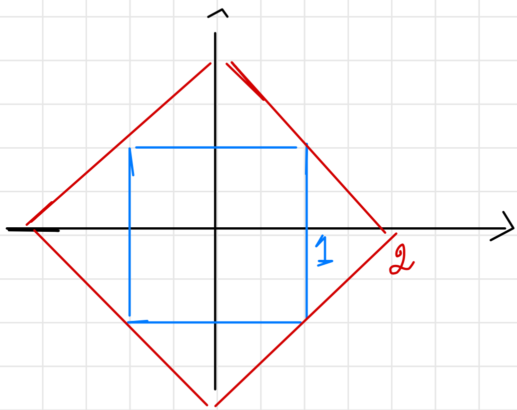
Interpretazione geometrica:

$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_1 \iff B_1^{1}(0) \subseteq B_1^{\infty}(0)$

$\uparrow C=1$



$\|\cdot\|_1 \le 2\,\|\cdot\|_\infty \iff B_1^{\infty}(0) \subseteq B_2^{1}(0)$



Teorema: Se $\dim V < +\infty \Rightarrow$ tutte le norme su V sono fra loro equivalenti.

FALSO se $\dim V = +\infty$

Controesempio

$V = \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{[a,b]} |f(x)| \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\,dx \end{aligned}\right\} \text{ non sono equivalenti}$$

Infatti:

(1) $\|f\|_1 \leq C \|f\|_\infty \quad \left(\int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \right)$

(2) $\nexists\, C' > 0 : \quad \|f\|_\infty \leq C' \|f\|_1 \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$

ovvero:

$\nexists\, C' > 0 : \quad \dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} \leq C' \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ con $\|f\|_1 \neq 0$. $(f \neq 0)$

ovvero:

$\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^0([a,b]) : \quad \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \longrightarrow +\infty.$

$\|f_n\|_1 = \dfrac{2}{n} \cdot n \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

$\|f_n\|_\infty = n \to +\infty$

2) Successioni di Cauchy

Def. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno sp. vett. normato
Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ si dice
SUCCESSIONE DI CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu \in \mathbb{N} : \underbrace{d(v_n, v_m)}_{\|v_n - v_m\|} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$$

Oss. Vale SEMPRE:

Se $\{v_n\}$ converge, allora è di Cauchy.

$$\Big(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \underbrace{\|v_n - v\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|v_m - v\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Big)$$

<u>Teorema</u> Se dim $V<+\infty$, vale anche il viceversa, ovvero

$\{v_n\}$ converge $\Longleftrightarrow$ $\{v_n\}$ di Cauchy

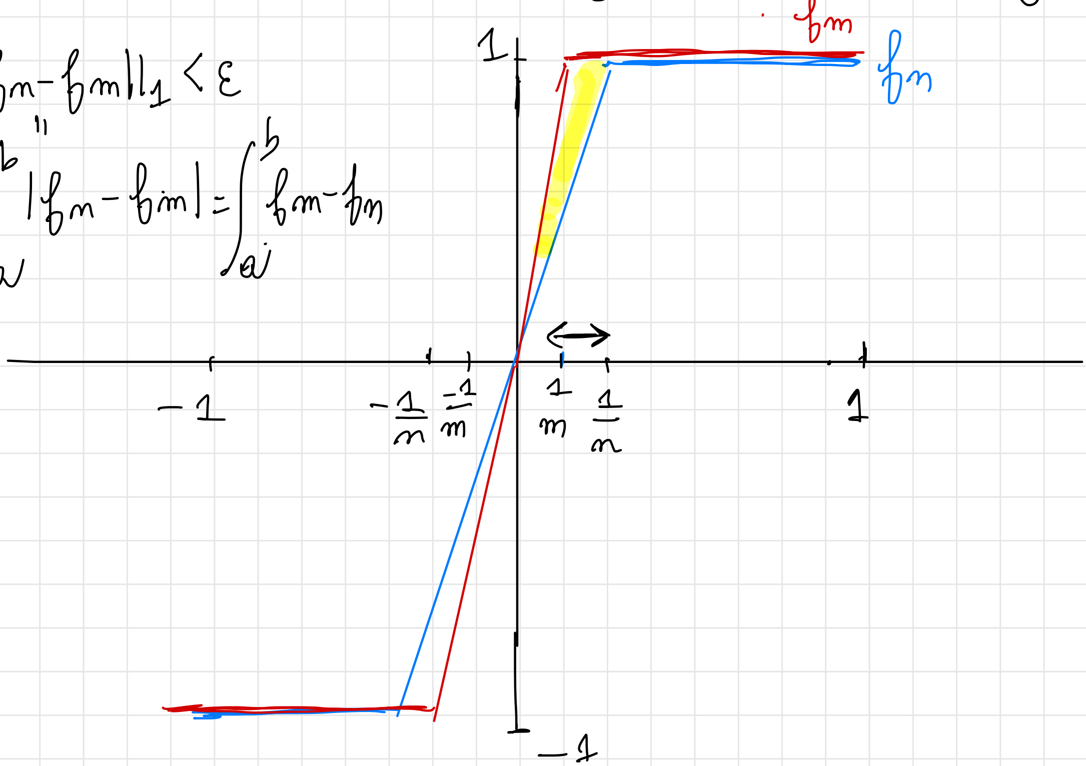
FALSO se dim $V=+\infty$.

<u>Controesempio</u> $\mathcal{J}_n$

$V=\left(\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_1\right)$ si può costruire una successione di Cauchy che NON converge:

$\|f_n-f_m\|_1<\varepsilon$

$$\int_a^b |f_n-f_m| = \int_a^b f_m-f_n$$



Def. Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice COMPLETO o DI BANACH se tutte le successioni di Cauchy convergono.

<u>Esempi</u>

- $\dim V < +\infty \Rightarrow V$ è di Banach
- $V = (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ NON è di Banach

<u>Teorema</u>

$V = (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach

<u>Generalizzazioni</u>: Sono di Banach:

$V = \mathcal{C}^1([a,b])$ $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$V = \mathcal{C}^k([a,b])$ $\|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$

(e analogamente se $[a,b] \rightsquigarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$).