Analisi matematica 2		6 settembre 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di due variabili :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-1}{y}$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. Dire *se* D è aperto, chiuso, limitato, connesso. Descrivere l'insieme dei punti di frontiera ∂D.

b) Trovare in quali punti di D la funzione f è differenziabile.

c) Determinare i punti critici *vincolati* di f sull'insieme $\{(x,y)\,|\,xy^2 = 1\}$.

Esiste il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (1,0)$? (Giustificare la risposta).

2.

i) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{2\sqrt{t}}$$

a) Stabilire in quale regione D del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione data (motivare la risposta).

b) Risolvere l'equazione e determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy $y(1) = 1$, $y(1) = 0$, $y(1) = -1$, precisando i rispettivi intervalli massimali di definizione. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni trovate.

ii) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = 1 - e^{-t}$$

3.

a) Calcolare l'area racchiusa dalla linea γ di equazione

$$\gamma : \ \mathbf{r}(t) = -\sin t\, \mathbf{i} + \sin(2t)\, \mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

b) La densità di una sfera solida centrata nell'origine e di raggio 1 è data dalla funzione

$$\delta(x, y, z) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Determinare la massa della sfera e la sua densità *media*.

c) Sia Σ la parte di superficie di equazione

$$z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$$

che si trova nel *primo ottante* dello spazio tridimensionale, orientata in modo che la normale punti verso l'alto.
Calcolare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 4y\, \mathbf{i} - x\, \mathbf{j} + 4\, \mathbf{k}$$

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}\,(x-1/2)^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}\,x^n$$

Trovare la somma della serie $b)$.

ii) Verificare che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cos(nx)$$

converge *totalmente in* $\mathbb{R}$. Detta $f(x)$ la somma della serie, dimostrare che f è una funzione continua, $2\pi-$periodica e pari. Calcolare $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

SOLUZIONI

1.

a) La funzione è definita in

$$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \neq 0\} = \{(x,y) : x \geq 0, y > 0\} \cup \{(x,y) : x \geq 0, y < 0\}$$

La frontiera di D è formata dall'unione dell'asse delle ordinate e del semiasse $(x,0)$, $x > 0$. L'insieme D non è limitato, non è aperto (i punti con $x = 0$ sono punti della frontiera) non è chiuso (non contiene tutti i punti di frontiera) e non è connesso: qualunque poligonale che unisca due punti di D con ordinate di segno opposto deve attraversare l'asse x e quindi non può essere tutta contenuta in D.

b) La funzione f ha derivate parziali

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,y}, \quad f_y(x,y) = \frac{1-\sqrt{x}}{y^2},$$

nell'insieme aperto $\{(x,y) : x > 0, y \neq 0\}$ (insieme dei punti interni di D). Poiché le derivate sono funzioni continue in ogni punto dell'aperto, f è differenziabile in tutti i punti *interni a* D. Nei punti con $x = 0$ e $y \neq 0$ esiste la derivata parziale f_y $(= 1/y^2)$ ma non esiste la derivata parziale rispetto ad x; la funzione non è differenziabile in tali punti.

c) Il vincolo si può esplicitare sia rispetto a x che rispetto a y; scrivendo

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

vediamo che l'insieme è unione disgiunta di due curve cartesiane contenute in D. Sostituendo nella funzione otteniamo

$$f\big(x, \pm 1/\sqrt{x}\big) = \pm\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \pm(x - \sqrt{x}) \qquad (x > 0).$$

Per $x > 0$, la funzione $x \mapsto x - \sqrt{x}$ ha l'unico punto stazionario $x = 1/4$, che è un minimo assoluto con valore $1/4 - 1/2 = -1/4$ (la funzione non è superiormente limitata). Per la funzione con il segno opposto, si ha ovviamente un massimo $(= 1/4)$ nello stesso punto. Dunque la funzione f ristretta al vincolo ha i due punti critici $(1/4, 2)$ e $(1/4, -2)$.

Il problema si poteva anche risolvere esprimendo il vincolo nella forma $x = 1/y^2$, $y \neq 0$, oppure cercando i punti stazionari della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{\sqrt{x} - 1}{y} - \lambda(xy^2 - 1)$$

risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}\,y} - \lambda\, y^2 = 0 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{y^2} - 2\lambda\, xy = 0 \\ xy^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il limite non esiste perché, per esempio, lungo la retta di equazione $x = 1$ abbiamo $f = 0$, mentre sulla parabola $y = \sqrt{x} - 1$ vale $f = 1$. Dunque, al tendere lungo queste due curve verso il punto $(1,0)$, si hanno due limiti diversi per la restrizione della funzione (il limite, se esiste, è unico).

2 i)

a) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Il secondo membro dell'equazione

$$f(t,y) = \frac{y^2}{2\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nel semipiano aperto

$$D = \{(t,y) \,:\, t > 0\}.$$

Osserviamo che anche la derivata parziale

$$f_y(t,y) = \frac{y}{\sqrt{t}}$$

è una funzione continua nello stesso semipiano; dunque, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate in D.

b) L'equazione ha la soluzione costante $y = 0$; essa è anche *l'unica curva integrale che soddisfa la condizione* $y(1) = 0$ poiché, per il teorema di esistenza e unicità, le altre curve integrali non possono attraversare in alcun punto l'asse t. Le soluzioni non costanti si ottengono dalla formula risolutiva

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} + C.$$

Abbiamo dunque

$$-\frac{1}{y} = \sqrt{t} + C,$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{t} + C}$$

Sostituendo i valori $t = 1$ e $y = 1$ nell'equazione, si trova $C = -2$; sostituendo $t = 1$ e $y = -1$ si ottiene $C = 0$. Le soluzioni degli altri due problemi di Cauchy sono dunque

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2 - \sqrt{t}}, \qquad \phi_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}},$$

definite rispettivamente negli intervalli massimali $(0,4)$ e $(0,+\infty)$.

2 ii)

L'equazione omogenea associata

$$z'' + z = 0$$

ha l'integrale generale

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

con C_1, C_2, costanti arbitrarie. Cerchiamo una soluzone particolare dell'equazione completa nella forma $\psi(t) = A + B\,e^{-t}$. Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$B\,e^{-t} + A + B\,e^{-t} = 1 - \,e^{-t},$$

che è verificata per ogni t se e solo se

$$A = 1, \qquad B = -\frac{1}{2}\,.$$

L'integrale generale è allora

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - \frac{1}{2}\,e^{-t}\,.$$

3.

a) Detta A la regione racchiusa dalla curva, dalla formula di Green abbiamo:

$$|A| = -\oint_{\partial^+ A} y\, dx \tag{1}$$

La frontiera di A coincide con il sostegno della curva γ. Osserviamo che la linea γ inizia e termina nell'origine, è contenuta nel semipiano dell x negative ed è percorsa in senso *positivo* rispetto a A; dalle equazioni parametriche

$$x = -\sin t, \qquad y = \sin(2t)$$

abbiamo:

$$dx = -\cos t\, dt\,.$$

Pertanto, dalla formula (1) si ottiene:

$$|A| = -\int_0^\pi \sin(2t)(-\cos t)\, dt = 2\int_0^\pi \sin t \cos^2 t\, dt = \frac{2}{3}\big[-\cos^3 t\big]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Al posto della (1) si poteva usare la formula $|A| = \oint_{\partial^+ A} x\, dy$ o la semisomma delle due.

b) Usando le coordinate sferiche

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\phi$$

la massa M è data dall'integrale

$$M = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (1-r)\, r^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$= 4\pi\int_0^1 (1-r) r^2\, dr = 4\pi\Big[\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^1 = 4\pi\frac{1}{12} = \frac{\pi}{3}\,.$$

La deinsità media è uguale al valore medio dell'integrale, ovvero

$$\frac{3}{4\pi}M = \frac{1}{4}\,.$$

c) Sulla superficie abbiamo:

$$\mathbf{n}\, d\sigma = \Big(\frac{x}{2}\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big)dxdy$$

La proiezione di Σ sul piano xy è il quarto di ellisse Ω di equazione: $x^2/4 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
Dunque

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int\int_\Omega (2xy - 2xy + 4) dxdy = 4|\Omega| = 2\pi$$

(l'area di Ω è *un quarto* dell'area dell'ellisse di semiassi $a = 2$, $b = 1$).

4.

i) La serie (a) è centrata in $x = 1/2$; per il criterio del rapporto, il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2}\,\frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{(n+1)^3} = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(-1/2, 3/2)$. Comportamento agli estremi: per $x = -1/2$ abbiamo la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$$

che converge per il criterio di Leibniz.
Per $x = 3/2$ abbiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$$

che diverge a $+\infty$ perchè il termine generale è asintotico a $1/n$. L'intervallo di convergenza è dunque $[-1/2, 3/2)$.

La serie (b) è centrata nell'origine. Usando il criterio della radice, troviamo

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{2-1/n}}\right) = 1/4\,.$$

Dunque $R = 4$ e la serie converge nell'intervallo $(-4, 4)$. Agli estremi la serie non converge perchè il termine generale non tende a zero.
Calcolo della somma :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}\,x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\,x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{2}{1-x/4} = \frac{8}{4-x}, \qquad x \in (-4, 4)$$

ii) La serie data converge totalmente in $\mathbb{R}$; infatti:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}|\cos(nx)| \le \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

è convergente. La serie converge *uniformemente in* $\mathbb{R}$ per il criterio di Weierstrass; poiché tutti i termini della serie sono funzioni continue, si conclude che la somma $f(x)$ è pure una funzione continua. Inoltre, per ogni n vale

$$\cos\big(n(-x)\big) = \cos(nx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dunque anche la somma della serie soddisfa la $f(-x) = f(x)$. Inoltre, tutti i termini della serie sono $2\pi-$ periodici, dunque $f(x+2\pi) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Infine, integrando termine a termine e osservando che $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0$ per ogni $n = 1, 2, ...$ otteniamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0\,.$$