Analisi Matematica 2		15 luglio 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Durata della prova: 3 ore.**
- **Rispondere nello spazio sotto alle domande e sul retro del foglio.**

1. Si consideri la funzione di tre variabili :

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 + z^2\,, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Scrivere le espressioni del *vettore gradiente* $\nabla f(x, y, z)$ e della *matrice hessiana* $H_f(x, y, z)$ nel generico punto (x, y, z).

b) Trovare i punti critici della funzione e classificarli.

c) Determinare gli *estremi globali* di f nell'insieme

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

2.

a) Trovare in quali sottoinsiemi *aperti e connessi* del piano (t, y) sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione

$$y' = \frac{y^2 + 1}{2ty}$$

Integrare l'equazione e determinare le soluzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$, che soddisfano rispettivamente le condizioni:

$$\phi(1) = 1\,, \qquad \psi(-1) = -1\,,$$

specificando gli intervalli massimali di definizione.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = t + \sin t$$

3. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{A}(x,y,z) = -yz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

i) Determinare il campo $\mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$.

ii) calcolare il flusso di $\mathbf{H}$ attraverso la parte di superficie di equazione

$$z = x^2 + y^2 - 1$$

appartenente al semispazio $z \le 0$ e orientata in modo che la componente della normale lungo l'asse z sia *positiva*.

iii) Enunciare il teorema di Stokes e verificarne la validità calcolando la circolazione di $\mathbf{A}$ lungo il bordo della superficie definita al punto ii).

4.

i) Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$a) \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n \qquad\qquad b) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x+1)^n$$

Calcolare la somma di (almeno) una delle due serie, giustificando i passaggi.

ii) Trovare tutti i coefficienti di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = 2\sin x + \sin(2x) + \sin^2 x\,.$$

Utilizzando l'uguaglianza di Parseval (o le relazioni di ortogonalità) calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$.

SOLUZIONI

1.

a) Vettore gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = x(2-x)\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

Matrice Hessiana:

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-2x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Annullando il gradiente, si trovano due punti critici : $P_1(0,0,0)$ e $P_2(2,0,0)$. La matrice Hessiana ha tutti gli autovalori positivi in P_1 e due autovalori positivi e uno negativo in P_2. Dunque P_1 è un minimo locale e P_2 un colle.

c) L'insieme B è la palla di raggio 1 centrata nell'origine; l'unico punto critico di f *all'interno* di B è l'origine (minimo locale) dove $f(0,0,0) = 0$. Gli estremi sulla superficie sferica si possono cercare tra i punti critici vincolati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. In alternativa, si osserva che la superficie ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e quindi che

$$f(x,y,z) = 1 - \frac{1}{3}x^3, \qquad \forall\ (x,y.z) \in \partial B\,.$$

Dunque, la *restrizione* di f sulla superficie assume il valore minimo in $(1,0,0)$, con $f(1,0,0) = 2/3$ e il valore massimo in $(-1,0,0)$, con $f(-1,0,0) = 4/3$. Confrontando tuti i valori ottenuti si ricava che il minimo globale di f nella palla si trova nell'origine e vale 0, mentre il massimo è in $(-1,0,0)$ e vale $4/3$.

2a.

i) Si tratta di un'equazione del primo ordine a variabili separabili. La funzione $f(t,y)$ al secondo membro è definita e continua per $t\,y \neq 0$, dunque nei 4 *quadranti aperti* del piano. La derivata parziale

$$f_y(t,y) = \frac{y^2-1}{2\,t\,y^2}$$

è definita e continua negli stessi aperti. Quindi, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono soddisfatte per tutti i problemi di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $t_0\,y_0 \neq 0$.

ii) Le soluzioni si trovano applicando la formula risolutiva

$$\int \frac{2y}{y^2+1}dy = \int \frac{1}{t}dt + C,$$

da cui si ricava

$$\ln(y^2+1) = \ln|t| + C; \qquad y^2+1 = e^C|t|$$

oppure, ridefinendo la costante arbitraria,

$$y^2+1 = C\,t, \qquad C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Si tratta di una famiglia di parabole che rappresenta l'integrale generale in forma implicita.

Esplicitando y dalla precedente equazione si ottengono *due soluzioni* per ogni valore di C,

$$y = \pm\sqrt{Ct-1},$$

ciascuna definita e di classe $\mathcal{C}^1$ per $Ct-1>0$.

Imponendo le condizioni assegnate, troviamo per il primo problema di Cauchy la soluzione:

$$\phi(t) = \sqrt{2t-1}\,,$$

nell'intervallo massimale $(1/2, +\infty)$, mentre per il secondo problema abbiamo:

$$\psi(t) = -\sqrt{-2t-1}\,,$$

nell'intervallo massimale $(-\infty, -1/2)$.

2b. Equazione omoenea associata:

$$z'' - z = 0$$

Integrale generale omogenea:

$$z(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa: si cerca nella forma

$$\psi(t) = At + B + C\cos t + D\sin t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A=-1, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=-\frac{1}{2}$$

Integrale generale:

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - t - \frac{1}{2}\sin t$$

3. *Calcolo del campo* $\mathbf{H}$*:*

$$\mathbf{H} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z) = -x\,\mathbf{i} + (1+z)\,\mathbf{k}$$

La superficie è la porzione Σ del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$$

del piano xy. Si tratta di una superficie cartesiana (regolare). Con la scelta assegnata della normale abbiamo:

$$\mathbf{n}\,dS = \big(-2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,dxdy$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_\Sigma \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int\!\!\int_D \big(-x\,\mathbf{i} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}\big)\cdot\big(-2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,dxdy \\ &= \int\!\!\int_D (3x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3\cos^2\theta + \sin^2\theta)\rho^3 d\rho\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}(3\pi+\pi) = \pi\,.\end{aligned}$$

Per il teorema di Stokes, il flusso di $\mathbf{H}$ è uguale alla circolazione del campo $\mathbf{A}$ lungo il bordo della superficie percorso in senso positivo rispetto all'orientazione scelta. In questo caso, il bordo $\partial^+\Sigma$ coincide con ∂^+D, ovvero con la circonferenza nel piano xy parametrizzata da

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = 0, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Dunque:

$$dx = -\sin t\,dt, \qquad dy = \cos t\,dt, \qquad dz = 0\,.$$

Calcolo della circolazione:

$$\int_{\partial^+ D} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial^+ D} x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi\,.$$

4.

i) La serie (a) è centrata in $x_0 = 1$. Il raggio di convergenza si può calcolare con la formula

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

Dunque la serie converge nell'intervallo $(0, 2)$. Gli estremi sono esclusi perchè in tali punti il termine generale della serie non tende a zero.

La serie (b) è centrata in $x_0 = -1$ e ha raggio di convergenza 1, per cui converge nell'intervallo $(-2, 0)$. Per $x = -2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = 0$ abbiamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Dunque l'intervallo di convergenza è $[-2, 0)$.

Detta $g(x)$ la somma della serie a), dal teorema di integrazione per serie abbiamo, per ogni $x \in (0, 2)$,

$$\int_1^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_1^x (t-1)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}$$

$$= (x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n = (x-1)\,\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x}\,.$$

Derivando si ottiene infine

$$g(x) = \frac{1}{(2-x)^2}\,, \qquad x \in (0, 2)\,.$$

Detta $h(x)$ la somma della serie b), dal teorema di derivazione per serie abbiamo, per ogni $x \in (-2, 0)$,

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(x+1)^m = \frac{1}{1-(x+1)} = -\frac{1}{x}\,.$$

Integrando e ricordando che per definizione $h(-1) = 0$, otteniamo

$$h(x) = -\ln(-x)\,, \qquad x \in (-2, 0)\,.$$

ii) La funzione è periodica di periodo 2π. Applicando note identità trigonometriche, possiamo scrivere

$$f(x) = 2\sin x + \sin(2x) + \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(2x)$$

Per l'unicità della serie di Fourier associata a f abbiamo

$$a_0 = 1; \qquad b_1 = 2 \qquad a_2 = -\frac{1}{2}; \qquad b_2 = 1\,,$$

mentre tutti gli altri coefficienti si annullano. Dall'uguaglianza di Parseval, si ricava allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi\Big[\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4} + 1\Big] = \frac{23}{4}\pi\,.$$