Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2016/2017
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Prova intermedia di Analisi III, 19 novembre 2016 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... N. MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. (12 punti)
Siano date le funzioni

$$f(z) = \frac{z}{(z^4+2z^2+1)(z+3)}, \qquad g(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

(i) Classificare le singolarità di f e di g.
(ii) Determinare il residuo di f e di g in ciascuna delle singolarità elencate.
(iii) Calcolare gli integrali

$$\int_{|z|=2} f(z)\; dz, \qquad \int_{|z|=2} g(z)\; dz,$$

sapendo che la circonferenza $|z| = 2$ è percorsa in senso antiorario.

Soluzione

(i)

La funzione f ha due poli del secondo ordine in $z = \pm i$, e un polo del primo ordine in $z = 3$; mentre f è infinitesima al punto all'infinito.
Per quanto riguarda la funzione g, uno sviluppo valido in un intorno sia di $z = 0$ sia di $z = z_\infty$ è

$$g(z) = z^2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\;\frac{1}{z^{2n}}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\;\frac{1}{z^{2m+1}}\right) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{n!(2m+1)!}\; z^{1-2(n+m)}$$

che ha infinite potenze negative di z (pertanto $z = 0$ è una singolarità essenziale), mentre l'unica potenza positiva di z è z stesso (e dunque z_∞ è un polo di ordine 1).

(ii)

Per quanto riguarda f, usando le formule consuete, si trova:

$$\operatorname{Res}\big\{f, z=-3\big\} = -\frac{3}{100}, \quad \operatorname{Res}\big\{f, z=i\big\} = \frac{3+4i}{200}, \quad \operatorname{Res}\big\{f, z=-i\big\} = \frac{3-4i}{200}.$$

Per la funzione g, ricorriamo nuovamente allo sviluppo di Laurent valido in un intorno di $z = 0$, poiché

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n,m=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^m}{n!(2m+1)!}}_{c_{n,m}}\; z^{1-2(n+m)} \\ &= c_{0,0}z + \big(c_{1,0}+c_{0,1}\big)\frac{1}{z} + \left\{\text{potenze di } \frac{1}{z} \text{ di grado maggiore di } 1\right\} \end{aligned}$$

si ha che $\operatorname{Res}\big\{g, z=0\big\} = c_{1,0}+c_{0,1} = \frac{5}{6}$.
Ovviamente, $\operatorname{Res}\big\{f, z=z_\infty\big\} = 0$ e $\operatorname{Res}\big\{g, z=z_\infty\big\} = -\frac{5}{6}$.

(iii)

Si ha

$$\begin{aligned} &\int_{|z|=2} f(z)\; dz = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}\big\{f, z=i\big\} + \operatorname{Res}\big\{f, z=-i\big\}\Big) = -2\pi i \operatorname{Res}\big\{f, z=-3\big\} = \frac{3\pi i}{50}; \\ &\int_{|z|=2} g(z)\; dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big\{g, z=0\big\} = \frac{5\pi i}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. (12 punti)

(i) Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni di funzioni continue su $(0,1)$. Mostrare che :

(a) se $f_n \to f$ in $L^2(0,1)$ e $g_n \to g$ in $L^2(0,1)$, allora $f_n g_n \to fg$ in $L^1(0,1)$;

(b) se $f_n \to f$ in $L^2(0,1)$ e $g_n \to g$ in $L^3(0,1)$, allora $f_n g_n \to fg$ in $L^1(0,1)$.

(ii) Sia $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Stabilire se le seguenti successioni convergono in $L^2(\mathbb{R})$:

(a) $f_n(x) := \arctan(n|x|)\varphi(x)$;

(b) $g_n(x) := \sqrt{n}\varphi(nx)$.

Soluzione

(i)

(a) Si ha

$$\|f_n g_n - fg\|_1 = \|f_n g_n - f g_n + f g_n - fg\|_1 \le \|f_n g_n - f g_n\|_1 + \|f g_n - fg\|_1 \le \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 \to 0\,,$$

dove si è usato la disuguaglianza di Hölder e il fatto che una successione convergente è limitata.

(b) Basta usare la stessa catena di disuguaglianze sopra, piú la seguente:

$$\|g_n - g\|_2 \le \|g_n - g\|_3$$

(che vale poiché siamo sull'insieme $(0,1)$ che ha misura 1).

(ii)

(a) Poiché $\arctan(n|x|) \to \pi/2$ per ogni $x \neq 0$, si ha $f_n \to (\pi/2)\varphi$ quasi ovunque. D'altra parte

$$|f_n - (\pi/2)\varphi|^2 = |(\arctan(n|x|) - \frac{\pi}{2})\varphi|^2 \le C|\varphi|^2 \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Quindi per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha

$$f_n \to \frac{\pi}{2}\varphi \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R})\,.$$

(b) Poiché $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, si ha $g_n(x) = \sqrt{n}\varphi(nx) \to 0$ per ogni x. D'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^2\,dx = n\int_{\mathbb{R}} |\varphi(nx)|^2\,dx = \int_R |\varphi(x)|^2\,dx\,.$$

Pertanto, a meno che la funzione φ non sia identicamente nulla, la successione g_n non può convergere in $L^2(\mathbb{R})$ avendo norma uguale a una costante (diversa da 0) e convergendo puntualmente a 0.

TEORIA. (7 punti, verrà corretta solo se il punteggio ottenuto negli esercizi è ≥ 15)

(a) Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

(b) Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, sia $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita da $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$.
Dimostrare che vale l'uguaglianza $(fT)' = f'T + fT'$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soluzione.

(a) Si veda uno dei testi consigliati.

(b) Per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$\langle (fT)', \varphi \rangle = -\langle fT, \varphi' \rangle = -\langle T, f\varphi' \rangle \,.$$

$$\langle f'T + fT', \varphi \rangle = \langle T, f'\varphi \rangle + \langle T', f\varphi \rangle = \langle T, f'\varphi \rangle - \langle T, (f\varphi)' \rangle = \langle T, f'\varphi - (f\varphi)' \rangle$$

Poiché

$$-f\varphi' = f'\varphi - (f\varphi)' \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

deduciamo che

$$\langle (fT)', \varphi \rangle = \langle f'T + fT', \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ovvero $(fT)' = f'T + fT'$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.