Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione – A.A. 2017/2018
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Analisi Matematica III, Appello d'esame del 13 luglio 2018 – Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME .... **N. MATRICOLA** ....

ESERCIZIO 1. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Sia V lo spazio delle funzioni $C^1([0,1])$. Stabilire quali delle seguenti sono norme su V, e quali tra di esse sono fra loro equivalenti:

(a) $N_1(f) = \Big(\int_0^1 |f|^2\, dx \Big)^{1/2} + \Big(\int_0^1 |f'|^2\, dx \Big)^{1/2}$

(b) $N_2(f) = |f(0)| + \Big(\int_0^1 |f'|^2\, dx \Big)^{1/2}$

(c) $N_3(f) = \Big(\int_0^1 |f'|^2\, dx \Big)^{1/2}$

Soluzione. N_3 non è una norma. N_1 e N_2 sono norme fra loro equivalenti.

ESERCIZIO 2. (8 punti) (indicare solo le risposte senza il procedimento seguito)
Si consideri il problema di Dirichlet sul disco $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < R\}$, dove g è una funzione assegnata continua su ∂B_R:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R \\ u = g & \text{su } \partial B_R\,. \end{cases}$$

(a) Scrivere la formula generale per la soluzione del problema scritta come serie di Fourier.

(b) Utilizzare tale formula per scrivere la soluzione nel caso particolare in cui $g(\theta) = \cos(3\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soluzione.

(a) La formula generale per la soluzione è data, per ogni $\rho \in [0, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, da

$$u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}_k \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{|k|} e^{ik\theta}$$

dove $\widehat{g}_k$ sono i coefficienti di Fourier della funzione $\theta \mapsto g(R, \theta)$.

(b) Nel caso particolare in cui $g(\theta) = \cos(3\theta)$, si ha

$$g(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta})\,,$$

e quindi $\widehat{g}_k = 0$ per ogni $k \neq \pm 3$, mentre $\widehat{g}_3 = \widehat{g}_{-3} = \frac{1}{2}$. Dunque:

$$u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^3 \Big(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}\Big) = \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^3 \cos(3\theta)\,.$$

ESERCIZIO 3. (8 punti) (indicare non solo le risposte ma anche il procedimento seguito)
Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } |x| \le 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1\,. \end{cases}$$

(a) Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni.

(b) Calcolare la trasformata di Fourier di f'', e dedurne la trasformata di Fourier di f.

(c) Stabilire se si può applicare la formula di inversione in L^1 per ricavare f a partire da $\hat{f}$.

(d) Sfruttando il punto precedente, mostrare che si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^3} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi = -\frac{3\pi}{8}\,.$$

Soluzione.

(a) Si ha

$$f'(x) = -2x\chi_{[-1,1]}(x)\,, \qquad f''(x) = -2\chi_{[-1,1]}(x) + 2\delta(x-1) + 2\delta(x+1)\,.$$

(b) Si ha

$$\mathcal{F}(f'') = -4\frac{\sin \xi}{\xi} + 2e^{i\xi} + 2e^{-i\xi} = -4\frac{\sin \xi}{\xi} + 4\cos \xi$$

da cui

$$\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{\xi^2}\mathcal{F}(f'') = 4\frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^3}\,.$$

(c) Vale la formula di inversione, dato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(d) Per il punto precedente si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} 4\frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^2} e^{i\xi x}\, d\xi\,.$$

Applicando tale formula in $x = 1/2$, si ottiene

$$f\big(1/2\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} 4\frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^3} e^{i\xi/2}\, d\xi\,.$$

D'altra parte, dalla definizione di f si vede immediatamente che $f(1/2) = 3/4$; inoltre, poiché $\mathcal{F}$ è dispari, si ha $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\sin(2\xi) = 0$. Pertanto la precedente uguaglianza diventa

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} 4\frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^3} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi\,,$$

da cui semplificando si ottiene l'identità richiesta.

TEORIA. (7 punti)

(a) Scrivere la formulazione variazionale del seguente problema di Neumann su un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con versore normale ν:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 1 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

e determinare quale è il problema di minimo risolto da u sullo spazio $H^1(\Omega)$.

(b) Fornire un esempio di una forma bilineare non coerciva sullo spazio $H^1(\Omega)$ (Ω come sopra).

Soluzione. Si veda uno dei testi consigliati.