Politecnico di Milano - Facoltà di Ingegneria dei Sistemi- A. A. 2005/2006
Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
Preappello - Analisi Matematica D (4 febbraio 2006) - Prof. I. FRAGALÀ

COGNOME E NOME: ________________________ **N. MATRICOLA**: ___________________

N.B. Tempo a disposizione: 2h. Non è consentito l'uso di testi o di appunti.

Esercizio 1.
1) Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $\cos z = 1$.
2) Determinare il dominio di olomorfia della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z(\sin z)^2}{(1-\cos z)^2} \ .$$

3) Classificare le singolarità isolate di f.
4) Calcolare $\int_\gamma f(z)\,dz$, dove γ è il cerchio unitario di centro 0 percorso 2 volte in senso orario.

1) Se $z = x + iy$, si ha $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$. Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 1 \\ \sin x \sinh y = 0 \ . \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda equazione sono $y = 0$ e $x = k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
Nel caso $y = 0$, sostituendo nella prima equazione si trova $\cos x = 1$, quindi $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Nel caso $x = k\pi$, sostituendo nella prima equazione si trova $\cosh y = (-1)^k$, che ha soluzione $y = 0$ per k pari, e nessuna soluzione per k dispari.
In conclusione le soluzioni sono i numeri complessi $z = 2k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

2) Per quanto stabilito in 1), il dominio di olomorfia è $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3) Caso $k = 0$. Il punto $z_0 = 0$ è un polo di ordine 1, poiché per $z \to 0$ si ha

$$f \sim \frac{z \cdot z^2}{z^4} \ .$$

Caso $k \neq 0$. Il punto $z_k = 2k\pi$ con $k \neq 0$ è un polo di ordine 2. Infatti, posto $z = w + 2k\pi$, si ha

$$f(z) = g(w) := \frac{(w + 2k\pi)(\sin(w + 2k\pi))^2}{(1 - \cos(w + 2k\pi))^2} \ .$$

Quindi, per $z \to 2k\pi$, ovvero $w \to 0$, si ha

$$g \sim 2k\pi \frac{w^2}{w^4} \ .$$

4) L'unica singolarità rispetto a cui γ ha indice non nullo è il punto $z_0 = 0$, per il quale si ha $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = -2$.
Inoltre come stabilito sopra si tratta di un polo semplice, quindi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 \sin^2 z}{(1-\cos z)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{(z^2/2)^2} = 4 \ .$$

Pertanto applicando il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f = (2\pi i) \cdot (-2) \cdot (4) = -16\pi i \ .$$

Esercizio 2.
Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{n}}{1+(nx)^2} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

1) Calcolare $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2) Stabilire se $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.
3) Stabilire se $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$.

1) Il limite puntuale di $f_n(x)$ è 0 per $x \neq 0$ e $+\infty$ per $x = 0$.

2) La successione f_n tende a 0 in L^1 poiché con la sostituzione $nx = y$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\, dy \to 0 \ .$$

3) La successione f_n *non* tende a 0 in L^2 poiché con la sostituzione $nx = y$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_n^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y^2)^2}\, dy \not\to 0 \ .$$

Esercizio 3. A. Risolvere mediante trasformata di Laplace il problema:

$$\begin{cases} u''(t) = -2\cos(t)H(t-\pi) - u(t) \ , & t > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

B.* Si consideri la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ come operatore lineare da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$; mostrare che è continuo e calcolarne la norma. Si consideri poi la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ come operatore lineare da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$; mostrare che è continuo e calcolarne la norma.

A. Cerchiamo soluzioni u tali che $u, u' \in AC(\mathbb{R}^+)$, e u'' sia Laplace-trasformabile (il che implica che anche u, u' lo sono).
Poiché $\cos t = -\cos(t-\pi)$, posto $U = \mathcal{L}u$, e tenuto conto delle condizioni iniziali, l'equazione si trasforma in

$$s^2 U = 2\frac{s}{1+s^2}e^{-\pi s} - U \ .$$

Quindi

$$U(s) = \frac{2s}{(1+s^2)^2}e^{-\pi s} \ .$$

Applicando le regole algebriche di trasformazione, si ha

$$\frac{2s}{(1+s^2)^2} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{1+s^2} = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}(H(t)\sin t)] = \mathcal{L}(tH(t)\sin t) \ ,$$

e quindi la funzione u è data da

$$u(t) = (t-\pi)H(t-\pi)\sin(t-\pi) \ ,$$

che soddisfa le condizioni richieste all'inizio.

B.* Nel caso $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ si ha come dimostrato a lezione

$$\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1 \ ,$$

il che implica $\mathcal{F}$ continuo con $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.
D'altra parte

$$\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u \ ,$$

quindi presa una qualunque u positiva in L^1 si ha anche

$$\|\hat{u}\|_\infty \geq \hat{u}(0) = \|u\|_1 \ .$$

Dunque $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Nel caso $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$, per l'identità di Plancherel si ha

$$\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|u\|_2 \ .$$

Questo mostra che $\mathcal{F}$ è continuo con norma $\sqrt{2\pi}$.