

# Integrali multipli



# Integrali doppi su rettangoli

La nota definizione di integrale come limite di somme di Riemann ha una naturale estensione alle funzioni di due variabili definite su rettangoli.

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *limitata*. Dividiamo  $[a, b]$  in  $n$  intervalli di ampiezza  $(b - a)/n$  mediante i punti:

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Allo stesso modo, consideriamo una partizione di  $[c, d]$  in  $n$  intervalli di ampiezza  $(d - c)/n$  definita dai punti:

$$y_j = c + j \frac{d - c}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Di conseguenza, il rettangolo  $R := [a, b] \times [c, d]$  viene suddiviso in  $n^2$  rettangoli

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

ciascuno di *area*  $|R_{ij}| = (b - a)(d - c)/n^2$ .

Scegliamo a piacere dei punti  $\mathbf{r}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$  e definiamo la *somma di Riemann*:

$$S_n = \sum_{i,j=1}^n |R_{ij}| f(\mathbf{r}_{ij}) = \frac{(b - a)(d - c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n f(\mathbf{r}_{ij}).$$

Se  $f \geq 0$ , ogni termine della somma di Riemann è il volume di un parallelepipedo di base  $R_{ij}$  e altezza  $f(\mathbf{r}_{ij})$ .

In questo caso, la somma stessa rappresenta il volume di una regione dello spazio che 'approssima' la regione compresa tra la superficie cartesiana  $z = f(x, y)$  e il rettangolo  $R$  nel piano  $z = 0$ .

Se  $f$  è limitata di segno qualsiasi, la somma  $S_n$  è comunque ben definita per ogni intero positivo  $n$ .

## Definizione

Si dice che una funzione limitata  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile nel rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$  se esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  e non dipende dalla scelta dei punti  $\mathbf{r}_{ij} \in R_{ij}$  ad ogni passo della costruzione di  $S_n$ .

Tale limite prende il nome di *integrale doppio* di  $f$  in  $R$  e si denota con il simbolo

$$\int \int_R f(x, y) \, dx \, dy := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=1}^n |R_{ij}| f(\mathbf{r}_{ij})$$

## *Osservazione*

Se  $f \geq 0$ , l'integrale si può considerare come una definizione rigorosa della nozione di *volume* della regione

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

nello spazio tridimensionale.

Consideriamo ora tre questioni fondamentali:

- 1 Quali funzioni sono integrabili.
- 2 Come si calcolano gli integrali doppi.
- 3 Come definire (e calcolare) gli integrali doppi in regioni più generali dei rettangoli.

Una risposta (parziale) alla prima domanda è data dal

### Teorema

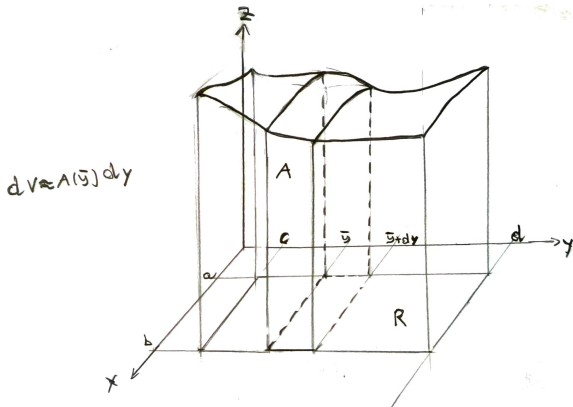
$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora  $f$  è integrabile.

Dunque la continuità di una funzione in un rettangolo (chiuso) è una condizione *sufficiente* per la sua integrabilità.

Vedremo in seguito che la classe delle funzioni integrabili è più ampia.

Per quanto riguarda il calcolo degli integrali doppi nei rettangoli, esistono *formule di riduzione* di tali integrali a due *integrali iterati* di funzioni di una sola variabile.

La dimostrazione di tali formule si basa sulle seguente idea geometrica:  
il volume sotteso da una superficie cartesiana  $z = f(x, y)$  si può approssimare sezionando la regione con piani verticali a  $y$  costante (o a  $x$  costante)



calcolando poi le aree  $A(y)$  ( $A(x)$ ) delle diverse sezioni e infine sommando i volumi  $A(y) dy$  ( $A(x) dx$ ) delle 'fette' comprese tra due piani vicini.

## Teorema

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Valgono allora le formule (di riduzione)

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx .$$

## Esempio

Calcoliamo l'integrale doppio di  $f(x, y) = 2 - x - y$  nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Applicando la prima formula di riduzione abbiamo:

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (2 - x - y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 (2 - x - y) \, dx \right) dy$$

Nella prima iterazione, si calcola l'integrale rispetto ad  $x$  per ogni *fissato*  $y$ :

$$\int_0^1 (2 - x - y) \, dx = \left[ (2 - y)x - x^2/2 \right]_0^1 = 3/2 - y .$$

Calcolando il secondo integrale:

$$\int_0^1 (3/2 - y) \, dy = \left[ 3y/2 - y^2/2 \right]_0^1 = 3/2 - 1/2 = 1 .$$

## Esercizio

Calcolare lo stesso integrale utilizzando la seconda formula di riduzione. Disegnare la porzione del piano di equazione  $z = 2 - x - y$  che si proietta sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  del piano  $xy$  e verificare geometricamente che il valore dell'integrale è uguale al volume della regione tra il piano e il quadrato.

### Osservazione:

Se  $f(x, y)$  si fattorizza nel prodotto  $g(x)h(y)$ , segue dalle formule di riduzione che anche l'integrale doppio si fattorizza:

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) \, dx \, dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \left( \int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Per esempio:

$$\begin{aligned} \int \int_{[-2,1] \times [0,\pi]} x \sin y \, dx \, dy &= \left( \int_{-2}^1 x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin y \, dy \right) = \\ &= [x^2/2]_{-2}^1 [-\cos y]_0^\pi = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3. \end{aligned}$$



# Integrali doppi in insiemi più generali

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un insieme limitato e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Vogliamo definire l'integrale di  $f$  in  $D$ .

Consideriamo un rettangolo  $R \supset D$  e definiamo la funzione

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Diciamo che  $f$  è integrabile in  $D$  se e solo se  $\tilde{f}(x, y)$  è integrabile in  $R$  e *definiamo*

$$\int \int_D f(x, y) \, dx \, dy := \int \int_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy.$$

Si dimostra che l'integrale a destra non dipende dalla scelta del rettangolo  $R$  che contiene  $D$ .

Osserviamo che in generale la funzione  $\tilde{f}$  è discontinua nei punti di  $\partial D$  (anche se  $f$  è continua in  $D$ ) per cui l'integrabilità dipenderà sia dalla funzione  $f$  che dall'insieme  $D$ .

### Definizione

Un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  limitato si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se la funzione  $f(x, y) = 1, (x, y) \in D$ , è integrabile.

La *misura* (area) di  $D$  è per definizione

$$|D| := \int \int_D 1 \, dx \, dy \quad \left( = \int \int_D dx \, dy \right).$$

La misurabilità di un insieme  $D$ , cioè l'integrabilità in un rettangolo  $R \supset D$  della *funzione indicatrice di  $D$* , dipende dalle proprietà della frontiera  $\partial D$  (l'insieme dei punti di discontinuità di tale funzione).

Vale infatti la seguente caratterizzazione:

## Proposizione

Un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  (limitato) è misurabile se e solo se  $\partial D$  è misurabile e  $|\partial D| = 0$ .  $\square$

Gli insiemi misurabili  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  tali che  $|\Gamma| = 0$  si dicono *insiemi di misura nulla*.

Esempi di insiemi di misura nulla sono:

un punto o un numero finito di punti, un segmento, il grafico di una funzione continua, il sostegno di una curva regolare a tratti (non confondere la misura *bidimensionale* con la lunghezza).

Gli insiemi di misura nulla si caratterizzano come gli insiemi che si possono ricoprire con un numero *finito* di rettangoli di *area complessiva* piccola a piacere.

L'importanza di tali insiemi nella teoria dell'integrazione si evidenzia nel seguente risultato, che generalizza il teorema sull'integrabilità delle funzioni continue di pag. 5:

## Teorema

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$  ha misura nulla, allora  $f$  è integrabile.  $\square$

Le funzioni che sono continue eccetto che nei punti di un insieme di misura nulla si dicono *generalmente continue*.

La funzione indicatrice dei punti con ascissa razionale nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  *non* è integrabile.

Torniamo ora alla definizione di integrale in un insieme limitato  $D$ : dal Teorema e dalla precedente Proposizione si ricava in particolare che se  $D$  è misurabile allora ogni  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  *limitata e continua* è integrabile in  $D$ .

Infatti, prolungando  $f$  a zero all'esterno di  $D$  si ottiene una funzione limitata  $\tilde{f}$ , definita in un rettangolo  $[a, b] \times [c, d] \supset D$ , che è discontinua solo nei punti di  $\partial D$ , che ha misura nulla.

## Domini semplici e formule di riduzione

Una classe di insiemi di particolare rilevanza è quella dei *domini semplici*:

Un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  si dice:

- i) semplice rispetto all'asse  $y$  (o  $y$ -semplice) se esistono  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue tali che

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \} ;$$

- ii) semplice rispetto all'asse  $x$  (o  $x$ -semplice) se esistono  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue tali che

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \} .$$

Dalla definizione segue che gli insiemi semplici sono chiusi, limitati e misurabili.

Una funzione continua in un dominio semplice  $D$  è limitata (per il teorema di Weierstrass) e integrabile.

Lo stesso vale per una funzione limitata e continua in  $\mathring{D}$ .

In questi casi, valgono le seguenti **formule di riduzione in domini semplici**:

$$\int \int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx, \quad (D \text{ semplice rispetto a } y).$$

$$\int \int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy, \quad (D \text{ semplice rispetto a } x).$$

Queste formule si possono ricavare dalle seguenti osservazioni:

- Gli integrali a sinistra sono *per definizione* uguali agli integrali in un rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d] \supset D$  della funzione  $\tilde{f}$  (v. pag. 9) che è generalmente continua.
- Si può dimostrare che le formule di riduzione degli integrali nei rettangoli (v. pag. 7) si estendono al caso di funzioni generalmente continue.
- Applicando tali formule a  $\tilde{f}$  e ricordando che

$$\tilde{f}(x, y) = 0 \quad \text{per} \quad (x, y) \in R \setminus D,$$

le formule della pagina precedente seguono facilmente.

## Esempi

Calcolare

$$\int \int_D (1 - x - y) \, dx dy, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Il dominio è  $y$ -semplice, per cui si applica la formula

$$\begin{aligned} \int \int_D (1 - x - y) \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1 - x - y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( [(1 - x)y - y^2/2]_0^{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 \, dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dare un'interpretazione geometrica al risultato dell'integrale.

Notiamo che  $D$  (il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ ) è anche  $x$ -semplice, per cui si poteva usare anche l'altra formula di riduzione.



Verificare che la funzione  $f(x, y) = e^{x/y}$  è integrabile in

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

e calcolarne l'integrale.

*Soluzione.*

La chiusura di  $D$  è un insieme  $x$ -semplice e  $f$  è continua in  $D$ .

Perchè sia integrabile in  $D$  occorre verificare che sia anche limitata.

Ma per ogni  $(x, y) \in D$  vale  $0 \leq x/y \leq y^2/y = y \leq 1$ , per cui  $1 \leq e^{x/y} \leq e$ .

Applicando la appropriata formula di riduzione:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x/y} &= \int_0^1 \left( \int_0^{y^2} e^{x/y} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 y(e^y - 1) dy = \int_0^1 ye^y - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

# Proprietà degli integrali doppi

Le proprietà dell'operazione di integrazione ne chiariscono il significato e allo stesso tempo sono utili per il calcolo.

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  limitato e siano  $f, g$  funzioni integrabili in  $D$ . Allora:

❶ *Linearità:*

Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f + \beta g$  è integrabile e

$$\int \int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int \int_D f + \beta \int \int_D g.$$

❷ *Monotonia:*

i)  $f \geq g \Rightarrow \int \int_D f \geq \int \int_D g.$

ii)  $|f|$  è integrabile e  $\left| \int \int_D f \right| \leq \int \int_D |f| \leq \sup_D |f| |D|$  (se  $D$  misurabile).

❸ *Teorema della media:*

Se  $D$  è misurabile e  $m = \inf_D f$ ,  $M = \sup_D f$ , allora

$$m \leq \frac{1}{|D|} \int \int_D f \leq M.$$

### Osservazioni:

- La proprietà 1 giustifica il *metodo di scomposizione* nel calcolo degli integrali.
- Usando la proprietà 2 si possono ottenere delle *stime* di un dato integrale senza calcolarne l'esatto valore.

Inoltre, dal punto ii) segue che

$$|D| = 0 \Rightarrow \int \int_D f(x, y) \, dx dy = 0.$$

per ogni  $f$  integrabile in  $D$ .

- Se  $f$  è continua in  $D$  compatto, connesso e misurabile, segue dal punto 3 che esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$  tale che

$$\frac{1}{|D|} \int \int_D f(x, y) \, dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dimostrare che dall'ultima osservazione segue

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{B_r(x_0, y_0)} f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0),$$

per ogni  $f$  continua in un aperto  $D$  e per ogni  $(x_0, y_0) \in D$ .

Consideriamo infine l'importante proprietà di *additività rispetto al dominio di integrazione*:

### Proposizione

Siano  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  misurabili tali che  $D = D_1 \cup D_2$  e  $|D_1 \cap D_2| = 0$ .

Se  $f$  è integrabile in  $D$ , allora è integrabile in  $D_1$  e in  $D_2$  e vale

$$\int \int_D f = \int \int_{D_1} f + \int \int_{D_2} f.$$

La Proposizione si applica al calcolo degli integrali definiti in *domini regolari*, cioè insiemi che sono unione di un numero finito di insiemi semplici.

Questi integrali si scompongono nella somma di un numero finito di integrali in insiemi semplici che si possono calcolare con le formule di riduzione.

## Esercizi

- i) Verificare che una corona circolare si può suddividere nell'unione di due insiemi  $y$ -semplici o nell'unione di due insiemi  $x$ -semplici.
- ii) Utilizzando considerazioni geometriche, di simmetria e le proprietà degli integrali, dimostrare che risulta:

$$\int \int_{[-1,1] \times [0,1]} [1 + \sin(x^3 y)] \, dx dy = 2;$$

$$\int \int_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \frac{2}{3} \pi.$$

# Cambiamento delle variabili di integrazione

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  limitato e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile.

Vogliamo calcolare  $\int \int_D f(x, y) \, dx dy$  mediante una *sostituzione di variabili*  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ .

## Teorema

Assumiamo  $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  aperto e limitato e che la trasformazione  $\mathbf{T}$  definita da

$$\mathbf{T}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

sia biunivoca (tra  $\Omega$  e  $\mathbf{T}(\Omega)$ ) e di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Se  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e le loro derivate parziali sono limitate in  $\Omega$  e se  $\det \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(u, v) \neq 0$  per  $(u, v) \in \Omega$ , allora:

- $S \subseteq \Omega$  è misurabile se e solo se  $D := \mathbf{T}(S)$  è misurabile;
- se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e limitata, vale la formula:

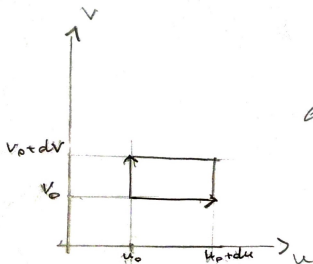
$$\int \int_D f(x, y) \, dx dy = \int \int_S f(x(u, v), y(u, v)) \, |\det \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(u, v)| \, du dv.$$

Si possono indebolire le ipotesi del teorema richiedendo che la biunivocità di  $\mathbf{T}$  e  $\det \mathbf{J}_{\mathbf{T}} \neq 0$  valgano eccetto al più in un *insieme di misura nulla*.

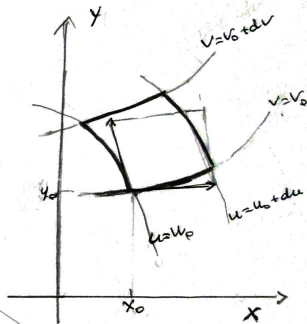
La presenza del valore assoluto del determinante Jacobiano nell'integrale a destra della formula si deve al fatto che, in generale, una trasformazione di variabili *non* conserva le aree:

il rettangolo nel piano  $(u, v)$  compreso tra le rette  $u = u_0$ ,  $u = u_0 + du$  e  $v = v_0$ ,  $v = v_0 + dv$ , viene mappato da  $\mathbf{T}$  in una regione del piano  $(x, y)$  che è approssimata dal parallelogramma di lati

$$\partial_u \mathbf{T}(u_0, v_0) du = \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) \end{pmatrix} du; \quad \partial_v \mathbf{T}(u_0, v_0) dv = \begin{pmatrix} x_v(u_0, v_0) \\ y_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} dv.$$



$T$



L'area di questo parallelogramma è proprio uguale a

$$|\partial_u \mathbf{T}(u_0, v_0) du \wedge \partial_v \mathbf{T}(u_0, v_0) dv| = |\det J_{\mathbf{T}}(u_0, v_0)| du dv.$$

Il valore assoluto del determinante Jacobiano è quindi il rapporto tra gli 'elementi di area' nel piano  $(x, y)$  e nel piano  $(u, v)$ , che si corrispondono nella trasformazione (*fattore di riscaldamento delle aree*).



### Esempio

Un cerchio  $D$  di raggio  $R$  e centro nell'origine è l'immagine (nel piano  $(x, y)$ ) del rettangolo  $\{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  nel piano  $(\rho, \theta)$  delle coordinate polari.

Usando questa trasformazione, calcoliamo l'area  $|D| = \iint_D dx dy$  applicando il teorema con  $f = 1$  e  $\det J_T = \rho$ :

$$\iint_D dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \rho d\theta d\rho = 2\pi \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2.$$

Vediamo che si ottiene il valore corretto dell'area proprio grazie al fattore di riscaldamento  $\rho$ .

### Esercizio

Calcolare  $\iint_D y^2 dx dy$ , dove  $D$  è la regione piana del primo quadrante delimitata dalle iperboli  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  e dalle rette  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

(Considerare il cambio di variabili definito dalle equazioni:  $xy = u$ ,  $y/x = v$ ).

## Applicazione al calcolo di un baricentro

Una lamina piana  $D$  di densità superficiale costante  $\delta$  occupa il settore circolare  $0 \leq \rho \leq R$ ,  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ . Calcolare le coordinate del baricentro.

La massa totale della lamina è  $M = \delta \alpha R^2$ . Dette  $(x_b, y_b)$  le coordinate del baricentro, avremo  $y_b = 0$  per ragioni di simmetria; rimane da calcolare

$$x_b = \frac{1}{M} \int \int_D \delta x \, dx dy = \frac{1}{\delta \alpha R^2} \int \int_D \delta x \, dx dy = \frac{1}{\alpha R^2} \int \int_D x \, dx dy.$$

Usando le coordinate polari abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_D x \, dx dy &= \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \cos \theta \, \rho \, d\theta d\rho = \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \left( \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \, d\theta \right) = \\ &= \left( \frac{1}{3} R^3 \right) (2 \sin \alpha) = \frac{2}{3} \sin \alpha R^3. \end{aligned}$$

Infine:

$$x_b = \frac{1}{\alpha R^2} \frac{2}{3} \sin \alpha R^3 = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} R.$$

# Integrali di volume

La definizione degli integrali multipli nel caso  $n > 2$  segue lo stesso percorso compiuto per gli integrali doppi.

In particolare, gli integrali *tripli* o integrali *di volume* si definiscono inizialmente per funzioni limitate  $f(x, y, z)$  sui parallelepipedi

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

come limiti opportuni di somme di Riemann.

Successivamente, l'integrale di una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  limitato, si definisce racchiudendo  $\Omega$  in un parallelepipedo  $Q$  e prolungando  $f$  a zero in  $Q \setminus \Omega$ . Per gli integrali tripli si usano le notazioni

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz, \quad \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dV, \quad \int \int \int_{\Omega} f.$$

Un insieme  $\Omega$  è misurabile se la funzione indicatrice di  $\Omega$  è integrabile.  
La misura o volume di  $\Omega$  è per definizione

$$|\Omega| := \int \int \int_{\Omega} dx dy dz .$$

Vale ancora la Proposizione:

$\Omega$  è misurabile se e solo se  $\partial\Omega$  è misurabile e  $|\partial\Omega| = 0$ .

Occorre solo fare attenzione che in  $\mathbb{R}^3$  hanno misura nulla anche porzioni limitate di un piano o di una superficie regolare, nonché i grafici di funzioni continue di 2 variabili.

Continua a valere l'integrabilità delle funzioni limitate e continue su insiemi misurabili.

## Osservazione

### L'integrale triplo

$$\int \int \int_{\Omega} f$$

di una funzione *positiva* si potrebbe interpretare come 'ipervolume' di una regione dello spazio quadridimensionale delimitata, nella direzione dell'asse  $w$ , dalla 'base'  $\Omega$  e dalla ipersuperficie di equazione  $w = f(x, y, z)$ .

Questa interpretazione geometrica non è particolarmente utile, mentre ne esistono di più interessanti in Fisica.

Ad esempio, se  $f(x, y, z)$  rappresenta la densità di massa (o di carica) nel punto  $(x, y, z)$  di un corpo esteso che occupa il dominio  $\Omega$  dello spazio, allora l'integrale triplo rappresenta la massa totale (o la carica totale) del corpo.

Analogamente, con gli integrali di volume si possono calcolare *baricentri* e *momenti di inerzia* di solidi tridimensionali.

## Formule di riduzione

Per gli integrali di volume esistono due tipologie di formule di riduzione.

### **Integrazione per fili**

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  definito da

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \right\},$$

dove  $D$  è un dominio regolare (unione finita di insiemi semplici) *del piano* e  $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue.

Per ogni funzione continua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vale la formula

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_D \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

Il dominio  $\Omega$  si dice *z-semplICE*. In modo simile, si definiscono in  $\mathbb{R}^3$  gli insiemi *x-semplICI*, *y-semplICI* e si ricavano le corrispondenti formula di riduzione.

## Esempio

Calcolo del baricentro di una semisfera omogenea (densità = 1) di centro nell'origine, raggio  $R$ , contenuta nel semispazio  $z \geq 0$ .

In questo caso abbiamo:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\},$$

con  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

Dette  $(x_b, y_b, z_b)$  le coordinate del baricentro, avremo  $x_b = y_b = 0$  per ragioni di simmetria.

Rimane da calcolare

$$z_b = \frac{1}{|\Omega|} \int \int \int_{\Omega} z \, dx dy dz = \frac{3}{2\pi R^3} \int \int \int_{\Omega} z \, dx dy dz.$$

Applichiamo la formula di integrazione per fili:

$$\begin{aligned}\int \int \int_{\Omega} z \, dx dy dz &= \int \int_D \left( \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z \, dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_D (R^2 - x^2 - y^2) \, dx dy .\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int \int_D (R^2 - x^2 - y^2) \, dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho d\theta = \\ &= \pi \left[ R^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4 .\end{aligned}$$

Abbiamo infine:

$$z_b = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R .$$



## Integrazione per strati

Supponiamo che  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sia della forma

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in \Omega_z \right\},$$

dove, per ogni  $z \in [h_1, h_2]$ , l'insieme  $\Omega_z$  è un dominio regolare *del piano*.

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, vale la formula:

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \int \int_{\Omega_z} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

Si osservi che, per un fissato  $\bar{z} \in [h_1, h_2]$ , l'insieme del piano  $(x, y)$  in cui si calcola l'integrale doppio è uguale all'intersezione di  $\Omega$  con il piano orizzontale  $z = \bar{z}$ .

## Esempio

Consideriamo un cono circolare di altezza  $H$ , raggio  $R$ , vertice nell'origine e asse lungo l'asse  $z$  positivo:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq H, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{R}{H} z \right\}.$$

Si verifica facilmente che lo 'strato'  $\Omega_z$  (con  $z \in [0, H]$ ) è un cerchio centrato nell'origine e di raggio  $\frac{R}{H} z$ .

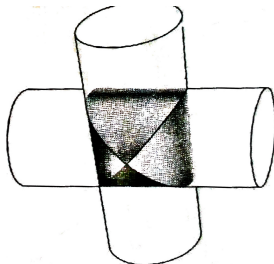
Se il cono rappresenta un solido omogeneo (di densità = 1), il suo *momento d'inerzia* rispetto all'asse  $z$  è dato dall'integrale

$$\begin{aligned} I &= \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^H \left( \int \int_{\Omega_z} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz = \\ &= \int_0^H \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H} z} \rho^3 d\theta d\rho \right) dz = 2\pi \int_0^H \left( \int_0^{\frac{R}{H} z} \rho^3 d\rho \right) dz = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{H^4} \int_0^H z^4 dz = \frac{\pi}{10} R^4 H. \end{aligned}$$

Poichè la massa totale del solido è uguale al volume,  $M = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ , abbiamo la relazione:  $I = \frac{3}{10} M R^2$ .

Vediamo infine un'applicazione geometrica dell'integrazione per strati:  
Calcolare il volume del solido  $\Omega$  formato dall'intersezione dei due cilindri

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \cap \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$



Sezioniamo il solido con un piano di equazione  $y = \bar{y}$ , dove  $-R \leq \bar{y} \leq R$ .

Si ottiene, nel piano  $y = \bar{y}$ , il *quadrato*

$$-\sqrt{R^2 - \bar{y}^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - \bar{y}^2}, \quad -\sqrt{R^2 - \bar{y}^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - \bar{y}^2}$$

di lato  $= 2\sqrt{R^2 - \bar{y}^2}$ .

Denotando con  $\Omega_y$  gli stessi quadrati nel piano  $(x, z)$  abbiamo:

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \int_{-R}^R \left( \int \int_{\Omega_y} dx dz \right) dy = \\ &= \int_{-R}^R |\Omega_y| dy = \int_{-R}^R 4(R^2 - y^2) dy = \frac{16}{3} R^3. \end{aligned}$$

## Cambiamento di variabili negli integrali tripli

Il teorema sul cambiamento di variabili si estende direttamente agli integrali di volume.

Denotando con

$$\mathbf{T}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

la trasformazione, con  $S \subset \mathbb{R}^3$  un insieme misurabile e con  $\Omega := \mathbf{T}(S)$ , vale la formula:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \int \int \int_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \, |\det \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(u, v, w)| \, du dv dw \end{aligned}$$

per ogni  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata.

Ancora si può assumere che la biunivocità di  $\mathbf{T}$  e la condizione  $\det \mathbf{J}_{\mathbf{T}} \neq 0$  valgano eccetto in un insieme di misura (tridimensionale) nulla.

Esempi di trasformazioni sovente utilizzate nel calcolo degli integrali di volume sono le coordinate cilindriche

$$(\rho, \theta, z),$$

e le coordinate sferiche

$$(r, \phi, \theta).$$

Inserendo nella formula del cambiamento di variabili l'espressione del determinante Jacobiano per queste trasformazioni, vediamo che l'elemento di volume (in coordinate cartesiane)  $dV = dx dy dz$  assume la forma:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \quad (\text{coordinate cilindriche})$$

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \quad (\text{coordinate sferiche}).$$

## Esempio

Usiamo le coordinate sferiche per calcolare l'integrale

$$\int \int \int_{B_R} (x^2 + y^2) dx dy dz ,$$

dove  $B_R$  è la palla di raggio  $R$  centrata nell'origine.

Ponendo  $x = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \phi$  e applicando la formula si ottiene l'integrale

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \phi) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta = \\ & = 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi = 2\pi \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \pi R^5 . \end{aligned}$$

( $= \frac{2}{5} MR^2$  se è una palla omogenea di densità volumetrica  $\rho = 1$ ).

## Esercizio

Calcolare il volume dell'ellissoide solido

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad (a, b, c > 0)$$

mediante il cambiamento di variabili:  $x = au$ ,  $y = bv$ ,  $z = cw$ .