SERGENTI FILIPPO 10743161

$a \in \mathbb{R}$ $|x|$ PICCOLO

$$f_a(x) = e^{2x^4-3x^6} + \mathrm{LOG}(1-x^2+ax^4) - 1 + x^2 - \left(\frac{3}{2}+a\right)x^4 + \frac{x^6}{2}$$

(2) SVILUPPA TAYLOR ORDINE 8 IN ORIGINE , $f_a^{k}(0)$

$$\bullet\ e^{2x^4-3x^6} = 1 + (2x^4-3x^6) + \frac{1}{2}(2x^4-3x^6)^2 + o(x^8)$$
$$= 1 + 2x^4 - 3x^6 + \frac{1}{2}(4x^8) + o(x^8)$$
$$= \boxed{1 + 2x^4 - 3x^6 + 2x^8 + o(x^8)}$$

$$\bullet\ \mathrm{LOG}(1-x^2+ax^4) = (-x^2+ax^4) - \frac{1}{2}(-x^2+ax^4)^2 + \frac{1}{3}(-x^2+ax^4)^3 - \frac{1}{4}(-x^2+ax^4)^4$$

$$= -x^2+ax^4 - \frac{1}{2}(+x^4+a^2x^8-2ax^6) + \frac{1}{3}(-x^6+3ax^8) - \frac{1}{4}(+x^8) =$$
$$= -x^2 + ax^4 - \frac{x^4}{2} - \frac{a^2x^8}{2} + ax^6 - \frac{x^6}{3} + ax^8 - \frac{x^8}{4} =$$
$$= \boxed{-x^2 + \left(\frac{2a-1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{3a-1}{3}\right)x^6 + \left(\frac{-2a^2+4a-1}{4}\right)x^8 + o(x^8)}$$

$$f_a(x) = \cancel{1} + 2x^4 - 3x^6 + 2x^8 \cancel{-x^2} + \left(\frac{2a-1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{3a-1}{3}\right)x^6 + \left(\frac{-2a^2+4a-1}{4}\right)x^8 + \cancel{+x^2} \cancel{-1} - \left(\frac{3}{2}+a\right)x^4 + \frac{x^6}{3}$$

$$\left(2 + \frac{2a-1}{2} - \frac{3}{2} - a\right)x^4 + \left(-3 + \frac{3a-1}{3} + \frac{1}{3}\right)x^6$$
$$+ \left(2 + \frac{-2a^2+4a-1}{4}\right)x^8$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\mathrm{LOG}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$\delta^{1}_{2}(0) = 0$

$\delta^{2}_{2}(0) = 0$

$\delta^{3}_{2}(0) = 0$

$\delta^{4}_{2}(0) = 2 + \frac{2a-1}{2} - \frac{3}{2}a - a = \frac{4+\cancel{2a}-1-3a-\cancel{2a}}{2} = \frac{3-3a}{2}$

$\delta^{5}_{2}(0) = 0$

$\delta^{6}_{2}(0) = -3 + \frac{3a-1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-9+3a-\cancel{1}+\cancel{1}}{3} = \frac{-9+3a}{3} = -3+a$

$\delta^{7}_{2}(0) = 0$

$\delta^{8}_{2}(0) = 2 + \frac{-2a^{4}+4a-1}{4} = \frac{-2a^{4}+4a-1+8}{4} = \frac{-2a^{4}+4a+7}{4}$

(c)

$b>0$ PICCOLO TALE CHE f_a $[0,b]$

$\forall a \in \mathbb{R} \int_0^b \frac{(\sin x)^7}{f_a(x)}dx$ $\exists$ FINITO ?

PER STUDIARE L'ESISTENZA DELL' INTEGRALE GENERALIZZATO SI STUDIANO I PUNTI DI DISCONTINUITÀ (SINGOLARITÀ) DELLA SUA DERIVATA $\left(\frac{\sin^7 x}{f_a(x)}\right)$

IN QUESTO CASO $\boxed{f_a(x) \neq 0}$ (DA STUDIARE)

INOLTRE IL SEGNO NON È COSTANTE POICHÉ

$-1 \leq \sin^7 x \leq +1$

$\lim_{M \to 0} f_a(M) = e^{0} + \log(1) - 1 \approx \log(x+1) = -\infty$

NON IMPORTA

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^7 x}{f_a(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^7}{\log(x+1)} \overset{\text{HOPITAL}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{7x^6}{\frac{1}{x+1}}$

$\lim_{x \to 0} 7x^6(x+1) = 0$ CONVERGENTE

INTEGRALE IMPROPRIO NON DIPENDE DA a ERGO

$\forall a \in \mathbb{R} \int_0^b \frac{\sin^7 x}{f_a(x)}$ $\exists$ ED È FINITO